

С 343e

Г-751

23/11-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 2328



Я. Грабовский , Б.Н. Калинин

О МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ
ДЛЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ
ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

II

*Acta Phys. Polon., 1966,
v 29, n 3, p 297-302.*

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P - 2328

3565/3 49

Я. Грабовский^{х/}, Б.Н. Калинкин

О МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ
ДЛЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ
ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

II

Направлено в "Acta Physica Polonica"

^{х/} Институт ядерной физики, Краков, Польша.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

В первой части работы^{1/} было показано, что, используя квазиклассическое приближение, можно сравнительно просто и наглядно учитывать наличие искажающих факторов в матричных элементах. Аналитический вид полученных результатов позволяет несравненно проще оценивать сечение неупругого рассеяния. Кроме того, в том случае, когда для простоты желательно пренебречь влиянием искажений, вносимых ядерными силами, нетрудно оценить величину допускаемой при этом ошибки.

Исследование матричных элементов проводилось нами в приближении, когда потери энергии не учитываются. Для большей части ядерных переходов, интенсивно изучаемых в настоящее время, это приближение является достаточно хорошим.

Однако в дальнейшем может оказаться необходимым отказаться от этого приближения. Желательно поэтому обобщить полученные результаты на этот случай. Выполнить программу с помощью метода, использованного в части I, не просто. Поэтому мы перейдем здесь к иному представлению матричных элементов — орбитальному.

§ 1. Орбитальное представление матричных элементов

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда рассеяние является резерфордским. Для определенности ограничимся диагональным матричным элементом кулоновского возбуждения E2 — перехода.

Из I (см. (24), (26)) следует, что

$$M_{\ell, \ell}^{-3} (\text{кул}) = \frac{1}{2k} \int_{r=\text{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \left(k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right)^{3/2}} \quad (1)$$

Преобразуем интеграл, входящий в формулу (1):

$$\int_{r=\text{min}}^{\infty} dr r^{-3} \left(k^2 - \frac{2k\eta}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \int_{r_{\min}}^{\infty} dr r^{-2} \left[r^2 - \frac{2\eta}{k} r + \frac{\eta^2}{k^2} \left(1 - \frac{\eta^2 + \ell(\ell+1)}{\eta^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{k} \int_{r_{\min}}^{\infty} dr r^{-2} \left[r^2 - 2ar + a^2 (1 - \epsilon^2) \right]^{-\frac{1}{2}} .
\end{aligned} \quad (2)$$

В формуле (2) $a = \eta/k$, $\epsilon = [\eta^2 + \ell(\ell+1)]^{1/2} / \eta$.

Произведем замену переменной

$$w = \operatorname{arch} \left(\frac{r - a}{a\epsilon} \right) ; \quad r = a(\epsilon \operatorname{ch} w + 1) . \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
M_{\ell, \ell}^{-\lambda} (\text{кул}) &= \frac{1}{2k^2 a^2} \int_0^{\infty} \frac{dw}{(\epsilon \operatorname{ch} w + 1)^2} = \\
&= \frac{1}{4\eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\dot{w}}{(\epsilon \operatorname{ch} w + 1)^2} = \frac{1}{4\eta^2} I_{2,0} .
\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $I_{2,0}$ - известный кулоновский орбитальный интеграл для $\mu = 0$, $\xi = 0$. Действительно, соотношения (3) связаны с параметрическим представлением кулоновской орбиты (гиперболы), эксцентриситет которой равен ϵ , а расстояние наибольшего сближения $r_{\min} = 2a$.

Формула (4) является частным случаем более общего соотношения, справедливого для перехода произвольной мультипольности λ :

$$M_{\ell, \ell}^{-(\lambda+1)} (\text{кул}) = \frac{k^{\lambda-2}}{4\eta^\lambda} I_{\lambda,0} . \quad (5)$$

В рамках орбитального представления легко учитывается потеря энергии и отличие от нуля проекции μ передаваемого момента:

$$M_{\ell, \ell+\mu}^{-(\lambda+1)} (\text{кул}) = \frac{k^{\lambda-2}}{4\eta^\lambda} I_{\lambda, \mu} (\text{кул}) , \quad (6)$$

$$I_{\lambda, \mu} (\text{кул}) = 2k \frac{\eta^\lambda}{k^\lambda} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr \cos [i\mu \phi(r) + i\omega t(r)]}{r^\lambda F^{\frac{1}{2}}(kr)} ,$$

где

$$F(kr) = F_1(\rho) = \rho^2 - 2\eta\rho - \ell(\ell+1) ,$$

$$\phi(r) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\ell(\ell+1) + \eta\rho}{\ell [F_1(\rho)]^{1/2}} . \quad (7)$$

$$t(\tau) = \frac{\hbar}{2E} [F_I(\rho)]^{1/2} + \eta \ln \frac{\sqrt{F_I(\rho) + \rho} - \eta}{[\eta^2 + \ell(\ell+1)]^{1/2}},$$

$-(\lambda+1)$ $\omega = \Delta E/\hbar$ - частота перехода. Значения матричных элементов $M_{\ell, \ell+\mu}$ (кул), определенных посредством классических орбитальных интегралов $I_{\lambda, \mu}$ (кул) с очень высокой точностью (доли процента) совпадают с значениями, полученными квантово-механическим путем уже при умеренных величинах η и ℓ ($\approx 3-5$). В нашем случае их точность будет еще большей, поскольку η , ℓ равны нескольким десяткам, и квазиклассическое приближение становится еще лучше.

Формулы (6) и (7) указывают, каким образом можно ввести орбитальное представление для матричных элементов ядерного механизма. В этом случае роль искажений должна быть существенной, поскольку ядерный механизм возбуждения реализуется эффективно при малых прицельных параметрах, соответствующих касательному столкновению.

При ядерном механизме возбуждения состояний одночастичного типа весьма полезным является разложение (см. 10 часть ^{1/1}) для потенциала Юкавы. Орбитальное представление для матричных элементов в этом случае можно определить следующим образом: ^{1/3}

$$I_{\lambda, \mu}(\text{яд}) = 2k^2 \int_{r^{\text{min}}}^{\infty} h_{\lambda}^{(1)}(ikr) \frac{\cos[i\mu\phi(kr) + i\omega t(kr)] \tau dr}{[F(k\tau)]^{1/2}}. \quad (8)$$

Здесь функции $F(kr)$, $\phi(kr)$ и $t(kr)$ должны определяться с учетом влияния ядерных сил на относительное движение. В разных случаях они имеют различный вид. Если классическая точка поворота расположена в области $r^{\text{min}} > R_0 + \Delta$, то реализуется резерфордское рассеяние, орбита является кулоновской и для указанных функций имеем выражения (7). Если точка поворота расположена в области действия ядерных сил, т.е. $r^{\text{min}} < R_0 + \Delta$, то эти функции в зависимости от местоположения частицы - на ядерном (а) или на кулоновском (б) участке траектории - описываются формулами

$$F(\rho) = F_{II}(\rho) = \rho\rho^2 - 2q\rho + t^2 - \ell(\ell+1),$$

$$\phi(\rho) = \frac{\ell}{[t^2 + \ell(\ell+1)]^{1/2}} \ln \frac{\rho \{ \rho [\ell(\ell+1) - \ell_1(\ell_1+1)] \}^{1/2}}{q\rho - t^2 + \ell(\ell+1) - [t^2 - \ell(\ell+1)] F_{II}(\rho) \}^{1/2}}, \quad (8a)$$

$$t(\rho) = \frac{\hbar}{2E\rho} \{ [F_{II}(\rho)]^{1/2} + q\rho^{-1/2} \ln \frac{[F_{II}(\rho)]^{1/2} - q + \rho\rho}{\rho [\ell(\ell+1) - \ell_1(\ell_1+1)]^{1/2}} \}$$

$$\text{и } F(\rho) = F_I(\rho),$$

$$\begin{aligned} \phi(\rho) &= \arctg \frac{\ell(\ell+1) + \eta\rho'}{\ell[F_I(\rho')]^{\frac{1}{2}}} - \arctg \frac{\ell(\ell+1) + \eta\rho}{\ell[F_I(\rho)]^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ \frac{\ell}{[\ell^2 - \ell(\ell+1)]^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{\rho'^2 \{ p[\ell(\ell+1) - \ell_1(\ell_1+1)] \}^{\frac{1}{2}}}{\eta\rho' + \ell(\ell+1) - \{[\ell^2 - \ell(\ell+1)] F_I(\rho')\}^{\frac{1}{2}}}, \\ t(\rho) &= \frac{\hbar}{2E} \{ F_I(\rho) - F_I(\rho') \}^{\frac{1}{2}} + \eta \ln \frac{[F_I(\rho)]^{\frac{1}{2}} + \rho - \eta}{[F_I(\rho')^{\frac{1}{2}} + \rho' - \eta]} + \\ &+ \frac{1}{p} [F_I(\rho')]^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{p^{3/2}} \ln \left\{ \frac{[p F_I(\rho')]^{\frac{1}{2}} + \rho' - \eta}{\{ p[\ell(\ell+1) - \ell_1(\ell_1+1)] \}^{\frac{1}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Для иллюстрации влияния искажения орбиты на величину матричного элемента на стр.9 приведена таблица. Расчет выполнен для рассеяния O^{18} на Bi^{209} при энергии 140 Мэв ($\ell_1 = 77$, $\ell_k = 89$) $\lambda = 2$. Мы видим, что $I_{2\mu}$ (яд) весьма сильно возрастает по сравнению со своим значением, полученным в приближении резерфордских орбит. Это обстоятельство легко понять, если учесть форму траекторий, проходящих в зоне действия ядерных сил. На рис. 1 представлены эти траектории. Кривая с индексом $\ell = 77$ изображает вычисленную траекторию с учетом ядерного взаимодействия. Пунктиром обозначена траектория, вычисленная без такого учета.

Так как в первом случае частица проходит значительно больший путь вблизи ядра, а λ - гармоника потенциала $\hbar \lambda^{(1)}(kr)$ - экспоненциально зависит от r , то ясно, что матричный элемент должен резко возрасти.

Становится ясным также и тот факт, почему матричные элементы при кулоновском механизме возбуждения мало изменяются в результате учета искажений. Оператор возмущения кулоновским полем является слабой функцией от r , и искаженный участок является малой частью длины траектории, дающей главный вклад.

Для матричных элементов, соответствующих возбуждению состояний коллективного типа (ротационные и вибрационные переходы) имеем:

$$M_{\ell, \ell+\mu}(\text{яд}) = \frac{1}{k^3} \int_0^{\infty} \int_0^2 \frac{\partial U}{\partial R_0} dr = \frac{1}{2k_{z, \min}} \int dr r \frac{\partial U \cos[i\mu\phi(kr) + i\omega t(kr)]}{[F(kr)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (10)$$

Так как $(\partial U / \partial R_0)$ является производной от оптического потенциала, отличного от нуля только в области $r^{\min} < R_0 + \Delta$, то в качестве функций $F(kr)$, $\phi(kr)$ и $t(kr)$ следует принять выражения (9а).

Матричные элементы кулоновского возбуждения существенно зависят от μ и ω . Это обусловлено длиннодействующим характером кулоновских сил, слабо меняющихся с расстоянием.

В случае ядерного механизма возбуждения ситуация заметно меняется. Чтобы показать это, рассмотрим величину ωt , входящую в определение орбитальных интегралов. Эта величина характеризует степень адиабатичности столкновения ядер. Если $\omega t \rightarrow 0$, столкновение носит характер удара. Если $\omega t \gg 1$, то возбуждение происходит в условиях адиабатичности и величина матричного элемента резко падает.

Поскольку характерный масштаб расстояния, на котором существенно кулоновское взаимодействие, равен $\approx R_0 + \Delta$, то

$$(\omega t)_{\text{кул}} = \frac{\omega(R_0 + \Delta)}{v} \quad \text{при} \quad \Delta E \leq 3 \text{ Мэв}.$$

В случае ядерного механизма это расстояние значительно меньше $\approx \Delta$. Поэтому $(\omega t)_{\text{яд}} \approx \omega \Delta / v$. Отношение этих величин равно приблизительно $(\omega t)_{\text{кул}} / (\omega t)_{\text{яд}} \approx 5$.

Отсюда ясно, что возбуждение с помощью ядерного механизма можно вычислять в приближении ядра, т.е. в выражениях типа (8) и (10) положить $\omega = 0$. При рассмотрении возбуждения уровней с $\Delta E \approx 1$ Мэв ошибка составит не более 3%.

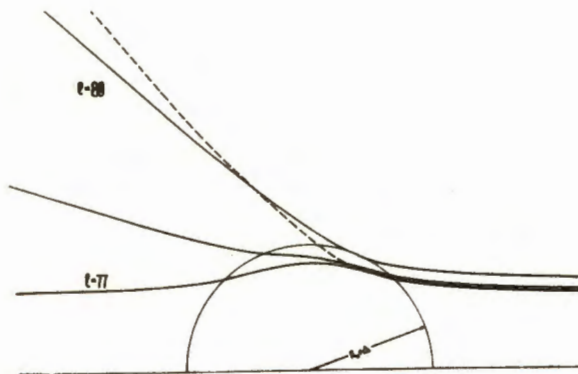
Аналогично можно показать, что в первом приближении μ в формулах (8) и (10) можно не учитывать. Действительно, из рис. 1 видно, что угол $\phi(kr)$ (угол, образованный радиусом-вектором r с осью симметрии траектории) в области действия ядерных сил мал. Исключением является разве что случай с $\ell = \ell_1$. Однако вклад таких орбит в сечение ничтожен, поскольку в этой зоне значений ℓ реализуется практически полное поглощение. Таким образом, поправка, связанная с наличием множителя, $\exp(i\phi)$ мала для большинства траекторий, дающих существенный вклад в сечение. Следовательно, матричный элемент $M_{\ell, \ell + \mu}$ (яд) можно заменить более простым $M_{\ell, \ell}$ (яд). Как это следует из таблицы 1, ошибка, обусловленная такой заменой, составит $\approx 10\%$.

Таким образом, задача о вычислении матричных элементов неупругого рассеяния по волновым функциям относительного движения сталкивающихся ядер может быть сильно упрощена. Большая часть упрощений обусловлена квазиклассическим характером движения, а также малостью поправок на потери энергии. При этом весьма нетрудно провести оценку ошибки, связанной с тем или иным приближением. Тем самым задача о неупругом рассеянии сложных ядер в принципе сводится в выборе наиболее подходящей модели для описания основного и возбужденных состояний ядер.

Л и т е р а т у р а

1. Б.Н.Калинкин, Я.Грабовский. Препринт ОИЯИ, Р- 2331 , Дубна, 1965.
2. К.Альдер, О.Бор, Т.Хус, Б.Моттelson, О.Винтер. Деформации атомных ядер. ИЛ. Москва, 1958.
3. Ф.А.Гареев, Б.Н.Калинкин. Препринт ОИЯИ, Р-2030, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 августа 1965 г.



Таблица

λ, μ	Кулоновские орбиты			Искаженные орбиты		
	2;2	2;0	2;-2	2;2	2,0	2;-2
77	0,4746(-5)	0,5061(-5)	0,4745(-5)	0,8814(-5)	0,1825(-4)	0,2172(-4)
78	0,4223(-5)	0,4503(-5)	0,4223(-5)	0,6976(-5)	0,1054(-4)	0,1175(-4)
79	0,3758(-5)	0,4007(-5)	0,3758(-5)	0,5522(-5)	0,7439(-5)	0,8082(-5)
80	0,3343(-5)	0,3564(-5)	0,3343(-5)	0,4488(-5)	0,5659(-5)	0,6051(-5)
81	0,2974(-5)	0,3170(-5)	0,2973(-5)	0,3725(-5)	0,4488(-5)	0,4743(-5)
82	0,2645(-5)	0,2820(-5)	0,2645(-5)	0,3142(-5)	0,3657(-5)	0,3830(-5)
83	0,2352(-5)	0,2507(-5)	0,2352(-5)	0,2680(-5)	0,3037(-5)	0,3152(-5)
84	0,2091(-5)	0,2229(-5)	0,2091(-5)	0,2305(-5)	0,2559(-4)	0,2646(-5)
85	0,1859(-5)	0,1981(-5)	0,1859(-5)	0,1923(-5)	0,2180(-5)	0,2345(-5)
86	0,1652(-5)	0,1761(-5)	0,1652(-5)	0,1726(-5)	0,1872(-5)	0,1927(-5)
87	0,1469(-5)	0,1565(-5)	0,1469(-5)	0,1490(-5)	0,1690(-5)	0,1666(-5)
88	0,1305(-5)	0,1391(-5)	0,1305(-5)	0,1310(-5)	0,1502(-5)	0,1454(-5)
89	0,1160(-5)	0,1236(-5)	0,1160(-5)	0,1161(-5)	0,1238(-5)	0,1161(-5)

Примечание: обозначение $(-n)$ означает, что данное число надо умножить на 10^{-n} .