22/XI-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2311

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

ОБОБЩЕНИЕ ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА НА НЕСКОЛЬКО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ И КВАНТОВАНИЕ ЭТОЙ СИСТЕМЫ

1965

Р - 2311

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

ОБОБЩЕНИЕ ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА НА НЕСКОЛЬКО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ И КВАНТОВАНИЕ ЭТОЙ СИСТЕМЫ

Введение

В предыдущей работе [1] авторами была решена задача Коши для двухмерной скалярной модели поля Борна-Инфельда [2,3,4]. Там же было показано, что с геометрической точки зрения эта задача может рассматриваться как задача об отыскании двухмерной экстремальной поверхности в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, проходящей через заданную дифференциальную полосу. Эта точка зрения позволяет обобщить задачу, а именно, рассмотреть проблему экстремальной двухмерной поверхности в $n+2$ – мерном псевдоевклидовом пространстве. Оказывается, что такая задача может быть решена тем же способом, что и для трехмерного пространства.

С физической точки зрения эта задача является обобщением нелинейного поля Борна-Инфельда на случай взаимодействующих определенным образом полей.

Далее развивается процедура квантования этой системы. Замечательно, что при этом время t и координата x оказываются квантовыми операторами наряду с волновыми функциями полей. Все квантование в целом сводится к квантованию некой линейной системы полей, подчиненной нелинейным дополнительным условиям, которые подобно условию Лоренца в квантовой электродинамике ограничивают класс допустимых векторов состояния.

§ 1. Решение задачи Коши для нелинейной системы n –полей

Рассмотрим $n+2$ –мерное псевдоевклидово пространство (t, x, z_1, z_2, ..., z_n) с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \sum_{i=1}^{n} dz_i^2 .$$

Пусть в нем задана двухмерная поверхность

$$z_1 = \phi_1(x,t) ; \qquad z_2 = \phi_2(x,t); \ \dots \qquad z_n = \phi_n(x,t) . \tag{1}$$

Площадь этой поверхности определяется интегралом

$$S=-\iint dx\,dt\sqrt{[1+\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,x}][1-\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,t}]+(\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t})^2}=$$

$$=-\iint dx\,dt\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n}(\phi^2_{i,x}-\phi^2_{i,t})-\sum_{i\neq j}(\phi^2_{i,x}\phi^2_{j,t}+2\phi_{i,x}\phi_{i,t}\phi_{j,x}\phi_{j,t})}, \qquad (2)$$

где

$$\phi_{i,x}=\frac{\partial\phi_i(x,t)}{\partial x}; \qquad \phi_{i,t}=\frac{\partial\phi_i(x,t)}{\partial t}.$$

Величину S мы можем интерпретировать как функцию действия системы n полей с плотностью лагранжиана

$$L=-\sqrt{(1+\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,x})(1-\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,t})+(\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t})^2}, \qquad (3)$$

которая при $n=1$ переходит в плотность лагранжиана поля Борна-Инфельда (см.[1] (5)). Уравнения Эйлера, являющиеся условием экстремума интеграла (2), имеют вид:

$$(1-\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,t})\phi_{j,x,x}+2\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t}\phi_{j,x,t}-(1+\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,x})\phi_{j,t,t}=0 \qquad (4)$$

$$(j=1,2,\dots,n).$$

Зададим начальные данные Коши для этой системы в момент времени $t=0$

$$\phi_j(x,t)/_{t=0}=a_j(x); \qquad \phi_{j,t}(x,t)/_{t=0}=b_j(x). \qquad (5)$$

Система уравнений (3) будет гиперболического типа при условии[5]

$$(1+\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,x})(1-\sum_{i=1}^{n}\phi^2_{i,t})+(\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t})^2>0. \qquad (6)$$

Этому же условию должны удовлетворять начальные данные (5).

Так же как в[1] перейдем к параметрическому представлению двухмерной поверхности (1), введя новые параметры:

α,β, тогда $t=t(\alpha,\beta)$, $x=x(\alpha,\beta)$, $z_i=z_i(\alpha,\beta)$.

Площадь (2) этой поверхности теперь запишется так

$$S=-\iint d\alpha\,d\beta\sqrt{(\vec r_\alpha\vec r_\beta)^2-\vec r^{\,2}_\alpha\vec r^{\,2}_\beta}, \qquad (7)$$

где введены векторы

$$\vec r(\alpha,\beta)=\{t(\alpha,\beta),\ x(\alpha,\beta),\ z_1(\alpha,\beta),\dots z_n(\alpha,\beta)\}$$

$$\vec r_\alpha(\alpha,\beta)=\{t_\alpha(\alpha,\beta),\ x_\alpha(\alpha,\beta),\ z_{1,\alpha}(\alpha,\beta),\dots z_{n,\alpha}(\alpha,\beta)\}$$

$$\vec r_\beta(\alpha,\beta)=\{t_\beta(\alpha,\beta),\ x_\beta(\alpha,\beta),\ z_{1,\beta}(\alpha,\beta),\dots,z_{n,\beta}(\alpha,\beta)\}$$

$$z_{i,\alpha}=\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}.$$

Скалярное произведение в псевдоевклидовом пространстве в соответствии с метрической формой определено следующим образом:

$$(\vec r_\alpha\vec r_\beta)=t_\alpha t_\beta-x_\alpha x_\beta-\sum_{i=1}^{n}z_{i,\alpha}z_{i,\beta}.$$

Лагранжиан системы $n+2$ полей $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z_1(\alpha,\beta),\dots z_n(\alpha,\beta)$ равен:

$$L=-\sqrt{(\vec r_\alpha\vec r_\beta)-\vec r^{\,2}_\alpha\vec r^{\,2}_\beta}. \qquad (8)$$

Условие гиперболичности системы имеет вид:

$$(\vec r_\alpha\vec r_\beta)^2-\vec r^{\,2}_\alpha\vec r^{\,2}_\beta>0. \qquad (9)$$

Из (8) следуют уравнения Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial L}{\partial\vec r_\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial L}{\partial\vec r_\beta}=0, \qquad (10)$$

которые можно записать в форме

$$\vec r^{\,2}_\alpha\vec r_{\beta\beta}-2(\vec r_\alpha\vec r_\beta)\vec r_{\alpha,\beta}+\vec r^{\,2}_\beta\vec r_{\alpha,\alpha}-N\vec L_\alpha-M\vec L_\beta=0, \qquad (11)$$

где $$N = \frac{1}{L^2}(\vec D, \vec r_\alpha)\,; \qquad M = \frac{1}{L^2}(\vec D, \vec r_\beta)$$

$$\vec D = \vec r_\alpha^{\,2}\vec r_{\beta\beta} - 2(\vec r_\alpha \vec r_\beta)\vec r_{\alpha,\beta} + \vec r_\beta^{\,2}\vec r_{\alpha\alpha}$$

$$\vec L_\alpha = (\vec r_\alpha \vec r_\beta)\vec r_\beta - \vec r_\beta^{\,2}\vec r_\alpha$$

$$\vec L_\beta = (\vec r_\alpha \vec r_\beta)\vec r_\alpha - \vec r_\alpha^{\,2}\vec r_\beta\,.$$

Система (11) содержит $n+2$ уравнения, из которых только n линейно независимы, это легко установить, проектируя левую часть (11) на векторы $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$. Учитывая равенства

$$(\vec r_\alpha \vec L_\alpha) = (\vec r_\beta \vec L_\beta) = L^2$$

$$(\vec r_\alpha \vec L_\beta) = (\vec r_\beta \vec L_\alpha) = 0,$$

убеждаемся, что эти проекции тождественно равны нулю.

Недоопределенность системы (11) связана (как уже отмечалось в /1/) с произволом в выборе параметров α и β.

Если мы положим $\alpha = t$, $\beta = x$, то получим:

$$\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} z_{i,t}^{2}\Big) z_{j,xx} + 2\sum_{n=1}^{n} z_{i,x} z_{i,t}\, z_{j,xt} - \Big(1 + \sum_{i=1}^{n} z_{i,x}^{2}\Big) z_{j,xx} = 0$$

$$(j = 1,2,\dots n),$$

т.е. первоначальную систему (4).

Выберем параметры α и β, так же как и в /1/, т.е. таким образом, чтобы максимально упростить нашу систему уравнений. Это достигается заданием еще двух уравнений, доопределяющих систему (11)

$$\vec r_\alpha^{\,2}(\alpha,\beta) = 0\,, \qquad \vec r_\beta^{\,2}(\alpha,\beta) = 0\,. \tag{12}$$

С учетом уравнений (12), смысл которых резъяснен в /1/, (11) перепишется в следующей форме:

$$(\vec r_\alpha \vec r_\beta)\vec r_{\alpha,\beta} - (\vec r_{\alpha,\beta}\vec r_\alpha)\vec r_\beta - (\vec r_{\alpha,\beta}, \vec r_\beta)\vec r_\alpha = 0\,. \tag{13}$$

Далее можно еще упростить (13), если принять во внимание, что поскольку равенства (12) выполняется для всех α, β, то

$$(\vec r_{\alpha,\beta}, \vec r_\alpha) = \tfrac12 \frac{\partial}{\partial \beta}\vec r_\alpha^{\,2} = 0$$

$$(\vec r_{\alpha,\beta}, \vec r_\beta) = \tfrac12 \frac{\partial}{\partial \omega}\vec r_\beta^{\,2} = 0\,. \tag{14}$$

Замечая, что $(\vec r_\alpha \vec r_\beta) \neq 0$, окончательно получаем

$$\vec r_{\alpha,\beta} = 0$$

$$\vec r_\alpha^{\,2} = 0 \tag{15}$$

$$\vec r_\beta^{\,2} = 0\,.$$

Система (15) по внешнему виду совпадает с системой уравнений для одного поля, полученной в /1/ (13); разница состоит в том, что теперь векторы $\vec r_\alpha$, $\vec r_\beta$ $-n+2$ –мерные. Общим решением первого уравнения системы (15) является

$$\vec r(\alpha,\beta) = \vec r_1(\alpha) + \vec r_2(\beta)\,. \tag{16}$$

Таким образом, мы имеем $2(n+2)$ неизвестных функций

$$r_{1,i}(\alpha)\,, \qquad r_{2,i}(\beta) \qquad (i = 1,2,\dots n+2),$$

которые должны быть определены из остающихся двух уравнений системы (15) и $2n$ начальных данных Коши (5), которые мы сформулируем в новых переменных α и β. Как было показано в /1/, условие $t = 0$ можно выразить в переменных α и β как условие $\alpha = \beta = x$. Это дает еще два условия для определения $\vec r_1$ и $\vec r_2$. Начальные данные (5) в переменных α, β запишутся так:

$$t(\alpha,\beta)\,/_{\alpha=\beta} = 0$$

$$x(\alpha,\beta)\,/_{\alpha=\beta} = \alpha \tag{17}$$

$$z_i(\alpha,\beta)\,/_{\alpha=\beta} = a_i(\alpha) \qquad (i = 1,2,\dots n)\,.$$

Кроме того, выражая $\frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial t}$ через производные по α, β от t, x, z_i, имеем еще n условий (см./1/стр. 6)

$$b_i(\alpha) = \left. \frac{\begin{vmatrix} z_{i,\alpha} & x_\alpha \\ z_{i,\beta} & x_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_\alpha & x_\alpha \\ t_\beta & x_\beta \end{vmatrix}} \right/_{\alpha=\beta} \qquad (i = 1,2,\dots n). \tag{18}$$

Если искомое решение (16) записать в виде:

$$\vec{r}(\alpha,\beta) = \tfrac{1}{2}(\vec{\rho}(\alpha) + \vec{\rho}(\beta)) + \tfrac{1}{2}\int_\beta^\alpha \vec{\pi}(\lambda)\,d\lambda\,, \tag{19}$$

то вектор $\vec{\rho}$ легко определяется из условий (17)

$$\vec{\rho}(\alpha) = \{0, \alpha, a_1(\alpha), \dots a_n(\alpha)\}. \tag{20}$$

Вектор $\vec{\pi} = \{\pi_t, \pi_x, \pi_i\}$ определяется из условий (18) и последних двух уравнений (15)

$$\pi_t = \frac{1+\sum_{i=1}^n a_i'^2(\alpha)}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2(\alpha))(1-\sum_{i=1}^n b_i^2(\alpha))+(\sum_{i=1}^n a_i'(\alpha)b_i(\alpha))^2}}$$

$$\pi_x = \frac{-\sum_{i=1}^n a_i'(\alpha)\,b_i(\alpha)}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2)(1-\sum_{i=1}^n b_i^2)+(\sum_{i=1}^n a_i' b_i)^2}} \tag{21}$$

$$\pi_j = \frac{b_j(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2) - a_j'\sum_{i=1}^n a_i' b_i}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2)(1-\sum_{i=1}^n b_i^2)+(\sum_{i=1}^n a_i' b_i)^2}}$$

Функции π_t, π_x, π_i, как и в случае одного поля в /1/, имеют интересный физический смысл.

$\pi_i(\alpha)$ – это канонический импульс поля $\phi_i(x,t)$ при $t = 0$. Действительно, как нетрудно проверить

$$\pi_i = \left.\frac{\partial L}{\partial \phi_{i,t}}\right/_{t=0} = \frac{b_i(x)(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2(x)) - a_i'(x)\sum_{i=1}^n a_i'(x)\,b_i(x)}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2(x))(1-\sum_{i=1}^n b_i^2(x))+(\sum_{i=1}^n a_i' b_i)^2}}\,, \tag{22}$$

где $L = -\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2(x))(1-\sum_{i=1}^n b_i^2(x))+(\sum_{i=1}^n a_i' b_i)^2}$

– плотность лагранжиана (3) при $t = 0$.

$\pi_x(\alpha)$ – это плотность импульса системы полей с лагранжианом (3) при $t = 0$.

$$\pi_x(\alpha) = G(x,0) = -\sum_{i=1}^n \pi_i(x)\,a_i'(x) = \tag{23}$$
$$= \frac{-\sum_{i=1}^n a_i' b_i}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2)(1-\sum_{i=1}^n b_i^2)+(\sum_{i=1}^n a_i' b_i)^2}}.$$

Наконец, $\pi_t(\alpha)$ – это плотность гамильтониана нашей системы.

$$\pi_t(\alpha) = H(x,0) = \sum_{i=1}^n \pi_i\,\phi_{i,t} - L =$$
$$= \frac{1+\sum_{i=1}^n a_i'^2}{\sqrt{(1+\sum_{i=1}^n a_i'^2)(1-\sum_{i=1}^n b_i^2)+(\sum_{i=1}^n a_i' b_i)^2}} = \tag{24}$$
$$= \sqrt{1+\sum_{i=1}^n (a_i'^2+\pi_i^2)+(\sum_{i=1}^n a_i'\pi_i)^2}\,,$$

Следовательно, решение задачи Коши для системы уравнений (4) можно представить с учетом (19), (20), (22), (23), (24) следующим образом:

$$t(\alpha,\beta)=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}[H(\lambda)-1]\,d\lambda$$

$$x(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}G(\lambda)\,d\lambda \qquad (25)$$

$$z_i(\alpha,\beta)=\frac{a_i(\alpha)+a_i(\beta)}{2}+\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\pi_i(\lambda)\,d\lambda$$

$$(i=1,2,\ldots n).$$

Интересно отметить, что уравнение (4) имеет два частных решения:

$\phi_i(x,t)=u_i(x+t)$, и $\phi_i(x,t)=v_i(x-t)$, где u_i и V_i – произвольные функции. Эти решения описывают бегущие в одном направлении волны произвольной формы. Они получаются из общего решения (25), если положить $b_i(x)=a'_i(x)=u_i(x)$ или $b_i(x)=-a'_i(x)=-v'_i(x)$. В первом случае наше решение (25) имеет вид:

$$t(\alpha,\beta)=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}u'^2_i(\lambda)\,d\lambda$$

$$x(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}u'^2_i(\lambda)\,d\lambda \qquad (26)$$

$$z_i(\alpha,\beta)=\frac{u_i(\alpha)+u_i(\beta)}{2}+\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}u'_i(\lambda)\,d\lambda=u_i(\alpha).$$

Из первых двух равенств (26) имеем $t(\alpha,\beta)+x(\alpha,\beta)=\alpha$, поэтому окончательно $z_i(x,t)=u_i(x+t)$. Второй случай аналогичен.

§ 2. Квантование нелинейной системы уравнений (4)

Обычная процедура квантования по существу опирается на предположение о линейности свободных полей и рассматривает взаимодействие этих полей как возмущение. При квантовании поля Борна-Инфельда мы имеем с самого начала нелинейное свободное

поле (при $n=1$) или систему нелинейных полей (при $n>1$), взаимодействующих между собой. Имея решение задачи Коши для этой нелинейной системы, т.е. имея выражение для полевых функций $z_i(\alpha,\beta)$ через их начальные значения $a_i(x)$ и через канонически сопряженные импульсы $\pi_i(x)$, также взятые в начальный момент, мы можем задать, как обычно, перестановочные соотношения между $a_i(x)$ и $\pi_i(x)$ при $t=0$ и тем самым определить операторы $\phi_i(x,t)=z_i(\alpha,\beta)$ для произвольного момента времени.

Перепишем наше решение (25), введя вместо α и β новые переменные: $\alpha=\xi+\tau$, $\beta=\xi-\tau$. Тогда

$$t(\xi,\tau)=\tau+\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}[H(\lambda)-1]\,d\lambda$$

$$x(\xi,\tau)=\xi+\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}G(\lambda)\,d\lambda, \qquad (27)$$

$$z_i(\xi,\tau)=\frac{a_i(\xi+\tau)+a_i(\xi-\tau)}{2}+\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\pi(\lambda)\,d\lambda.$$

Если в начальный момент $t=0$, что в переменных ξ, τ соответствует $\tau=0$, согласно каноническим правилам квантования зададим перестановочные соотношения:

$$[z_i(\xi,0),\ \pi_j(\xi',0)]=\delta_{ij}\,\delta(\xi-\xi'), \qquad (28)$$

то из решения (27) получается, что при $\tau\neq 0$ время $t(\xi,\tau)$ и координата $x(\xi,\tau)$ становятся операторами, некоммутирующими между собой и с полем $Z_i(\xi,\tau)$, поскольку $G(\lambda)$ и $H(\lambda)$ выражаются через полевые функции согласно (22) и (23). Таким образом, имея гайзенберговы операторы $t(\xi,\tau)$, $x(\xi,\tau)$, $z_i(\xi,\tau)$, мы приходим к проблеме формулировки теории в квантованном пространстве-времени.

При квантовании нашей нелинейной системы мы встанем на точку зрения, развитую в § 3 [1]. Именно, вместо n полей $\phi_i(x,t)$, подчиняющихся уравнениях (4), рассматривается система $n+2$ полей $t(\xi,\tau)$, $x(\xi,\tau)$, $z_1(\xi,\tau)$, ... $z_n(\xi,\tau)$ с лагранжианом $L=\frac{1}{2}(\vec r_\tau^{\,2}-\vec r_\xi^{\,2})$, ведущим к линейным уравнениям:

$$\vec r_{\tau,\tau}-\vec r_{\xi,\xi}=0 \qquad (28)$$

и с дополнительными нелинейными условиями

$$\vec r_\alpha^{\,2}=0,\quad \vec r_\beta^{\,2}=0 \qquad \text{или} \qquad \vec r_\xi^{\,2}+\vec r_\tau^{\,2}=0,\quad (\vec r_\xi\vec r_\tau)=0. \qquad (29)$$

Условия (29) можно записать как равенство нулю тензора энергии-импульса системы $n+2$ полей, так как

$$T_{1,1}=T_{2,2}=H=\vec{r}_{\xi}^{\,2}+\vec{r}_{\tau}^{\,2}=0 \qquad (30)$$

$$T_{2,1}=T_{1,2}=G=(\vec{r}_{\xi}\,\vec{r}_{\tau})=0\,.$$

В § 3 [1] показано, что такая линейная система $n+2$ полей с нелинейными дополнительными условиями (30) эквивалентна первоначальной нелинейной системе n полей $\phi_i\,(x,t)$. Там же показано, что если условие (29) выполняется для начального времени $\tau=0$, $(t=0)$, то оно будет выполнено и в произвольный момент времени τ.

Будем квантовать линейную систему (28) обычным образом, потребовав, исходя из принципа соответствия, чтобы дополнительные условия (30) выполнялись в среднем. Таким образом, мы получаем ограничения на допустимые векторы состояния нашей системы, аналогично тому, как в квантовой электродинамике требуется, чтобы условие Лоренца выполнялось в среднем по допустимым векторам состояния. Разница состоит в том, что в нашем случае дополнительные условия нелинейны.

Поскольку наше $n+2$ компонентное поле подчиняется уравнению Даламбера (28), то разложение Фурье этого поля имеет вид:

$$\vec{r}\,(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\omega}}\,[\,\vec{a}^{\,+}(k)\,e^{-i(k\xi-\omega\tau)}+\vec{a}^{\,-}(k)\,e^{i(k\xi-\omega\tau)}\,], \qquad (31)$$

$$\omega=|k|\,.$$

Для дальнейшего удобно опять перейти к изотропным координатам $\alpha=\xi+\tau$, $\beta=\xi-\tau$ и представить, согласно (16), вектор $\vec{r}(\xi,\tau)$ в виде:

$$\vec{r}\,(\alpha,\beta)=\vec{r}_1(\alpha)+\vec{r}_2(\beta)\,,$$

где

$$r_1\,(\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{dk}{\sigma\sqrt{2k}}\,[\,\vec{a}^{\,+}(k)\,e^{-ik\beta}+\vec{a}^{\,-}(k)\,e^{+ik\beta}\,]$$

$$\vec{r}_2\,(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2k}}\,[\,\vec{a}^{\,+}(-k)\,e^{ik\alpha}+\vec{a}^{\,-}(-k)\,e^{-ik\alpha}\,]\,. \qquad (32)$$

Так же как обычно, мы постулируем

$$i\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial\tau}=[\,r,H\,]\,,$$

так как

$$H=H_t-H_x-\sum_{i=1}^{n}H_i\,,$$

то

$$i\,\frac{\partial t}{\partial\tau}=[\,t,H_t\,]\,;\quad i\,\frac{\partial x}{\partial\tau}=-[\,x,H_x\,]\,;\quad i\,\frac{\partial z_i}{\partial\tau}=-[\,z_i,H_i\,]\,. \qquad (34)$$

Учитывая (31), соотношениям (34) можно удовлетворить, если принять

$$[\,a_t^-(k),\,a_t^+(k')\,]=\delta\,(k-k')$$

$$[\,a_x^-(k),\,a_x^+(k')\,]=-\delta\,(k-k') \qquad (35)$$

$$[\,a_i^-(k),\,a_j^+(k')\,]=-\delta_{ij}\,\delta\,(k-k')\quad (i,j=1,2,\dots n)\,.$$

Здесь мы сталкиваемся с положением, которое возникает при квантовании электромагнитного поля, т.е. коммутатор для компоненты поля $t(\xi,\tau)$ имеет противоположный знак по сравнению с коммутаторами остальных компонент x, z_i. Причина этого – в индефинитности метрики в пространстве полей t, x, $z_1 \dots z_n$. При трактовке операторов $a^+(k)$ и $a^-(k)$, чтобы избежать известного противоречия [6], мы должны рассматривать a_t^+ и a_t^- как операторы рождения и уничтожения квантов поля t, а операторы a_x^+, a_i^+ a_x^-, a_i^- – как операторы уничтожения и рождения, соответственно, для квантов полей x и z_i.

Далее нам предстоит найти допустимые векторы состояния нашей системы, по которым в среднем удовлетворяются дополнительные условия в любой точке пространства-времени (ξ, τ). Как показано в [1], достаточно потребовать выполнения этих условий в начальный момент $\tau=0$, т.е.

$$\langle A'|\,:T_{\mu,\nu}\,(\xi,0):\,|A\rangle=0\,, \qquad (36)$$

где двоеточия означают нормальное произведение операторов. Это условие эквивалентно следующим двум условиям

$$\langle A'|\,:\vec{r}_1'^{\,2}(\xi):\,|A\rangle=0$$

$$\langle A'|\,:\vec{r}_2'^{\,2}(\xi):\,|A\rangle=0\,. \qquad (37)$$

Последние удобно записать для Фурье-образов операторов $\vec{r}'^{\,2}_1(\xi)$ и $\vec{r}'^{\,2}_2(\xi)$:

$$\langle A'| : b_1(p) : |A\rangle = 0$$

$$\langle A'| : b_2(p) : |A\rangle = 0\,, \tag{38}$$

где

$$b_1(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{r}'^{\,2}_1(\xi)\, e^{ip\xi}\, d\xi$$

$$b_2(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{r}'^{\,2}_2(\xi)\, e^{ip\xi}\, d\xi\,. \tag{39}$$

Рассмотрим подробнее операторы $b_1(p)$ и $b_2(p)$. Нетрудно видеть, что

$$b_1(-p) = b_1^+(p)$$

$$b_2(-p) = b_2^+(p). \tag{40}$$

Таким образом, достаточно подсчитать интегралы (39) при положительных значениях p. Имеем при $p > 0$:

$$b_1(p) = \tfrac14 \int_p^{\infty} \sqrt{q^2-p^2} : \vec{a}^+\!\left(\frac{q-p}{2}\right) \vec{a}^-\!\left(\frac{q+p}{2}\right) : dq \; -$$

$$- \tfrac14 \int_0^{p} \sqrt{p^2-q^2} : \vec{a}^-\!\left(\frac{p+q}{2}\right) \vec{a}^-\!\left(\frac{p-q}{2}\right) : dq\,,$$

$$b_2(p) = \tfrac14 \int_p^{\infty} \sqrt{q^2-p^2} : \vec{a}^+\!\left(\frac{p-q}{2}\right) \vec{a}^-\!\left(-\frac{p+q}{2}\right) : dq \tag{41}$$

$$- \tfrac14 \int_0^{p} \sqrt{p^2-q^2} : \vec{a}^-\!\left(-\frac{p+q}{2}\right) \vec{a}^-\!\left(\frac{q-p}{2}\right) : dq\,.$$

Кроме того, имеем

$$b_1(0) = \int_0^{\infty} \vec{k}^{\,+} : \vec{a}^+(k)\, \vec{a}^-(k) : dk$$

$$b_2(0) = \int_0^{\infty} k : \vec{a}^+(-k)\, \vec{a}^-(-k)\, dk\,. \tag{42}$$

Заметим, что операторы энергии и импульса есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |k| : \vec{a}^+(k)\, \vec{a}^-(k)\, dk = b_1(0) + b_2(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} k : \vec{a}^+(k)\, \vec{a}^-(k)\, dk = b_1(0) - b_2(0)\,. \tag{43}$$

Наконец, операторы $b_1(p)$ и $b_2(q)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[b_1(p),\; b_1(q)] = (p-q)\, b_1(p+q)$$

$$[b_2(p),\; b_2(q)] = (p-q)\, b_2(p+q) \tag{44}$$

$$[b_1(p),\; b_2(q)] = 0\,.$$

Для выполнения равенств (38) достаточно потребовать, чтобы допустимые векторы состояния подчинялись условию

$$b_1(0)\,|A\rangle = 0$$

$$b_2(0)\,|A\rangle = 0. \tag{45}$$

Ситуация аналогична квантовой электродинамике, где для выполнения условия Лоренца в среднем достаточно потребовать, чтобы $\frac{\partial A^-_\mu}{\partial x_\mu}|\Phi\rangle = 0$. По смыслу операторов $b_1(0)$ и $b_1(0)$ (см. равенства (43)) уравнения (45) определяют собственные состояния оператора полной энергии и импульса с собственными значениями, равными нулю. Определим векторы $|A\rangle$ как суперпозицию ортонормированных векторов $|m_t, m_x, m_{x_1}, \dots m_{x_n}\rangle$ с определенным числом фотонов всех сортов $m_t, m_x, m_{x_1}, \dots m_{x_n}$ и с полной энергией, равной нулю.

Поскольку операторы b_1 и b_2 коммутируют, можно вектор состояния, удовлетворяющий (45), записать как произведение двух векторов $|A\rangle = |A_1\rangle |A_2\rangle$, $|A_1\rangle$ – удовлетворяет первому равенству (45), а $|A_2\rangle$ – второму равенству. Таким образом,

$$
|A_1> = \sum_{m_t, m_x, m_{z_1}, \dots m_{z_n}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i_1=0}^{m_t} dk_{t,i_1} \prod_{i_2=0}^{m_x} dk_{x,i_2} \prod_{i_3=0}^{m_{z_1}} dk_{z_1,i_3} , \dots \prod_{i_{n+2}=0}^{m_{z_n}} dk_{z_n,i_{n+2}} \times
$$

$$
\times \delta\Big(\sum_{i_1=0}^{m_t} k_{t,i_1} - \sum_{i_2=0}^{m_x} k_{x,i_2} - \sum_{i_3=0}^{m_{z_1}} k_{z_1,i_3} - \dots - \sum_{i_{n+2}}^{m_{z_n}} k_{z_n,i_{n+2}} \Big)\times
$$

$$
\times f_{m_t, m_x, m_{z_1} \dots m_{z_n}} (k_{t,1} \dots k_{t,m_t}, k_{x,1} \dots k_{x,m_x} \; k_{z_1,1} \dots k_{z_n,m_{z_n}})\times
$$

$$
\times \prod_{i_1=0}^{m_t} a_t^+ (k_{t\, i_1}) \prod_{i_2=0}^{m_x} a_x^- (k_{x, i_2}) \prod_{i_3=0}^{m_{z_1}} a_{z_1}^- (k_{z_1, i_3}) \dots \prod_{i_{n+2}}^{m_{z_n}} a_{z_n}^- (k_{z_n, i_{n+2}}) |0>. \tag{46}
$$

Аналогично строится вектор $|A_2>$, только интегрирование по всем dk_i ведется от $-\infty$ до 0.

Легко видеть, что оператор $b_1(0) = \int_0^\infty k : \vec{a}^+(k)\, \vec{a}^-(k)\, dk$ "обнуляет" вектор (46). Соответственно $b_2(0)$ "обнуляет" вектор $|A_2>$.

Докажем теперь, что на этих векторах выполяются равенства (38). Нетрудно показать, что при $p > 0$ оператор вида

$$
C(p) = \tfrac{1}{4} \int_p^\infty \sqrt{q^2 - p^2}\; a^+\Big(\frac{q-p}{2}\Big)\, a^-\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\, dq ,
$$

действуя слева на вектор состояния

$$
\Omega = <0| \prod_{s=1}^{e} a^-(r_s),
$$

превращает его в вектор:

$$
\Omega' = \Omega\, C(p) = \sum_{j=1}^{e} \sqrt{r_j (p + r_j)}\, <0| \prod_{s=1}^{e} a\,(r_s + p\,\delta_{s,j}).
$$

Таким образом, сумма аргументов операторов $a(r_s)$. $\sum_{s=1}^{e} r_s$ в Ω отличается от соответствующей суммы аргументов в Ω' : $\Sigma' = \Sigma + p$. В силу этого обстоятельства матричные элементы оператора $C(p)$ по состояниям, представляющимся суперпозициями векторов (46), равны нулю. По тем же соображениям равны нулю и соответствующие матричные элементы оператора

$$
d(p) = \tfrac{1}{4} \int_0^p \sqrt{p^2 - q^2}\; a^-\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\, a^-\Big(\frac{p-q}{2}\Big)\, dq .
$$

Следовательно, равны нулю матричные элементы (38), что и требовалось доказать.

Вопросы, связанные с квантовыми эффектами в этой нелинейной системе, будут рассмотрены в следующей работе.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Д.И. Блохинцева за многочисленные и интересные обсуждения затронутых здесь вопросов.

Литература

1. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ, Р-2151 (1965), Дубна.
2. M. Born, L. Infeld. Proc. Roy. Soc. A 144, 425 (1934).
3. Д.И. Блохинцев. ДАН СССР, том XXXII № 4 (1952). УФН том XI, выпуск 2 (1957) стр. 137.
4. W. Heisenberg. Zet. fur Phys. Band 133, Heft. S. 65 (1952).
5. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. том II, Гостехиздат (1951).
6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гос. тех.издат Москва (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
31 июля 1965 г.