

С 348.а
К-591

Сиб. жур., 1966, т. 20, 14/VI-65
в. 6, с. 473-477.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 2218



ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

Беньямин Козик

КОРРЕЛЯЦИЯ НЕЙТРОНОВ
В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ С УЧЕТОМ ИХ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1965

Р-2218

Беньямин Козик

КОРРЕЛЯЦИЯ НЕЙТРОНОВ
В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ С УЧЕТОМ ИХ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Направлено в журнал "Атомная энергия"

пр. 3451/2

Пространственно-энергетическая зависимость дисперсии числа нейтронов в реакторе в произвольно фиксированный момент времени (одномерное распределение) впервые рассматривалась в работах^{/1,2/}.

В^{/2/} приведены уравнения для плотностей произведений k -го порядка одномерного распределения нейтронов с учетом полной пространственно-энергетической зависимости. Эти уравнения в принципе позволяют определить дисперсию числа нейтронов в фиксированный момент времени в любой части объема реактора и в любом интервале энергий нейтронов.

В работе^{/1/} выведено обратное уравнение для производящей функции одномерного распределения нейтронов в реакторе (при условии, что в начальный момент времени система содержала точно один нейтрон) с учетом пространственно-энергетической зависимости плотности распределения. Этот подход более компактен и в принципе позволяет получить само распределение нейтронов в произвольно фиксированный момент времени при любом режиме работы реактора (при условии, что тепловыми эффектами можно пренебречь). Но получить само распределение числа нейтронов удается лишь в исключительных случаях и при этом в одноклассовом однозонном приближении^{/3/}. Обычно же вполне достаточно знать аналитическое выражение для дисперсии числа нейтронов в конечном интервале времени (метод Фейнмана), для вероятности регистрации детектором коррелированных нейтронных пар (метод Росси) и для спектральной плотности мощности реакторных шумов^{/4/}. Важно также определить корреляцию регистраций нейтронов в промежутках времени, следующих друг за другом на некотором расстоянии^{/5/}. Все эти величины просто выражаются через корреляционную функцию процесса размножения нейтронов и на такой основе были определены в одноклассовом однозонном приближении^{/6/}.

В работе^{/7/} было отмечено то очевидное обстоятельство, что производящая функция двумерного распределения

$$H_2(x', t'; x, t)$$

в случае марковских процессов удовлетворяет относительно переменных x , t при

$t > t'$ такому же уравнению, что и производящая функция

$$[N_1(x, t)]$$

одномерного распределения, и поэтому корреляционная функция линейных процессов типа размножения удовлетворяет такому же уравнению (относительно переменной $t > t'$), что и среднее число частиц. Этот замечательный факт имеет место и тогда, когда случайный процесс размножения зависит не только от времени, но и от добавочных параметров, таких, как пространственные координаты r , энергия частиц u и вектор направления их скорости Ω . Правда, в случае непрерывно меняющихся параметров r , u , Ω вывод прямого уравнения для производящей функции N_1 связан с некоторыми математическими трудностями^{/8/}. Но их можно обойти, если область изменения параметров r , u , Ω разбить на конечное число интервалов, в которых эти параметры принимают постоянные значения, и если частицы с разными "координатами" r , u , Ω рассматривать как частицы разных типов, которые могут превращаться друг в друга по известному закону. Тогда сразу можно написать уравнения для производящих функций N_1 и N_2 и вывести уравнения для первых моментов одномерного распределения и соответственно для нейтронных взаимных корреляционных функций. Такую систему уравнений можно рассматривать как систему "многогруппового" приближения. Но можно совершить предельный переход к непрерывно меняющимся параметрам r , u , Ω , после чего для первого момента одномерного распределения получаем известное уравнение Больцмана для средней нейтронной плотности, для вторых центральных моментов (которые имеют смысл бинарных плотностей и зависят от двух "точек" пространства (r , u , Ω)) уравнения типа уравнения для бинарного нейтронного потока^{/2/}, а для плотности корреляционной функции относительно переменных, относящихся к моменту времени $t > t'$, — уравнение, по внешнему виду совпадающее с однородным уравнением Больцмана для средней нейтронной плотности.

Конечно, решить эти уравнения в общем случае невозможно. Поэтому для демонстрации вышеизложенных рассуждений мы будем исходить из распространенного диффузионного приближения, которое содержит лишь "координаты" r , u . Считая последние дискретными, записываем уравнение для производящих функций

$$N_1 = N_1(x_{ru}, y_{\Omega ru}, t); \quad (1)$$

$$N_2 = N_2(x'_{ru}, y'_{\Omega ru}, t'; x_{ru}, y_{\Omega ru}, t), \quad (2)$$

где y_{Ω} относится к предшественнику запаздывающих нейтронов сорта "е", а индексы r , u в (1) (2) принимают все возможные значения, т.е. x , y_{Ω} — вектора:

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = \sum_{r,u} \{ (g_{ru}^{(0)} + g_{ru}^{(R)} + g_{ru}^{(E)}) \frac{\partial H_i}{\partial x_{ru}} + \sum_{\circ} g_{ru}^{(\circ)} \frac{\partial H_i}{\partial y_{\circ ru}} + H_i S_{ru}(x_{ru} - 1) \} . \quad (3)$$

В случае $i = 2$ уравнение (3) имеет место при $t > t'$; S_{ru} - мощность источника нейтронов с координатами r, u . Производящие функции распределений элементарных превращений частиц с координатами r, u имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{ru}^{(0)} &= v(u) \sum_a (r, u) \{ G_{ru}(x_{ru}, y_{\circ ru}) - x_{ru} \}; \\ g_{ru}^{(\circ)} &= \lambda_{\circ}(x_{ru} - y_{\circ ru}); \\ g_{ru}^{(R)} &= \sum_{r'} v(u) \sum_R (u; r \rightarrow r') (x_{ru}' - x_{ru}); \\ g_{ru}^{(E)} &= \sum_u v(u) \sum_E (r; u \rightarrow u') (x_{ru}' - x_{ru}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $v(u)$ - скорость частицы с групповой энергией E_u ; λ_{\circ} - постоянная распада предшественника запаздывающих нейтронов сорта "e"; Σ_a , Σ_R , Σ_E - соответственно макроскопические сечения поглощения (включая деление), полное сечение рассеяния нейтрона из пространственной ячейки R_r в ячейку R_r' , полное сечение рассеяния нейтрона энергетической группы E_u в группу E_u' , а G_{ru} - производящая функция распределения всех мгновенных нейтронов и предшественников запаздывающих нейтронов единичного акта размножения нейтрона с координатами r, u :

$$G_{ru} = 1 - \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} + \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} h_{ru} [W_{0r}(x_{ru}), W_{\circ r}(y_{\circ ru})], \quad (5)$$

$$W_{0r} = \sum_u w_0(u') x_{ru}'; \quad W_{\circ r} = \sum_u w_{\circ}(u') y_{\circ ru},$$

где $\Sigma_f(r, u)$ - макроскопическое сечение деления; $w_0(u)$; $w_{\circ}(u)$ - соответственно энергетические спектры мгновенных и запаздывающих нейтронов, а $h_{ru}(x, y)$ - производящая функция распределения всех мгновенных нейтронов и предшественников запаздывающих нейтронов, порождаемых делением одного ядра горючего. Первые и вторые моменты распределения нейтронов деления определяются из соотношений

$$\frac{\partial h_{rn}}{\partial x_r} = \bar{\nu}_0 \equiv \bar{\nu} (1 - \beta); \quad \frac{\partial h_{rn}}{\partial y_{ir}} = \sigma_i = \bar{\nu} \beta_i; \quad \frac{\partial^2 h_{rn}}{\partial x_r \partial y_{ir}} = \bar{\nu}_0 \nu_i; \\ \frac{\partial^2 h_{rn}}{\partial x_r^2} = \bar{\nu}_0 (\nu_0 - 1); \quad \frac{\partial^2 h_{rn}}{\partial y_{ir} \partial y_{kr}} = \bar{\nu}_0 \nu_k - \bar{\nu} \beta_i \delta_{ik}; \quad (8)$$

где $\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 + \sum \bar{\nu}_i$ — среднее число нейтронов деления (индекс "0" относится к мгновенным нейтронам); $\beta_i = \frac{\bar{\nu}_i}{\bar{\nu}}$ — доля запаздывающих нейтронов сорта "i"; $\beta = \sum \beta_i$. Все производные в (8) (8) берутся в точке $x_r = y_{ir} = 1$. Если предположить, что при делении одного ядра горячего испускается не больше одного запаздывающего нейтрона, то

$$\bar{\nu}_i \bar{\nu}_k - \bar{\nu} \beta_i \delta_{ik} = 0, \\ \bar{\nu}_0 \bar{\nu}_i = 2 \bar{\nu} \beta_i, \quad (7)$$

а $\bar{\nu}_0 (\nu_0 - 1)$ практически совпадает с величиной $\bar{\nu}(\bar{\nu} - 1)$ /8/. Полный коэффициент размножения нейтрона с координатами r, u получается из соотношения

$$\bar{k}_{ru} = \sum_a \left\{ \frac{\partial G_{ru}}{\partial x_{ra}} + \sum_{ors} \frac{\partial G_{ru}}{\partial y_{ors}} \right\} = \frac{\sum_r f(r, u)}{\sum_a n(r, u)} \bar{\nu}. \quad (8)$$

Из уравнения (3) для N_2 следуют уравнения для стационарных корреляционных функций:

$$K_t(r', u'; r, u) = \overline{n_{r'u'}(t') n_{ru}(t'') - \bar{n}_{r'u'}(t') \bar{n}_{ru}(t'')}, \quad (9)$$

где $n_{ru}(t'')$ — число нейтронов с координатами r, u в момент t'' , а t обозначает разность $t = t'' - t'$. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial K_t}{\partial t}(r', u'; r, u) = T_{ru} K_t + \sum_a \lambda_a \mu_a(r', u'; r, u) e^{-\lambda_a t} + \quad (10)$$

$$+ \bar{\nu} \sum_a \lambda_a \beta_a \bar{w}_a(u) \sum_{u''} \nu(u'') \sum_r f(r, u'') \int_0^t dt' K_t(r', u'; r, u'') e^{-\lambda_a(t-t')},$$

где

$$\mu_a = \overline{n_{r'u'}(t') c_{oru}(t')} - \bar{n}_{r'u'}(t') \bar{c}_{oru}(t'), \quad (11)$$

$c_{oru}(t')$ — число предшественников запаздывающих нейтронов сорта "a" в момент t' , испускающих нейтроны с координатами r, u , а T_{ru} — оператор, действующий на координаты r, u . Если теперь перейти к непрерывным параметрам r, u , то все величины, зависящие от r, u , будут иметь смысл плотностей, сумму по

u'' в (10) нужно заменить интегралом, а оператор T_{ru} действует следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T_{ru} K_t(r', u'; t, u) = & (-v(u) \Sigma_t(t, u) + D(u) \Delta_r) K_t(r', u'; t, u) + \\
 & + \int du'' v(u'') \Sigma_{\mu}(t; u'' \rightarrow u) K_t(r', u'; t, u'') + \\
 & + \bar{\nu} (1 - \beta) w_0(u) \int du'' v(u'') \Sigma_t(t, u'') K_t(r', u'; t, u'');
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$, $\Sigma_s(t, u) = \int du' \Sigma_{\mu}(t; u \rightarrow u')$,

$D(u)$ - коэффициент диффузии, Δ_r - оператор Лапласа, действующий на координаты r . Начальное условие для уравнения (10) имеет вид:

$$K_0(r', u'; t, u) = \sigma^2(r', u'; t, u), \tag{13}$$

где смысл величины σ^2 следует из (9) при $t' = t''$. Она определяется из уравнений, следующих из уравнения (3) для N_1 . Например, дифференцируя уравнение (3) по $x_{r,u}$ и x_{ru} , получаем:

$$\begin{aligned}
 T_{ru} Q(r', u'; t, u) + T_{ru} Q(t, u; r', u') + \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \mu_{\mu}(r', u'; t, u) + \\
 + \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \mu_{\mu}(t, u; r', u') + \\
 + \bar{\nu}_0 (\nu_0 - 1) w_0(u) w_0(u) \int du'' v(u'') \Sigma_t(t, u'') \bar{n}_{ru} \delta(r', r),
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

где

$$Q(r', u'; t, u) = \sigma^2(r', u'; t, u) - \bar{n}_{ru} \delta(r', u'; t, u), \tag{15}$$

$\delta(r', u'; t, u)$ - дельта-функция с особенностью при $r', u' = t, u$. Краевые условия для уравнений (13) и (14) аналогичны краевым условиям для нейтронной плотности. При помощи преобразования Лапласа уравнение (10) сводится к "стационарному" уравнению, которое в свою очередь непосредственно определяет бинарную плотность спектральной плотности мощности шумов:

$$\langle |n(r', u'; t, u)|^2 \rangle = 4 \int_0^{\infty} dt K_t \cos(2\pi ft) \approx 4 \operatorname{Re} \bar{K}_n(r', u'; t, u) \Big|_{s=-i\omega}, \tag{16}$$

где f - частота в гц ($\omega = 2\pi f$). Уравнение для преобразованной функции $\bar{K}_n(r', u'; t, u)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 (s - T_{ra}) \bar{K}_s(r', u'; r, u) = \sigma^2(r', u'; r, u) + \sum_s \frac{\lambda_s \mu_s(r', u'; r, u)}{\lambda_s + s} + \\
 + \bar{\nu} \sum_s \frac{\lambda_s \beta_s w_s(u)}{\lambda_s + s} \int du'' v(u'') \Sigma_f(k, u'') \bar{K}_s(r', u'; r, u'');
 \end{aligned} \quad (17)$$

координаты r' , u' в уравнении (17) – фиксированные параметры, функция $\bar{K}_s(r', u'; r, u)$ должна удовлетворять еще краевым условиям относительно r и r' .

В приближении постоянных сечений (17) принимает форму стационарного уравнения диффузии:

$$-\Delta_r \bar{K}_s(r', r) + \kappa_s^2 \bar{K}_s(r', r) = \sigma^2(r', r) + \sum_s \frac{\lambda_s \mu_s(r', r)}{\lambda_s + s}; \quad (18)$$

$$\kappa_s^2 = \frac{s + a_0 - \sum_s \frac{\lambda_s \alpha_s}{\lambda_s + s}}{D};$$

$$a_0 = v(\Sigma_a - \bar{\nu} - 1 - \beta) \Sigma_f; \quad (19)$$

$$\alpha_s = v \Sigma_a k_s \beta_s;$$

а граничные условия можно выбрать в обычной форме

$$\bar{K}_s(r', R) = \bar{K}_s(R, r) = 0; \quad (20)$$

где R – радиус – вектор координат экстраполированной поверхности реактора.

При рассмотрении критических реакторов запаздывающие нейтроны достаточно учитывать в качестве источника в уравнении для средней нейтронной плотности $\bar{n}(r)$:

$$-D \Delta_r \bar{n}(r) + a_0 \bar{n}(r) = \beta \Sigma_a v \bar{n}(r). \quad (21)$$

В этом случае спектральная плотность (18) получается в виде:

$$\langle |\bar{n}(r', r)|^2 \rangle = 4 \int dr'' \sigma^2(r', r'') \frac{e^{-\kappa_+ |r-r''|}}{4\pi D |r-r''|} \cos \kappa_- |r-r''| + 4 \operatorname{Re} \bar{K}_s^0(r', r); \quad (22)$$

$$\kappa_+^2 = \frac{\rho + a_0}{2D}; \quad \kappa_-^2 = \frac{\rho - a_0}{2D}; \quad \rho^2 = \alpha_0^2 + \omega^2;$$

где $\bar{K}_s^0(r', r)$ – общее решение однородного уравнения (18) при $\kappa_s^2 = \frac{s+a_0}{D}$, постоянные которого определяются из требования (20). Уравнение (14) для $\sigma^2(r', r)$ записывается в форме

$$-(\Delta_r + \Delta_r) \sigma^2(r', r) + \kappa^2 \sigma^2 = (\Gamma \sum_n v \bar{n}(r') + 2S(r')) \delta(r-r'), \quad (23)$$

где $\Gamma = k \frac{\nu(\nu-1)}{\nu}$, $\kappa^2 = \frac{2\alpha_0}{D}$, $\alpha S(r)$ - плотность мощности источника. Решением уравнения (23) будет выражение

$$\sigma^2(r', r) = \int dr_1 f(r_1) \frac{K_2(\kappa_2 \sqrt{(r-r_1)^2 + (r-r_1)^2})}{D 2^5 \pi \{(r-r_1)^2 + (r'-r_1)^2\}} + Z(r) Z(r'), \quad (24)$$

где

$$f(r_1) = \Gamma \sum_n v \bar{n}(r_1) + 2S(r_1), \quad (25)$$

$Z(r)$ - общее решение однородного уравнения

$$-D \Delta_r Z(r) + \alpha_0 Z(r) = 0, \quad (26)$$

а цилиндрическая функция $K(x)$ определена следующим образом:

$$K_2(x) = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{e^{i\pi/2} J_{-p}(ix) - e^{-i\pi/2} J_p(ix)}{\sin p\pi} \right\}, \quad (27)$$

где $J_p(ix)$ - функция Бесселя p -го порядка при вещественном x . Постоянные в решении $Z(r) Z(r')$ определяются из краевых условий

$$\sigma^2(R, r) = \sigma^2(r', R) = 0. \quad (28)$$

В случае критических систем $S(r)$ в (25) нужно заменить на выражение правой части уравнения (21) и учесть соотношение

$$\alpha_0 = \beta \sum_n v - B^2 D, \quad (29)$$

где B - лапласиан системы, который, например для реактора в виде шара, имеет вид $B = \pi/R$. Если (22) и (27) проинтегрировать по всему реактору, то с учетом нормировки

$$\int_0^R dr \frac{e^{-\kappa_2 |r-r''|}}{4\beta D |r-r''|} \cos \kappa |r-r''| = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \omega^2}; \quad (30)$$

$$\int_0^R dr \int_0^R dr' \frac{K_2(\kappa_2 \sqrt{(r-r_1)^2 + (r'-r_2)^2})}{D 2^5 \pi \{(r-r_1)^2 + (r'-r_2)^2\}} = \frac{1}{2\alpha_0} \quad (31)$$

получаются обычные выражения однозонного приближения:

$$\langle |N|^2 \rangle = \frac{4\sigma_N^2 \alpha_0}{\alpha_0^2 + \omega^2}; \quad (32)$$

$$\sigma_N^2 = N + \frac{\Gamma}{2\alpha_0} \nu \sum_a N; \quad (33)$$

$$N = \int d\mathbf{r} \bar{n}(\mathbf{r}). \quad (34)$$

Л и т е р а т у р а

1. L.Pal. Acta Phys. Hung., 14, 345 (1962).
2. А. Говорков. Атомная энергия, 13, 152 (1962); 17, 474 (1964).
3. А. Говорков, Б. Козик. О статистике амплитуд импульсов мощности реактора ИБР. Препринт ОИЯИ, Р-2076, Дубна, 1965; Атомная энергия (в печати).
4. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng., 7, 472 (1960).
5. L.Pal. Acta Phys. Hung., 14, 369 (1962).
6. Б. Козик. Препринт ОИЯИ, Р-1996, Дубна, 1965.
7. Б. Козик. Корреляционные функции случайных процессов типа размножения. Препринт ОИЯИ, Р-2213, Дубна, 1965; Ядерная физика (в печати);
8. М. Бартлетт. Введение в теорию случайных процессов, ИЛ, 1958, стр. 104.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июня 1965 г.