ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2215

В.Ф. Вишневский, В.И. Мороз, Б.А. Шахбазян,
Янь У-гуан

ОПТИМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГИСТРАЦИИ (ВЕСА) СОБЫТИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

Р-2215

В.Ф. Вишневский, В.И. Мороз, Б.А. Шахбазян,
Янь У-гуан

ОПТИМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГИСТРАЦИИ (ВЕСА) СОБЫТИЯ

Направлено в ПТЭ

Назовем событием зарегистрированный в приборе (камере) процесс, характеризуемый измеренными величинами $P_1, \ldots, P_i \ldots, P_I, R_1 \ldots, R_j, \ldots, R_J, S_1, \ldots S_k \ldots, S_K$ которые удовлетворяют определенным условиям (кратко совокупность измеренных величин записывается P, R, S). Предполагаем, что для каждого набора $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_I$ нам известна априорная относительная вероятность $Q_{(R,S)}$ распределения событий по совокупности переменных R и S и вероятность регистрации событий $g(P,R,S)$; в дальнейшем переменная P будет опущена, так как мы будем вести рассмотрение для одного набора $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_I$. (Следует заметить, что часто вместо эффективности регистрации пользуются обратной величиной – весом события $w = \frac{1}{g}$).

Мы считаем, что целью эксперимента является определение истинного числа событий U , происшедших в малом интервале $\Delta P_1, \ldots, \Delta P_I$ около точки $P_1, \ldots, P_I$.

Обозначив через

d^2U – среднее число событий в интервале $\Delta P\, dR\, dS$ около точки P, R, S;

d^2u – среднее число зарегистрированных событий в том же интервале $\Delta P, dR, DR$,

получим соотношения

$$d^2u = U\, Q_{(R,S)}\, g_{(R,S)}\, dR\, dS \qquad (1)$$

$$d^2U = U \frac{Q_{(R,S)}\, dR\, dS}{\iint Q\, dR\, dS} . \qquad (2)$$

Примем для дальнейшего рассмотрения условие нормировки $\iint Q\, dR\, dS = 1$.

Из (1) и (2) следует, что

$$U = \iint \frac{d^2u}{g_{(R,S)}} \qquad (3)$$

$$U = \iint \cancel{\frac{d^2u}{g_{(S)}}} = \int \frac{du}{g(S)} \qquad (4)$$

$$U = \iint \frac{d^2u}{\bar{g}}, \quad = \frac{1}{\bar{g}} \tag{5}$$

где сделаны следующие обозначения

$$\bar{g}_{(S)} = \frac{\int g_{(R,S)} Q_{(R,S)}\, dR}{\int Q_{(R,S)}\, dR} \qquad \bar{g} = \iint g_{(R,S)} Q_{(R,S)}\, dR\, dS .$$

Так как d^2u есть среднее число зарегистрированных событий, из сопоставления (3), (4), (5), следует, что при бесконечно большом числе зарегистрированных событий допустимо усреднение вероятностей регистрации внутри интервала ΔP по переменным R и S.

Для конечного числа зарегистрированных событий выражения (3), (4), (5) запишутся в виде

$$U_3 = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi} \tag{6}$$

$$U_4 = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{\bar{g}_{\xi(S)}} \tag{7}$$

$$U_5 = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{\bar{g}} = \frac{N}{\bar{g}} , \tag{8}$$

где ξ – порядковый номер зарегистрированного события, g_ξ – вероятность регистрации ξ-того события, характеризуемого измеренными параметрами P, R_ξ, S_ξ, $\bar{g}_{\xi(S)} = \int Q_{(R,S_\xi)}\, g_{(R,S_\xi)}\, dR$ – вероятность регистрации события, характеризуемого параметрами P, S_ξ.

Из аддитивности выражений (3), (4), (5) следует, что U_3, U_4, U_5 представляют собой несмещенные оценки величины U, качество которых, однако, различно, так как они имеют разные дисперсии.

Так как события по интервалам $dR\,dS$ распределены по закону полиномиального распределения, а общее их число N распределено по закону Пуассона, то из (6), (7), (8) следует:

$$\bar{U}_3^2 = \frac{(\bar{N})^2}{(\bar{g})^2} + \frac{\bar{N}}{(\bar{g})^2} \left[\bar{g} \iint \frac{Q}{g}\, dR\, dS \right] \tag{9}$$

$$\bar{U}_4^2 = \frac{(\bar{N})^2}{(\bar{g})^2} + \frac{\bar{N}}{(\bar{g})^2} [\bar{g} \iint \frac{Q}{\bar{g}(S)} dR \, dS] \tag{10}$$

$$\bar{U}_5^2 = \frac{(\bar{N})^2}{(\bar{g})^2} + \frac{\bar{N}}{(\bar{g})^2}. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_4 = \bar{U}_5 = \frac{\bar{N}}{g} = U ,$$

получим дисперсию величины U в виде

$$D_{(U_3)} = \frac{\bar{N}}{(\bar{g})^2} [\bar{g} \iint \frac{Q}{g} dR \, dS] \tag{12}$$

$$D_{(U_4)} = \frac{\bar{N}}{(\bar{g})^2} [\bar{g} \int \frac{\int Q \, dR}{\bar{g}_{(S)}} dS] \tag{13}$$

$$D_{(U_5)} = \frac{N}{(\bar{g})^2}. \tag{14}$$

Очевидно, что

$$\bar{g} \iint \frac{Q}{g} dR \, dS \geq \bar{g} \int \frac{\int Q \, dR}{\bar{g}_{(S)}} dS \tag{15}$$

$$\bar{g} \int \frac{\int Q \, dR}{\bar{g}_{(S)}} d\,S \; E \geq 1 , \tag{16}$$

где равенство в случае (15) возможно, если только $\frac{\partial g}{\partial R} \equiv 0$, а в случае (16), если только $\bar{g}(S^{\partial}) \equiv const$.

Для оценки величины дисперсий заметим, что среднее значение $\sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi^2}$ по вероятности регистрации события запишется, как

$$\int_N \ldots \int [\sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi^2}] \prod_\xi [\frac{g_\xi Q \, dR_\xi \, dS_\xi}{\iint gQ \, dR \, dS}] = \frac{N}{(\bar{g})^2} [\bar{g} \iint \frac{Q}{g} dR \, dS] . \tag{17}$$

Из (17) вытекает, что несмещенной оценкой дисперсией (12) и (13) будут

$$D_3 = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi^2} = D_{(U_3)} \qquad (18)$$

$$D_4 = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g^2_{\xi(s)}} = D_{(U_4)} \qquad D_5 = \frac{N}{(\bar{g})^2}. \qquad (19)$$

Отсюда следует, что искомое число зарегистрированных случаев U может быть записано в виде

$$U = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi} \pm \sqrt{\sum_{\xi=1} \frac{1}{g_\xi^2}}, \qquad (20)$$

$$U = \sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{\bar{g}_{\xi(s)}} \pm \sqrt{\sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{\bar{g}^2_{\xi(s)}}}, \qquad (21)$$

$$U = N \frac{1}{\bar{g}} \pm \frac{\sqrt{N}}{\bar{g}}. \qquad (22)$$

Из выражений (20), (21), (22) видно, что экспериментальной оценкой $\bar{g}$ будет

$$\bar{g} \approx \frac{N}{\sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi}} \approx \frac{N}{\sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{\bar{g}_{\xi(s)}}}. \qquad (23)$$

Из (23), (18), (19), (14) следует, что отношение дисперсий ρ может быть записано как

$$\rho = \frac{D_3}{D_5} = N \frac{\sum \frac{1}{g_\xi^2}}{\left(\sum_{\xi=1}^{N} \frac{1}{g_\xi}\right)^2}, \qquad (24)$$

$$\rho = \frac{D_4}{D_5} = N \frac{\sum \frac{1}{(\bar{g}_{\xi(s)})^2}}{\left(\sum \frac{1}{g_{\xi(s)}}\right)^2}.$$

Из анализа формулы (24) следует:

1. Разница в точности обработки по формулам (20) или (21) по сравнению с оптимальной обработкой по формулам (22) не зависит от числа наблюдавшихся событий.

2. Формула (24) дает возможность определить по полученным в эксперименте эффективностям регистрации (или весам), целесообразно ли дальнейшее усреднение эффективности регистрации по другим параметрам.

3. Формулы (24) показывают, во сколько раз число зарегистрированных событий должно быть больше для получения равноточного результата эксперимента в случае обработки его по формулам (20) или (21) по сравнению с наиболее точной обработкой по формулам (22).

Для оценки величины эффекта усреднения веса рассмотрим два примера:

1) Пусть на опыте с равной вероятностью встречаются только два значения $g=1$ и 0,1, тогда из формулы (24) следует $\rho=1{,}67$, т.е. в этом случае для достижения формулой (20) точности, которая дает формула (22), требуется на 67% больше зарегистрированных событий по сравнению со статистическим материалом, вошедшим в обработку по формуле (22).

2) Пусть на опыте с равной вероятностью встречаются $g=1$ и 0,5, тогда $\rho=1{,}11$, т.е. в этом случае требуется только 11%-ое увеличение числа зарегистрированных событий.

Вычисление величины $\bar{g}$ по всем переменным $R_1,\dots,R_J$, $S,\dots,S_K$ оказывается в ряде случаев довольно громоздким и требует применения интегрирования методом Монте-Карло на электронных вычислительных машинах. Однако на практике часто уже после взятия только легко берущихся интегралов (скажем, по величинам $R_1,\dots,R_J$) точность результата, рассчитанного по формулам (21), несущественно отличается от точности результата, полученного по формуле (22).

Вид априорной вероятности $Q_{(R,S)}$ подробно рассмотрен в работах /1,2/. Здесь мы отметим только два момента:

а) Учет экспоненциального характера распределения точек распада частиц приводит к определению вероятности регистрации методом потенциальных длин, которые, однако, сильно флуктуируют от события к событиям, что делает целесообразным производить в этом случае дальнейшее усреднение.

б) Часто оказывается удобным вычислить $\bar{g}_{(S)}=\int gQ\,dR$ по сечению первичного пучка (если известно распределение его плотности), по распределению точек взаимодействия вдоль по пучку, по азимутальному углу около направления пучка (если есть основания предполагать отсутствие поляризации).

Рассмотрим в виде примера случай неполного интегрирования при определении импульсного (p) и углового (θ) дифференциальных распределений V^{o} частиц вдоль оси Y, если сечение пучка имеет форму прямоугольника, с границами $X_н \le X \le X_к$, $Z_н \le Z \le Z_к$. Введем следующие обозначения: $L_0 = L_0(p)$ – распадная длина V^{o} частиц; p – импульс V^{o}-частицы; X_0, Y_0, Z_0 – координаты точки рождения V^{o}-частицы; θ – угол вылета V^{o}-частицы с осью Y; ϕ – азимутальный угол V^{o} частицы около направления Y. Эффективность регистрации частицы, распавшейся внутри объема камеры достаточно далеко от ее границ, может быть принята равной 1, а для распавшейся вне камеры – равной 0.

Введя понятие эффективного объема, положим $g = 1$ внутри объема, и $g = 0$ вне его, что является заменой плавного перехода скачком. (В работах [1,2] учитывается точная зависимость g по объему камеры). Введем длину $\ell = \ell_{(X_0, Y_0, Z_0, \theta, \phi)}$ – расстояние от точки X_0, Y_0, Z_0 до границы эффективного объема при движении по направлению заданному углами θ и ϕ (величина ℓ носит название потенциальной длины).

В этом случае вероятность Q может быть представлена как произведение функций

$$Q_{(P,R,S)} = Q_1(t) \cdot Q_{2(X_0, Y_0, Z_0)} \cdot Q_3(\phi) \cdot Q_{(p,\theta)} ,$$

t – пробег

где P – обозначает p и θ,

R – обозначает t, X_0, Y_0, Z_0, ϕ.

(Параметров S в этом рассмотрении нет).

$$g = \begin{cases} 1, & \text{внутри эффективного объема} \\ 0, & \text{вне эффективного объема.} \end{cases}$$

$$Q_1(t) = \frac{1}{L_0} \exp\left[-\frac{t}{L_0}\right]$$

$$Q_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } X_0 \text{ вне интервала } (X_н, X_к), \\ & \text{или } Z_0 \text{ вне интервала } (Z_н, Z_к), \\ \dfrac{1}{X_к - X_н} \dfrac{1}{\Delta Y} \dfrac{1}{Z_н - Z_к}, & \text{если } X_н < X_0 < X_к,\ Z_н < Z_0 < Z_к \end{cases}$$

(Пренебрегаем выбиванием частиц из первичного пучка, ΔY –размер камеры вдоль по пучку).

$$Q_{3(\phi)} = \frac{1}{2\pi} .$$

В этих обозначениях

$$\bar{g}_{p,\theta} = \int_{X_H}^{X_K} dX_0 \int_{\Delta Y} dY_0 \int_{Z_H}^{Z_K} \frac{dZ_0}{(X_K-X_H)\Delta Y(Z_K-Z_H)_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{\ell(X_0,Y_0,Z_0,\phi,p,\theta)} \frac{1}{L_0}\, e^{-\frac{t}{L_0}}\, dt .$$

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А.В.Никитину и Ю.А.Трояну за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вероятность получить в интервале ΔP событий, распределенных по интервалах dR_ξ dS_ξ, запишется как

$$\Phi_{(\bar{N},U,U_\xi)} = \frac{\bar{N}^U}{U!}\, e^{-\bar{N}} \prod_{\xi=1}^{U} \left[\frac{Q(R_\xi, S_\xi)\, g_\xi\, dR_\xi\, dS_\xi}{\iint Q\, g\, dR\, dS} \right].$$

Отсюда имеем:

$$\left(\Sigma \frac{1}{g_\xi}\right)^2 = \sum_{\xi} \frac{\bar{N}^U}{U!}\, e^{-\bar{N}} \underbrace{\int\int \ldots \int}_{U} \left(\Sigma \frac{1}{g_\xi}\right)^2 \prod_{\xi}^{U} \left[\frac{Q_\xi g_\xi dR_\xi dS_\xi}{\iint Q\, g\, dR\, dS} \right] =$$

$$= \sum \frac{\bar{N}^U}{U!}\, e^{-\bar{N}} \left\{ U \frac{\iint \frac{Q}{g} dR\, dS}{\iint Q\, g\, dR\, dS} + U(U-1) \frac{\left(\iint Q\, dR\, dS\right)^2}{\left(\iint Q\, g\, dR\, dS\right)^2} \right\} =$$

$$= \frac{(\bar{N})^2}{(\bar{g})^2} + \frac{\bar{N}}{\bar{g}} \left(\overline{\frac{1}{g}}\right).$$

Литература

1. В.Ф.Вишневский, Ду Юань-пай, Г.И.Копылов, В.Е.Комолова, В.И.С Мороз, А.В.Никитин, А.И.Родионов, Ю.А.Троян, Цзян Шао-пзюнь, Чжан Вэнь-юй, Б.А.Шахбазян, Янь У-гуан. Метод вычисления геометрической эффективности регистрации событий в пузырьковой камере". Препринт ОИЯИ 1489, Дубна 1964.

2. Б.А.Шахбазян. Вычисление эффективности регистрации событий в пузырьковых камерах методом моделирования. Сборник "Вопросы физики элементарных частиц", Ереван 1964 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июня 1965 г.