ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2174

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Я.А. Смородинский

ПРЕЦЕССИЯ ВОЛЧКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Доклад на II всесоюзной гравитационной конференции, апрель 1965 г., Тбилиси

1965

P-2174

Я.А. Смородинский

ПРЕЦЕССИЯ ВОЛЧКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Доклад на II всесоюзной гравитационной конференции, апрель 1965 г., Тбилиси

§ 1. Искривление пространства и компас

Поворот оси волчка при его движении в гравитационном поле представляет собой хороший способ измерения свойств этого поля, который заменяет собой масштаб и часы. Только в вырожденном случае плоского пространства (или плоских областей) волчок не может заменить масштаб и часы. Плоское пространство можно определить как пространство, в котором можно построить компас, в кривых пространствах компаса (в частности, гирокомпаса) нет.

Обнося волчок по маленьким контурам и измеряя поворот его оси, мы измеряем тензор кривизны:

$$\delta\omega_\alpha = R^{\beta}_{\alpha\gamma\delta}\,\omega_\beta\,\delta x^{\gamma}\,\delta x^{\delta} ,$$

где ω -вектор угловой скорости, который можно считать трехмерным, т.е. подчиненным условию $\omega_\alpha u^\alpha = 0$ (u - скорость наблюдателя), а $\delta x^{\gamma}\,\delta x^{\delta}$ - элемент площади, вокруг которой совершается обход.

Если пространство искривлено, то 10 неприводимых компонент тензора кривизны (при условии $R_{\alpha\beta} = 0$) определяют в каждой точке 6 плоскостей (собственных векторов комплексного тензора 2-го ранга $R_{\alpha\beta}$, где a и b пробегают значения 1 ... 6 и соответствуют каждой паре антисимметричных индексов 4-тензора кривизны). При дополнительном условии $Sp\,R = 0$ могут встретиться три случая (три класса Петрова /1/).(I) Все три вектора ортогональны–2 комплексных собственных значения (4 вещественных числа). (II) Два вектора совпадают (изотропный вектор) – два вещественных числа. (III) Все три вектора изотропны, нет параметров. Собственные вектора и собственные значения дают возможность описания гравитационного поля в инвариантных терминах. Заметим, что случаи совпадающих собственных значений (ненулевых) дают дальнейшую классификацию решений.

Так как прецессия гирокомпаса описывает искривление пространства, то с помощью этого эффекта можно просто описывать гравитационные эффекты, особенно в том случае, когда они малы.

§ 2. Прецессия оси волчка в поле Шварцшильда

При движении волчка по кеплеровой орбите его ось прецессирует по двум причинам: 1) из-за движения в пространстве скоростей Лобачевского – эффект специальной теории относительности – изменение массы со скоростью; 2) из-за движения в кривом координатном пространстве – эффект общей теории относительности. Предположим, что 1) орбита почти круговая; 2) гравитация не влияет на кривизну пространства скоростей– эффекты аддитивны, поле слабое. Тогда угол, на который поворачивается ось после одного оборота планеты, равен площади орбиты, умноженной на кривизну соответствующего пространства [2]. Площадь в пространстве скоростей, очевидно, равна $\pi\beta^2$ (β – скорость, если c равно единице), то кривизна пространства скоростей равна –1. Поэтому угол поворота

$$\delta\omega_1 = -\pi\beta^2 .$$

Поворот в координатном пространстве проще вычислить непосредственно из уравнения параллельного переноса, так как кривизна в поле Солнца непостоянна. Учитывая только не обращающиеся в нуль символы Кристоффеля [2] (стр. 338), получим для изменения компонент угловой скорости $\delta\omega_r$ и $\delta\omega_\rho$ в плоскости орбиты $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial\omega_r}{\partial\phi} = +\Gamma^{\phi}_{r\phi}\,\omega_\phi = +\frac{1}{r}\omega_\phi ,$$

$$\frac{\partial\omega_\phi}{\partial\phi} = +\Gamma^{r}_{\phi\phi}\,\omega_r = -r\left(1-\frac{2km}{c^2 r}\right)\omega_r ;$$

m –масса Солнца, k–постоянная тяготения. Отсюда для ω_r:

$$\frac{d^2\omega_r}{d\phi^2} = -\left(1-\frac{2km}{c^2 r}\right)\omega_r .$$

Так как для почти круговой орбиты

$$\frac{km}{c^2 r} = \beta^2 ,$$

то

$$\frac{d^2\omega_r}{d\phi_r} = -(1-2\beta^2)\omega_r \cancel{= -(1-\beta^2)}\omega_r \neq -(1-\beta^2)^2\omega_r$$

отсюда для угла поворота за один оборот планеты получаем:

$$\delta\omega_2 = -2\pi\beta^2 .$$

Таким образом, прецессия, обусловленная кривизной пространства, вдвое больше прецессии, обусловленной эффектами специальной теории относительности. Складывая два эффекта, для полной прецессии волчка получаем [4]:

$$\delta\omega = -3\pi\beta^2 .$$

Знак минус означает, что прецессия происходит в сторону, обратную движению планеты по орбите.

§ 3. Прецессия перигелия

Движение планеты (с массой, равной 1) по орбите характеризуется двумя постоянными векторами: моментом количества движения $\mathfrak{M}$, определяющим плоскость орбиты, и вектором Лапласа

$$\vec{\mathfrak{L}} = \vec{v} \times \vec{\mathfrak{M}} + km\vec{r}/r ,$$

задающим большую полуось эллипса (когда вектор $\vec{r}$ направлен по большой полуоси, вектор $\vec{v} \times \vec{\mathfrak{M}}$ ему параллелен). Сохранение $\vec{\mathfrak{L}}$ означает, что угловые скорости векторов $\vec{v} \times \vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{r}$ одинаковы – это и есть вырождение кулоновской задачи. Можно сказать, что в этой задаче есть компас: наблюдатель на планете всегда может определить направление $\vec{\mathfrak{L}}$, наблюдая за движением солнца. Релятивистские поправки приводят к прецессии. Вектор $\vec{v} \times \vec{\mathfrak{M}}$ прецессирует со скоростью вдвое большей, чем $\vec{v}$ (он содержит 3-вектор $\vec{v}$ билинейно). Поэтому он отстает от нерелятивистского движения на угол $6\pi\beta^2$ (вдвое больше поворота волчка). Следовательно, $\vec{\mathfrak{L}}$ станет параллельным $\vec{r}$ позже, чем в нерелятивистском случае, на угол $6\pi\beta^2$ (угловые скорости $\vec{\mathfrak{L}}$ и $\vec{r}$ равны в нерелятивистском приближении). Это и есть известный результат, который обычно выражают не через скорость, а через период T и эксцентриситет.

Можно заметить, что, зная прецессию оси волчка и прецессию орбиты, можно устроить компас, заметив, что если в какой-то момент ось волчка и направление $\vec{\mathfrak{L}}$ совпадали, то в первом порядке трисектор угла между этими векторами остаются неподвижными.

§ 4. Поле вращающегося тела

Влияние вращения центрального тела на гравитационное поле вычисляется с помощью электродинамической аналогии. В случае слабого стационарного поля уравнение для метрического тензора имеет вид /2/

$$\tfrac{1}{2}\Delta\psi_k^i = -\frac{8\pi k}{c} \tau_k^i ,$$

где ψ–малые поправки к метрическому тензору. Обозначая $\tfrac{1}{2}\psi_k^i$ через $\vec{A}$ и замечая, что τ_k^0 можно написать в виде $\frac{1}{c}\operatorname{rot}\vec{\mathfrak{M}}$ ($\vec{\mathfrak{M}}$ –момент количества движения центрального тела), подобно тому как ток в электродинамике записывается в виде $\vec{j} = c \operatorname{rot} \vec{m}$ ($\vec{m}$–магнитный момент), получаем

$$\Delta\vec{A} = -\frac{8\pi k}{c^2}\operatorname{rot}\vec{\mathfrak{M}} .$$

Решение этого уравнения имеет вид потенциала магнитного момента

$$\vec{A} = \frac{2k}{c^2}\frac{\vec{\mathfrak{M}}\vec{R}}{R^3} .$$

Аналогом магнитного поля здесь будет поле угловых скоростей

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{2k}{c^2}\,\frac{R^2\vec{\mathfrak{M}} - 3(\vec{R}\vec{\mathfrak{M}})\vec{R}}{R^5} .$$

Это поле скоростей определяет прецессию любого вектора $\vec{B}$ по формуле

$$\dot{\vec{B}} = \vec{\Omega} \times \vec{B} .$$

Таким образом, вращение описывается аналогично магнитному полю в электродинамике, если в ее формулах заменить магнитный момент

$$\vec{m} \to \frac{2k}{c^2}\vec{\mathfrak{M}}$$

и магнитное поле

$$\vec{H} \to \vec{\Omega} .$$

После этой замены нетрудно получить все формулы для спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий. Заметим, что в /2/ (стр. 366) вместо $\vec{A}$ введен другой вектор $\vec{g} = 2\vec{A}$.

§ 5. Кручение пространства и несохранение четности

При описании параллельного переноса с помощью символов Кристоффеля часто опускается одна красивая возможность, которая может иметь не только формальный интерес.

Утверждение, что $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ симметричны по нижним значкам, связывают с тем, что в декартовой системе координат все Γ исчезают. Однако у $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ может быть часть $\Gamma^{\gamma}_{\alpha_\nu\beta}$, антисимметричная по нижним значкам, не исчезающая в нерелятивистском пределе и имеющая тензорный характер. Она, как известно, описывает кручение пространства. Рассмотрим простой пример такого рода. Для простоты мы будем считать, что симметричная часть $\Gamma^{\gamma}_{\underline{\alpha\beta}} = 0$ так, что пространство не искривлено. Если к тому же пространство однородно, то кручение может зависеть только от импульса частицы. Из импульса тензор $\Gamma^{\gamma}_{\alpha_\nu\beta}$ можно построить двумя способами:

Случай I:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha_\nu\beta} = a_P\,(g^{\gamma\delta}\,\epsilon_{\delta\alpha\beta\epsilon}\,p^{\epsilon}) .$$

Случай II:

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha_\nu\beta} = a_T(\delta^{\gamma}_{\alpha}\,p_\beta - \delta^{\gamma}_{\beta}\,p_\alpha) ;$$

a_P и a_T – постоянные.

Рассмотрим уравнения параллельного переноса вектора

$$\delta\omega_\alpha = -\Gamma^{\gamma}_{\alpha_\nu\beta}\,\omega_\gamma\,\delta x^{\beta} .$$

Отсюда получаем для пространственных компонент

Случай I:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = a_P\,\vec{p} \times \vec{\omega} . \qquad (P)$$

Случай II :

$$\mathrm{rot}\,\vec{\omega} = \tfrac{1}{2} a_T \vec{p} \times \vec{\omega} \; . \qquad (T)$$

Это уравнение при вещественном a описывает движение, при котором $\vec{\omega}$ не сокращается по величине (а не только по направлению). Поэтому в классической теории оно не допустимо.

Нетрудно видеть, что уравнение (P) не меняется при пространственном отражении, а уравнение (T) не меняется при отражении времени.

Если в пространстве с уравнением (р) летит поляризованная частица, то ее поляризация будет прецессировать вокруг направления движения; угол прецессии будет пропорциональным пройденному интервалу. В случае света $ds = 0$, а потому свет будет сохранять свою поляризацию.

Я благодарен Б.Л. Иоффе, который несколько лет назад указал на отсутствие эффекта для света.

Литература

1. А.З. Петров. Пространство Эйнштейна. Физматгиз, Москва, 1961.
2. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, Москва, 1960.
3. Я. Смородинский. Атомная энергия, 14, 110 (1963).
4. H. Weyl. Raum, Zeit, Matirie. Springer, 1923.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 мая 1965 г.