ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2131

В.И. Данилов, И.В. Пузынин

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННЫХ ОБЪЕМОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1965

Р-2131

В.И.Данилов, И.В.Пузынин

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННЫХ ОБЪЕМОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Направлено в ЖТФ

1. Потенциал электростатического поля

В общем случае потенциал равномерно заряженных объемных конфигураций можно представить следующим образом /1/

$$U = \frac{\sigma_v}{4\pi\,\epsilon_0} \int_{v'} \frac{dv'}{r}, \qquad (1)$$

где σ_v – объемная плотность зарядов, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\frac{1}{r}$ – обратное расстояние между точкой наблюдения и переменной точкой элементарного объема dv'.

В настоящей работе исследуется электростатическое поле равномерно заряженных цилиндрических конфигураций, наиболее общим случаем которых является часть цилиндрического кольца с центральным углом $2\phi_0$, которую в дальнейшем мы будем называть кольцевым цилиндрическим сектором.

Соотношение (1) в цилиндрической системе координат, показанной на рис. 1, для кольцевого сектора

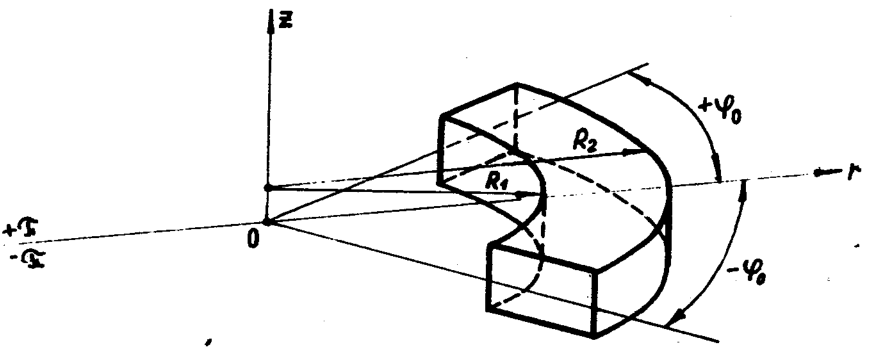

Рис. 1.

имеет вид

$$U = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} \rho \, d\rho \int_{-h}^{h} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z-z')^2 - 2\rho r \cos(\phi-\phi')]^{1/2}}, \tag{2}$$

где R_1 и R_2, $2\phi_0$, $2h$ – внутренний и внешний радиусы, угловая протяженность и высота соответственно, r, z, ϕ – координаты точки наблюдения, ρ, z', ϕ' – координаты переменной точки элементарного объема $dv' = \rho d\rho d\phi' dz'$. Так как величина обратного расстояния

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{[\rho^2 + r^2 + (z-z')^2 - 2\rho r \cos(\phi-\phi')]^{1/2}} \tag{3}$$

в общем случае является функцией как координат точек наблюдения, так и координат переменной точки элементарного объема dv', то при интегрировании выражения (2) необходимо различать случаи, когда

$$z \gtrless z', \qquad \phi \gtrless \phi'. \tag{4}$$

Математически различие случаев, описываемых неравенством (4), сводится к тому, чтобы в выбранных областях пространства, где ищем решение для поля, величины $(z-z')$ или $(z'-z)$, а также $(\phi-\phi')$ или $(\phi'-\phi)$, входящие в соотношение (3), были бы положительными.

В соответствии с этим выражение потенциала равномерно заряженного кольцевого сектора может быть представлено в различной форме.

В области пространства, для которой точка наблюдения удовлетворяет условию

$$-\phi_0 < \phi < \phi_0, \quad -h < z < h \tag{5}$$

как

$$U = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \Big\{ \int_{-\phi_0}^{\phi} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} \rho \, d\rho \Big[\int_{-h}^{z} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z-z')^2 - 2\rho r \cos(\phi-\phi')]^{1/2}} +$$

$$+ \int_{z}^{h} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z'-z)^2 - 2\rho r \cos(\phi-\phi')]^{1/2}} \Big] + \int_{\phi}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \Big[\int_{-h}^{z} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z-z')^2 - 2\rho r \cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} + \tag{6}$$

$$+ \int_{z}^{h} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z'-z)^2 - 2\rho r \cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} \Big] \Big\}.$$

В области, для которой

$$-\phi_0<\phi<\phi_0 , \quad z>h , \tag{7}$$

$$U_1=\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int_{-\phi_0}^{\phi} d\phi' \int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho \int_{-h}^{h}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2+(z-z')^2-2\rho r\cos(\phi-\phi')]^{1/2}}+\int_{\phi}^{\phi_0} d\phi'\int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho\int_{-h}^{h}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2+(z-z')^2-2\rho r\cos(\phi'-\phi)]^{1/2}}\right\} . \tag{8}$$

В области, для которой

$$-\phi_0<\phi<\phi_0 , \quad z<-h \tag{9}$$

$$U_2=\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int_{-\phi_0}^{\phi} d\phi' \int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho \int_{-h}^{h}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2+(z'-z)^2-2\rho r\cos(\phi-\phi')]^{1/2}}+\int_{\phi}^{\phi_0} d\phi'\int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho\int_{-h}^{h}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2+(z'-z)^2-2\rho r\cos(\phi'-\phi)]^{1/2}}\right\} . \tag{10}$$

В области, для которой

$$\phi>\phi_0 , \quad z>h \tag{11}$$

$$U_3=\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho \int_{-h}^{h}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2(z-z')^2-2\rho r\cos(\phi-\phi')]^{1/2}} . \tag{12}$$

В области, для которой

$$\phi>\phi_0 , \ -h<z<h \tag{13}$$

$$U_4=\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int_{R_1}^{R_2}\rho d\rho\left[\int_{-h}^{z}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2(z-z')^2-2\rho r\cos(\phi-\phi')]^{1/2}}+\int_{z}^{h}\frac{dz'}{[\rho^2+r^2(z'-z)^2-2\rho r\cos(\phi-\phi')]^{1/2}}\right] \tag{14}$$

В области, для которой

$$\phi>\phi_0 , \quad z<-h \tag{15}$$

$$U_5 = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \int\limits_{-h}^{h} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z'-z)^2 - 2\rho r\cos(\phi-\phi')]^{1/2}} . \qquad (16)$$

В области, для которой

$$\phi < -\phi_o ,\ z > h \qquad (17)$$

$$U_6 = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \int\limits_{-h}^{h} \frac{dz}{[\rho^2 + r^2 + (z-z')^2 - 2\rho r\cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} . \qquad (18)$$

В области, для которой

$$\phi < -\phi_o ,\quad -h < z < h \qquad (19)$$

$$U_7 = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \left[\int\limits_{-h}^{z} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z-z')^2 - 2\rho r\cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} + \int\limits_{z}^{h} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z'-z)^2 - 2\rho r\cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} \right] . \qquad (20)$$

В области, для которой

$$\phi < -\phi_o ,\quad z < -h \qquad (21)$$

$$U_8 = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi' \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \int\limits_{-h}^{h} \frac{dz'}{[\rho^2 + r^2 + (z'-z)^2 - 2\rho r\cos(\phi'-\phi)]^{1/2}} . \qquad (22)$$

Потенциалы, описываемые соотношениями (6), (8), (10), (12), (14), (16), (18), (20) и (22), определяют во всем пространстве электростатическое поле равномерно заряженного кольцевого сектора.

II. Частное решение уравнения Лапласа

Для нахождения компонент электростатического поля введем функцию

$$U_0 = U_0(\rho, r, \gamma, a) = \int da \int d\rho \int \frac{\rho\, d\gamma}{[\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a]^{1/2}} \quad . \tag{23}$$

Легко видеть, что с помощью функции $U_0 = U_0(\rho, r, \gamma, a)$ в соответствующих пределах по переменным интегрирования ρ, γ и a можно найти потенциалы и компоненты поля в любой из интересующих нас областей пространства. При интегрировании выражения (23) будем предполагать, что

$$a \geq 0 \ , \quad \gamma \geq 0 \ . \tag{24}$$

Интегрируя по переменной "ρ", получим/2/

$$U_0 = \int da \int \{ \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a} + r \cos a \ln [\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a} + \rho - r \cos a] \} d\gamma \, . \tag{25}$$

После второго интегрирования по переменной "γ" имеем

$$U_0 = \int \{ \frac{\gamma}{2} \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a} + \frac{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos a}{2} \ln (\gamma + \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a}) +$$

$$+ r \cos a [\gamma \ln (\rho - r \cos a + \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a}) - \gamma + (\rho - r \cos a) \ln (\gamma + \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a}) - \tag{26}$$

$$- r \sin a \operatorname{arctg} \frac{(\rho - r \cos a)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a} + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos a}{\gamma r \sin a}]\} \quad a \, .$$

Отметим, что второе интегрирование справедливо не только при $a>0$, но и при $a=0$.

Полученное решение в форме (26) можно преобразовать к более удобному для дальнейших расчетов виду:

$$U_0 = \int \{ \frac{\gamma}{2} \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a} + \frac{\rho^2 - r^2 \cos 2a}{2} \operatorname{Arsh} \frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos a}} + r \cos a \, [\gamma \operatorname{Arsh} \frac{\rho - r \cos a}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 a}} -$$

$$- r \sin a \operatorname{arctg} \frac{\gamma(\rho - r \cos a)}{r \sin a \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a}}]\} \, da + \int \{ \tfrac{1}{2}(\rho^2 - r^2 \cos 2a) \ln (\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos a) + \tag{27}$$

$$+ \tfrac{1}{2} r \gamma \cos a \ln (\gamma^2 + r^2 \sin^2 a) - r \gamma \cos a + r^2 \sin a \cos a \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{r \sin a} \} \, da \, .$$

Из выражения (27) видно, что при интегрировании по переменным ρ, γ и α в определенных пределах второй интеграл обращается в нуль, так как любой член подинтегрального выражения зависит только от γ, или от ρ, а не от двух одновременно.

Решения в форме (26) и (27) эквиваленты друг другу, так как

$$\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{r\sin\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma(\rho-r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}= \tag{28}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\gamma r\sin\alpha}{r^2\sin^2\alpha+(\rho-r\cos\alpha)^2+(\rho-r\cos\alpha)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}=\operatorname{arctg}x,$$

$$\operatorname{arctg}x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому в дальнейшем определим функцию

$$U_0=U_0(\rho,r,\gamma,\alpha), \text{ как}$$

$$U_0=\int f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)\,d\alpha, \tag{29}$$

где

$$f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)=\frac{\gamma}{2}\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}+\frac{\rho^2-r^2\cos2\alpha}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}}+ \tag{30}$$

$$+r\cos\alpha\left[\gamma\operatorname{Arsh}\frac{\rho-r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}}-r\sin\alpha\operatorname{arctg}\frac{\gamma(\rho-r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}\right].$$

Частными производными функции $U_0=U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)$ являются

$$\frac{\partial U_0}{\partial\gamma}=\int\frac{\partial f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial\gamma}\,d\alpha, \tag{31}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial\gamma}=\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}+r\cos\alpha\operatorname{Arsh}\frac{\rho-r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}}. \tag{32}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r}=\int\frac{\partial f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}\,d\alpha, \tag{33}$$

где

$$\frac{\partial f_0}{\partial r} = - r \cos 2\alpha \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\alpha}} + \gamma \cos\alpha \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2\alpha}} - \tag{34}$$

$$- r \sin 2\alpha \ \mathrm{arctg} \ \frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r \sin\alpha \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos\alpha}} .$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \alpha} = f_0(\rho, r, \gamma, \alpha), \tag{35}$$

где функция $f_0(\rho, r, \gamma, \alpha)$ определена соотношением (30).

Из свойств функции $U_0 = U_0(\rho, r, \gamma, \alpha)$ необходимо отметить следующие:

1. Функция $U_0 = U_0(\rho, r, \gamma, \alpha)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е.

$$\Delta U_0 = 0 . \tag{36}$$

Доказательство этого важного соотношения дано в Приложении 1.

2. Функция $U_0 = U_0(\rho, r, \gamma, \alpha)$ определена не только при условии (24), но и при

$$R_1 \gtrless r , \quad R_2 \gtrless r \tag{37}$$

3.

$$U_0 \Big|_{\gamma=0} = U_0(\rho, r, 0, \alpha) \equiv 0. \tag{38}$$

III. Уравнение Пуассона для равномерно заряженных цилиндрических конфигураций

Рассмотрим задачу определения электростатического поля для точек наблюдения, находящихся внутри рассматриваемого объема в соответствии со следующими неравенствами

$$R_1 < r < R_2, \ -\phi_0 < \phi < \phi_0 , \ -h < z < h . \tag{39}$$

Для этого случая выражение для потенциала, согласно (6) и (29), можно представить как

$$U = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int_0^{\phi+\phi_0}\left[f_0(\rho, r, \gamma, \alpha)\Big|_{\gamma=0}^{\gamma=z+h} + f_0(\rho, r, \gamma', \alpha)\Big|_{\gamma'=0}^{\gamma'=h-z}\right]d\alpha + \right. \tag{40}$$

$$\left. + \int_0^{\phi_0-\phi}\left[f_0(\rho, r, \gamma, \alpha')\Big|_{\gamma=0}^{\gamma=z+h} + f_0(\rho, r, \gamma', \alpha')\Big|_{\gamma'=0}^{\gamma'=h-z}\right]d\alpha'\right\}\Bigg|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2},$$

где

$$\alpha = \phi - \phi', \quad \alpha' = \phi' - \phi, \quad \gamma = z - z', \quad \gamma' = z' - z \tag{41}$$

независимые переменные.

Соотношение (40) можно переписать с учетом (38) в виде

$$U = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left\{\int_0^{\phi+\phi_0}\left[f_0(\rho, r, z+h, \alpha) + f_0(\rho, r, h-z, \alpha)\right]d\alpha + \right. \tag{42}$$

$$\left. + \int_0^{\phi_0-\phi}\left[f_0(\rho, r, z+h, \alpha') + f_0(\rho, r, h-z, \alpha')\right]d\alpha'\right\}\Bigg|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}$$

Для составления оператора Лапласа, входящего в уравнение Пуассона, найдем частные производные. Они имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[f_0(\rho, r, z+h, \alpha) + f_0(\rho, r, h-z, \alpha)\right]\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi+\phi_0} - \right. \tag{43}$$

$$\left. - \left[f_0(\rho, r, z+h, \alpha) + f_0(\rho, r, h-z, \alpha)\right]\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi_0-\phi}\right\}\Bigg|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}.$$

Отметим, что при

$$\phi = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 . \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\partial f_0(\rho, r, z+h, \phi+\phi_0)}{\partial \phi} + \frac{\partial f_0(\rho, r, h-z, \phi+\phi_0)}{\partial \phi} + \right. \tag{45}$$

$$\left. + \frac{\partial f_0(\rho, r, z+h, \phi_0-\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial f_0(\rho, r, h-z, \phi_0-\phi)}{\partial \phi}\right\}\Bigg|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\int_0^{\phi+\phi_0}\Big[\frac{\partial f_0(\rho, r, z+h, \alpha)}{\partial z} - \frac{\partial f_0(\rho, r, h-z, \alpha)}{\partial z}\Big]d\alpha + \tag{46}$$

$$+\int_0^{\phi_0-\phi}\Big[\frac{\partial f_0(\rho, r, z+h, \alpha')}{\partial z} - \frac{\partial f_0(\rho, r, h-z, \alpha')}{\partial z}\Big]d\alpha'\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}$$

Видно, что при

$$z=0 \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0\ . \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\int_0^{\phi+\phi_0}\Big[\frac{\partial^2 f_0(\rho, r, z+h, \alpha)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_0(\rho, r, h-z, \alpha)}{\partial z^2}\Big]d\alpha +$$

$$+\int_0^{\phi_0-\phi}\Big[\frac{\partial^2 f_0(\rho, r, z+h, \alpha')}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_0(\rho, r, h-z, \alpha')}{\partial z^2}\Big]d\alpha'\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}\ . \tag{48}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\int_0^{\phi+\phi_0}\Big[\frac{\partial f_0(\rho, r, z+h, \alpha)}{\partial r} + \frac{\partial f_0(\rho, r, h-z, \alpha)}{\partial r}\Big]d\alpha +$$

$$+\int_0^{\phi_0-\phi}\Big[\frac{\partial f_0(\rho, r, z+h, \alpha')}{\partial r} + \frac{\partial f_0(\rho, r, h-z, \alpha')}{\partial r}\Big]d\alpha'\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} \tag{49}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \{ \int_0^{\psi+\psi_0} [\frac{\partial^2 f_0(\rho,r,z+h,\alpha)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_0(\rho,r,h-z,\alpha)}{\partial r^2}] d\alpha +$$

$$+ \int_0^{\phi_0-\phi} [\frac{\partial^2 f_0(\rho,r,z+h,\alpha')}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_0(\rho,r,h-z,\alpha')}{\partial r^2}] d\alpha' \} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} \tag{50}$$

Оператор Лапласа для функции U на основании (45), (48)–(50) имеет вид

$$\Delta U = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \{ \Delta U_0(\rho,r,z+h,\phi+\phi_0) + \Delta U_0(\rho,r,h-z,\phi+\phi_0) + \tag{51}$$

$$+ \Delta U_0(\rho,r,z+h,\phi_0-\phi) + \Delta U_0(\rho,r,h-z,\phi_0-\phi) - \lim_{\alpha\to 0} A - \lim_{\alpha'\to 0} B \} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2},$$

где

$$A = \cos 2\alpha \, [\operatorname{arctg} \frac{(\rho - r\cos\alpha)(z+h)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+(z+h)^2-2\rho r\cos\alpha}} + \operatorname{arctg} \frac{(\rho - r\cos\alpha)(h-z)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2(h-z)^2-2\rho r\cos\alpha}}] \tag{52}$$

$$B = \cos 2\alpha' \, [\operatorname{arctg} \frac{(\rho - r\cos\alpha')(z+h)}{r\sin\alpha'\sqrt{\rho^2+r^2+(z+h)^2-2\rho r\cos\alpha'}} + \operatorname{arctg} \frac{(\rho - r\cos\alpha')(h-z)}{r\sin\alpha'\sqrt{\rho^2+r^2+(h-z)^2-2\rho r\cos\alpha'}}].$$

Из соотношения (51) и (52) следует, что при $R_1 < r < R_2$

$$\Delta U = -\frac{\sigma_v}{\epsilon_0} \tag{53}$$

и также при $r < R_1 < R_2$, $r > R_2 > R_1$

$$\Delta U = 0. \tag{54}$$

Таким образом, решение в форме (40) описывает электростатическое поле внутри равномерно заряженного объема цилиндрической конфигурации.

В других областях пространства решения могут быть получены аналогично.

Так, например, в области, для которой $-\phi_0 < \phi \leq \phi_0$, $z > h$

$$U_1 = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \{ \int_0^{\phi+\phi_0} [f_0(\rho,r,z+h,\alpha) - f_0(\rho,r,z-h,\alpha)] d\alpha +$$

$$+ \int_0^{\phi_0-\phi} [f_0(\rho,r,z+h,\alpha') - f_0(\rho,r,z-h,\alpha')] d\alpha' \} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}. \tag{55}$$

Аналогично соотношению (51) найдем, что

$$\Delta U_1 = 0 . \tag{56}$$

Последнее легко получить из уравнения (51), так как в рассматриваемом случае

$$\left\{ \lim_{\alpha \to 0} A' + \lim_{\alpha' \to 0} B' \right\} \Big|_{y = z-h}^{y = z+h} \Big|_{\rho = R_1}^{\rho = R_2} = 0 , \tag{57}$$

где A' и B' получаются из (52) заменой $(z+h)$ и $(h-z)$ на y.

IУ. Компоненты электростатического поля цилиндрических конфигураций конечной высоты

Кольцевой цилиндрический сектор

Выражения для компонент напряженности электростатического поля найдем из соотношения

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} U . \tag{58}$$

В дальнейшем рассмотрим в основном решения для внутренности рассматриваемых объемов. Компоненты напряженности поля определим как

$$E_z = - \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad E_r = - \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad E_\phi = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} . \tag{59}$$

Вертикальная составляющая поля

Выражение, определяющее вертикальную составляющую электростатического поля, согласно (46) и (59), можно представить следующим образом

$$E_z = - \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \{ [\frac{\partial U_0(\rho, r, z+h, \alpha)}{\partial z} - \frac{\partial U_0(\rho, r, h-z, \alpha)}{\partial z}] \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi+\phi_0} + \tag{60}$$

$$+\left[\frac{\partial U_0(\rho,r,z+h,\alpha)}{\partial z}-\frac{\partial U_0(\rho,r,h-z,\alpha)}{\partial z}\right]\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi-\phi_0}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} \qquad (60)$$

где $\dfrac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial z}=\dfrac{\partial U_0}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z}$, а функция

$$\frac{\partial U_0}{\partial\gamma}=-r\sin\alpha\ \mathrm{Arsh}\,\frac{\rho-r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}}+\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\ E(k,\beta)-$$

$$-\frac{r^2+\gamma^2-\rho^2}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}F(k,\beta)+\frac{\gamma^2}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\Pi(n_1,k,\beta)+\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\Pi(n_2,k,\beta)\right] \qquad (61)$$

определена в приложении II (см. формулу (18.2) и $\beta=\dfrac{\alpha-\pi}{2}$.

Из свойств составляющей напряженности поля E_z отметим:

1) При $z=0$

$$E_z(R_1,R_2,h,\phi_0;r,0,\phi)\equiv 0\,. \qquad (62)$$

2) $E_z(R_1,R_2,h,\phi_0;r,z,\phi)=-E_z(R_1,R_2,h,\phi_0;r,-z,\phi)$. (63)

3) При $h\to\infty$ $\qquad E_z(R_1,R_2,h,\phi_0;r,z,\phi)\to 0\,.$ (64)

4) При $r=0$ получим следующее выражение для вертикальной составляющей поля

$$E_z(R_1,R_2,h,\phi_0;0,z,\phi=0)=-\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\phi_0\left[\sqrt{\rho^2+(z+h)^2}-\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}\right]\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}. \qquad (65)$$

5) Максимальное значение вертикальной компоненты напряженности электростатического поля E_z достигается при $z=h$ и $\phi=0$ и определяется выражением

$$E_{z\,max}=-\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{\partial U_0(\rho,r,2h,\alpha)}{\partial z}-\frac{\partial U_0(\rho,r,0,\alpha)}{\partial z}\right]\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi_0}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}, \qquad (66)$$

где $\dfrac{\partial U_0}{\partial z}$ определяется из формулы (61).

Радиальная составляющая поля

Нетрудно найти с помощью формул (49) и (19.2) (Приложение II) выражение радиальной составляющей электростатического поля в следующем виде:

$$E_r = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \{ [\frac{\partial U_0(\rho, r, z+h, a)}{\partial r} + \frac{\partial U_0(\rho, r, h-z, a)}{\partial r}] \Big|_{a=0}^{a=\phi+\phi_0} + \tag{67}$$

$$+ [\frac{\partial U_0(\rho, r, z+h, a)}{\partial r} + \frac{\partial U_0(\rho, r, h-z, a)}{\partial r}] \Big|_{a=0}^{a=\phi_0-\phi} \Big\} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2},$$

где функция

$$\frac{\partial U_0}{\partial r} = -\frac{r}{2} \sin 2a \ \mathrm{Arsh} \frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos a}} + \gamma \sin a \ \mathrm{Arsh} \frac{\rho - r\cos a}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2 a}} +$$

$$+ \frac{r}{2} \cos 2a \ \mathrm{arctg} \frac{\gamma(\rho - r\cos a)}{r \sin a \sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}} + \frac{\gamma\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}{2r} E(k, \beta) - \tag{68}$$

$$- \frac{\gamma(\gamma^2+r^2+2\rho^2)}{2r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} F(k, \beta) + \frac{\gamma(\rho-r)\rho^2}{2r(\rho+r)\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \Pi(n_3, k, \beta) -$$

$$- \frac{\gamma r}{2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} [\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r} \Pi(n_1, k, \beta) + \frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r} \Pi(n_2, k, \beta)] .$$

вычислена в Приложении II .

Максимальное значение радиальная составляющая напряженности электростатического поля принимает при $z=0$ и $\phi=0$ и может быть вычислена по формуле

$$E_{r\,max} = -\frac{\sigma_v}{\pi\epsilon_0} \frac{\partial U_0(\rho, r, h, a)}{\partial r} \Big|_{a=0}^{a=\phi_0} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}, \tag{69}$$

$$\frac{\partial U_0(\rho, r, h, a)}{\partial r} \Big|_{a=0}^{a=\phi_0} = -\frac{r}{2} \sin 2\phi_0 \ \mathrm{Arsh} \frac{h}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\phi_0}} +$$

$$+ h \sin\phi_0 \ \mathrm{Arsh} \frac{\rho - r\cos\phi_0}{\sqrt{h^2+r^2\sin^2\phi_0}} + \frac{r}{2} \cos 2\phi_0 \ \mathrm{arctg} \frac{h(\rho - r\cos\phi_0)}{r\sin\phi_0\sqrt{\rho^2+r^2+h^2-2\rho r\cos\phi_0}} +$$

$$+\frac{h\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}}{2r}\,E\left(k(h),\frac{\phi_0}{2}\right)-\frac{h(h^2+r^2+2\rho^2)}{2r\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}}\,F\left(k(h),\frac{\phi_0}{2}\right)-$$

$$-\frac{hr}{2\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}}\left[\frac{\sqrt{h^2+r^2}+\rho}{\sqrt{h^2+r^2}-r}\,\Pi\left(n_1,k(h),\frac{\phi_0}{2}\right)+\frac{\sqrt{h^2+r^2}-\rho}{\sqrt{h^2+r^2}+r}\,\Pi\left(n_2,k(h),\frac{\phi_0}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{h(\rho-r)\rho^2}{2(\rho+r)r\sqrt{(\rho+r)^2+h^2}}\,\Pi\left(n_3,k(h),\frac{\phi_0}{2}\right), \tag{70}$$

$$k^2(h)=\frac{4\rho r}{(\rho+r)^2+h^2}.$$

При $r=0$ выражение радиальной составляющей может быть представлено следующим образом

$$E_r\,(R_1,R_2,h,\phi_0;0,z,0)=-\frac{\sigma_V}{2\pi\epsilon_0}\sin\phi_0\left\{(z+h)\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho}{z+h}+\right.$$
$$\left.+(h-z)\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho}{h-z}\right\}\Bigg|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}. \tag{71}$$

Для полноты свойств укажем без доказательств из физических соображений, что составляющая поля E_r меняет свой знак в интервале $R_1<r<R_2$.

Азимутальная составляющая поля

Из уравнений (59) и (43) выражение, определяющее азимутальную составляющую электростатического поля, можно представить в следующей форме

$$E_\phi=-\frac{\sigma_V}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\{f(\rho,r,z+h,\alpha)+f(\rho,r,h-z,\alpha)\}\Bigg|_{\alpha=\phi_0-\phi}^{\alpha=\phi_0+\phi}\Bigg|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}, \tag{72}$$

где функция $f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)$ определена уравнением (30).

Из свойств азимутальной составляющей электростатического поля отметим следующие:

1) При $\phi=0$ или $\phi=\pi$

$$E_\phi\,(R_1,R_2,h,\phi_0;r,z,0)=E_\phi(R_1,R_2,h,\phi_0;r,z,\pi)\equiv 0\,. \tag{73}$$

2) При $r=0$

$$E_\phi(R_1,R_2,h,\phi_0;0,z,0)\equiv 0\,.$$

3) Для практических расчетов часто необходимо знать максимальное значение составляющей, которое получается при $z=0$ и $\phi=\phi_0$ и определяется выражением

$$E_{\phi\,max} = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\{ f_0(\rho, r, h, 2\phi_0) - f_0(\rho, r, h, 0)\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} \qquad (74)$$

или

$$E_{\phi\,max} = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{ \frac{h}{r}\sqrt{\rho^2+r^2+h^2-2\rho r\cos 2\phi_0} + \frac{\rho^2-r^2\cos 4\phi_0}{r}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{h}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos 2\phi_0}} +$$

$$+ 2h\cos 2\phi_0\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho - r\cos 2\phi_0}{\sqrt{h^2+r^2\sin^2 2\phi_0}} - r\sin 2\phi_0\,\mathrm{arctg}\,\frac{h(\rho - r\cos 2\phi_0)}{r\sin 2\phi_0\sqrt{\rho^2+r^2+h^2-2\rho r\cos 2\phi_0}} - \qquad (75)$$

$$- \frac{h\sqrt{(\rho-r)^2+h^2}}{r} - \frac{\rho^2-r^2}{r}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{h}{|\rho - r|} - 2h\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho - r}{h}\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}.$$

Цилиндрическое кольцо

Составляющие электростатического поля от равномерно заряженного цилиндрического кольца легко получить из (60) и (67), положив в них $\phi=0$, $\phi_0=\pi$.

Тогда выражения для составляющих напряженности поля можно записать в следующей форме

$$E_z = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\partial U_0(\rho, r, \gamma, \alpha)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=h-z}^{\gamma=z+h}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}, \qquad (76)$$

где $\dfrac{\partial U_0(\rho, r, \gamma, \alpha)}{\partial\gamma}$ определено уравнением (61)

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\Big\{ \frac{\partial U_0(\rho, r, z+h, \alpha)}{\partial r} + \frac{\partial U_0(\rho, r, h-z, \alpha)}{\partial r}\Big\}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}. \qquad (77)$$

где $\dfrac{\partial U_0(\rho, r, \alpha, \gamma)}{\partial r}$ определено формулой (68)

$$E_\phi = 0\,. \qquad (78)$$

Цилиндрический сектор

Для получения выражений, определяющих компоненты электростатического поля от равномерно заряженного цилиндрического сектора, необходимо положить в формулах (60), (67) и (72) $R_1 = 0$, $R_2 = R$.

Отметим, что

$$\frac{\partial U_0}{\partial \gamma}\Big|_{\rho=0} = r\sin\alpha \,\mathrm{Arsh}\,\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} + \gamma\,[\,\mathrm{arctg}\,(\Big|\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\Big|\,\mathrm{tg}\,\beta\,) + \tag{79}$$

$$+\,\mathrm{arctg}\,(\Big|\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\Big|\,\mathrm{tg}\,\beta\,)\,]\,;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r}\Big|_{\rho=0} = -\frac{r}{2}\sin 2\alpha \,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{r} - \gamma\sin\alpha\,\mathrm{Arsh}\,\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} - \tag{80}$$

$$-\frac{r}{2}\cos 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{\gamma^2+r^2}} + \frac{r}{2}\,[\,\mathrm{arctg}\,(\Big|\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\Big|\,\mathrm{tg}\,\beta\,) +$$

$$+\,\mathrm{arctg}\,(\Big|\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\Big|\,\mathrm{tg}\,\beta\,)\,]\,;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varphi}\Big|_{\rho=0} = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2+r^2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\alpha\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{r} - \tag{81}$$

$$-\,r\cos\alpha\,[\,\gamma\,\mathrm{Arsh}\,\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} - r\sin\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{\gamma^2+r^2}}\,]\,.$$

Цилиндр

Электростатическое поле равномерно заряженного цилиндра конечной высоты можно описать с помощью уравнений (77) и (78), полагая в них $R_1=0, R_2=R$. При этом для компонент напряженности электрического поля будем иметь

$$E_z = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial\gamma}\Bigg|_{\gamma=h-z}^{\gamma=z+h}\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} \tag{82}$$

или после подставки пределов по α и ρ

$$E_z = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\left\{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}\,E\left(k(R),\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\gamma^2+r^2-R^2}{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}}F\left(k(R),\frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. -\pi\gamma + \frac{\gamma^2}{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}}\left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+R}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\Pi\left(k(R),n_1,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-R}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\Pi\left(k(R),n_2,\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\gamma=h-z}^{\gamma=h+z} . \tag{83}$$

При $r=0$ имеем

$$E_z\Big|_{r=0} = -\frac{\sigma_v}{2\epsilon_0}\left\{\sqrt{R^2+\gamma^2}-\gamma\right\}\Bigg|_{\gamma=h-z}^{\gamma=z+h} . \tag{84}$$

Если в выражении (82) перейти к пределу при $R\to\infty$, то получим [3]

$$E_z = \frac{\sigma_v}{\epsilon_0}\,z . \tag{85}$$

Для радиальной составляющей поля имеем

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\partial U_0(\rho,r,z+h,\alpha)}{\partial r} + \frac{\partial U_0(\rho,r,h-z,\alpha)}{\partial r}\right\}\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} , \tag{86}$$

где

$$\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} = \left\{\frac{\gamma\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}{2r}E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\gamma(\gamma^2+r^2+2\rho^2)}{2r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$-\frac{\gamma_r}{2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\Pi\left(n_1,k,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\Pi\left(n_2,k,\frac{\pi}{2}\right)\right] + \tag{87}$$

$$\left. + \frac{\gamma(\rho-r)\rho^2}{2r(\rho+r)\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\Pi\left(n_3,k,\frac{\pi}{2}\right)\right\}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} ,$$

$$\frac{\partial U_0(0,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} = -r\,\frac{\pi}{2} . \tag{88}$$

С учетом соотношения (87) уравнение (85) можно переписать в следующем виде

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}\left\{\left[\frac{\partial U_0(R,r,z+h,a)}{\partial r} + \frac{\partial U_0(R,r,h-z,a)}{\partial r}\right]\Bigg|_{a=0}^{a=\pi} + r\pi\right\}. \tag{89}$$

При $z=0$ радиальная составляющая поля определяется с помощью формулы

$$E_r\Big|_{z=0} = -\frac{\sigma_v}{\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\partial U_0(R,r,h,a)}{\partial r}\Bigg|_{a=0}^{a=\pi} + r\frac{\pi}{2}\right\}. \tag{90}$$

Из выражения (89) следует, что при $r=0$

$$E_r = 0 \tag{91}$$

и при $r\to\infty$

$$E_r \to 0. \tag{92}$$

Расчет вертикальной и радиальной составляющих напряженности электростатического поля от равномерно заряженного цилиндра более удобно производить, если воспользоваться результатами по табулированию эллиптических интегралов, выполненных в работе /4/.

В соответствии с выводами /4/ (см. Приложение III) выражения составляющих электрического поля могут быть представлены в следующей форме.

$$E_z = -\frac{\sigma_v}{4\epsilon_0}\left\{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}\,E_0(a) - \frac{\gamma^2+r^2-R^2}{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}}F_0(a) + \right. \tag{93}$$

$$\left. + \gamma\left[\Lambda_0(a,\beta_1)+\Lambda_0(a,\beta_2) + \frac{2\gamma R}{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}\,(\sqrt{R^2+\gamma^2}+R)}F_0(a) - 2\right]\right\}\Bigg|_{\gamma=h-z}^{\gamma=h+z}$$

где $\Lambda_0(a,\beta)$ – табулированная функция /4/, а

$$a = \arcsin\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2+\gamma^2}}, \quad \beta_1 = \arcsin\frac{\sqrt{(R+r)^2+\gamma^2}}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+R}, \quad \beta_2 = \arcsin\frac{|R-\sqrt{r^2+\gamma^2}|}{\sqrt{(R-r)^2+\gamma^2}}. \tag{94}$$

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\epsilon_0}\left\{\frac{(z+h)\sqrt{(R+r)^2+(z+h)^2}}{2r}E_0(a_1) - \frac{(z+h)[(z+h)^2+r^2+2R^2]}{2r\sqrt{(R+r)^2+(z+h)^2}}F_0(a_1) - \right.$$

$$-\frac{r}{2}\left[\Lambda_0(\alpha_1,\beta_1^1)+\Lambda_0(\alpha_1,\beta_2^1)+\frac{2(z+h)R}{\sqrt{(R+r)^2+(z+h)^2}\,(\sqrt{r^2+(z+h)^2}+R)}F_0(\alpha_1)\right]+$$

$$+\frac{R^2}{2r}\Lambda_0(\alpha_1,\beta_3^1)+\frac{(h-z)\sqrt{(R+r)^2+(h-z)^2}}{2r}E_0(\alpha_2)+\frac{R^2}{2r}\Lambda_0(\alpha_2,\beta_3^2)- \tag{95}$$

$$-\frac{r}{2}\left[\Lambda_0(\alpha_2,\beta_1^2)+\Lambda_0(\alpha_2,\beta_2^2)+\frac{2(h-z)R}{\sqrt{(R+r)^2+(h-z)^2}\,(\sqrt{r^2+(h-z)^2}+R)}F_0(\alpha_2)\right]-$$

$$-\frac{(h-z)[(h-z)^2+r^2+2R^2]}{2r\sqrt{(R+r)^2+(h-z)^2}}F_0(\alpha_2)+2r\},$$

где

$$\alpha_1=\alpha(R,r,z+h),\qquad \alpha_2=\alpha(R,r,h-z),$$

$$\beta_1^1=\beta_1(R,r,z+h),\qquad \beta_1^2=\beta_1(R,r,h-z),$$

$$\beta_2^1=\beta_2(R,r,z+h),\qquad \beta_2^2=\beta_2(R,r,h-z)$$

определяются с помощью формул (94), а

$$\beta_3^1=\arcsin\frac{z+h}{\sqrt{(R-r)^2+(z+h)^2}},\qquad \beta_3^2=\arcsin\frac{h-z}{\sqrt{(R-r)^2+(h-z)^2}}. \tag{96}$$

У. Компоненты электростатического поля бесконечно высоких цилиндрических конфигураций

В этом разделе получены выражения для компонент электростатического поля от рассмотренных выше равномерно заряженных цилиндрических конфигураций при условии, что их высота $h\to\infty$, а также для конфигураций, у которых начало цилиндрической системы координат перенесено в точку ($z=-h$, $r=0$), а высота $h\to\infty$.

Такие конфигурации будем называть бесконечными и полубесконечными по высоте соответственно.

В дальнейшем для описания составляющих электростатического поля потребуется знание следующих предельных соотношений

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\partial U(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial\gamma} \Big|_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} = 0 , \tag{97}$$

где $\dfrac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial\gamma}$ определено уравнением (31).

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r} \Big|_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} = \Big\{ \frac{r}{4} \sin 2\alpha \, \ln(\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha) +$$

$$+ \sin\alpha\,(\rho - r\cos\alpha) + \frac{r}{2}\cos 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\rho - r\cos\alpha}{r\sin\alpha} + \frac{\rho^2}{4r}(\pi-\alpha) - \tag{98}$$

$$- \frac{\rho}{2}\sin(\pi-\alpha) - \frac{\rho^2}{2r}\operatorname{sign}(\rho-r) \operatorname{arctg}\left(\left| \frac{\rho-r}{\rho+r} \right| \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{2} \right) \Big\} \Big|_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} ,$$

где $\dfrac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}$ определяется формулой (33).

$$\lim_{\gamma\to\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} = \Big\{ - \frac{\rho^2 - r^2\cos 2\alpha}{4r} \ln(\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha) + \tag{99}$$

$$+ \cos\alpha\,(\rho - r\cos\alpha) - r\sin\alpha\cos\alpha \operatorname{arctg}\frac{\rho - r\cos\alpha}{r\sin\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}$$

где $\dfrac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial\alpha}$ определяется соотношением (35).

Бесконечно высокий кольцевой цилиндрический сектор

Переходя в выражении (60) к пределу при $h\to\infty$, легко получить, что вертикальная составляющая поля

$$E_z = 0 . \tag{100}$$

Из выражения (67) для радиальной составляющей при $h\to\infty$ получим

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0} \Big\{ \lim_{\gamma\to\infty} \frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r} \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi_0+\phi} + \lim_{\gamma\to\infty} \frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r} \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi_0-\phi} \Big\} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} \tag{101}$$

или, используя (98),

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\frac{r}{2}\sin 2(\phi+\phi_0)\ln[\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\phi+\phi_0)] - \pi r\,\mathrm{sign}(\rho-r) +$$

$$+\frac{r}{2}\sin 2(\phi_0-\phi)\ln[\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\phi_0-\phi)] + r\cos 2(\phi+\phi_0)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho-r\cos(\phi+\phi_0)}{r\sin(\phi+\phi_0)} + \qquad (102)$$

$$+\frac{\pi}{r}\rho^2\mathrm{sign}(\rho-r) + 2\rho\sin\phi_0\cos\phi - \frac{\phi_0}{r}\rho^2 + r\cos 2(\phi_0-\phi)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho-r\cos(\phi_0-\phi)}{r\sin(\phi_0-\phi)} -$$

$$-\frac{\rho^2}{r}\mathrm{sign}(\rho-r)\Big[\mathrm{arctg}\Big(\Big|\frac{\rho-r}{\rho+r}\Big|\mathrm{tg}\,\frac{\pi-(\phi_0+\phi)}{2}\Big) + \mathrm{arctg}\Big(\Big|\frac{\rho-r}{\rho+r}\Big|\mathrm{tg}\,\frac{\pi-(\phi_0-\phi)}{2}\Big)\Big]\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}.$$

При $r=0$ выражение для радиальной составляющей принимает вид

$$E_r\Big|_{r=0} = -\frac{\sigma_v}{2\pi\epsilon_0}(R_2-R_1)\sin\phi_0. \qquad (103)$$

При $\phi=0$ и $r<R_1<R_2$ из общего выражения (102) имеем

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{r\sin 2\phi_0\ln(\rho^2+r^2-2\rho r\cos\phi_0) + 2r\cos 2\phi_0\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho-r\cos\phi_0}{r\sin\phi_0} - \qquad (104)$$

$$-\frac{2}{r}\rho^2\,\mathrm{arctg}\Big(\Big|\frac{\rho-r}{\rho+r}\Big|\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi_0}{2}\Big) + \frac{\rho^2}{r}(\pi-\phi_0) + 2\rho\sin\phi_0\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}.$$

Из того же выражения (102) получим, что при $\phi=0$ и $R_1<r<R_2$

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\Big[r\sin\phi_0\ln(\rho^2+r^2-2\rho r\cos\phi_0) + 2r\cos 2\phi_0\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho-r\cos\phi_0}{r\sin\phi_0} - \qquad (105)$$

$$-\frac{\phi_0}{r}\rho^2 + 2\rho\sin\phi_0\Big]\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} + \frac{\pi}{r}(R_2^2+R_1^2-2r^2) - \frac{2}{r}\Big[R_2^2\,\mathrm{arctg}\Big(\Big|\frac{R_2-r}{R_2+r}\Big|\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi_0}{2}\Big) +$$

$$+R_1^2\,\mathrm{arctg}\Big(\Big|\frac{R_1-r}{R_1+r}\Big|\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi_0}{2}\Big)\Big]\Big\}.$$

Подобным же образом при $\phi=0$ и $r>R_2>R_1$ находим, что

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{r\sin 2\phi_0\ln(\rho^2+r^2-2\rho r\cos\phi_0) + 2r\cos 2\phi_0\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho-r\cos\phi_0}{r\sin\phi_0} + \qquad (106)$$

$$+\frac{2}{r}\rho^2\,\mathrm{arctg}\Big(\Big|\frac{\rho-r}{\rho+r}\Big|\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi_0}{2}\Big) - \frac{\rho^2}{r}(\pi+\phi_0) + 2\rho\sin\phi_0\Big\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}.$$

Предельный переход в формуле (72) дает при $h \to \infty$ следующее выражение азимутальной составляющей электростатического поля

$$E_{\phi} = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \Big\{ -\frac{\rho^2 - r^2\cos 2(\phi+\phi_0)}{2r} \ln[\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\phi+\phi_0)] - 4\rho\sin\phi_0 \sin\phi +$$

$$+ \frac{\rho^2 - r^2\cos 2(\phi_0-\phi)}{2r} \ln[\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\phi_0-\phi)] - r\sin 2(\phi+\phi_0)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho - r\cos(\phi+\phi_0)}{r\sin(\phi+\phi_0)} + \tag{107}$$

$$+ r\sin 2(\phi_0-\phi)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\rho - r\cos(\phi_0-\phi)}{r\sin(\phi_0-\phi)} \Big\} \Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2} .$$

Отсюда, в частности, следует, что при $r=0$ и $\phi=0$ $(r \neq 0)$

$$E_{\phi} = 0 . \tag{108}$$

Бесконечно высокое цилиндрическое кольцо (труба)

Компонеты электростатического поля для этой конфигурации можно получить из формул (100), (102) и (107), положив в них $\phi=0$ и $\phi_0=\pi$.

Тогда находим, что

$$E_z = 0 \tag{109}$$

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \Big\{ -\pi r[\,\mathrm{sign}(R_2 - r) - \mathrm{sign}(R_1 - r)] - \frac{\pi}{r}(R_2^2 - R_1^2) + \tag{110}$$

$$+ \frac{\pi}{r}[\,R_2^2\,\mathrm{sign}(R_2 - r) - R_1^2\,\mathrm{sign}(R_1 - r)] \Big\} .$$

В частности, из последней формулы при $r < R_1 < R_2$ следует

$$E_r = 0 , \tag{111}$$

при $R_1 < r < R_2$

$$E_r = \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \frac{(r^2 - R_1^2)}{r} . \tag{112}$$

И, наконец, при $r > R_2 > R_1$

$$E_r = \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r} . \tag{113}$$

Для азимутальной составляющей получим

$$E_\phi = 0 \ . \tag{114}$$

Бесконечно высокий цилиндрический сектор

Из соотношений (100), (102) и (107), положив в них $R_1 = 0$, $R_2 = R$, получим следующие выражения для компонент напряженности электростатического поля

$$E_z = 0 \ , \tag{115}$$

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{r}{2}\sin 2(\phi+\phi_0)\,\ln\frac{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi+\phi_0)}{r^2} + 2R\sin\phi_0\cos\phi + \right.$$

$$+\frac{r}{2}\sin 2(\phi_0-\phi)\,\ln\frac{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi_0-\phi)}{r^2} - \pi r\,[\,\mathrm{sign}(R-r)+1] - \frac{\phi_0}{r}R^2 + \tag{116}$$

$$+\frac{\pi}{r}R^2\,\mathrm{sign}(R-r) + r\cos 2(\phi_0+\phi)\left[\mathrm{arctg}\frac{R-r\cos(\phi+\phi_0)}{r\sin(\phi+\phi_0)} + \mathrm{arctg}\frac{\cos(\phi+\phi_0)}{\sin(\phi+\phi_0)}\right] +$$

$$\left. + r\cos 2(\phi_0-\phi)\left[\mathrm{arctg}\frac{R-r\cos(\phi_0-\phi)}{r\sin(\phi_0-\phi)} + \mathrm{arctg}\frac{\cos(\phi_0-\phi)}{\sin(\phi_0-\phi)}\right]\right\}.$$

При $\phi = 0$, $r<R$ из последнего соотношения следует

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{ r\sin 2\phi_0\,\ln\frac{R^2+r^2-2Rr\cos\phi_0}{r^2} + 2r\cos 2\phi_0\left[\mathrm{arctg}\frac{R-r\cos\phi_0}{r\sin\phi_0} + \right.\right. \tag{117}$$

$$\left. + \mathrm{arctg}\frac{\cos\phi_0}{\sin\phi_0}\right] - \frac{2R^2}{r}\,\mathrm{arctg}\left(\left|\frac{R-r}{R+r}\right|\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi_0}{2}\right) + \frac{R^2}{r}(\pi-\phi_0) - 2\pi r + 2R\sin\phi_0 \right\} .$$

При $\phi = 0$, $r > R$

$$E_r = -\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\left\{ r\sin 2\phi_0\,\ln\frac{R^2+r^2-2Rr\cos\phi_0}{r^2} + 2r\cos 2\phi_0\left[\mathrm{arctg}\frac{R-r\cos\phi_0}{r\sin\phi_0} + \right.\right. \tag{118}$$

$$\left. + \mathrm{arctg}\frac{\cos\phi_0}{\sin\phi_0}\right] + \frac{2R^2}{r}\,\mathrm{arctg}\left(\left|\frac{R-r}{R+r}\right|\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi_0}{2}\right) - \frac{R^2}{r}(\pi+\phi_0) + 2R\sin\phi_0 \right\} .$$

Азимутальная составляющая поля имеет вид

$$E_{\phi}=-\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\Big[-\frac{R^2-r^2\cos 2\alpha}{2r}\ln(R^2+r^2-2Rr\cos\alpha)-r\sin\alpha\Big(\operatorname{arctg}\frac{R-r\cos\alpha}{r\sin\alpha}+ \tag{119}$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big)\Big]\Big|_{\alpha=\phi_0-\phi}^{\alpha=\phi_0+\phi}-4R\sin\phi_0\sin\phi\Big\}.$$

Бесконечно высокий цилиндр

Формулы для компонент напряженности электростатического поля легко получить из (116) и (119), положив в них $\phi=0$, $\phi_0=\pi$.

При этом будем иметь, что

$$E_z=E_{\phi}=0, \tag{120}$$

$$E_r=\frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\pi r[\operatorname{sign}(R-r)+1]+\frac{\pi R^2}{r}[1-\operatorname{sign}(R-r)]\Big\} \tag{121}$$

В области $r<R$

$$E_r=\frac{\sigma_v}{2\epsilon_0}r. \tag{122}$$

В области $r>R$

$$E_r=\frac{\sigma_v}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{r}. \tag{123}$$

Эти формулы, как и следует ожидать, совпадают с выражением радиальной составляющей поля, получаемой с помощью теоремы Гаусса /1/.

Электростатическое поле от полубесконечных по высоте цилиндрических конфигураций

После перехода к новой системе координат (начало в точке $z=-h$, $r=0$) выражения компонент электростатического поля в общем случае (полубесконечный по высоте кольцевой цилиндрический сектор) будут иметь следующий вид.

Вертикальная составляющая поля

$$E_z = -\frac{\sigma_\tau}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial z}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi+\phi_0} + \frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial z}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi-\phi_0} \right\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}, \qquad (124)$$

где $\frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial z}$ определяется из выражения (61) при подстановке в него $\gamma = z$.

Радиальная составляющая поля

$$E_r = -\frac{\sigma_\tau}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[\frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial r} + \lim_{\gamma\to\infty}\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}\right]\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi+\phi_0} + \right. \qquad (125)$$

$$\left. + \left[\frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial r} + \lim_{\gamma\to\infty}\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}\right]\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\phi-\phi_0}\right\}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2},$$

где $\frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial r}$ определяется из соотношения (68) при подстановке в него $\gamma = z$, а $\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}$ — формулой (98).

Азимутальная составляющая поля

$$E_\phi = -\frac{\sigma_\tau}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial \alpha} + \lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial \alpha}\right\}\Big|_{\alpha=\phi-\phi_0}^{\alpha=\phi+\phi_0}\Big|_{\rho=R_1}^{\rho=R_2}, \qquad (126)$$

где функция $\frac{\partial U_0(\rho,r,z,\alpha)}{\partial \alpha}$ определяется из уравнения (35) при подстановке в него $\gamma = z$, а $\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\partial U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial \alpha}$ — формулой (99).

Так как при $z = 0$

$$\frac{\partial U_0(\rho,r,0,\alpha)}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial U_0(\rho,r,0,\alpha)}{\partial \alpha} = 0, \qquad (127)$$

то

$$E_r(R_1, R_2, \phi_0; r, z=0, \phi) = ½\, E_r(R_1, R_2, \phi_0; r, \phi) \qquad (128)$$

$$E_\phi(R_1, R_2, \phi_0; r, z=0, \phi) = ½\, E_\phi(R_1, R_2, \phi_0; r, \phi), \qquad (129)$$

т.е. при $z=0$ радиальная и азимутальная составляющие напряженности электростатического поля от полубесконечных по высоте цилиндрических конфигураций равны половине соответствующих компонент поля от бесконечно высоких конфигураций.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Рассмотрим выражение

$$U_0 = \int f_0(\rho, r, \gamma, \alpha)\, d\alpha\,, \tag{1,1}$$

где функция $f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)$ определена уравнением (30). Для определения лапласиана функции $U_0 = U_0(\rho,r,\gamma,\alpha)$ найдем частные производные.

Они имеют вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial \alpha}, \tag{2,1}$$

где

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial \alpha} = \sin 2\alpha \,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}} - \tag{3,1}$$

$$-\frac{\gamma}{r}\sin\alpha\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} - \cos 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r} = \int \frac{1}{r}\frac{\partial f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}\, d\alpha\,, \tag{4,1}$$

где $\dfrac{\partial f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r}$ определено уравнением (33);

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} = \int \frac{\partial^2 f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r^2}\, d\alpha\,, \tag{5,1}$$

где функция

$$\frac{\partial^2 f_0(\rho,r,\gamma,\alpha)}{\partial r^2} = -\cos 2\alpha\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}} - \sin 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}} +$$

$$+\gamma\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} - r\cos 2\alpha\,\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}} - \tag{6,1}$$

$$- r\sin 2\alpha\,\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}\,,$$

а

$$\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Arsh}\frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha}} = -\frac{\gamma^2\cos\alpha + \rho r\sin^2\alpha}{(\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Arsh}\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\alpha}} = -\frac{\gamma(r - \rho\cos\alpha)}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\alpha)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}}, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{arctg}\frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}} = -\frac{\gamma\sin\alpha(\rho - r\cos\alpha)}{(\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}} -$$

$$-\frac{\gamma\rho\sin\alpha}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\alpha)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}}; \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial\gamma^2} = \int \frac{\partial^2 f_0(\rho, r, \gamma, \alpha)}{\partial\gamma^2}\, d\alpha, \tag{10.1}$$

где

$$\frac{\partial^2 f_0(\rho, r, \gamma, \alpha)}{\partial\gamma^2} = \frac{\gamma(\gamma^2 + r^2 - \rho r\cos\alpha)}{(\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}}. \tag{11.1}$$

Суммируя члены из соотношений (2.1), (4.1), (5.1), (11.1) получим, что

$$\Delta U_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial\gamma^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial\alpha^2} = 0. \tag{12.1}$$

При этом использованы следующие соотношения

$$\frac{\gamma\rho\sin\alpha}{2r\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}} + \frac{\rho^2 - r^2\cos 2\alpha}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{Arsh}\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\alpha}} -$$

$$-\frac{\sin 2\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos\alpha}} + \frac{\gamma}{r}\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{Arsh}\frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha}} = 0, \tag{13.1}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos a}}=-\frac{\gamma\rho r\sin a}{(\rho^2+r^2-2\rho r\cos a)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}}, \tag{14.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho-r\cos a}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2 a}}=\frac{r\sin a\,(\gamma^2+r^2-\rho r\cos a)}{(\gamma^2+r^2\sin^2 a)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}}, \tag{15.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\rho-r\cos a)}{r\sin a\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}}=-\frac{\gamma r\cos a(\rho-r\cos a)}{(\gamma^2+r^2\sin^2 a)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}}+ \tag{16.1}$$

$$+\frac{\gamma r(r-\rho\cos a)}{(\rho^2+r^2-2\rho r\cos a)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}},$$

а также

$$\gamma\cos a\,\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho-r\cos a}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2 a}}-r\cos 2a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos a}}+$$

$$+\sin 2a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos a}}-r\sin 2a\,\frac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\rho a-r\cos a)}{r\sin a\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}} \tag{17.1}$$

$$-\cos 2a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\gamma(\rho-r\cos a)}{r\sin a\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}}-\frac{\gamma}{r}\sin a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\rho-r\cos a}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2 a}}+$$

$$+\frac{\gamma(\gamma^2+r^2-\rho r\cos a)}{(\gamma^2+r^2\sin^2 a)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos a}}=0.$$

В заключение отметим, что соотношение (12.1) справедливо при условии, что параметры a и γ принимают одно из следующих значений

$$\gamma=\left\{\begin{array}{l} z'-z \\ z-z' \end{array}\right., \qquad a=\left\{\begin{array}{l} \phi'-\phi \\ \phi-\phi' \end{array}\right., \tag{18.1}$$

т.е. с помощью функции $U_0=U_0(\rho,r,\gamma,a)$, являющейся таким образом частным решением уравнения Лапласа, можно описать электростатическое поле в пространстве, где нет зарядов.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Компоненты электростатического поля от цилиндрических равномерно заряженных конфигураций определяются при помощи

$$\frac{\partial U_0}{\partial \gamma} = \int \left\{ \sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r \cos a} + r \cos a \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\rho - r\cos a}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 a}} \right\} da \tag{1.2}$$

и

$$\frac{\partial U_0}{\partial r} = \int \left\{ - r\cos 2a \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos a}} + \gamma \cos a \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\rho - r\cos a}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2 a}} - \right. \tag{2.2}$$

$$\left. - r\sin 2a \ \mathrm{arctg} \ \frac{\gamma(\rho - r\cos a)}{r\sin a\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos a}} \right\} da .$$

Как будет показано в дальнейшем, решения в форме (1.2) и (2.2) могут быть представлены в окончательном виде с помощью неполных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода, таблицы которых опубликованы в работе /5/.

1. Вычисление интеграла вида

$$I_1 = \int \cos a \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\rho - r\cos a}{\sqrt{\gamma^2 + r^2 \sin^2 a}} \, da . \tag{3.2}$$

Интегрируя соотношение (3.2) по частям, после преобразований числителя подинтегрального выражения получим

$$I_1 = \sin a \ \mathrm{Arsh} \ \frac{\rho - r\cos a}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2 a}} - \frac{1}{r}\int \frac{\gamma^2 + r^2 - \rho r\cos a}{\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos a}} \, da +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{r}\int \frac{\gamma^2 + r^2 - \rho r\cos a}{(\gamma^2 + r^2\sin^2 a)\sqrt{\rho^2 + r^2 + \gamma^2 - 2\rho r\cos a}} \, da . \tag{4.2}$$

Второй член в равенстве (4.2) представим следующим образом

$$\int \frac{\gamma^2+r^2-\rho r\cos\alpha}{\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}\,d\alpha = \tfrac{1}{2}\int\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}\,d\alpha +$$

$$+\frac{r^2+\gamma^2-\rho^2}{2}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}. \qquad (5.2)$$

При преобразованиях третьего члена в соотношении (4.2) перейдем к новой переменной $\alpha=\pi+2\beta$. Тогда имеем

$$\cos\alpha = -\cos 2\beta = 2\sin^2\beta - 1\ ,\ d\alpha = 2d\beta\ , \qquad (6.2)$$

$$\frac{1}{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2+r^2}}\left[\frac{1}{(\sqrt{\gamma^2+r^2}-r)(1-n_1\sin^2\beta)}+\frac{1}{(\sqrt{\gamma^2+r^2}+r)(1-n_2\sin^2\beta)}\right] = \qquad (7.2)$$

$$= -\frac{1}{2r\cos\alpha}\left[\frac{1}{(\sqrt{\gamma^2+r^2}-r)(1-n_1\sin^2\beta)}-\frac{1}{(\sqrt{\gamma^2+r^2}+r)(1-n_2\sin^2\beta)}\right],$$

$$\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha} = \sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\ , \qquad (8.2)$$

где

$$n_1 = -\frac{2r}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\ ,\ n_2 = \frac{2r}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\ ,\ k = \frac{4\rho r}{(\rho+r)^2+\gamma^2}. \qquad (9.2)$$

С учетом соотношений (6.2 - 9.2) выражение искомого интеграла можно представить в виде

$$I_1 = \sin\alpha\ \mathrm{Arsh}\frac{\rho-r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} - \frac{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}{r}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\,d\beta -$$

$$-\frac{r^2+\gamma^2-\rho^2}{r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\int\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} + \qquad (10.2)$$

$$+\frac{\gamma^2}{r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\int\frac{d\beta}{(1-n_1\sin^2\beta)\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}+\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\int\frac{d\beta}{(1-n_2\sin^2\beta)\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right].$$

или в более удобной для расчетов форме

$$I_1 = \sin\alpha \,\mathrm{Arsh}\, \frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha}} - \frac{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}{r}\, E(k,\beta) - \frac{r^2+\gamma^2-\rho^2}{r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\, F(k,\beta) +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r}\, \Pi(n_1,k,\beta) + \frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r}\, \Pi(n_2,k,\beta) \right], \tag{11.2}$$

где

$$E(k,\beta) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\, d\beta, \qquad F(k,\beta) = \int \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}, \tag{12.2}$$

$$\Pi(n,k,\beta) = \int \frac{d\beta}{(1-n\sin^2\beta)\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} - \ldots$$

эллиптические интегралы второго, первого и третьего рода в форме Лежандра, соответственно.

2. Вычисление интеграла вида

$$I_2 = \int \sin 2\alpha \,\mathrm{arctg}\, \frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}}\, d\alpha. \tag{13.2}$$

Интегрируя соотношение (13.2) по частям, получим

$$I_2 = -\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha \,\mathrm{arctg}\, \frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int \cos 2\alpha \left\{ \frac{\gamma r(r-\rho\cos\alpha)}{(\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}} - \frac{\gamma r\cos\alpha(\rho - r\cos\alpha)}{(\gamma^2+r^2\sin^2\alpha)\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}} \right\} d\alpha. \tag{14.2}$$

После ряда простых, но довольно громоздких преобразований выражение искомого интеграла можно представить следующим образом

$$I_2 = -\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha \,\mathrm{arctg}\, \frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}} + \tag{15.2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\gamma \Big\{ \frac{r^2+2\gamma^2}{r^2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \Big[\frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^4+r^2}+\rho}}{\sqrt{\sqrt{\gamma^4+r^2}-r}}\, \Pi(n_1,k,\beta) + \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^4+r^2}-\rho}}{\sqrt{\sqrt{\gamma^4+r^2}+r}}\, \Pi(n_2,k,\beta)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{3\rho r}\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha} + \tfrac{1}{2}\frac{(r^2-\rho^2)(\rho^4+r^4)}{\rho^2 r^2(\rho+r)^2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\,\Pi(n_3,k,\beta) + \tag{15.2}$$

$$+ \frac{5r^2-13\rho^2+2\gamma^2}{6\rho^2 r^2}\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\,E(k,\beta) + \frac{16\rho^4-8r^4-2\gamma^4-13\rho^2\gamma^2-14\rho^2r^2-7\gamma^2r^2}{6\rho^2r^2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\,F(k,\beta)\Big\},$$

где

$$n_3 = \frac{4\rho r}{(\rho+r)^2}. \tag{16.2}$$

3. Вычисление интеграла вида

$$I_3 = \int \cos 2\alpha \;\operatorname{Arsh}\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}}\,d\alpha . \tag{17.2}$$

Вычисление интеграла в форме (16.2) проводится аналогично вычислению (3.2) и (13.2). В конечном виде выражение искомого интеграла можно представить как

$$I_3 = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\;\operatorname{Arsh}\frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}} - \frac{\gamma}{6\rho r}\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha} -$$

$$- \frac{\gamma\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\,(5\rho^2+5r^2+2\gamma^2)}{12\rho^2r^2}\,E(k,\beta) + \frac{\gamma[(\rho^2+r^2)(7\gamma^2+8\rho^2+8r^2)-8\rho^2r^2+2\gamma^2]}{12\rho^2r^2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\,F(k,\beta) \tag{18.2}$$

$$- \frac{\gamma(\rho^2+r^2)(\rho-r)^2}{4\rho^2r^2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\,\Pi(n_3,k,\beta).$$

Отметим, что представления интегралов в форме (11.2), (15. 2) и (17.2) справедливо для всех значений r, ρ, γ и α, за исключением $r=0$ и $\rho=0$. При этих значениях r и ρ интегралы могут быть доопределены из исходных выражений (3.2), (13.2) и (17.2).

На основании полученных соотношений (11.2), (15.2), (18.2) выражения частных производных от функции $U_0 = U_0(\rho, r, \gamma, \alpha)$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial \gamma} = &- r \sin\alpha \,\mathrm{Arsh}\, \frac{\rho - r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + r^2\sin^2\alpha}} + \sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\, E(k,\beta) - \\
&- \frac{r^2+\gamma^2-\rho^2}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} F(k,\beta) + \frac{\gamma^2}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r} \Pi(n_1,k,\beta) + \right. \\
&\left. + \frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r} \Pi(n_2,k,\beta) \right],
\end{aligned}
\tag{19.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial r} = &- \frac{r}{2} \sin 2\alpha \,\mathrm{Arsh}\, \frac{\gamma}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\alpha}} + \\
&+ \frac{r}{2}\cos 2\alpha \,\mathrm{arctg}\, \frac{\gamma(\rho - r\cos\alpha)}{r\sin\alpha\sqrt{\rho^2+r^2+\gamma^2-2\rho r\cos\alpha}} + \gamma\sin\alpha \,\mathrm{Arsh}\, \frac{\rho-r\cos\alpha}{\sqrt{\gamma^2+r^2\sin^2\alpha}} + \\
&+ \frac{\gamma\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}{2r} E(k,\beta) - \frac{\gamma(\gamma^2+r^2+2\rho^2)}{2r\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} F(k,\beta) + \frac{\gamma(\rho-r)\rho^2}{2r(\rho+r)\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \Pi(n_3,k,\beta) \\
&- \frac{\gamma r}{2\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \left[\frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}-r} \Pi(n_1,k,\beta) + \frac{\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+r} \Pi(n_2,k,\beta) \right].
\end{aligned}
\tag{20.2}
$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Преобразование полных эллиптических интегралов третьего рода к функции $\Lambda_0(\alpha,\beta)$

Рассмотрим изменение параметров n_1, n_2, n_3 и k определенных уравнениями (9.2) и (16.2). Из этих уравнений легко видеть, что

$$-\infty \le n_1 \le 0 \qquad \text{при} \qquad 0 \le r \le \infty \tag{1.3}$$

$$0 \le n_2 \le 1 \qquad \text{при} \qquad 0 \le r \le \infty \tag{2.3}$$

$$0 \le n_3 \le 1 \qquad \text{при} \qquad 0 \le r \le \infty \tag{3.3}$$

$$0 \le k \le 1 \qquad \text{при} \qquad 0 \le r \le \infty \ . \tag{4.3}$$

Функции $n_1 = n_1(r)$, $n_2 = n_2(r)$, $n_3 = n_3(r)$ и $k = k(r)$ являются непрерывными функциями точки наблюдения r .

Непосредственная проверка показывает, что коэффициенты перед полными эллиптическими интегралами третьего рода вида $\Pi(n_1, k, \frac{\pi}{2})$, $\Pi(n_2, k, \frac{\pi}{2})$ и $\Pi(n_3, k, \frac{\pi}{2})$ (см. уравнения (82) и (86)) удовлетворяют следующим равенствам

$$Q(n_1) = \sqrt{(1-n_1)(1-\frac{k^2}{n_1})} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \ \frac{\sqrt{r^2+\gamma^2}+\rho}{\sqrt{r^2+\gamma^2}-r} \ , \tag{5.3}$$

$$Q(n_2) = \sqrt{(1-n_2)(1-\frac{k^2}{n_2})} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \ \frac{\sqrt{r^2+\gamma^2}-\rho}{\sqrt{r^2+\gamma^2}+r} \ , \tag{6.3}$$

$$Q(n_3) = \sqrt{(1-n_3)(1-\frac{k^2}{n_3})} = \frac{\gamma(\rho-r)}{(\rho+r)\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} \tag{7.3}$$

В дальнейших преобразованиях эллиптических интегралов третьего рода воспользуемся тем [4], что если параметр удовлетворяет неравенству

$$k^2 \le n \le 1 \, , \tag{8.3}$$

а коэффициент, стоящий перед интегралом, удовлетворяет уравнению

$$Q(n) = \sqrt{(1-n)(1-\frac{k^2}{n})} \, , \tag{9.3}$$

то при выполнении указанных условий существует следующее равенство

$$Q(n)\ \Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) = \Lambda\left(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ \Lambda_0(\alpha, \beta) \ , \tag{10.3}$$

где параметры α и β определяются из выражений

$$\beta = \arcsin \sqrt{\frac{n-k^2}{n(1-k^2)}} \ , \qquad \alpha = \arcsin k \ , \tag{11.3}$$

а $\Lambda_0(\alpha, \beta)$ – табулированная функция двух переменных.

В том случае, когда параметр n_1 изменяется в зависимости от точки наблюдения в диапазоне $-\infty \leq n_1 \leq 0$, то также возможно преобразование полного эллиптического интеграла третьего рода на основании следующих соотношений /4/:

$$Q(n_1)\,\Pi\left(n_1, k, \frac{\pi}{2}\right) = Q(n)\,\Pi\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{k^2}{p} F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right), \tag{12.3}$$

где

$$Q(n_1) = \sqrt{(1-n_1)\left(1-\frac{k^2}{n_1}\right)}, \quad p^2 = -n\,n_1,$$
$$n = \frac{n_1 - k^2}{n_1 - 1}, \qquad Q(n) = \sqrt{(1-n)\left(1-\frac{k^2}{n}\right)}, \tag{13.3}$$

$F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода. Вводя соотношение

$$Q(n)\,\Pi\left(k, n, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\Lambda_0(\alpha, \beta_1), \quad F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} F_0(\alpha), \tag{14.3}$$

можно выражение (12.3) переписать следующим образом

$$Q(n_1)\,\Pi\left(n_1, k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{\Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \frac{k^2}{p} F_0(\alpha)\right\}. \tag{15.3}$$

Из свойств функции $\Lambda_0(\alpha,\beta)$ следует отметить следующие /4/

$$\Lambda_0(0, \beta) = \sin\beta, \qquad \Lambda_0(\alpha, 0) = 0,$$
$$\Lambda_0\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) = \frac{2}{\pi}\beta, \quad -\Lambda_0(\alpha, -\beta) = \Lambda_0(\alpha, \beta). \tag{16.3}$$

Частными производными функции $\Lambda_0(\alpha,\beta)$ являются

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha} = -\frac{k'}{k}\,\frac{\sin\beta\cos\beta}{\Delta'\beta}\left[F_0(\alpha) - E_0(\alpha)\right], \tag{17.3}$$

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial \beta} = \frac{1}{\Delta'\beta}\left[E_0(\alpha) - k'^2\sin^2\beta\, F_0(\alpha)\right], \tag{18.3}$$

где

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \Delta'\beta = \left[1 - k'^2\sin^2\beta\right]^{1/2}. \tag{19.3}$$

В соответствии с (10.3) и (15.3) полные эллиптические интегралы третьего рода с выбранными коэффициентами, содержащиеся в формулах (83) и (87), можно представить как

$$\frac{\gamma\left(\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho\right)}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\left(\sqrt{\gamma^2+r^2}-r\right)}\;\Pi\left(n_1, k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[\Lambda_0(\alpha, \beta_1) + \frac{2\gamma\rho}{\left(\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho\right)\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}} F_0(\alpha)\right], \tag{20.3}$$

$$\frac{\gamma(\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho)}{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}\,(\sqrt{\gamma^2+r^2}+r)}\ \Pi\left(n_2, k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\Lambda_0(a, \beta_2)\ , \tag{21.3}$$

$$\frac{\gamma(\rho-r)}{(\rho+r)\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\ \Pi\left(n_3, k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\Lambda_0(a, \beta_3)\ , \tag{22.3}$$

где

$$a = \arcsin\sqrt{\frac{4\rho r}{(\rho+r)^2+\gamma^2}}\ , \qquad \beta_1 = \arcsin\frac{\sqrt{(\rho+r)^2+\gamma^2}}{\sqrt{\gamma^2+r^2}+\rho}\ , \tag{23.3}$$

$$\beta_2 = \arcsin\frac{|\sqrt{\gamma^2+r^2}-\rho|}{\sqrt{(\rho-r)^2+\gamma^2}}\ , \qquad \beta_3 = \arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{(\rho-r)^2+\gamma^2}}\ . \tag{24.3}$$

Литература

1. В. Смайт. Электростатика и электродинамика. И.Л. Москва, 1954.
2. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Ф.М., Москва, 1962.
3. В.И. Данилов. Электростатическое поле равномерно заряженного параллелепипеда. Препринт ОИЯИ Р-1984, Дубна. 1965.
4. C.Neuman. Tables of Complete Elliptic Integrals. Journal of Mathematics and Physics. v.20, 127-206, 1942.
5. В.М. Беляков, Р.И. Кравцов, М.Г. Раппопорт. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1-2, Издательство АН СССР, Москва, 1962-63 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1965 г.