ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2111

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.Г.Барышевский, В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ s - ВОЛН НА СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

1965

P - 2111

В.Г.Барышевский, В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ s - ВОЛН НА СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

1. Начнем с парадокса. Пусть достаточно медленная частица упруго рассеивается на двух одинаковых закрепленных центрах, расстояние между которыми R много меньше длины волны. Обозначим через a амплитуду рассеяния частицы на каждом из этих центров в отсутствие другого. Согласно оптической теореме

$$\mathrm{Im}\, a = k|a|^2 = \frac{k}{4\pi}\sigma ,$$

где k – волновое число,

σ – полное сечение рассеяния на отдельном центре.

Поскольку длина волны падающей частицы много больше расстояния между рассеивающими центрами, разность фаз волн, рассеянных на первом и втором центрах, очень незначительна. Поэтому по любому направлению полная амплитуда рассеяния равна сумме амплитуд на отдельных центрах. Отсюда следует, что сечение равно

$$\sigma' = 4\pi|2a|^2 ,$$

т.е. в четыре раза больше, чем при рассеянии на одном центре. С другой стороны, если мы попробуем найти сечение при помощи оптической теоремы, то

$$\sigma' = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(2a) = 2\sigma$$

и возникает явное противоречие с полученным выше результатом.

Причина расхождения состоит в том, что в указанных условиях, строго говоря, нельзя считать, что рассматриваемые центры не влияют друг на друга, даже в том случае, когда амплитуда рассеяния на отдельном центре $a \ll R$. В самом деле, пусть первый рассеиватель расположен в начале координат, а второй – в точке $\vec{R}$. Если учесть, что кроме первичной плоской волны на рассеиватель, расположенный в начале координат, падает волна, рассеянная на втором центре, то эффективная амплитуда рассеяния на первом центре отличается от амплитуды рассеяния a на этом же центре в отсутствии второго и равна[x)]

---

x) Здесь использовано то обстоятельство, что при изотропном рассеянии любая волна рассеивается с той же амплитудой, что и плоская. Подобное заключение следует из возможности разложения рассматриваемых волн по плоским волнам с различными направлениями импульса, амплитуды рассеяния которых не зависят от угла.

$$A_1 \approx a_1 + e^{i\vec{k}\vec{R}}\, a_2 \frac{e^{ikR}}{R} a_1 . \qquad (1)$$

Фазовый множитель $e^{i\vec{k}\vec{R}}$ возникает за счет разности фаз плоской первичной волны в начале координат и точке $\vec{R}$, $a_2 \frac{e^{ikR}}{R}$ – волна, рассеянная на втором рассеивателе. Амплитуда рассеяния на втором центре с учетом волны, рассеянной на первом центре, имеет вид

$$A_2 \approx a_2 + e^{-i\vec{k}\vec{R}}\, a_1 \frac{e^{ikR}}{R} a_2 . \qquad (2)$$

Вычислим теперь мнимую часть амплитуды рассеяния вперед на двух центрах $A(0) = A_1(0) + A_2(0)$

$$\mathrm{Im}\, A(0) = \mathrm{Im}(A_1 + A_2) = \mathrm{Im}\left(a_1 + a_2 + \frac{2a_1a_2}{R} \cos(\vec{k}\vec{R}) e^{ikR}\right). \qquad (3)$$

Если выполняются условия $kR \ll 1$ и $|a| < R$, то, как легко видеть, $\mathrm{Re}\, a_{1,2} \gg \mathrm{Im}\, a_{1,2}$ и

$$\mathrm{Im}\, A(0) \simeq \mathrm{Im}\, a_1 + \mathrm{Im}\, a_2 + 2k\, \mathrm{Re}\, a_1 \mathrm{Re}\, a_2 . \qquad (4)$$

Если $a_1 = a_2 = a$, то $\mathrm{Re}\, a_1 \mathrm{Re}\, a_2 \simeq |a|^2$ и мнимая часть амплитуды рассеяния вперед равна

$$\mathrm{Im}\, A(0) = 4\, \mathrm{Im}\, a ,$$

т.е. полное сечение рассеяния на системе действительно вчетверо превосходит сечение рассеяния на отдельном центре.

Таким образом, учет перерассеяния снимает обсуждаемый парадокс, поскольку связанные с перерассеянием дополнительные члены сильно изменяют мнимую часть амплитуды рассеяния, практически не сказываясь на ее действительной части, которая много больше мнимой.

Для сравнения укажем на сходные явления в классической электродинамике. Рассмотрим, например, два близко расположенных осциллятора, возбуждаемые светом, длина волны которого много больше расстояния между ними. Тогда уравнения движения осцилляторов имеют вид /1/

$$\ddot{\vec{r}}_1 + \gamma(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2) + \omega_0^2 \vec{r}_1 = \frac{e}{m} \vec{\mathcal{E}} e^{-i\omega t} \qquad (4')$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + \gamma(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2) + \omega_0^2 \vec{r}_2 = \frac{e}{m} \vec{\mathcal{E}} e^{-i\omega t} .$$

Член $\gamma \dot{\vec{r}}_2$ в первом уравнении описывает действие силы лучистого трения второго осциллятора на первый, а член $\gamma \dot{\vec{r}}_1$ во втором уравнении описывает действие первого осциллятора на второй.

Введем новые координаты $\vec R = \vec r_1 + \vec r_2$ и $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\vec R} + 2\gamma \dot{\vec R} + \omega \;\vec R = \frac{2e}{m}\vec{\mathcal{E}}\, e^{-i\omega t} \\
&\ddot{\vec r} + \omega_0^2 \vec r = 0 .
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Второе уравнение относится к незатухающему движению осцилляторов, когда они колеблются в противофазе. Как и следовало ожидать, это движение не приводит ни к излучению, ни к поглощению электромагнитных волн, так как дипольный момент системы при этом не изменяется.

Действие внешнего поля на осцилляторы описывается первым уравнением. Его стационарное решение

$$
\vec R = \left(\frac{2e}{m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\,2\omega\gamma}\right)\vec{\mathcal{E}}\, e^{-i\omega t} .
$$

Множитель в скобках пропорционален амплитуде рассеяния электромагнитной волны на двух осцилляторах. Легко видеть, что вдали от резонанса, когда мнимой частью можно пренебречь, действительная часть амплитуды пропорциональна $2e$, т.е. равна сумме амплитуд рассеяния на независимых осцилляторах. Мнимая же часть амплитуды даже вдали от резонанса не равна сумме амплитуд, в силу того, что излучение одного осциллятора сильно влияет на затухание второго и наоборот.

II. Рассеяние частиц на двух закрепленных центрах изучалось ранее Бракнером[2] (см. также[3]). Ниже этот вопрос рассмотрен с несколько иной точки зрения. Как и Бракнер, мы будем считать, что на каждом отдельном центре рассеяние изотропно (s - рассеяние). Соотношение между длиной волны и расстоянием между рассеивателями предполагается произвольным. Рассмотрим сначала рассеяние вперед. С учетом двукратного рассеяния амплитуда

$$
A_1^{(2)} \simeq a_1 + \frac{a_1 a_2}{R}\, e^{ikR}\, e^{i\vec k\vec R} + \frac{a_1 a_2 a_1}{R^2}\, e^{2ikR} . \qquad (6)
$$

Член, соответствующий n - кратному рассеянию, имеет вид

$$
\frac{a_1 a_2 a_1 a_2 \ldots a_1 a_2}{R^n}\, e^{inkR}\, e^{i\vec k\vec R} ,
$$

если n - нечетное число. Если же n - четное число, то

$$
\frac{a_1 a_2 \ldots a_1 a_2 a_1}{R^n}\, e^{inkR}
$$

(в обоих случаях число амплитуд в числителе равно $n+1$). Для второго центра.

$$
A_2^{(2)} = a_2 + \frac{a_2 a_1}{R}\, e^{i\vec k\vec R}\, e^{-i\vec k\vec R} + \frac{a_2 a_1 a_2}{R^2}\, e^{2ikR} . \qquad (7)
$$

Член, соответствующий n – кратному рассеянию, имеет следующий вид

$$\frac{a_2 a_1 a_2 a_1 \ldots a_2 a_1}{R^n} e^{inkR} \; e^{-i\vec{k}\vec{R}} , \tag{8}$$

если n – нечетное число. Если n – четное число, то

$$\frac{a_2 a_1 \ldots a_2 a_1 a_2}{R^n} e^{inkR} . \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что последовательные приближения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$A_1^{(n)} = a_1 + \frac{a_1 A_2^{(n-1)}}{R} e^{ikR} e^{i\vec{k}\vec{R}}$$

$$A_2^{(n)} = a_2 + \frac{a_2 A_1^{(n-1)}}{R} e^{ikR} e^{-i\vec{k}\vec{R}} . \tag{10}$$

При $n \to \infty$ $A_1^{(n)} \to A_1$ и $A_2^{(n)} \to A_2$, поэтому

$$A_1 = a_1 + \frac{a_1 A_2}{R} e^{ikR} \; e^{i\vec{k}\vec{R}} \tag{11}$$

$$A_2 = a_2 + \frac{a_2 A_1}{R} e^{ikR} \; e^{-i\vec{k}\vec{R}} .$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$A_1 = \frac{a_1 + \frac{a_1 a_2}{R} e^{ikR} \; e^{i\vec{k}\vec{R}}}{1 - \frac{a_1 a_2}{R^2} e^{2ikR}}$$

$$A_2 = \frac{a_2 + \frac{a_1 a_2}{R} e^{ikR} \; e^{-i\vec{k}\vec{R}}}{1 - \frac{a_1 a_2}{R^2} e^{2ikR}} . \tag{12}$$

Легко видеть, что для рассеяния на произвольный угол эффективная амплитуда A связана с A_1 и A_2 простым соотношением

$$A = A_1 + A_2 e^{-i\vec{q}\vec{R}} , \tag{13}$$

где $\vec{q}$ – переданный импульс. Соотношение (13) означает, что каждый рассеиватель, по-прежнему, рассеивает изотропно с амплитудами, определяемыми выражениями (12). При выводе уравнений (11) предполагалось, что последовательности $A_1^{(n)}$ и $A_2^{(n)}$ имеют пределы. Тем самым фактически использовались условия $a_{1,2} < R$.

Однако в действительности уравнения (11) справедливы при любом соотношении между a и R . В самом деле, суммарная волна, падающая на каждый из рассеивателей, состоит из первичной плоской волны и некоторой эффективной волны, появляющейся вследствие наличия второго центра. Рассеяние плоской волны описывается в уравнениях (11) слагаемыми a_1 и a_2. Физический смысл вторых слагаемых в этих уравнениях становится ясным, если вспомнить, что при изотропном рассеянии любая волна рассеивается с той же амплитудой, что и плоская. Каждое из этих слагаемых описывает волну, создаваемую одним из центров и рассеивающуюся затем на другом центре с амплитудой a. Вследствие того, что на каждом этапе рассеяние изотропно, эффективные амплитуды A_1 и A_2 также остаются изотропными. Из сказанного выше следует, что мы могли бы вывести первое уравнение (11) из следующих соображений: плоская волна дает вклад в амплитуду равный a_1; к величине a_1 нужно прибавить дополнительный член, описывающий рассеяние на первом центре с амплитудой a_1 эффективной волны $A_2\frac{e^{ikR}}{R}e^{i\vec{k}\vec{R}}$, созданной вторым центром. Аналогично получается и второе уравнение (11). Ясно, что при таком выводе системы (11) никаких ограничений на соотношение между a и R не накладывается.

III. Рассмотрим теперь в общем виде задачу о рассеянии на двух произвольных центрах. Уравнение Шредингера при этом имеет вид:

$$(E_a-H(\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)+\frac{h^2}{2\mu}\Delta_r)\psi(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)=[V_1(\vec{r}\vec{\xi}_1)+V_2(\vec{r}\vec{\xi}_2)]\psi(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2), \quad (14)$$

где $H(\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)$ – гамильтониан рассеивателей,

$\vec{\xi}_1$ $\vec{\xi}_2$ – совокупность координат, описывающих первый и второй рассеиватель, соответственно,

$V_1(\vec{r}\vec{\xi}_1), V_2(\vec{r}\vec{\xi}_2)$ – энергии взаимодействия падающей частицы с первым и вторым рассеивателями, соответственно,

$\vec{r}$ – координата падающей частицы.

Если $G(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2;\vec{r}'\vec{\xi}'_1\vec{\xi}'_2)$ – функция Грина оператора $(E-H+\frac{h^2}{2\mu}\Delta)$, то уравнение (14) можно записать в следующем виде

$$\psi_a(r\xi_1\xi_2)=\Phi_a(r\xi_1\xi_2)+\iint G(r\xi_1\xi_2;r'\xi'_1\xi'_2)[V_1(r'\xi'_1)+V_2(r'\xi'_2)]\psi_a(r'\xi'_1\xi'_2)d^3r'd^3\xi'_1d^3\xi'_2,$$

где Φ_a – собственные функции оператора $(-\frac{h^2}{2\mu}\Delta_r+H(\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2))$. Учитывая, что /4/

$$[V_1(\vec{r}\vec{\xi}_1)+V_2(\vec{r}\vec{\xi}_2)]\psi_a(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)=T(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)\Phi_a(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2), \quad (15)$$

где $T(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)$ – оператор рассеяния частицы на двух центрах, легко получить уравнение для $T(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)$:

$$T(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)\Phi_a(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)=[V_1(\vec{r}\vec{\xi}_1)+V_2(\vec{r}\vec{\xi}_2)]\Phi_a(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)+$$

$$(16)$$

$$+[V_1(\vec{r}\vec{\xi}_1)+V_2(\vec{r}\vec{\xi}_2)]\iint G(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2;\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)T(\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)\Phi_a(\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)d^3\rho d^3\eta_1 d^3\eta_2.$$

Обозначим $T(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)\Phi_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2) = T_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)$. Введем операторы $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ при помощи следующих равенств:

$$T_a^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=V_1(\vec r\vec\xi_1)\Phi_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+V_1(\vec r\vec\xi_1)\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)T_a(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta_2 \qquad (17)$$

$$T_a^{(2)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=V_2(\vec r\vec\xi_2)\Phi_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+V_2(\vec r\vec\xi_2)\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)T_a(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta_2,$$

т.е. $T = T^{(1)} + T^{(2)}$. Нетрудно показать, что систему уравнений (17) можно представить в виде

$$T_a^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=t_a^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)T_a^{(2)}(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta_2 \qquad (18)$$

$$T_a^{(2)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=t_a^{(2)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+t^{(2)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)T_a^{(1)}(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta_2,$$

где

$$t_a^{(1,2)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=V_{1,2}(\vec r\vec\xi_{1,2})\Phi_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+V_{1,2}(\vec r\vec\xi_{1,2})\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)t_a^{(1,2)}(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)\times \qquad (18\text{-a})$$
$$\times d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta .$$

Как известно,

$$G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)=-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\sum_b \phi_b(\vec\xi_1\vec\xi_2)\phi_b^*(\vec\eta_1\vec\eta_2)\frac{e^{ik_b|\vec r-\vec\rho|}}{|\vec r-\vec\rho|}, \qquad (19)$$

где $\phi_b(\vec\xi_1\vec\xi_2)$ – собственные функции оператора $H(\vec\xi_1\vec\xi_2)$,

$$k_b^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_A+\frac{\hbar^2 k_a^2}{2\mu}-E_B\right)=\frac{2\mu}{\hbar^2}(E_a-E_B),$$

E_A и E_B – внутренние энергии рассеивающей системы до и после соударения, соответственно.

Если рассеиватели независимы друг от друга, то волновая функция $\phi_b(\vec\xi_1\vec\xi_2)$ представляется как произведение волновых функций рассеивателей

$$\phi_b(\vec\xi_1\vec\xi_2)=\phi_n(\vec\xi_1)\phi_f(\vec\xi_2).$$

В этом случае непосредственной подстановкой легко проверить, что операторы рассеяния $t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1)$, $t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=t^{(2)}(\vec r\vec\xi_2)$, где $t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1)(t^{(2)}(\vec r\vec\xi_2))$ – оператор рассеяния частицы на первом (втором) центре в отсутствие второго (первого). Итак, в случае независимых рассеивателей уравнения (18) сводятся к следующей системе

$$T_a^{(1)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1)\Phi_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+t^{(1)}(\vec r\vec\xi_1)\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)T_a^{(2)}(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta_2 \qquad (19)$$

$$T_a^{(2)}(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)=t_2^{(2)}(\vec r\vec\xi_2)\Phi_a(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2)+t^{(2)}(\vec r\vec\xi_2)\iint G(\vec r\vec\xi_1\vec\xi_2;\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)T_a^{(1)}(\vec\rho\vec\eta_1\vec\eta_2)d^3\rho\, d^3\eta_1 d^3\eta_2 .$$

Для исследования этих уравнений удобно умножить (19) слева на $-\frac{\mu}{2\pi h^2}\Phi^*_b(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)$ и проинтегрировать по координатам. Тогда слева мы получим амплитуды рассеяния из состояния a в соответствие b

$$A^{(1,2)}_{ba}=-\frac{\mu}{2\pi h^2}\iint\Phi^*_b(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)T^{(1,2)}(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)\Phi_a(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)d^3r\,d^3\xi_1\,d^3\xi_2\,.$$

Уравнения, определяющие эти амплитуды имеют вид:

$$A^{(1)}_{ba}=\frac{\mu}{2\pi h^2}\iint\Phi^*_b(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)t^{(1)}_a(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)d^3r\,d^3\xi_1\,d^3\xi_2-$$

$$-\frac{\mu}{2\pi h^2}\iint\Phi^*_b(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)t^{(1)}(\vec{r}\vec{\xi}_1)G(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2;\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)T^{(2)}_a(\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)d^3r\,d^3\xi_1\,d^3\xi_2\,d^3\rho\,d^3\eta_1\,d^3\eta_2 \qquad (20)$$

$$A^{(2)}_{ba}=-\frac{\mu}{2\pi h}\iint\Phi^*_b(\vec{r}\vec{\xi}\,\vec{\xi})t^{(2)}_a(\vec{r}\vec{\xi}\,\vec{\xi})d^3r\,d^3\xi_1\,d^3\xi_2-$$

$$-\frac{\mu}{2\pi h^2}\iint\Phi^*_b(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)t^{(2)}(\vec{r}\vec{\xi}_2)G(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2;\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)T_a(\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2)d^3r\,d^3\xi_{12}\,d^3\xi_2\,d\rho\,d^3\eta_1\,d^3\eta_2\,.$$

Из уравнений (19) следует, что $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ можно представить следующим образом

$$T^{(1)}(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)=t^{(1)}(\vec{r}\vec{\xi}_1)F^{(1)}(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)$$

$$T^{(2)}(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)=t^{(2)}(\vec{r}\vec{\xi}_2)F^{(2)}(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)\,. \qquad (21)$$

В случае S – рассеяния для оператора t выполняется равенство

$$t(\vec{r}\vec{\xi})=-\frac{2\pi h^2}{\mu}a\delta(\vec{r}-\vec{\xi}), \qquad (22)$$

где a –амплитуда рассеяния на изолированном центре. Если рассеивающие центры закреплены в точках R_1 и R_2 и неупругими процессами, связанными с возбуждением внутреннего состояния рассеивателей, мы пренебрегаем, то сумма по промежуточным состояниям в функции Грина пропадет. Интегрирование по переменным ξ, η в (18) снимается, если учесть, что волновая функция рассеивателя в этом случае имеет вид $\phi(\vec{\xi}_1)=\sqrt{\delta(\vec{R}_1-\vec{\xi}_1)}$. Подставляя в (20) выражения (22) и (22) получаем, что амплитуда рассеяния частицы, находящейся в S состоянии, на двух центрах A равна

$$A=A_1e^{-i(\vec{k}_b-\vec{k}_a)\vec{R}_1}+A_2e^{-i(\vec{k}_b-\vec{k}_a)\vec{R}_2}\,, \qquad (23)$$

где амплитуды A_1 и A_2 удовлетворяют уравнениям (11), в которых $\vec{R}=\vec{R}_2-\vec{R}_1$, $\vec{k}_a$ и $\vec{k}_b$ – начальный и конечный импульсы частицы. Нетрудно проверить, что амплитуда (23) удовлетворяет оптической теореме.

Система уравнений (20) легко обобщается на случай нескольких рассеивателей /5/. При этом эффективная амплитуда рассеяния на многих неподвижных центрах A равна

$$A = \sum_i A_i e^{-i(\vec{k}_b - \vec{k}_a)\vec{R}_i} , \tag{24}$$

причем A_i удовлетворяют следующей системе уравнений

$$A_i = a_i + a_i \sum_{k \neq i} A_k \frac{e^{ik_a R_{ik}}}{R} e^{i\vec{k}_a \vec{R}_{ki}} , \tag{25}$$

где $\vec{R}_{ki} = \vec{R}_k - \vec{R}_i$ и суммирование ведется по всем рассеивателям.

IV. Пусть теперь наряду с упругим рассеянием возможны неупругие процессы. Если $a \ll R$, то с большой точностью можно ограничиться учетом только одного перерассеяния. В этом случае амплитуды упругого рассеяния на системе из двух центров A_1 и A_2, по-прежнему, описываются соотношениями (1,2) с тем отличием, что под a нужно понимать амплитуду, учитывающую и неупругие процессы:

$$\operatorname{Im} a = \frac{k}{4\pi} (\sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}}) \tag{26}$$

$$\sigma_{\text{упр}} = 4\pi |a|^2 .$$

Если мы учтем большее число перерассеяний, то уже в порядке $(\frac{a}{R})^2$ выражения для амплитуд A_1 и A_2 отличаются от выражений (5,6). В амплитудах возникают члены типа

$$b_1 \frac{e^{ik'R}}{R} a_2 \frac{e^{ik'R}}{R} \bar{b}_1 , \tag{27}$$

где b_1 – амплитуда неупругого процесса на первом центре (например, неупругого рассеяния),

$\bar{b}_1$ – амплитуда обратного процесса,

k' – волновое число неупруго рассеянной волны.

Эти члены описывают процессы, в результате которых волна неупруго рассеивается на первом центре, упруго перерассеивается на втором и, попадая опять на первый центр, возвращает его в начальное состояние. Так как после рассеяния состояние системы не изменяется, подобный процесс необходимо рассматривать как упругий. Однако, если амплитуда неупругой реакции $b \sim a \ll R$, то и в высших порядках вкладом неупругих каналов в амплитуду упругого рассеяния на системе центров посредством механизма, указанного выше, можно пренебречь. В этом случае уравнения (11), так же как и уравнения (25), справедливы и при наличии неупругих процессов, причем под a_i нужно понимать амплитуду упругого рассеяния, подчиняющуюся соотношениям (26). Сделанное утверждение сразу следует из того, что упругое рассеяние на системе при наличии неупругих каналов можно описать при помощи комплексного потенциала, который при $b \sim a \ll R$ сводится к сумме комплексных потенциалов отдельных центров. Такая замена действительного потенциала комплексным не изменяет справедливости вывода уравнений (25).

В общем случае амплитуда неупругой реакции сравнима с амплитудой упругой, то уравнения (25) уже несправедливы. Однако при помощи точных уравнений (20) нетрудно получить их обобщение (мы, по-прежнему, имеем в виду S -рассеяние на отдельном центре):

$$\langle n|A_i|m\rangle = \langle n|a_i|m\rangle + \sum_{k\neq i} \frac{e^{i\vec{k}_a\vec{R}_{ki}}}{R_{ik}} \sum_{\ell} \langle n|a_i|\ell\rangle\langle \ell|A_k|m\rangle e^{ik_{a\ell}R_{ik}}, \qquad (27)$$

где $\langle n|A|m\rangle$ – амплитуды рассеяния из состояния m в состояние n,

$$k_{a\ell} = \sqrt{k_a^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_A - E_\ell)}.$$

Систему уравнений (27) можно получить таким же путем, каким были получены уравнения (11), рассматривая процесс последовательных перерассеяний на нескольких центрах, и учитывая то обстоятельство, что каждый центр находится под воздействием не только волны упруго рассеянной остальными центрами, но и волн, соответствующих промежуточным неупругим процессам.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть рассеяние происходит на двух одинаковых центрах ($a_1 = a_2 = a$). Предположим, что сечение неупругих процессов имеет такой же порядок величины, как и сечение упругого рассеяния. В этом случае при $|a| \ll R$ и $\lambda \gg R$ автоматически выполняется неравенство $\operatorname{Im} a \ll \operatorname{Re} a$ и мы можем ограничиться первым приближением (1) и (2). Тогда:

$$\operatorname{Im} A \approx \operatorname{Im}\left(2a + \frac{2a^2}{R} e^{ikR}\right) \approx 2\operatorname{Im} a + 2k|a|^2 = \frac{k}{4\pi}(2\sigma^0_{\text{полн}}) + 2k|a|^2,$$

где $\sigma^0_{\text{полн}}$ – полное сечение рассеяния на каждом из центров ($\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{неупр}} + 4\pi|a|^2$). Отсюда

$$\frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} A = 4\sigma^0_{\text{упр}} + 2\sigma^0_{\text{неупр}}, \qquad (28)$$

т.е. полное сечение рассеяния на двух центрах, как и следовало ожидать, может быть представлено в виде

$$\sigma_{\text{полн}} = 2\sigma^0_{\text{неупр}} + 4\sigma^0_{\text{упр}}. \qquad (29)$$

Будем теперь считать, что $|a| \approx R$ и справедлива система уравнений (11). Тогда в длинноволновом приближении

$$A \approx \frac{2a}{1 - \frac{a}{R} e^{ikR}}. \qquad (30)$$

Согласно оптической теореме

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi}{k}\,\text{Im}\,A \approx \frac{2\sigma_{\text{неупр}} + |16\pi|a|^2}{1 + \frac{|a|^2}{R^2} - \frac{2\,\text{Re}\,a}{R}} = \tag{2(31)}$$

$$= \frac{2(\sigma^0_{\text{неупр}} + 2\sigma^0_{\text{упр}})}{1 + \frac{\sigma^0_{\text{упр}}}{4\pi R^2} + \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\sigma^0_{\text{упр}}}{4\pi} - \frac{(k\sigma^0_{\text{полн}})^2}{16\pi^2}}},$$

где σ^0 – означает сечение взаимодействия на одиночном центре. При $\sigma^0_{\text{неупр.}} = 0$, как нетрудно видеть,

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} = 4\pi|A|^2 = 4\pi\left|\frac{a}{1-\frac{a}{R}}\right|^2. \tag{32}$$

При $\sigma_{\text{упр}} \ll R^2$ мы получаем формулу (29). В противоположном предельном случае, когда $\sigma^0_{\text{упр}} \gg R^2$, сечение упругого рассеяния

$$\sigma_{\text{упр}} = 16\pi R^2. \tag{33}$$

Заметим, что в работе Бракнера /2/ приводится для этого случая неправильное значение сечения упругого рассеяния ($\sigma_{\text{упр}} = 8\pi R^2$). По-видимому, эта ошибка связана с некорректным переходом к длинноволновому пределу при использовании оптической теоремы[x)]. Если имеют место неупругие процессы, то из (31) следует, что

$$\sigma_{\text{полн}} \doteq 16\pi R^2\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^0_{\text{неупр}}}{\sigma^0_{\text{упр}}}\right). \tag{34}$$

В частности, при рассеянии на абсолютно черных шарах ($\sigma_{\text{упр}} = \sigma_{\text{неупр}}$)

$$\sigma_{\text{полн}} = 24\pi R^2$$

V. Пусть теперь рассеиватели и падающая частица обладают спином. В этом случае амплитуды a_i и A_i являются операторами в спиновом пространстве и для нахождения амплитуды рассеяния $\langle n|A|m\rangle$ из начального спинового состояния частицы и рассеивателей m в конечное n нужно решить следующую систему уравнений, являющуюся очевидным следствием системы уравнений (27):

$$\langle n|A_i|m\rangle = \langle n|a_i|m\rangle + \sum_{k\neq i}\frac{ik_a|R_{ik}|}{R_{ik}}\,e^{i\vec{k}\vec{R}_{ki}}\,\langle n|a_i A_k|m\rangle. \tag{35}$$

---

x) При использовании оптической теоремы нельзя отбрасывать множитель e^{ikR} в знаменателе выражения (30), хотя $kR \ll 1$. Нетрудно убедиться в том, что если положить $e^{ikR} \approx 1$, то после применения оптической теоремы мы получим для сечения упругого рассеяния значение, в 2 раза меньшее правильного. В то же время в случае вычисления по формуле (32) отбрасывание множителя e^{ikR} вполне законно. Заметим, что ситуация здесь вполне аналогична той, с которой мы встретились при решении исходного парадокса (см. пунк 1).

Заметим, что a_i и A_k, вообще говоря, не коммутируют друг с другом. Из этих уравнений, в частности, следует, что если частица и рассеиватели обладают спином ½, то после столкновения система из частицы и двух рассеивающих центров может оказаться в одном из следующих состояний:

а) в результате рассеяния спиновое состояние системы не изменилось;

б) в результате рассеяния изменилось спиновое состояние частицы и одного из рассеивающих центров;

в) в результате рассеяния спиновое состояние частицы не изменилось, а спиновое состояние обоих рассеивателей изменилось.

Амплитуда упругого рассеяния с двойным переворачиванием в первом приближении имеет вид:

$$A = \frac{b^2}{R} e^{ikR} \tag{36}$$

где b – амплитуда рассеяния с переворотом спина на изолированном центре. После усреднения по поляризации полное сечение

$$\sigma = \frac{\pi |b|^4}{R^2} . \tag{37}$$

VI. Пусть теперь рассеиватели образуют связанную систему (например, молекулу). В этом случае волновую функцию системы рассеивателей нельзя представить в виде произведения волновых функций отдельных центров. Поэтому необходимо рассматривать общие уравнения для операторов рассеивания (18) и (18-а). Однако есть случай, когда они существенно упрощаются. Рассмотрим выражение для волнового числа промежуточного состояния k_b, входящего состояния в функцию Грина G (см. (19)):

$$k_b = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E_A + \frac{\hbar^2 k_a^2}{2\mu} - E_B\right)} = k_a \sqrt{1 + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(E_A - E_B)}{k_a^2}} .$$

Если импульс падающей частицы достаточно велик, так что $\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{(E_A - E_B)}{k_a^2} \ll 1$, то

$$k_b = k_a + \frac{\mu(E_A - E_B)}{\hbar^2 k_a} . \tag{38}$$

Если, кроме того, среднее расстояние между рассеивателями таково, что выполняется также условие

$$\frac{\mu(E_A - E_B)}{\hbar^2 k_a} R \ll 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{\omega R}{v} \ll 1 , \tag{39}$$

где $v = \frac{\hbar k_a}{\mu}$ – скорость частицы, $\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$, то членом $\frac{\mu(E_A - E_B)}{\hbar^2 k_a}$ в выражении для k_b можно пренебречь. В этом приближении мы можем вынести из-под знака суммирования в функции Грина множитель $\frac{e^{ik_a|\vec{r}-\vec{\rho}|}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}$. Это приводит к тому, что функция Грина принимает следующий вид

$$G(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2;\vec{\rho}\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2) = -\frac{\mu}{2\pi h^2}\frac{e^{ik_a|\vec{r}-\vec{\rho}|}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|}\delta(\vec{\xi}_1-\vec{\eta}_1)\delta(\vec{\xi}_2-\vec{\eta}_2). \tag{40}$$

Подставляя в (18-а), нетрудно убедиться в том, что оператор рассеяния $t(\vec{r}\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2)$ сводится к оператору рассеяния на отдельной свободной частице. Если падающие частицы находятся в S – состоянии, то для $t(\vec{r}\vec{\xi})$ справедливо равенство (22). Подстановка (22) и (40) в уравнения (18) сразу приводит к заключению о том, что для нахождения амплитуды S – рассеяния частицы в этом приближении достаточно усреднить суммарную амплитуду (24) по волновым функциям рассеивающей системы (ср., например,/6/).

Физический смысл полученного результата состоит в том, что при достаточно больших скоростях время взаимодействия частицы с системой (включая перерассеяние) настолько мало, что состояние системы не успевает измениться.

Литература

1. В.М.Файн УФН, 64, 272, 1958.
2. K.A.Bruechner. Phys.Rev., 89, 834, 1953.
3. M.Goldberger, K.Watson, Collision. Theory, New Jork, 1964.
4. M.Lax. Rev.Mod.Phys., 23, 287, 1951.
5. K.Watson. Phys.Rev., 105, 1388, 1957.
6. G.Chew, M.Goldberger, Phys. Rev., 87, 778, 1952.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1965 г.