11/VI-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2105

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.М. Десимиров

О ПОСТРОЕНИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1965

Р-2105

Г.М. Десимиров

О ПОСТРОЕНИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. В настоящей работе проведено дальнейшее рассмотрение вопроса о построении квазипотенциала для случая взаимодействующих полей с проектирующей свободной двухвременной функцией Грина для некоторых моделей, указанных ниже. В работе /5/ был предложен способ построения квазипотенциала для случая спинорных полей, который понимался в смысле квазиоптического подхода в теории поля, разработанного в /1,2,3,4/ и других работах. Способ основан на предложенном в /5/ сужении на проектированном пространстве волновых функций (на обозначенном в работе /5/ классе $\Phi^{(+)}$). Такой способ сужения, с одной стороны, позволяет восстановить применимость теории возмущений для спинорных полей, а с другой стороны, оставляет открытым вопрос об общей структуре квазипотенциала во всем гильбертовом пространстве волновых функций. Из работы /5/ видно, что в таком случае квазипотенциал нельзя построить по теории возмущений в виде ряда по неотрицательным степеням константы связи, а обязательно появятся члены с особенностью при нулевом ее значении. В этой работе сделана попытка пролить свет на эти вопросы.

§ 2. Для простоты рассматривается задача о взаимодействиях двух двухкомпонентных спинорных полей с нулевой массой, хотя предлагаемая схема, очевидно, применима с тем же успехом и в случае четырехкомпонентной формулировки теории с отличающейся от нуля массой. Способ взаимодействия для общности рассмотрений не фиксируется, и существенным является только предположение, что ядро уравнения Бете-Сальпетера раскладывается в ряд по константе связи. Все ряды такого типа, как обычно, формально считаются сходящимися.

Вводим обычные матрицы Паули σ^{K}, где

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вводим единичную матрицу $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и обычные матричные четырехвекторы

$$\sigma^{\mu} = (I, -\sigma^{K}), \quad \tilde{\tilde{\sigma}}^{\mu} = (I, \sigma^{K}),$$

причем греческие индексы принимают значения $\mu = 0, 1, 2, 3$, а латинские $- K = 1, 2, 3$. Метрика вводится метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях выполняются соотношения

$$\sigma^\mu \tilde{\tilde{\sigma}}^\nu + \sigma^\nu \tilde{\tilde{\sigma}}^\mu = 2 g^{\mu\nu} I$$

$$\tilde{\tilde{\sigma}}^\mu \sigma^\nu + \tilde{\tilde{\sigma}}^\nu \sigma^\mu = 2 g^{\mu\nu} I$$

и все матрицы являются эрмитовыми.

Уравнение свободного двухкомпонентного спинорного поля с нулевой массой, как известно, можно выбрать в виде

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi (x) = 0 .$$

Как обычно, удобно перейти к импульсному представлению с помощью преобразования Фурье, которое записываем в виде

$$\psi (x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \psi(p)\, e^{ipx}\, dp .$$

Тогда нетрудно найти, что пропагатор $D_o(X-Y)$ в импульсном представлении можно ввести в виде

$$D_o(p) = \frac{\tilde{\sigma}^\nu p_\nu}{p^2 + i\epsilon} . \qquad (1)$$

Полная функция Грина двух взаимодействующих полей рассматриваемого типа будет определяться уравнением Бете-Сальпетера, которое можно записать символически в виде

$$g = g_o + g_o k\, g , \qquad (2)$$

или в импульсном представлении в системе центра масс

$$g(\vec{p}, \vec{p}\,'; p_o, q_o, p'_o, q'_o) = (2\pi)^8 g_o(\vec{p}, p_o, q_o)\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\delta(p_o - p'_o)\,\delta(q_o - q'_o) +$$

$$+ (2\pi)^{-8} (g_o k\, g)(\vec{p}, \vec{p}\,'; p_o, q_o, p'_o, q'_o) .$$

В дальнейшем нужно проиттерировать (2) и перейти к двухвременной функции Грина, обозначаемой знаком

$$\tilde{\tilde{g}} = \tilde{\tilde{g}}_o + \overbrace{g_o k\; g_o} + \overbrace{g_o k\; g_o k\; g_o} + \ldots\ldots . \qquad (3)$$

Исходя из (1), нетрудно найти двухвременную функцию Грина для голых частиц, с помощью которой мы строим полную. В системе центра масс она имеет вид

$$\tilde{\tilde{g}}_o(\vec{p}, \vec{p}\,'; p_o, p'_o) = \tilde{\tilde{G}}_o(\vec{p}, E)\,\delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\delta(p_o - p'_o) ,$$

где $\tilde{\tilde{G}}_o(\vec{p},E)$ обозначает матрицу

$$\tilde{\tilde{G}}_o(\vec{p}, E) = \frac{\pi i}{|\vec{p}| - E} \Lambda_1^+(\vec{p})\,\Lambda_2^+(-\vec{p}) + \frac{\pi i}{|\vec{p}| + E} \Lambda_1^-(\vec{p})\,\Lambda_2^-(-\vec{p}) . \qquad (4)$$

Здесь введены новые обозначения: $p_o = 2E$, $\vec{\sigma}$ – обычный трехмерный матричный вектор спина,

$$\Lambda^+(\vec{p}) = \frac{|\vec{p}| + \vec{\sigma}\vec{p}}{2|\vec{p}|} \qquad (5)$$

$$\Lambda^-(\vec{p}) = \frac{|\vec{p}| - \vec{\sigma}\vec{p}}{2|\vec{p}|}$$

являются операторами проектирования Казимира. В нашем случае они выделяют компоненты волновых функций, отвечающие состояниям со спином, направленным по пространственному импульсу или обратно. Значки 1, 2 относятся к спинорным индексам отдельных частиц, а вместо отсутствующих значков подразумевается соответствующая единичная матрица. Легко заметить, что выражение (4) вполне совпадает с соответствующим выражением (12) из /5/ в новой постановке задачи. Поэтому и в нашем случае свободная функция Грина имеет проектирующие свойства. Нам снова нужно ввести разложение

$$\psi(\vec{p}) = \psi^{(+,+)}(\vec{p}) + \psi^{(+,-)}(\vec{p}) + \psi^{(-,+)}(\vec{p}) + \psi^{(-,-)}(\vec{p}), \tag{6}$$

где положено $\psi^{(\pm,\mp)}(\vec{p}) = \Lambda_1^{\pm}(p)\,\Lambda_2^{\mp}(-\vec{0})\,\psi(\vec{p})$. В этом случае функции $\psi(\vec{p})$ зависят от двух спинорных индексов, принимающих значения 1, 2 и в (6) перечислены возможные ориентации спина. Двухвременная функция Грина голых частиц проектирует любую волновую функцию в подпространство $\Phi^{(+)}$ с одинаковыми ориентациями спина. Значит, если $\psi^{(+)}(\vec{p}) \subset \Phi^{(+)}$, то она имеет вид

$$\psi^{(+)}(\vec{p}) = \psi^{(+,+)}(\vec{p}) + \psi^{(-,-)}(\vec{p}).$$

Аналогично вводим множество функций $\Phi^{(-)}$, где если $\psi^{(-)}(\vec{p}) \subset \Phi^{(-)}$, то

$$\psi^{(-)}(\vec{p}) = \psi^{(+,-)}(\vec{p}) + \psi^{(-,+)}(\vec{p})$$

и каждая функция рассматриваемого типа представляется в виде

$$\psi(\vec{p}) = \psi^{(+)}(\vec{p}) + \psi^{(-)}(\vec{p}).$$

В нашем случае $\tilde{\tilde{G}}_0(\vec{p},E)\psi(\vec{p})$,если $\psi(\vec{p}) \subset \Phi^{(-)}$ и для всех $\psi(\vec{p})$.

В дальнейшем, имея в виду /5/, легко записать оператор, эквивалентный $\tilde{\tilde{g}}_0$ в пространстве $\Phi^{(+)}$, который, однако, не будет особым. Мы его снова обозначим через $\overleftarrow{g}_0$, и он будет даваться матрицей

$$\overleftarrow{G}_0 = \frac{\pi i}{|\vec{p}|^2 - E^2}\{|\vec{p}| + E[\Lambda_1^{+}(\vec{p})\Lambda_2^{+}(-\vec{p}) - \Lambda_1^{-}(\vec{p})\Lambda_2^{-}(-\vec{p})]\}. \tag{7}$$

Обратный ему оператор будет задаваться матрицей

$$[\overleftarrow{G}_0]^{-1} = \frac{i}{\pi|\vec{p}|}[E^2 - |\vec{p}|^2 - E(E-|\vec{p}|)\Lambda_1^{+}(p)\Lambda_2^{+}(-\vec{p}) - E(E+|\vec{p}|)\Lambda_1^{-}(\vec{p})\Lambda_2^{-}(-\vec{p})]. \tag{8}$$

В операторном виде $\overleftarrow{g}_0$, $[g_0]^{-1}$ содержит еще и множитель $\delta(\vec{p} - \vec{p}\,')$.

§ 3. Перейдем к построению основного уравнения квазипотенциального подхода, записываемого в виде

$$[\tilde{\tilde{g}}(\vec{p},\vec{p}\,';E)]^{-1}\psi(\vec{p}\,') = 0, \tag{9}$$

где $[\tilde{\tilde{g}}(\vec{p},\vec{p}\,';E)]^{-1}$ – левый обратный оператор двухвременной функции Грина $\tilde{\tilde{g}}(\vec{p},\vec{p}\,';E)$ (значок "левый", как обычно, не ставим). Задачу о построении этого оператора мы можем рассматривать как задачу о решении относительно функции $\psi(\vec{p})$ уравнения

$$\tilde{\tilde{g}}(\vec{p},\vec{p}\,';E)\,\phi(\vec{p}\,') = \psi(\vec{p}). \tag{10}$$

Решение этого уравнения

$$\phi(\vec{p}\,') = [\tilde{\tilde{g}}(\vec{p}\,',\vec{p};E)]^{-1}\psi(\vec{p}) \tag{11}$$

позволяет нам записать сразу и уравнение (9). Из-за особого характера $\tilde{\tilde{g}}_o$ мы, однако, не можем прямо пользоваться формальным разложением (2,11) из /1/. Для того, чтобы добиться такой возможности, добавим к нулевому члену некоторую поправку $\mathcal{H}_o$ таким образом, чтобы он стал неособым. Имея в виду полученные в /5/ результаты, нам кажется естественным выбрать $\mathcal{H}_o$ таким образом, чтобы вместо $\tilde{\tilde{g}}_o$ появлялся бы наш оператор $\bar{g}_o$, т.е. выберем

$$H_0(\vec{p}, E) = G_o(\vec{p}, \epsilon) - \tilde{\tilde{g}}_o(\vec{p}, E) = \tag{12}$$

$$= \frac{\pi i}{|\vec{p}|^2 - E^2} [\Lambda_1^-(\vec{p})\Lambda_2^+(-\vec{p}) + \Lambda_1^+(\vec{p})\Lambda_2^-(-\vec{p})] .$$

Тогда уравнение (10) получает вид

$$\bar{g}\phi = \psi + \mathcal{H}_o\phi \quad . \tag{13}$$

где

$$\bar{g} = \bar{g}_o + \overbrace{\bar{g}_o K \; g_o} + \overbrace{g_o K g_o K \; g_o} . \tag{14}$$

У этого нового оператора нет особенностей в нулевом члене и для него можно применить разложение типа (2,11) из /1/:

$$[\bar{g}]^{-1} = [\bar{g}_o]^{-1} - [\bar{g}_o]^{-1} g_o K \; g_o [\bar{g}_o]^{-1} + \ldots\ldots\ldots \tag{15}$$

Мы предположили, что ядро K раскладывается по теории возмущений, отсюда следует, что таким рядом является и (15). Для простоты вводим обозначение

$$[\bar{g}(r^2)]^{-1} = [\bar{g}_0]^{-1} - r^2 W(r^2) \; , \tag{16}$$

где r^2 константа связи, $W(r)$ – степенной ряд по неотрицательным степеням r .

Из (13) легко получить

$$\phi = [\bar{g}(r^2)]^{-1}\psi + [\bar{g}(r^2)]^{-1} \mathcal{H}_o\phi . \tag{17}$$

В дальнейшем мы должны учесть член $\mathcal{H}_o\phi$. Из (12) нетрудно увидеть, что $\mathcal{H}_o$ снова является проектирующим оператором с инвариантным подпространством $\Phi^{(-)}$. Для учета этого члена разложим его по полной системе функций и составим систему уравнений для вводимых таким образом коэффициентов.

Для описания спинорной структуры введем спиноры собственные функции оператора проекции спина на данном направлении $\vec{n}$, определяемом обычными полярными углами. Их можно записать в виде

$$\chi^{(+)}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \chi^{(-)}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Они нормированы к единице, ортогональны между собой и связаны с проекционными операторами соотношениями

$$\Lambda^{+}(\vec{n})\ \chi^{(+)}(\vec{n}) = \chi^{(+)}(\vec{n}) \qquad \Lambda^{+}(\vec{n})\chi^{(-)}(\vec{n}) = 0$$

$$\Lambda^{-}(\vec{n})\chi^{(+)}(\vec{n}) = 0 \qquad \Lambda^{-}(\vec{n})\chi^{(-)}(\vec{n}) = \chi^{(-)}(\vec{n}). \tag{18}$$

Ввиду разложения (6), в котором число компонент функции $\psi(\vec{p})$ совпадает с числом членов в формуле (6), можно раскладывать в отдельности функций из четырех проектированных подпространств. Обозначим направление пространственного импульса $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ и $|\vec{p}| = q$. Во-первых, мы выделим разложение по пространственному импульсу q, пользуясь, например, полиномами Лагерра

$$L_n^{\alpha}(q) = e^{q}\ \frac{q^{-\alpha}}{n!}\ \frac{d^n}{dq^n}\left(e^{-q}\, q^{n+\alpha}\right), \qquad n = 0,1,2,\ \dots\dots, \quad \alpha > -1$$

Спинорную функцию нашего типа, зависящую только от данного направления $\vec{n}$ из любого проектированного подпространства, можно разложить по полной ортонормированной системе

$$\Phi_{\ell m}^{(\pm,\mp)}(\vec{n}) = Y_{\ell m}(\vec{n})\ \chi_1^{(\pm)}(\vec{n})\ \chi_2^{(\pm)}(-\vec{n}), \tag{19}$$

где $Y_{\ell m}(\vec{n})$ – обычные сферические функции.

Сейчас нетрудно найти разложение функции

$$H_0(\vec{p},E)\phi(\vec{p}) = \frac{\pi i q}{q^2 - E^2}\left[\Lambda_1^{-}(\vec{n})\Lambda_2^{+}(-\vec{n}) + \Lambda_1^{+}(\vec{n})\Lambda_2^{-}(-\vec{n})\right]\phi(\vec{n},q) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\left\{F_{\ell m}^{\nu(+-)}(\phi)\,\Phi_{\ell m}^{(+,-)}(\vec{n}) + F_{\ell m}^{\nu(-,+)}(\phi)\,\Phi_{\ell m}^{(-+)}(\vec{n})\right\} L_{\nu}^{\alpha}(q), \tag{20}$$

где числовые коэффициенты определяются формулой

$$F_{\ell m}^{\nu(\pm\mp)}(\phi) = \frac{\pi i \nu!}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}\iint_{(\Omega\chi q)} \frac{q\, e^{-q}\, q^{\alpha}}{q^2 - E^2 - i\epsilon}\ \Phi_{\ell m}^{(\pm\mp)T}(\vec{n})\, L_{\nu}^{\alpha}(q)\phi(\vec{n},q)\, d\Omega\, dq. \tag{21}$$

Здесь знаки проектирования у $\phi(\vec{n},q)$ в связи с (18) можно не писать, суммирование по спинорным индексам везде подразумевается, а также введено явное обозначение, показывающее, что коэффициенты являются функционалами ϕ. В связи с (20), формулу (17) можно записать в виде

$$\phi(\vec{p}) = \left[\overline{g(r^2)}\right]^{-1}\psi + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\left\{F_{\ell m}^{\nu(+,-)}(\phi)\left[\overline{g(r^2)}\right]^{-1}\left(\Phi_{\ell m}^{(+-)}(\vec{n})L_{\nu}^{\alpha}(q')\right) + \right.$$
$$\left. + F_{\ell m}^{\nu(-+)}(\phi)\left[\overline{g(r^2)}\right]^{-1}\left(\Phi_{\ell m}^{(-+)}(\vec{n})\,L_{\nu}^{\alpha}(q')\right)\right\}. \tag{22}$$

Наша задача состояла в том, чтобы разрешить это уравнение относительно функции ϕ при данной произвольной функции ψ. Поищем решение этого уравнения в виде (22), где функционалы $F^{\nu(\pm\mp)}(\phi)$ для искомой функции ϕ принимают определенные значения, для которых введем обозначения

$$F_{\ell m}^{\nu(\pm\mp)}(\phi) = a_{\ell m}^{\nu(\pm\mp)}. \tag{23}$$

Для этих коэффициентов нужно найти систему уравнений. Вставляя (23) в (22) и полученную формулу – снова в (22), нетрудно найти, что их можно определить из следующей системы

$$F^{\nu(+-)}_{\ell m}([\overline{g(r^2)}]^{-1}\psi)\sum_{\nu'=0}^{\infty}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'}[a^{\nu'(+-)}_{\ell' m'}F^{\nu(+-)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}(\Phi^{(+-)}_{\ell' m'},L^{a}_{\nu'})\}+$$
$$+a^{\nu'(-+)}_{\ell' m'}F^{\nu(+-)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}(\Phi^{(-+)}_{\ell' m'},L^{a}_{\nu'})\}]=a^{\nu(+-)}_{\ell m} \tag{24}$$

$$F^{\nu(-+)}_{\ell m}(\overline{g(r^2)}]^{-1}\psi)+\sum_{\nu'=0}^{\infty}\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sum_{m'=-\ell'}^{\ell'}[a^{\nu'(+-)}_{\ell' m'}F^{\nu(-+)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}(\Phi^{(+-)}_{\ell' m'},L^{a}_{\nu'})\}+$$
$$+a^{\nu'(-+)}_{\ell' m'}F^{\nu(-+)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}(\Phi^{(-+)}_{\ell' m'}L^{a}_{\nu'})\}]=a^{\nu(-+)}_{\ell m}. \tag{25}$$

Возможности, которые дает нам такая система, мы обсудим в дальнейшем. Ее решения являются функциональными ψ, которые мы обозначим

$$a^{\nu(+-)}_{\ell m}(r^2|\psi), \qquad a^{\nu(-,+)}_{\ell m}(r^2|\psi).$$

С помощью (22), (23) окончательно получаем

$$\phi=[g(r^2)]^{-1}\psi+[\overline{g(r^2)}]^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\{a^{\nu(+,-)}_{\ell m}(r^2|\psi)\Phi^{(+,-)}_{\ell m}+a^{\nu(-,+)}_{\ell m}(r^2|\psi)\Phi^{(-,+)}_{\ell m}\}L^{a}_{\nu}. \tag{26}$$

Основное уравнение квазиоптического подхода (9) запишем в виде

$$[\bar{g}_o]^{-1}\psi-V\psi=0 \tag{27}$$

и для введенного таким образом квазипотенциала получим следующее операторное выражение

$$V=[\bar{g}_o]^{-1}-[\bar{g}(r^2)]^{-1}-[\overline{g(r^2)}]^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\{(\Phi^{(+,-)}_{\ell m}L^{a}_{\nu})a^{\nu(+,-)}_{\ell m}(r^2|\ldots)+$$
$$+(\Phi^{(-+)}_{\ell m}L^{a}_{\nu})a^{\nu(-,+)}_{\ell m}(r^2|\ldots\ldots)\}, \tag{28}$$

где наличие точек указывает, что при действии V на какую-нибудь функцию, она должна быть поставлена на этом месте. Чтобы выяснить зависимость квазипотенциала от константы связи остается найти ее для коэффициентов $a^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}(r|\ldots\ldots)$. Для этой цели, пользуясь (16), (18), (19), (21), нетрудно найти

$$F^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}(\Phi^{(\pm\mp)}_{\ell' m'}L^{a}_{\nu'})\}=\delta_{\nu\nu'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}-r^2F^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}[W(r^2)(\Phi^{(\pm\mp)}_{\ell'}L^{a}_{\nu'})]$$

$$F^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}(\Phi^{(\pm\mp)}_{\ell' m'},L^{a}_{\nu'})\}=-r^2F^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}[W(r^2)(\Phi^{(\pm\mp)}_{\ell' m'},L^{a}_{\nu'})]$$

$$F^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}\{[\overline{g(r^2)}]^{-1}\psi\}=f^{*(\pm\mp)}_{\ell m}(\psi^{(\pm\mp)})-r^2F^{\nu(\pm}_{\ell m}[W(r^2)\psi],$$

где введено обозначение

$$f^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}(\psi^{(\pm\mp)}) = \frac{\pi i \nu}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} \int_{(\Omega)} \int_{(q)} e^{-q} q^{\alpha} L^{\alpha}_{\nu}(q)\, \Phi^{(\pm\mp)T}_{\ell m}(\vec{n})\, \psi(\vec{n}, q)\, d\Omega\, dq$$

Вставляя в (24), (25), легко найти

$$\sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \{ a^{\nu'(+-)}_{\ell' m'} F^{\nu(+-)}_{\ell m} [W(r^2)(\Phi^{(+-)}_{\ell' m'}, L^{\alpha}_{\nu'})] + a^{\nu'(-+)}_{\ell' m'} F^{\nu(+-)}_{\ell m} [W(r^2)(\Phi^{(-+)}_{\ell' m'} L^{\alpha}_{\nu'})] \} = \tag{29}$$

$$= f^{\nu(+-)}_{\ell m}\left(\frac{\psi^{(+-)}}{r^2}\right) - F^{\nu(+-)}_{\ell m}[W(r^2)\psi]$$

$$\sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \{ a^{\nu'(+-)}_{\ell' m'} F^{\nu(-+)}_{\ell m} [W(r^2)(\Phi^{(+-)}_{\ell' m'}, L^{\alpha}_{\nu'})] + \tag{30}$$

$$+ a^{\nu'(-+)}_{\ell' m'} F^{\nu(-+)}_{\ell m} [W(r^2)(\Phi^{(-+)}_{\ell' m'}, L^{\alpha}_{\nu'})] = f^{\nu(-+)}_{\ell m}\left(\frac{\psi^{(-+)}}{r^2}\right) - F^{\nu(-+)}_{\ell m}[W(r^2)\psi] \, .$$

Откладывая обсуждение всей системы, ввиду разделения свободного члена на два слагаемых можно ожидать, что подобное разделение получится и у ее решения, которое мы представим в виде

$$a^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}(r^2|\,\psi) = \frac{1}{r^2} A^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}(\psi^{(\cdot)}) + B^{\nu(\pm\mp)}_{\ell m}(W(r^2)\,|\,\psi) \, . \tag{31}$$

Видно, что в квазипотенциале появится член, содержащий полюсную особенность по r^2. Пользуясь (18), (28), (31), нетрудно найти для него следующее выражение

$$\Delta V\left(\frac{1}{r^2}\right)\psi = \frac{1}{r^2} \frac{q^2 - E^2}{\pi i q} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \{ \Phi^{(+-)}_{\ell m} A^{\nu(+-)}_{\ell m}(\psi^{(-)}) + \Phi^{(-+)}_{\ell m} A^{\nu(-+)}_{\ell m}(\psi^{-}) \} L^{\alpha}_{\nu} . \tag{32}$$

Во-первых, видно, что особый член является проектирующим оператором. Если $\psi \subset \Phi^{(+)}$, то $\Delta V(\frac{1}{r^2})\,\psi = 0$.

В связи с формулами (18), (19), (32) видно, что выполняются равенства

$$\Xi\ \Lambda^{+}_{1}(\vec{n})\Lambda^{+}_{2}(-\vec{n})\,\Delta V\left(\frac{1}{r^2}\right)\psi = 0$$

$$\Lambda^{-}_{1}(\vec{n})\ \Lambda^{-}_{2}(-\vec{n})\,\Delta V\left(\frac{1}{r^2}\right)\psi = 0 ,$$

т.е. для любой функции ψ, функция $\Delta V(\frac{1}{r^2})\psi \subset \Phi^{(-)}$. Значит оператор $\Delta V(\frac{1}{r^2})$ имеет инвариантное подпространство $\Phi^{(-)}$ и в таком случае можно говорить, что его проектирующие свойства являются дополнительными к подобным свойствам свободной двухвременной функции Грина $\approx g_0$, а также виден механизм ожидаемого устранения этого члена при суженном рассмотрении задачи на пространстве $\Phi^{(+)}$.

Можно показать, что при таком рассмотрении задачи устраняется и член в квазипотенциале, не зависящий от константы связи, и таким образом получить точную структуру ряда теории возмущений. Для этого члена, в связи с (16), (18), (19), (28), нетрудно найти

$$\Delta V(0)\psi = \frac{E^2-q^2}{\pi i q}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell}\{[\Phi^{(+,-)}_{\ell m} B^{\nu(+-)}_{\ell m}(W(0)|\psi) + \Phi^{(-,+)}_{\ell m} B^{\nu(-,+)}_{\ell m}(W(0)|\psi)]L^a_\nu + \tag{33}$$

$$+[A^{\nu(+,-)}_{\ell m}(\psi^{(-)})W(0)\Phi^{(+,-)}_{\ell m} + A^{\nu(-,+)}_{\ell m}(\psi^{(-)})W(0)\Phi^{(-,+)}_{\ell m}]L^a_\nu .$$

В пространстве $\Phi^{(+)}$ вторая группа членов исчезает. В связи с (18), (19) легко заметить, что в таком случае величины типа

$$\Lambda^+_1(\vec{n})\Lambda^+_2(-\vec{n})\Delta Q(0)\psi , \qquad \Lambda^-_1(\vec{n})\Lambda^-_2(-\vec{n})\Delta V(0)\psi$$

зависят только от компоненты $\psi^{(-)}$ и в пространстве $\Phi^{(+)}$ оператор $\Delta V(0)$ не дает вклада в квазипотенциал.

§ 4. Рассмотрим подробнее вышеизложенное. Примененный подход в задаче об обращении операторов, аналитически зависящих от параметра (в нашем случае – от константы связи), исходит из некоторых математических работ, посвященных этому вопросу, например,[/6/,/7/,/8/]. Обычно эту задачу сводят при определенных условиях к решению конечной линейной системы. Это можно сделать, учитывая в (20) конечное число членов, достаточно большое, чтобы для введенного класса волновых функций и при определенных гипотезах относительно применявшихся рядов, оставшаяся бесконечная сумма выступала бы в качестве малой поправки. Мы предпочли не делать все в более близком к цитированным работам виде, чтобы не пользоваться для рядов теории возмущений гипотезами, о правильности которых ничего не известно. Такой формальный подход привел к бесконечной системе (24), (25) вместо соответствующей конечной, из которой, однако, можно образовать конечные системы для приближенных рассмотрений.

Появляется следующий вопрос: кроме особенности в нуле, сравнительно легко выступающей, существуют ли и другие особенности по константе связи и каков их вклад в квазипотенциал? Ответ на эти вопросы можно получить, изучая систему (29), (30). Для простоты можно думать о некотором конечном приближении или о возможной конечной формулировке задачи. Возможность решения соответствующей системы определяется ее детерминантом. Нетрудно заметить из (29), (30), что он должен быть составлен из матричных элементов оператора $W(r^2)$ в пространстве $\Phi^{(-)}$. Чтобы записать решение системы в виде (31), необходимо, чтобы такой детерминант для $W(0)$ был отличен от нуля. Поэтому для возможности утверждения существования в квазипотенциале полюса вида (31) достаточно предположения об отсутствии особенностей у членов второго порядка, при котором и получена вышеприведенная картина. В противном случае возможно появление полюса в нуле высшего порядка. Относительно других особенностей по r^2 в таком рассмотрении ничего более определенного пока нельзя сказать. Так как для их существования необходимо появление особенностей у членов ряда теории возмущений, при появлении общей особенности двухвременной функции Грина, нужно вспомнить сделанные в [/5/] замечания по этому поводу.

Полученные результаты можно понимать следующим образом. В наших условиях в квазипотенциале появляется полюсной член, однако, ввиду найденных проектирующих свойств этого члена, более естественно рассматривать задачу в суженном смысле: на пространстве $\Phi^{(+)}$ его не учитывать. А так как константа связи имеет строго фиксированное значение, по сути дела никакой особенности в квазипотенциале не появляется. Конечно, если бы была выявлена необходимость учета такого дополнительного члена в квазипотенциале, стоило бы улучшить вышеприведенные рассмотрения, относящиеся к довольно сложному вопросу об обращении оператора, аналитически зависящего от параметра.

Автор выражает благодарность А.Н.Тавхелидзе, а также участникам семинара ЛТФ за полезное обсуждение настоящей работы.

Литература

1. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, No.2 (1963).
2. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, et al. Nuovo Cim., 30, No. 1 (1963).
3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze and O.A.Khrustalev. Phys. Lett., 4, No.6 (1963).
4. Р.Н.Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1572, Дубна (1964).
5. Г.М.Десимиров, Д.Стоянов. Препринт ОИЯИ Р-1658, 1964.
6. Д.Ф.Хазаров. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XII, № 2, 1952, стр. 65.
7. Д.Ф.Хазаров. Труды Тбилис. математ. ин-та, т. XIX, 1953, стр. 163.
8. Д.Ф.Хазаров. Studia Mathemat., XX, 1961, с. 19.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1965 г.