ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р-2091

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Винтернитц, В. Мандросов, Я.А. Смородинский,
М. Углирж, И. Фриш

К ВОПРОСУ О ВЫСШИХ СИММЕТРИЯХ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1965

P-2091

П. Винтерниц, В. Мандросов, Я.А. Смородинский,
М. Углирж, И. Фриш

К ВОПРОСУ О ВЫСШИХ СИММЕТРИЯХ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Направлено в Physics Letters

Понятие высшей (или скрытой) симметрии в квантовой механике было впервые рассмотрено в связи со "случайным" вырождением атома водорода по орбитальному квантовому числу /1,2,3/. Было показано, что группой симметрии этой задачи является четырехмерная группа вращений (для случая дискретного спектра), а не только трехмерная, как для общего центрального симметричного потенциала. Известно, что подобной высшей симметрией обладает гармонический осциллятор, как изотропный, так и анизотропный с рациональным отношением частот /4,5/. Группой симметрии этих задач является группа $SU(n)$ (в n мерном пространстве).

Вопрос о потенциалах, обладающих высшей симметрией, интересен как в релятивистской, так и в релятивистской квантовой механике /6/. Кроме того, такие потенциалы могут играть важную роль в различных моделях атомного ядра /7/ и быть полезными в качестве динамических моделей для теории элементарных частиц /8,9,10/.

Интересно было бы ответить на вопрос о том, какие вообще могут существовать потенциалы, обладающие высшей (т.е. не только явно геометрической) симметрией в нерелятивистской классической и квантовой механике. В этой работе мы пока ограничиваемся двухмерным (плоским) случаем. Будем работать преимущественно алгебраическим методом, т.е. будем искать в квантовом случае инфинитезимальные операторы группы, как набор операторов, коммутирующих с гамильтонианом задачи (к классическому случаю перейдем по принципу соответствия).

Таким образом, мы ищем потенциал $V(x,y)$, для которого существует набор операторов L_i, удовлетворяющих уравнению

$$[H, L_i] = 0, \qquad (1)$$

где $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x,y)$.

Одновременно мы находим и операторы L_i и из них образуем алгебру Ли. В этой работе мы рассматриваем L_i как дифференциальные операторы не выше второго порядка. Ограничение первым порядком приводит к чисто геометрическим симметриям (типа сохранения момента количества движения в центрально симметричном поле). Итак, ищем оператор L в виде

$$L = u_{20}p_1^2 + u_{11}p_1p_2 + u_{02}p_2^2 + u_{10}p_1 + u_{01}p_2 + u_{00}, \qquad (2)$$

где $p_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$; $p_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, Условие (1) приводит к 10 дифференциальным уравнениям для 7 функций u и V. Из условия совместимости этой системы получаем дифференциальное уравнение второго порядка для $V(x,y)$. В результате решения всей системы уравнений получаем, что хотя бы один оператор типа (2) существует тогда и только тогда, когда H можно записать в виде

$$H = \frac{1}{a_1(q_1)+a_2(q_2)}\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}+V_1(q_1)-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}+V_2(q_2)\right\}, \tag{3}$$

где a_i, V_i – произвольные функции и q_1, q_2 – одна из систем координат, в которых разделяются переменные в уравнении Лапласа на плоскости (т.е. декартовские, полярные, параболические или эллиптические). Оператор L тогда записывается в виде

$$L = \frac{1}{a_1(q_1)+a_2(q_2)}\left\{a_2(q_2)\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}+V_1(q_1)\right]-a_1(q_1)\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}+V_2(q_2)\right]\right\}. \tag{4}$$

Гамильтониан (3) соответствует динамической системе типа Лиувилля /11/ (которая решается в квадратурах). Четырем возможным системам координат соответствуют четыре типа потенциалов и операторов L (что связано с тем, что существует всего четыре типа симметричных квадратичных полиномов от генераторов группы движения евклидовой плоскости /12/). Следует подчеркнуть, что в отличие от, например, /13/ здесь никаких предположений о разделении переменных в уравнении Гамильтониана – Якоби (или Шредингера) не делается, а, наоборот, доказывается, что квадратичный интеграл движения L_i может существовать только в том случае, если переменные разделяются в одной из вышеуказанных систем координат.

Из вышеизложенного следует, что два (независимые) оператора типа (2), коммутирующие с H, существуют в том случае, если потенциал V допускает разделение переменных в двух системах координат (или разного типа, или одинакового, но сдвинутых или повернутых относительно друг друга). Комбинируя 4 типа координатных систем, получаем 10 возможностей, но только 4 потенциала оказываются существенно различными, а именно:

$$V(x,y) = \alpha(x^2+y^2) + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{y^2} \tag{5}$$

(переменные разделяются в декартовых, полярных и эллиптических координатах),

$$V(x,y) = \alpha(4x^2+y^2) + \beta x + \frac{\gamma}{y^2} \tag{6}$$

(декартовские и параболические координаты),

$$V(x,y) = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\beta}{\cos^2\frac{\phi}{2}} + \frac{\gamma}{\sin^2\frac{\phi}{2}}\right), \qquad x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \tag{7}$$

(полярные и параболические координаты)

$$V(x,y) = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\beta\cos\frac{\phi}{2}+\gamma\sin\frac{\phi}{2}\right) = \frac{2\alpha+\sqrt{2}(\beta\xi+\gamma\eta)}{\xi^2+\eta^2}, \tag{8}$$

где $x = \tfrac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)$
$y = \xi\eta$

(две взаимно перпендикулярные параболические системы). Везде α , β , γ - произвольные постоянные.

Нетрудно видеть, что в качестве частных случаев здесь содержится кулоновский потенциал, изотропный гармонический осциллятор и анизитропный осциллятор с отношением частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}=½$. Мы получили бы осциллятор с отношением частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n}$ (m , n - целые), рассматривая операторы L_i не второго порядка , а порядка $m+n-1$.

Интересно исследовать классическое и квантовое движение в найденных потенциалах. Это было проделано подробно для всех четырех потенциалов. Здесь мы приведем только результаты для потенциала

$$V(x,y)=\alpha(x^2+y^2)+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{y^2}.$$

Решая классические уравнения движения, получаем траектории в виде:

$$x^2=\frac{E_1}{2\alpha}+\sqrt{\frac{E_1^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta}{\alpha}}\sin(\sqrt{8\alpha}\ t+C_1) \qquad E=E_1+E_2 \tag{9}$$

$$y^2=\frac{E_2}{2\alpha}+\sqrt{\frac{E_2^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}}\cos(\sqrt{8\alpha}\ t+C_2).$$

Мы видим, что при $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ все траектории финитные и замкнутые. Замкнутость всех финитных траекторий обычно считается типичной только для кулоновского потенциала и гармонического осциллятора /13/. В общем случае получаются кривые четвертого порядка, которые при $\beta=\gamma=0$ вырождаются в эллипсы.

Решение уравнения Шредингера записывается в виде:

$$\psi_{n_1 n_2}(x,y)=\sqrt{\frac{n_1!\,n_2!\,(2\alpha)^{1+\nu_1+\nu_2}}{\Gamma(n_1+1+\nu_1)\Gamma(n_2+1+\nu_2)}}\cdot e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)}\, x^{½+\nu_1}\cdot y^{½+\nu_2}\cdot$$

$$\cdot L_{n_1}^{\nu_1}(\sqrt{2\alpha}\,x)\, L_{n_2}^{\nu_2}(\sqrt{2\alpha}\,y). \tag{10}$$

где $\nu_1=½\sqrt{1+8\beta}$ $\qquad$ $\nu_2=½\sqrt{1+8\gamma}$

где $L_n^{\nu}(z)$ - полиномы Лагерра и энергия равна

$$E=2\sqrt{2\alpha}\,(n_1+n_2+1)+\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,(\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma}). \tag{11}$$

Мы видим, что основному состоянию соответствует одна функция, первому возбужденному - две, второму - три и так далее. Таким образом, вырождение уровней в точности соответствует размерностям всех неприводимых представлений группы SU_2 .

Из величин, входящих в задачу, можно построить инфинитезимальные операторы группы SU_2 . В дальнейшем нам придется не совсем строгим образом делить оператор на оператор, искать корень из оператора, но поскольку эти операции всегда производятся над диагональными операторами, то это вполне осмысленно.

Введем операторы "рождения" и "уничтожения" кванта:

$$b_i^+ = -\tfrac{1}{4}\left[-2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sqrt{2a}\;x_i^2 - 1 - 2\frac{\beta_i}{\sqrt{2a}}\frac{1}{x_i^2}\right]$$

$$b_i^- = -\tfrac{1}{4}\left[-2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sqrt{2a}\;x_i^2 + 1 - 2\frac{\beta_i}{\sqrt{2a}}\frac{1}{x_i^2}\right], \tag{12}$$

где $i = 1,2$; $x_1 = x$, $x_2 = y$; $\beta_1 = \beta$; $\beta_2 = \gamma$.

Тогда

$$b_1^- \psi_{n_1 n_2} = \sqrt{n_1(n_1+\nu_1 n)}\;\psi_{n_1-1,\,n_2} \qquad \nu_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+8\beta_1}$$
$$b_1^+ \psi_{n_1 n_2} = \sqrt{(n_1+1)(n_1+\nu_1+1)}\;\psi_{n_1+1,\,n_2} \tag{13}$$

(аналогичные формулы получаются для b_2^-, b_2^+).

Введем еще диагональные операторы

$$\hat{n}_1 = \tfrac{1}{2}\{[b_1^-, b_1^+] - \tfrac{1}{2}\sqrt{1+8\beta_1} - 1\} =$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{2a}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2a\,x_1^2 - \frac{2\beta_1}{x_1^2} + \sqrt{2a}\,\sqrt{1+8\beta_1}\right\}. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться, что операторы

$$L_3 = \frac{\hat{n}_2 - \hat{n}_1}{2};\; L_+ = b_1^- b_2^+ \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_1+\nu_1)(\hat{n}_2+\nu_2+1)}};\quad L_- = b_1^+ b_2^- \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_1+\nu_1+1)(\hat{n}_2+\nu_2)}} \tag{15}$$

действуют на собственные функции гамильтониана следующим образом

$$L_3\psi_{n_1 n_2} = \frac{n_2 - n_1}{2}\psi_{n_1 n_2}$$
$$L_+\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{n_1(n_2+1)}\;\psi_{n_1-1,\,n_2+1} \tag{16}$$
$$L_-\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{(n_1+1)n_2}\;\psi_{n_1+1,\,n_2-1}.$$

При $\ell = \frac{n_1+n_2}{2}$, $m = \frac{n_2-n_1}{2}$ это как раз и есть каноническая форма для инфинитезимальных операторов группы SU_2. Отсюда уже видно, что L_3, L_+, L_- коммутируют с гамильтонианом SU_2 действуя на собственные функции, удовлетворяют коммутационным соотношениям для SU_2. Следовательно, группой симметрии потенциала $V(x,y) = a(x^2+y^2) + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{y^2}$ является группа SU_2. При этом оператор L_3 является одним из найденных интегралов движения типа (4) для данного потенциала и операторы L_+, L_- также тесно связаны с найденными интегралами.

Для потенциалов (6), (7) и (8) получаются качественно аналогичные результаты. В классическом случае все финитные траектории получаются замкнутыми, в квантовом – имеется вырождение и подробное исследование приводит к группе SU_2 или, по крайней мере, к группе O_3, локально изоморфной SU_2). Впрочем это типично именно для двухмерного случая и связано, по-видимому, с тем, что SU_2 является (в локальном смысле) единственной компактной полупростой трехпараметрической группой Ли.

Результаты в трехмерном случае должны быть значительно более богатыми.

Все подробности и выводы изложенных результатов будут опубликованы в другом месте.

Литература

1. W.Pauli. Zs. f. Phys., 36, 366 (1926).
2. В.А.Фок. Zs. f. Physik, 98, 145 (1935).
3. V.Bargmann. Zs. f. Physik, 99, 576 (1936).
4. J.M.Jauch, E.L.Hill. Phys. Rev., 57, 641 (1940).
5. Ю.Н.Демков. ЖЭТФ, 44, 2007 (1963).
6. L.C.Biedenham. Phys. Rev., 126, 845 (1962).
   L.C.Biedenham, N.N.V.T. Swamy. Phys. Rev., 133, B1353 (1964).
7. V.Bargmann, M.Moshinsky. Nucl. Phys., 18, 679 (1960).
8. A.O.Barut. Phys. Rev., 135, B839 (1964).
9. В.И.Манько. Препринт ФИАН А-86 (1964).
10. Н.Н.Ачасов, Ю.Б.Румер, В.Л.Черняк, Д.В.Ширков. Препринт ТФ-13, Новосибирск (1965).
11. Е.Т.Уиттекер. Аналитическая динамика. Москва ОНТИ (1937).
12. П.Винтерниц, И.Фриш. ЯФ 1, № 5 (1965).
13. Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика, Москва, ФМ, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1965 г.