ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2071

Фам Куи Ты

О ПРЕДЕЛЕ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

3177/3 пр.

Р-2071

Фам Куи Ты

О ПРЕДЕЛЕ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1. Введение

Процессы слабых взаимодействий при низких энергиях хорошо описываются первым приближением теории возмущений. Это обусловлено тем, что константа взаимодействия G мала. Однако при высоких энергиях первое приближение теории возмущений не применимо, как это было отмечено в работах Блохинцева[1], Маркова[2] и др. Оценки верхнего предела применимости теории возмущений для слабых взаимодействий были даны в работах Иоффе[3], Асанова и Валуева[4] и др. В рамках универсальной $V-A$ теории Гелл-Манна и Фейнмана[5] и Маршака и Сударшана[6] авторы работ[3,4] рассмотрели ряд процессов, запрещенных в низшем порядке, например,

$$\mu^+ + e^- \to \mu^- + e^+ \;;\; \mu^+ \to 3e \;;\; \mu^+ \to e^+ + \gamma . \qquad (1)$$

Сравнивая теоретические расчеты с экспериментальными данными, Иоффе, Асанов и Валуев получили различные оценки для импульса обрезания Λ и тем самым получили верхние оценки для области энергии, в которой теория возмущений применима. Однако все процессы (1) строго запрещены, если мюонное и электронное нейтрино являются различными частицами, что было подтверждено опытом, и поэтому оценки, полученные на основе рассмотрения процессов (1), в действительности не имеют места[x].

В настоящей работе мы найдем границу применимости теории возмущений для слабых взаимодействий путем сравнения поведения амплитуд различных процессов с требованием унитарности. Рассмотрим прежде всего следствия, вытекающие из условия унитарности:

$$\frac{T - T^+}{i} = T^+ T , \qquad (2)$$

где матрица T связана с S – матрицей соотношением $S = 1 + iT$. Обозначим через $|EJa_\lambda b_{\lambda'}\rangle$ вектор состояния системы частиц a и b с энергией E, полным моментом J и спиральностью λ (для частицы a) и λ' (для b) и положим

$$T^J(a_\lambda b_{\lambda'}; c_\mu d_{\mu'}; E) = \langle JEc_\mu d_{\mu'} | T | JEa_\lambda b_{\lambda'}\rangle$$

---

x/ В работе Иоффе также были рассмотрены другие эффекты. Однако там не была рассмотрена роль радиационных поправок, которые могут изменить полученные оценки, а также были сделаны некоторые дополнительные предположения относительно универсальности констант взаимодействий.

Тогда из (2) мы имеем:

$$2\operatorname{Im} T^{J}(a_{\lambda} b_{\lambda'}; a_{\lambda} b_{\lambda'}; E) = |T^{J}(a_{\lambda} b_{\lambda'}; a_{\lambda} b_{\lambda'}; E)|^{2} + |T^{J}(a_{\lambda} b_{\lambda'}; a_{\mu} b_{\mu'}; E)|^{2} + \ldots + |T^{J}(a_{\lambda} b_{\lambda'}; c_{\nu} d_{\nu'}; E)|^{2} + \ldots \tag{3}$$

Это соотношение удовлетворяется только тогда, когда амплитуды парциальных волн T^{J} удовлетворяют неравенству

$$|T^{J}(a_{\lambda} b_{\lambda'}; a_{\lambda} b_{\lambda'}; E)| \leq 2 \tag{4}$$

$$|T^{J}(a_{\lambda} b_{\lambda'}; c_{\nu} d_{\nu'}; E)| \leq 1 . \tag{5}$$

Отметим, что величина в первой части (5) является амплитудой неупругого процесса.

Перейдем теперь к изучению поведения амплитуд некоторых процессов.

2. Рассеяние нейтрино на электроне

Рассмотрим процесс упругого рассеяния

$$\nu + e \rightarrow \nu + e . \tag{6}$$

Обозначим через q и p 4-импульсы начальных нейтрино и электрона соответственно, а через q' и p' -конечных нейтрино и электрона соответственно.

В универсальной $V-A$ теории слабых взаимодействий [5,6] матричный элемент этого процесса равен:

$$M = (2\pi)^{4} \delta^{4}(p+q-p'-q') \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(p')\gamma_{\mu}(1+\gamma_{5})u(p)\bar{u}(q')\gamma_{\mu}(1+\gamma_{5})u(q). \tag{7}$$

Из этого выражения мы получаем следующее выражение для полного процесса (6):

$$\sigma = \pi G^{2} \frac{(E^{2}-m^{2})^{2}}{E^{2}}, \tag{8}$$

которое пропорционально полной энергии E в системе центра инерции (при больших энергиях). На основе условия унитарности и представления Мандельстама Фруассарт доказал [7], что полное сечение взаимодействия двух частиц не может расти быстрее $\ln^{2} E$. Таким образом, быстрый рост сечения (8) при $E \to \infty$ противоречит условию унитарности при достаточно большой энергии для строгого доказательства. Мы вычислим парциальные амплитуды рассматриваемого процесса.

Отметим, что двухкомпонентное нейтрино всегда имеет спиральность $-1/2$, поэтому отличны от нуля только амплитуды $\langle \lambda', -\frac{1}{2}, \frac{\vec{p}'}{p'} | T(E) | \frac{\vec{p}}{p}, \lambda, -\frac{1}{2} \rangle$. Конкретные вычисления показывают, что $\langle \lambda', -\frac{1}{2}, \frac{\vec{p}'}{p'} | T(E) | \frac{\vec{p}}{p}, \lambda, -\frac{1}{2} \rangle$, если $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ и $\lambda' \neq -\frac{1}{2}$. Этот результат согласуется с выводом работы [8], где был изучен процесс рассеяния нейтрино на поляризованном электроне. Из выражения (7) для матричного элемента мы получаем:

$$\langle -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \frac{\vec{p}'}{p} | T(E) | \frac{\vec{p}}{p}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{2}} \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{(E^{2}-m^{2})^{2}}{E^{2}} . \tag{9}$$

С другой стороны, можно разложить амплитуду $\langle -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\vec{p}'}{p'} | T(E) | \frac{\vec{p}}{p}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$ на парциальные амплитуды по методу Якоба и Вика [9]:

$$\langle -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \frac{\vec{p}'}{p'} | T(E) | \frac{\vec{p}}{p}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{J} (2J+1) \langle -\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} | T^{J}(E) | -\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2} \rangle d^{J}_{00}(\theta) . \tag{10}$$

Из (9) и (10) мы получим выражения для парциальных амплитуд:

$$\langle -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} | T^{J}(E) | -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}\,\pi} \frac{(E^{2}-m^{2})^{2}}{E^{2}} \delta_{J0} . \tag{11}$$

Это выражение не противоречит условию унитарности, если энергия E удовлетворяет неравенству:

$$\frac{G}{\sqrt{2}\,\pi} \cdot \frac{(E^{2}-m^{2})^{2}}{E^{2}} \leq 2 .$$

Отсюда получаем верхнюю оценку для предела применимости выражения (7) матричного элемента рассматриваемого процесса:

$$E \leq \left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{G}\right)^{1/2} = 940 \text{ Бэв}. \tag{12}$$

Мы рассмотрели процесс в случае, когда слабые взаимодействия являются четырехфермионными взаимодействиями.

Если же слабые взаимодействия передаются промежуточными векторными мезонами [10] (см. рис. 1), то вместо (7) мы имеем

$$M = (2\pi)^{4} \delta^{4}(p+q-p'-q') g^{2} \bar{u}(p')\gamma_{\mu}(1+\gamma_{5})u(q) \times \\ \times u(q')\gamma_{\nu}(1+\gamma_{5})u(p) \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{(p-q')_{\mu}(p-q')_{\nu}}{M^{2}}}{(p-q)^{2} + M^{2}}, \tag{13}$$

где M -масса промежуточного векторного мезона. Если пренебречь членами порядка $(\frac{m}{M})^{2}$, то мы имеем следующее выражение для полного сечения:

$$\sigma = \frac{4\pi g^4}{M^2} \cdot \frac{(E^2 - M^2)^2}{(E^2 - M^2)^2 + E^2 M^2} . \qquad (14)$$

Таким образом, при высоких энергиях сечение рассматриваемого процесса стремится к постоянному, что, по-видимому, не противоречит условию унитарности. Однако это не означает, что в теории с векторными мезонами вопрос о пределе применимости теории возмущений не существует. Покажем это на примере процесса с рождением реальных векторных мезонов.

3. Рождение пар векторных мезонов в электронно-позитронной аннигиляции

Рассмотрим процесс $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$, который может происходить за счет как электромагнитного взаимодействия (см. диаграмму на рис. 2), так и слабого взаимодействия (см. диаграмму на рис. 3). Так как здесь мы рассматриваем только слабые взаимодействия, то матричные элементы этого процесса равны

$$M = (2\pi)^4 \delta^4 (p + p' - q - q') g^2 \times \frac{\xi_\nu^{+\prime}}{\sqrt{2 q_0'}} v(-p')\gamma_\nu (1+\gamma_5) \frac{i(\hat p - \hat q)}{(p-q)^2} \gamma_\mu (1+\gamma_5) u(p) \frac{\xi_\mu}{\sqrt{2 q_0}} , \qquad (15)$$

где p и p' 4-импульсы электрона и позитрона, q и ξ_μ – 4-импульс и вектор поляризации векторного мезона W^- ; q' и $\xi_\nu'^{+}$ – 4-импульс и вектор поляризации векторного мезона W^+. В системе центра инерции $p_0 = p_0' = q_0 = q_0' = \frac{E}{2}$ (E – полная энергия системы). Полное сечение процесса дается следующей формулой

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{E^2}{16} \frac{|\vec q|}{|\vec p|} \int_{-1}^{+1} \overline{|T|^2} d(\cos\theta) , \qquad (16)$$

где

$$\overline{|T|^2} = \frac{1}{32 p_0 q_0 p_0' q_0'} (\delta_{\nu\nu'} + \frac{q_\nu' q_{\nu'}'}{M^2})(\delta_{\mu\mu'} + \frac{q_\mu q_{\mu'}}{M^2}) \frac{g^4}{(p-q)^2} \times$$
$$\times Sp\{(i\hat p' + m)\gamma_\nu (1+\gamma_5) i(\hat p - q)\gamma \ (1+\gamma \ )\gamma \ (1+\gamma \ ) i(p-q)\gamma_{\nu'}(1+\gamma \ )\} . \qquad (17)$$

Вычисление дает асимптотическое выражение для σ :

$$\sigma = \frac{g^4}{96\pi} \frac{E^2}{M^4} . \qquad (18)$$

Так же как и в перьом случае (8), σ здесь растет с энергией как E^2, что может приводит к противоречию с условием унитарности. Заметим, что сечение рождения двух нейтральных векторных мезонов растет логарифмически с ростом энергии в теории с калибровочной инвариантностью (и, в частном случае, сечение аннигиляции $e^+ + e^- \to 2\gamma$ /11/). что не противоречит условию унитарности. Разница между этими двумя случаями заключается в следующем. При суммировании по состояниям поляризации векторных мезонов мы имеем:

$$\sum_i \xi_\nu^i \xi_{\nu'}^{i*} = (\delta_{\nu\nu'} + \frac{q_\nu' q_{\nu'}'}{M^2}) .$$

Если матричный элемент имеет вид

$$M = \ldots \frac{\xi_\nu'}{\sqrt{2q'}} \cdot \frac{\xi_\mu}{\sqrt{2q}} N_{\nu\mu} ,$$

то сечение пропорционально

$$(\delta_{\mu\mu'} + \frac{q_\mu q_{\mu'}}{M^2})(\delta_{\nu\nu'} + \frac{q_\nu' q_{\nu'}'}{M^2}) N_{\nu\mu} N_{\nu'\mu'} .$$

Для случая матричного элемента (15) члены, содержащие произведения $\frac{q_\mu q_{\mu'}}{M^2}$, дают главный вклад, в то время, как для случая рождения нейтральных мезонов они обращаются в нуль в силу калибровочной инвариантности $q_\nu' N_{\nu\mu} = q_\mu N_{\nu\mu} = 0$. Поэтому для первого случая сечение имеет асимптотическое поведение (18). Эти результаты также связаны с тем, что теория нейтральных векторных мезонов перенормируема, в то время как теория слабых взаимодействий с промежуточными векторными мезонами неперенормируема.

Перейдем к изучению парциальных амплитуд. В качестве примера рассмотрим следующие амплитуды: $<11 | T(E) | -\frac{1}{2} \frac{1}{2}>$,

$$<-10 | T(E) | -\frac{1}{2} \frac{1}{2}> \qquad <00 | T(E) | -\frac{1}{2} \frac{1}{2}> .$$

Из выражения матричного элемента мы получим:

$$<11 | T(E) | -\frac{1}{2} \frac{1}{2}> = \frac{g^2}{16\pi^2} \sin\theta \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \qquad (19)$$

$$<-10 | T(E) | -\frac{1}{2} \frac{1}{2}> = \frac{i g^2 E}{8\sqrt{2} \pi^2 M} \sin\theta (1 - \cos\theta) \qquad (20)$$

$$<00 | T(E) | -\frac{1}{2} \frac{1}{2}> = \frac{g^2 E^2}{16\pi^2 M^2} \sin\theta . \qquad (21)$$

Разложим эти амплитуды на парциальные амплитуды по методу Якоби и Вика [19] и вычислим их в пределе

Из (19) получаем

$$<11|T^J(E)|-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}> = \frac{g^2}{8\pi}\left(1{,}2\sqrt{2}\,\delta_{J0} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\delta_{J1} + \frac{4\sqrt{3}}{15}\,\delta_{J2}\right). \qquad (22)$$

Эти амплитуды всегда удовлетворяют требованию условия унитарности.

Из (20) получаем

$$<-10|T^J(E)|-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}> = \frac{g^2 E}{4\sqrt{2}\,\pi M}\left(\delta_{J0} + \frac{59}{45}\,\delta_{J1} + \frac{5}{6}\,\delta_{J2} + \frac{1}{15}\,\delta_{J3}\right). \qquad (23)$$

Эти парциальные амплитуды удовлетворяют условию унитарности только в области энергии:

$$E \le \frac{4\pi\sqrt{2}\,M}{\frac{59}{45}\,g^2} = 4\cdot 10^6 \text{ Бэв}, \qquad (24)$$

если $M = 1$ Бэв (масса нуклона).

Для парциальных амплитуд $<00|T^J(E)|-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}>$ мы имеем:

$$<00|T^J(E)|-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}> = \frac{g^2 E^2}{8\pi M^2}\cdot\frac{4}{3\sqrt{2}}\,\delta_{J0}. \qquad (25)$$

Отсюда следует верхний предел области применимости выражения (15) матричного элемента:

$$E \le \left(\frac{12\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{M^2}{g^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{12\pi}{G}\right)^{1/2} = 1950 \qquad (26)$$

Отметим, что только амплитуда рождения мезона со спиральностью о (т.е. рождения продольных мезонов) имеет поведение, нарушающее условие унитарности при больших энергиях.

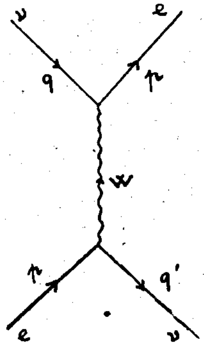
Таким образом, обычная теория возмущений применима только в области малых энергиях, где вклады высших приближений малы. При энергиях, превышающих полученные выражения (1000 Бэв для процесса рассеяния нейтрино на электроне и 2000 Бэв для процесса рождения пар векторных мезонов в электронно-позитронной аннигиляции), в выражениях амплитуд процессов слабых взаимодействий необходимо учитывать члены высших приближений или применять другой метод приближения, для которого условие унитарности выполняется автоматически в каждом порядке.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М.А. Маркову, Нгуен Ван Хьеу, О.С. Парасюку и Ю.В. Цехмистренко за интерес к работе и ценные замечания.

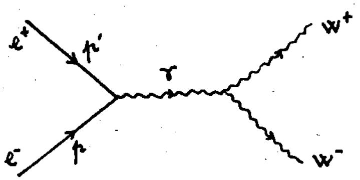
Литература

1. Д.И. Блохинцев. УФН, 62, 381, (1957).
2. М.А. Марков. См сборник "К физике нейтрино высоких энергий". Препринт ОИЯИ Д-577, Дубна, 1960 г.
3. Б.Л. Иоффе. ЖЭТФ, 38, 1608 (1960).
4. Р.А. Асанов, Б.Н. Валуев. Препринт ОИЯИ Р-577, Дубна, 1960.
5. R.P.Feynmann, M.Gell-Mann. Phys.Rev. 109, 193 (1958).
6. E.C.G.Sudarshan, R.E.Marshak, Доклад на конференции по физике мезонов и новых частиц в Венеции - Падуе (1957). "Проблемы современной физики" ИИЛ, № 2 (1959).
7. M.Eroissart. Phys.Rev. 123, 1053 (1961).
8. С.С. Герштейн, В.Н. Фоломешкин. ЖЭТФ, 46, 818 (1964).
9. M.Jacob, G.C.Wick. Annalsof Physics 7, 404 (1959).
10. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys.Rev. Lett. 4, 307 (1960).
11. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, ГИФМЛ, Москва, 1959 год.

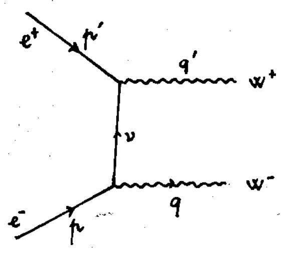
Рукопись поступила в издательский отдел
20 марта 1965 г.



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3