ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна 1965

Р - 2050

И. Роттер

ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ α -ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

Р - 2050

И. Роттер

ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ α -ЧАСТИЦ

В 1958 г. Вильдермут показал, что волновые функции оболочечной модели и модели ассоциации после антисимметризации мало отличаются друг от друга [1]. Это навело на мысль вычислить кластерные свойства ядер в рамках оболочечной модели [2].

Эти работы привели к большим успехам в исследовании легких ядер. Согласно [2] сведения о кластерной структуре ядра получаются разложением волновой функции ядра по волновым функциям ассоциации и остаточного ядра:

$$\langle \ell^{n}[f_1]L_1S_1T_1| = \sum_{\substack{[f_2]L_2S_2T_2\\ [f_3]L_3S_3T_3}} \langle \ell^{n}[f_1]L_1S_1T_1|\ell^{n-m}[f_2]L_2S_2T_2, \ell^{m}[f_3]L_3S_3T_3\rangle \cdot \langle \ell^{n-m}[f_2]L_2S_2T_2| \cdot \langle \ell^{m}[f_3]L_3S_3T_3| . \qquad (1)$$

Здесь $\langle \ell^{n}[f_1]L_1S_1T_1|$ –волновая функция ядра с n нуклонами в последней незамкнутой оболочке, схемой Юнга $[f_1]$, орбитальным моментом L_1, спином S_1 и изоспином T_1. Волновая функция ассоциации, состоящей из m нуклонов, обозначена через $\langle \ell^{m}[f_3]L_3S_3T_3|$, а остаточного ядра – через $\langle \ell^{n-m}[f_2]L_2S_2T_2|$. Коэффициенты

$$\langle \ell^{n}[f_1]L_1S_1T_1|\ell^{n-m}[f_2]L_2S_2T_2, \ell^{m}[f_3]L_3S_3T_3\rangle$$ –

генеалогические коэффициенты. Они выражают свойства симметрии данного ядра относительно определенной ассоциации и входят во все вычисления, дающие выводы о кластерной структуре ядра. (При этом предполагается, что внутренние замкнутые оболочки не меняются). Генеалогические коэффициенты для отделения одного, двух и трех нуклонов для ядер $1p$ – оболочки приведены в работах [3–5]. В данной работе даются коэффициенты для отделения четырех частиц, имеющих схему Юнга [4]. Ограничение на схему Юнга [4] делается потому, что во всех практических вычислениях α –частица встречается как ассоциация из четырех частиц.

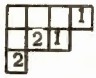
Генеалогические коэффициенты для отделения ассоциации из m нуклонов выражаются через коэффициенты дли ассоциации из $m_1 < m$ нуклонов [6].

$$\langle \ell^{n}[f_1]L_1S_1T_1|\ell^{n-m}[f_2]L_2S_2T_2, \ell^{m}[f_3]L_3S_3T_3\rangle =$$

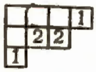
$$= \sum_{\substack{[f_4]L_4S_4T_4\\ [f_0]L_0S_0T_0\\ [f_{00}]L_{00}S_{00}T_{00}}} \langle \ell^{n}[f_1]L_1S_1T_1|\ell^{n-m_1}[f_4]L_4S_4T_4, \ell^{m_1}[f_0]L_0S_0T_0\rangle \cdot \langle \ell^{n-m_1}[f_4]L_4S_4T_4|\ell^{n-m}[f_2]L_2S_2T_2, \ell^{m-m_1}[f_{00}]L_{00}S_{00}T_{00}\rangle \cdot \langle \ell^{m_1}[f_0]L_0S_0T_0, \ell^{m-m_1}[f_{00}]L_{00}S_{00}T_{00}|\ell^{m}[f_3]L_3S_3T_3\rangle \times \qquad (2)$$

$$\times\ U(L_2 L_0 L_1 L_{00}; L_4 L_3)\, U(S_2 S_0 S_1 S_{00}; S_4 S_3)\, U(T_2 T_0 T_1 T_{00}; T_4 T_3) \quad (2).$$

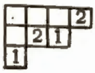
Для $m = 4$ и $[f_3] = [4]$ можно выбрать $m_1 = 2$, т.е. $[f_0] = [f_{00}] = [2]$ и для вычисления генеалогических коэффициентов $\langle \ell^n | \ell^{n-4}, \ell^4 [4] \rangle$ использовать коэффициенты $\langle \ell^n | \ell^{n-2}, \ell^2 [2] \rangle$. Например,



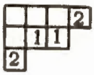
$[f_4] = [321]$,



$[f_4] = [33]$,



$[f_4] = [42]$,



$[f_4] = [411]$.

Из ячеек "1" образуется $[f_0]$, из ячеек "2" – $[f_{00}]$. Сумму по $[f_4] L_4 S_4 T_4$ можно привести к сумме по $L_4^0 S_4^0 T_4^0$ для определенной промежуточной конфигурации $[f_4^0]$:

$$\sum_{\substack{[f_4] L_4 S_4 T_4 \\ L_0 S_0 T_0, L_{00} S_{00} T_{00}}} = A \cdot \sum_{\substack{L_4^0 S_4^0 T_4^0 \\ L_0 S_0 T_0, L_{00} S_{00} T_{00}}} \qquad (3)$$

с

$$A = \sum_{\substack{[f_4] L_4 S_4 T_4 \\ L_0 S_0 T_0, L_{00} S_{00} T_{00}}} \Big/ \sum_{\substack{L_4^0 S_4^0 T_4^0 \\ L_0 S_0 T_0, L_{00} S_{00} T_{00}}} = \langle \ell \ | \ell \ , \ell \ [4] \rangle \Big/ \sum_{\substack{L_4^0 S_4^0 T_4^0 \\ L_0 S_0 T_0, L_{00} S_{00} T_{00}}} .$$

Если в разложении прямого произведения двух неприводимых представлений

$$[f_2] \times [f_3] = \sum_{[f_1]} a_{[f_1]} [f_1]$$

$a_{[f_1]} = 1$, то A зависит только от "расстояния" частиц "2" и "1" в схеме Юнга и не зависит от орбитального момента, спина и изоспина потому, что сумма по

LST является полной. Условие $a_{[f_1]}=1$ выполнено для α -частиц, имеющих схему Юнга [4][x/]. Генеалогический коэффициент $\langle \ell^n | \ell^{n-4}, \ell^4[4] \rangle$ можно записать обычным образом как произведение трех множителей – весового, орбитального и спино-зарядового:

$$\langle \ell^n | \ell^{n-4}, \ell^4 \rangle = \langle n | n-4, 4 \rangle \langle p^n | p^{n-4}, p^4 \rangle \langle \gamma^4 | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle . \tag{5}$$

Весовой фактор не зависит от промежуточной конфигурации $[f_4]$ и выражается через

$$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{n[f_4]n[f_0]}{n[f_1]} \; \frac{n[f_2]n[f_{00}]}{n[f_4]} \; \frac{n[f_3]}{n[f_0]n[f_{00}]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n[f_2]n[f_3]}{n[f_1]}} , \tag{6}$$

где $n[f]$ – размерность схемы Юнга. Орбитальный и спино-зарядовый коэффициенты являются некоторыми частями в выражении (3), зависящими только от L или S и T, соответственно. Для α -частиц A зависит только от схемы Юнга, $A_L = A_{ST} = \sqrt{A}$ (фаза одинакова для всех $[f_4]$, потому что $[f_3] = [4]$ симметрично во всех четырех частицах). Из (3) и

$$\langle p^2[f_0]L_0, p^2[f_{00}]L_{00} | p^4[f_3]L_3 \rangle = \sqrt{\frac{n[f_0]n[f_{00}]}{n[f_3]}} \langle p^4[f_3]L_3 | p^2[f_0]L_0, p^2[f_{00}]L_{00} \rangle$$

$$\langle \gamma^2[\tilde f_0]S_0T_0, \gamma^2[\tilde f_{00}]S_{00}T_{00} | \gamma^4[\tilde f_3]S_3T_3 \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{n[f_0]n[f_{00}]}{n[f_3]}} \langle \gamma^4[\tilde f_3]S_3T_3 | \gamma^2[\tilde f_0]S_0T_0, \gamma^2[\tilde f_{00}]S_{00}T_{00} \rangle$$

[x/] Среди всех генеалогических коэффициентов $\langle \ell^n | \ell^{n-4}, \ell^4 \rangle$ с $\ell = 1$ (1p-оболочка) условие $a_{[f_1]} = 1$ не выполняется только в трех случаях:

$$[421] \longrightarrow [21] + [31] ,$$
$$[431] \longrightarrow [31] + [31] ,$$
$$[432] \longrightarrow [32] + [31] .$$

В этих случаях $a_{[f_1]} = 2$, A зависит от L, S и T и (3) не является более простым, чем (2) (см. аналогичные случаи для $\langle \ell^n | \ell^{n-3}, \ell^3 \rangle$ в /5/, где и методом, приведенным там, нельзя вычислить орбитальный и спино-зарядовый коэффициенты отдельно).

мы имеем для орбитального коэффициента

$$\langle p^n | p^{n-4}, p^4[4] \rangle = \sqrt{A_0} \sum_{L_4 L_0 L_{00}} \langle p^n [f_1] L_1 | p^{n-2} [f_4^0] L_4^0, p^2[2] L_0 \rangle \cdot \langle p^{n-2} [f_4^0] L_4^0 | p^{n-4} [f_2] L_2, p^2[2] L_{00} \rangle \cdot \langle p^4[4] L_3 | p^2[2] L_0, p^2[2] L_{00} \rangle \cdot U(L_2 L_0 L_1 L_{00}; L_4 L_3) \tag{7}$$

и для спино-зарядового коэффициента

$$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 [\tilde{4}] \rangle = \sqrt{A} \sum_{\substack{S_4^0 T_4^0 \\ S_0 T_0, S_{00} T_{00}}} \langle \gamma^n [\tilde{f}_1] S_1 T_1 | \gamma^{n-2} [\tilde{f}_4^0] S_4^0 T_4^0, \gamma^2 [\tilde{2}] S_0 T_0 \rangle \cdot \langle \gamma^{n-2} [\tilde{f}_4^0] S_4^0 T_4^0 | \gamma^{n-4} [\tilde{f}_2] S_2 T_2, \gamma^2 [\tilde{2}] S_{00} T_{00} \rangle \cdot \langle \gamma^4 [\tilde{4}] S_3 T_3 | \gamma^2 [\tilde{2}] S_0 T_0, \gamma^2 [\tilde{2}] S_{00} T_{00} \rangle \cdot U(S_2 S_0 S_1 S_{00}; S_4 S_3)\, U(T_2 T_0 T_1 T_{00}; T_4 T_3).$$

Факторы $\langle n | n-4, 4 \rangle$, $\langle p^n | p^{n-4}, p^4 [\tilde{4}] \rangle$, $\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 [\tilde{4}] \rangle$

выписаны в таблицах для ядер $1p$ – оболочки. Спино-зарядовые коэффициенты равны $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли n четным или нечетным. В таблице дана только фаза, соответствующая числу частиц. Например, $\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$ для $[\tilde{422}] \rightarrow [\tilde{22}] + [\tilde{4}]$ в развернутом виде означает:

$$[\tilde{22}] + [\tilde{4}]$$

		11 11	33 11	15 11	51 11
$[\tilde{422}]$	11	1			
	33		1		
	15			1	
	51				1

В заключение выражаю благодарность доктору В.В. Балашову и Ю.Ф. Смирнову за дискуссии.

Литература

1. См., например, K.Wildermuth. Nucl. Phys., 31, 478 (1962).
2. В.В. Балашов, В.Г. Неудачин, Ю.Ф. Смирнов, Н.П. Юдин. ЖЭТФ, 37, 1387 (1959).
3. H.A.Jahn, van Wieringen. ProcRoy.Soc., A209, 502 (1951).
4. J.P.Elliott, J.Hope, H.A.Jahn. Phil. Trans.Roy.Soc., A246, 241 (1953).
5. D.Chlebowska. Acta Physica Polonica, 25, 513 (1964).
6. Yu.F.Smirnov, D.Chlebowska. Nucl. Phys., 26, 306 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 марта 1965 г.

ТАБЛИЦЫ

$[41] \to [1] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = -1$

	PS	PD	PG
P	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{7}{15}}$	
D		1	
F		$-\sqrt{\frac{8}{35}}$	$\sqrt{\frac{27}{35}}$
G			1

$[42] \to [2] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{9}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$

	SS	DS	SD	DD	SG	DG
S	$\sqrt{\frac{8}{15}}$			$-\sqrt{\frac{7}{15}}$		
D_I		$-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$		$\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}$
D_{II}		$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{21}}$		$3\sqrt{\frac{3}{70}}$
F				$-\sqrt{\frac{5}{14}}$		$3\sqrt{\frac{1}{14}}$
G				$\sqrt{\frac{1}{70}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{11}{14}}$

$[411] \to [11] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$

	PS	PD	PG
P	$\sqrt{\frac{2}{9}}$	$\sqrt{\frac{7}{9}}$	
F		$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{6}{7}}$

$[43] \to [3] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{14}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = -1$

	PS	FS	PD	FD	PG	FG
P	$-\frac{8}{15}$		$\frac{2}{15}\sqrt{14}$	$\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$		$-\frac{3}{5}$
D			$-2\sqrt{\frac{2}{15}}$	$2\sqrt{\frac{1}{105}}$		$\sqrt{\frac{3}{7}}$
F		$\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{21}}$	$-\frac{13}{5}\sqrt{\frac{1}{14}}$	$-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{14}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{66}{7}}$
G				$\sqrt{\frac{1}{14}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{22}{35}}$

$[421] \to [21] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{2}{35}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = -1$

	PS	DS	PD	DD	PG	DG
P	$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$		$\frac{1}{6}\sqrt{7}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$		
D		$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$		$\sqrt{\frac{3}{5}}$
F			$-\sqrt{\frac{2}{21}}$	$\sqrt{\frac{1}{21}}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{7}}$

$[44] \to [4] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{14}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$

	SS	DS	GS	SD	DD	GD	SG	DG	GG
S	$-\frac{8}{15}$				$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$				$-\frac{3}{5}$
D		$\frac{4}{15}$		$\frac{4}{15}$	$-\frac{22}{21}\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\frac{3}{35}$		$-\frac{3}{35}$	$\frac{3}{7}\sqrt{\frac{11}{5}}$
G			$-\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{7}\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{7}\sqrt{11}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}\sqrt{11}$	$-\frac{2}{35}\sqrt{143}$

$[431] \rightarrow [31] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{3}{70}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$

	PS	DS	FS	PD	DD	FD	PG	DG	FG
P	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$			$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{14}{15}}$		$-\sqrt{\frac{1}{15}}$			$-\sqrt{\frac{2}{5}}$
D		$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$			$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$		$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
F			$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{21}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\sqrt{\frac{6}{35}}$	$\sqrt{\frac{5}{21}}$	$2\sqrt{\frac{11}{105}}$

$[422] \rightarrow [22] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{28}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$

	SS	DS	SD	DD	DG
S	$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$			$-\frac{1}{3}\sqrt{7}$	
D		$-\frac{2}{15}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{5}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\frac{3}{5}\sqrt{2}$

$[441] \rightarrow [41] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{21}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = -1$

	PS	FS	PD	DD	FD	GD	PG	DG	FG	GG
P	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$		$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{14}{15}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$				$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$
F		$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{105}}$	$-\frac{1}{21}\sqrt{5}$	$-\frac{13}{2}\sqrt{\frac{1}{210}}$	$-\frac{1}{14}\sqrt{\frac{15}{2}}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\frac{5}{14}$	$\sqrt{\frac{11}{70}}$	$\frac{1}{7}\sqrt{\frac{33}{2}}$

$[432] \longrightarrow [32] + [4]$

$$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{5}{168}}$$

$$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = -1$$

	PS	DS	PD	DD	FD	DG	FG
P	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$		$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{14}{15}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$		$\sqrt{\frac{2}{5}}$
D		$\frac{2}{15}\sqrt{2}$	$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{14}{3}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{2}{15}\sqrt{2}$	$-\frac{2}{5}\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$

$[442] \longrightarrow [42] + [4]$

$$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{28}}$$

$$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$$

	SS	$D_I S$	$D_{II} S$	SD	$D_I D$	$D_{II} D$	FD	GD	$D_I G$	$D_{II} G$	FG	GG
S	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{15}}$				$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$						$-\sqrt{\frac{2}{5}}$
D		$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{15}}$	$\frac{1}{15}\sqrt{\frac{14}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{42}}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{5}$	$-\sqrt{\frac{3}{35}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{11}{35}}$

$[433] \longrightarrow [33] + [4]$

$$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{42}}$$

$$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$$

	PS	PD	FD	FG
P	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{7}{30}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$

$[443] \rightarrow [43] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{33}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = -1$

	PS	PD	DD	FD	FG	GG
P	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{30}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$[444] \rightarrow [44] + [4]$

$\langle n | n-4, 4 \rangle = \sqrt{\frac{1}{33}}$

$\langle \gamma^n | \gamma^{n-4}, \gamma^4 \rangle = 1$

	SS	DD	GG
S	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$