ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2037

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Ж. Петков

ОБ АМПЛИТУДЕ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ

1965

P-2037

И.Ж. Петков

ОБ АМПЛИТУДЕ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ

1. Неупругое рассеяние ядерных частиц на ядрах обычно рассматривается в первом приближении по теории возмущений, в рамках метода искаженных волн или в адиабатическом приближении. При рассмотрении неупругого рассеяния электронов на ядрах обычно ограничиваются лишь борновским приближением для дифференциального сечения. Недавно в работе /1/ для неупругого рассеяния электронов с возбуждением монопольных ($0^+ - 0^+$) –переходов был дан пример расчета по методу искаженных волн, который, однако, учитывает только однофононные переходы в четных ядрах. Кроме того, вычисления оказываются слишком сложными и проводятся с самого начала на счетных машинах.

Целью настоящей работы является применение высокоэнергетического приближения /2/ к неупругому рассеянию частиц (например, электронов) на ядрах. В этом приближении находится амплитуда рассеяния частицы высокой энергии с учетом одного или двух возбужденных состояний атомного ядра.

2. Уравнение Шредингера, описывающее состояние системы частица-ядро

$$\{ -\tfrac{1}{2}\mu \nabla^2 + \hat{H}_0 + V(\bar{r},\xi) - E \} \Psi(\bar{r},\xi) = 0 \tag{1}$$

запишем в интегральной форме

$$\Psi_n(\bar{r}) = \delta_{n0} e^{i\bar{p}_0\bar{r}} - \frac{\mu}{2\pi} \sum_{n'} \int V_{nn'}(\bar{r}') \Psi_{n'}(\bar{r}') \frac{e^{ip_n|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} d^3 r', \tag{2}$$

где $V_{nn'} = \langle n' | V(\bar{r},\xi) | n \rangle$; $\hat{H}_0 | n \rangle = \mathcal{E} | n \rangle$; $p_n = \sqrt{2\mu(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_n) + p_0^2}$;

$\hat{H}_0$ –гамильтониан ядра.

Амплитуда рассеяния частицы с возбуждением ядра из основного состояния в состояние n имеет вид

$$f_{0_n} = -\frac{\mu}{2\pi} \sum_{n'} \int e^{-i\bar{p}_n\bar{r}} V_{nn'}(\bar{r}) \Psi_{n'}(\bar{r}) d^3 r . \tag{3}$$

Чтобы сформулировать наше предположение, сделаем замену

$$\Psi_n(\bar{r}) = \phi_n(\bar{r}) e^{i\bar{p}_0\bar{r}} \tag{4}$$

и подставим Ψ_n в уравнение (2)

$$\phi_n(\bar{r}) = \delta_{n0} - \frac{\mu}{2\pi} \sum_{n'} \int e^{-i\bar{p}_0\bar{r}} \frac{e^{ip_n|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \cdot V_{nn'}(\bar{r}') \phi_{n'}(\bar{r}') e^{i\bar{p}_0\bar{r}'} d^3 r' \tag{2'}$$

Основное преположение состоит в том, что величины $V_{nn'}, \phi_{n'}$ можно считать медленно меняющимися функциями r. Если a –расстояние, на котором $V\phi$ меняется значительно, то должно выполняться условие $\lambda/a \ll 1$, где λ – длина волны падающей частицы. При интегрировании (2') по частям можно отбрасывать все члены $O(\lambda/a)$. Тогда система (2') сводится к системе линейных интегральных уравнений

$$\phi_n(z) = \delta_{n0} + \alpha \sum_{n'} \int_{-\infty}^{z} V_{nn'}(z')\phi_{n'}(z'); \quad n = 0,1 \ldots \quad \alpha = \frac{-i\mu}{2\pi p_0} \tag{5}$$

или к системе однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_n(z) &= \alpha \sum_{n'} V_{nn'}(z)\phi_{n'}(z); \quad n = 0,1\ldots \\ \phi_k(-\infty) &= \delta_{k0}. \end{aligned} \tag{5'}$$

3. Если оставить в системе (5') только два уровня (основной–0 и возбужденный 1), то получается система двух уравнений и решается точно при $V_{00} \approx V_{11}$; $V_{01} = V_{10}$. Соответствующие амплитуды имеют вид x)

$$\begin{aligned} f_{00} &= \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 r e^{i\bar{q}\bar{r}} (V_{00} + V_{01}) \exp[\alpha \int_{-\infty}^{z} (V_{00} + V_{01}) dz'] \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 r e^{i\bar{q}\bar{r}} (V_{00} - V_{01}) \exp[\alpha \int_{-\infty}^{z} (V_{00} - V_{01}) dz'], \end{aligned} \tag{6}$$

$$f_{10} = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 r e^{i\bar{q}_1\bar{r}} (V_{00} + V_{01}) \exp[\alpha \int_{-\infty}^{z} (V_{00} + V_{01}) dz'] - \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 r e^{i\bar{q}_1\bar{r}} (V_{00} - V_{01}) \exp[\alpha \int_{-\infty}^{z} (V_{00} - V_{01}) dz'],$$

$$\bar{q} = \bar{p}_0 - \bar{p}_f; \quad |\bar{p}_0| = |\bar{p}_f|; \quad \bar{q}_1 = \bar{p}_0 - \bar{p}_1; \quad |\bar{p}_0| \approx |\bar{p}_1|.$$

При условии $|\alpha \int_{-\infty}^{z} (V_{00} \pm V_{01}) dz'| \ll 1$ формулы (6) переходят в соответствующие выражения для амплитуды в борновском приближении.

$$\begin{aligned} f_{00} &= \frac{\mu}{2\pi} \int e^{i\bar{q}\bar{r}} V_{00} d^3 r, \\ f_{01} &= \frac{\mu}{2\pi} \int e^{i\bar{q}_1\bar{r}} V_{01} d^3 r. \end{aligned} \tag{6'}$$

Оказывается также, в первом порядке по $\alpha \int_{-\infty}^{z} V_{01} dz'$ формула (6) совпадает с соответствующей амплитудой в адиабатическом приближении /3/.

В случае монопольных $(0^+ - 0^+)$–переходов $V_{00}(r) + V_{01}(r)$ –является сферически симметричной функцией r, поэтому формулу (6) можно записать в виде

$$f_{01} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{\infty} d\rho \rho J_0(q_1 \rho) \{ e^{\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (V_{01} + V_{01}) dz} - e^{\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (V_{00} - V_{01}) dz} \}, \tag{6''}$$

---

x) В более общем случае при $V_{01}/a = V_{10}/b$ в формулах (6) следует заменить $V_{01} \to \sqrt{\frac{b}{a}} V_{01}$ и домножить f_{01} под интегралом на $\sqrt{\frac{b}{a}}$; a и b не зависят от Z.

где $J_0(z)$ – цилиндрическая функция Бесселя. Для того, чтобы сделать сравнение с результатами работы [1], относящимися к рассеянию электронов, отметим, что в случае учета только кулоновского взаимодействия сечение, получаемое из (6''), следует домножить на фактор $\cos^2\frac{\theta}{2}$. В рамках вибрационной модели ядра, которая использовалась в работе [1] для описания первых 0^+–возбужденных состояний четно-четных ядер, амплитуда рассеяния электронов принимает вид

$$f_{0^+-0^+} = -ip_0 u_f^* \cdot u_i \int_0^{R_0} J_0(q\rho)\sin\left(2\frac{Ze^2 E\kappa}{p_0 R_0^3}(R_0^2-\rho^2)^{3/2}\right)\times$$

$$\times \exp\left\{-2i\frac{E}{p_0}Ze^2\left[\ln\left(R_0+\sqrt{R_0^2-\rho^2}\right)-\frac{1}{3}(4R_0^2-\rho^2)\frac{\sqrt{R_0^2-\rho^2}}{R_0^3}\right\}\rho d\rho .$$

Здесь $\kappa = \sqrt{\frac{\hbar}{2(BC)^{1/2}}}$; R_0 –радиус ядра. Сечение рассеяния при условии $2\frac{Ze^2 E}{R_0 p_0}\kappa \ll 1$ (это условие использовалось и в работе [1]) равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(0^+-0^+) = W^2\kappa^2 R_0^4 p_0^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\left|\int_0^1 J_0(qR_0t)(1-t^2)^{3/2}\times\right.$$

$$\times \exp\left\{-iW\left[\ln(1+\sqrt{1-t^2})-\frac{1}{3}(4-t^2)\sqrt{1-t^2}\right]\right\}tdt ; \quad (7)$$

$$W = 2\frac{Ze^2}{(\hbar c)^2}\cdot\frac{E}{p_0} .$$

Результаты расчета по формуле (7) для случая рассеяния электронов на Ca^{40}_{20} и Hg^{200}_{80} при энергии $E = 200$ Мэв даны на рис. 1 и 2. Видно, что расчетные кривые дифференциальных сечений хорошо совпадают с кривыми, полученными по методу искаженных волн.

4. До сих пор учитывался только один возбужденный уровень ядра. Для того, чтобы учесть влияние бóльшего числа возбужденных состояний на амплитуду рассеяния f_{0n}, необходимо решать соответствующую систему дифференциальных уравнений. Например, можно попытаться решить систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\cdot\dot\phi_0(z) &= V_{00}\phi_0 + V_{01}\phi_1 + V_{02}\phi_2 , \\
\frac{1}{a}\cdot\dot\phi_1(z) &= V_{10}\phi_0 + V_{11}\phi_1 + V_{12}\phi_2 , \qquad (8)\\
\frac{1}{a}\cdot\dot\phi_2(z) &= V_{20}\phi_0 + V_{21}\phi_1 + V_{22}\phi_2 .
\end{aligned}$$

Для этого во втором и третьем уравнении сделаем приближенную замену $\phi_0 \approx \exp[a\int_{-\infty}^{z} V_{00}\,dz']$. Тогда получим, например для ϕ_2,

$$\phi_2 = \frac{a}{2}\exp\left\{a\int_{-\infty}^{z}(V_{00}+V_{21})dz'\right\}\int_{-\infty}^{z}(V_{10}+V_{20})\phi_0\exp\left\{-a\int_{-\infty}^{z'}(V_{00}+V_{21})dz''\right\}dz' -$$

$$-\frac{a}{2}\exp\left\{a\int_{-\infty}^{z}(V_{00}-V_{21})dz'\right\}\int_{-\infty}^{z}(V_{10}-V_{20})\phi_0\exp\left\{-a\int_{-\infty}^{z'}(V_{00}-V_{21})dz''\right\}dz' . \quad (9)$$

Отсюда с помощью формул (4 , 3) можно записать амплитуды рассеяния с учетом двух возбужденных состояний ядра и использовать их для изучения, например, двухфононных переходов в неупругом рассеянии электронов /4/.

Автор выражает благодарность Б.Н.Калинкину, В.К.Лукьянову и И.Н.Михайлову за полезные обсуждения, а также Н.Ф.Марковой за проведение численных расчетов.

Литература

1. K.Alder and T.H.Schucan. Nucl. Phys., 42, 498 (1963); T.H.Schucan. Nucl. Phys., 61, 417 (1965).
2. A.Baker. Phys. Rev., 134, B240 (1964).
3. С.И.Дроздов. ЖЭТФ, 44, 335 (1963).
4. J.Bellicard, P.Barreau, D.Blum. Nucl. Phys., 60, 319 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 1965 г.

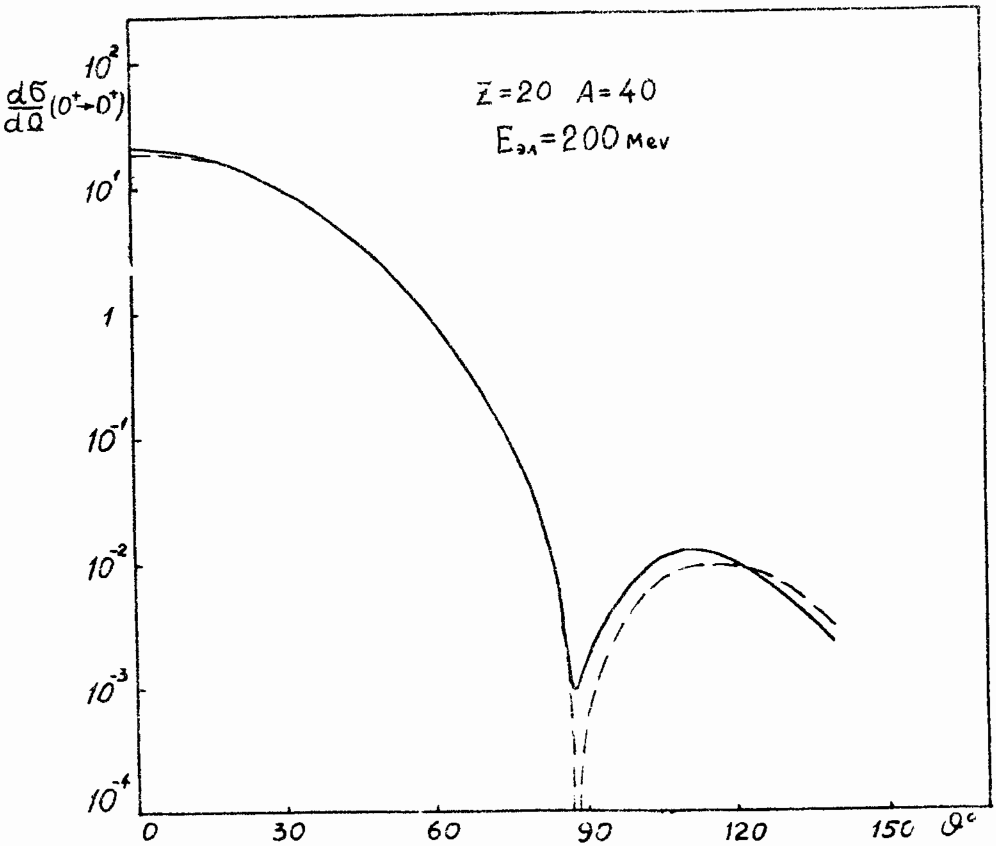

Рис. 1. ——— кривая дифференциального сечения рассеяния, рассчитанная (в относительных единицах) в настоящей работе, имеется почти полное совпадение с кривой из работы [1].

– – – в борновском приближении.

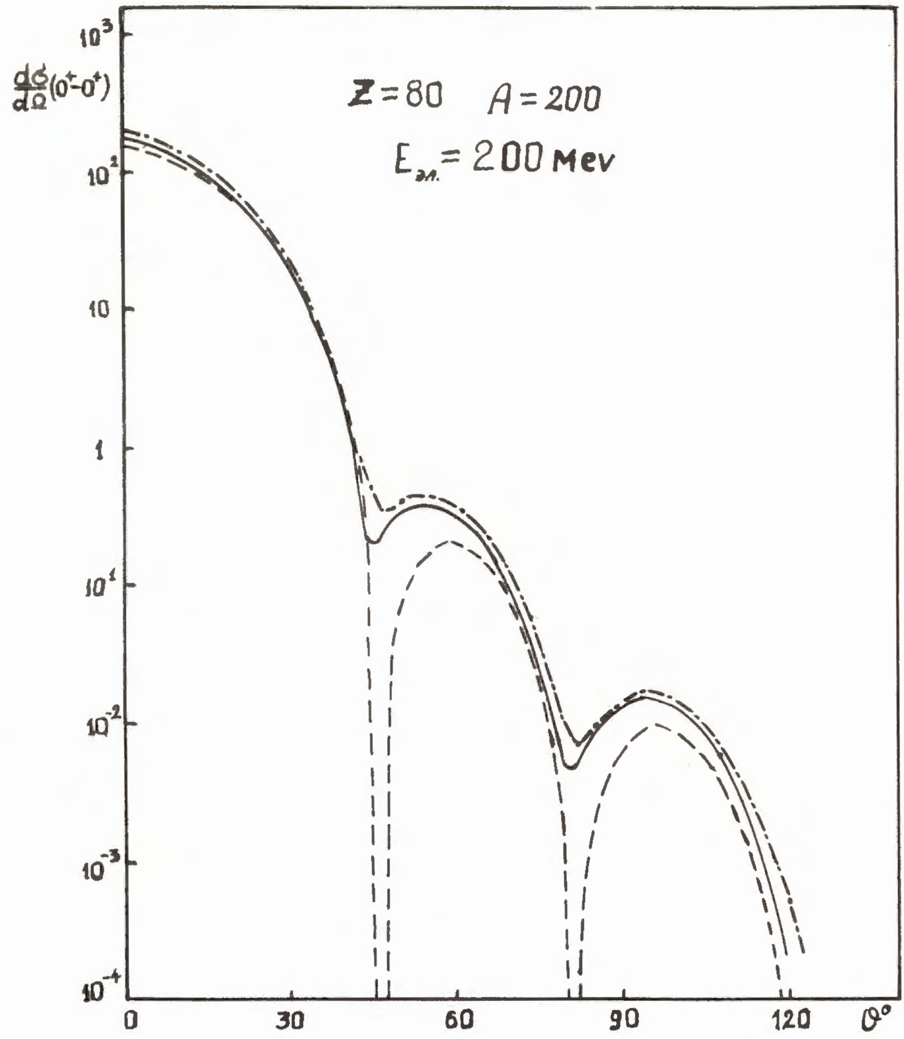

Рис. 2. __________ кривая дифференциального сечения рассеяния, рассчитанная (в относительных единицах) в настоящей работе

– · – · – · – по методу искаженных волн /1/

– – – – – – в борновском приближении.