ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2021

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р. Вит

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ И ПОРОГОВЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В НЕКОТОРЫХ СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

1965

Р - 2021

Р. Вит[x/]

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ И ПОРОГОВЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В НЕКОТОРЫХ СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Направлено в "Acta Physica Polonica"

x/ Постоянный адрес: Ягеллонский университет, Краков, Польша.

I

Несколько лет назад много внимания уделялось уравнениям Лоу[1] для различных статических моделей. В случае рассеяния заряженных скалярных мезонов и нейтральных скалярных мезонов на фиксированном нуклоне уравнения Лоу для амплитуд рассеяния решаются точно[x] (но не однозначно), что было показано в работе Кастильехо, Далица, Дайсона[4].

В настоящей работе мы ближе рассмотрим скалярную симметричную модель Кеммера и модель, предложенную Чу-Лоу[5]. Аналитическая структура первой из них исследовалась Вандерсом[6], вторая решалась методом последовательных приближений в работе Зальцманов[7].

При выводе уравнений Лоу для этих моделей делается ряд добавочных предположений; в частности, считается, что полную амплитуду рассеяния можно приближать только одной P -волной[xx].

В последнее время выяснилось, что для полной амплитуды рассеяния $T(z)$ в локальной теории поля для комплексных значений энергий должно выполняться еще одно очень существенное условие, а именно

$$|T(z)| < A \exp(\epsilon |z|). \tag{1}$$

В дальнейшем будем считать, что упомянутые выше приближения не нарушают этого основного свойства локальности и что все наши амплитуды $f_{\alpha}(z) \equiv e^{i\delta_{\alpha}(z)} \sin\delta_{\alpha}(z)$ будут удовлетворять неравенству (1).

В силу сделанных приближений не следует ожидать хорошего согласия теории, развитой в работах[1,5], с экспериментом в асимптотической области энергий. Однако высокоэнергетическое поведение амплитуд рассеяния имеет существенное значение как для внутренней согласованности теории, так и для сравнения теории с экспериментом

---

[x] То же самое имеет место и в случае модели, предложенной Бялыницким-Бирулей[2] (см. работу Барбашова и Ефимова[3]).

[xx] Кроме этого,

а) пренебрегается импульсом отдачи нуклона;
б) применяется одномезонное приближение;
в) в разложении по μ/M остаются только первые члены.

(вклад больших энергий в дисперсионные интегралы). Поэтому в нашей работе этот вопрос будет обсуждаться более подробно.

II

Как обычно, введем новые функции $H_\alpha(\omega)$, которые связаны следующим образом[x/]

$$f_\alpha(\omega) = \frac{p^3}{\omega} v^2(p^2) H_\alpha(\omega), \tag{2}$$

где $\omega^2 = p^2 + 1$, $v^2(p)$ является формфактором.

Напомним основные свойства $H_\alpha(\omega)$:

А. $H(z)$ являются регулярными в z-плоскости с двумя разрезами для $\omega \subset (-\infty, -1)$ и $\omega \subset (1, \infty)$;

Б. $H_\alpha(z) = H^*_\alpha(z^*)$;

В. Условие унитарности имеет вид

$$\operatorname{Im} H_\alpha(\omega + i0) = \frac{p^3}{\omega} v^2(p) |H_\alpha(\omega)|^2, \quad \omega > 1;$$

Г. Перекрестная симметрия записывается в виде:

$$H_\alpha(-z) = -\frac{1}{3} \sum_\beta A_{\alpha\beta} H_\beta(z);$$

1. Для теории Чу-Лоу

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

2. Для модели Кеммера

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

Д. $H_\alpha(\omega + i0)$ ограничены для $\omega \subset (1, \infty)$; из А,Б,Г вытекает ограниченность $H_\alpha(\omega)$ на всей вещественной оси.

Если $f_\alpha(\omega)$ выполняет равенство (1), то формфактор не может иметь вид:

$$v^2(p) = e^{-p^2},$$

поскольку $f_\alpha(\omega)$ должна тогда убывать на вещественных полуосях, как $\exp(-\omega^2)$, что является невозможным[x/ /9/]. Поэтому для определенности будем пользоваться следующим формфактором

$$v^2(p) = \frac{1 + \kappa^2}{\kappa^2 + \omega^2}, \tag{3}$$

который уже раньше применялся Вандерсом[/6/].

В дальнейшем будем считать, что

Е. 1. $H_\alpha(\omega)$ не имеют на разрезах нулей.

2. $H_\alpha(\omega)$ на бесконечности не имеет осцилляционного поведения (также как во всех точно решаемых моделях в отсутствии бесконечного числа нулей).

III

Вместо функций $H_\alpha(\omega)$ более удобно пользоваться функциями $k_\alpha(\omega) \equiv (1+\kappa^2) H_\alpha(\omega)$. Предположение Е 2 запишем в виде

$$\lim_{\omega \to \infty} k_\alpha(\omega + i0) = \text{const} = a_\alpha + i b_\alpha. \tag{4}$$

Асимптотическое условие унитарности записывается тогда как

$$b_\alpha = a_\alpha^2 + b_\alpha^2. \tag{5}$$

Из условия вещественности и перекрестной симметрии получаем

$$R_1^*(-\omega + i0) = -R_1(\omega + i0), \tag{6}$$

$$R_2^*(-\omega + i0) = -R_2(\omega + i0), \tag{7}$$

$$R_3^*(-\omega + i0) = -\frac{1}{9}[4(H_1(\omega + i0) + H_2(\omega + i0)) + H_3(\omega + i0)], \tag{8}$$

где

---

x/ Для теории Чу-Лоу $\alpha = 1, 2, 3$; в случае скалярной симметричной модели $\alpha = 1, 3$.

x/ Следует, однако, обратить внимание на то, что, пользуясь экспоненциальным формфактором и предполагая, что $H_3(\omega)$ имеет в физической области энергии один нуль, Котаньский и Намысловский[/10/] и Котаньский[/11/] смогли получить хорошее согласие теории с экспериментом вплоть до 600 Мэв. Однако и в этих работах существуют определенные трудности с выбором обрезания.

$$R_1^*(z) \equiv H_1(z) + 2H_3(z),$$

$$R_2(z) \equiv 2H_2(z) + H_3(z),$$

$$R_3(z) \equiv H_3(z).$$

Поскольку при нашем выборе формфактора в верхней полуплоскости

$$|k_\alpha(z)| < A \exp(\epsilon |z|),$$

в силу (6), (7) и (8) из теоремы Фрагмена–Линделефа [x] (дальше ТФЛ) получаем

$$2b_3 = b_1 + b_2, \tag{9}$$

$$a_1 = -2a_3 = 4a_2 \equiv 4a. \tag{10}$$

Из (5), (2) и (10) следует

$$a = 0, \tag{11}$$

$$b_\alpha = 1, \tag{12}$$

что нетрудно получить путем простых алгебраических преобразований.

Предположим теперь, что

$$\lim_{\omega \to \infty} k_\alpha(\omega + i0) \ln \omega = \omega \operatorname{const} = c_\alpha. \tag{13}$$

Условие унитарности сразу накладывает ограничение

$$c_\alpha = c_\alpha^*,$$

а равенства (7) и (8) дают

$$c_1 = 4c_2 = -2c_3. \tag{14}$$

Формула (14) остается в силе и при более общих предположениях, чем (12) [12].

---

[x] См. Полиа и Сеге [9б].

Рассмотрим последний случай, когда [x]

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega k_\alpha(\omega + i0) = \operatorname{const} = d_\alpha. \tag{15}$$

Конечно,

$$d_\alpha = d_\alpha^*,$$

а (6) дает

$$2d_3 = d_1 + d_2. \tag{16}$$

IV

В основном в этой главе будем пользоваться принципом аргумента (дальше П.А.) и ТФЛ для получения дальнейших сведений относительно $H_\alpha(1)$ и $H_\alpha(\infty)$. Впервые эти две основные теоремы теории аналитических функций были совместно применены Мейманом [14] при доказательстве несовместимости уравнения Чу–Мандельстама с физическими значениями константы связи.

В дальнейшем сделаем еще одно предположение: будем считать, что $H_3(z)$ не имеет нулей [xx] в силу нашего выбора формфактора и значения постоянной связи.

Как и в упомянутой работе Меймана и Гохфельд [14], отобразим плоскость z на плоскости $R_\alpha(z)$. Рассмотрим сначала функции $R_i(z)\ (i = 1, 2)$, для которых из перекрестной симметрии вытекает $R_i(0) = 0$ [xx].

При асимптотическом поведении типа (4), которое ведет к равенствам (11) и (12), поведение $R_i(z)$ на разрезах не может иметь характера показанного на рис. 1. Действительно, индекс начала координат относительно кривой Γ равен -1 и поэтому функции $R_i(z)$ в силу принципа аргумента

$$N - P = \Delta\phi / 2\pi$$

должны были бы иметь по два полюса, что находится в противоречии с их регулярностью. Поэтому

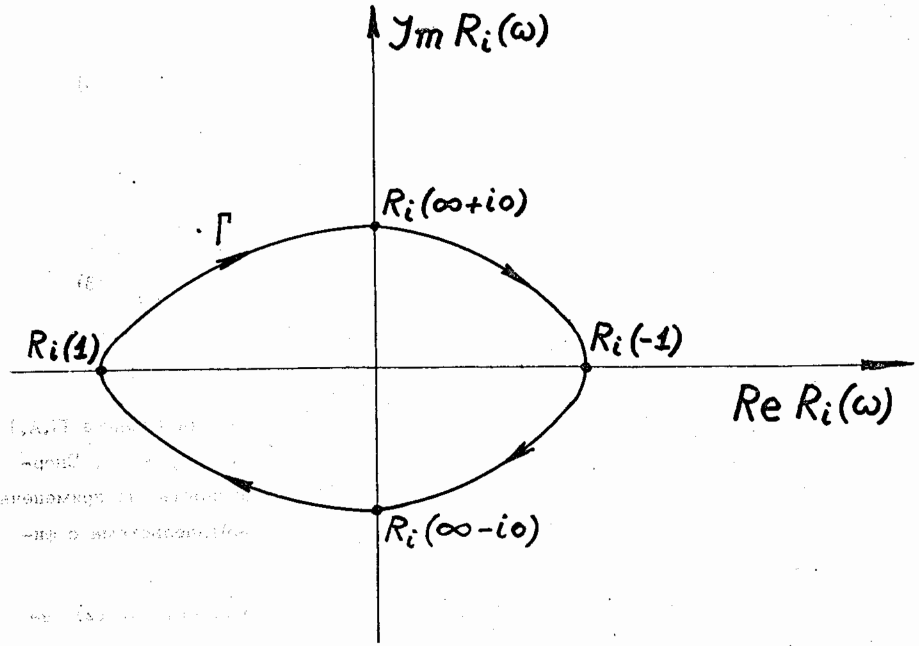
$$R_i(1) > 0. \tag{17}$$

---

[x] Легко показать, что функции $R_\alpha(z)$ являются H-функциями Герглоца и поэтому на вещественных осях они не могут убывать быстрее, чем $1/\omega$ – см. работу [13]. Следует также обратить внимание, что предположение

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^\beta R_i(\omega + i0) = \operatorname{const} \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \beta \leq 1, \text{ ведет к } \beta = 1.$$

xx/ Зальцманы [7] предполагали, что это имеет место для всех $R_1(z)$ и $R_2(z)$ обязательно имеют по одному нулю, находящемуся в точке $z = 0$.



Р и с. 1.

То же самое имеет место и в тех случаях, когда $R_1(\infty) = 0$, поскольку, по тем же соображениям,

$$R_1(1) > R_1(-1),$$

что вместе с уравнениями (6) и (7) для $\omega = 1$ ведет к (17). Для функции $R_3(z)$ вместо условий (17) получаем

$$R_3(1) > R_3(-1). \tag{18}$$

Для отсутствия нулей у $R_3(z)$ необходимо, чтобы $R_3(1)$ и $R_3(-1)$ имели одинаковые знаки. На основании других соображений (см. заключения) получаем $R_3(1) > 0$, и поэтому

$$-9R_3(-1) = 4[H_1(1) + H_2(1)] + H_3(1) < 0 . \tag{19}$$

Из общей теории H -функции Герглоца следует[15]

$$d_3 < 0 , \tag{20a}$$

$$d_1 + 2d_3 < 0 , \tag{20в}$$

$$2d_2 + d_3 < 0 , \tag{20c}$$

если поведение $R_a(z)$ при больших энергиях типа (15)[x]. Пользуясь равенством (16) получаем

$$5d_3 < 2d_1 < -d_2 . \tag{21}$$

Неравенства (19) и (13) остаются справедливыми и теперь, но ПА накладывает еще одно ограничение:

$$9d_3 < 4[H_1(1) + H_2(1)] + H_3(1) . \tag{22}$$

V.

В литературе наряду с формфактором (3) употребляются и другие виды формфакторов[16].

$$v^2(p) = \left(\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2+\omega^2}\right)^2 . \tag{23}$$

Предполагая, что $H_a(\omega)$ при больших энергиях выходят на постоянную (вещественную в силу унитарности) получаем

$$R_1(\infty) = 0 , \tag{24}$$

$$R_2(\infty) = 0 . \tag{25}$$

Равенства (24) и (25) равносильны соотношению (14).

Знак $R_3(\infty)$ остается неопределенным. Пусть

$$R_3(\infty) < 0 .$$

Тогда

а) амплитуда $R_3(\omega)$ имеет резонанс, поскольку $R_3(1) > 0$;

б) получается ограничение на постоянную связи[xx]

$$f^2 < \frac{1}{3\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} p^3 v^2(p) \{2|H_3(\omega)|^2 - |H_1(\omega)|^2 - |H_2(\omega)|^2\} . \tag{26}$$

Если $R_3(\omega)$ при больших энергиях ведет себя как $1/\omega$, то резонанс у этой амплитуды появляется автоматически: $d_3 < 0$. Постоянная связи равняется тогда правой части неравенства (26).

Вопрос о резонансах и ограничении постоянной связи в различных моделях квантовой теории поля более подробно рассматривался в работе Барбашова[18] (см. также статью Арамаки и Осава[19]).

x/ В нашем случае это легко доказывается при помощи представленного "графического" метода.

xx/ Относительно законности предельного перехода под интегралами см., например, работу[17].

VI

Перейдем к рассмотрению второй из указанных моделей (ограничиваясь формфактором (3)).

Если, как и раньше, ввести другие обозначения:

$$K_\alpha(z) \equiv (1+\kappa^2)H_\alpha(z), \qquad \alpha = 1,3,$$

и предположить, что

$$\lim_{\omega\to\infty} K_\alpha(\omega+i0) = \mathrm{const} = A_\alpha + iB_\alpha,$$

то асимптотическая унитарность

$$B_\alpha = A_\alpha^2 + B_\alpha^2$$

вместе с результатами применения ТФЛ

$$B_3 = B_1, \tag{27}$$

$$-2A_3 = A_1 \tag{28}$$

сразу дает

$$A_1 = A_3 = 0, \tag{29}$$

$$B_1 = B_3 = 1. \tag{30}$$

Таким образом, и здесь не исключается возможность существования дифракционной картины.

Равенства (14) принимают теперь вид:

$$C_1 = -2C_3, \tag{31}$$

а из асимптотики типа $1/\omega$ (см. (15)) вытекает

$$D_1 = D_3 < 0, \tag{32}$$

что опять ведет к существованию резонанса $H_3(\omega)$ и ограничению постоянной связи. Вместо неравенства (22) получаем

$$3D_3 < 2H_1(1) + H_3(1). \tag{33}$$

Заключение

Существенным для наших рассуждений оказалось предположение о том, что амплитуды $f_\alpha(\omega)$ удовлетворяют в верхней полуплоскости неравенству (1). Если правильно учесть пороговое поведение $f_\alpha(\omega)$, то аналитичность, перекрестная симметрия, вещественность и двухчастичная унитарность вместе с ограничением на рост (1) не противоречат друг другу только при введении в теорию формфактора. Действительно, полагая $v^2(p) \equiv 1$, из условия B получаем, что $H_\alpha(\omega)$ должны вести себя при больших энергиях, по крайней мере, как $1/\omega^2$. Как было нами показано раньше /13/, этот является невозможным. С другой стороны, к выбору формфакторов следует подходит с определенной осторожностью (см. главу II).

Выбор формфактора в виде (3) (сравнительно медленно убывающего на бесконечности) ведет к неожиданному результату: поведение p -волны при больших энергиях может иметь дифракционный характер (уравнения (11), (12), (29) и (30)).

Исключено поведение функции $R_1(\omega)$ в асимптотической области энергии типа $1/\omega^\beta$ при $0 < \beta < 1$.

Предельные равенства (14) и (16), (31) и (32) столь отличаются друг от друга, что, может быть, наблюдая за поведением соответствующих отношений вещественных частей $H_\alpha(\omega)$, уже при сравнительно небольших энергиях можно было бы сделать определенные выводы насчет поведения $H_\alpha(\omega)$ при $\omega \to \infty$ (следует отметить, что асимптотические поведения $H_\alpha(\omega)$ типа (13) и (15) для $\mathrm{Im}\, z > 0$ были уже найдены Вандерсом /16/).

За исключением неравенства (26), во всей нашей работе мы нигде не пользовались дисперсионными соотношениями для $R_\alpha(z)/z$, из которых вытекают наши заключения, полученные на основании ПА. Однако следует обратить внимание на то, что для написания дисперсионных формул надо еще знать $H_\alpha(0)$ (если, например, известно, что $R_3(0) > 0$, то при помощи ПА тоже можно получить $R_3(1) > 0$).

Литература

1. F.E.Low. Phys. Rev.,37, 1392 (1955).
2. I.Biaynicki-Birula. Nucl. Phys.,12, 309 (1959).
3. Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов. ЖЭТФ,42, 520 (1962).
4. L.Castillejo, R.Dalitz, F.Dyson. Phys. Rev.,104, 453 (1956).
5. G.Chew, F.E.Low. Phys. Rev.,101, 1571 (1956).
6. G.Wanders, Nuovo Cim., 23, 817 (1962).
7. G.Salzman, F.Salzman. Phys. Rev.,108, 1617 (1957).
8. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ,46, 1502 (1964); Препринт ИТЕФ № 252,Москва, 1964.
9. Г. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, ГИТТЛ, Москва, 1956. а) задача 327 (стр. 179), б) задача 340 (стр. 182) и 322 (стр. 176).
10. J.Namysłowski, A.Kotanski. Acta Phys. Polon.,23, 557 (1963).
11. A.Kotanski. Acta Phys. Polon.,24, 73 (1963).

12. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 43, 2277 (1962).
13. Р. Вит. Препринт ОИЯИ, Р-1928, Дубна, 1965.
14. Н.Н. Мейман, И. Гохфельд. ЖЭТФ, 43, 181 (1962).
15. J.A.Shohat, J.D.Tamarkin. The Problem of Moments, Y.N.York, 1943.
16. G.Salzman, Phys. Rev., 105, 1076 (1959).
17. L.Lanz, G.M.Prosperi. Nuovo Cimento, 33, 201 (1964).
18. Б.М. Барбашов. ЖЭТФ, 43, 105 (1962).
19. S.Aramaki, T.Osawa. Prog. Theor. Phys., 29, 451 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 февраля 1965 г.