ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1988

Е.П. Жидков, А.Ф. Лукъянцев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

1965

Р-1988

Е.П. Жидков, А.Ф. Лукъянцев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

При обработке треков камерных снимков возникает задача о нахождении наименьшего значения некоторой функции, зависящей от конечного числа переменных, на множестве точек, определямом некоторым конечным числом уравнений связи.

Подобная задача возникает, например, при идентификации события, когда требуется найти наименьшее значение функции $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_{i э} - a_{i T})^2}{(\Delta a_i)^2}$, причем величины $a_{i э}$ и Δa_i заданы, а искомые величины $a_{i T}$ связаны условиями сохранения импульса и энергии.

Математическая задача может быть сформулирована следующим образом.

На множестве A n -мерного пространства $x = (x_1, ..., x_n)$ задана непрерывная функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, где

$$A: \ |x| \leq R. \tag{1}$$

Имеется k уравнений связи ($k < n$):

$$\phi_i(x_1, ..., x_n) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., k. \tag{2}$$

Совокупность точек множества A, удовлетворяющих уравнениям связи (2), обозначим через B.

Функции $\phi_i(x)$ непрерывны и неотрицательны в области $A (\phi_i \geq 0)$. Будем также предполагать, что $f(x) \geq 0$ в области A. Требуется найти наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве B. В дальнейшем будем полагать, что наименьшее значение $f(x)$ на множестве B достигается в единственной точке $x_0 \subset B$. Эта задача может быть решена известным методом множителей Лагранжа. Однако при решении ее можно использовать другой метод, предложенный И.Н.Силиным. Сущность этого метода состоит в замене задачи на условный экстремум для $f(x)$ задачей на абсолютный экстремум в области A для некоторой новой функции, отличной от $f(x)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi_T(x) = f(x) + T \sum_{i=1}^{k} \phi_i(x),$$

где T - положительный параметр.

При любом фиксированном значении T функция $\Phi_T(x)$ достигает наименьшего значения в области A на некотором множестве C_T.

Оказывается, что задача на абсолютный экстремум для функции $\Phi_T(x)$ дает возможность с любой степенью точности находить условный минимум функции $f(x)$. Обозначим через $\rho(x_1, x_2)$ расстояние между точками x_1 и x_2.

Теорема: Для произвольного $\epsilon > 0$ найдется такое $T_0 > 0$, что при всех $T > T_0$ $\rho(x_0, x) < \epsilon$ для всех $x \subset C_T$.

Доказательство. Выберем произвольное $\delta > 0$ и рассмотрим множество B_δ, состоящее из всех δ -окрестностей точек множества B. Множество B_δ открытое, и, следовательно, множество $A - B_\delta$-замкнутое.

Функция $\sum_{i=1}^{k} \phi_i(x)$ непрерывна и положительна в каждой точке ограниченного, замкнутого множества $A - B_\delta$.

Следовательно, она достигает на этом множестве наименьшего значения m, которое положительно $(m>0)$. Таким образом, $\sum_{i=1}^{k} \phi_i(x) \geq m > 0$, если $x \in A - B_\delta$. Выберем T_0 таким образом, чтобы $T_0 \cdot m > f(x_0)$. Тогда при любом $T > T_0$ наименьшее значение функции $\Phi_T(x)$ на множестве A достигается на $C_T \subset B_\delta$.

Выберем произвольное $\epsilon > 0$ и обозначим через s_ϵ ϵ- окрестность точки x_0. Докажем, что при достаточно больших T множество $C_T \subset s_\epsilon$. Так как $f(x)$ достигает наименьшего значения на множестве B в единственной точке x_0, то $f(x) > f(x_0)$ для всех x, принадлежащих B и не совпадающих с x_0.

Рассмотрим множество $B - S_{\epsilon/2}$, где $S_{\epsilon/2}$ $\frac{\epsilon}{2}$ -окрестность точки x_0. В каждой точке x этого множества

$$f(x) > f(x_0). \tag{3}$$

Множество B, определяемое из условий связи (2), замкнутое. Множество $D = B - S_{\epsilon/2}$ - также замкнутое.

Функция $f(x)$ на этом множестве достигает наименьшего значения $\bar{m}$, причем $\bar{m} > f(x_0)$.

В замкнутой области $A - S_{\epsilon/2}$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна. Следовательно, найдется такое $\delta_0 > 0$, что для произвольных $x_1, x_2 \subset A - S_{\epsilon/2}$ и таких, что $\rho(x_1, x_2) < \delta_0$, выполняется неравенство $| f(x_1) - f(x_2) | < \bar{m} - f(x_0)$.

Окружим каждую точку множества $B - S_{\epsilon/2}$ δ_0 -окрестностью. Совокупность всех δ_0 -окрестностей множества D составит множество D_{δ_0}.

В каждой точке x множества D_{δ_0} $f(x) > f(x_0)$. Существует такое T_0, что при всех $T > T_0$ множество $C_T \subset B_{\delta_0}$. Ясно, что множества C_T и D_{δ_0} не пересекаются. Таким образом, $C_T \subset B_{\delta_0} - D_{\delta_0}$.

Но множество $B_{\delta_0} - D_{\delta_0} \subset s_\epsilon$.

Отсюда следует, что $C_T \subset s_\epsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Неотрицательность функций $\phi_i(x)$ в области A всегда может быть достигнута путем возведения этих функций в четную степень или взятия абсолютной величины этих функций. При этом множество B, очевидно, не меняется.

Предположение о неотрицательности $f(x)$ по существу не накладывает дополнительных ограничений, так как вместо $f(x)$ всегда можно рассматривать функцию $f(x)+c$, где c - константа, точка минимума которой совпадает с x_0, а $f(x)+c$ уже неотрицательна при надлежащем выборе c.

Замечание 2. Вопросом скорости сходимости множества C к точке x_0 в зависимости от T для конкретной функции

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_{i э} - a_{iT})^2}{(\Delta a_i)^2}$$

при условиях связи $f_j(\ldots a_{iT} \ldots) = 0,\ j=1,\ldots,k;\ k<n$ занимался В.И. Мороз.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1965 г.