

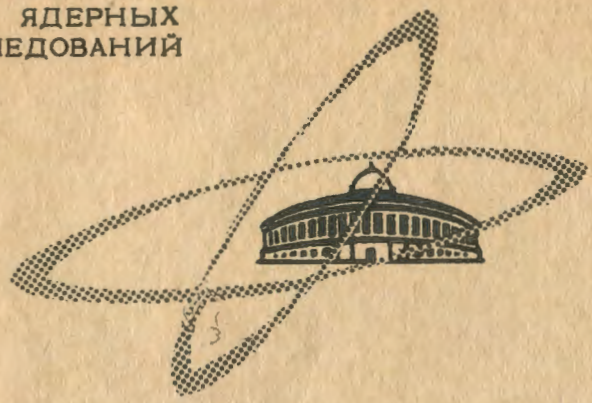
С 35
Д-183

15/III-65 ✓

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1984



В.И. Данилов

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

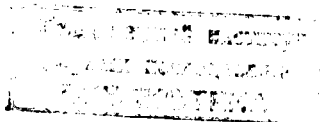
1965

P-1984

В.И. Давылов

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА

Направлено в ЖТФ



2997/2 чр.

1. Потенциал электростатического поля

Выражение, определяющее потенциал равномерно заряженного параллелепипеда в вакууме, может быть представлено в прямоугольной системе координат, показанной на рис. 1,

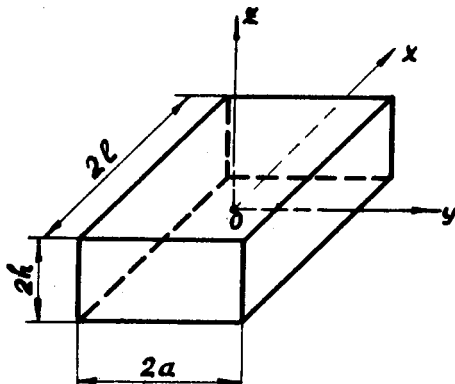


Рис. 1.

следующим образом [1/

$$U = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} dx' \int_{-a}^{+a} dy' \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (1)$$

где $2l$, $2h$ и $2a$ — длина, высота и ширина прямоугольного параллелепипеда, соответственно; σ_v — объемная плотность зарядов; x, y, z — координаты точки наблюдения, x', y', z' — координаты переменной точки элементарного объема $dv' = dx' dy' dz'$, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Введем новые переменные

$$\eta = z - z', \quad \beta = y - y', \quad \alpha = x - x', \quad (2)$$

тогда выражение (1) можно записать в виде

$$U = \frac{\sigma_v}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} d\alpha \int_{-a}^{+a} d\beta \int_{-h}^{+h} \frac{d\eta}{[\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2]^{3/2}} \quad (3)$$

После трехкратного интегрирования ^{/2/} потенциал равномерно заряженного параллелепипеда конечных размеров можно представить как

$$U = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \alpha \beta \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \beta \eta \operatorname{Arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} + \alpha \eta \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \eta^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\beta^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} - \frac{\eta^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\alpha} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right\} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right. \quad (4)$$

При определении выражения (4) использованы следующие очевидные соотношения

$$\int \frac{d\eta}{[\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2]^{3/2}} = \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \ln \left[\frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \right], \quad (5)$$

$$\int \operatorname{Arsh} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) d\beta = \beta \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \eta \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\eta^2 + \alpha^2}} - \quad (6)$$

$$- \alpha \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\alpha} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}}, \quad (7)$$

$$\int \alpha \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\alpha} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right) d\alpha = \eta \beta \operatorname{Arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \eta^2}} -$$

$$- \frac{\eta^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} - \frac{\beta^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}}.$$

В выражениях (5) - (7) постоянная интегрирования опущена.

II. Компоненты напряженности электрического поля

Выражение для компонент напряженности электрического поля найдем из соотношения

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} U. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае компоненты поля определим как

$$E_\alpha = - \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \quad E_\beta = - \frac{\partial U}{\partial \beta}, \quad E_\eta = - \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad (9)$$

или

$$E_\alpha = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\beta \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \eta \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \eta^2}} + \alpha \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\alpha} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right\} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right. \quad (10)$$

$$E_\beta = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\alpha \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \eta \operatorname{Arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} + \beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right\} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right. \quad (11)$$

$$E_\eta = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\beta \operatorname{Arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} - \alpha \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \eta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right\} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right. \quad (12)$$

Отметим, что выражения (10)-(12) определяют с точностью до знака в зависимости от координат точки наблюдения компоненты электрического поля E_x , E_y и E_z .

Для определения знака координат точек наблюдения, входящих в пределы α_1 , α_2 ; β_1 , β_2 ; η_1 , η_2 , воспользуемся уравнением Пуассона. Для этой цели найдем частные производные от компонент E_α , E_β и E_η .

Они имеют следующий вид

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\alpha} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right.,$$

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta} = - \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right., \quad \frac{\partial E_\alpha}{\partial \eta} = - \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \eta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right. \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial \beta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right.,$$

(14)

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial \alpha} = - \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right., \quad \frac{\partial E_\beta}{\partial \eta} = - \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right.$$

$$\frac{\partial E_\eta}{\partial \eta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right.,$$

(15)

$$\frac{\partial E_\eta}{\partial \alpha} = - \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \eta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right., \quad \frac{\partial E_\eta}{\partial \beta} = - \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Arsh} \frac{\alpha}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right.$$

Полученные решения для компонент электростатического поля должны удовлетворять уравнению Пуассона, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$-\nabla^2 U = \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial E_\eta}{\partial \eta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\alpha} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2}} \right\} \left| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \eta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \eta_2 \end{matrix} \right. \quad (16)$$

Суммируя арктангенсы в правой части соотношения (16), получим

$$-\nabla U = \frac{\sigma_x}{4\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{sign}(\alpha\beta\eta) \frac{\pi}{2} \right] \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\eta_1}{\eta_2} \right|. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) при подстановке пределов должно давать решение Пуассона внутри параллелепипеда в виде $-\nabla U = \frac{\sigma_x}{\epsilon_0}$ и вне его границ $\nabla U = 0$ в зависимости от координат точек наблюдения.

Анализ соотношения (17) показывает, что последнее удовлетворяет указанным требованиям, если координаты точки наблюдения берутся со своими знаками в соответствии с выбранной системой координат.

Так, например, в верхней полуплоскости при $x > 0$, $\eta_1 = x + h$, а $\eta_2 = x - h$ а при $x < 0$, $\eta_1 = h - x$, $\eta_2 = -x - h$. Совершенно аналогично и для других пределов $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$. Так как при определении компонент напряженности электрического поля E_α, E_β и E_η с помощью уравнения (8) не учитывался знак координат точек наблюдения, то на основании соотношений (9) и (17) следует, что

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= -E_x(-x, y, z), \\ E_y(x, y, z) &= -E_y(x, -y, z), \\ E_z(x, y, z) &= -E_z(x, y, -z). \end{aligned} \quad (18)$$

Из свойств компонент напряженности электростатического поля следует отметить следующее:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= E_x(x, -y, z), \quad E_x(x, y, z) = E_x(x, y, -z), \\ E_y(x, y, z) &= E_y(-x, y, z), \quad E_y(x, y, z) = E_y(x, y, -z), \\ E_z(x, y, z) &= E_z(-x, y, z), \quad E_z(x, y, z) = E_z(x, -y, z). \end{aligned} \quad (19)$$

Максимальные значения компонент напряженности электрического поля определяются из следующих формул:

$$E_x^{\max} = \frac{\sigma_x}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8\ell \operatorname{arctg} \frac{h}{2\ell} \frac{a}{\sqrt{4\ell^2 + h^2 + a^2}} - 4a \left[\operatorname{Arsh} \frac{h}{\sqrt{4\ell^2 + a^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{h}{a} \right] - 4h \left[\operatorname{Arsh} \frac{a}{\sqrt{4\ell^2 + h^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right] \right\}, \quad (20)$$

$$-\operatorname{Arsh} \frac{h}{a} \left| -4h \left[\operatorname{Arsh} \frac{a}{\sqrt{4\ell^2 + h^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} E_y^{\max} &= \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8a \operatorname{arctg} \frac{h}{2a} \frac{\ell}{\sqrt{4a^2 + h^2 + \ell^2}} - 4\ell \left[\operatorname{Arsh} \frac{h}{\sqrt{4a^2 + \ell^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{h}{\ell} \right] - 4h \left[\operatorname{Arsh} \frac{\ell}{\sqrt{4a^2 + h^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{\ell}{h} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$E_z^{\max} = \frac{\sigma_z}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8h \operatorname{arctg} \frac{a}{2h} \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2 + 4h^2}} - 4a \left[\operatorname{Arsh} \frac{\ell}{\sqrt{4h^2 + a^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{\ell}{a} \right] - 4\ell \left[\operatorname{Arsh} \frac{a}{\sqrt{4h^2 + \ell^2}} - \operatorname{Arsh} \frac{a}{\ell} \right] \right\}, \quad (22)$$

III. Частные случаи

1. Полубесконечный параллелепипед. Полагая в выражениях (10)–(12) $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = x$, где x – координата точки наблюдения, получим формулы, определяющие компоненты напряженности электростатического поля от полубесконечного равномерно заряженного параллелепипеда в следующей форме

$$E_\alpha = \frac{\sigma_x}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\beta \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \eta \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} + x \operatorname{arctg} \frac{\eta}{x} \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \beta^2} \eta} \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\eta_1}{\eta_2} \right| \quad (23)$$

$$E_\beta = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} + \frac{\eta}{2} \ln(\beta^2 + \eta^2) + \beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta^2} \eta} - \eta \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} - x \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\eta_1}{\eta_2} \right| \quad (24)$$

$$E_\eta = \frac{\sigma_z}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \eta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} + \frac{\beta}{2} \ln(\beta^2 + \eta^2) + \eta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta^2} \eta} - \beta \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{\eta^2 + \beta^2}} - x \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\eta_1}{\eta_2} \right| \quad (25)$$

При $x=0$ компоненты поля имеют вид

$$E_\alpha = \frac{\sigma_x}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\beta \operatorname{Arsh} \frac{\eta}{\sqrt{\beta^2}} - \eta \operatorname{Arsh} \frac{\beta}{\sqrt{\eta^2}} \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\eta_1}{\eta_2} \right|, \quad (26)$$

x) Система координат при этом расположена в начале полубесконечного параллелепипеда.

$$E_{\beta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\beta} + \frac{\eta}{2} \ln(\beta^2 + \eta^2) \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (27)$$

$$E_{\eta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \eta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} + \frac{\beta}{2} \ln(\beta^2 + \eta^2) \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| \frac{\eta_1}{\eta_2}. \quad (28)$$

Максимальные значения E_x , E_y и E_z на торце полубесконечного параллелепипеда определяются из формул

$$E_x^{\max} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left[-4a \operatorname{Arsh} \frac{h}{a} - 4h \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right], \quad (29)$$

$x=0, y=0, z=0$

$$E_y^{\max} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left[4a \operatorname{arctg} \frac{h}{2a} + h \ln \left(1 + \frac{4a^2}{h^2} \right) \right], \quad (30)$$

$x=0, y=a, z=0$

$$E_z^{\max} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left[4h \operatorname{arctg} \frac{a}{2h} + a \ln \left(1 + \frac{4h^2}{a^2} \right) \right], \quad (31)$$

$x=0, y=0, z=h$

2. Бесконечно-длинный параллелепипед. Рассматривая поле на достаточно больших расстояниях по оси x от начала полубесконечного параллелепипеда, получим из уравнений (23)–(25) при $x \rightarrow \infty$ выражения, описывающие компоненты поля от бесконечно-длинного равномерно заряженного параллелепипеда. Они имеют вид

$$E_x = 0, \quad (32)$$

$$E_{\beta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 2\beta \operatorname{arctg} \frac{h}{\beta} + \eta \ln(\beta^2 + \eta^2) \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (33)$$

$$E_{\eta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 2\eta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\eta} + \beta \ln(\beta^2 + \eta^2) \right\} \left| \frac{\beta_1}{\beta_2} \right| \frac{\eta_1}{\eta_2}. \quad (34)$$

Максимальные значения составляющих напряженности электростатического поля на гранях бесконечно-длинного параллелепипеда равны

$$E_y^{\max} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8a \operatorname{arctg} \frac{h}{2a} + 2h \ln \left(1 + \frac{4a^2}{h^2} \right) \right\} \quad (35)$$

$y=a, z=0$

$$E_z^{\max} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8h \operatorname{arctg} \frac{a}{2h} + 2a \ln \left(1 + \frac{4h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (36)$$

$z=h, y=0$

Сопоставляя выражения (27), (28) соответственно с (33) и (34), видим, что компоненты напряженности электростатического поля от полубесконечного при $x=0$ и бесконечно-длинного заряженных параллелепипедов связаны соотношениями

$$2E_y(0, y, z) = E_y(y, z) \quad (37)$$

$$2E_z(0, y, z) = E_z(y, z). \quad (38)$$

3. Безграничный заряженный слой. В этом случае компоненты поля легко получить из уравнений (33) и (34), если в них совершить переход к пределу при $\beta_1, \beta_2 \rightarrow \infty$. При этом

$$E_x = 0, \quad (39)$$

$$E_{\beta} = 0 \quad (40)$$

$$E_{\eta} = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} 4\eta \operatorname{sign}(\eta) \frac{\pi}{2} \left| \frac{\eta_1}{\eta_2} \right|. \quad (41)$$

Исследуем уравнение (41) для области $z > 0$. Подставляя значения $\eta_1 = z + h$ и $\eta_2 = z - h$, получим выражения для z -составляющей напряженности электростатического поля в следующем виде

$$E_z = \frac{\sigma_y}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 4z \left[\left(\operatorname{sign}(z+h) \frac{\pi}{2} \right) - \left(\operatorname{sign}(z-h) \frac{\pi}{2} \right) \right] + 4h \left[\left(\operatorname{sign}(z+h) \frac{\pi}{2} \right) + \left(\operatorname{sign}(z-h) \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (42)$$

Для области $z < 0$ решение получится из уравнения (42) при замене $z+h \rightarrow -z+h$ и $z-h \rightarrow -z-h$, соответственно.

Полученные таким образом решения распадаются на два в зависимости от того, находится ли точка наблюдения z внутри заряженного слоя или вне его.

В первом случае при $-h \leq z \leq h$

$$E_z = \pm \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} z \quad \text{Знаки} \quad \begin{array}{l} + \text{ для } z > 0 \\ - \text{ для } z < 0. \end{array} \quad (43)$$

Во втором случае $E_z = \pm \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} h$ Знаки $\begin{array}{l} + \text{ для } z \geq h \\ - \text{ для } z \leq -h \end{array}$ (44)

Из уравнения (44) также следует, что при толщине заряженного слоя $2h$, стремящемся к нулю таким образом, что поверхностная плотность зарядов остается конечной, напряженность электростатического поля от заряженной плоскости определяется^{/1/}

$$E_z = \pm \frac{\sigma_z}{2\epsilon_0} \quad \text{Знаки} \quad \begin{array}{l} + \text{ для } z > 0 \\ - \text{ для } z < 0, \end{array} \quad (45)$$

где σ_z - поверхностная плотность зарядов.

Л и т е р а т у р а

1. В.Смайт. Электростатика и электродинамика . И.Л. Москва, 1954.
2. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Ф.М. Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 февраля 1965 г.