ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 1960

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.В. Ефимов

К ФОРМУЛИРОВКЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1965

3005/3 иф.

P - 1960

Г.В. Ефимов

К ФОРМУЛИРОВКЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ С СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в " Nuclear Physics"

1. Введение

В данной работе будет продолжено исследование возможности построения конечной локальной квантовой теории скалярного поля ϕ путем введения существенно нелинейного лагранжиана взаимодействия. В настоящее время существует два подхода к этой проблеме, которые рассмотрены в работах /1-4/ и /5/. К сожалению, математические трудности при исследовании высших приближений теории возмущений, особенно при проверке унитарности, чрезвычайно велики, так что пока трудно судить о том, насколько успешна произведенная попытка.

Существенной чертой этих подходов является необходимость рассмотрения теории в так называемой евклидовой формулировке, т.е. амплитуды физических процессов первоначально находятся лишь в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов, в области, где они вещественны. Переход в физическую область осуществляется аналитическим продолжением по инвариантным импульсным переменным. Поскольку из-за аналитических свойств радиационных операторов в x -пространстве обычная эквивалентность евклидовой и псевдоевклидовой формулировок нарушена, то доказательство унитарности, причинности, аналитичности в p -пространстве играют главную роль при проверке самосогласованности нелинейной теории. Успех евклидовой формулировки при рассмотрении нелинейной задачи можно считать осуществлением идеи Ю.Швингера /6/.

Другая очень важная черта этих подходов, на что не было обращено должного внимания в вышеупомянутых работах, - это неоднозначность, возникающая при постановке проблемы в евклидовой формулировке. Иначе, по одному лагранжиану взаимодействия, отличному от полинома по ϕ, возможно найти несколько различных S -матриц. При этом условий унитарности и причинности недостаточно, чтобы зафиксировать какое-либо одно решение. В первом подходе /1,2/ неоднозначность проявляется в том, что задача Коши системы дифференциальных уравнений, которая ставится в соответствие T -произведению, не имеет единственного решения. Во втором подходе /5/ уравнение Гайзенберга для производящего функционала (S -матрица теории во внешнем поле, усредненная по вакууму) и его решение носят чисто формальный характер, входящие в уравнение и решение операторы не определены на соответствующих функционалах. Придание смысла получающимся выражениям можно производить различными методами, что приводит к различным ответам. Вопрос о степени неоднозначности и о пути ее устранения пока остается открытым.

В настоящей работе мы хотим сформулировать проблему несколько иначе, чем в [1-5]. Нам кажется, что предлагаемая здесь постановка задачи, во-первых, более соответствует сделанному ранее, так как явно использует возможности неоднозначной постановки проблемы, во-вторых, кажется более общей, так что оказывается возможным расширить класс функций взаимодействия $L_I(x) = -gU(\phi(x))$, для которых возможно построить конечную S -матрицу. И главное – проблема аналитического продолжения в физическую область и проверка унитарности теории окажется более простой, чем в упомянутых выше подходах.

Мы не будем обсуждать здесь вопросов, связанных с неоднозначностью, так как сегодня еще не ясно, существует ли хотя бы один метод построения конечной S -матрицы по нелинейному лагранжиану взаимодействия.

В случае положительного ответа на поставленную задачу необходимо будет подумать о физических основах предлагаемого суммирования. Возможно, неоднозначность будет фиксирована какими-либо дополнительными физическими требованиями.

В настоящей статье будет построена S -матрица в евклидовой области пространственно-подобных импульсов. Аналитическое продолжение в физическую область будет проведено в следующих работах.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать однокомпонентное скалярное мезонное поле ϕ. Плотность лагранжиана записывается в виде:

$$L(x) = L_0(x) + L_I(x), \tag{2.1}$$

$$L_0(x) = -\tfrac{1}{2}\left(\mu^2 \phi^2(x) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\nu}\right), \tag{2.2}$$

$$L_I(x) = -gU(\phi(x)), \tag{2.3}$$

где $U(a)$ – некоторая функция от a, аналитическая в окрестности точки $a = 0$,

$$U(a) = \sum_{n=8}^{\infty} \frac{u_n}{n!} a^n . \tag{2.4}$$

В связи с вышесказанным об имеющейся неоднозначности при постановке задачи с нелинейным взаимодействием типа (2.4) сформулируем нашу проблему следующим образом:

Возможно ли поставить в соответствие нелинейному лагранжиану взаимодействия $L_I(x) = -gU(\phi(x))$ S -матрицу, конечную в каждом порядке теории возмущений по константе связи g ? Какие при этом возникают ограничения на класс допустимых функций $U(a)$?

Слова "поставить в соответствие" в настоящей работе будем понимать в смысле методов суммирования расходящихся рядов [7]. Полная аналогия с этими методами будет видна ниже.

Поступим следующим образом.

1. Вместо бесконечного ряда по оператору поля ϕ в (2.4) рассмотрим полином степени N

$$U_N(\phi(x)) = \sum_{k=8}^{N} \frac{u_k}{k!} : \phi^k(x) : , \tag{2.5}$$

где N –достаточно большое, но конечное число. Проблема затем будет сводиться к переходу к пределу $N \to \infty$ в выражениях для S –матрицы.

2. Лагранжиан (2.5) описывает неперенормируемое самодействие скалярного поля. В каждом порядке теории возмущений по g существуют сильные расходимости. Сделаем промежуточную регуляризацию по Паули–Вилларсу, т.е. вместо причинной функции в представлении взаимодействия

$$\Delta(x_1 - x_2) = \langle 0| T(\phi(x_1)\phi(x_2))|0\rangle = \frac{1}{i(2\pi)^4} \int \frac{d^4k\, e^{ixk}}{\mu^2 - k^2 - i\epsilon} \tag{2.6}$$

будем подставлять в матричные элементы функцию

$$\Delta_R(x_1 - x_2) = \frac{1}{i(2\pi)^4} \int d^4k\, e^{ixk} \left[\frac{1}{\mu^2 - k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - k^2 - i\epsilon}\right], \tag{2.7}$$

где M – регуляризующая большая масса. При этой регуляризации все матричные элементы S –матрицы будут конечны.

3. Будем строить S –матрицу по теории возмущений для лагранжиана (2.5) с причинной функцией (2.7). Получим:

$$S_N = T \exp\{-ig \int d^4x\, U_N(\phi(x))\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \, S_N^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \qquad (2.8)$$

где

$$S_N^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = T\{ U_N(\phi(x_1)) \dots U(\phi(x_n)) \}. \qquad (2.9)$$

Переход в (2.9) от T -произведения к N -произведению может быть осуществлен обычным способом с помощью теоремы Вика, поскольку $U_N(\phi)$ является полиномом конечной степени N. Имеем:

$$S_N^{(n)} = \sum_{m_1, \dots, m_n = 0}^{N} F^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, \Delta_R(x_i - x_j)) : \frac{\phi^{m_1}(x_1)}{m_1!} \dots \frac{\phi^{m_n}(x_n)}{m_n!} :, \qquad (2.10)$$

где

$$F^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, \Delta_R(x_i - x_j)) = \sum_{k_1, \dots, k_n = 0}^{N} C_{m_1 \dots m_n; k_1 \dots k_n} \prod_{1 \le i \le j \le n} \Delta_R^{k_i + k_j}(x_i - x_j) \qquad (2.11)$$

Коэффициенты $C^{(n)}_{m_1, \dots, m_n; k_1, \dots, k_n}$ известны и являются произведениями коэффициентов u_k из (2.5).

Амплитуды физических процессов определяются интегралами вида:

$$F^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, M; p_i p_j) = \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \, e^{i p_j x_j} F^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, \Delta_R(x_j - x_i)) =$$

$$= (-i)^{n-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) T^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, M, p_i p_j), \qquad (2.12)$$

где

$$T^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, M, p_i p_j) =$$

$$= i^{n-1} n^4 \int d^4x_1, \dots \int d^4x_n \, \delta^{(4)}(x_1 + \dots + x_n) e^{i p_j x_j} F^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, \Delta_R(x_i - x_j)), \qquad (2.13)$$

p_i -внешние импульсы.

При конечных N и M ультрафиолетовые расходимости отсутствуют в интегралах для матричных элементов $T^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}$.

4. Рассмотрим область изменения внешних импульсов $p_1, \dots, p_n$, где амплитуды

(2.13) всегда вещественны, т.е. ту область $p_1, \dots, p_n$, где известная квадратичная форма $Q(\alpha, p)$ в знаменателе выражения для амплитуды при фейнмановской α - параметризации всегда отрицательна [8]. Это будет евклидова область пространственно-подобных векторов $p_1, \dots, p_n$. Определим ее.

Совокупность пространственно-подобных векторов $p_1, \dots, p_n$ с наперед заданными скалярными произведениями $(p_i p_j)$ называется евклидовой, если при любом выборе вещественных чисел $a_1, \dots, a_n$ скалярный квадрат вектора $\sum_{j=1}^{n} a_j p_j$ неположителен:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j p_j\Big)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (p_i p_j) \le 0; \quad (p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}) \qquad (2.14)$$

и только нулевой вектор имеет длину нуль. Условие (2.14) эквивалентно следующей системе неравенств для скалярных произведений векторов p_j:

$$\begin{vmatrix} -p_1^2, & -(p_1 p_2), & \dots, & -(p_1 p_j) \\ -(p_2 p_1), & -p_2^2 & \dots, & -(p_2 p_j) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(p_j p_1), & -(p_j p_2), & \dots, & -p_j^2 \end{vmatrix} \ge 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \qquad (2.15)$$

Если система внешних импульсов $p_1, \dots, p_n$ евклидова, то в амплитудах (2.13) возможно перейти к евклидовой метрике поворотом контура интегрирования по x_{j0} от действительной оси к мнимой $(x_{j0} \to -i x_{j4})$. Получим:

$$T^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, M, p_i p_j) =$$

$$= n^4 \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \, \delta^{(4)}(x_1 + \dots + x_n) e^{i(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n)} F^{(n)}_{m_1, \dots, m_n}(N, D_R(x_i - x_j)), \qquad (2.16)$$

$$D_R(x_i - x_j) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, e^{ikx} \Big[\frac{1}{\mu^2 + k^2} - \frac{1}{M^2 + k^2} \Big]. \qquad (2.17)$$

В (2.16) и (2.17) интегрирование проводится уже по четырехмерному евклидову пространству. Импульсы $q_1, \dots, q_n$ - евклидовы $(q_j^2 = q_{j1}^2 + q_{j2}^2 + q_{j3}^2 + q_{j4}^2)$ с заданными скалярными произведениями:

$$(q_i q_j) = -(p_i p_j) = -z_{ij}. \qquad (2.18)$$

Амплитуда (2.16) записана в явно вещественном виде, поскольку функция $D_R(x_i - x_j)$ вещественна.

Отметим, что при конечных N и M евклидова и псевдоевклидова формулировки эквивалентны /6/.

5. Рассмотрим возможность перехода к пределу $N \to \infty$. Этот переход должен быть осуществлен таким образом, чтобы затем можно было бы перейти к пределу $M \to \infty$. При этом амплитуды (2.16) должны остаться вещественными.

Если при конечных N устремлять M к бесконечности, функция $\Delta(x)$ становится сингулярной при $x = 0$ и интегралы для $T^{(n)}_{m_1 \ldots m_n}$ в (2.16) расходятся при малых x. Это есть ультрафиолетовые расходимости. Значит, переход к $N = \infty$ должен быть таким, чтобы функции

$$F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij}) = \lim_{N \to \infty} F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(N, D_{ij}) , \tag{2.19}$$

где $D_{ij} = D_R(x_i - x_j)$, не росли при $D_{ij} \to \infty$.

Кроме того, функции (2.19) не должны иметь особенностей на интервалах $0 < D_{ij} < \infty$. Это условие необходимо, поскольку амплитуды должны оставаться вещественными. Выполнение этих двух условий возможно только в том случае, если функции $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$ имеют в точках $D_{ij} = 0$ существенные особенности /1/.

Следовательно, переход к пределу $N \to \infty$ эквивалентен введению некоторого метода суммирования асимптотических рядов (2.11) для $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(N, D_{ij})$ в каждом порядке теории возмущений (для каждого n).

В этом пункте заключена неоднозначность при постановке задачи, так как процедура суммирования асимптотических рядов не является однозначной /7/. Возможно, что по одному лагранжиану можно построить несколько различных S -матриц.

6. Введением метода суммирования и переходом к $M = \infty$ завершается построение конечной S -матрицы в евклидовой области импульсных переменных.

Амплитуды $T^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}$ зависят от скалярных инвариантов $z_{ij} = (p_i p_j)$. Переход в физическую область должен быть осуществлен аналитическим продолжением по инвариантным переменным z_{ij}.

Далее необходима проверка самосогласованности теории, т.е. необходимо проверить, выполняется ли унитарность, причинность, правильно ли расположены комплексные особенности амплитуд, так как эквивалентность евклидовой и псевдоевклидовой формулировок нарушается, когда происходит суммирование асимптотического ряда.

3. Метод суммирования

Переход к пределу $N \to \infty$ в суммах (2.11) для радиационных операторов $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(N, D_R(x_i - x_j))$ осуществим следующим образом. При переходе от T -произведения к N -произведению в (2.9) воспользуемся теоремой Вика, записанной в виде /9/

$$T = N \exp\left\{ \tfrac{1}{2} \iint d^4y_1 d^4y_2 D_R(y_1 - y_2) \frac{\delta^2}{\delta\phi(y_1)\delta\phi(y_2)} \right\} . \tag{3.1}$$

Получим в n -порядке теории возмущений для (2.9):

$$S^{(n)}_N(x_1,\ldots,x_n) = \exp\left\{ \sum_{1 \le i < j \le n} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \, \partial\alpha_j} \right\} U_N(\alpha_1)\ldots U_N(\alpha_n) , \tag{3.2}$$

где $D_{ij} = D_R(x_i - x_j)$ и $\alpha_j = \phi(x_j)$.

Разлагая в ряды по D_{ij} и $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, легко получить разложения (2.10) и (2.11) и выражение коэффициентов $C^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n;k_1,\ldots,k_n}$ через u_k.

Наша проблема заключается в переходе к пределу $N \to \infty$ и определении функций $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$ в разложении:

$$\begin{aligned} S^{(n)} &= \exp\left\{ \sum_{1 \le i < j \le n} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \, \partial\alpha_j} \right\} U(\alpha_1)\ldots U(\alpha_n) = \\ &= \sum_{m_1,\ldots,m_n = 0}^{\infty} F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij}) \frac{\alpha_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{\alpha_n^{m_n}}{m_n!} , \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $U(\alpha)$ уже является некоторой функцией от α, разложимой в ряд (2.4) вблизи точки $\alpha = 0$.

Существующие методы работы с нелинейными лагранжианами /1-5/ связаны как раз с определением действия оператора в (3.3). В этом пункте заключена вся неоднозначность проблемы. Возникают вопросы, как определить этот оператор ? Какие физические принципы могут быть связаны с его действием ? Полного ответа на эти вопросы мы еше не имеем.

Функции $F_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$, рассматриваемые как функции вещественных положительных переменных D_{ij}, должны удовлетворять следующим условиям.

I. Условие отсутствия ультрафиолетовых расходимостей (достаточное):

$$\lim_{D_{ij} \to \infty} F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij}) = 0 \tag{3.4}$$

по каждой переменной D_{ij}.

II. Условие вещественности амплитуд в евклидовой области импульсных переменных:

функции $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$ должны быть вещественными и не иметь особенностей на интервалах

$$0 < D_{ij} < \infty . \qquad (3.5)$$

III. Условие асимптотического разложения:

$$F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij}) \backsim \prod_{\ell=1}^{s} \prod_{k=s+1}^{n} \sum_{n_{\ell,k}=0}^{\infty} F^{(s)}_{\ldots,m_\ell+\sum_{k=s+1}^{n} n_{\ell k},\ldots}(x_1,\ldots,x_s) \times$$

$$\times \frac{D^{n_{\ell,k}}(x_\ell - x_k)}{n_{\ell,k}!} F^{(n-s)}_{\ldots,m_j+\sum_{\ell=1}^{s} n_{\ell,j},\ldots}(x_{s+1},\ldots,x_n) , \qquad (3.6)$$

где s –произвольное число, заключенное в пределах $1 \le s \le n-1$, $\backsim$ –знак асимптотического разложения. Это равенство должно выполняться для любых разбиений n точек $(x_1,\ldots,x_n)$ в $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$ на две группы по s и $(n-s)$ точек в каждой.

Условие асимптотического разложения, во-первых, требует, чтобы функции $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$ при разложении по D_{ij} давали асимптотические ряды (2.11), а во-вторых, является необходимым условием для выполнения унитарности S –матрицы, как увидим ниже. Дело в том, что при доказательстве унитарности в теории возмущений необходимо будет показать, что мнимая часть амплитуды n –ого порядка связана с амплитудами низших порядков. При аналитическом продолжении по инвариантным переменным z_{ij} (2.18) необходимо будет производить вычитание асимптотических рядов по отдельным D_{ij}, при этом коэффициентами этих асимптотических рядов должны быть радиационные операторы низших порядков.

Для нахождения функций $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}$ поступим следующим образом. Представим функцию $U(\alpha)$ в виде интеграла Фурье.

$$U(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \tilde{U}(\beta) e^{i\alpha\beta} ; \quad u_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \tilde{U}(\beta)(i\beta)^n . \qquad (3.7)$$

Подставим (3.7) в (3.3), получим:

$$S^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_n\, \tilde{U}(\beta_1)\ldots \tilde{U}(\beta_n)\, e^{i\alpha_j\beta_j} \prod_{1\le i<j\le n} e^{-D_{ij}\beta_i\beta_j} \qquad (3.8)$$

При разложении в (3.8) экспоненты в ряды по D_{ij} каждый член в таком разложении интегрируется, и получаются асимптотические ряды (2.11). Однако легко видеть, что в целом полученный интеграл (3.8) либо расходится при любых D_{ij}, либо сходится, но определяет функцию, растущую с ростом D_{ij} быстрее любой конечной степени D_{ij}, т.е. не удовлетворяет условию (1).

Постулируем следующую регуляризующую процедуру. Будем считать, что действие оператора $\exp\{D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}\}$ на $\exp\{i(\alpha_i\beta_i+\alpha_j\beta_j)\}$ под знаком интеграла в (3.3) равно

$$e^{D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}}\, e^{i(\alpha_i\beta_i+\alpha_j\beta_j)} = e^{i(\alpha_i\beta_i+\alpha_j\beta_j)-D_{ij}\beta_i\beta_j}\,\theta(1-\lambda^2 D_{ij}^2\beta_i^2\beta_j^2) , \qquad (3.9)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 , & x > 0 \\ 0 , & x < 0 . \end{cases}$$

Используя (3.9), (3.3) и (3.8), получим для радиационных операторов $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij})$ в (3.3) следующее выражение:

$$F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}(D_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_n\, \tilde{U}(\beta_1)\ldots\tilde{U}(\beta_n)(i\beta_1)^{m_1}\ldots(i\beta_n)^{m_n} \times \qquad (3.10)$$

$$\times \prod_{1\le i<j\le n} e^{-D_{ij}\beta_i\beta_j}\,\theta(1-\lambda^2 D_{ij}^2\beta_i^2\beta_j^2) .$$

Прежде всего отметим, что полученная формула в случае обычных взаимодействий типа $U(\phi) = \phi^3$ или $U(\phi) = \phi^4$ дает обычное выражение для радиационных операторов.

Безусловно, предлагаемая процедура неоднозначна. В (3.10) уже появилась новая произвольная безразмерная константа λ. Кроме того, вместо $\theta(1-\lambda^2 D_{ij}^2\beta_i^2\beta_j^2)$ можно было бы ввести $\theta(1-\lambda^2 D_{ij}^2\beta_i^2)\theta(1-\lambda^2 D_{ij}^2\beta_j^2)$ или $\theta(1+\lambda D_{ij}\beta_i\beta_j)$.

Эта неоднозначность соответствует известной ситуации, в которой суммирование асимптотических рядов есть неоднозначная процедура. Суммирование осуществляется с точностью до функций, имеющих существенную особенность в точках $D_{ij} = 0$, для которых асимптотический ряд равен нулю (типа $\exp\{-\frac{1}{D_{ij}}\}$). К чему приводит эта неоднозначность в амплитудах физических процессов, увидим при аналитическом продолжении в физическую область.

Однако, как говорилось выше, эта неоднозначность нас мало будет интересовать, так как задача в настоящий момент состоит в том, чтобы показать, что существует, по крайней мере, один способ суммирования, приводящий к унитарной S -матрице локальной теории без расходимостей.

Рассмотрим S -матрицу с радиационными операторами (3.10). Покажем, что функции $F^{(n)}_{m_1,\dots,m_n}$ удовлетворяют всем перечисленным выше условиям для класса функций $U(\alpha)$, которые действительны, аналитичны в точке $\alpha = 0$ (2.4) и имеют фурье-образ $\tilde U(\beta)$ (3.7), который при всех β удовлетворяет неравенству

$$|\tilde U(\beta)| < A e^{-a|\beta|^{\sigma}}, \qquad (3.11)$$

где A, a, σ -некоторые положительные величины.

Легко видеть, что условия (I) и (II) выполнены. Функции $F^{(n)}_{m_1,\dots,m_n}$ ограничены при любых D_{ij} :

$$|F^{(n)}_{m_1,\dots,m_n}(D_{ij})| \le e^{\frac{n(n+1)}{2}} a_{m_1}\cdots a_{m_n}, \qquad (3.12)$$

где

$$a_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, |\beta^m \tilde U(\beta)| < \infty .$$

Для выполнения условия (III) достаточно показать, что в коэффициенты асимптотического разложения $F^{(n)}_{m_1,\dots,m_n}(D_{ij})$ по каждому D_{ij} введенная θ -функция не дает никакого вклада, т.е. интеграл вида:

$$F(D) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\beta_1\, d\beta_2\, K(\beta_1,\beta_2)\, e^{-D\beta_1\beta_2}\, \theta(1-\lambda^2 D^2 \beta_1^2 \beta_2^2), \qquad (3.13)$$

$$K(\beta_1,\beta_2) = (i\beta_1)^{m_1} (i\beta_2)^{m_2}\, \tilde U(\beta_1)\, \tilde U(\beta_2)\, B(\beta_1,\beta_2),$$

где $B(\beta_1,\beta_2)$ - ограниченная функция, разлагается в асимптотический ряд при $D \to 0$:

$$F(D) \backsim A_0 + DA_1 + \frac{D^2}{2} A_2 + \dots + \frac{D^n}{n!} A_n + \dots , \qquad (3.14)$$

где

$$A_n = \iint_{-\infty}^{\infty} d\beta_1\, d\beta_2\, (-\beta_1\beta_2)^n\, K(\beta_1,\beta_2) .$$

Действительно, проделаем в (3.13) тождественное преобразование:

$$e^{-D\beta_1\beta_2}\, \theta(1-\lambda^2 D^2 \beta_1^2\beta_2^2) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{D^\ell}{\ell!} (-\beta_1\beta_2)^\ell -$$

$$-\sum_{\ell=0}^{n} \frac{D^\ell}{\ell!} (-\beta_1\beta_2)^\ell\, \theta(\lambda^2 D^2 \beta_1^2\beta_2^2 - 1) + \Big[e^{-D\beta_1\beta_2} - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-D\beta_1\beta_2)^\ell}{\ell!}\Big]\, \theta(1-\lambda^2 D^2 \beta_1^2\beta_2^2) . \qquad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.13), получим

$$F(D) = F_1(D) + F_2(D) + F_3(D), \qquad (3.16)$$

где

$$F_1(D) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\beta_1\, d\beta_2\, K(\beta_1,\beta_2) \sum_{\ell=0}^{n} \frac{D^\ell}{\ell!} (-\beta_1\beta_2)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{D^\ell}{\ell!} A_\ell ,$$

$$F_2(D) = -\iint_{-\infty}^{\infty} d\beta_1\, d\beta_2\, K(\beta_1,\beta_2) \sum_{\ell=0}^{n} \frac{D^\ell}{\ell!} (-\beta_1\beta_2)^\ell\, \theta(\lambda^2 D^2 \beta_1^2\beta_2^2 - 1),$$

$$F_3(D) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\beta_1\, d\beta_2\, K(\beta_1\beta_2)\, \frac{(D\beta_1\beta_2)^{n+1}}{n!} \int_0^1 d\xi\, (1-\xi)^n\, e^{-D\beta_1\beta_2\xi}\, \theta(1-\lambda^2 D^2 \beta_1^2\beta_2^2).$$

Можно легко показать, используя (3.11), что при $D \to 0$

$$F_2(D) = O\Big(\exp\Big\{-\frac{Const}{(\lambda D)^{\sigma}}\Big\}\Big) \quad \text{и} \quad F_3(D) = O(D^{n+1}) \quad \text{, поэтому}$$

$$F(D) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{D^\ell}{\ell!} A_\ell + O(D^{n+1}), \qquad (3.17)$$

что и доказывает (3.14).

Таким образом, радиационные операторы (3.10) удовлетворяют всем поставленным условиям.

4. Амплитуды в евклидовой области

Итак, получено, что для локального лагранжиана взаимодействие скалярного поля (2.1-3), где функция $U(\alpha)$ обладает перечисленными выше свойствами, возможно построить S -матрицу в виде ряда по константе связи g :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} F^{(n)}_{m_1,\dots,m_n}(\Delta(x_i - x_j)) : \frac{\phi^{m_1}(x_1)}{m_1!} \dots \frac{\phi^{m_n}(x_1)}{m_n!} : , \qquad (4.1)$$

где радиационные операторы $F^{(n)}_{m_1,\ldots,m_n}$ известны и даются формулой (3.10) в случае, если ищется амплитуда какого-либо процесса в евклидовой области ее импульсных переменных.

Причинная функция $\Delta(x)$ (2.6) в евклидовой области вещественна и положительна /в (2.17) надо положить $M = \infty$ /:

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k\,e^{ikx}}{\mu^2+k^2} = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\cdot\frac{K_1(\mu\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}};\quad (x^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2), \tag{4.2}$$

где $K_1(z)$ –функция Макдональда.

При вычислении матричных элементов с помощью S –матрицы необходимо прежде всего провести перенормировку энергии вакуума, так как амплитуда перехода вакуум-вакуум

$$\langle 0|S|0\rangle = \exp\{i\Phi\} \tag{4.3}$$

не равна единице (фаза $\Phi \neq 0$). Интегралы, определяющие фазу Φ, расходятся при больших x. Обычно эта расходимость регуляризуется адиабатической гипотезой [10], т.е. умножением лагранжиана взаимодействия на множитель $g(x)$, где $g(x)$ –гладкая функция, исчезающая на бесконечности. В обычной технике теории возмущений эта перенормировка проводится простым выкидыванием замкнутых вакуумных даиграмм. Мы же поступим следующим образом.

Так как вакуумные поправки факторизуются в виде бесконечного фазового множителя (4.3), перенормировку можно провести, поделив матричный элемент любого процесса, полученный из S –матрицы (4.1), на фазовый множитель (4.3). Если же поделить S –матрицу (4.1) на (4.3), то полученный оператор

$$S_r = \frac{S}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{4.4}$$

уже не будет содержать в себе вакуумных добавок. Получим выражение для S_r в виде ряда по g. S –матрицу (4.1) можно преобразовать к виду:

$$S = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-ig)^{\ell}}{\ell!}\int d^4x_1,\ldots\int d^4x_{\ell}\sum_{m_1,\ldots,m_\ell=1}^{\infty} S^{(\ell)}_{m_1,\ldots,m_\ell}(x_1,\ldots,x_\ell):\frac{\phi^{m_1}(x_1)}{m_1!}\cdots\frac{\phi^{m_\ell}(x_\ell)}{m_\ell!}:, \tag{4.5}$$

$$S^{(\ell)}_{m_1,\ldots,m_\ell}(x_1,\ldots,x_\ell) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ig)^n}{n!}\int d^4t_1\ldots\int d^4t_n F^{(n+\ell)}_{m_1,\ldots,m_\ell,0,\ldots,0}(x_1,\ldots,x_\ell;t_1,\ldots,t_n). \tag{4.6}$$

Фазу $\langle 0|S|0\rangle$ легко получить из (4.5) и (4.6):

$$\langle 0|S|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ig)^n}{n!}\int d^4t_1\ldots\int d^4t_n F^{(n)}_{0,\ldots,0}(t_1,\ldots,t_n), \tag{4.7}$$

поделив ряд (4.6) на ряд (4.7), получим

$$\bar S^{(\ell)}_{m_1,\ldots,m_\ell}(x_1,\ldots,x_\ell) = \frac{S^{(\ell)}_{m_1,\ldots,m_\ell}(x_1,\ldots,x_\ell)}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{4.8}$$

Деление ряда на ряд легко провести, подставляя в (4.8) ряды (4.6) и (4.7), разлагая знаменатель по g, перемножая получающиеся ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях g. Общая формула для $\bar S^{(\ell)}$ очень громоздка [11], и мы приводить ее здесь не будем.

Подставляя (4.8) в (4.4) получим, что амплитуды любых процессов, полученные с S_r –матрицей

$$S_r = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-ig)^{\ell}}{\ell!}\int d^4x_1,\ldots\int d^4x_\ell\sum_{m_1,\ldots,m_\ell=1}^{\infty}\bar S^{(\ell)}_{m_1,\ldots,m_\ell}(x_1,\ldots,x_n):\prod_{j=1}^{\ell}\frac{\phi^{m_j}(x_j)}{m_j!}: \tag{4.9}$$

будут свободны от вакуумных вкладов.

Итак, матричные элементы физических процессов в евклидовой области импульсных переменных, полученные с помощью S –матрицы (4.9), будут конечны во всех порядках теории возмущений. Дальнейшая проблема – переход в физическую область, доказательство унитарности и т.д.

5. Заключение

Проведенное исследование показало, что возможно в евклидовой области импульсных переменных построить по нелинейному лагранжиану конечную S –матрицу во всех порядках теории возмущений. По нашему мнению, проверка выполнения унитарности – это основной вопрос, предлагаемой нелинейной теории. Аналитическое продолжение в физическую область будет проведено в следующей работе, где будет показано, что во втором и третьем порядках теории возмущений унитарность выполнена и амплитуды имеют правильные особенности.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Д.И. Блохинцеву, акад. Н.Н. Боголюбову, Е.С. Фрадкину, проф. А.А. Логунову, И.Т. Тодорову за полезные дискуссии.

Литература

1. Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 44 , 2107 (1963).
2. G.V.Efimov. Nuovo Cimento, 32, 1046 (1964).
3. М.К. Волков, Г.В. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р-1638, Дубна, 1964.
4. Г.В. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р-1784, Дубна, 1964.
5. E.S.Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
6. J.Schwinger. Phys. Rev., 115, 721 (1959).
7. Г. Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ, Москва, 1951.
8. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37 , 62 (1959).
9. S.Hori. Progr. Theor. Phys., 7, 578 (1952).
10. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
11. Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 42 , 1558 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1965 г.