

С 323.2

М-534

25/1-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1918



М.А. Мествиришвили

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ  
ДВУХЧАСТИЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В  
НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

ДАН СЕР, 1965, Т 164, №2,  
стр. 301-304.

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

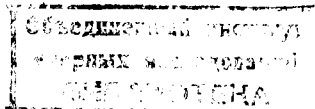
1964

P- 1918

М.А. Мествиришвили

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ  
ДВУХЧАСТИЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В  
НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

Направлено в ДАН СССР



2899/3 48.

В работе<sup>/1/</sup> Фаддеевым была предложена система зацепляющихся уравнений, пригодная для описания задачи трех тел, когда частицы взаимодействуют между собой парными силами. Эта система является обобщением уравнения Липмана-Швингера и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} T^{(1)}(z) \\ T^{(2)}(z) \\ T^{(3)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{23}(z) \\ T_{31}(z) \\ T_{12}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & T_{23}(z) & T_{23}(z) \\ T_{31}(z) & 0 & T_{31}(z) \\ T_{12}(z) & T_{12}(z) & 0 \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} T^{(1)}(z) \\ T^{(2)}(z) \\ T^{(3)}(z) \end{pmatrix}, \quad (Q1)$$

где

$$G_0 = (H_0 - z)^{-1}, \quad T(z) = T^{(1)}(z) + T^{(2)}(z) + T^{(3)}(z),$$

$$T_{ij} = -V_{ij} - V_{ij} G_0(z) T_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j.$$

Здесь  $H_0$  - свободный гамильтониан трех частиц.  $V_{ij}$  - потенциал взаимодействия между  $i$  - и  $j$  - частицами,  $T_{ij}$  - соответствующая  $V_{ij}$  - двухчастичная амплитуда, а  $T$  - полная амплитуда трех частиц.

Замечательным обстоятельством в (0,1) является то, что амплитуда рассеяния трех тел  $T$ , после решения этих уравнений, выражается через амплитуду  $T_{ij}$ .

Система (0,1) позволяет получить разложение в ряд теории возмущений и, как было показано в работах<sup>/2/</sup>, сформулировать соответствующую диаграммную технику. Диаграммы полностью определяются заданием вершин, которые являются двухчастичными амплитудами вне массовой поверхности, и поэтому для изучения аналитических свойств этих диаграмм существенно знать аналитические свойства  $T_{ij}$ .

1. Цель настоящей работы - дать некоторое интегральное представление для двухчастичной амплитуды вне массовой поверхности в нерелятивистском случае. Такое представление можно использовать в проблеме трех тел. Кроме того, оно имеет и самостоятельный интерес, поскольку выражает аналитические свойства двухчастичной амплитуды.

Напишем матричный элемент оператора  $t$  в виде

$$\delta(\vec{p}_1 + \vec{k}_1 - \vec{p}_f - \vec{k}_f) < \frac{\vec{p}_f - \vec{k}_f}{2} | t(z - \frac{(\vec{p}_f + \vec{k}_f)^2}{2}) | \frac{\vec{p}_1 - \vec{k}_1}{2} >. \quad (1.1)$$

Оператор  $t$  удовлетворяет уравнению Липмана-Швингера

$$t = V - VG_0 t, \quad (1.2)$$

где  $V$  - потенциал взаимодействия, зависящий от разности координат (для удобства в дальнейшем выбирается юкавовский потенциал), а  $G_0$  - функция Грина, имеющая вид (в системе единиц, где  $\hbar^2 = 2m_1 = 2m_2 = 1$ )

$$G_0 = \frac{1}{k^2 - [z - \frac{(\vec{p} + \vec{k})^2}{2}]}. \quad (1.3)$$

Заметим, что в (1.1) система отсчета не фиксируется. В системе ц.м. ( $\vec{p}_1 + \vec{k}_1 = 0$ ) для  $\langle t | t | \rangle$  - матрицы получается хорошо известное выражение.

Независимость комбинаций  $\frac{\vec{p} + \vec{k}}{2}$  и  $\frac{\vec{p} - \vec{k}}{2}$  позволяет фиксировать выражение  $E = z - \frac{(\vec{p} + \vec{k})^2}{2}$ , и тогда матричный элемент (1.1) будет зависеть от трех скалярных квадратов:

$$\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{k}_1}{2}\right)^2; \left(\frac{\vec{p}_1 + \vec{k}_1}{2}\right)^2; (k_1 - k_1)^2.$$

Итерируя уравнения (1.2), мы получим ряд теории возмущений, соответствующие диаграммы которого можно изобразить в следующем виде<sup>x)</sup> (см. рис. 1).

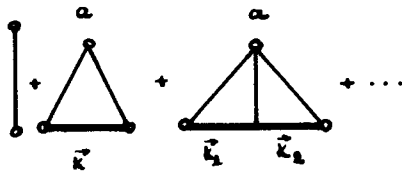


Рис. 1.

Матричные элементы в импульсном представлении каждой диаграммы легко написать, если вспомнить, что жирным линиям соответствует функция Грина  $G_0$ , а тон-

<sup>x)</sup> Нерелятивистские диаграммы обычно рисуют в ином виде, а именно: тонкие линии выходят не из одной точки, "а", как на рис. 1, а из отдельных точек.

Условимся, что в вершине "а" будем писать константу взаимодействия в степени, значение которой равно числу входящих в нее линий. Таким образом, первая диаграмма на рис. 1 будет второго порядка, вторая - четвертого порядка и т.д.

ким линиям - фурье - образ потенциальной энергии  $\frac{1}{k^2 + \mu^2}$ , и каждому треугольнику соответствует независимый импульс  $\vec{k}$  (см. рис. 1)<sup>/4/</sup>, по которому происходит интегрирование.

Вклад от каждой диаграммы в  $a$  - представление (с точностью до постоянных множителей) можно написать в виде следующего интеграла<sup>/4/</sup>

$$F_n(\vec{q}_1) = \int \frac{\prod_{i=1}^{n-1} d\alpha_i \prod_{j=0}^{n-1} d\beta_{j,j+1}}{D^{3/2}(\alpha, \beta)} \exp \left[ \frac{R(\alpha, \beta, \vec{q}_1, \vec{q}_2)}{D(\alpha, \beta)} - \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) E + \left( \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j,j+1} \right) \mu^2 \right], \quad (1.4)$$

где для удобства введены обозначения  $\vec{q}_1 = \frac{\vec{p}_1 - \vec{k}_1}{2}$  и  $\vec{q}_2 = \frac{\vec{p}_1 + \vec{k}_1}{2}$ .

В (1.4)  $D(\alpha, \beta)$  определитель матрицы

$$d = \begin{pmatrix} \beta_{01} + \alpha_1 + \beta_{12} & -\beta_{12} & 0 & \dots \\ -\beta_{12} & \beta_{12} + \alpha_2 + \beta_{23} & -\beta_{23} & \dots \\ 0 & -\beta_{23} & \beta_{23} + \alpha_3 + \beta_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

а  $R(\alpha, \beta, \vec{q}_1, \vec{q}_2)$  - окаймленный определитель определителя  $D(\alpha, \beta)$  и имеет вид:

$$R(\alpha, \beta, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = \begin{vmatrix} 0 & B_1 \\ B_1 & d \end{vmatrix};$$

где  $B_1 = -\beta_{01} q_1$ ;  $B_{n-1} = -\beta_{n-1, n} q_2$ ;  $B_i = 0$   $i = 2, 3, \dots, n-2$ .

Легко проверить, что<sup>/4/</sup>

$$\prod_k \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (k_i - E) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j,j+1} (k_j^2 + \mu^2) \right] = \frac{R(\alpha, \beta, \vec{q}_1, \vec{q}_2)}{D(\alpha, \beta)} \quad (1.6)$$

$$-\left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) E + \left( \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j,j+1} \right) \mu^2 = A_1(\alpha, \beta) q_1^2 + A_2(\alpha, \beta) q_2^2 + A_3(\alpha, \beta) (q_1 - q_2)^2 -$$

$$-\left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) E + \left( \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j,j+1} \right) \mu^2 = Q(\alpha, \beta, \vec{q}_1, \vec{q}_2, E, \mu^2).$$

Здесь вектора  $\vec{q}_1, \vec{k}_1, \vec{k}_2$  удовлетворяют закону сохранения в каждой вершине. Минимализация происходит по независимым импульсам, которые остаются после интегрирования по  $\delta$  - функциям.

$$A_1(\alpha, \beta) = \beta_{01} + \frac{1}{D(\alpha, \beta)} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \beta_{01} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{01} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \beta_{n-1,n} & & & & & & \end{vmatrix} d, \quad (1.7a)$$

$$A_2(a, \beta) = -\beta_{n-1,n} + \frac{1}{D(a, \beta)} \begin{vmatrix} 0, 0 \dots \beta_{n-1,n} \\ \beta_{01} \\ 0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad (1.7\text{б})$$

$$A_3(a, \beta) = -\frac{1}{D(a, \beta)} \begin{vmatrix} 0, 0 \dots \beta_{n-1,n} \\ \beta \\ \beta_{01} \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (1.7\text{в})$$

В Приложении (1) доказываются следующие важные неравенства:<sup>х)</sup>

$$D(a, \beta) > 0; \quad A_1(a, \beta) > 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Сформулируем основную теорему, доказать которую очень просто методом мажорирования диаграмм.

**Теорема:** область аналитичности любой диаграммы порядка  $2n > 4$  ( $n$  - число "тонких" линий в диаграмме) включает в себя область аналитичности диаграммы четвертого порядка или совпадает с ней, если только  $E = z - \frac{(\vec{q}_1 + \vec{k}_1)^2}{2} \leq 0$ .

Применяя процедуру, указанную в Приложении 2 для диаграммы рис. 1, приходим к доказательству теоремы. Таким образом, для нахождения минимальной вещественной области достаточно ограничиться изучением аналитических свойств диаграммы четвертого порядка.

2. Аналитические свойства треугольной диаграммы в теории поля хорошо известны<sup>5,6/</sup>. В нашем случае уравнения для особенностей имеют такой же вид, как для релятивистских диаграмм Фейнмана, только "внутренние" импульсы чисто мнимые. Опуская расчеты, приведем полученные результаты: область, в которой  $Q > 0$  определяется неравенствами:

$$\zeta_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \zeta_1 + \zeta_2 < 0, \quad \zeta_2 > \zeta_1, \quad \zeta_3 = \sqrt{(1 - \zeta_1^2)(1 - \zeta_2^2)}, \quad (2.1)$$

где  $\zeta_i$  задаются соотношением

$$\zeta_i = \frac{m^2 + \mu^2 + z_i}{2m\mu}$$

<sup>х)</sup> Аналогичные неравенства для диаграмм вершинной части в теории поля были доказаны Наканиши<sup>7/</sup>.

$$\zeta_2 = \frac{m^2 + \mu^2 + z_2}{2m\mu}, \quad \zeta_3 = \frac{2\mu^2 + z_3}{2\mu^2}$$

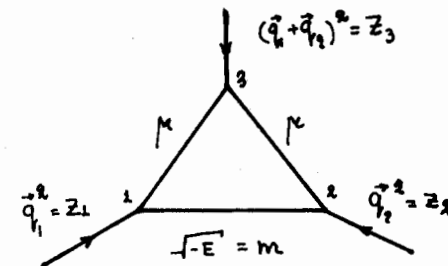


Рис. 2.

Для получения интегрального представления диаграммы любого конечного порядка мы проведем исследование, аналогичное работам<sup>3,6/</sup>. Обозначим через  $\mathcal{G}_0$  область (2.1). Следуя Бу<sup>7/</sup>, можно найти некоторую комплексную область аналитичности  $\mathcal{G}$  по заданной вещественной области аналитичности  $\mathcal{G}_0$ . Действительно, пусть  $\mathcal{G}$  обозначает множество комплексных точек  $z_i = x_i + iy_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), для которых существует такое вещественное  $\lambda$ , что  $x_i + \lambda y_i \in \mathcal{G}_0$ . Тогда из линейности  $Q$  относительно  $z_i$  следует, что  $Q \neq 0$ , чем и доказываются наше утверждение. Область  $\mathcal{G}$  является естественной областью голоморфности в пространстве  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )<sup>8,7/</sup>.

Заметим, что область аналитичности амплитуды на массовой поверхности, т.е. когда  $z_1 = z_2 = -m^2$ , определяется неравенствами  $m^2 > 0$ ;  $z_3 > -4\mu^2$ .

В дальнейшем удобно переписать (1.4) в несколько ином (но идентичном) виде:

$$F_n(z_i) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i - \sum_{j=0}^{n-1} \beta'_{i,j+1}) \prod_{i=1}^{n-1} d\alpha'_i \prod_{j=0}^{n-1} d\beta'_{i,j+1}}{D^{3/2}(\alpha', \beta') [Q(\alpha', \beta', z_i, m^2, \mu^2) - i0]^{n+1}}, \quad (2.2)$$

где  $(n+1)$  - число вершин в диаграмме.

Целесообразно отдельно рассмотреть диаграммы, для которых  $n$  - четное, и отдельно - диаграммы, для которых  $n$  - нечетное.

Обозначим соответствующие функции через  $F_{2k}(z_1)$  и  $F_{2k+1}(z_1)$ . Пусть

$$\eta_i = \frac{A_i(\alpha', \beta')}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')} ; i = 1, 2, 3 ; \quad \rho = \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i) m^2 + (\sum_{i=0}^{n-1} \beta'_{i,i+1}) \mu^2}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')}$$

Подставляя в (2.2) тождество

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 \delta(\eta_1 - \frac{A_1(\alpha', \beta')}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')}) \int_0^1 d\eta_2 \delta(\eta_2 - \frac{A_2(\alpha', \beta')}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')}) \int_0^1 d\eta_3 \delta(\eta_3 - \frac{A_3(\alpha', \beta')}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')}) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \delta(\rho - \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i) m^2 + (\sum_{i=0}^{n-1} \beta'_{i,i+1}) \mu^2}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')})$$

и интегрируя по  $\rho$   $k$  раз по частям, получим:

$$F_{2k}(z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \int_{\rho_0(\eta_1)}^{\infty} d\rho \frac{f_{2k}(\eta_1, \rho) \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \eta_i)}{[z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3 + \rho - i0]^{k+1/2}} \quad (2.3a)$$

$$F_{2k+1}(z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \int_{\rho_0(\eta_1)}^{\infty} d\rho \frac{f_{2k+1}(\eta_1, \rho) \delta(1 - \sum_{i=1}^3 \eta_i)}{[z_1 \eta_1 + z_2 \eta_2 + z_3 \eta_3 + \rho - i0]^{k+1}} \quad (2.3b)$$

Здесь

$$\rho_0(\eta_1) = \max_{\zeta_i \in \mathcal{G}_0} [-\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2 - \eta_3 z_3] = \quad (2.4)$$

$$= -\eta_1 (m^2 + \mu^2) + \eta_2 (m^2 + \mu^2) + 2\mu^2 \eta_3 - 2 \min_{\zeta_i \in \mathcal{G}_0} (m\mu\eta_1 \zeta_1 + m\mu\eta_2 \zeta_2 + \mu^2 \zeta_3 \eta_3) .$$

Минимум по  $\zeta_i$  в (2.4) достигается в области  $\mathcal{G}_0$ , где  $\zeta_i$  можно задавать в виде  $\zeta_i = \cos \theta$ , и дает следующие значения для  $\rho_0(\eta)$  /8/:

$$\rho_0(\eta_1) = \Phi(\eta_1) [\mu^2 (\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}) + \frac{m^2}{\eta_3}] , \text{ если } \mu |\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}| < \frac{m}{\eta_3} < (\frac{\mu}{\eta_1} + \frac{\mu}{\eta_2}) ;$$

$$\rho_0(\eta_1) = -\eta_1 (m + \mu)^2 + \eta_2 (m - \mu)^2 + 4\mu^2 \eta_3 , \text{ если } \frac{\mu}{\eta_2} > \frac{\mu}{\eta_1} + \frac{m}{\eta_3} ;$$

$$\rho_0(\eta_1) = -\eta_1 (m + \mu)^2 + \eta_2 (m + \mu)^2 , \text{ если } \frac{m}{\eta_3} > \mu (\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}) ;$$

$$\rho_0(\eta_1) = -\eta_1 (m - \mu)^2 + \eta_2 (m + \mu)^2 + 4\mu^2 \eta_3 ; \text{ если } \frac{\mu}{\eta_1} > \frac{\mu}{\eta_2} + \frac{m}{\eta_3} ;$$

а функция

$$\Phi(\eta_1) = -\eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 + \eta_1 \eta_3 .$$

3. В частном случае, когда можно фиксировать в области  $\mathcal{G}_0$  какую-нибудь переменную, скажем  $z_3$ , целесообразно пользоваться двумерным представлением, которое получается из (2.2), если учесть тождество

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 \delta(1 - \eta_1 - \eta_2) \delta(\eta_2 - \frac{A_2(\alpha', \beta')}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')}) \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \delta(\rho - \frac{A_3 z_3 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i m^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \beta'_{i,i+1} \mu^2}{\sum_{i=1}^n A_i(\alpha', \beta')})$$

и проинтегрируем по  $\rho$   $k$  раз по частям:

$$F_{2k}(z) = \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 \delta(1 - \eta_1 - \eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \frac{\phi_{2k}(\eta_1, \rho)}{[\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \rho - i0]^{k+1/2}}$$

$$F_{(2k+1)}(z) = \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 \delta(1 - \eta_1 - \eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \frac{\phi_{2k+1}(\eta_1, \rho)}{[\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \rho - i0]^{k+1}}$$

Здесь

$$\eta_1 = \frac{A_1(\alpha', \beta')}{A_1(\alpha', \beta') + A_2(\alpha', \beta')} \quad \text{и} \quad \eta_2 = \frac{A_2(\alpha', \beta')}{A_1(\alpha', \beta') + A_2(\alpha', \beta')}$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе и стимулирующие обсуждения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для доказательства положительности  $D(\alpha, \beta)$  воспользуемся леммой Адамара /8/. Квадратичная матрица  $A$  с вещественными коэффициентами имеет положительный детерминант, если удовлетворяются условия:

$$a_{ii} > 0 ; \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

или

$$a_{ii} > 0 ; \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| ; \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Заметим, что эти условия достаточны, но не необходимы.

Для матрицы  $d$  условия (1.1) выполняются, что доказывает неравенство  $D(\alpha, \beta) > 0$ .

В выражении для  $A_3(\alpha, \beta)$ ,  $D_{1,n-1}$  есть минор, соответствующий элементу  $(1, n-1)$  и равен  $(-1)^n \beta_{1,2} \beta_{2,3} \dots \beta_{n-2,n-1}$ , поэтому  $A_3(\alpha, \beta) > 0$ .

Доказательства остальных неравенств из (1.8) также просты, если воспользуемся разложением определителя  $D(\alpha, \beta)$ , для которого применимо рекуррентное соотношение Якоби:

$$D(\alpha\beta) = (\beta_{0,1} + \alpha_1 + \beta_{1,2}) D_{11}(\alpha, \beta) - \beta_{1,2}^2 D_{22}(\alpha, \beta), \quad (1.2)$$

что дает

$$D(\alpha\beta) = (\beta_{0,1} + \alpha_1) D_{11} + \beta_{1,2} \alpha D_{22} + \beta_{1,2} \beta_{2,3} \alpha^2 D_{33} +$$

$$+ \beta_{1,2} \dots \beta_{n-3,n-2} D_{n-2,n-2} + \beta_{1,2} \beta_{2,3} \dots \beta_{n-2,n-1} (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1,n}). \quad (1.3)$$

Здесь  $D_{11}(\alpha, \beta)$  - минор, соответствующий элементу (1.1) в детерминанте  $D(\alpha, \beta)$ ,  $D_{22}(\alpha, \beta)$  - минор, соответствующий первому элементу в  $D_{11}(\alpha\beta)$ ,  $D_{33}(\alpha, \beta)$  - минор первого элемента в  $D_{22}(\alpha, \beta)$  и т.д. В силу леммы Адамара все  $D_{11}(\alpha\beta)$  положительны. Подставляя разложения (1.3) в (1.7а), приходим к неравенству  $A_1(\alpha, \beta) > 0$ . Аналогично доказывается положительность  $A_2(\alpha, \beta)$ . В этом случае удобно воспользоваться для  $D(\alpha\beta)$  разложением типа (1.2), начиная от последнего элемента, т.е. элемента, на котором пересекаются последняя строка с последним столбцом.

Заметим также, что

$$\frac{\partial A_j(\alpha, \beta)}{\partial \beta_{j,j+1}} \geq 0, \quad j=1, \dots, n-1.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В силу неравенств (1.8) и положительности  $m^2 (= -E)$  выражение (1.6) для  $Q$  может обратиться в нуль только в том случае, когда хотя бы одно  $z_i$  - отрицательное число. Если  $z_i > 0 (i=1, 2, 3)$ , то функция  $Q$  - положительна.

Пусть для функций  $Q_n$  и  $Q_{n'}$ , соответствующих диаграммам порядка  $x$ )  $n$  и  $n'$  (где  $n < n'$ ), имеется неравенство

$$Q_{n'}(z_1 m^2, \mu^2, \alpha\beta) > Q_n(z_1 m^2, \mu^2, \alpha'\beta'), \quad (II.1)$$

х) Порядок здесь означает число вершин в диаграмме.

тогда будем говорить, что диаграмма  $n$ -го порядка мажорирует диаграмму  $n'$ -го порядка или другими словами: область аналитичности  $\mathcal{G}_0'$  диаграммы  $n'$ -го порядка содержит в себе область аналитичности  $\mathcal{G}_n$  диаграммы  $n$ -го порядка, или совпадает с ней, т.е.

$$\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}_{n'}. \quad (II.2)$$

Пусть диаграмма с  $n'$ -го порядка содержит фигуру, изображенную на рис. 3а, а диаграмма  $n$ -го порядка получается из нее заменой фигуры 3а фигурой 3б (рис. 3).

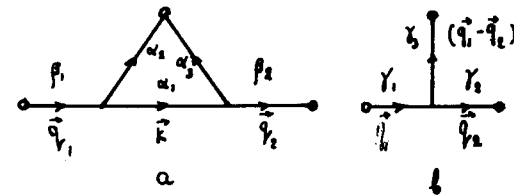


Рис. 3.

Выражение (1.6) показывает, что для установления неравенства (II.1) при такой замене достаточно показать, что минимум по  $k$  от  $f(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1)$  больше, чем  $\phi(y, \vec{q}_1)$ , при подходящем выборе  $y$ , где

$$f(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1) = \beta_1 (q_1^2 + m^2) + \beta_2 (q_2^2 + m^2) + \alpha_1 (k^2 + m^2) + \alpha_2 [(q_1 - k)^2 + \mu^2] + \alpha_3 [(q_2 - k)^2 + \mu^2],$$

$$\phi(y, \vec{q}_1) = \gamma_1 [q_1^2 + m^2] + \gamma_2 [q_2^2 + m^2] + \gamma_3 [(q_1 - q_2)^2 + \mu^2].$$

Действительно,

$$\min_k f(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1) = (\beta_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}) (q_1^2 + m^2) + (\beta_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}) (q_2^2 + m^2) + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i} [(q_1 - q_2)^2 + \mu^2] + \frac{\alpha_1^2}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i} m^2 + \frac{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3 (\sum_{i=1}^3 \alpha_i)}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i} \mu^2$$

и, если определим

$$\gamma_1 = \beta_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}; \quad \gamma_2 = \beta_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}; \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i},$$

то

$$\min_k f(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1) \geq \phi(\gamma, \vec{q}_1). \quad (\text{П.3})$$

В том случае, когда один из двух  $\vec{q}_1$  (скажем,  $\vec{q}_1$ ) соответствует внешней линии, то неравенства (П.3) выполняются, если только  $\vec{q}_1^2 \geq -(m + \mu)^2$ .

Действительно, допуская в  $f(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1)$  и  $\phi(\gamma, \vec{q}_1)$   $\beta_1 = 0$  и  $\gamma_1 = 0$  соответственно и сравнивая  $\min_k f(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1)$  с  $\phi(\gamma, \vec{q}_1)_{\gamma_1=0}$ , где

$$\min_k f_{\beta_1=0} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i} [q_1^2 + (m + \mu)^2] + (\beta_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sum \alpha_i})(q_2^2 + m^2) + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\sum \alpha_i} [(q_1 - q_2)^2 + \mu^2] + \alpha_3 \mu^2 + (\alpha_1 m - \alpha_2 \mu)^2 \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \beta_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}; \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i},$$

приходим к неравенству

$$\min_k f_{\beta_1=0}(\alpha, \beta, k, \vec{q}_1) > \phi_{\gamma_1=0}(\gamma, \vec{q}_1),$$

если

$$\vec{q}_1^2 \geq -(m + \mu)^2.$$

### Л и т е р а т у р а

1. Л.Д. Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).
2. И.Ш. Вачакидзе, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе, Г.А. Чилашвили, В.П. Шелест. Препринт ОИЯИ, Р-1662, Дубна, 1964; L. Rosenberg. Phys. Rev., 131, 874 (1963).
3. N. Nakanishi, Supl. Prog. Theor. Phys., No. 18 (1961).
4. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ, Д-578, Дубна, 1960; ЖЭТФ, 42, 1285 (1962); О.И. Завьялов. ДАН СССР, 151, №3 (1963).
5. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37, 62 (1959).
6. Лю И-чень, И.Т. Тодоров. ДАН СССР, 148, №4 (1963).
7. T.T. Wu, Phys. Rev., 123, 678 (1961).
8. М. Пароди. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. ИЛ, Москва, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 декабря 1964 г.