15/I-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1916

Нгуен Ван Хьеу

СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Ann. of Phys., 1965, v33, n 3
стр. 428-442.

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1964

P-1916

Нгуен Ван Хьеу

СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Направлено в Annals of Physics

1. Введение

В последнее время в физике элементарных частиц большое внимание уделялось исследованию экспериментальных следствий общих принципов релятивистской локальной квантовой теории поля [1]. Основными из этих принципов являются [2–4]:

I . Инвариантность относительно неоднородной группы Лоренца,

II . Условие спектральности,

III . Принцип микропричинности,

IV . Условие унитарности S-матрицы.

Наряду с этими физическими принципами имеется также некоторый постулат математического характера.

V. Условие умеренности роста: требуется, чтобы запаздывающие и опережающие амплитуды в x-представлении были обобщенными функциями умеренного роста, т.е. линейными непрерывными функционалами в пространстве S бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций [5–8]. Как известно, обобщенные функции умеренного роста имеют общий вид:

$$F(x) = D^k f(x), \qquad D = \frac{d}{dx}, \tag{1}$$

где $f(x)$ – непрерывная функция степенного роста, k – некоторое целое число; любая обобщенная функция умеренного роста, сосредоточенная в точке x_0, представлена в виде:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{k} c_n D^n \delta(x - x_0) \tag{2}$$

с некоторым целым числом k. Отсюда, в частности, следует, что преобразования Фурье запаздывающих и опережающих амплитуд полиномиально ограничены во всей их области голоморфности [9].

Последний постулат является достаточно естественным с физической точки зрения, так как отражает симметрию между координатным и импульсным пространствами и в перенормируемых теориях выполняется в любом порядке теории возмущений. Без него нельзя получить даже обычные дисперсионные соотношения с конечным числом вычитаний. Несмотря на все эти основания, условие умеренности роста V носит некоторый математический характер, не имеющий ясного физического смысла. Так как это условие и связанная с ним полиномиальная ограниченность оказываются существенными при доказательстве асимптотических соотношений между амплитудами перекрестных процессов, а также при установлении верхних ограничений на рост сечений, то естественно возникает вопрос: возможно ли получить все эти результаты на основе только четырех первых физических принципов I–IV ? Ответ на этот вопрос будет найден, если удастся найти более широкий класс таких обобщенных функций, пригодных для формулировки локальной теории поля, что преобразования Фурье запаздывающих и опережающих обобщенных функций этого класса могут расти, например, быстрее любого полинома. Этот класс содержит, грубо говоря, функции вида

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n \delta(x-x_0) \tag{3}$$

или

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n f(x), \tag{4}$$

где c_n – некоторая бесконечная последовательность, а $f(x)$ – непрерывная функция степенного роста. Функции вида (3) были рассмотрены в работе Меймана /10/. Однако в работе /10/ предполагается, что основные функции ограничены и могут стремиться к ненулевым пределам при $x \to \pm\infty$, что является весьма жестким ограничением на рост обобщенных функций на бесконечности. В случае четырехмерного пространства-времени это условие не выполняется даже для свободных полей. Кроме того, в этом случае не существуют преобразования Фурье основных функций.

В настоящей работе мы изучаем класс обобщенных функций, включающий в себя как частные случаи обобщенные функции в пространстве S , а также и функции вида (3) и (4) с некоторой последовательностью c_n . Ради простоты мы будем рассматривать только одномерный случай. Это упрощение оправдывается тем, что при стремящихся к бесконечности энергиях истинные амплитуды рассеяния совпадают с асимптотическими амплитудами, являющимися преобразованиями Фурье обобщенных функций, зависящих от одной переменной /10/. Более того, из изложенных ниже рассуждений видно, что обобщение на реальный случай функций многих переменных не представляет принципиальных трудностей.

В § 2 мы покажем, что обобщенные функции вида (3) и (4) имеют смысл только тогда, когда основные функции обладают определенными аналитическими свойствами. Докажем затем, что в силу локальности полей в локальной теории последовательность c_n должна удовлетворять условию (19). Это условие сыграет важную роль при изучении асимптотического поведения амплитуд рассеяния. В § 3 дается определение пространства основных функций как счетно-нормированного пространства. § 4 посвящается установлению общего вида обобщенных функций в пространстве T . Так как пространство T является подпространством пространства S , то новый класс обобщенных функций на T содержит обобщенные функции умеренного роста как частный случай. В § 5 изучается асимптотическое поведение амплитуд рассеяния. Из установленного в § 4 общего вида обобщенных функций в локальной теории поля следует, что амплитуды рассеяния как функции от энергии растут в их области аналитичности медленнее любой линейной экспоненты. В § 5 также обсуждаются следствия последнего утверждения.

§ 2. Некоторые свойства основных функций

Для того, чтобы существовали обобщенные функции вида (3) или (4), основные функции должны обладать определенными аналитическими свойствами. Действительно, если действовать на бесконечно дифференцируемую в x_0 основную функцию $\phi(x)$, то функционал (3) дает значение

$$\int \Big[\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n \delta(x-x_0)\Big] \phi(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x_0), \quad b_n = (-1)^n c_n , \tag{5}$$

а функционал (4) дает

$$\int \Big[\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n f(x)\Big] \phi(x)\, dx = \int f(x) \Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x)\Big] \cdot dx . \tag{6}$$

Для того чтобы обобщенные функции (3) и (4) имели смысл, ряд в правых частях (5) и (6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x) \tag{7}$$

должен сходиться. Допустим, что коэффициенты ряда (7) равны

$$b_n = \frac{\delta^n}{n!} .$$

Тогда сходимость этого ряда в точке x_0 означает, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-x_0)^n}{n!} D^n \phi(x_0) \tag{8}$$

абсолютно сходится в круге $|z-x_0|<\delta$ и тем самым определяет голоморфную в этом круге функцию, совпадающую с $\phi(x)$ в точке x_0, причем производная любого порядка этой голоморфной функции в точке x_0 совпадает с соответствующей производной $\phi(x)$. В общем случае сходимость ряда (7) в точке x_0 означает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n D^n \phi(x_0)|} = \frac{1}{1+\epsilon}, \quad \epsilon > 0 . \tag{9}$$

Если $\epsilon>0$, то ряд (7) абсолютно сходится (признак Коши), а если $\epsilon=0$, то этот ряд может сходиться или расходиться. Поэтому, если последовательность $\sqrt[n]{n!\,|b_n|}$ имеет предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|b_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} = \delta \ , \qquad (10)$$

то основные функции ϕ должны удовлетворять условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{D^n\phi(x_0)}{n}\right|} = \frac{1}{\delta(1+\epsilon)} \ , \qquad (11)$$

т.е. ряд (8) имеет радиус сходимости $R = \delta_\epsilon = \delta(1+\epsilon)$.

Таким образом, ряд (7) сходится в каждой точке некоторого интервала $a < x_0 < b$, если функция $\phi(x)$ в этом интервале совпадает со значением некоторой функции, голоморфной в некоторой области, содержащей все круги с центрами на этом интервале и радиусом, равным δ_ϵ. Объединение всех открытых кругов с центрами на полуоси $x \geq 0$ или $x \leq 0$ и радиусом δ_ϵ обозначим через $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$ и $\Omega^-_{\delta_\epsilon}$, соответственно. Пусть обобщенная функция (4) имеет носителем полуось $x \geq 0$ или $x \leq 0$, например, а носитель обобщенной функции (3) совпадает с любой точкой полуоси $x \geq 0$ или $x \leq 0$. Тогда эти обобщенные функции имеют смысл, т.е. ряд (7) сходится при всех соответствующих x, если и только если существует голоморфная в $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$ или $\Omega^-_{\delta_\epsilon}$ функция с некоторой $\epsilon \geq 0$, совпадающая с $\phi(x)$ на соответствующей полуоси.

Теперь рассмотрим следствия, вытекающие из локальных свойств обобщенных функций в теории поля. Мы должны выбрать пространство основных функций так, чтобы оно было пригодным для формулировки принципа микропричинности. В рассматриваемом одномерном случае принцип микропричинности приводит к тому, что амплитуды рассеяния $T(p)$ являются преобразованиями Фурье запаздывающих $F^{ret}(x)$ или опережающих $F^{adv}(x)$ обобщенных функций с носителем на полуоси $x \geq 0$ или $x \leq 0$, соответственно. Это означает, что если $\phi(x)$ –основная функция с носителем на полуоси $x<0$ или $x>0$, соответственно, то значение функционала F^{ret} или F^{adv} на этом элементе ϕ пространства основных функций равно нулю:

$$(F^{ret}, \phi) = 0 \qquad \text{если} \qquad \operatorname{supp}\phi = \{x \mid x<0\} \ , \qquad (12)$$

$$(F^{adv}, \phi) = 0 \qquad \text{если} \qquad \operatorname{supp}\phi = \{x \mid x>0\} \ . \qquad (13)$$

Очевидно, что условия (12) и (13) имеют смысл только тогда, когда пространство основных функций содержит функции, не тождественно равные нулю и обращающиеся в нуль на полуоси $x \geq 0$ или $x \leq 0$. Эти функции не могут быть голоморфными в любой окрестности всей вещественной оси. Здесь уместно отметить, что математической литературе известны примеры обобщенных функций в пространстве аналитических основных функций, например, в пространстве Z целых функций экспоненциального типа, быстро убывающих на вещественной оси /5/. Однако, как мы видели, они не пригодны для применения к квантовой теории.

Рассмотрим подробно запаздывающие функции F^{ret} со свойством (12). Так как носителем F^{ret} является полуось $x \geq 0$

$$\operatorname{supp} F^{ret} = \{x \mid x \geq 0\} \ , \qquad (14)$$

то они будут содержать, например, функции вида (3) или (4) с некоторой последовательностью c_n, удовлетворяющей условию (10) или, в общем случае, следующему условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|b_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} = \delta \ , \qquad (15)$$

если все основные функции голоморфны в $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$ (но не обязательно на $\overline{\Omega^+_{\delta_\epsilon}}$) с некоторой $\delta_\epsilon > \delta$. Действительно, тогда ряд (8) имеет радиус сходимости δ_ϵ при всех x_0: а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, b_n (z-x_0)^n \qquad (16)$$

имеет радиус сходимости $1/\delta$, и согласно мультипликационной теореме Адамара /11/ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x_0)(z-x_0)^n \qquad (17)$$

сходится абсолютно при всех $x_0 > 0, |z-x_0| < \frac{\delta_\epsilon}{\delta}$, и в частности при $z - x_0 = 1$. Таким образом, в данном случае ряд (7) сходится абсолютно при всех $x \geq 0$.

Функция $\phi(x)$ в соотношении (12) обращается в нуль при $x \geq 0$. Но если она голоморфна в области $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$, то она равна нулю и при всех отрицательных x, больших $-\delta_\epsilon$, т.е.

$$\operatorname{supp}\phi = \{x \mid x \leq -\delta_\epsilon\} \qquad \text{если} \qquad \operatorname{supp}\phi = \{x \mid x<0\} \ . \qquad (18)$$

Это означает, что если все основные функции голоморфны в $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$ с некоторым $\delta_\epsilon > 0$, то мы ничего не можем сказать о локальных свойствах обобщенных функций F^{ret} в интервале $-\delta_\epsilon < x < 0$. Итак, для того, чтобы условие (14) имело локальный смысл, пространство основных функций должно обладать следующим свойством: при любом положительном числе δ_ϵ, как бы мало оно ни было, существуют основные функции, не голоморфные в окрестности $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$. Иначе говоря, пространство основных функций должно содержать функции, не голоморфные в окрестности $\Omega^+_{\delta_\epsilon}$. Для таких функций ряд (7) может сходиться только тогда, когда предел (15) равен нулю

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|b_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} = 0 \ . \qquad (19)$$

Таким образом, из локального характера микропричинных полей следует, что класс обобщенных функций в квантовой теории поля может содержать функции вида (3) или (4) только в том случае, когда коэффициенты c_n удовлетворяют условию (19). В качестве основных функций мы будем выбирать такие бесконечно дифференцируемые быстро убывающие функции, чтобы ряд (7) сходился равномерно и являлся также бесконечно дифференцируемой функцией. Приступим теперь к точному определению пространства основных функций, линейными функционалами на котором являются обобщенные функции локальной теории поля.

§ 3. Топология в пространстве основных функций

Рассмотрим последовательности $\{b\} = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ удовлетворяющие условию (19). Согласно признаку Коши ряды $\sum_{n=0}^{\infty} n!|b_n|$ сходятся. В дальнейшем мы будем нормировать эти последовательности так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,|b_n| = 1 , \qquad (20)$$

поскольку множитель нормировки не играет никакой роли.

Обозначим через B множество, элементами которого являются последовательности $\{b\} = b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ с указанными свойствами (19) и (20). Пусть задана неубывающая последовательность непрерывных функций

$$1 \le M_0(x) < M_1(x) \le \ldots \le M_k(x) \le \ldots$$

При помощи этой последовательности мы определяем множество $\bar{\Phi}_k$ функций $\phi(x)$ следующим образом: бесконечно дифференцируемая функция $\phi(x)$ считается принадлежащей множеству $\bar{\Phi}_k$, если для этой функции ряд (7) сходится равномерно и дифференцируем до порядка k, и все произведения

$$M_k(x)\, D^i \Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x)\Big],\ i \le k$$

при всех последовательных $\{b\} \in B$ непрерывны и ограничены во всем x-пространстве. Это означает, что для всех $\phi(x) \in \bar{\Phi}_k$ все выражения

$$\|\phi\|_k = \sup_{\substack{i<k\\ \{b\}\in B}} \Big| M_k(x)\, D^i \Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x)\Big]\Big| \qquad (21)$$

конечны. Очевидно, что множество $\bar{\Phi}_k$ является линейным пространством. Величину (21) можно рассматривать как норму в пространстве $\bar{\Phi}_k$. Действительно, если $\|\phi\|_k = 0$, то из определения (21) следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x) = 0$ при всех $\{b\} \in B$ и, в частности, при $\{b\} = \{1, 0, 0, 0\ldots, 0, \ldots\}$, т.е. из $\|\phi\|_k = 0$ следует $\phi \equiv 0$. Остальные аксиомы можно проверить без труда. Мы получаем, таким образом, нормированное пространство $\bar{\Phi}_k$ с нормой, определяемой соотношением (21).

Для того, чтобы доказать полноту пространства $\bar{\Phi}_k$, рассмотрим фундаментальную последовательность $\phi_\nu(x) \in \bar{\Phi}_k$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Из определения нормы следует, что эта последовательность вместе со всеми своими производными равномерно сходится, т.е. все последовательности $D^n \phi_\nu(x)$, $\nu \to \infty$ сходятся равномерно относительно x и n.

В силу теоремы о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности функций предельная функция $\phi_0(x)$ также бесконечно дифференцируема, а производные $D^n \phi_\nu(x)$ сходятся к $D^n \phi_0(x)$. Рассмотрим ряд (7) для $\phi_0(x)$. Можно доказать, что этот ряд равномерно сходится и его сумма является функцией, непрерывно дифференцируемой до порядка k при всех $-\infty < x < +\infty$. Иначе говоря, $\phi_0(x) \in \bar{\Phi}_k$. Более того, норма $\|\phi_0\|_k$ не превышает $\|\phi_\nu\|_k$, $\nu = 1, 2 \ldots$. Рассмотрим теперь последовательность $\psi_\nu = \phi_\nu - \phi_0$. Эта последовательность фундаментальна по норме (21), т.е. для любого ϵ существует такое ν_0, что $\|\psi_\nu - \psi_\mu\| < \epsilon$ при $\nu, \mu > \nu_0$. Так как $\psi_\mu(x)$ стремится к нулю в каждой точке, то в пределе $\mu \to \infty$ мы имеем $\|\psi_\nu\| < \epsilon$, т.е. $\|\psi_\nu\| = \|\phi_\nu - \phi_0\| \to 0$. Тем самым доказана сходимость ϕ_ν к ϕ_0 по норме. Таким образом, всякая фундаментальная последовательность $\phi_\nu \in \bar{\Phi}_k$ сходится по норме к некоторому элементу $\phi_0 \in \bar{\Phi}_k$, и мы имеем:

<u>Лемма 1.</u> Пространство $\bar{\Phi}_k$ полно относительно нормы $\|\phi\|_k$.

Рассмотрим теперь пространство $\Phi = I\{M_k\}$ всех бесконечно дифференцируемых функций, для которых ряд (7) сходится равномерно и является бесконечно дифференцируемой функцией, а все выражения $M_k(x) D^i \big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x)\big]$, $i \le k$ при всех целых $k = 0, 1, 2, \ldots$ и всех $\{b\} \in B$ непрерывны и ограничены во всем пространстве. Обозначим через Φ_k пополнение Φ по норме $\|\phi\|_k$. Оно является подпространством пространства $\bar{\Phi}_k$. Пространство Φ есть пересечение всех пространств Φ_k последовательности

$$\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \ldots \supset \Phi_k \supset \ldots \qquad (22)$$

с неубывающей системой норм $\|\phi\|_0 \le \|\phi\|_1 \le \ldots \le \|\phi\|_k \le$.

Как и в случае пространства $K\{M_k\}$ (см. /5/, стр. 118) можно доказать, что нормы (22) согласованы, и мы имеем:

<u>Лемма 2.</u> Пространство $I\{M_k\} = \Phi = \bigcap_k \Phi_k$ является полным счетно-нормированным пространством.

Теперь мы накладываем на M_k следующее условие (N): для любого k можно найти такое $\ell > k$, что отношение:

$$\frac{M_k(x)}{M_\ell(x)} = m_{k\ell}(x) \qquad (23)$$

стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ и является суммируемой функцией от x. Тогда как и в случае пространства $K\{M_k\}$ /5/, для пространства $I\{M_k\}$ наряду с системой норм (21) можно ввести также другую систему норм, эквивалентную системе (21) и определяемую следующим образом:

$$\|\phi\|'_k = \sup_{\substack{i\le k\\ \{b\}\in B}} \int M_k(x) \Big| D^i \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x)\Big| dx . \qquad (24)$$

Докажем эквивалентность систем норм (21) и (24) в случае, когда $M_k(x)$ удовлетворяют условию $(N)^*$. Для любой заданной последовательности $\{b\} \in B$ мы имеем (см. /5/, стр. 140)

$$\operatorname*{Sup}_{i \le k} \int M_k(x) \left| D^i \sum_n b_n D^n \phi(x) \right| dx \le A_k \operatorname*{Sup}_{x,\, i \le \ell} M_\ell(x) \left| D^i \sum_n b_n D^n \phi(x) \right|, \ \ell > k \tag{25}$$

$$\operatorname*{Sup}_{x,\, i \le k} M_k(x) \left| D^i \sum_n b_n D^n \phi(x) \right| < B_k \operatorname*{Sup}_{i \le k+1} \int M_{k+1}(x) \left| D^i \sum b_n D^n \phi(x) \right| dx. \tag{26}$$

Переходя в неравенствах (25) и (26) к верхним граням для $\{b\} \in B$, мы получим

$$\|\phi\|_k' \le A_k \|\phi\|_\ell, \quad \ell > k, \quad \|\phi\|_k \le B_k \|\phi\|_{k+1}'. \tag{27}$$

Таким образом доказана

<u>Лемма 3.</u> В пространстве $\Phi = I\{M_k\}$ системы норм (21) и (24) эквивалентны, если $M_k(x)$ удовлетворяют условию (N).

Прежде чем приступить к изучению структуры обобщенных функций в рассматриваемом пространстве основных функций, рассмотрим более подробно свойства множества B последовательностей $\{b\}$, удовлетворяющих условиям (19) и (20). Для удобства вместо B рассмотрим множество D, элементами которого являются последовательности $\{d\} = d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, где $d_n = n!\, b_n$, а b_n – члены в последовательностях $\{b\}$. Иначе говоря, $\{d\} \in D$ если

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|d_n|} = 0 \tag{28}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n| = 1. \tag{29}$$

Поскольку ряды (29) сходятся, то D является множеством в нормированном пространстве ℓ^1 последовательностей $\{\xi\} = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с нормой

$$\|\xi\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|. \tag{30}$$

Очевидно, что между элементами множеств B и D существует взаимно однозначное соответствие, т.е. эти множества эквивалентны, и вместо множества B можно рассматривать D.

Покажем прежде всего, что множество D замкнуто. Пусть $\{d^\nu\}$, $\nu = 1,2,3\ldots$ – последовательность элементов D, сходящаяся по норме (30) к некоторому элементу $\{d^0\} \in \ell^1$. Тогда $\{d^0\}$ также удовлетворяет условию (28), т.е. $\{d^0\} \in D$. Действительно, пусть это условие не выполняется, т.е. мы имеем для некоторого

$\rho > 0$ $\overline{\lim} \sqrt[n]{|d_n^0|} > \rho$. Тогда существует такая последовательность $d_{n_i}^0$ и такое число N_1, что $|d_{n_i}^0| > \rho^{n_i}$ при $n_i > N_1$. Так как для (d^ν) выполняется условие (28), то для любого $\eta > 0$, как бы мало оно ни было, существует такое число N_2, что $|d_n^\nu| < \eta^n$ при $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда мы имеем:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |d_n^0 - d_n^\nu| > \rho^N - \frac{\eta^N}{1-\eta} \qquad \text{для всех } \nu \tag{31}$$

С другой стороны, так как $\{d^\nu\}$ стремится к $\{d^0\}$ по норме (30), то для любого $\epsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существует такое число ν_0, что

$$\|d^0 - d^\nu\| = \sum_{n=0}^{\infty} |d_n^0 - d_n^\nu| < \epsilon \qquad \text{при } \nu > \nu_0. \tag{32}$$

Противоречие между (31) и (32) доказывает принадлежность $\{d^0\}$ к D, т.е. множество D замкнуто.

Аналогично из свойств (28) следует компактность множества D. Действительно, в силу этого условия для любого элемента $\{d\} \in D$ и любого $\epsilon > 0$ существует такое N_ϵ, что $|d_n| < (\frac{\epsilon}{2})^n$ при $n > N$, и поэтому мы имеем неравенство

$$\sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} |d_n| < \frac{(\frac{\epsilon}{2})^N}{1 - \epsilon/2} < \epsilon, \tag{33}$$

что является необходимым и достаточным условием компактности ограниченного множества в ℓ^1 (см. /12/, стр. 295).

§ 4. <u>Структура обобщенных функций и их преобразований Фурье</u>

Перейдем теперь к установлению общего вида линейных функционалов в счетно-нормированном пространстве $\Phi = I\{M_k\}$ с эквивалентными системами норм (21) и (24). Для определенности мы будем выбирать систему норм $\|\phi\|_k'$, определяемых формулой (24). Пространство Φ является пересечением всех Φ_k

$$\Phi = \bigcap_k \Phi_k,$$

где Φ_k получается путем пополнения пространства Φ по норме $\|\phi\|_k'$. Поэтому мы найдем сначала общий вид линейных функционалов в Φ_k. Так как Φ_k является подпространством полного нормированного пространства $\bar{\Phi}_k'$ с нормой $\|\phi\|_k'$, а согласно теореме Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов все линейные функционалы в Φ_k продолжимы на все пространство $\bar{\Phi}_k'$, то достаточно установить общий вид линейных функционалов в $\bar{\Phi}_k$.

Напомним, что нормированное пространство $\bar{\Phi}_k$ состоит из таких бесконечно дифференцируемых функций $\phi(x)$, что все соответствующие функции $\phi_{\{b\}}(x)$, определяемые формулой

$$\phi_{\{b\}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n \phi(x), \tag{34}$$

при всех $\{b\} \in B$ непрерывно дифференцируемы до порядка k, и все интегралы

$$\|\phi\|'_k = \sup_{l\le k,\ \{b\}\in B} \int M_k(x)\, |D^l \phi_{\{b\}}(x)|\, dx$$

ограничены. Обозначим через Ψ_k нормированное пространство всех таких функций $\psi(x)$, непрерывно дифференцируемых до порядка k, для которых ограничена величина

$$\|\psi\|'_k = \sup_{l\le k} \int M_k(x)\, |D^l \psi(x)|\, dx . \tag{35}$$

Ее мы будем считать нормой в Ψ_k. Сопоставим каждой функции $\phi(x)\in\bar{\Phi}_k$ совокупность функций

$$\phi_{\{b\}}(x) = \sum_{n>0}^{\infty} b_n D^n\phi(x), \quad \{b\}\in B.$$

Согласно определению $\bar{\Phi}_k$, каждая функция $\phi_{\{b\}}(x)$ принадлежит пространству $\Psi_k^{\{b\}}$. Поэтому совокупность всех $\phi_{\{b\}}$, $\{b\}\in B$ является элементом прямой суммы $\bigcup_{\{b\}\in B}\Psi_k$ несчетного числа пространств $\Psi_k^{\{b\}}$. Из $\phi_{\{b\}}=0$ для всех $\{b\}\in B$ следует, что $\phi(x)\equiv 0$. Мы получим, таким образом, взаимно однозначное отображение

$$\phi(x) \leftrightarrow \{\phi_{\{b\}}(x),\ \{b\}\in B\} \tag{36}$$

пространства $\bar{\Phi}_k$ в $\bigcup_{\{b\}\in B}\Psi_k^{\{b\}}$. Мы определяем норму в $\bigcup_{\{b\}\in B}\Psi_k^{\{b\}}$ как $\sup_{\{b\}\in B}\|\phi_{\{b\}}\|''_k$. Тогда отображение (36) сохраняет норму, и пространство $\bar{\Phi}_k$ можно считать замкнутым подпространством пространства $\bigcup_{\{b\}\in B}\Psi_k^{\{b\}}$.

Как известно, всякий линейный функционал в Ψ_k представим в виде (см. /5/, стр. 142)

$$(f,\psi) = \sum_{l=1}^k \int M_k(x)\,\sigma_l(x)\, D^l\psi(x)\,dx, \tag{37}$$

где $\sigma_l(x)$ – ограниченные измеримые функции от x. Поэтому линейные функционалы в $\bigcup_{\{b\}\in B}\Psi_k^{\{b\}}$ имеют общий вид:

$$(f,\{\phi_{\{b\}}\}) = \sum_{l=1}^k \int dx \int_B \sigma_l[x, d\{b\}]\, M_k(x)\, D^l \phi_{\{b\}}(x). \tag{38}$$

Здесь по отношению к переменной $\{b\}$ $\sigma_l[x,d\{b\}]$ есть абсолютно аддитивные функции множества B, а по отношению к переменной x они являются ограниченными измеримыми функциями от x, и интеграл по множеству B в (38) есть интеграл Лебега-Стильтьеса. Так как согласно теореме Хана-Банаха всякий линейный функционал в $\bar{\Phi}_k$

можно распространить на все пространство $\bigcup_{\{b\}\in B}\Psi_k^{\{b\}}$ с сохранением нормы, то выражение (38) также определяет общий вид линейных функционалов в $\bar{\Phi}_k$.

Обозначим через Φ' и Φ'_k пространства, сопряженные к Φ и Φ_k. Поскольку пространство Φ' есть объединение расширяющейся последовательности

$$\Phi'_1 \subset \Phi'_2 \subset \ldots \subset \Phi'_k \subset \ldots$$

со все более слабыми нормами, то общий вид линейных функционалов из Φ' также задается выражением (38) с некоторым целым числом k

$$(F,\phi) = \sum_{l=1}^k \int dx \int_B \sigma_l[x,d\{b\}]\, M_k(x)\, D^l \phi_{\{b\}}(x) . \tag{39}$$

Теперь мы рассмотрим более подробно структуру обобщенных функций в пространстве $I\{M_k\}$. Мы будем рассматривать частный, но важный случай, когда $M_k(x)$ являются непрерывными функциями степенного роста, например,

$$M_k(x) = (1+|x|)^k .$$

В этом случае пространство $K\{M_k\}$ называется пространством S. Аналогично пространство $I\{M_k\}$ с такими функциями $M_k(x)$ мы обозначим через T. Производя в (39) нужное число интегрированный по частям, мы можем свести это выражение к виду:

$$(F,\phi)_T = \int_B \int dx\, D^k\, \Omega[x,d\{b\}]\,\phi_{\{b\}}(x), \tag{40}$$

где $\Omega[x,\{b\}]$ является непрерывной функцией степенного роста от переменной x и абсолютно аддитивной функцией множества B. Так как для каждого подмножества $B'\subset B$ производные $D^k\Omega[x,B']$ есть обобщенные функции в пространстве S', то (40) можно записать в виде:

$$(F,\phi)_T = \int dx \left[\int_B f(x,d\{b\})\,\phi_{\{b\}}(x)\right]. \tag{41}$$

$$(F,\phi)_T = \int_B \left(f[d\{b\}],\ \phi_{\{b\}}\right)_S , \tag{42}$$

где $f[d\{b\}]$ является функцией множеств B и одновременно линейным функционалом в пространстве S.

Рассмотрим, наконец, преобразования Фурье обобщенных функций в пространстве T. Обозначим через $\tilde{\phi}(p)$, $\tilde{\phi}_{\{b\}}(p)$, $\tilde{F}(p)$ и $\tilde{f}[p,d\{b\}]$ преобразования Фурье функций (основных и обобщенных) $\phi(x)$, $\phi_{\{b\}}(x)$, $F(x)$ и $f(x,d\{b\})$, соответственно. Тогда согласно определению, мы имеем

$$\tilde{\phi}_{\{b\}}(p) = \zeta_{\{b\}}(p)\,\tilde{\phi}(p), \tag{43}$$

где в силу условия (19) функция

$$\zeta_{\{b\}}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-ip)^n\, b_n \tag{44}$$

является целой функцией не выше, чем первого порядка и минимального типа. Подвергая соотношение (42) преобразованию Фурье, мы имеем:

$$\begin{aligned}(\tilde{F},\tilde{\phi})_{\tilde{T}} &= \int_B (\tilde{f}[d\{b\}],\ \tilde{\phi}\{b\})_{\tilde{S}} \\ &= \int_B (\tilde{f}[d\{b\}],\ \zeta_{\{b\}}(p)\,\tilde{\phi})_{\tilde{S}}\ .\end{aligned} \tag{45}$$

Тем самым лемма доказана.

Теорема. Преобразования Фурье обобщенных функций в пространстве T имеют вид:

$$\tilde{F}(p) = \int_B \zeta_{\{b\}}(p)\,\tilde{f}[p, d\{b\}], \tag{46}$$

где $\zeta_{\{b\}}$ – целая функция не выше, чем первого порядка и минимального типа, определяемая формулой (44), а $\tilde{f}[p, B']$ для каждого подмножества $B' \subset B$ является обобщенной функцией в пространстве $\hat{S} = S_p$.

§ 5. Асимптотическое поведение амплитуды рассеяния

Мы построили класс обобщенных функций более широкий, чем класс обобщенных функций умеренного роста, и пригодный для формулировки принципа микроскопически в локальной квантовой теории поля. Мы показали, что в силу локальности полей эти обобщенные функции должны обладать определенной структурой. Они являются линейными функционалами в пространстве T и имеют общий вид, определяемый формулами (42) или (46). Из этого представления вытекают весьма важные следствия.

Как было указано, в рассматриваемом одномерном случае амплитуда рассеяния является преобразованием Фурье, например, некоторой запаздывающей обобщенной функции $F^{ret}(x)$ с носителем на полуоси $x \geq 0$

$$(F^{ret}, \phi)_T = 0 \qquad \text{если} \quad \operatorname{supp}\phi = \{x \mid x < 0\}\ . \tag{47}$$

Как и в случае обобщенных функций умеренного роста, из принципа микропричинности следует, что преобразование Фурье $F^{ret}(p)$ является голоморфным в верхней полуплоскости функций.

Пусть комплексная переменная p стремится к бесконечности по некоторому направлению в верхней полуплоскости. Тогда, в силу условия (19) при достаточно больших $|p|$

$$|\zeta_{\{b\}}(p)| < B(\{b\}) e^{\epsilon|p|} \qquad (48)$$

для любого $\epsilon > 0$, как бы мало оно ни было. Аналогично, из условия (19) следует, что при $p \to \infty$ в верхней полуплоскости

$$|\tilde{F}^{ret}(p)| < C e^{\epsilon|p|}, \qquad (49)$$

т.е. $\tilde{F}^{ret}(p)$ растет медленнее экспоненты. Это заключение также справедливо в реальном случае, когда амплитуда рассеяния является преобразованием Фурье матричного элемента некоторой запаздывающей функции от четырехмерного вектора

$$T(s,t) = \int e^{i\frac{q_1+q_2}{2}x} \langle p_2 | F^{ret}(x) | p_1 \rangle d^4x \; . \qquad (50)$$

Таким образом, амплитуда рассеяния $T(s,t)$ растет при $|s| \to \infty$ медленнее любой линейной экспоненты

$$|T(s,t)| < C e^{\epsilon|s|} \; . \qquad (51)$$

Если амплитуда рассеяния полиномиально ограничена на вещественной оси, то в силу условия (51) и теоремы Фрагмена–Линделёфа [11] она полиномиально ограничена и в комплексной плоскости [13-16] и можно написать дисперсионные соотношения с конечным числом вычитаний. Учитывая перекрестную симметрию амплитуд перекрестных процессов, мы заключаем, что полиномиальная ограниченность сечений является достаточным условием для того, чтобы амплитуды рассеяния удовлетворяли дисперсионным соотношениям с конечным числом вычитаний. В этом случае из аналитических свойств амплитуд рассеяния вытекают асимптотические равенства полных сечений взаимодействия частиц и античастиц [17], асимптотические равенства дифференциальных сечений перекрестных процессов рассеяния и рождения частиц, [13-16,18-22] асимптотические соотношения между поляризационными эффектами [20,23,24]. Сравнение этих соотношений с опытом, таким образом, позволяет проверить основные физические принципы локальной теории поля, и в первую очередь принцип микропричинности.

На основе аналитических свойств амплитуды рассеяния по передаче импульса, условия унитарности и полиномиальной ограниченности по энергии, Фруассарт [25], Гринберг и Лоу [26], Киношита, Лоеффел и Мартэн [27,28] получили верхние ограничения на рост сечений, когда энергия стремится к бесконечности. При помощи метода, использованного в этих работах, можно доказать, что если условие (51) выполняется для всех t в области аналитичности по этой переменной и при $s \to \infty$ вдоль положительной оси, то $T(s,t)$ полиномиально ограничена при всех физических значениях передачи импульса t, что является достаточным условием для того, чтобы амплитуда $T(s,t)$ при физических удостоверяла дисперсионному соотношению с конечным числом вычитаний. Так как условие (51) при значениях t в области аналитичности и $s \to \infty$ действительно имеет место, то существование дисперсионных соотношений при физических значениях является следствием основных физических принципов I – IV теории поля.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, В.С.Владимирову, А.А.Логунову, О.С.Парасюку, А.Н.Тавхелидзе и И.Т.Тодорову за интерес к работе и ценные обсуждения.

Литература

1. А.А.Логунов. Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964, секция III.
2. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков. Введение в теорию квантовых полей, ГИТТЛ, Москва, 1957.
3. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, ГИТТЛ, Москва, 1958.
4. A.S.Wightman and L.Garding. Preprint of the Princeton University, 1964.
5. И.М.Гельфанд и Г.Е. Шилов. Обобщенные функции. Вып. I и II , ГИФМЛ, Москва, 1958.
6. И.М.Гельфанд и Н.Я.Виленкин. Обобшенные функции, Вып. IУ, ГИФМЛ, Москва, 1961.
7. L.Schwartz. Theorie des Distribution, T.1. et II, Hermann, Paris, 1950 et 1951.
8. L.Garding and T.L.Lions. Supp. Nuovo Sim., 14, X, 9 (1959).
9. В.С.Владимиров. Труды математического Института АН СССР им. В.А.Стеклова, том 60, 101 (1961).
10. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 46, 1502 (1964).
11. Е.Титчмарш. Теория функций, ГИТТЛ, Москва, 1951 г.
12. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, IУ, ГИФМЛ, 1959.
13. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т.Тодоров и О.А.Хрусталев. ЖЭТФ, 46, 1079 (1964).
14. A.A.Logunov, Nguyen Van Hieu and E.T.Todorov. Ann. Phys. (in print).
15. Нгуен Ван Хьеу. Препринт ОИЯИ Р-1564, Дубна (1964).
16. А.А.Логунов и Нгуен Ван Хьеу. Лекции, прочитанные на Международной зимней школе, Дубна, 1964.
17. И.Я.Померанчук. ЖЭТФ, 38, 725 (1958).
18. L.Van Hove. Phys. Lett., 5, 252 (1963).
19. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu, I.T.Todorov and O.A.Khrustalev. Phys. Lett. 7, 79, 81 (1963).
20. Nguyen van Hieu. Phys. Lett., 9, 81, 83 (1963).
21. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу и И.Т.Тодоров. Препринт ОИЯИ, Р-1737 (1964).
22. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 46, 1039 (1964).
23. С.М.Биленький, Нгуен Ван Хьеу и Р.М.Рындин. ЖЭТФ, 46, 1098 (1964).
24. И.И.Левинтов. ЖЭТФ, 42, 191 (1962).
25. M.Froissart. Phys. Rev., 123, 1053 (1961).
26. O.W.Greenberg and F.F.Low. Phys. Rev., 124, 2047 (1961).
27. A.Martin. Phys. Rev., 129, 1432 (1963).
28. T.Kinoshita, J.J.Loeffel and A.Martin. Phys. Rev.Lett., 10, 460 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1964 г.