

С 323

Г-751

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-1743



Я. Грабовский , Б.Н. Калинин

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

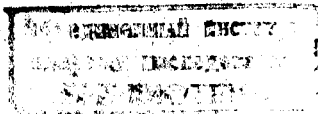
АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ
КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ
ОДНОУКЛОННОЙ ПЕРЕДАЧИ

1964

Я. Грабовский^{x)}, Б. Н. Калинин

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ
КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ
ОДНОНУКЛОННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Направлено в ЖЭТФ



x) Институт ядерной физики, Краков, Польша.

2001/3 48

1. Введение

Теоретический анализ экспериментов по упругому рассеянию /1/, одноуклонной /2/ и мультинуклонной передаче /3/ показал, что для описания столкновения сложных ядер можно с успехом использовать квазиклассическое приближение.

В цитированных работах для получения характеристик указанных процессов (например, дифференциальное сечение) применялись численные методы расчета.

Для выявления некоторых важных особенностей теории с методической точки зрения интересно рассмотреть такой случай, когда окончательный результат допускает аналитическую формулировку.

Для этой цели удобно провести анализ углового распределения продуктов одно- или двухуклонной передачи, при которой, как известно /2/, столкновение имеет квазиупругий характер, что сильно упрощает вычисления /3/.

Полезно напомнить основные соотношения, которые соответствуют данному случаю.

Дифференциальное сечение реакции передачи определяется формулой:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |T_{if}|^2 = \left| \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_{\ell}} e^{-i\alpha \ell} P_{\ell}(\cos\theta) \right|^2, \quad (1)$$

где T_{if} - амплитуда передачи, ℓ_0 - значение углового момента относительного движения, соответствующее полному поглощению, $K^{\min}(\ell)$ - классическая точка поворота, а параметр α характеризует поведение матричного элемента перехода в зависимости от расстояния между сталкивающимися ядрами. Действительная часть квазиклассических фаз δ_{ℓ} связана с функцией отклонения $\theta(\ell)$ соотношением

$$\text{Re} \frac{d\delta_{\ell}}{d\ell} = \frac{1}{2} \theta(\ell), \quad (2)$$

причем

$$\theta(\ell) = \pi - 2s \int_{R^{\min}}^{\infty} \frac{dR}{R^2} [K^2 - U_{\text{эфф}}(R)]^{1/2}, \quad (3)$$

где $s = \ell + \frac{1}{2}x$, $K^2 = 2\mu E^2$,

E - энергия столкновения, $U_{\text{эфф}} = 2\mu V_{\text{эфф}}(R)/h^2$, $V_{\text{эфф}}(R)$ - эффективный потенциал взаимодействия ядер, являющийся суммой кулоновского, ядерного и центробежного потенциалов.

х) Далее для обозначения углового момента будут применяться как ℓ , так и s .

Мнимая часть фазы δ_l может быть записана в виде:

$$\text{Im } 2\delta_l = \begin{cases} -1,4 \ln \frac{l-l_0}{l_r-l_0}; & l_0 \leq l \leq l_r; \\ 0 & l > l_r; \end{cases} \quad (4)$$

l_r - значение l , при котором $\theta(l)$ достигает максимума: $\theta(l_r) = \theta_r = \max \theta(l)$.

Обычно функция $\theta(l)$ с хорошей точностью описывается логарифмической параболой:

$$\theta(l) = \theta_r - \rho \left[\ln \frac{l-l_0}{l_r-l_0} \right]^2, \quad (5)$$

и, следовательно, для действительной части фазы нетрудно получить формулу:

$$\text{Re } 2\delta_l = (l-l_0) \left\{ \theta_r - \rho \left[\ln \frac{l-l_0}{l_r-l_0} - 1 \right] \right\}. \quad (6)$$

Параметры l_0 , l_r , ρ и θ_r легко вычислить, если задан потенциал взаимодействия.

Известно, что ядерная часть взаимодействия хорошо описывается потенциалом Саксона-Вуда:

$$V_n(R) = V_0 \left[1 + \exp \left(\frac{R-R_0}{a} \right) \right]^{-1} \quad (7)$$

с параметрами: $V_0 = 40$ Мэв, $a = 0,5f$,
 $R_0 = 1,27(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) f$

(A_1 и A_2 - массовые числа ядер).

Таким образом, зависимость V эфф от R очень сложная. Поэтому обычно в расчетах применяются численные методы.

2. Аппроксимация ядерного потенциала и вычисление функций

$$R^{\min}(l) \text{ и } \theta(l)$$

Поскольку при однонуклонной передаче подавляющий вклад дают парциальные волны с $l \geq l_0$, и, кроме того, численные расчеты показывают, что $R(l_0) \geq R_0$, то область значений R , для которой учет ядерных сил важен, расположена справа от R_0 , т.е. $R \geq R_0$.

Можно воспользоваться этим обстоятельством и аппроксимировать "хвост" ядерного потенциала такой функцией, которая допускала бы вычисление необходимых интегралов в аналитическом виде.

Для аппроксимации используем следующую функцию:

$$V_n(R) = \begin{cases} -\frac{V_0 R_0^2}{2\Delta^2} \frac{1}{R^2} (R_0 + \Delta - R)^2; & R_0 \leq R \leq R_0 + \Delta; \\ 0 & R > R_0 + \Delta. \end{cases} \quad (8)$$

Параметр Δ в нашем приближении играет роль параметра диффузности a (см.(7)). Значению $a = 0,5f$ соответствует $\Delta = 2,2f$.

На рис. 1 представлена зависимость потенциала V_n от R : сплошная кривая - потенциал Саксона-Вуда, штрихованная - аппроксимация этого потенциала кривой (8).

Использованы значения параметров:

$$V_0 = 40 \text{ Мэв}, \quad \Delta = 2,2f, \quad R_0 = 10,8f.$$

Здесь и в дальнейшем мы рассматриваем конкретный случай столкновения ядер:

$$\text{Ne}^{20} + \text{Au}^{197}; \quad E = 127 \text{ Мэв}. \quad (9)$$

Видим, что аппроксимация (8) является хорошей.

Используя выражение (8), для $R^{\min}(l)$ и $\theta(l)$ получаем следующие формулы:

$$R^{\min}(l) = \begin{cases} \frac{1}{k} [\eta + (\eta^2 + s^2)^{1/2}], & s \geq s_k, \\ \frac{1}{kp} [q + D^{1/2}], & s_k \geq s > s_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\theta(l) = \begin{cases} 2 \arctg(\eta/s), & s \geq s_k, \\ \pi - 2 \left\{ \frac{2s}{(t^2 - s^2)^{1/2}} \arctg \left[\frac{\rho'(\eta - D^{1/2}) + s^2}{\rho'(\eta + D^{1/2}) + s^2} \right]^{1/2} + \right. \end{cases} \quad (11)$$

$$\left. + \arcsin \frac{s^2 + \eta\rho'}{\rho'(\eta^2 + s^2)^{1/2}} - \arctg(\eta/s) \right\}, \quad s_k \geq s > s_1;$$

где

$$\rho' = k(R_0 + \Delta); \quad D = q^2 - p(l^2 - s^2); \quad \eta = Z_1 Z_2 e^2 k / 2E;$$

$$p = 1 + V_0 R_0^2 / 2E\Delta^2; \quad q = \eta + \rho'(p-1); \quad t^2 = (p-1)\rho'^2;$$

$$s_k = (\rho'^2 - 2\eta\rho')^{1/2}; \quad s_1 = p^{-1/2} (pt^2 - q^2)^{1/2} =$$

$$= p^{-1/2} [(p-1)s_k^2 - \eta^2];$$

s_k - определяется равенством $R^{\min}(s_k - 1/2) = R_0 + \Delta$, s_1 - значение углового момента, при котором функция θ проходит через нуль и устремляется к $-\infty$. Очевидно, что l_0 есть целое ближайшее к величине $S_1 - 1/2$ число, причем $l_0 \geq s_1 - 1/2$.

На рис. 2 и 3 даны кривые $R^{\min}(l)$ и $\theta(l)$ для случая (9). Сплошные кривые получены численно, а штрихованные - с помощью формул (10) и (11). Из этих рисунков видно, что различие кривых, полученных разными способами, невелико.

На рис. 4 приведены результаты вычисления $\text{Re } 2\delta_\ell$ по формулам (5) и (6).

3. Вычисление углового распределения

Легко видеть (см. рис. 2, 4), что функции $R^{\min}(\ell)$ и $\text{Re } 2\delta_\ell$ являются почти линейными. Только вблизи $\ell = \ell_0$ наблюдаются небольшие отклонения от линейности. Однако они не играют большой роли, так как именно в этой области значений ℓ имеет место очень сильное поглощение и соответствующие парциальные волны дают малый вклад. На рис. 2 и 4 штрих-пунктирные кривые представляют линейную аппроксимацию функций $R^{\min}(\ell)$ и $\text{Re } 2\delta_\ell$. В частности, такая аппроксимация для функции приводит даже к некоторому улучшению соответствия между кривой, полученной численно, и приближенной кривой, используемой в дальнейших расчетах.

С помощью формул (10), (11) и (6), можно получить соотношения:

$$R^{\min}(\ell) = a(\ell - \ell_0) + \frac{a}{kp}, \quad (12)$$

$$\text{Re } 2\delta_\ell = \beta(\ell - \ell_0), \quad (13)$$

где

$$a = 1/k, \quad \beta = \theta(\ell_k) = 2 \arctg(\eta/s_k).$$

При выводе формул (12) и (13) мы воспользовались тем, что $s \geq s_0 > \eta$ и $\theta_r - \rho \approx \theta(s_k)$ (обычно $\theta_r \gg \rho$).

Аналогично тому, как это было сделано в работе ^{13/}, для мнимых частей фаз пишем выражение:

$$\text{Im } 2\delta_\ell = \begin{cases} -\gamma [R^{\min}(\ell) - R^{\min}(\ell_k)] = \gamma a(\ell_k - \ell); & \ell \leq \ell_k, \\ 0 & \ell \geq \ell_k. \end{cases} \quad (14)$$

причем $\gamma = 2/a(\ell_k - \ell_0)$. Отличие состоит в том, что вместо ℓ_r используется ℓ_k . Такая запись функции $\text{Im } 2\delta_\ell$ является более точной, так как $R^{\min}(\ell) = R^{\min}(s_k - \frac{1}{2}) = R_0 + \Delta$, что соответствует точке включения ядерных сил. Кроме того, ℓ_k мало отличается от ℓ_r ($\ell_k - \ell_r = 1 - 2$), но вычислить ℓ_k значительно легче, чем ℓ_r .

Теперь, следуя работе ^{13/}, для амплитуды передачи имеем:

$$T_{11} = (\sin \theta)^{-1/2} [e^{i\Phi} f(\beta + \theta) - e^{-i\Phi} f(\beta - \theta)], \quad (15)$$

где

$$\Phi = (\ell_0 + \frac{1}{2})\theta + \frac{1}{2}\pi, \quad (16)$$

$$f(x) = \sum_{\ell=\ell_0}^{\ell_k} (2\ell + 1)^{1/2} \exp\{i(\ell - \ell_0)[ix + a(\gamma - a)]\} +$$

$$+ \sum_{\ell=\ell_k+1}^{\infty} (2\ell + 1)^{1/2} \exp\{i(\ell - \ell_0)[ix - a\alpha]\}.$$

Фактор $(2\ell + 1)^{1/2}$ изменяется слабо по сравнению с экспонентами. Пренебрегая его изменением и пропуская суммирование в (16), для углового распределения получаем формулу:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} (2e^{-a(\gamma-a)} \frac{\text{cha}(\gamma-a)(\ell_k - \ell_0) - \cos(\ell_k - \ell_0)(\beta - \theta)}{\text{cha}(\gamma-a) - \cos(\beta - \theta)} + \\ &+ e^{a(\gamma-a)(\ell_k - \ell_0) - a\alpha} \frac{1}{\text{cha}a - \cos(\beta - \theta)} + \\ &+ \frac{1}{[\text{cha}(\gamma-a) - \cos(\beta - \theta)][\text{cha}a - \cos(\beta - \theta)]} \times \{ [e^{a(\gamma-a)(\ell_k - \ell_0)} \cos(\beta - \theta) - \\ &- \cos(\ell_k - \ell_0 + 1)(\beta - \theta)] [2\cos(\beta - \theta) - e^{-a(\gamma-a)} - e^{-a\alpha}] + \\ &+ [e^{-a\gamma} - 1] [e^{a(\gamma-a)(\ell_k - \ell_0)} - \cos(\ell_k - \ell_0)(\beta - \theta)] \} + \end{aligned} \quad (17)$$

+ члены, получающиеся путем замены $\beta - \theta \rightarrow \beta + \theta$.

Результаты вычисления углового распределения продуктов реакции, передачи одного или двух нуклонов (случай малых значений параметра a), происходящих при столкновении ядер Ne^{20} и Au^{197} (9) представлены на рис. 5. На рисунке дана зависимость $d\sigma/d\Omega$ от значения параметра a (сплошные кривые) и от небольшого изменения значения $\ell_k \rightarrow \ell_k + 3$ (штрихованная кривая).

4. Выводы

Прежде всего мы видим, что воспроизводятся прежние результаты, полученные в работе ^{11/}: в угловом распределении имеется высокий максимум, лежащий вблизи резерфордского угла, соответствующего краевому столкновению ядер, а также максимум вблизи угла $\theta = 0$.

Вместе с тем можно сделать и новые заключения. Угловое распределение в области больших углов $\theta > 90^\circ$ испытывает резкий подъем. Этот подъем не является монотонным кривая $d\sigma/d\Omega$ с изменением угла θ осциллирует.

Вернемся к формуле (17). Несмотря на сложный вид, она позволяет провести анализ основных зависимостей углового распределения.

1. Из-за наличия множителя $(\sin \theta)^{-1}$ имеются подъемы в направлении вперед и назад.

2. В формулу (17) входят множители резонансного типа $[\text{cha}(\gamma - \alpha) - \cos(\beta - \theta)]^{-1}$. Они определяют положение "главного" максимума. Максимум достигается при $\theta = \beta$. Так как β увеличивается при уменьшении энергии E , то главный максимум сдвигается в сторону больших углов.

3. Кроме того, имеются осциллирующие множители типа $\cos[(\ell_k - \ell_0)(\beta - \theta)]$. Период осцилляций $d\sigma/d\Omega$, обусловленный этими множителями, равен $2\pi/(\ell_k - \ell_0)$. В нашем случае $\ell_k - \ell_0 = 10-12$. Поэтому период осцилляций составляет $30-36^\circ$.

4. Так как при уменьшении энергии разность $\ell_k - \ell_0$ уменьшается, то период осцилляций должен увеличиваться, а глубина уменьшаться (в их формировании будет принимать участие меньшее число парциальных волн).

Эти выводы согласуются с результатами экспериментальных исследований, выполненных в последние годы, включая и новые данные работы /4/.

Таким образом, основные особенности углового распределения продуктов реакций передач находятся в хорошем соответствии с квазиклассической теорией, развитой в работах /2,3/ и в данной работе.

Авторы признательны Н.Ф. Марковой за помощь в численных расчетах.

Л и т е р а т у р а

1. В.Н.Калинкин, Т.Р.Кочкина, В.Л.Пустыльник. Proc. of the Third Conference on Reactions between Complex Nuclei (University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1963) p. 69; Acta Physica Polonica, 24 (1963) 427.
2. В.Н.Калинкин, J. Grabowski. Proc. at the Third Conference on Reactions between Complex Nuclei op-cit, p.129; Acta Physica Polonica, 24(1963)435.
3. Я.Грабовский, Б.Н.Калинкин. Препринт ОИЯИ, Р-1675, Дубна, 1964.
4. Э.Ложински. Препринт ОИЯИ, Р-1641, Дубна, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1964 г.

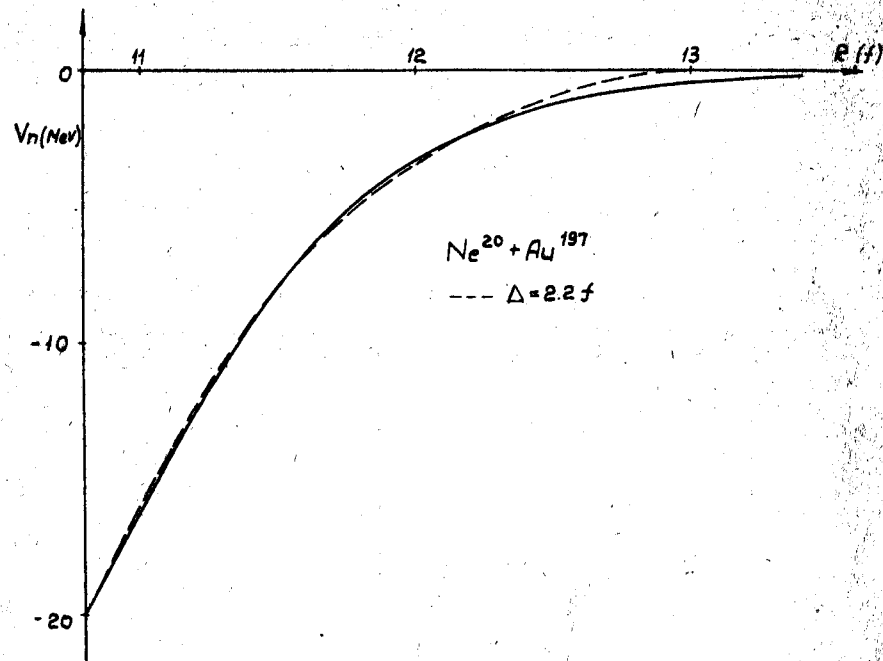


Рис. 1. Аппроксимация потенциала Саксона-Вуда по формуле (8).

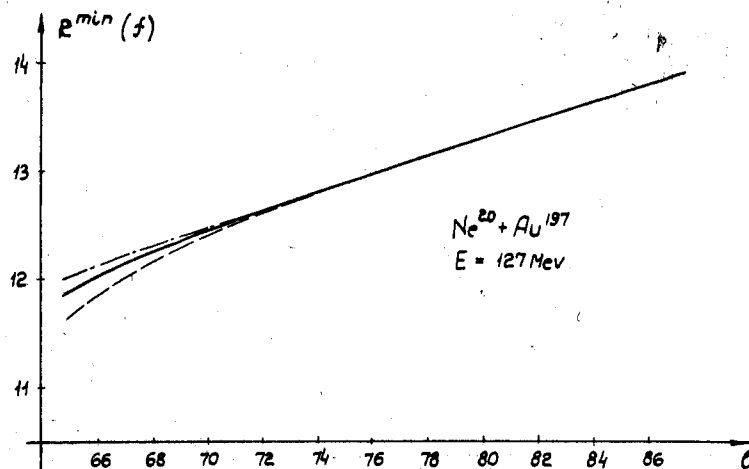


Рис. 2. Аппроксимация функции $R^{min}(\ell)$.

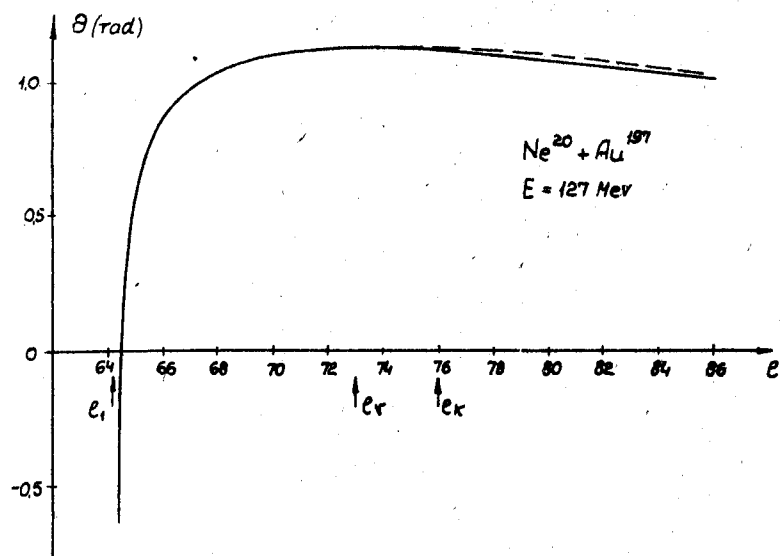


Рис. 3. Аппроксимация функции $\theta(l)$.

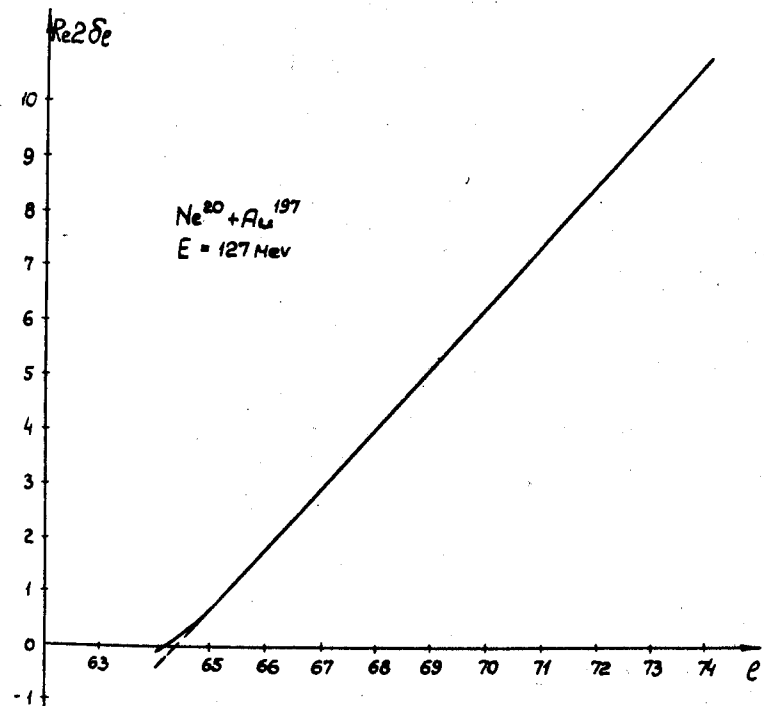


Рис. 4. Зависимость действительной части фаз от l .

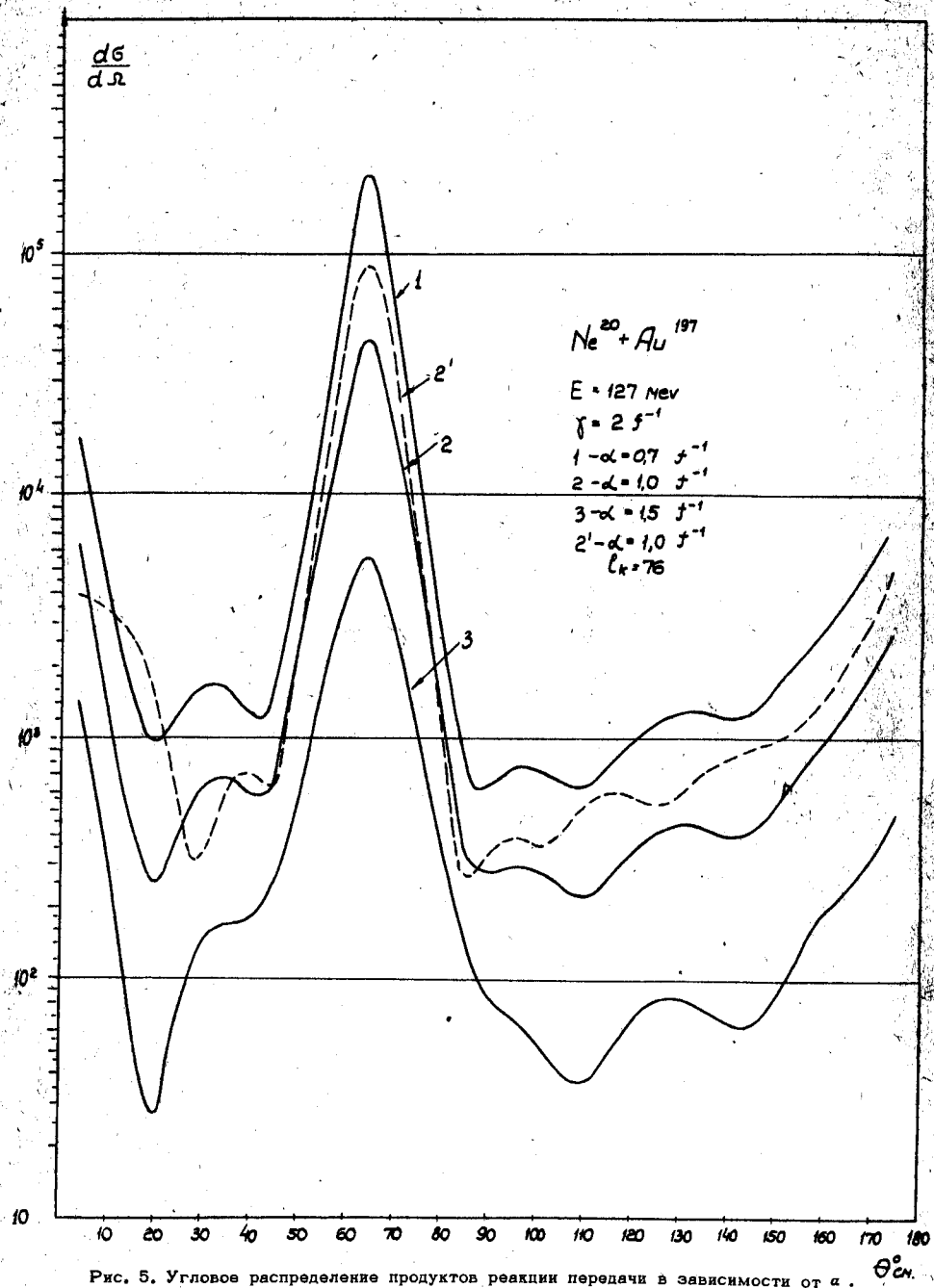


Рис. 5. Угловое распределение продуктов реакции передачи в зависимости от α .