ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1739

А. Обретенов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МОМЕНТОВ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО СОБЫТИЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1964

Р-1739

А. Обретенов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МОМЕНТОВ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ РЕКУРРЕНТНОГО СОБЫТИЯ

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, k, \dots$, с вероятностями соответственно $p_k = P(x_n = k)$, $k = 1, 2, \dots$

Как известно из теории рекуррентных событий [1], сумма $S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ дает число испытаний до k-го осуществления некоторого рекуррентного события E. Обозначим через N_n число появлений события E при n испытаниях и через $a_\nu(n)$ ν-й момент случайной величины N_n, т.е. $a_\nu(n) = M(N_n)^\nu$. В настоящей работе выводится асимптотическое поведение чисел $a_\nu(n)$ при $n \to \infty$, точнее, доказывается следующая теорема.

<u>Теорема.</u> Пусть E — достоверное непериодическое рекуррентное событие, $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ — среднее время возвращения, тогда:

I. Если $\mu < +\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} n^{-\nu} a_\nu(n) = \mu^{-\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots ;$$

II. Если же $\mu = +\infty$, то при дополнительных предположениях

1. $\sum_{n+1}^{\infty} p_k \approx n^{-a}$, $0 < a < 1$ [x],

2. $u_{n+1} \le u_n + \frac{L}{n^{2-a}}$, $L \ge 0$,

где u_n — вероятность осуществления события E на n-ом испытании, имеем

$$\lim_{n \to \infty} n^{-a\nu} a_\nu(n) = \Gamma(\nu+1)/\Gamma^{\nu}(1-a)\,\Gamma(\nu a+1), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Отметим, что условие 2, в частности, выполняется, если $p_{k+1} p_{k-1} > p_k^2$ для всех $k = 1, 2, \dots$, так как при этом предположении вероятности u_n монотонно убывают [2]. В общем случае при одном выполнении условия 1 мы не можем утверждать, что для всех $0 < a < 1$ имеем $a_\nu(n) \approx c a^{a\nu}$, ибо асимптотическое поведение $a_\nu(n)$ определяется на основе асимптотики u_n. Будет доказано, что при выполнении условий 1 и 2 имеет место соотношение $u_n \approx c n^{a-1}$, которое без условия 2 справедливо только для значений $a > 1/2$ [3].

Прежде чем доказать теорему, установим некоторые леммы.

---

x) Символ $\approx$ обозначает асимптотическую эквивалентность, т.е.
$$\lim_{n \to \infty} n^{a} \sum_{n+1}^{\infty} p_k = 1 .$$

Лемма 1. При выполнении условий сформулированной теоремы, если

$$M_n^\nu = \sum_{k=1}^{n} k^\nu P(S_k = n)$$

и $\mu < +\infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\nu} M_n^\nu = \mu^{-(\nu+1)}, \qquad \nu = 0,1,2,\dots \qquad (1)$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции по ν. При $\nu = 0$ предельное соотношение (1) верно, так как

$$M_n^0 = \sum_{k=1} P(S_k = n) = u_n$$

и по теореме Эрдеша-Феллера-Полларда /4/ $\lim u_n = \frac{1}{\mu}$.

Покажем, что для каждого $\nu \ge 1$ и $n \ge 1$ существуют такие константы $a, a_1, \dots, a_\nu$, не зависящие от n, что

$$M_n^\nu = \nu \sum_{i=1}^{n-1} M_i^0 M_{n-i}^{\nu-1} + a_1 M_n^{\nu-1} + a_2 M_n^{\nu-2} + \dots + a_\nu M_n^0 + a p_n . \qquad (2)$$

Суммируя по частям выражение, определяющее M_n^ν, получаем

$$M_n^\nu = M_n^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-k} (i+k)^{\nu-1} P(S_{i+k} = n) . \qquad (3)$$

Сумму в правой части этого равенства преобразуем, используя то обстоятельство, что для любых натуральных чисел n и k справедливо

$$\sum_{i=1}^{n-k} P(S_{i+k} = n) = \sum_{i=1}^{n-k} M_i^0 P(S_k = n-i), \quad k \le n-1. \qquad (4)$$

Действительно, из

$$P(S_{k+1} = n) = P(S_1 = i) P(S_k = n-i) + P(S_1 = i+1) P(S_k = n-i-1) + \dots + P(S_1 = n-k) P(S_k = k)$$

при $i = 1, 2, \dots, n-k$ получаем $n-k$ равенств. Складывая их правые части и группируя по одинаковым $P(S_k = n-m)$, $m = 1, \dots, n-k$, находим правую часть (4).

Из (3), используя (4), находим

$$M_n^\nu = M_n^{\nu-1} + \nu \sum_{i=1}^{n-1} M_i^0 M_{n-i}^{\nu-1} + \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-k} (i+k)^{\nu-1} P(S_{i+k} = n) - \nu \sum_{k=1}^{n-1} k^{\nu-1} \sum_{i=1}^{n-k} P(S_{i+k} = n)\Big] .$$

С помощью непосредственных подсчетов легко находим, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-k} (i+k)^{\nu-1} P(S_{i+k} = n) = \sum_{k=1}^{n-1} k (k+1)^{\nu-1} P(S_{k+1} = n)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{\nu-1} \sum_{i=1}^{n-k} P(S_{i+k} = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} i^{\nu-1} P(S_{k+1} = n) .$$

Тогда выражение относительно M_n^ν можно записать в виде

$$M_n^\nu = M_n^{\nu-1} + \nu \sum_{i=1}^{n-1} M_i^0 M_{n-i}^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \Big[\nu \sum_{i=1}^{k} i^{\nu-1} - k(k+1)^{\nu-1}\Big] P(S_{k+1} = n) . \qquad (5)$$

Так как в разности $\nu \sum_{i=1}^{k} i^{\nu-1} - k(k+1)^{\nu-1}$ k входит в степени не выше $\nu-1$, то из (5) следует (2).

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-i} M_n^i = \mu^{-(i+1)} \qquad \text{для } i = 0, 1, \dots, \nu-1,$$

тогда по теореме о свертках (см. /5/, теорема 41) имеем

$$\nu \sum_{i=1}^{n-1} M_i^0 M_{n-i}^{\nu-1} \sim n^\nu \mu^{-(\nu+1)} . \qquad (6)$$

Из (2) и (6) следует (1).

Доказательство теоремы в случае I. Из известного равенства /1/

находим

$$P(N_j \ge i) = P(S_i \le j)$$

$$P(N_{n-1} = k-1) = P(S_k = n) + P(S_{k-1} \le n-1) - P(S_k \le n) . \qquad (7)$$

Обозначим через $\Delta_{k-1}(n)$ разность

$$\Delta_{k-1}(n) = P(S_{k-1} \le n-1) - P(S_k \le n) .$$

Так как

$$\Delta_{k-1}(n) = P(S_{k-1} \le n-1) - \sum_{s=1}^{n-k+1} P(S_{k-1} \le n-s) P(x_j = s) \ge P(S_{k-1} \le n-1)\Big[1 - \sum_{s=1}^{n-k+1} P(x_j = s)\Big],$$

то, очевидно, $\Delta_{k-1} \ge 0$ для всех n и k. Положим

$$A_n^\nu = \sum_{k=1}^{n-1} k^\nu \Delta_k(n) .$$

Из равенства (7) следует, что $n^{-1} A_n^1 \to \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$, $n \to \infty$, ибо

$$n^{-1} a_1(n) = n^{-1}(M_1^0 + M_2^0 + \dots + M_n^0) \to \frac{1}{\mu} \quad \text{и} \quad n^{-1} M_n^1 \to \frac{1}{\mu^2} .$$

Тем же способом, что и при получении равенства (2), получаем

$$A_n^\nu = \nu \sum_{i=1}^{n-2} M_i^0 A_{n-i}^{\nu-1} + R_n^{\nu-1}, \quad \nu \ge 2, \qquad (8)$$

где $R_n^{\nu-1} = O(n^\nu)$. Из (8) по индукции следует

$$A_n^\nu \sim n^\nu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \mu^{-\nu} . \qquad (9)$$

С другой стороны, из (7) находим, что

$$a_\nu(n-1) = M_n^\nu - \nu M_n^{\nu-1} + \dots + (-1)^k M_n^{\nu-k} + \dots + M_n^0 + A_n^\nu \qquad (10)$$

и, имея в виду соотношения (1) и (9), из (10) получаем утверждение I.

<u>Лемма 2.</u> При условии II теоремы имеем

$$u_n \sim n^{\alpha-1}\Gamma^{-1}(\alpha)\Gamma^{-1}(1-\alpha). \qquad (11)$$

<u>Доказательство.</u> По формуле полной вероятности

$$u_n = p_n u_0 + p_{n-1}u_1 + \dots + p_1 u_{n-1}, \quad u_0 = 1. \qquad (12)$$

Положим $c_k = u_k - u_{k-1}$, $c_0 = 1$ и $r_n = \sum_{n+1}^{\infty} p_k$. Из (12) получаем

$$u_n r_0 + u_{n-1} r_1 + \dots + u_0 r_n = 1. \qquad (13)$$

Если обозначим $r(t) = \sum_0^\infty r_k t^k$ и $c(t) = \sum_0^\infty c_k t^k$, то из (13) находим

$$c(t) = r^{-1}(t)$$

и после дифференцирования

$$c'(t) = -r'(t)/r^2(t). \qquad (14)$$

Так как по предположению $r_n \sim n^{-\alpha}$, то по теореме Абеля имеем

$$r(t) \sim \Gamma(1-\alpha)(1-t)^{\alpha-1} \quad \text{при} \quad t \to 1,$$

что по теореме Харди-Литтлвуда (см. /5/, теорема 112) дает

$$r'(t) \sim (1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)(1-t)^{\alpha-2},$$

и с учетом (14) получаем

$$-c'(t) \sim \frac{1-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(1-t)^{-\alpha}. \qquad (15)$$

Положим $b_n = n(u_{n-1} - u_n) + \frac{L}{n^{1-\alpha}}$, $n \ge 1$. Из условия 2 видно, что $b_n \ge 0$. Если $B(t)$ – сумма степенного ряда $B(t) = \sum_1^\infty b_n t^n$, то

$$B(t) = -c'(t) + L\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} t^n$$

и из того, что $\sum_1^\infty n^{\alpha-1} t^n \sim \Gamma(\alpha)(1-t)^{-\alpha}$, и из (15) следует

$$B(t) \sim K(1-t)^{-\alpha}, \qquad (16)$$

где $K = (1-\alpha)\Gamma^{-1}(1-\alpha) + L\Gamma(\alpha)$. С помощью теоремы тауберова типа Харди-Литтлвуда /5/ из (16) находим

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sim Kn^\alpha/\Gamma(1+\alpha). \qquad (17)$$

С другой стороны, из (13) находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k = 1/(1-t)r(t)$$

или с учетом асимптотики $r(t)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k \sim \Gamma^{-1}(1-\alpha)(1-t)^{-\alpha},$$

что опять по теореме тауберова типа дает

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim n^\alpha/\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha). \qquad (18)$$

Имея в виду, что $\sum_1^n k^{\alpha-1} \sim n^\alpha\,\Gamma(1-\alpha)/\Gamma(1+\alpha)$, и (18), соотношение (17) путем суммирования по частям приводим к (11).

<u>Доказательство теоремы в случае II</u>. Не будем его проводить с подробностями, так как оно такое же, как в случае I. В тех же обозначениях имеем:

$$M_n^\nu \sim n^{(\nu+1)\alpha-1}\,\Gamma(\nu+1)/\Gamma^{\nu+1}(1-\alpha)\Gamma(\nu\alpha+\alpha), \quad M_n^0 = u_n,$$

это соотношение получается из (2) на основе леммы 2, теоремы о свертках и

$$A_n^\nu \sim n^{\nu\alpha}\,\Gamma(\nu+1)/\Gamma^\nu(1-\alpha)\Gamma(\nu\alpha+1).$$

Асимптотику для A_n^ν находим из (8) по индукции, имея в виду, что при $\nu = 1$, $A_n^1 = \sum_0^n u_k$.

Тогда из (10), учитывая, что $n^{-\alpha\nu} M_n^{\nu-\alpha} \to 0$, $k = 0,1,\dots,\nu$, получаем

$$MN_n^\nu \sim A_n^\nu,$$

чем доказательство теоремы закончено.

Литература

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, М., 1952.
2. N.G.Bruijn, P.Erdös. On a Recursion Formula and Some Tauberian Theorems, Y. Res. Nat. Bur. Stand., <u>50</u>, 161–164, 1953.
3. A.Garsia, I.Lamperti. A Discrete Renewal Theorem with Infinite Mean, Comm. Math. Helv., <u>37</u> (3), 221–234, 1963.
4. P.Erdos, W.Feller and H.Pollard. A Theorem on Power Series, Bull. of the Amer. Math. Soc., <u>55</u>, 201–204, 1949.
5. Г.Харди. Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 июня 1964 г.