



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

---

О.А. Колпаков, В.И. Котов, Ом Сан Ха

P-1565

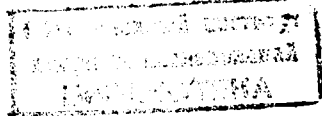
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН  
В СТРУКТУРНОМ ВОЛНОВОДЕ  
И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА,  
ПРОЛЕТАЮЩЕГО ПО ЕГО ОСИ

Дубна 1984

О.А. Колпаков, В.И. Котов, Ом Сан Ха

P-1565

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН  
В СТРУКТУРНОМ ВОЛНОВОДЕ  
И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА,  
ПРОЛЕТАЮЩЕГО ПО ЕГО ОСИ



Дубна 1964

23/19/3 48.

## § 1. Постановка задачи

В настоящее время в связи с развитием микроволновой радиотехники много внимания уделяют исследованию волноводов с периодической структурой. При движении пучка заряженных частиц с большой плотностью в таком волноводе могут оказаться заметными эффекты, связанные с излучением. Поэтому представляет интерес более подробно исследовать поля, возбуждаемые заряженными ступками в замедляющей системе.

Анализ волноводов подобного типа был проведен в работах <sup>/1-5/</sup>. Например, в <sup>/2,3/</sup> В.В. Владимирским рассмотрена задача о распространении волн в цепочке связанных резонаторов и получено выражение для ширины полосы пропускания основной частоты. В <sup>/4/</sup> дается решение задачи для некоторых видов гофрированных волноводов.

Общий метод решения таких задач заключается в том, что поля в волноводах как в пространстве распространения, так и в полостях рассматриваются в виде бесконечных рядов (см., например, <sup>/1/</sup>). Это дает возможность удовлетворить граничным условиям при самых общих предположениях, однако, приводит к необходимости исследования бесконечных детерминантов.

В некоторых частных случаях указанную трудность можно обойти. Так, например, для волновода, нагруженного дисками, можно учитывать только первые члены рядов, изображающих поле.

В случае волновода со щелями <sup>/4/</sup> поле в пространстве взаимодействия достаточно представить в виде ряда, а в резонаторных областях - квазистатическим.

В данной работе рассмотрены условия распространения электромагнитных волн и некоторые вопросы, связанные с излучением волн в периодическом волноводе со щелями.

Схематически исследуемая система изображена на рис. 1, на котором указаны также обозначения параметров системы.

В бесконечной сумме, описывающей поля в пространстве распространения, необходимо учитывать большое число членов, так как ввиду неравномерности структуры основной вклад составляют волны более высоких порядков. В то же время при рассмотрении волн, длина которых больше ширины щели, можно поля в щели предположить квазистатическими, т.е. в виде одной основной волны.

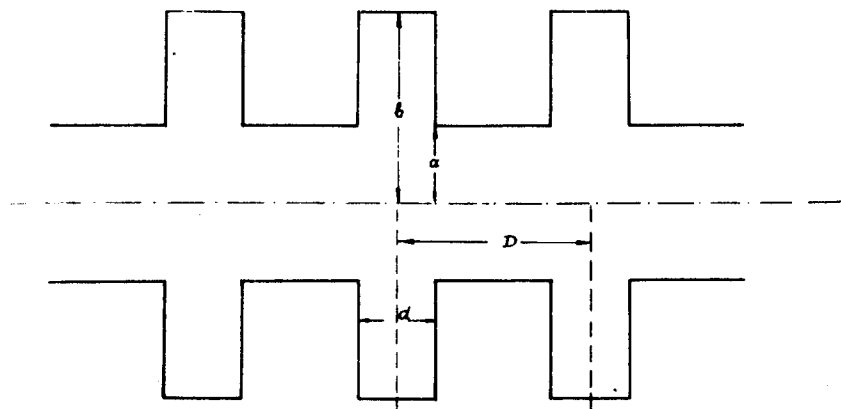


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначение.

Как предельный ( $D = d$ ) отсюда получается случай цепочки связанных резонаторов и случай волновода, нагруженного диафрагмами.

## § 2. Вывод дисперсионного уравнения и его анализ

Поле в пространстве распространения будем изображать в виде суммы бесконечного числа гармоник одного волнового вектора  $k$ . Для волн типа ТМ продольная составляющая электрического поля может быть представлена в виде

$$E_{\lambda}^{z1} = A_{0\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m I_0(\gamma_m r) e^{i(\omega t - k_m z)}, \quad (1)$$

где  $\gamma_m = \sqrt{k_m^2 - k^2}$ ,  $k_m = \frac{2\pi}{D}(x+m)$ ,  $x$  - непрерывный параметр ( $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ )  $m$  - целое число ( $-\infty < m < \infty$ ).

$A_{0\lambda}$  - некоторый множитель, который можно определить из условий нормировки собственных функций системы,  $\omega = kc$  - частота, где  $c$  - скорость света в пустоте.

Соответственно, азимутальная компонента магнитного и радиальная компонента электрического полей в пространстве распространения даются выражениями

$$\begin{aligned} H_{\lambda}^{\phi 1} &= i k A_{0\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m} A_m I_1(\gamma_m r) e^{i(\omega t - k_m z)}, \\ E_{\lambda}^{r1} &= i A_{0\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{k_m}{\gamma_m} A_m I_1(\gamma_m r) e^{i(\omega t - k_m z)} \end{aligned} \quad (2)$$

Поля в резонаторной полости при  $kd \ll 1$  можно предположить независимыми от координаты  $z$  и записать в виде

$$E_{\lambda}^{z2} = A_{0\lambda} Z_0(kr), \quad (3)$$

$$H_{\lambda}^{\phi 2} = i A_{0\lambda} Z_1(kr), \quad (4)$$

где

$$Z_0(kr) = \frac{J_0(kr) N_0(kb) - N_0(kr) J_0(kb)}{J_0(ka) N_0(kb) - N_0(ka) J_0(kb)}, \quad (5)$$

$$Z_1(kr) = \frac{J_1(kr) N_0(kb) - N_1(kr) J_0(kb)}{J_0(ka) N_0(kb) - N_0(ka) J_0(kb)}. \quad (6)$$

Вид функций  $Z_0(kr)$ ,  $Z_1(kr)$  выбран так, чтобы удовлетворялись граничные условия. Поле  $E_{\lambda}^{z1}$  на радиусе волновода  $r=a$  равно нулю между щелями и постоянной величине на щели, т.е.  $E_{\lambda}^{z1}(a)$  как бы представляет собой разложение прямоугольной функции  $f(z)$  с периодом  $D$  в ряд Фурье:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-i \frac{2\pi m z}{D}}, \quad (7)$$

где

$$C_m = \frac{1}{D} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i \frac{2\pi m z}{D}} e^{-i \frac{2\pi m z}{D}} dz = \frac{d}{D} \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}}. \quad (8)$$

Сравнивая выражения (7) и (8) с (1), получим

$$A_m = \frac{d}{D} \frac{1}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (1) и (2) и опуская временной множитель, получим окончательные выражения для полей в пространстве распространения

$$E_{\lambda}^{z1} = A_{0\lambda} \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_0(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-i k_m z} \quad (10)$$

$$H_{\lambda}^{\phi 1} = i A_{0\lambda} (ka) \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m r)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{\text{Sin} k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-ik_m r} \quad (11)$$

$$E_{\lambda}^{r1} = i A_{0\lambda} \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{k_m}{\gamma_m} \frac{I_1(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\text{Sin} k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-ik_m r}$$

Дисперсионное уравнение находится из условия  $H_{\lambda}^{\phi 1} = H_{\lambda}^{\phi 2}$  при  $r = a$  на щели. Последнее равенство может быть выполнено только приближенно при  $kd \ll 1$ , если мы возьмем среднее значение  $H_{\lambda}^{\phi 1}$  на промежутке  $d$ :

$$\overline{H_{\lambda}^{\phi 1}}(a) = i A_{0\lambda} (ka) \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \left[ \frac{\text{Sin} k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} \right]^2 \quad (12)$$

Приравняв  $\overline{H_{\lambda}^{\phi 1}}(a)$  к  $H_{\lambda}^{\phi 2}(a)$ , получим

$$\frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \left[ \frac{\text{Sin} k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} \right]^2 \quad (13)$$

Уравнения (13) является дисперсионным уравнением, т.е. решения его определяют возможные частоты, с которыми могут распространяться волны в данной волноводной системе.

#### а) Исследование дисперсионного уравнения для волновода со щелями

Запишем (13) в виде

$$f_1(ka) = f_2(\gamma_m a, k_m d) \quad (14)$$

Как показывают расчеты, выполненные на электронно-вычислительной машине, функция  $f_1$  слабо зависит от  $ka$  (при  $ka < 1$ ), практически остается постоянной и по абсолютной величине не превосходит 1.

Результаты этих вычислений, выражающие зависимость функции  $f_2$  от  $ka$ , приведены на графиках рис. 2.

Рассмотрим подробнее поведение функции  $f_1(ka)$ . Предположим, что выполнено условие  $a \ll b$  и воспользуемся приближенным значением функций, входящих в  $f_1(ka)$ , при малых значениях аргументов и асимптотическим представлением при больших значениях аргументов.

В области очень малых значений  $k$ , когда  $kb \ll 1$

$$f_1(ka) = \frac{Z_1(ka)}{ka} \approx \frac{1}{(ka)^2 \ln \frac{2}{\mu ka}} \gg 1, \quad (15)$$

где  $\mu = 1,77$  - постоянная Эйлера.

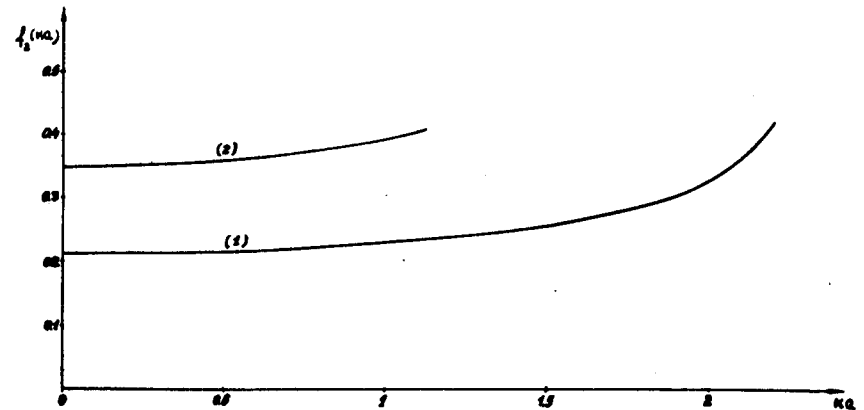


Рис. 2. Поведение правой части дисперсионного уравнения (13) в зависимости от  $ka$ . Кривая (1) соответствует случаю  $\frac{D}{d} = 100$  и  $\frac{a}{d} = 3$ , а кривая (2) - случаю  $\frac{D}{d} = 3$  и  $a = d$ .

Так как  $f_2 < 1$ , то при  $kb \ll 1$  (14) не может быть выполнено, т.е. не существует решений дисперсионного уравнения. С увеличением  $k$  величина  $kb$  достигает значения  $kb = \nu_0$  (где  $\nu_0 = 3.44\pi$ ,  $I_0(\nu_0) = 0$ ) и  $f_1 = \frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{1}{2}$ . При дальнейшем увеличении  $k$  функция  $f_1(ka)$  становится меньше  $\frac{1}{2}$  и принимает значение, при котором (14) выполняется. Таким образом, граница пропускания волновода со щелями приблизительно равна граничной частоте резонаторных полостей. С ростом  $k$  функция  $f_1(ka)$  переходит через нуль и становится отрицательной. Поведение  $f_1(ka)$  принимает характер тангенсоиды с периодом  $\Delta(kb) = 2\pi$ . Эта область соответствует  $kb \gg 1$ , но  $ka < 1$ . Функция  $f_1(ka)$  в этой области может быть приближенно записана в виде

$$f_1(ka) = \frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{\frac{1}{2} \text{tg}(kb - \frac{\pi}{4}) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{(ka)^2}}{\text{tg}(kb - \frac{\pi}{4}) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\mu ka}} \quad (16)$$

Качественный анализ функции подтверждается расчетом на электронно-вычислительной машине (см. рис. 3). Решения уравнения (13) соответствуют точкам пересечения кривых  $f_1(ka)$  и  $f_2(\gamma_m a, k_m d)$ . Как показывают расчеты на электронно-вычислительной машине, при  $D \gg d$  функция  $f_2(\gamma_m a, k_m d)$  не зависит (по крайней мере, в пределах точности вычисления) от параметра  $x$ , характеризующего фазовую скорость волны. Однако при уменьшении  $D/d$  эта зависимость обнаруживается заметным образом (см. табл. 1).

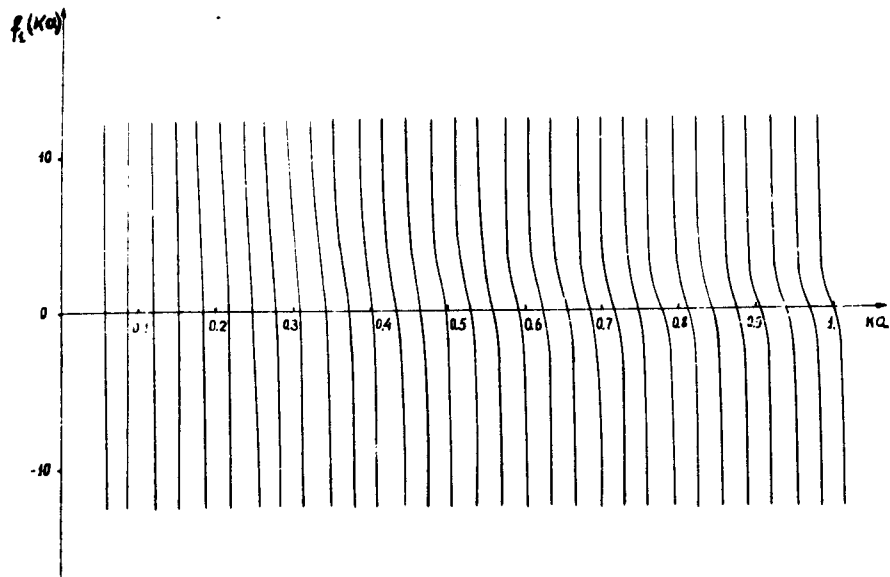


Рис. 3. Поведение левой части дисперсионного уравнения (13) в зависимости от  $ka$

Таблица 1  
Значения функции  $f_1$  при  $\frac{D}{d} = 100$  и  $\frac{D}{d} = 3$

$D/d$	$x$	$k_1 a$									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
100	0	0,214	0,215	0,216	0,216	0,217	0,219	0,221	0,223	0,225	0,229
	0,5	0,214	0,215	0,216	0,216	0,217	0,219	0,221	0,223	0,225	0,229
3	0	0,352	0,353	0,355	0,357	0,360	0,363	0,368	0,374	0,380	0,388
	0,5	0,350	0,351	0,353	0,355	0,358	0,361	0,366	0,371	0,377	0,385

Следовательно, в общем случае мы должны сделать вывод о существовании зависимости от  $x$  функции  $f_1(\gamma_m a, k, d)$  и решения (13) представляют собой так называемые пропуски пропускаемых частот. Но для практического применения при  $D \gg d$  можно считать, что ширина таких полос равна нулю и существует ряд дискретных частот, удовлетворяющих дисперсионному уравнению.

### б) Дифрагмированный волновод

В работе [1] получено дисперсионное уравнение для волновода, нагруженного диэлектриками, т.е. для случая  $D=d$   $a > d$ . Покажем, что оно получается как частный случай из равенства (13). Действительно, при  $d=D$  и  $a > d$  можно положить

$$\gamma_m a = \frac{2\pi m a}{d}, \quad k \frac{d}{2} = \pi m, \quad \frac{I_1(\gamma_m a)}{I_0(\gamma_m a)} = 1.$$

Вводя обозначение  $k_1 = \sqrt{k^2 - (\frac{2\pi x}{d})^2}$ , перепишем (13) в виде

$$\begin{aligned} \frac{Z_1(ka)}{ka} &= \sin^2 \pi x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a) (\frac{k d}{2})^2} = \\ &= \frac{J_1(ka)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)} + \frac{d}{a^2} \sin^2 \pi x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое много меньше единицы, так как  $\frac{d}{a} < 1$ , а  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1$ , и им можно пренебречь. Таким образом, для дифрагмированного волновода имеем следующее дисперсионное уравнение

$$\frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)}, \quad (17)$$

которое совпадает с полученным при  $\frac{d}{a} < 1$ ,  $kd \ll 1$  в работе [1]. Левая часть (17) нами уже исследована, проследим поведение правой части. Так как  $k_1 = \sqrt{k^2 - (\frac{2\pi x}{d})^2}$  и  $ka \ll 1$ , то при  $|\frac{2\pi x}{d}| < k$  величина  $\frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)} \approx \frac{1}{2}$  при изменении параметра  $x$  в пределах от 0 до  $\frac{kd}{2\pi}$ . При дальнейшем увеличении  $x$  величина  $k_1$  становится мнимой, причем  $|k_1 a| = |x| \frac{2\pi a}{d} \gg 1$  и

$$\frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)} = \frac{I_1(|k_1 a|)}{I_0(|k_1 a|)} \rightarrow 0.$$

Следовательно, правая часть равенства (17) может иметь значения в пределах от 0 до  $\frac{1}{2}$ , а левая часть представляет ряд тангенсов.

Более подробный анализ подобного соотношения был проведен в [5].

в) Цепочка связанных резонаторов

Случай  $D = d$ ,  $a \ll d$  можно рассматривать как цепочку связанных резонаторов. Как было отмечено в § 1, в этом случае необходимо учитывать большое число членов в ряду правой части равенства (13).

Рассмотрим сначала левую часть (13) при  $a \ll d$ . При  $a \rightarrow 0$ ,  $(ka) \rightarrow 0$  спектр частот пропускания мало отличается от собственных частот резонатора, которые определяются из условия  $J_0(kb) = 0$ , т.е.  $kb = \pi(\frac{1}{2} + n)$ , где  $n$  - целые числа. При этом левая часть (13) мало отличается от  $\frac{1}{2}$  и может быть представлена, согласно (16), в виде

$$\frac{Z_1(ka)}{ka} \approx \frac{1}{2} + \Delta kb \frac{2}{\pi} \frac{1}{(ka)^2}, \quad (18)$$

где  $\Delta kb$  - малое отклонение величины  $kb$  от значения  $\pi(\frac{1}{2} + n)$ . Второй член справа в (18) мал по сравнению с  $\frac{1}{2}$ . Используя известное равенство

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2(m+x)^2} = 1, \quad (19)$$

преобразуем правую часть (13) к виду

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2(m+x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_m^2}{(m+x)^2}, \quad (20)$$

где

$$\delta_m^2 = \frac{1}{2} - \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)}. \quad (21)$$

Вследствие того, что  $a \ll d$ , величина  $\gamma_m a \approx \frac{2\pi a m}{d} \ll 1$  для большого числа первых членов, равного  $m_0$ . В то же время остаточная сумма, благодаря множителю  $\frac{1}{(m+x)^2}$  мала по сравнению с суммой первых  $m_0$  членов. Поэтому, выделяя сумму первых членов, мы учитываем главную часть суммы, отбрасывая величину меньшего порядка. Для членов, когда выполняется  $\gamma_m a \ll 1$ , с точностью до второго порядка величины  $\gamma_m a$ ,

$$\frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \approx \frac{1}{2} [1 - 1/8 (\gamma_m a)^2] \quad (22)$$

и, следовательно, для (21) будем иметь

$$\delta_m^2 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 a^2}{d^2} (m+x)^2. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2(m+x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \frac{\pi^2 a^2}{2 d^2} m_0. \quad (24)$$

Величину  $m_0$  можно оценить, принимая во внимание, что при  $m \rightarrow \infty$  выражение

$$\frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \rightarrow 0. \quad \text{Приравняв нулю правую часть (22), получим}$$

$$m_0 = \sqrt{2} \frac{d}{\pi a}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в формулу (24) и используя (18), будем иметь

$$\frac{1}{2} + \Delta kb \frac{2}{\pi(ka)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{\pi d} \sin^2 \pi x. \quad (26)$$

Вводя обозначение  $\frac{2\pi x}{d} = \sigma$ , получим для относительной ширины полосы

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{a}{d}\right) \left(\frac{a}{b}\right) (ka) (1 - \cos \sigma d). \quad (27)$$

В работе<sup>/3/</sup> для этого случая выведена формула

$$\frac{\Delta k}{k} = 1/3 \left(\frac{a}{d}\right) \left(\frac{a}{b}\right) (ka) (1 - \cos \sigma d). \quad (28)$$

Различие в численном коэффициенте обусловлено приблизительной оценкой суммы в (20). Неточность заключается в том, что учтена только часть суммы от  $m=0$  до  $m=m_0$  и в какой-то степени произволен выбор числа  $m_0$ .

Произведем более точное вычисление суммы в (20):

$$\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} - \frac{I_1(\gamma_m a)}{\gamma_m a I_0(\gamma_m a)} \right] \frac{1}{(m+x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \pi x \frac{a^2}{d^2} m_0 - \quad (29)$$

$$- \frac{2 \sin^2 \pi x}{\pi^2} \left\{ \sum_{m_0}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^2} - \sum_{m_0}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{\gamma_m a I_0(\gamma_m a)} \frac{1}{(m+x)^2} \right\}.$$

Для  $m > m_0$  сумму можно заменить интегралом. Считая, что при  $m > m_0$  величина  $(m+x) = m$  вводя обозначения  $\gamma_m a = \frac{2\pi a m}{d} = y$ ,  $\frac{2\pi a}{d} = dy$ ,  $\frac{2\pi a m_0}{d} = y_0$ , преобразуем (29) к виду

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{4\pi d} \int_{y_0}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{y^2} - \frac{4a}{\pi d} \sin^2 \pi x \left[ \frac{1}{2} \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2} - \int_{y_0}^{\infty} \frac{I_1(y)}{y I_0(y)} \frac{dy}{y^3} \right] = \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4a}{\pi d} \sin^2 \pi x \left[ \frac{y_0}{16} + \frac{1}{2y_0} - R \right],$$

где

$$R = \int_0^{\infty} \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \frac{dy}{y^2}$$

Вводя обозначение

$$\epsilon_0 = 16 \left[ \frac{y_0}{16} + \frac{1}{2y_0} - R \right], \quad (31)$$

получим выражение для ширины полосы, аналогичное (27)

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{ka}{16} \left( \frac{a}{d} \right) \left( \frac{a}{b} \right) (ka) (1 - \cos \sigma d). \quad (32)$$

Принимая во внимание, что при  $m \rightarrow \infty$  величина  $\frac{I_1(y)}{I_0(y)} \rightarrow 1$ , получим  $R = \frac{1}{2y_0^2}$  и, следовательно,

$$\epsilon_0 = 16 \left[ \frac{y_0}{16} + \frac{1}{2y_0} - \frac{1}{2y_0^2} \right].$$

Заменяя  $y_0$  через  $m_0$  и используя оценку  $m_0$  по (25), для  $\epsilon_0$  найдем следующее численное значение

$$\frac{\epsilon_0}{16} = \frac{1}{3,4}$$

Как можно видеть, получилась величина уже более близкая к  $1/3$ . Нами была произведена также оценка величины  $R$ , непосредственно путем численного интегрирования при различных значениях  $y_0$ . Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Расчетные значения величины  $R$  и  $\epsilon_0$  в зависимости от  $y_0$

$y_0$	$R$	$\epsilon_0$
0,095	4,9934	4,4138
0,1	4,7435	4,2040
0,2	2,2453	4,2752
0,3	1,4244	4,1768
0,4	1,0144	4,1696
0,5	0,7707	4,1688
0,6	0,6100	4,1728
0,7	0,5008	4,1160
0,8	0,4165	4,1360
0,9	0,3008	4,1528
1,0	0,0968	4,1872
2,0		4,4212

Из таблицы 2 видно, что  $\epsilon_0$  мало зависит от  $y_0$  и дает для  $\frac{\epsilon_0}{16}$  величину, близкую к  $1/3$ .

Согласно равенству (30), значение суммы в правой части дисперсионного уравнения (13) при  $D = d$ ,  $\frac{a}{d} \ll 1$  и  $|x|=0,5$  равно  $\frac{1}{2} - \frac{a}{d} \epsilon_0$ . Подставляя среднее значение для  $\epsilon_0$  из таблицы 2, равное  $\epsilon_0 = 4,2$ , получим

$$\frac{a}{4\pi d} \epsilon_0 = \frac{4,2}{4\pi} \left( \frac{a}{d} \right) = 3,6 \cdot 10^{-1} \left( \frac{a}{d} \right).$$

Было подсчитано значение этой величины в зависимости от  $(ka)$  при  $\frac{a}{d} = 10^{-2}$ . Результаты вычислений приведены в таблице (3).

Таблица 3

Максимальное (в пределах полосы  $0 \leq |x| \leq 0,5$ ) изменение суммы в (13) от  $(ka)$  при  $D = d$ ,  $\frac{a}{d} \ll 1$ .

$ka$	Величина суммы в (13) при $x=0$	Величина суммы в (13) при $x=0,5$	Величина $\frac{a}{4\pi d} \epsilon_0$
0,001	0,5000	0,4963	0,0036
0,002	0,5000	0,4963	0,0036
0,003	0,5000	0,4963	0,0036
0,004	0,5000	0,4963	0,0036
0,005	0,5000	0,4963	0,0036
0,006	0,5000	0,4963	0,0036
0,007	0,5000	0,4963	0,0036
0,008	0,5000	0,4963	0,0036
0,009	0,5000	0,4963	0,0036
0,010	0,5000	0,4963	0,0036
0,011	0,5000	0,4963	0,0036
0,500	0,5163	0,5124	0,0038
1,000	0,5751	0,5704	0,0046
1,500	0,7261	0,7196	0,0070

Как следует из таблицы 3, эта величина сохраняется постоянной в области изменения  $(ka)$  вплоть до  $ka=1$ . Мы рассмотрели цепочку связанных резонаторов при  $D=d$ . Рассмотрим теперь случай, когда  $D \gg d$ , а отношение  $\frac{D}{d}$  равно целому числу  $p$  (очевидно, что при  $D \gg d$  это условие не носит принципиального характера). Тогда, учитывая (22), сумму в правой части (13) можно записать в виде:



$$\frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_0(\gamma_m a)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (m+x)}{[\frac{\pi d}{D} (m+x)]^2} = \frac{d}{2D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[1 - (\frac{a}{D})^2] \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (m+x)}{D}}{[\frac{\pi d}{D} (m+x)]^2} \quad (33)$$

Положим  $\gamma_m a = \frac{2\pi a}{D} (m+x)$  и введем обозначения

$$m = q \frac{D}{d} + n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{D}{d} - 1; \quad -\infty < q < \infty,$$

причем при  $q = 0, 1, 2 \dots$  будут учтены все значения  $m = 0, 1, 2 \dots$ , а при  $q = -1, -2, \dots$  будут учтены все значения  $m = -1, -2, -3 \dots$ . В новых обозначениях (33) преобразуется к виду

$$\frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} [1 - \frac{\pi^2 a^2}{2D^2} (q \frac{D}{d} + n + x)^2] \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x)}{[\frac{\pi d}{D} (q \frac{D}{d} + n + x)]^2} = \frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \frac{\pi^2 a^2}{2D^2} (q \frac{D}{d} + n + x)^2}{\pi^2 [q + \frac{d}{D} (n+x)]^2} \quad (34)$$

$$= \frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} [1 - 2 \frac{a^2}{2d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x)] = \frac{1}{2} - \frac{d}{2D} \frac{a^2}{d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x) =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \frac{a^2}{d^2} q_0] = \delta S.$$

Число  $q_0$  можно оценить таким же образом, как это было сделано в случае  $d=D$ ; например, полагая  $1 - \frac{(\gamma_m a)^2}{8} = 0$ , получим  $\frac{\pi a m}{D} = \sqrt{2}$  или  $\frac{\pi a q_0}{D} = \frac{d}{D} \sqrt{2}$ ,  $q_0 = \frac{d}{a} \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ .

Подставляя в (34) это значение  $q_0$ , найдем

$$\delta S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \frac{a}{d} \sqrt{2}. \quad (35)$$

Соотношение (35) позволяет сделать два вывода:

- 1) при  $\frac{D}{d} > 1$ ,  $\frac{a}{d} \ll 1$ , сумма в правой части (13) не зависит от параметра  $x$ ;
- 2) частота пропускания уже не равна точно резонаторной частоте и характеризуется постоянным сдвигом

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \frac{a}{b} \right) \left( \frac{a}{d} \right) (ka). \quad (36)$$

Используя результаты численных расчетов, проиллюстрируем равенство (36) в таблице 4.

По формуле (35) мы несколько занизили оценку величины  $q_0$ , но, очевидно, что соблюдается пропорциональность отношению  $\frac{a}{d}$  и независимость от  $(ka)$ .

Таблица 4

Точные значения суммы (33) и величина  $\delta S$  при  $\frac{D}{d} = 100$

ka		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\frac{a}{d} = \frac{1}{10}$	$\delta S$ по (35)	0,4887	0,4887	0,4887	0,4887	0,4887
	Численный результат	0,4836	0,4836	0,4836	0,4837	0,4837
$\frac{a}{d} = \frac{1}{20}$	$\delta S$ по (35)	0,4943	0,4943	0,4943	0,4943	0,4943
	Численный результат	0,4917	0,4917	0,4917	0,4917	0,4918

### 8.3. Излучение заряда, пролетающего по оси волновода со щелями

В работе [7] изложен метод определения излучения заряда, пролетающего по оси структурного волновода.

Излучение можно подсчитать, решая неоднородное уравнение, когда известны собственные функции волновода.

Построим выражение для функции вектор-потенциала волновода со щелями

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) = \vec{A}_\lambda(\vec{r}) q_\lambda(t). \quad (37)$$

Как известно, функция  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ , зависящая только от координат, пропорциональна координатной функции электрического поля (см. (10)).

Следовательно, для  $z$ -компоненты функции  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$  мы сразу можем написать выражение

$$A_\lambda^z = a_\lambda \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_0(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin \frac{k_m d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-ik_m z}. \quad (38)$$

где  $a_\lambda$  определяется из условия нормировки

$$\int_V |A_\lambda^z|^2 dV = 4\pi c^2,$$

$V_0$  - объем отрезка волновода, длина которого равна периоду структуры  $D$ .

$$\frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_m(\gamma_m a)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (m+x)}{D (m+x)^2} = \frac{d}{2D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[1 - (\gamma_m a)^2] \sin^2 \frac{\pi d}{D} (m+x)}{8 [ \frac{\pi d}{D} (m+x) ]^2} \quad (33)$$

Положим  $\gamma_m a = \frac{2\pi a}{D} (m+x)$  и введем обозначения

$$m = q \frac{D}{d} + n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{D}{d} - 1; \quad -\infty < q < \infty,$$

причем при  $q = 0, 1, 2 \dots$  будут учтены все значения  $m = 0, 1, 2 \dots$ , а при  $q = -1, -2, \dots$  будут учтены все значения  $m = -1, -2, -3 \dots$ . В новых обозначениях (33) преобразуется к виду

$$\frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} [1 - \frac{\pi^2 a^2}{2D^2} (q \frac{D}{d} + n + x)^2] \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x)}{[\frac{\pi d}{D} (q \frac{D}{d} + n+x)]^2} = \frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \frac{\pi^2 a^2}{2D^2} (q \frac{D}{d} + n + x)^2}{\pi^2 [q + \frac{d}{D} (n+x)]^2} \quad (34)$$

$$\approx \frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} [1 - 2 \frac{a^2}{2d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x)] = \frac{1}{2} - \frac{d}{2D} \frac{a^2}{d^2} q_0 \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x) =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{d^2} q_0] = \delta S.$$

Число  $q_0$  можно оценить таким же образом, как это было сделано в случае  $d=D$ ; например, полагая  $1 - \frac{(\gamma_m a)^2}{8} = 0$ , получим  $\frac{\pi a m}{D} = \sqrt{2}$  или  $\frac{\pi a q_0}{D} = \frac{d}{D} \sqrt{2}$ ,  $q_0 = \frac{d}{a} \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ .

Подставляя в (34) это значение  $q_0$ , найдем

$$\delta S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \frac{a}{d} \sqrt{2}. \quad (35)$$

Соотношение (35) позволяет сделать два вывода:

- 1) при  $\frac{D}{d} > 1$ ,  $\frac{a}{d} \ll 1$ , сумма в правой части (13) не зависит от параметра  $x$ ;
- 2) частота пропускания уже не равна точно резонаторной частоте и характеризуется постоянным сдвигом

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \frac{a}{b} \right) \left( \frac{a}{d} \right) (ka). \quad (36)$$

Используя результаты численных расчетов, проиллюстрируем равенство (36) в таблице 4.

По формуле (35) мы несколько занизили оценку величины  $q_0$ , но, очевидно, что соблюдается пропорциональность отношению  $\frac{a}{d}$  и независимость от  $(ka)$ .

Таблица 4

Точные значения суммы (33) и величина  $\delta S$  при  $\frac{D}{d} = 100$

ka		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\frac{a}{d} = \frac{1}{10}$	$\delta S$ по (35)	0,4887	0,4887	0,4887	0,4887	0,4887
	Численный результат	0,4836	0,4836	0,4836	0,4837	0,4837
$\frac{a}{d} = \frac{1}{20}$	$\delta S$ по (35)	0,4943	0,4943	0,4943	0,4943	0,4943
	Численный результат	0,4917	0,4917	0,4917	0,4917	0,4918

### § 3. Излучение заряда, пролетающего по оси волновода со щелями

В работе [7] изложен метод определения излучения заряда, пролетающего по оси структурного волновода.

Излучение можно подсчитать, решая неоднородное уравнение, когда известны собственные функции волновода.

Построим выражение для функции вектор-потенциала волновода со щелями

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) = \vec{A}_\lambda(\vec{r}) q_\lambda(t). \quad (37)$$

Как известно, функция  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ , зависящая только от координат, пропорциональна координатной функции электрического поля (см. (10)).

Следовательно, для  $z$ -компоненты функции  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$  мы сразу можем написать выражение

$$A_\lambda^z = a \lambda \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_m(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin \frac{k_m d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-ik_m z}. \quad (38)$$

где  $a_\lambda$  определяется из условия нормировки

$$\int_V |A_\lambda^z|^2 dV = 4\pi c^2,$$

$V_0$  - объем отрезка волновода, длина которого равна периоду структуры  $D$ .

Функция вектор-потенциала, зависящая от времени, определяется из уравнения

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{1}{c} \int_{V_0} j(z) A_\lambda^{**} dV, \quad (39)$$

где  $\omega_\lambda$  - собственные частоты системы,  $j(z)$  - плотность тока в направлении  $z$ . Согласно (38), при  $r=0$  имеем

$$A_\lambda^*(z) = a_\lambda \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda m} e^{-ik_m z}, \quad (40)$$

$$B_{\lambda m} = \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{I_0(\gamma_m a) k_m \frac{d}{2}}. \quad (41)$$

В соответствии с [7] интенсивность излучения определяется через коэффициенты гармоник  $B_{\lambda m}$  (см. (41)):

$$P_\lambda = \frac{Q^2 v^2 a_\lambda^2 d}{4c^2} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \left\{ \sum_{m=m'} \frac{B_{\lambda m}^2}{\left| \frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} - v \right|} + \sum_{m=m''} \frac{B_{\lambda m}^2}{\left| \frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} + v \right|} \right\}. \quad (42)$$

Суммирование в (42) проводится при значениях  $m=m'$  и  $m=m''$ , которые определяются условиями излучения

$$(m' + x) \frac{2\pi}{D} v = \omega_\lambda, \quad (m'' + x) \frac{2\pi}{D} v = -\omega_\lambda, \quad (43)$$

$v$  - скорость частицы в  $z$  - направлении,  $Q$  - ее заряд.

Как было показано в § 2,  $\omega_\lambda$  представляет набор дискретных частот

$$\omega_\lambda = (\frac{1}{2} + n) \frac{\pi c}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Величина  $\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma}$  в случае  $D \gg d$  очень мала, так что при подсчете интенсивности излучения для данной структуры можно положить  $\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} = 0$ .

Вследствие этого частота  $\omega_\lambda$  мало изменяется в пределах полосы пропускания и может считаться постоянной. Из постоянства  $\omega_\lambda$  в пределах полосы следует, что для данного  $\omega_\lambda$  могут существовать только два числа  $m$ , при которых удовлетворяются равенства (43) соответственно:

$$(m+x) = \pm \frac{D}{2b\beta} (\frac{1}{2} + n), \quad (44)$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$  - относительная скорость заряда.

В соответствии с (44)

$$k_m \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{2\beta b} \eta, \quad (45)$$

$$\gamma_m a = \frac{\pi a}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2} \eta,$$

$$\eta = \frac{1}{2} + n.$$

Подставляя (45) в (42) и учитывая, что из каждой суммы в (42) необходимо взять по одному члену и полагая  $\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} = 0$ , получим

$$P_\lambda = \frac{Q^2 v d}{2c^2} \left(\frac{d}{D}\right)^2 a_\lambda^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)}{I_0^2\left(\frac{\pi a \eta}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2}\right) \left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)^2}. \quad (46)$$

Нормировочный множитель  $a_\lambda$  можно определить, пользуясь следующими соображениями. Собственные функции вектор-потенциала  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$  в резонаторных полостях, согласно (3), должны иметь вид

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = a_\lambda Z_0(kz). \quad (47)$$

При  $b \gg a$  и  $ka \ll 1$  функции  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$  в резонаторных полостях будут мало отличаться от собственных функций замкнутого резонатора.

Последние известны и определяются выражениями

$$\xi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{2c}{b J_1(kb)} J_1(kr), \quad (48)$$

где  $\lambda$  соответствует собственным частотам  $\omega_\lambda$  резонатора, или, поскольку

$$J_1(kb) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kb}}, \quad \text{то}$$

$$\xi_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi k}{bd}} c J_0(kr).$$

Так как  $Z_0(ka) a_\lambda = \xi_\lambda(ka)$ ,  $J_0(ka) \approx 1$ ,  $Z_0(ka) \approx 1$ ,

то

$$a_\lambda = c \sqrt{\frac{2\pi k}{bd}} = \frac{c\pi}{b} \sqrt{\frac{2\eta}{d}}. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (46), будем иметь

$$P_\lambda = \frac{Q^2 \pi^2 v \eta}{b^2} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)}{I_0^2\left(\frac{\pi a \eta}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2}\right) \left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)^2}. \quad (50)$$

Полное излучение можно оценить, считая, что возмущение испытывают все волны, для которых  $ka < 1$ . Это согласуется и с тем фактом, что в гладком волноводе волны с  $ka < 1$  вообще не могут распространяться. Выражение для полных потерь на излучение будет представлять собой сумму  $P_\lambda$  по  $\eta$  вплоть до максимального значения  $\eta$ , определяемого, например, из условия:

$$ka = 1 \quad kb \frac{a}{b} = \pi \eta_{\text{макс}} \frac{a}{b} = 1, \quad (51)$$

$$\eta_{\text{макс}} = \frac{b}{\pi a}.$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в формуле (50). Максимальное значение аргументов в функциях

$$l \left( \frac{\pi a \eta}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \quad \text{и} \quad \text{Sin}^2 \left( \frac{\pi d \eta}{2\beta b} \right) / \left( \frac{\pi d \eta}{2\beta b} \right)^2,$$

согласно условия (51), равны

$$x_{1\text{макс}} = \frac{\pi a \eta_{\text{макс}}}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}, \quad x_{2\text{макс}} = \frac{\pi d \eta_{\text{макс}}}{2\beta b} = \frac{1}{2\beta} \left( \frac{d}{a} \right). \quad (52)$$

Следовательно, при  $\beta \approx 1$  и  $d \leq a$  имеем

$$x_{1\text{макс}} \ll 1, \quad x_{2\text{макс}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad l_0(x_{1\text{макс}}) \approx 1, \quad \left[ \frac{\text{Sin } x_{2\text{макс}}}{x_{2\text{макс}}} \right]^2 \approx 1.$$

Учитывая данное обстоятельство, формулу (50) можно заменить соответствующим приближенным равенством

$$P_{\lambda} = \frac{Q^2 \pi^2 v \eta}{b^2}. \quad (53)$$

Выражение для полного излучения будет содержать сумму по  $\eta$  до  $\eta = \eta_{\text{макс}}$ ; при  $\eta_{\text{макс}} \gg 1$  имеем

$$\sum_{\eta=1}^{\eta_{\text{макс}}} \eta \approx \sum_{n=1}^{\eta_{\text{макс}}} n \approx \frac{\eta_{\text{макс}}^2}{2} \approx \frac{\eta_{\text{макс}}^2}{2} = \frac{b^2}{2 \pi^2 a^2}. \quad (54)$$

Следовательно, для полного излучения получим

$$P = \frac{Q^2}{2 a^2} v \left( \frac{d}{D} \right)^2 \quad (55)$$

или для работы, приходящейся на один резонатор

$$A = \frac{Q^2}{2 a} \left( \frac{d}{a} \right) \left( \frac{d}{D} \right). \quad (56)$$

В работе<sup>/8/</sup> было получено выражение для потерянной энергии при пролетании заряда через отдельный резонатор.

Формула (56) отличается от этого выражения множителем  $\frac{d}{L}$ , характеризующим скважность. Наличие этого множителя можно объяснить тем, что в периодической структуре мы подсчитываем резонансное излучение, которое исчезает при стремлении скважности к нулю. Для отдельного резонатора подсчитывается переходное излучение при единичном пролете заряда через него.

Аналогичным образом можно получить выражение для интенсивности излучения в случае  $D = d$ ,  $a \ll d$  для отдельной полосы пропускания частот, которое будет совпадать с приведенным в работах<sup>/7/</sup> и<sup>/9/</sup>.

В заключение авторы выражают свою признательность Б.М. Болотовскому, сделавшему ряд ценных замечаний при обсуждении работы.

#### Л и т е р а т у р а

1. А.И. Ахизер, Я.Б. Файнберг. УФН, 41, 321 (1951).
2. В.В. Владимирский. ЖТФ, 17, 1277 (1947).
3. В.В. Владимирский. ЖТФ, 17, 1269 (1947).
4. М.Ф. Стельмах, И.Б. Ольдерогге, Радиотехника и электроника 6, 980 (1959).
5. E.L.Chu, W.W.Napven, J. Appl. Phys., 18, 996 (1947).
6. И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ФМ (1962).
7. А.И. Ахизер, Г.Я. Любарский, Я.Б. Файнберг. ЖЭТФ, 25, 2526 (1955).
8. О.А. Колпаков, В.И. Котов. Препринт ОИЯИ - 1366, Дубна (1963); ЖТФ (в печати).
9. Б.М. Болотовский. УФН, 75, 295 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 февраля 1964 г.