ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов

Р-1562

О ПЛОТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ ПРИ РАССЕЯНИИ НА СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЦАХ

Дубна 1964

Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов

Р-1562

О ПЛОТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ ПРИ РАССЕЯНИИ НА СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЦАХ

Дубна 1964

1. Введение

Исследование систем трех тел представляет собой весьма трудную задачу. Вместе с тем три взаимодействующих частицы являются наиболее простым объектом, который позволяет нам изучить многие важные свойства, присущие системам многих тел. Привлекательность задачи состоит еще и в том, что многие свойства систем трех тел кажутся нам удивительными - можно ожидать качественно новых эффектов по сравнению с хорошо изученной задачей взаимодействия двух частиц. Так в работе /1/ было показано, что две связанные частицы (сложная частица) проходят сквозь потенциальные барьеры (внешнее поле - третье тело) существенно легче, чем одна простая, имеющая ту же скорость и массу, что и сложная частица.

В данной работе мы рассмотрим эффект возникновения частых резонансов в простой модели, когда частицы рассеиваются на потенциальной яме, в которой в связанном состоянии находится одна частица.

В настоящее время наши представления о строении ядер трудно совместить с классической картиной компаунд-ядра, когда налетающая частица отдает свою энергию равномерно всем нуклонам в ядре. Такому взаимодействию должно оказывать сильное противодействие влияние принципа Паули. Представляется более естественным, что налетающая частица в основном взаимодействует с нуклонами, близкими к энергетической поверхности Ферми. Возможно, что многие свойства ядерных реакций, например, частые и узкие резонансы в сечении рассеяния медленных нейтронов на ядрах, могут быть поняты на основе значительно более простого механизма реакции, чем компаунд-ядро.

В разделе 2 рассматривается система уравнений, описывающая одномерное движение двух взаимодействующих частиц во внешнем поле. В разделе 3 показана возможность возникновения резонансов в такой системе. В разделе 4 рассматривается средняя плотность резонансов. Оказывается, что она в N раз больше плотности одночастичных уровней в потенциальной яме внешнего поля v (N-число одночастичных уровней в поле v).

Тот факт, что в работе рассмотрена лишь одномерная модель, не мешает делать выводы относительно плотности резонансов в трехмерном случае, так как механизм возникновения квазистабильных состояний остается тем же.

В следующих работах авторы предполагают дать строгое обоснование метода, пригодного не только для качественного рассмотрения явления (исследование общего числа резонансов, их средней плотности), но и для количественного описания свойств отдельных резонансов.

2. Основные уравнения

Рассмотрим две частицы, положение которых мы будем характеризовать координатами x_1 и x_2. Пусть взаимодействие частиц осуществляется с помощью потенциала v_{12}. На обе частицы пусть действует внешнее поле $v(x)$. Гамильтониан системы H_{12} этих двух частиц имеет вид:

$$H_{12} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1) + v_2(x_2). \tag{1}$$

При фиксированном положении первой частицы движение второй определяется гамильтонианом H_2:

$$H_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} + v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1) + v_2(x_2). \tag{2}$$

Гамильтониану H_2 соответствует полный набор волновых функций Φ_n (пусть n пробегает как дискретные, так и непрерывные значения)

$$H_2\, \Phi_n(x_2; x_1) = E_n(x_1)\, \Phi_n(x_2; x_1). \tag{3}$$

Функции Φ_n зависят от x_1 как от параметра, так как x_1 входит в H_2. При любом значении x_1 мы можем разложить волновую функцию всей системы Ψ по полному набору функций Φ_n:

$$\Psi = \sum_n \phi_n(x_1)\, \Phi_n(x_2; x_1). \tag{4}$$

Подставим разложение (4) в уравнение Шредингера для Ψ:

$$H_{12}\Psi = E\Psi, \tag{5}$$

умножим затем (5) слева на Φ_m и проинтегрируем по x_2. Учитывая ортонормированность функций Φ_n и соотношение (3), получим бесконечную систему уравнений для ϕ_m:

$$-\frac{1}{2m_1}\phi''_m + [E_m(x_1) - K_{mm}(x_1)]\,\phi_m = E\phi_m + \sum_{n\neq m}(K_{mn}\phi_n + 2Q_{mn}\phi'_n). \tag{6}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x_1. Функции $E_m(x_1) - K_{mm}(x_1)$ играют роль эффективных потенциалов в уравнениях (6). Коэффициенты K_{mn} и Q_{mn}, осуществляющие зацепление уравнений (6), определяются следующими соотношениями:

$$K_{mn}(x_1) = \int \Phi_m \Phi''_n \, dx_2, \tag{7}$$

$$Q_{mn}(x_1) = \int \Phi_m \Phi'_n \, dx_2. \tag{8}$$

Для дискретных значений m и n величину Q_{mn} можно представить в более удобном для расчетов виде. Продифференцируем для этого (3) по x_1, умножим затем обе стороны полученного уравнения на Φ_m и проинтегрируем по x_2. В результате получим:

$$-\frac{1}{2m_2}\int \Phi_m \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Phi'_n\, dx_2 + \int \Phi_m V' \Phi_n\, dx_2 + \int \Phi_m V \Phi'_n\, dx_2 - \int \Phi_m E_n(x_1)\, \Phi'_n\, dx_2 = 0. \tag{9}$$

Здесь для сокращения записи принято обозначение $V = v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1) + v_2(x_2)$.
Проинтегрируем первый член в (9) дважды по частям, учитывая, что функции Φ_m с дискретным m исчезают при $x_2 \to \pm\infty$ и, используя (3), получим:

$$Q_{mn} = \int \Phi_m \Phi'_n\, dx_2 = \frac{\int \Phi_m V' \Phi_n\, dx_2}{E_n - E_m}. \tag{10}$$

Из (10) следует антисимметричность Q_{mn} относительно перестановки m и n. В общем случае свойство антисимметричности Q_{mn} следует, если продифференцировать по x_1 соотношение ортонормировки для функций Φ_m.

В том случае, когда потенциалы v_{12} и v_1, v_2 представляют собой прямоугольные ямы, интеграл в (10) легко вычислить, поскольку V – кусочно постоянная функция и производная от нее равна сумме δ -функций.

Между коэффициентами K_{mn} и Q_{mn} существует простая связь. Дифференцируя (8) по x_1 и используя разложение

$$\Phi'_n = -\sum_p Q_{np}\Phi_p, \tag{11}$$

получим

$$K_{mn} = (Q^2)_{mn} + Q'_{mn}. \tag{12}$$

Для диагональных K_{mm} имеем ($Q_{mm} = 0$)

$$K_{mm} = \sum_n Q_{mn} Q_{nm} = -\sum_n (Q_{mn})^2. \tag{13}$$

Коэффициенты K и Q не зависят от выбора внешнего поля v_1, действующего на первую частицу. Потенциал $v_1(x_1)$ просто прибавляется к эффективным потенциалам в системе (6).

Определим граничные условия для Ψ так, чтобы из $-\infty$ падал единичный поток частиц 1, а частица 2 при $x_1 \to -\infty$ находилась в основном состоянии в потенциале v_2. Пусть энергия системы E недостаточна для того, чтобы частица 2 находилась в возбужденном состоянии при удалении первой частицы на бесконечность:

$$E_1(\pm\infty) < E < E_2(\pm\infty). \tag{14}$$

3. Возникновение резонансов

Выделим в системе (6) первое уравнение (см.[2]) и запишем ее в виде

$$\left(-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+E_1-K_{11}-E\right)\phi_1=\sum_n \hat{O}_{1n}\phi_n, \tag{15}$$

$$\left(-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+E_n-K_{11}-E\right)\phi_n=\hat{O}_{n1}\phi_1+\sum_m \hat{O}_{nm}\phi_m\cdot(m,n\neq 1) \tag{16}$$

Операторы $\hat{O}$ определяются соотношением:

$$\hat{O}_{i1}\,\phi_1=K_{i1}\phi_1+2Q_{i1}\phi_1'. \tag{17}$$

Введем функции $\vec{\chi}_\ell$ - вектора с компонентами $\chi_{n\ell}$ и собственные значения $\mathcal{E}_\ell$ системы:

$$\left(-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+E_n-K_{nn}\right)\chi_{n\ell}-\sum_m \hat{O}_{nm}\chi_{m\ell}=\mathcal{E}_\ell\,\chi_{n\ell}. \tag{18}$$

Разложим $\vec{\phi}$ в ряд по функциям $\vec{\chi}_\ell$

$$\phi_n=\sum_\ell c_\ell\,\chi_{n\ell}. \tag{19}$$

Подставим (19) в (16) и используя (18), получим:

$$\sum_\ell c_\ell(\mathcal{E}_\ell-E)\chi_{n\ell}=\hat{O}_{n1}\phi_1. \tag{20}$$

Умножим (20) слева на $\tilde{\chi}_{n\ell}$ и проинтегрируем, получим ($\tilde{\chi}$ - решение уравнения сопряженного (18))

$$c_\ell=\frac{\sum_n\int\tilde{\chi}_{n\ell}\hat{O}_{n1}\phi_1\,dx_1}{\mathcal{E}_\ell-E}. \tag{21}$$

Подставим теперь c_ℓ из (21) в (19), а затем ϕ_n из (19) в (15):

$$\left(-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+E_1-K_{11}-E\right)\phi_1=\sum_{m,n,\ell}\frac{\hat{O}_{1n}\chi_{n\ell}\int\tilde{\chi}_{m\ell}\hat{O}_{m1}\phi_1\,dx_1}{\mathcal{E}_\ell-E}. \tag{22}$$

Пусть энергия E системы близка к некоторому $\mathcal{E}_p$. Определим два линейно-независимых решения $g_{1\pm}$ уравнения:

$$\left(-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+E_1-K_{11}-E\right)g_{1\pm}-\sum_{m,n,\ell\neq p}\frac{\hat{O}_{1n}\chi_{n\ell}\int\tilde{\chi}_{m\ell}\hat{O}_{m1}\phi_1\,dx_1}{\mathcal{E}_p-E}=0. \tag{23}$$

Пусть g_{1+} представляет собой решение, в котором справа от области рассеяния имеется только волна, идущая направо. С помощью функций $g_{1\pm}$ мы можем представить ϕ_1 в виде[3] / q - удовлетворяет уравнению (23) с $\phi_1=0$ /:

$$\phi_1=\left(q_{1+}\int_{-\infty}^{x_1}q_{1-}\sum_n\hat{O}_{1n}\chi_{np}\,dx_1+q_{1-}\int_{x_1}^{\infty}q_{1+}\sum_n\hat{O}_{1n}\chi_{np}\,dx_1\right)c_p+g_{1+}, \tag{24}$$

где для функций $q_{1\pm}$ принята нормировка $q_{1+}'q_{1-}-q_{1+}q_{1-}'=1$, и, где $\tfrac{1}{2}\left(q_{1+}-i\sqrt{2m_1(E-E_1)}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}q_{1+}\right)_{x_1\to-\infty}=1$

$$c_p=\sum_m\frac{\int\tilde{\chi}_{mp}\hat{O}_{m1}\phi_1\,dx_1}{\mathcal{E}_p-E}. \tag{25}$$

Подставляя ϕ_1 из (24) в (25) и решая уравнение относительно c_p, получим:

$$c_p=\frac{\sum_m\int\tilde{\chi}_{m\ell}\hat{O}_{m1}g_{1+}\,dx_1}{\mathcal{E}_p-E-\sum_m\int\tilde{\chi}_{m\ell}\hat{O}_{m1}P\,dx_1}, \tag{26}$$

где

$$P=q_{1+}\int_{-\infty}^{x_1}q_{1-}\sum_n\hat{O}_{1n}\chi_{np}\,dx_1+q_{1-}\int_{x_1}^{\infty}q_{1+}\sum_n\hat{O}_{1n}\chi_{np}\,dx_1. \tag{27}$$

Согласно (24) коэффициент прохождения D имеет вид:

$$D=\left|c_p\int q_{1-}\sum_n\hat{O}_{1n}\chi_{np}\,dx_1+1\right|^2. \tag{28}$$

Если $\int\tilde{\chi}_{mp}\hat{O}_{m1}g_{1+}\,dx_1$ и $\int\tilde{\chi}_{mp}\hat{O}_{m1}P\,dx_1$ не сильно зависят от энергии вблизи $\mathcal{E}_p$ и $Im\int\tilde{\chi}_{mp}\hat{O}_{m1}P\,dx_1$ меньше, чем расстояние между $\mathcal{E}_\ell$, то зависимость c_p, а, следовательно, и D от E имеет резонансный характер вблизи $\mathcal{E}_p$. Действительная часть $Re\int\tilde{\chi}_{mp}\hat{O}_{m1}P\,dx_1$ определяет сдвиг резонанса относительно $\mathcal{E}_p$, а его мнимая часть определяет ширину Γ резонанса. Можно ожидать[4], что Γ будет малой, если выбрать v_1, v_2 с параметрами ядерного потенциала, а v_{12} с параметрами нуклон-нуклонного взаимодействия.

В существовании указанных резонансов можно легко убедиться, если мала связь между уравнениями в системе (6) (или (15), (16)).

Рассмотрим для простоты только два уравнения

$$(H_1-E)\phi_1=\hat{O}_{1n}\phi_n, \tag{29}$$

$$(H_n-E)\phi_n=\hat{O}_{n1}\phi_1, \tag{30}$$

Разложим функцию ϕ_n по полному набору функций $\phi_{n\ell}$

$$H_n\,\phi_{n\ell}=E_\ell\,\phi_{n\ell}, \tag{31}$$

$$\phi_n = \sum_{\ell} c_{n\ell}\, \phi_{n\ell}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в (30), умножая слева на ϕ_{np} и интегрируя, получаем:

$$c_{np} = \frac{\int \phi_{np}\, \hat{O}_{n1} \phi_1\, dx_1}{E_p - E}. \tag{33}$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при малых коэффициентах K и Q правую часть уравнения (29) можно рассматривать как малое возмущение и функцию ϕ_1 при всех значениях E (см. (14)) можно приближенно заменять невозмущенной функцией ϕ_1°

$$H_1\, \phi_1^{(0)} = E\, \phi_1^{(0)}. \tag{34}$$

Для функций $\phi_1^{(0)}$ значения E_p – ничем не выделенные точки на оси энергий E. То же самое справедливо для $\int \phi_{np}\, \hat{O}_{n1}\, \phi_1^{(0)}\, dx_1$, так как в ϕ_{np} и $\hat{O}_{n1}$ вообще не входит зависимость от энергии E. В общем случае $\int \phi_{np}\, \hat{O}_{n1}\, \phi_1^{(0)} dx_1$ отлично от нуля в точках $E = E_p$. Замена $\phi_1 \to \phi_1^{(0)}$ в (33) приводит к тому, что c_{np} обращаются в бесконечность в точках $E = E_p$, а, следовательно, в бесконечность обращается и правая часть уравнения (29). Мы пришли к противоречию. К тому же противоречию мы придем, если заменим ϕ_1 на функцию, мало отличающуюся от $\phi_1^{(0)}$. Только значительным изменением ϕ_1 по сравнению с $\phi_1^{(0)}$ (~100%) в точках $E = E_p$ можно обратить $\int \phi_{np}\, \hat{O}_{n1} \phi_1\, dx_1$ в этих точках в нуль, чтобы c_{np} оставались конечными.

При значениях энергии E вдали от E_p мы можем пользоваться невозмущенными функциями $\phi^{(0)}$. Таким образом, мы видим, что ϕ_1 должна резко меняться вблизи E_p, что приводит к резонансному поведению характеристик рассеяния (коэффициент прохождения, сечения рассеяния).

Случай больших коэффициентов связи в системе (6) потребует либо явного решения связанных уравнений, либо более последовательного анализа системы (6). Авторы предполагают посвятить этому следующую работу.

4. Частота резонансов

Положим $m_1 = m_2$. Выберем $v_1(x) = v_2(x)$ в виде прямоугольной потенциальной ямы:

$$v_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \le 0;\quad x_1 \ge R \\ -V_0 & \text{при } 0 < x_1 < R. \end{cases} \tag{35}$$

Пусть параметры R и V_0 выбраны таким образом, что в яме v имеется N одночастичных дискретных уровней. Если ширина r потенциальной ямы

$$v_{12} = \begin{cases} 0 & \text{при } |x_1 - x_2| \ge r \\ -V_0 & \text{при } |x_1 - x_2| < r \end{cases} \tag{36}$$

такова, что в v_{12} имеется только одно связанное состояние с энергией, близкой к нулю, для двух частиц с массой m, то эффективные потенциальные энергии $E_m - K_{mm}$ системы (6) имеют согласно (2) и (3) вид потенциальных ям с шириной $\approx R + r$ и глубиной несколько большей, чем V_0. Качественно зависимость потенциалов $E_n - K_{mm}$ от x_1 изображена на рис. 1.

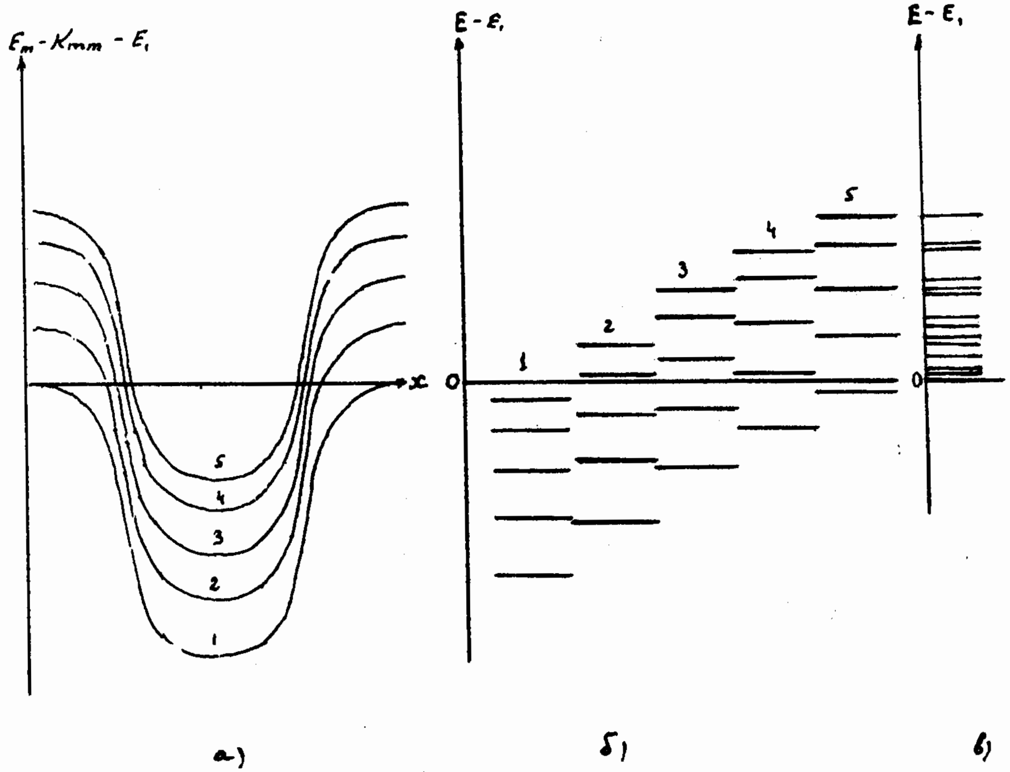

Рис. 1. а) Эффективные потенциалы. б) Уровни в эффективных потенциалах. в) Резонансные энергии.

В каждой из N потенциальных ям, изображенных на рис. 1, имеется N уровней. Резонанс в системе наступает, когда энергия E приближается к одному из значений энергетических уровней в любой из потенциальных ям. Поскольку нас в данной работе интересует средняя плотность резонансов, то сдвиг энергии $\mathcal{E}_\ell$ относительно положения этих уровней за счет связей между уравнениями в системе (18) а также сдвиг резонансов за счет $Re \int \chi_{\ell m} \hat{O}_{m1} P\, dx_1$ для нас не очень существенны. Ясно, что средняя частота резонансов будет в N раз больше плотности одночастичных уровней в потенциале v. (Эффект наложения друг на друга N систем уровней см. рис.1). Все резонансы лежат в области энергий $E_1 < E < 0$.

Наличие непрерывной части в спектре состояний второй частицы не меняет количества резонансов и их средней плотности, а лишь сказывается на форме (явления интерференции) и положении отдельных резонансов.

Если рассмотреть модель, когда рассеяние происходит на потенциальной яме, в которой находятся две частицы, взаимодействующие с налетающими частицами, то плотность резонансов возрастает в N^2 раз по сравнению с плотностью одночастичных уровней в потенциале v и т.д.

В ядрах имеется несколько десятков одночастичных уровней, на которые могут переходить нуклоны, лежащие на энергетической поверхности ядра. Поэтому разумно предположить, что достаточно очень небольшого (порядка пяти) числа частиц, "активно" участвующих во взаимодействии с налетающими нейтронами, чтобы объяснить наблюдаемую на опыте частоту резонансов в сечении рассеяния медленных нейтронов на ядрах (см.[5]).

Авторы выражают благодарность Я.А.Смородинскому за интерес к работе и Л.Г.Заставенко за полезные дискуссии.

Литература

1. Б.Н.Захарьев, С.Н.Соколов. Препринт ОИЯИ Р-1473 (1963).
2. H.Feshbach. Ann. of Phys., 5, 357 (1958).
3. Н.Мотт, Г.Месси, Теория атомных столкновений, стр. 136. ИИЛ, 1951, Москва.
4. Б.Н.Захарьев. Препринт ОИЯИ Р-1130 (1962).
5. A.K.Kerman, L.S.Rodberg, J.E.Young. Phys. Rev. Lett., 10, 9(1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1964 г.