СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

9-5128

Л.П. Игушкин

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

О ВОЗБУЖДЕНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА

1970

Л.П. Игушкин

О ВОЗБУЖДЕНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА

Взаимодействие сгустков частиц и токов (движущихся и неподвижных) с волноводными устройствами представляет интерес для различных областей физики (ускорительной техники, генерации, усиления колебаний и волн и др.). При этом часто рассматриваются вопросы взаимодействия полей таких источников со всякого рода неоднородностями волноводов (открытый конец волновода, диафрагмы, щели, разрезы и т.д.).

Строгая теория полубесконечного волновода развита в работах Л.А. Вайнштейна с использованием математического метода Винера-Хопфа-Фока (ВХФ). В работе/1/ решена задача о дифракции электромагнитных волн на открытом конце волновода.

Физическая конкретизация метода ВХФ, в частности, выявление свойств факторизованных ядер, позволяет получить решение задачи о возбуждении волноводов с открытым концом заданными источниками поля. В настоящей работе при использовании метода ВХФ и результатов работы/2/ найдено решение задачи о возбуждении полубесконечного волновода. Полученное решение содержит в себе как предельный случай решение задачи о дифракции/1/.

Как известно/2/, решение задачи возбуждения коаксиальной линии выражается формулойx/:

$$E(w) = j(w)\,\frac{P(w)}{Q(v)}\ . \qquad (1)$$

---

x/ Для получения этой формулы необходимо решить неоднородные уравнения Максвелла, представляя поля и токи в виде ряда по цилиндрическим волнам $\exp i\{wz + p\phi - kct\}$, $w^2 + v^2 = k^2$, $k = \frac{\omega}{c}$.

Здесь $j(w)$ – фурье-компоненты (ф.к.) возбуждающих токов источника; $P(w)$, $Q(v)$ – аналитические функции w и v, определяемые параметрами проводящих поверхностей. $P(w)$ имеют разный вид для различных компонент возбужденного электромагнитного поля, функции же $j(w)$, $Q(v)$ – одни и те же для всех составляющих полей. Функция (1) должна убывать при $w \to \pm\infty$ так, чтобы координатные представления полей были конечными функциями. Для этого необходимо, чтобы колебания тока по z с малой длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{w}$ убывали с уменьшением ее длины. Зависимость токов от z должна быть достаточно гладкой.

Так как ф.к. токов источников, расположенных в интервале $z_1 < z < z_2$, суть однозначные аналитические функции, то $E(w)\,e^{iwz_2}$ имеет не более чем степенной рост в верхней полуплоскости w, а $E(w)\,e^{iwz_1}$ не более чем степенной рост в нижней полуплоскости при $w \to \pm\infty$. Этот результат является аналогом теоремы Винера-Пэли/3/, и можно утверждать, что по поведению ф.к. возбужденных полей можно судить не только о самих полях, но и о местоположении возбуждающих их источников.

Несколько вспомогательных предложений.

1. Аналитичность ф.к. полей и токов на поверхностях волноводов соответствует тому, что токи активных источников, возбуждающих систему, ограничены по величине, кусочно-гладкие, и либо находятся в конечной области пространства, либо достаточно быстро убывают при $z \to \pm\infty$.

2. При этом условии (1) ф.к. полей на границе волноводов могут иметь особые точки (полюсы и точки ветвления) только за счёт функций $P(w)$, $Q(v)$.

3. Если $E(w)\,e^{iwz_2}$ растет не быстрее, чем полином в верхней полуплоскости, а $E(w)\,e^{iwz_1}$ – не быстрее, чем полином в нижней полуплоскости при $w \to \pm\infty$, то источники этих полей сосредоточены на отрезке $z_1 < z < z_2$.

В частности, если $E(w)$ имеет вид $E(w) = L(w)\,e^{-iwz_0}$, где $L(w)$ при $w \to \infty$ имеет не более чем степенной рост на всей комплексной плоскости, то источник излучения сосредоточен в $z = z_0$.

Если активные источники находятся справа или слева от точки z, то, согласно (3), накладываются соответствующие требования на $E(w)e^{iwz}$.

При $a_2 \neq \infty$ величины $P(w)\,Q^{-1}(v)$ – однозначные аналитические функции, имеющие полюсы первого порядка по v при $v \neq 0$, и могущие иметь полюс вида v^{-2}. По w эта величина имеет полюсы первого порядка в точках

$$w = \pm w_n \quad , w_n = \pm\sqrt{k^2 - v_n^2} \quad , \ \mathrm{Im}\, w_n > 0 \ . \tag{2}$$

При $v_n = k$ оба полюса в точках $w = w_n$ и $w = -w_n$ сливаются и образуют полюс второго порядка. Полюсам первого порядка соответствуют распространяющиеся и затухающие от источника волны, полюсам второго порядка – резонансные волны в области возбуждающих токов.

Величину $P(w)\,Q^{-1}(v)$ при $a_2 \neq \infty$ представим в виде:

$$L(w) = P(w)\; Q^{-1}(v) = L_+(w) + L_-(w) \quad , \tag{3}$$

где:

$$L_+(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^x(w_n)}{w_n - w} \, , \; L_-(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^x(-w_n)}{w_n + w} \, , \tag{4}$$

где:

$$L^x(a) = \lim_{w \to a} (a - w)\, L(w) \; , \; L^x\,(-a) = \lim_{w \to -a} (a + w) L(w) . \tag{5}$$

Каждое слагаемое в (4) соответствует волноводной волне, удовлетворяющей граничным условиям при $r = a_1, a_2$. Первое слагаемое в (3) соответствует волнам, распространяющимся направо и там затухающим, второе слагаемое – налево. Такое разложение возможно, когда $L(w)$ – однозначная аналитическая функция. Поэтому возбужденное поле можно однозначно представить в виде дискретной суммы волноводных волн.

где $f(w)$– поля активных источников в точках, совпадающих с границей д.в.; $L(w)$, $f(w)$ имеют полюсы (или другие особые точки при $a_2 = \infty$), соответствующие волнам, поля которых удовлетворяют граничным услови-ям при отсутствии д.в., $F_0(w)$ и $L^{-1}(w)$ имеют полюсы (или другие особые точки при $a_2 = \infty$), соответствующие волнам, поля которых удовлетворяют граничным условиям при наличии д.в.

Если д.в. ограничен с одной стороны $z = z_1$, граничные условия на координатные выражения полей и токов ($E_{tg} = 0$ на границе д.в., $F = 0$ на продолжении стенок д.в.) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz}(L\ F + f) = 0 \quad \text{при} \quad z > z_1 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dw\ e^{iwz}\, F = 0 \quad \text{при} \quad z < z_1 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Если искать F в виде $F = F^1 + F_0$, где F_0 определяется (8), то уравнения (9) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz} L\ F^1 = 0 \quad \text{при} \quad z > z_1 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dw\ e^{iwz}\ (F^1 + F_0) = 0 \quad \text{при} \quad z < z_1 . \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

В уравнениях (9) находится отличие полей от случая, когда д.в. отсутствует, в (10) – когда д.в. бесконечен по z.

Первый вид уравнений предполагает наличие сторонних источников в области, где нет д.в., система (10) соответствует случаю, когда ис-точники находятся там, где есть д.в.

В общем случае f, F_0 разделим на две части:

$$f = f_л + f_п\ , \quad F_0 = F_{ол} + F_{оп}\ , \quad F_{\substack{ол \\ оп}} = -L^{-1} f_{\substack{л \\ п}}\ . \qquad (11)$$

Величины $f_л$ и $f_п$ обусловлены токами, расположенными справа и слева от точки z_1, причем $\left\{ \begin{matrix} f_л \\ F_{ол} \end{matrix} \right\} e^{iwz_1}$ имеют не более чем степенной рост в верхней полуплоскости, $\left\{ \begin{matrix} f_п \\ F_{оп} \end{matrix} \right\} e^{iwz_1}$ – в нижней полуплоскости w при $w \to \pm\infty$.

Исходя из этого, наведенные токи на д.в. находим в виде

$$F^1 + F_{оп} \quad ,$$

и уравнения типа (9,10) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iwz} (L \quad F^1 + f_л) = 0 \quad \text{при} \quad z > z_1 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz} (F^1 + F_{оп}) = 0 \quad \text{при} \quad z < z_1 \end{aligned} \right\} \qquad (12)$$

Систему уравнений решим методом Винера-Хопфа-Фока. Заменим уравнения (12) следующими требованиями на подинтегральные функции $LF^1 + f_л$ и $F^1 + F_{оп}$. Функция $LF^1 + f_л$ аналитична на действительной оси и ее можно продолжить аналитически в верхнюю полуплоскость w, где она, будучи умноженной на e^{iwz_1}, имеет не более чем степенной рост при $w \to \infty$ и не имеет там особых точек. Функция $F^1 + F_{оп}$ аналитична на действительной оси и ее можно продолжить аналитически в нижнюю полуплоскость w, где она, будучи умноженной на e^{iwz_1}, имеет не более, чем степенной рост при $w \to -\infty$ и не имеет там особых точек.

Исходя из этого, необходимо искать решение F^1 в виде:

$$F^1(w) = \phi(w)\, e^{-iwz_1} , \qquad (13)$$

где $\phi(w)$ – аналитическая функция, которая во всей комплексной плоскости w имеет не более, чем степенной рост на бесконечности. $L\phi(w)$ и $\phi(w)$ имеют такие особые точки, которые в соответствующих подинтегральных выражениях взаимно уничтожаются с особыми точками токов источников, соответствующих волнам, подходящим к точке $z = z_1$ слева и справа соответственно. Кроме этого, $L\phi(w)$ и $\phi(w)$ могут иметь особые точки, соответствующие волнам, идущим вправо и влево от точки z_1, и поля которых удовлетворяют граничным условиям там, где эти волны распространяются. Отметим, что в настоящем методе расчёта каждому разрыву в граничных условиях соответствует свой дополнительный центр излучения. Для определения F^1 факторизуем ядра $L(w)$, $L^{-1}(w)$

$$L(w) = L_+(w)\, L_-(w) \quad , \quad L^{-1}(w) = L_-^{-1}(w)\, L_+^{-1}(w) \quad , \tag{14}$$

так, что L_- и L_-^{-1} имеют особые точки только в нижней полуплоскости w, а в верхней полуплоскости не более, чем степенной рост при $w \to \infty$, L_+, L_+^{-1} имеют особые точки только в верхней полуплоскости w, а в нижней - не более, чем степенной рост при $w \to -\infty$. Поэтому L в верхней полуплоскости w имеет особые точки только за счёт L_+, в нижней - только за счёт L_-, ядро L^{-1} в верхней полуплоскости w имеет особые точки только за счёт L_+^{-1}, в нижней - только за счёт L_-^{-1}. L_+, L_- имеют полюсы, соответствующие волнам, поля которых удовлетворяют граничным условиям только при отсутствии д.в. L_+^{-1}, L_-^{-1} имеют полюсы, соответствующие волнам, поля которых удовлетворяют граничным условиям только при наличии д.в. L_+, L_+^{-1} имеют полюсы, соответствующие волнам, направленным вправо от источника. L_-, L_-^{-1} имеют полюсы, соответствующие волнам, распространяющимся влево от источника.

Исходя из этого, F^1 можно искать в виде:

$$F^1(w) = L_+^{-1}(w)\,[A_+^1(w) + B_-^1(w)]\, e^{-iwz_1}, \tag{15}$$

тогда

$$LF^1 = L_-(A_+^1 + B_-^1)\, e^{-iwz_1}. \tag{16}$$

Здесь A_+^1 и B_-^1 подбираются так, чтобы скомпенсировать полюсы, соответствующие волнам, подходящим к точке $z = z_1$ слева и справа.

Нескомпенсированные полюсы F^1 и LF^1 определяются полюсами L_+^{-1}, L_-, т.е. они будут соответствовать волнам, поля которых удовлетворяют граничным условиям в области, где эти волны распространяются.

Так как ядра $L(w)$ удовлетворяют равенству

$$L(-w) = L(w) \quad , \tag{17}$$

потребуем, чтобы факторизованные ядра удовлетворяли условию:

$$L_+(-w) = L_-(w) \ , \tag{18}$$

которое не противоречит физическим требованиям факторизации и приводит к тому, что достаточно вычислить одну из факторизованных функций.

$F^1 + F_{оп}$ и $LF^1 + f_л$ примут вид

$$F^1 + F_{оп} = L_+^{-1}(A_+^1 + B_-^1)\, e^{-iwz_1} + F_{оп} \quad , \tag{19}$$

$$LF^1 + f_л = L_-(A_+^1 + B_-^1)\, e^{-iwz_1} + f_л \quad . \tag{20}$$

Подберем A_+^1 и B_-^1 таким образом, чтобы A_+^1 скомпенсировало в верхней полуплоскости полюсы $f_л$ в выражении (19), а B_-^1 компенсировало полюсы $F_{оп}$ в нижней полуплоскости w в равенстве (20). $F_{оп}$, $f_л$ имеют полюсы только первого порядка. Точки, в которых ф.к. полей волн имеют полюсы, удовлетворяющие граничным условиям при отсутствии д.в., обозначим $\pm w_л$; точки, соответствующие полюсам ф.к. полей волн, удовлетворяющие граничным условиям при наличии д.в., обозначим $\pm w_k$.

Вблизи своего полюса в верхней полуплоскости w $f_л$ имеет вид:

$$f_л = \frac{f_л^*(w_n)}{w_n - w} \quad . \tag{21}$$

Слагаемое в A_+^1 , компенсирующее этот полюс в (19):

$$-\frac{L_-^{-1}(w_n)}{w_n - w} f^*_л (w_n)\, e^{i w_n z_1}$$

Вблизи своего полюса в нижней полуплоскости w $F_{оп}$ имеет вид:

$$F_{оп} = \frac{F^*_{оп}(-w_k)}{w_k + w} . \tag{22}$$

Соответствующее слагаемое в B^1_-, компенсирующее этот полюс в уравнении (20)

$$-\frac{L_+(-w_k)}{w_k + w} F^x_{оп} (-w_k)\, e^{-i w_k z_1}$$

В результате компенсации всех волн, подходящих к точке справа и слева, величины A^1_+ и B^1_- примут вид:

$$A^1_+(w) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_-^{-1}(w_n)}{w_n - w} f^x_л (w_n)\, e^{i w_n z_1} , \tag{23}$$

$$B^1_-(w) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_+(-w_k)}{w_k + w} F^x_{оп}(-w_k)\, e^{-i w_k z_1} . \tag{24}$$

Так как L_-^{-1} имеет полюсы только в нижней полуплоскости, а L_+ в верхней полуплоскости $L_-^{-1}(w_n)$ и $L_+(-w_k)$ – конечные величины.

Таким образом, выражение (15) с формулами (23,24) представляет общее решение задачи о возбуждении полубесконечного волновода конечными произвольно локализованными источниками электромагнитного поля.

Автор благодарит Э.И. Уразакова за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. *Л.А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации . Москва, "Советское радио", 1966.*
2. *Л.П. Игушкин, Э.И. Уразаков. Цилиндрические электромагнитные поля и плазменные сгустки . ч. 1, II, Москва, препринт НИИЯФ МГУ, 1969.*
3. *Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование фурье в комплексной плоскости , Москва, "Наука", 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел

18 мая 1970 года.