

С 34513  
И-289

13/III-7

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

**Дубна**

**9 - 5127**



**Л.П. Игушкин, Э.И. Уразаков**

**ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ**

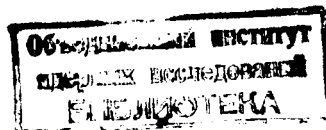
**К ТЕОРИИ  
ВОЗБУЖДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ВОЛНОВОДОВ**

**1970**

9 - 5127

Л.П. Игушкин, Э.И. Уразаков

К ТЕОРИИ  
ВОЗБУЖДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ВОЛНОВОДОВ



При решении неоднородных граничных задач электродинамики с одним разрывом граничных условий часто используется метод Винера-Хопфа-Фока (ВХФ) /1/.

К таким задачам относятся дифракция электромагнитных волн на конце волновода /1/, возбуждение полубесконечного волновода произвольными источниками /2/ и т.д. Эти задачи формулируются в виде, например, системы интегральных уравнений, решение которой получается в общем виде путем факторизации ядра интегрального уравнения.

Для задач с двумя или несколькими разрывами граничных условий общий метод решения системы интегральных уравнений пока не найден. Для конкретных задач в определенных предельных случаях получены асимптотические решения /3/.

В настоящей работе изучается возбуждение конечных отрезков волновода; задача о возбуждении одного конечного отрезка сводится к системе интегральных уравнений относительно плотности наведенного на стенках тока. Физическая интерпретация факторизованных ядер позволяет рассматривать концы волновода как дополнительные источники электромагнитных волн с определенными свойствами.

Таким же методом находится решение граничных задач для системы из конечных отрезков, в том числе и для периодически расположенных вдоль оси отрезков волновода.

В /2/ разработан метод решения задачи о возбуждении волновода с одним разрывом граничных условий. Один из результатов, полученных в /2/, - это физическая интерпретация точки разрыва как нового, наведенного источника электромагнитных волн с определенными конкретными свойствами. Основываясь на этом, найдем решение задачи о возбуждении круглого волновода с двумя и более разрывами граничных условий <sup>x/</sup>.

Рассмотрим сначала возбуждение отрезка круглого волновода ( $z_1 \leq z \leq z_2$ ,  $0 < \phi < 2\pi$ ,  $r = d$ ), помещенного коаксиально внутрь бесконечной коаксиальной линии с радиусами стенок  $r = a_1$ ,  $r = a_2$  ( $a_1 < a_2$ ,  $a_1 < r$ ,  $b < a_2$ ) вместе со сторонними источниками. В общем случае поля активных источников обусловлены токами, находящимися слева от  $z_1$ , между  $z_1$  и  $z_2$  и справа от  $z_2$ .

$$f = f_{\text{л}} + f_{\text{ср}} + f_{\text{п}}. \quad (1)$$

Наведенные токи на стенках волновода ищем в виде:

$$F = F^1 + F_{\text{оп}}. \quad (2)$$

Уравнения типа Винера-Хопфа-Фока (ВХФ), которым должны удовлетворять эти токи, принимают вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iwz} (F^1 + F_{\text{оп}}) = 0 \quad \text{при } z_1 > z > z_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{iwz} (LF^1 + f + f) = 0 \quad \text{при } z_1 < z < z_2$$
(3)

Здесь, в отличие от случая, разобранный в /2/, имеются два новых центра излучения при  $z = z_1$  и  $z = z_2$ . Проведя соответствующий сопоставительный анализ уравнений (3), как это сделано в /2/, искомую плотность тока  $F^1$  определяем в виде:

<sup>x/</sup> Обозначения, принятые здесь, совпадают с обозначениями /2/.

$$F^1 = L_+^{-1}(A_+^1 + B_-^1)e^{-1wz_1} + L_-^{-1}(A_-^2 + B_+^2)e^{-1wz_2} . \quad (4)$$

Здесь в  $A_+^1$  и  $B_-^1$  входят амплитуды волн, подходящих к точке  $z = z_1$  слева и справа, в  $A_-^2$  и  $B_+^2$  входят амплитуды волн, подходящих к точке  $z = z_2$  справа и слева (рис. 1).

Волны, подходящие к точке  $z = z_1$  слева, определяются величиной  $f_{л}$ , поэтому  $A_+^1$  имеет вид:

$$A_+^1(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_-^{-1}(w_n)}{w_n - w} f_x(w_n) e^{1w_n z_1} . \quad (5)$$

Волны, подходящие к точке  $z = z_2$  справа, определяются величиной  $f_{п}$ , поэтому  $A_-^2$  записывается следующим образом:

$$A_-^2(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_+^{-1}(-w_n)}{w_n + w} f_x(-w_n) e^{-1w_n z_2} . \quad (6)$$

Волны, подходящие к точке  $z = z_1$  справа, определяются величиной (согласно рис. 1):

$$F_{0\text{ ср}} + L_-^1(A_-^2 + B_+^2)e^{-1wz_2} . \quad (7)$$

Первое слагаемое определяется активным источником, расположенным при  $z_1 \leq z \leq z_2$ , второе обусловлено наведенным центром излучения при  $z = z_2$ .

Источники, находящиеся справа от точки  $z = z_2$ , непосредственно влиять на конец волновода при  $z = z_1$  не будут, так как идущие от них волны компенсируются дополнительным источником при  $z = z_2$ , что приводит к появлению  $A_-^2$ . По той же причине не нужно учитывать полюсы  $A_-^2$  в (7). В результате, рассуждая как для случая полубесконечного волновода (см. /2/), получим

$$B_{-}^{1}(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_{+}(-w_k)}{w_k + w} \{ F_{0\text{cp}}^x(-w_k) + L_{-}^{-1x}(-w_k) [ A_{-}^2(-w_k) + B_{+}^2(-w_k) ] e^{i w_k z_2} \} e^{-i w_k z_1} \quad (8)$$

Точно так же волны, подходящие слева к точке  $z = z_2$ , определяются выражением:

$$F_{0\text{cp}}^{+} + L_{+}^{-1} (A_{+}^1 + B_{-}^1) e^{-i w z_1} \quad (9)$$

и величина  $B_{+}^2$  имеет вид:

$$B_{+}^2(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_{-}(w_k)}{w_k - w} \{ F_{0\text{cp}}^x(w_k) + L_{+}^{-1x}(w_k) [ A_{+}^1(w_k) + B_{-}^1(w_k) ] e^{-i w_k z_1} \} e^{i w_k z_2} \quad (10)$$

Функции  $B_{-}^1$  и  $B_{+}^2$  получены сразу в явном виде. Эти величины выражаются через уже известные и друг через друга. Для их нахождения нужно решить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов рядов (8,10), которые пропорциональны амплитудам волн, идущим от одного конца волновода к другому. Так как зависимость величин  $F_{0\text{cp}}^x$ ,  $f_{\text{л}}^x$ ,  $f_{\text{п}}^x$  от месторасположения центра активного источника дается множителями сдвига  $e^{\pm i w_k z_0}$ , где  $z_0$  - координата центра источника, величины  $F_{0\text{cp}}^x$ ,  $f_{\text{л}}^x$ ,  $f_{\text{п}}^x$ , вычисленные в системе координат центров источников (обозначенные соответственно  $F_{0\text{срц}}^x$ ,  $f_{\text{лц}}^x$ ,  $f_{\text{пц}}^x$ ), определяются

$$\begin{pmatrix} F_{0\text{срц}}^x \\ f_{\text{лц}}^x \\ f_{\text{пц}}^x \end{pmatrix} = e^{i w z_0} \begin{pmatrix} F_{0\text{cp}}^x \\ f_{\text{л}}^x \\ f_{\text{п}}^x \end{pmatrix} \quad (11)$$

и в формулах (5,6,8,10) появятся экспоненциальные множители вида  $\exp \pm iw \frac{z_1 - z_0}{k}$ . Эти множители равны величинам, на которые умножаются поля волны при прохождении расстояния от источника до конца волновода. Начиная с некоторых номеров  $n$  и  $k$ , волны становятся затухающими, причем степень затухания растет пропорционально  $n$  и  $k$ . Поэтому эти множители в выражениях (5,6,8,10) экспоненциально убывают с ростом  $n$  и  $k$ . Остальные множители (5,6,8,10) при  $w = ic$  имеют не более чем степенной рост при  $n \rightarrow \infty$ ; их влиянием не сходимостью рядов можно пренебречь по сравнению с экспоненциальным членом. Ряды в выражениях для  $A_+^1, A_-^2, B_-^1, B_+^2$  сходятся экспоненциально, в эти ряды выражения по сути дела войдут только волны, дошедшие от источника до конца отрезка волновода. Поэтому в систему алгебраических уравнений для коэффициентов рядов (8,10) войдут только амплитуды таких волн, которые способны дойти от точки  $z_1$  до  $z_2$  и обратно.

Величина  $F^1 + F_{0\text{ср}}$  имеет вид:

$$F^1 + F_{0\text{ср}} = L_+^{-1} (A_+^1 + B_-^1) e^{-iwz_1} + L_-^{-1} (A_-^2 + B_+^2) e^{-iwz_2} + F_{0\text{ср}}. \quad (12)$$

В этом равенстве после решения системы уравнений для коэффициентов  $B_-^1$  и  $B_+^2$  (8,10) полюсы  $F_{0\text{ср}}$  в нижней полуплоскости скомпенсируются с полюсами  $L_-^{-1}$  и  $B_-^1$ , полюсы  $F_{0\text{ср}}$  в верхней полуплоскости скомпенсируются с полюсами  $L_+^{-1}$  и  $B_+^2$ . Полюсы  $A_+^1$  и  $A_-^2$  при умножении соответственно на  $L_+^{-1}$  и на  $L_-^{-1}$  сократятся. В результате получим, что функция  $F^1 + F_{0\text{ср}}$  не имеет полюсов нигде в комплексной плоскости  $w$  и, умноженная на  $e^{iwz_1}$ , имеет не более чем степенной рост в нижней полуплоскости, а при умножении на  $e^{iwz_2}$  - не более чем степенной рост в верхней полуплоскости  $w$  при  $w \rightarrow \infty$ . Это приводит к выполнению первого равенства системы (3). Величину  $LF^1 + f_{\text{л}} + f_{\text{п}}$  запишем в виде:

$$LF^1 + f_{\Pi} + f_{\Pi} = \{ L_{-} (A_{+}^1 + B_{-}^1) e^{-iwz_1} + f_{\Pi} \} + \\ + \{ L_{+} (A_{-}^2 + B_{+}^2) e^{-iwz_2} + f_{\Pi} \}. \quad (13)$$

Первое слагаемое в (13), умноженное на  $e^{iwz_1}$ , при  $w \rightarrow \infty$  в верхней полуплоскости имеет не более, чем степенной рост; второе слагаемое, умноженное на  $e^{iwz_2}$  при  $w \rightarrow -\infty$ , имеет не более, чем степенной рост в нижней полуплоскости. Это позволяет при  $z_1 < z < z_2$  контур интегрирования (13) замкнуть для первого слагаемого сверху, для второго снизу и вычислить интегралы при помощи вычетов. Первое слагаемое (13) может иметь в верхней полуплоскости  $w$  полюсы только за счет  $A_{+}^1$  и  $A_{-}^1$ , второе в нижней - за счет  $A_{-}^2$  и  $f_{\Pi}$ , а эти полюсы в обоих членах компенсируются друг другом.

Решение (4) с определяющими формулами (5,6,8,10) при  $z_2 \rightarrow \infty$  или при  $z_1 \rightarrow -\infty$  превращается в решение для полубесконечного волновода.

Таким же способом построим решение для двух одинаковых полубесконечных волноводов, направленных в  $-\infty$  и в  $+\infty$  соответственно от точек  $z = z_1$  и  $z = z_2$  (волновод с отверстием длины  $|z_1 - z_2|$ ).

Токи на каждом из таких волноводах ищем в виде:

$$F = F_{\Pi}^1 + F_{0\Pi}, \quad (14)$$

$$F = F_{\Pi}^1 + F_{0\Pi},$$

где, проводя аналогичные рассуждения, сразу получаем:

$$F_{\Pi}^1 = L_{-}^{-1} (A_{-}^1 + B_{+}^1) e^{-iwz_1},$$

$$F_{\Pi}^1 = L_{+}^{-1} (A_{+}^2 + B_{-}^2) e^{-iwz_2}. \quad (15)$$

Величины  $B_{+}^1$  и  $B_{-}^2$  имеют вид:



$$B_+^1(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_-(w_k)}{w_k - w} F^x(w_k) e^{i w_k z_1}, \quad (16)$$

$$B_-^2(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_+(-w_k)}{w_k + w} F^x(-w_k) e^{-i w_k z_2}, \quad (17)$$

а значения  $A_-^1$  и  $A_+^2$  связаны уравнениями:

$$A_-^1(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_+^{-1}(-w_n)}{w_n + w} \{ f^x(-w_n) + L_-^x(-w_n) [A_+^2(w_n) + B_-^2(-w_n)] e^{i w_n z_2} \} e^{-i w_n z_1}, \quad (18)$$

$$A_+^2(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_-^{-1}(w_n)}{w_n - w} \{ f^x(w_n) + L_+^x(w_n) [A_-^1(w_n) + B_+^1(w_n)] e^{-i w_n z_1} \} e^{i w_n z_2}. \quad (19)$$

Решение этой задачи (формулы (14), (15) с коэффициентами (16-19)) удовлетворяет граничным условиям, которые в заданной формулировке имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{i w z} (L F_{\text{л}}^1 + L F_{\text{п}}^1 + f_{\text{ср}}) = 0 \quad \text{при } z_1 > z > z_2 \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{i w z} (F_{\text{л}}^1 + F_{\text{ол}}^1 + F_{\text{п}}^1 + F_{\text{оп}}^1) = 0 \quad \text{при } z_1 < z < z_2$$

Подобным образом можно построить решение для случая двух полубесконечных волноводов различных радиусов. Тогда придется вводить зависимость полей от радиуса  $r$ , что не встретит, по-видимому, принципиальных трудностей и для других случаев, когда имеется конечное число граничных условий. Для примера рассмотрим задачу о возбуждении бесконечной системы из отрезков волновода с одинаковыми радиусами. Концы волноводов находятся в точках  $z = a_n, b_n$ , причем каждый отрезок волновода расположен при

$$a_n \leq z \leq b_n, \quad (21)$$

а на всех интервалах вида  $b_{n-1} < z < a_n$  (22) дополнительные волноводы отсутствуют.

Искомые токи на каждом из отрезков волновода зададим в виде:

$$F_m = F_m^1 + F_{\text{нсп}}^m, \quad (23)$$

где

$$F_m^1 = L_+^{-1} (A_+^m + B_-^m) e^{-i w a_m} + L_-^{-1} (A_-^m + B_+^m) e^{-i w b_m} \quad (24)$$

Для бесконечной системы из таких конечных отрезков волновода величины  $A_{\pm}^m$ ,  $B_{\pm}^m$  связаны следующими уравнениями:

$$A_+^m(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_-^{-1}(w_n)}{w_n - w} \{ f_{\text{мн}}^x(w_n) + L_+^x(w_n) [A_-^{m-1}(w_n) + B_+^{m-1}(w_n)] e^{-i w_n b_{m-1}} \} e^{i w_n a_m} \quad (25)$$

$$B_-^m(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_+(-w_k)}{w_k + w} \{ F_{\text{мсп}}^x(-w_k) + L_-^{-1}(-w_k) [A_-^m(-w_k) + B_+^m(-w_k)] e^{i w_k b_m} \} e^{-i w_k a_m} \quad (26)$$

$$A_-^m(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_+^{-1}(-w_n)}{w_n + w} \{ f_{\text{мл}}^x(-w_n) + L_-^x(-w_n) [A_-^{m+1}(-w_n) + B_+^{m+1}(-w_n)] e^{i w_n a_{m+1}} \} e^{-i w_n b_m} \quad (27)$$

$$B_+^m(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_-(w_k)}{w_k - w} \{ F_{\text{мсп}}^x(w_k) + L_+^{-1}(w_k) [A_+^m(w_k) + B_-^m(w_k)] e^{-i w_k a_m} \} e^{i w_k b_m} \quad (28)$$

В общем случае это бесконечная система бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Система уравнений (25- 28) упрощается, если решать задачу об электромагнитных волнах в периодических структурах из отрезков волноводов.

Пусть в такой системе длина отрезка волновода равна  $l_1$ , длина промежутка между отрезками  $l_2$ . Все  $f$  и  $F$  равны нулю, а поля и токи имеют период  $l_1 + l_2$ , т.е. при переходе к следующему отрезку умножаются на  $e^{i w_0(l_1 + l_2)}$ , где  $w_0$  - пока неизвестная величина. В этом случае коэффициенты  $A_{\pm}^m$  и  $B_{\pm}^m$  связаны друг с другом соотношениями:

$$A_+^m(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_-^{-1}(w_n)}{w_n - w} L_+^x(w_n) [A_-^m(w_n) + B_+^m(w_n)] e^{i w_n l_2 - i w_0(l_1 + l_2)} \quad (29)$$

$$B_-^m(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_+^{-1}(-w_k)}{w_k + w} L_-^{-1x}(-w_k) [A_+^m(-w_k) + B_-^m(-w_k)] e^{i w_k l_1} \quad (30)$$

$$A_-^m(w) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_+^{-1}(-w_n) L_-^x(-w_n)}{w_n + w} [A_+^m(-w_n) + B_-^m(-w_n)] e^{i w_n l_2 + i w_0(l_1 + l_2)} \quad (31)$$

$$B_+^m(w) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_-^{-1}(w_k) L_+^{-1x}(w_k)}{w_k - w} [A_+^m(w_k) + B_-^m(w_k)] e^{i w_k l_1} \quad (32)$$

Это одна бесконечная система линейных алгебраических уравнений, сходящихся экспоненциально.

Величина  $w_0$  находится из условия совместности этих уравнений. Если рассмотреть конкретные электромагнитные волны (например, симметричные волны электрического типа), то из уравнений (29-32) получаются результаты, аналогичные результатам, найденным в работе /4/.

Системы уравнений для случая нескольких разрывов граничных условий сходятся экспоненциально при  $z_1 \neq z_2$ . При  $z_1 = z_2$  или  $a_n = b_n$  показатели всех экспонент обращаются в нуль. Поэтому, например, решение для полубесконечной коаксиальной линии трудно получить из решения для двух бесконечных коаксиальных цилиндров со сдвинутыми концами при  $a \rightarrow b$ . Однако в этом случае возможно пользоваться другим методом решения - факторизацией матричного ядра  $L(w)$  системы уравнений для  $F^1$  и  $F^2$ .

Авторы благодарят участников семинара ОНМУ ОИЯИ за обсуждение.

## Л и т е р а т у р а

1. Л.А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации. Москва, "Советское радио", 1966.
2. Л.П. Игушкин. Препринт ОИЯИ 9-5128, Дубна, 1970.
3. Б. Нобл. Метод Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Ил., Москва, 1962.
4. З.С. Агранович, В.П. Шестопапов. ЖТФ, т. 34, в 11, стр. 1960, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел

18 мая 1970 года.

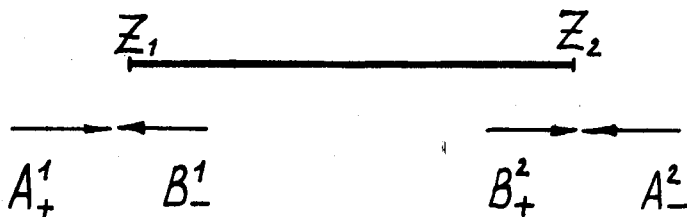


Рис. 1.