ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2274

В.А.Вагин, В.И.Котов, М.М.Офицеров

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ГИБРИДНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ АНИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

1965

Р-2274

В.А.Вагин, В.И.Котов, М.М.Офицеров

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ГИБРИДНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ АНИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Направлено в журнал
"Радиотехника и электроника"

В настоящей работе исследованы условия распространения и свойства гибридных волн в круглом волноводе, частично заполненном анизотропным диэлектриком, причем рассматриваемая анизотропная среда характеризуется диагональным однократно вырожденным тензором

$$\epsilon_{ik} = \begin{vmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix} . \qquad (1)$$

Как показано в работе С.М.Рытова [1], подобными диэлектрическими свойствами, в частности, обладает среда, состоящая из переодически чередующихся вдоль оси волновода слоев двух изотропных диэлектриков с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и ϵ_2 и толщиной слоев соответственно h_1 и h_2 при условии $h_1 + h_2 \ll \lambda_B$, где λ_B – длина волны в волноводе. Компоненты тензора (1) при этом выражаются следующими соотношениями:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{и} \quad \epsilon_z = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (h_1 + h_2)}{\epsilon_1 h_2 + \epsilon_2 h_1} .$$

В частности, положив $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = \epsilon$, мы получим случай круглого волновода, нагруженного тонкими диэлектрическими диафрагмами. При этом число диафрагм на длину волны λ_B велико.

В данной работе основное внимание уделяется особенностям в поведении гибридных волн в рассматриваемой волноводной структуре на примере волны с $\nu = 1$.

Как обычно, предполагаем, что поля в волноводе описываются выражениями:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}(r)\, e^{i(\omega t - \kappa z + \nu\theta)} \quad \text{и} \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H}(r)\, e^{i(\omega t - \kappa z + \nu\theta)} , \qquad (2)$$

где r, θ, z – цилиндрическая система координат, $\kappa = \frac{k}{\beta_\phi}$ – постоянная распространения, β_ϕ – фазовая скорость в единицах скорости света, k – волновое число, ω – круговая частота и $\nu = 0,1,2...$ Используя граничные условия на поверхностях $r = b$ и $r = a$, где b – радиус круглого волновода, a – радиус свободного канала, нетрудно получить дисперсионное соотношение для гибридных волн:

$$\gamma_1^2 \gamma_2^2 \Psi \Phi + \frac{\nu}{ka}(\epsilon_r - 1)[\Psi + (1-\gamma_1^2)\Phi] = 0, \tag{3}$$

где

$$\Psi = \frac{\epsilon_r \eta}{\gamma_2} \frac{\psi_1(\eta k_2 b, \eta k_2 a)}{\psi_0(\eta k_2 b, \eta k_2 a)} - \frac{J_{\nu+1}(k_1 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)},$$

$$\Phi = \frac{1}{\gamma_2} \cdot \frac{\phi_1(k_2 b, k_2 a)}{\phi_0(k_2 b, k_2 a)} - \frac{J_{\nu+1}(k_1 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)}, \tag{4}$$

$$\gamma_1^2 = \frac{k_1^2}{k^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{k_2^2}{k^2}, \quad k_1^2 = k^2 - \kappa^2, \; k_2^2 = k^2 \epsilon_r - \kappa^2, \quad \eta = \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_r}} .$$

Функции ψ_1, ψ_0, ϕ_1 и ϕ_0 определяются следующими соотношениями:

$$\psi_1 = \begin{vmatrix} J_\nu(\eta k_2 b) & N_\nu(\eta k_2 b) \\ J_{\nu+1}(\eta k_2 a) & N_{\nu+1}(\eta k_2 a) \end{vmatrix}, \qquad \phi_1 = \begin{vmatrix} J'_\nu(k_2 b) & N'_\nu(k_2 b) \\ J_{\nu+1}(k_2 a) & N_{\nu+1}(k_2 a) \end{vmatrix},$$

$$\psi_0 = \begin{vmatrix} J_\nu(\eta k_2 b) & N_\nu(\eta k_2 b) \\ J_\nu(\eta k_2 a) & N_\nu(\eta k_2 a) \end{vmatrix}, \qquad \phi_0 = \begin{vmatrix} J'_\nu(k_2 b) & N'_\nu(k_2 b) \\ J_\nu(k_2 a) & N_\nu(k_2 a) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Поля в канале удобно записать в виде [2,3]:

$$E_z = \left(p + \frac{\kappa}{k} q\right) \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)}, \qquad H_z = i\left(p\frac{\kappa}{k} + q\right)\frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)},$$

$$E_r = \frac{i}{J_\nu(k_1 a)} \left\{ p \frac{\kappa}{k_1} J_\nu(k_1 r) + q\left[\frac{\kappa^2}{k k_1} J_{\nu+1}(k_1 r) + \frac{\nu}{kr} J_\nu(k_1 r)\right]\right\}, \tag{6}$$

$$E_\theta = \frac{1}{J_\nu(k_1 a)} \{ p \frac{\kappa}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 r) + q [\frac{k_1}{k} J_{\nu+1}(k_1 r) - \frac{\nu}{kr} J_\nu(k_1 r)] \} ,$$

$$H_r = - \frac{1}{J_\nu(k_1 a)} \{ p [\frac{\kappa^2}{k k_1} J_{\nu+1}(k_1 r) + \frac{\nu}{kr} J_\nu(k_1 r)] - q \frac{\kappa}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 r) \} ,$$

$$H_\theta = \frac{i}{J_\nu(k_1 a)} \{ p [\frac{k_1}{k} J_{\nu+1}(k_1 r) - \frac{\nu}{kr} J_\nu(k_1 r)] + q \frac{\kappa}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 r) \} ,$$

где p и q – постоянные. Связь между ними находится из следующей системы уравнений, получаемой при выводе дисперсионного соотношения:

$$\begin{aligned} & p \frac{\kappa}{k} \Phi + q [\Phi + \frac{\nu}{ka} (\frac{\epsilon_r - 1}{\gamma_2^2})] = 0 , \\ & p\Psi + q \frac{\kappa}{k} [\Psi - \frac{\nu}{ka} (\frac{\epsilon_r - 1}{\gamma_2^2})] = 0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Поля в диэлектрике определяются обычным способом:

$$\Delta_\perp E_z + \eta^2 k_2^2 E_z = 0 , \quad \Delta_\perp H_z + k_2^2 H_z = 0 ,$$

$$E_r = \frac{\nu k}{k_2^2 r} H_z - \frac{i\kappa}{k_2^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} , \quad H_r = - \frac{\nu k \epsilon}{k_2^2 r} E_z - \frac{i\kappa}{k_2^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} , \tag{8}$$

$$E_\theta = \frac{\nu\kappa}{k_2^2 r} E_z + \frac{ik}{k_2^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} , \quad H_\theta = \frac{\nu\kappa}{k_2^2 r} H_z - \frac{ik\epsilon_r}{k_2^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} ,$$

где оператор $\Delta_\perp = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r}$.

Отсюда, учитывая граничные условия при $r = a$ и $r = b$ для продольных компонент поля в диэлектрике, найдем:

$$E_z = (p + \frac{\kappa}{k} q) \frac{\psi_0(\eta k_2 b, \eta k_2 r)}{\psi_0(\eta k_2 b, \eta k_2 a)} \quad \text{и} \quad H_z = i(p \frac{\kappa}{k} + q) \frac{\phi_0(k_2 b, k_2 r)}{\phi_0(k_2 b, k_2 a)} . \tag{9}$$

Дисперсионное уравнение (3) по своей структуре не отличается от соответствующего уравнения для круглого волновода с изотропным диэлектриком (см., например /2/).

Различие состоит лишь в том, что в выражение для функции Ψ входит параметр η, характеризующий степень анизотропии диэлектрического заполнения. Значение $\eta = 1$ соответствует изотропному диэлектрику.

Нетрудно показать, что симметричные волны в рассматриваемой волноводной структуре также не имеют гибридного характера и при $\nu = 0$ уравнение (3) распадается на два независимых дисперсионных соотношения: $\Psi = 0$ (E –волны) и $\Phi = 0$ (H –волны). Наоборот, несимметричные волны ($\nu \neq 0$) являются гибридными и анализ дисперсионного уравнения (3) для них в общем виде представляет весьма сложную задачу. Однако существует два частных случая ($\beta_\phi = 1$ и $\beta_\phi \to \infty$), для которых уравнение (3) значительно упрощается. При $\beta_\phi = 1$ ($\gamma_1 = 0$) оно имеет вид

$$\sqrt{\epsilon_z \epsilon_r}\, \frac{\psi_1}{\psi_0} + \frac{\phi_1}{\phi_0} - \frac{k_2 a}{2} = 0 \tag{10}$$

и при критических частотах ($\kappa = 0$, $\beta_\phi \to \infty$) распадается на два уравнения:

$$\sqrt{\epsilon_z}\, \frac{\psi_1(\sqrt{\epsilon_z}\, kb, \sqrt{\epsilon_z}\, ka)}{\psi_0(\sqrt{\epsilon_z}\, kb, \sqrt{\epsilon_z}\, ka)} - \frac{J_{\nu+1}(ka)}{J_\nu(ka)} = 0, \tag{11а}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}\, \phi_0(\sqrt{\epsilon_r}\, kb, \sqrt{\epsilon_r}\, ka)}\, \frac{\partial \phi_0(\sqrt{\epsilon_r}\, kb, \sqrt{\epsilon_r}\, ka)}{\partial(\sqrt{\epsilon_r}\, ka)} + \frac{J'_\nu(ka)}{J_\nu(ka)} = 0. \tag{11б}$$

Существование двух независимых уравнений связано с вырождением гибридных волн при $\beta_\phi \to \infty$ в волны H (уравнение 11а) и волны E (уравнение 11б). Компоненты полей для этих волн нетрудно получить, положив $\kappa = 0$ в (6), (8) и (9). При этом постоянные p и q развязываются. Зависимость уравнения (11а) от продольной ϵ_z и (11б) от поперечной ϵ_r компонент тензора (1) объясняется тем, что для E – волн из всех компонент электрического поля отличной от нуля является только E_z , а для H –волн – E_θ и E_r . Решение уравнений (11а) и (11б) при $\nu = 1$ для первых корней представлено на рис. 1а,б.

Прежде чем приступить к дальнейшему рассмотрению дисперсионных свойств гибридных волн, остановимся на частном случае $a/b = 0$ (волновод полностью заполнен диэлектриком). Компоненты полей в таком волноводе определяются только соотношениями (8) и распространяющиеся волны представляют собой обычные E и H моды. Дисперсионные уравнения для них имеют простой вид:

$$J'_\nu(k_2 b) = 0 \qquad (\text{для } H - \text{волн}); \tag{12а}$$

и

$$J_\nu(\eta k_2 b) = 0 \qquad (\text{для } E - \text{волн}). \tag{12б}$$

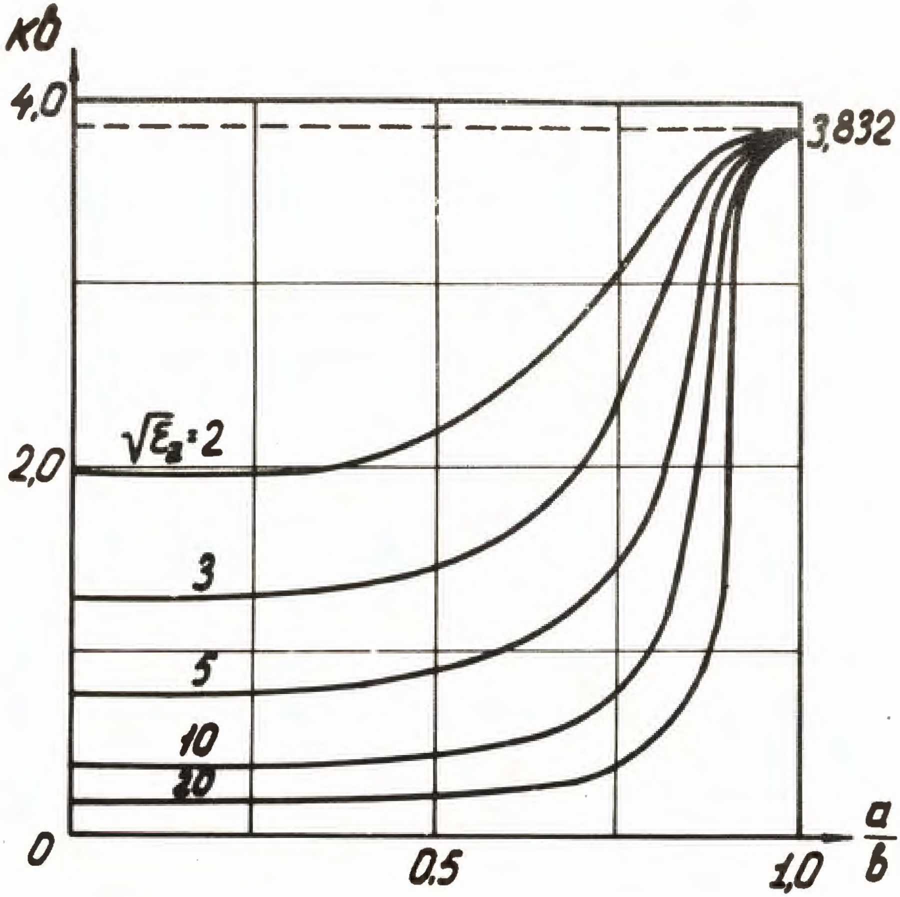

Рис. 1 а. Зависимость критической частоты от параметров волновода при $\nu = 1$. Первый корень уравнения (11а).

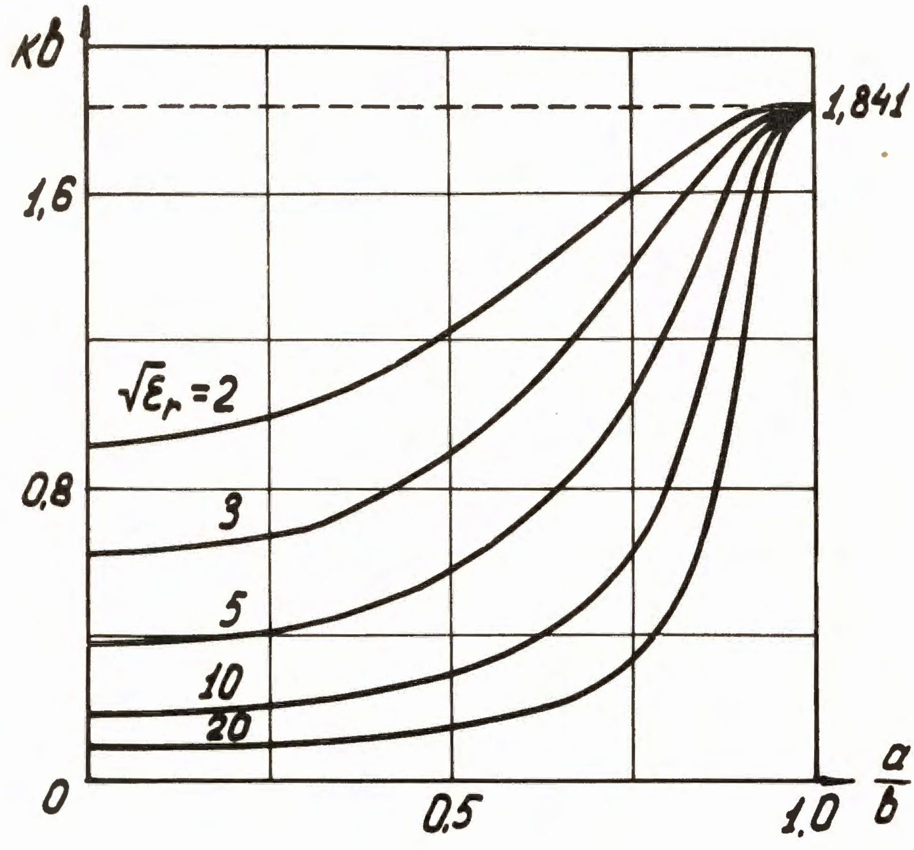

Рис. 1б. Зависимость критической частоты от параметров волновода при ν =1. Первый корень уравнения (1 б).

Из этих уравнений следует, что при изменении параметра η происходит смещение дисперсионных кривых E – и H – волн с одинаковым ν относительно друг друга. Очевидно, при значении параметра

$$\eta = \frac{\beta_{\nu n}}{a_{\nu m}}, \tag{13}$$

где $a_{\nu m}$ – m – ый корень уравнения (12а) и $\beta_{\nu n}$ – n – ый корень уравнения (12б), происходит полное совпадение дисперсионных кривых для соответствующей пары волн $H_{\nu m}$ и $E_{\nu n}$. В частности, для $\nu = 1$ и $m = n = 1$ такое значение параметра равно $\eta = 2{,}08$. При $\eta < 2{,}08$ нижней является мода H_{11}, а при $\eta > 2{,}08$, наоборот, – E_{11}.

Наличие в волноводной структуре свободного канала ($a/b \neq 0$) приводит к появлению связи между несимметричными модами с одинаковым ν, которая особенно наглядно проявляется в случае совпадения критических частот двух соседних гибридных мод. При этом имеется не одна (случай полностью заполненного диэлектриком волновода), а две дисперсионные кривые с общей точкой при $\kappa = 0$ (см. рис.2). Величина расщепления этих кривых зависит от отношения a/b и, как уже указывалось выше, обращается в нуль при $a/b = 0$. Описанный случай находится из совместного решения уравнений (11а) и (11б). В частности, для $\nu = 1$ и любого значения a/b совпадение первых корней этих уравнений легко получить графически, используя данные, приведенные на рис. 1а, б.

Для примера рассмотрим конкретный случай совпадения критических частот для двух нижних гибридных мод с $\nu = 1$ ($kb = 0{,}8581$) при $a/b = 0{,}5$ и $\epsilon_r = 10$ ($\eta = 1{,}667$). На рис. 2 приведены дисперсионные характеристики I и II для этого случая. Кривая I имеет участок PQ с аномальной дисперсией, что соответствует обратным волнам в рассматриваемой волноводной структуре. На рис. 2 приведены также дисперсионные характеристики этих мод в окрестности совпадения их критических частот. Параметром является $\epsilon_в$ (или η). При этом пунктирные кривые соответствуют дисперсионным кривым, критическая частота для которых определяется уравнением (11б) и в рассматриваемом случае фиксирована. Критические частоты для сплошных дисперсионных кривых определяются уравнением (11а) и изменяются в зависимости от величины $\epsilon_в$ (или η). Эволюция дисперсионных кривых при изменении параметра η показана на рис. 2. Причем пунктирные кривые для $\eta = 1{,}5$ и 1,6 и сплошные для $\eta = 1{,}667$ (I); 1,7; 1,8; 2,0 и 2,2 соответствуют нижней гибридной моде, а сплошные кривые при $\eta = 1{,}5$; 1,6; 1,667 (II) и пунктирные при $\eta = 1{,}7$; 2,0 и 3,0 – верхней моде. В окрестности $\eta = 1{,}667$ происходит так называемое "явление обмена критическими частотами"/3,4/ между этими двумя модами.

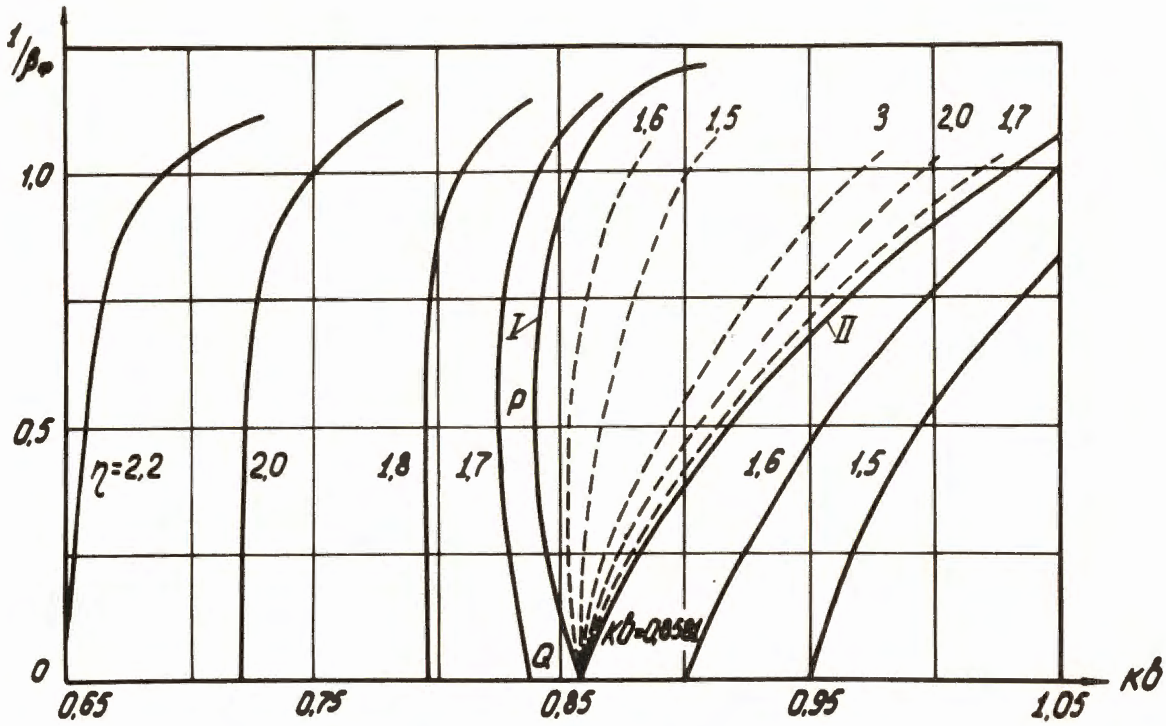

Рис. 2. Дисперсионные характеристики для двух нижних гибридных мод при $\nu = 1$, $\epsilon_r = 10$, $a/b = 0{,}5$ и различных значениях параметра η вблизи области совпадения критических частот.

Результаты, представленные на рис. 2, показывают, что для нижней моды наиболее сильно выражен аномальный участок (обратные волны) у дисперсионной кривой $\bar{1}$. Условие совпадения критических частот, как было показано для круглого волновода с соосным диэлектрическим стержнем /5,6/, благоприятствует появлению обратных волн, но даже и при этом условии в рассматриваемой нами модели для заданной величины ϵ_r они существуют лишь в определенном интервале значений a/b.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О свойствах гибридных волн в диафрагмированном волноводе

В диафрагмированном волноводе, который в "импедансном" приближении /4,7/ по своей структуре близок к волноводу, частично заполненному анизотропным диэлектриком, поведение дисперсионных кривых гибридных волн в области совпадения критических частот по своему характеру напоминает описанный выше случай.

Введем следующие обозначения для геометрических параметров этого волновода: b – радиус волновода, a – радиус отверстия диафрагм, D – период структуры. В одноволновом приближении ($D/\lambda_B \to 0$) пространство, занимаемое диафрагмами ($a \le r \le b$), можно считать анизотропной средой, характеризуемой на поверхности $r = a$ двумя импедансами $g_z = -\dfrac{E_z}{H_\theta}$ и $g_\theta = \dfrac{E_\theta}{H_z}$, причем диафрагмы считаем бесконечно тонкими. Дисперсионное уравнение для гибридных волн может быть получено с помощью сшивания импедансов при $r = a$ и имеет вид:

$$\gamma_1^2\,\bar{\Psi}\bar{\Phi} + \frac{\nu}{ka}\left[\bar{\Psi} + (1-\gamma_1^2)\,\bar{\Phi}\right] = 0\,, \tag{1}$$

где

$$\bar{\Psi} = \frac{\psi_1(kb,ka)}{\psi_0(kb,ka)} - \frac{J_{\nu+1}(k_1a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1a)}\,, \qquad \Phi = -\frac{J_{\nu+1}(k_1a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1a)}\,.$$

В случае $\beta_\phi \to \infty$ уравнение (1) распадается на два:

$$J_\nu(kb) = 0 \tag{Па}$$

и

$$J'_\nu(ka) = 0\,. \tag{Пб}$$

Условие совпадения критических частот двух соседних гибридных мод аналогично соотношению (13):

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta_{\nu n}}{\alpha_{\nu m}}\,,$$

где $\beta_{\nu n}$ и $a_{\nu m}$ – соответствующие корни уравнений (И а) и (И б). В частности, для двух нижних мод с $\nu = 1$ критические частоты совпадают при $b/a = 2{,}08$.

Так же, как для волновода с анизотропным диэлектриком, в диафрагмированном волноводе существуют обратные волны /4/.

Литература

1. С.М.Рытов. ЖЭТФ, 29, 605 (1955).
2. В.А.Вагин, В.И.Котов, ЖТФ, 35, 1273 (1965).
3. I.R.Pierce, P.K.Tien. Proc. IRE, v.42, 1389 (1954).
4. Y.Garault. CERN 64-43, Geneve (1964).
5. P.Clarricoats. Proc. IEE, 110, 261 (1963).
6. R.A.Waldron. Proc. IEE, 111, 1659 (1964)
7. М.А.Миллер. Докл. АН СССР, 87, 571 (1952).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1965 г.