ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2181

О.И. Ярковой

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2181

О.И. Ярховой

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

1. Постановка задачи. Уравнение для функции распределения

Будем рассматривать многократное рассеяние в среде неоднородной по одной координате r – $\rho = \rho(r)$(ρ –плотность среды). Будем считать также, что точечный источник помещен в начале координат. В качестве единицы измерения координат примем радиационную единицу, отнесенную к плотности в точке источника $\rho_o = \rho(0)$ (см. /1/). Для дальнейшего полезно ввести величину t, измеряющую количество вещества, пройденного частицей.

$$dt = \frac{\rho(r)}{\rho_o}\, dr \tag{1}$$

или

$$t(r) = \frac{1}{\rho_o} \int_0^r \rho(r)\, dr \,. \tag{1a}$$

Как и в /1/, имеем для среднеквадратичного угла рассеяния[x)]

$$\bar{\theta}^2 = \frac{E_s^2}{2 p^2 v^2} \Delta t \,. \tag{2}$$

Функцию распределения $f(r, \xi, \theta)$ будем относить к "объему" $d\xi\, d\theta$ (ср. с /1/).

Подобно /1/ имеем для пространственного изменения f при прохождении расстояния Δr

$$f(r + \Delta r, \xi, \theta) = f(r, \xi - \theta \Delta r, \theta) = f(r, \xi, \theta) - \theta \Delta r \frac{\partial f}{\partial \xi} \,. \tag{3}$$

---

x) Здесь по сравнению с /1/ скорость частицы обозначена v, а не β, так как через β в дальнейшем обозначается другая величина.

Соответственно для углового изменения

$$f(r+\Delta r, \xi, \theta) = f(r, \xi, \theta) + \frac{1}{4}\,\frac{E_s^2}{p^2 v^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,\Delta t = \tag{4}$$

$$= f(r, \xi, \theta) + \frac{1}{4}\,\frac{E_s}{p^2 v^2}\,\frac{\rho(r)}{\rho_o}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,\Delta r$$

(см. (1)).

Таким образом, получаем уравнение для функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\theta\,\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{n(r)}{w^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\,, \tag{5}$$

где обозначено

$$n(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_o} \tag{5a}$$

$$w = \frac{2pv}{E_s}\,.$$

Таким образом, (5) отличается от случая рассеяния в однородной среде зависимостью коэффициента при $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ от r (в однородном случае $n \equiv 1$).

2. Решение уравнения для функции распределения

Рассмотрим сначала функцию

$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \xi, \theta)\, d\xi\,, \tag{6}$$

дающую угловое распределение частиц независимо от их пространственного распределения.

Интегрируя (5) по ξ от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{n(r)}{w^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\,. \tag{7}$$

Или, согласно (1) и (5а),

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{w^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}. \tag{7a}$$

Решение этого уравнения известно (см. /1/):

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{w}{\sqrt{t(r)}}\,e^{-\frac{w^2\theta^2}{4t(r)}}\,. \tag{8}$$

Отсюда следует в соответствии с (2)

$$\bar{\theta}^2 = \frac{2t}{w^2}. \tag{8a}$$

Интегрируя (8) по θ, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(r, \theta)\, d\theta = 1\,. \tag{9}$$

Теперь перейдем к решению полного уравнения (5). По аналогии с /1/ будем искать его в виде

$$f(r, \xi, \theta) = \phi(2r)\, e^{-w^2[\alpha(r)\theta^2 + 2\beta(r)\theta\xi + \gamma(r)\xi^2]}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (5), получим (штрихом впредь обозначается производная по r) .

$$\left[\frac{\phi'}{\phi} - w^2(\alpha'\theta^2 + 2\beta'\theta\xi + \gamma'\xi^2)\right] f =$$

$$= \left[w^2(2\beta\theta^2 + 2\gamma\theta\xi) - 2\alpha n + 4w^2 n(\alpha^2\theta^2 + 2\alpha\beta\theta\xi + \beta^2\xi^2)\right] f\,.$$

Далее, приравнивая в квадратных скобках члены с соответствующими степенями θ и ξ, получим систему уравнений для ϕ, α, β, γ :

$$\frac{\phi'}{\phi} = -2n\alpha$$

$$\alpha' = -2\beta - 4n\alpha \tag{11}$$

$$\beta' = -\gamma - 4n\alpha\beta$$

$$\gamma' = 4n\beta^2.$$

Учтем, однако, что при интегрировании по ξ (10) должна давать (8). Получим

$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \xi, \theta)\, d\xi = \tag{12}$$

$$= \frac{\phi\sqrt{\pi}}{w\,\gamma^{1/2}}\, e^{-w^2(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma})\theta^2}.$$

Сравнивая (12) с (8), устанавливаем

$$\phi = \frac{w^2}{2\pi}\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{1/2}$$

$$\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} = \frac{1}{4t}. \tag{13}$$

Для того чтобы $f(r,\xi,0)$ действительно имела вид (10), требуется, чтобы (13) не противоречили (11). Проверим это, дифференцируя (13) и используя (11) и (1),

$$\frac{\phi'}{\phi} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{t'}{t}\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{4n\beta^2}{\gamma} - \frac{n}{t}\right\} =$$

$$= 2n\left\{-\frac{\beta^2}{\gamma} - \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)\right\} = -2n\alpha$$

$$-\tfrac{1}{4}\,\frac{n}{t^2} = \alpha' - \frac{2\beta\beta'}{\gamma} + \frac{\beta^2\gamma'}{\gamma^2} =$$

$$= -2\beta - 4n\alpha^2 + 2\beta + 8n\alpha\beta^2 - \frac{4\beta^4 n}{\gamma^2} = -4n\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right) = -4n\,\frac{1}{(4t)^2}$$

Таким образом, противоречия нет, и первые два уравнения системы (11) можно заменить соотношением (13). Для двух оставшихся уравнений, исключая α по (13), получим

$$\beta' = -\gamma - \frac{n\beta}{t} - \frac{4n\beta^2}{\gamma}$$

$$\gamma' = -4n\beta. \tag{14}$$

Попробуем решить эту систему.

Комбинируя их, получим

$$\frac{\beta'}{\gamma} - \frac{\gamma'\beta}{\gamma^2} = -1 - \frac{t'}{t}\,\frac{\beta}{\gamma} \quad (\text{т.к. } t' = n),$$

или

$$t\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + t'\,\frac{\beta}{\gamma} = -t.$$

Окончательно

$$\frac{\beta t}{\gamma} = -\int_0^r t\,dr. \tag{15}$$

Здесь использовано начальное условие, согласно которому для малых r (10) должна совпадать с функцией распределения для однородной среды из /1/, т.е. при $r = t$,

$$\frac{\beta t}{\gamma} = -\tfrac{1}{2}\,r^2.$$

Тогда решается и второе уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma'}{\gamma^2} = 4n\,\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{4n}{t^2}\left[\int_0^r t\,dr\right]^2,$$

или

$$\frac{1}{\gamma} = 4\int_0^r \frac{n}{t^2}\left[\int_0^r t\,dr'\right]^2 dr = 8\int_0^r\left[\int_0^r t\,dr'\right] dr - \frac{4}{t}\left[\int_0^r t\,dr'\right]^2. \tag{16}$$

Здесь также использовано начальное условие, согласно которому

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{r^3}{3}.$$

Таким образом, несколько неожиданно, задача решилась в квадратурах. Далее, зная (15) и (16) из (13), непосредственно можно выразить α и ϕ. Следовательно, задача решена до конца. Заметим также, что одновременно решена и задача с потерями энергии, так как зависящий от r коэффициент в (5) может содержать и изменение энергии.

Литература

1. Б. Росси и К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. ИЛ Москва, 1948.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 мая 1965 г.