

С 345 Л 3

Б-881

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2064



Ю.Я. Бродский, В.А. Вагин, В.И. Котов

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ  
В ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2064

3186/1, н.с.

Ю.Я. Бродский, В.А. Вагин, В.И. Котов

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ  
В ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## В в е д е н и е

Исследованию свойств электромагнитных волн, распространяющихся в плазменных волноводах, посвящено значительное число работ (см., например<sup>/1+10/</sup>). В большей части из них рассматривается модель в виде плазменного столба в продольном магнитном поле с металлическим экраном или без него<sup>/1,3+9/</sup>. В<sup>/3/</sup> для такой модели получено дисперсионное уравнение при общих импедансных граничных условиях и дан анализ некоторых частных случаев. В<sup>/2/</sup> исследовано поведение симметричных волн в канале безграничной изотропной плазмы. В<sup>/10/</sup> исследованы дисперсионные свойства волн для экранированного плазменного столба и кольца. Основное внимание в отмеченных выше работах уделяется симметричным волнам.

В данной работе рассмотрены несимметричные волны в трех моделях плазменных волноводов: в канале 1) безграничной и 2) ограниченной изотропной плазмы, 3) в круглом волноводе с диэлектрической трубкой, заполненной плазмой в продольном сильном магнитном поле. При этом детальный анализ поведения несимметричных волн дан на примере безграничной плазмы. В других моделях отмечены основные отличия в выражениях для полей и дисперсионных соотношений.

### Некоторые общие соотношения для волн в плазме

Прежде чем приступить к детальному изучению поведения несимметричных волн в плазменных волноводах представляет интерес предварительно отметить некоторые общие соотношения, касающиеся распространения этих волн в плазменной среде.

Электронная плазма в магнитном поле  $H_0$  (без учета столкновений) описывается известным тензором диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon_{ik} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_H \omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}, \quad (2)$$

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc},$$

где  $\omega_0$  - плазменная частота,  $\omega_H$  - циклотронная частота,  $\omega$  - частота исследуемой волны,  $m$  - масса электрона и  $n_0$  - плотность электронов.

Напряженности полей волны, распространяющейся вдоль оси  $Oz$ , совпадающей с направлением внешнего магнитного поля, представим в следующем виде:

$$\vec{E} = E(\rho) e^{i(\omega t - \alpha z + \nu \theta)}, \quad \vec{H} = H(\rho) e^{i(\omega t - \alpha z + \nu \theta)}, \quad (3)$$

где  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $z$  - цилиндрические координаты,  $\alpha$  - постоянная распространения,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ .

В дальнейшем мы в основном будем следовать работе [1], обобщая рассмотренный в ней случай симметричных волн ( $\nu = 0$ ) на более общий случай, включающий также и несимметричные волны ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ).

Используя уравнения Максвелла, нетрудно выразить поперечные компоненты поля  $E_\theta$ ,  $E_\rho$ ,  $H_\theta$  и  $H_\rho$  исследуемой волны (3) через продольные  $E_z$  и  $H_z$ :

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{\epsilon_1 \nu \alpha \sigma_1^2}{\epsilon_3 \rho} E_z + \epsilon_2 \alpha k^2 \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + i \frac{\nu \epsilon_2 k^2}{\rho} H_z + i \frac{\epsilon_1 k \sigma_1^2}{\epsilon_3} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right], \\ E_\rho &= \frac{1}{\delta} \left[ -i \frac{\nu \epsilon_2 \alpha k^2}{\rho} E_z - i \frac{\epsilon_1 \omega \sigma_1^2}{\epsilon_3} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\epsilon_1 \nu k \sigma_1^2}{\epsilon_3 \rho} H_z + \epsilon_2 k^2 \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right], \\ H_\theta &= \frac{1}{\delta} \left[ -i \frac{\nu \epsilon_2 \alpha k^2}{\rho} E_z - i \epsilon_1 k \sigma_1^2 \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\epsilon_1 \nu \alpha \sigma_1^2}{\epsilon_3 \rho} H_z + \epsilon_2 \alpha k^2 \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right], \\ H_\rho &= \frac{1}{\delta} \left[ -\frac{\nu \epsilon_1 k \sigma_1^2}{\rho} E_z - \epsilon_2 \alpha^2 k \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - i \frac{\nu \alpha k^2 \epsilon_2}{\rho} H_z - i \frac{\epsilon_1 \alpha \sigma_1^2}{\epsilon_3} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\delta = (k^2 \epsilon_1 - \alpha^2)^2 - k^4 \epsilon_2^2, \quad \sigma_1^2 = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} (k^2 \epsilon_1 - \alpha^2), \quad \sigma_2^2 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} k^2 - \alpha^2.$$

При этом компоненты  $E_z$  и  $H_z$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} E_z + \sigma_1^2 E_z = i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \alpha k H_z, \\ \Delta_{\perp} H_z + \sigma_2^2 H_z = -i \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \epsilon_3 \alpha k E_z, \end{cases} \quad (5)$$

где оператор

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}.$$

После несложных преобразований из (5) можно получить два уравнения, каждое из которых включает в себя только одну переменную  $E_{\perp}$  или  $H_{\perp}$ :

$$\Delta_{\perp}^2 E_{\perp} + 2s\Delta_{\perp} E_{\perp} + rE_{\perp} = 0,$$

где

$$\Delta_{\perp} H_{\perp} + 2s\Delta_{\perp} H_{\perp} + rH_{\perp} = 0, \quad (8)$$

$$2s = \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + \epsilon_3\right) k^2 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + 1\right) a^2, \quad r = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \delta.$$

Решения этих уравнений удобно искать в виде:

$$\Delta_{\perp} E_{\perp}^{(1,2)} = -k_{1,2}^2 E_{\perp}^{(1,2)}, \quad \Delta_{\perp} H_{\perp}^{(1,2)} = -k_{1,2}^2 H_{\perp}^{(1,2)}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим следующее характеристическое уравнение:

$$k_{1,2}^4 - 2sk_{1,2}^2 + r = 0 \quad (8)$$

$$\text{и} \quad k_1^2 = s + \sqrt{s^2 - r}, \quad k_2^2 = s - \sqrt{s^2 - r}.$$

Общее решение для продольных компонент имеет вид:

$$E_{\perp} = E_{\perp}^{(1)} + E_{\perp}^{(2)}, \quad H_{\perp} = H_{\perp}^{(1)} + H_{\perp}^{(2)}, \quad (9)$$

где  $E_{\perp}^{(1)}, H_{\perp}^{(1)}$  - решения уравнений Бесселя (7) для индекса 1 и  $E_{\perp}^{(2)}, H_{\perp}^{(2)}$  - соответствующие решения тех же уравнений для индекса 2. Подставляя (7) в (5), нетрудно показать, что поля  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$  выражаются следующим образом:

$$E_{\perp} = E_{\perp}^{(2)} + i\eta H_{\perp}^{(1)}, \quad H_{\perp} = H_{\perp}^{(1)} + i\xi E_{\perp}^{(2)}, \quad (10)$$

где

$$\eta = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{ak}{\sigma_1^2 - k_2^2} \quad \text{и} \quad \xi = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 ak}{\sigma_2^2 - k_1^2}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать два крайних случая:

$$1) H_0 = 0 \quad \text{и} \quad 2) H_0 \rightarrow \infty.$$

Если  $H_0 = 0$ , то тензор  $\epsilon_{ik}$  вырождается в скаляр

$$\epsilon = 1 - \gamma_0^2, \quad \gamma_0 = \frac{\omega a}{\omega^2}, \quad (11)$$

и решение (10) значительно упрощается, поскольку  $k_1^2 = k_2^2 = k_0^2 - a^2$ :



$$E_z = E_z^{(1)} - E_z^{(2)}, \quad H_z = H_z^{(1)} - H_z^{(2)}. \quad (12)$$

При  $H_0 \rightarrow \infty$  ( $\omega_H \gg \omega_0, \omega$ ) тензор  $\epsilon_{ik}$  становится диагональным:

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma_0^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

При этом

$$\xi = \eta = 0, \quad k_1^2 = k^2 - \alpha^2, \quad k_2^2 = \eta^2 k_1^2, \quad \eta^2 = 1 - \gamma_0^2, \quad (14)$$

и

$$E_z = E_z^{(2)}, \quad H_z = H_z^{(1)}. \quad (15)$$

#### Свободный канал в безграничной плазме

Рассмотрим поведение несимметричных волн в безграничной плазме при  $H_0 = 0$  со свободным каналом радиуса  $a$ . Основываясь на соотношениях (4), (7), (12), для компонент полей в плазме получим следующие выражения:

$$E_z = \left( p + \frac{\alpha}{k} q \right) \frac{K_\nu(k_2^* \rho)}{K_\nu(k_2^* a)}, \quad H_z = i \left( p \frac{\alpha}{k} + q \right) \frac{K_\nu(k_2^* \rho)}{K_\nu(k_2^* a)},$$

$$E_\theta = - \frac{\nu \alpha}{k_2^2} E_z - \frac{ik}{k_2^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad H_\theta = \frac{ik(1-\gamma_0^2)}{k_2^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\nu \alpha}{k_2^2 \rho} H_z, \quad (16)$$

$$E_\rho = \frac{i\alpha}{k_2^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\nu k}{k_2^2 \rho} H_z, \quad H_\rho = \frac{\nu k(1-\gamma_0^2)}{k_2^2 \rho} E_z + \frac{i\alpha}{k_2^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho},$$

где  $k_2^2 = k^2(1-\gamma_0^2) - \alpha^2$ ,  $\gamma_2 = \frac{k}{k_2}$ ,  $k_2^* = -ik_2$ ,  $\gamma_2^* = \frac{k}{k_2}$  и

соотношение между постоянными  $p$  и  $q$  дается системой уравнений, полученной из условия сшивания полей на границе плазма-канал:

$$\begin{aligned} p \frac{\alpha}{k} \Phi + q \left( \Phi - \frac{\nu}{ka} \frac{\gamma_0^2}{\gamma_2^2} \right) &= 0, \\ p \Psi + q \frac{\alpha}{k} \left( \Psi + \frac{\nu}{ka} \frac{\gamma_0^2}{\gamma_2^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= - \frac{1 - \gamma_0^2}{\gamma_2} \frac{K_{\nu+1}(\bar{k}_2 a)}{K_\nu(\bar{k}_2 a)} - \frac{J_{\nu+1}(k_1 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} \\ \Phi &= - \frac{1}{\gamma_2} \frac{K_{\nu+1}(\bar{k}_2 a)}{K_\nu(\bar{k}_2 a)} - \frac{J_{\nu+1}(k_1 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{— для быстрых} \\ \text{волн} \\ (k_1^2 > 0) \end{array} \quad (18a)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= - \frac{1 - \gamma_0^2}{\gamma_2} \frac{K_{\nu+1}(\bar{k}_2 a)}{K_\nu(\bar{k}_2 a)} - \frac{I_{\nu+1}(\bar{k}_1 a)}{\bar{\gamma}_1 I_\nu(\bar{k}_1 a)} \\ \Phi &= - \frac{1}{\gamma_2} \frac{K_{\nu+1}(\bar{k}_2 a)}{K_\nu(\bar{k}_2 a)} - \frac{I_{\nu+1}(\bar{k}_1 a)}{\bar{\gamma}_1 I_\nu(\bar{k}_1 a)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{— для медленных} \\ \text{волн} \\ (\bar{k}_1^2 > 0) \end{array} \quad (18b)$$

где  $k_1^2 = k^2 - a^2$ ,  $\gamma_1 = \frac{k_1}{k}$ ,  $\bar{k}_1 = -ik_1$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \frac{\bar{k}_1}{k}$ .

Поля в канале соответственно запишутся в виде: <sup>/11,12/</sup>

$$\begin{aligned} E_z &= (p + \frac{a}{k} q) \frac{J_\nu(k_1 \rho)}{J_\nu(k_1 a)}, \quad H_z = i(p \frac{a}{k} + q) \frac{J_\nu(k_1 \rho)}{J_\nu(k_1 a)}, \\ E_\rho &= i \{ p \frac{a}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) + q [ \frac{a^2}{kk_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) + \frac{\nu}{k\rho} J_\nu(k_1 \rho) ] \} \frac{1}{J_\nu(k_1 a)}, \\ E_\theta &= \{ p \frac{a}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) + q [ \frac{k}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) - \frac{\nu}{k\rho} J_\nu(k_1 \rho) ] \} \frac{1}{J_\nu(k_1 a)}, \\ H_\rho &= - \{ p [ \frac{a}{kk_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) + \frac{\nu}{k\rho} J_\nu(k_1 \rho) ] + q \frac{a}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) \} \frac{1}{J_\nu(k_1 a)}, \\ H_\theta &= i \{ p [ \frac{k}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) - \frac{\nu}{k\rho} J_\nu(k_1 \rho) ] + q \frac{a}{k_1} J_{\nu+1}(k_1 \rho) \} \frac{1}{J_\nu(k_1 a)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнявая детерминант системы уравнений (17) нулю и произведя несложные преобразования, получаем дисперсионное уравнение для несимметричных волн в рассматриваемой модели плазменного волновода:

$$\gamma_1^2 \gamma_2^2 \Psi \Phi + \frac{\nu}{ka} (\epsilon - 1) [\Psi + (1 - \gamma_1^2) \Phi] = 0. \quad (20)$$

### Исследование дисперсионного соотношения

#### А. Медленные волны ( $k_1^2 > 0$ )

Введем обозначения  $x = \bar{k}_1 a$ ,  $y = \bar{k}_2 a$ ,  $u = ka$ ,  $u_0 = k_0 a$  и  $v = aa$ , причем  $y^2 = x^2 + u_0^2$ . Далее учтем, что для заданного значения  $u$  при  $x \gg 1$ ,  $y \gg 1$  величина  $v \rightarrow \infty$ .

При этом условии

$$K_\nu(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \left[ 1 + \frac{(2\nu+1)(2\nu-1)}{8y} + \frac{(2\nu+3)(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)}{128y^2} \right],$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 - \frac{(2\nu+1)(2\nu-1)}{8x} + \frac{(2\nu+3)(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)}{128x^2} \right]. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и ограничиваясь членами порядка  $\frac{1}{x}$ , получим дисперсионное уравнение для  $\beta_\phi \ll 1$  в виде:

$$\beta = \frac{2}{\nu} \left( \frac{u_0}{\sqrt{2}} - u \right). \quad (22)$$

При  $\beta_\phi = 0$  имеем  $u = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$  и  $\frac{d\beta_\phi}{du} = -\frac{2}{\nu}$ . Чтобы найти при  $\beta_\phi \ll 1$  выражение групповой скорости  $\beta_\Gamma$ , используем известное соотношение

$$\frac{1}{\beta_\Gamma} = \frac{1}{\beta_\phi} - \frac{u}{\beta_\phi^2} \frac{d\beta_\phi}{du}. \quad (23)$$

Учитывая (22) и (23), получим

$$\beta_\Gamma = \frac{\nu}{2u} \beta_\phi^2. \quad (24)$$

Найденные выражения справедливы только для случая  $\nu \neq 0$ . При  $\nu = 0$  и  $\beta_\phi = 0$  согласно работе /2/ имеют место следующие соотношения:

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{2}}, \quad \frac{d\beta_\phi}{du} = 4.$$



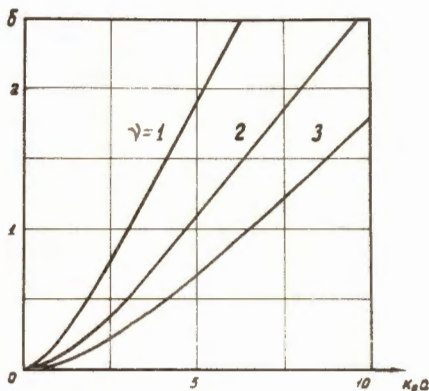
В отличие от (23) групповая скорость в этом случае отрицательна и равна

$$\beta_{\Gamma} = -\frac{4}{u} \beta_{\phi}^2.$$

Б. Случай  $\beta_{\phi} = 1$

Полагая в уравнении (20)  $\gamma_1 = 0$  и производя необходимые преобразования, получим связь между  $u$  и  $u_0$  для  $\beta_{\phi} = 1$ :

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{2 + \delta_{\nu}(u_0)}}, \quad (25)$$



Р и с. 1

где функция  $\delta_{\nu}(u_0) = \frac{u_0 K_{\nu}(u_0)}{(\nu+1)K_{\nu+1}(u_0)}$  и приведена на рис. 1 для  $\nu = 1, 2, 3$ . Заметим, что

величина  $\delta_{\nu}(u_0) > 0$  для любых значений  $u_0$ . В соответствии с этим волны для  $\beta_{\phi} = 1$  существуют лишь при условии  $u \leq \frac{u_0}{\sqrt{2}}$ . Нетрудно показать, что при малых  $u_0 (u_0 \ll 1)$  уравнение (25) принимает вид:

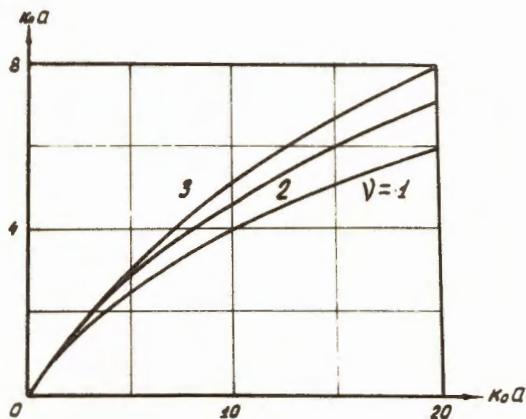
$$u = \frac{u_0}{\sqrt{2}}, \quad (26)$$

а при больших  $u_0 (u_0 \gg 1)$  переходит в

$$u = \sqrt{u_0(\nu+1)}. \quad (27)$$

Функция  $u(u_0)$  для любых значений  $u_0$  и  $\nu = 1, 2, 3$  приведена на рис. 2.

Для определения групповой скорости  $\beta_{\Gamma}$  продифференцируем уравнение (20) по  $u$  и затем положим  $\gamma_1 = 0$ . В результате довольно длинных преобразований найдем:



Р и с. 2

Условие распространения несимметричных волн с фазовой скоростью  $\beta_\phi = 1$ .

$$\beta_\Gamma = - \frac{\alpha \delta_\nu}{(2 + \delta_\nu)^2 - \alpha \delta_\nu} \quad (28)$$

где

$$\alpha(u_0) = - \frac{u_0^2}{2\nu(\nu+1)} - \frac{(\nu+2)u_0^2}{2\nu(\nu+1)\delta} + (\nu+3) + \frac{\nu+2}{2} \delta_\nu + \frac{2}{\delta_\nu} - \frac{u_0^2}{\nu(\nu+1)\delta_\nu^2}$$

Величина  $\alpha(u_0) < 0$  для всех значений  $u_0$  и  $\beta_\Gamma > 0$  при  $\nu \geq 1$ . Это обстоятельство отличает поведение несимметричных волн от симметричных. Для последних при  $\beta_\phi = 1$  существует область значений параметра  $u_0$ , при которых  $\beta_\Gamma < 0$ , т.е. в рассматриваемой структуре распространяются обратные симметричные волны<sup>/2/</sup>.

Рассмотрим предельные случаи для групповой скорости (28). Пусть  $u_0 \rightarrow 0$ . Тогда

$$\delta_\nu = \frac{u_0^2}{4} \left( 1 - \frac{u_0^2}{2} \ln \frac{2}{\gamma u_0} \right), \quad \alpha = - 4 \ln \frac{2}{\gamma u_0} \quad \text{и} \quad \beta_\Gamma = \frac{u_0^2}{4} \ln \frac{2}{\gamma u_0} \quad \text{для } \nu = 1;$$

$$\delta_\nu = \frac{u_0^2}{2\nu(\nu+1)} \left( 1 - \frac{u_0^2}{4\nu(\nu-1)} \right), \quad \alpha = - \frac{2}{\nu-1} \quad \text{и} \quad \beta_\Gamma = \frac{u_0^2}{4\nu(\nu^2-1)} \quad \text{для } \nu \geq 2. \quad (29)$$

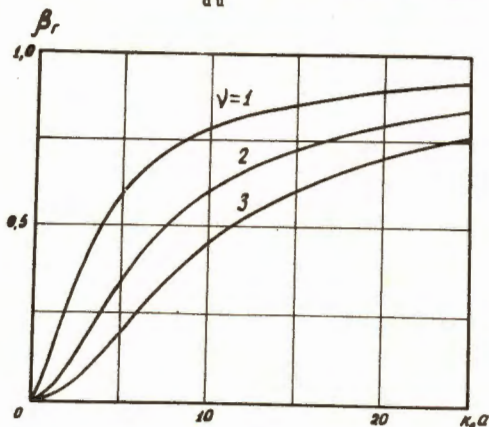
Пусть теперь  $u_0 \rightarrow \infty$ . При этом

$$\delta_\nu = \frac{u_0}{\nu + 1}, \quad \alpha = -\frac{u_0^2}{2\nu(\nu+2)} \left[ 1 + \frac{(\nu+2)^2}{(\nu+1)u_0} \right], \quad \beta_\Gamma = 1 - \frac{2\nu(\nu+2)}{u_0(\nu+1)}. \quad (30)$$

Зависимость групповой скорости от  $u_0$  при  $\nu = 1, 2, 3$  дана на рис. 3. Наклон дисперсионных кривых  $\frac{d\beta_\phi}{du}$  при  $\beta_\phi = 1$  нетрудно найти, используя соотношения (23) и (28):

$$\left( \frac{d\beta_\phi}{du} \right)_{\beta_\phi=1} = \frac{(2 + \delta_\nu)^{5/2}}{u_0 \alpha \delta_\nu}. \quad (31)$$

Так как  $\alpha(u_0) < 0$  и  $\delta_\nu(u_0) > 0$ , то  $\frac{d\beta_\phi}{du} < 0$  для всех значений  $u_0$ .



Р и с. 3

Зависимость групповой скорости от параметра  $u_0$  для несимметричных волн  $\beta_\phi = 1$ .

### В. Случай отсечки ( $\alpha = 0$ )

Рассмотрим дисперсионное уравнение (20) для случая быстрых волн ( $\beta_\phi > 1$ ). Положим  $\alpha = 0$ , при этом  $\beta_\phi \rightarrow \infty$ ,  $\gamma_1^2 \rightarrow 1$ ,  $\tilde{\gamma}_2^2 \rightarrow \gamma_0^2 - 1$  и уравнение (20) распадается на два независимых уравнения, каждое из которых после несложных преобразований записывается следующим образом:

$$\frac{K_{\nu}'(y)}{y K_{\nu}(y)} + \frac{J_{\nu}'(u)}{u J_{\nu}(u)} = 0 \quad (32)$$

и

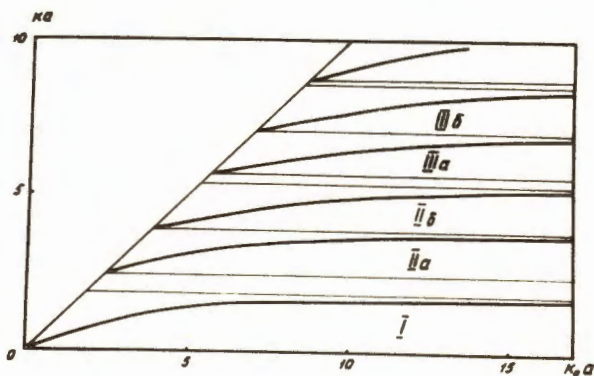
$$\frac{y K_{\nu+1}(y)}{K_{\nu}(y)} - \frac{u J_{\nu+1}(u)}{J_{\nu}(u)} = 0, \quad (33)$$

где  $y^2 = u^2 - u_0^2$ .

Решение уравнений (32) и (33) определяет условие отсечки для основной и высших групп волн и, кроме того, позволяет наиболее естественным способом ввести классификацию этих волн. Уравнение (32) соответствует гибридным  $HE_{\nu m}$  волнам, где  $m$  - номер группы этих волн. Аналогично уравнение (33) определяет класс гибридных  $EH_{\nu n}$  волн, причем  $n$  - также номер группы этого класса. Решение для основной группы волн  $HE_{\nu 1}$  и  $(u_0)$  может быть найдено из уравнения (32) при изменении параметра  $u_0$  в пределах  $0 \leq u_0 < \infty$ . При этом  $u$  меняется от 0 до  $\beta_{\nu 1}$ , где  $\beta_{\nu 1}$  - первый корень уравнения  $J_{\nu}'(\beta) = 0$ . Остальные группы волн  $HE_{\nu m}$  получаются из того же уравнения, но величины  $u_0$  и  $u$  в этом случае изменяются в пределах  $\alpha_{\nu m-1} \leq u < \beta_{\nu m}$ ,  $\alpha_{\nu m-1} \leq u < \infty$ , где  $\alpha_{\nu m-1}$  и  $\beta_{\nu m}$  соответствующие корни уравнений  $J_{\nu}(\alpha) = 0$  и  $J_{\nu}'(\beta) = 0$ . Группы волн  $EH_{\nu n}$  находятся из уравнения (31) при вариации параметра  $u$  в интервале  $r_n \leq u_0 < \infty$ , а  $u$  меняется от  $r_n$  до  $\alpha_n$ , где  $r_n$  является наименьшим возможным решением уравнения (31) для  $n$ -ой группы, причем  $\beta_n < r_n < \alpha_n$ . С увеличением номера группы  $n$  величина  $r_n \rightarrow \alpha_n$ . На рис. 4 показана зависимость  $u(u_0)$  при  $\beta_{\phi} \rightarrow \infty$  и  $\nu = 1$  для ряда групп гибридных волн обоих классов

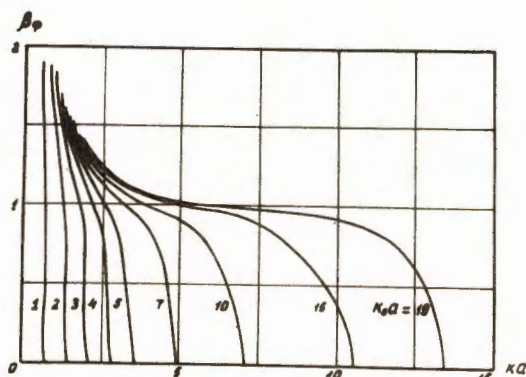
$$(I - HE_{11}, IIa - EH_{11}, IIb - HE_{12}, IIIa - EH_{12}, IIIb - HE_{13}).$$

Заметим, что волны основной группы для заданных значений параметра  $u_0$  в зависимости от частоты  $u$  могут иметь любую фазовую скорость  $0 \leq \beta_{\phi} < \infty$ . Высшие группы волн для любых значений  $u_0$  и  $u$  имеют фазовую скорость  $\beta_{\phi} < 1$ , т.е. являются быстрыми волнами. Дисперсионные кривые при  $\nu = 1$  для основной группы волн  $HE_{11}$  показаны на рис. 5.



Р и с. 4

Условие отсечки для основной и высших групп гибридных волн ( I -  $HE_{11}$ ,  $Pa-EN_{11}$ , II  $\delta - HE_{12}$ , III  $\alpha - EN_{12}$ , II  $\alpha - HE_{13}$  )



Р и с. 5

Дисперсионные кривые для основной группы волн  $HE_{11}$  (  $\nu = 1$  )

#### Потоки энергии для основной группы волн

Найденные выражения для полей позволяют вычислить потоки энергии в плазме и свободном канале. В качестве примера найдем отношение потоков энергии  $\frac{S_I}{S_{II}}$  при  $\beta_\phi = 1$ , где  $S_I$  - поток в свободном канале и  $S_{II}$  - поток в плазме. Производя обычные вычисления и учитывая соотношение (25), получим для отношения потоков:

$$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{\frac{u_0^2}{2(\nu+1)(\nu+2)(2+\delta_\nu)} + \frac{u_0^2(2+\delta_\nu)}{2\nu(\nu+1)\delta_\nu^2} - (1 + \frac{2}{\delta_\nu})}{\frac{u_0^2}{\delta_\nu(2+\delta_\nu)(\nu+1)} - (\nu+1)} \quad (32)$$

Рассмотрим два крайних случая:  $u_0 \ll 1$  и  $u_0 \gg 1$ . При  $u_0 \ll 1$  из (32), учитывая (29), найдем

$$S_I/S_{II} = -8 \ln \frac{2}{\gamma u_0} \quad \text{для} \quad \nu = 1$$

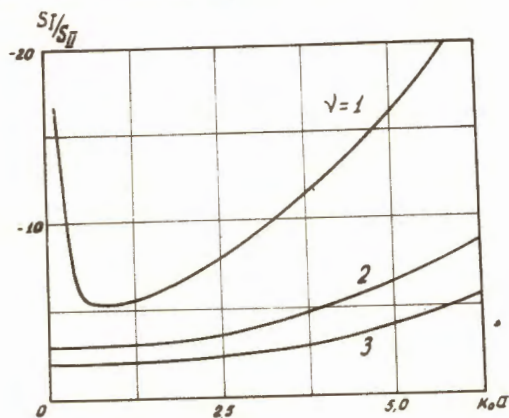
и

$$S_I/S_{II} = -\frac{\nu+1}{\nu-1} \quad \text{для} \quad \nu \geq 2.$$

Аналогично для  $u_0 \gg 1$  имеем

$$S_I/S_{II} = -\frac{2u_0^2}{\nu(\nu+2)(3\nu+1)} \quad \text{для} \quad \nu \geq 1.$$

На рис. 6 показана зависимость  $S_I/S_{II}$  от  $u_0$  для  $\nu = 1, 2, 3$ . Направление потока энергии в плазме противоположно фазовой скорости.



Р и с. 6

Отношение потоков энергии канал-плазма при  $\beta_\phi = 1$ .

### Свободный канал в ограниченной плазме

Рассмотрим теперь модель плазменного волновода в виде свободного канала радиуса  $a$  в изотропной плазме, ограниченной металлическим полым цилиндром радиуса  $b$ . Выражения для компонент полей в канале такие же как и для предыдущей модели (см. (19)).



Далее введем функции

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{0\nu}(\bar{k}_2 b, \bar{k}_2 \rho) &= \begin{vmatrix} I_\nu(\bar{k}_2 b) & K_\nu(\bar{k}_2 b) \\ I_\nu(\bar{k}_2 \rho) & K_\nu(\bar{k}_2 \rho) \end{vmatrix}, & \bar{\Psi}_{1\nu}(\bar{k}_2 b, \bar{k}_2 \rho) &= \begin{vmatrix} I_\nu(\bar{k}_2 b) & K_\nu(\bar{k}_2 b) \\ -I_{\nu+1}(\bar{k}_2 \rho) & K_{\nu+1}(\bar{k}_2 \rho) \end{vmatrix} \\ \bar{\Phi}_{0\nu}(\bar{k}_2 b, \bar{k}_2 \rho) &= \begin{vmatrix} I'_\nu(\bar{k}_2 b) & K'_\nu(\bar{k}_2 b) \\ I_\nu(\bar{k}_2 \rho) & K_\nu(\bar{k}_2 \rho) \end{vmatrix}, & \bar{\Phi}_{1\nu}(\bar{k}_2 b, \bar{k}_2 \rho) &= \begin{vmatrix} I'_\nu(\bar{k}_2 b) & K'_\nu(\bar{k}_2 b) \\ -I_{\nu+1}(\bar{k}_2 \rho) & K_{\nu+1}(\bar{k}_2 \rho) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

для которых справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_{0\nu}}{\partial(\bar{k}_2 \rho)} = \frac{\nu}{\bar{k}_2 \rho} \bar{\Psi}_{0\nu} - \bar{\Psi}_{1\nu} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\Phi}_{0\nu}}{\partial(\bar{k}_2 \rho)} = \frac{\nu}{\bar{k}_2 \rho} \bar{\Phi}_{0\nu} - \bar{\Phi}_{1\nu}. \quad (34)$$

Тогда продольные компоненты поля в плазме  $E_z$  и  $H_z$  можно записать, используя граничные условия, в следующем виде:

$$E_z = (p + \frac{\alpha}{k} q) \frac{\bar{\Psi}_{0\nu}(b, \rho)}{\bar{\Psi}_{0\nu}(b, a)}, \quad H_z = i(p \frac{\alpha}{k} + q) \frac{\bar{\Phi}_{0\nu}(b, \rho)}{\bar{\Phi}_{0\nu}(b, a)}, \quad (35)$$

где  $p$  и  $q$  — постоянные. Поперечные компоненты  $E_\theta$ ,  $E_\rho$ ,  $H_\theta$  и  $H_\rho$  выражаются через продольные в соответствии с (16). Соотношение между  $p$  и  $q$  дается уравнениями (17), причем в данном случае функции  $\Psi$  и  $\Phi$  определяются следующим образом:

$$\Psi = - \frac{1-\gamma_0^2}{\gamma_2} \frac{\bar{\Psi}_{1\nu}(b, a)}{\bar{\Psi}_{0\nu}(b, a)} - \frac{J_{\nu+1}(k_2 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_2 a)} \quad \Phi = - \frac{\bar{\Phi}_{1\nu}(b, a)}{\gamma_2 \bar{\Phi}_{0\nu}(b, a)} - \frac{J_{\nu+1}(k_2 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_2 a)}. \quad (36)$$

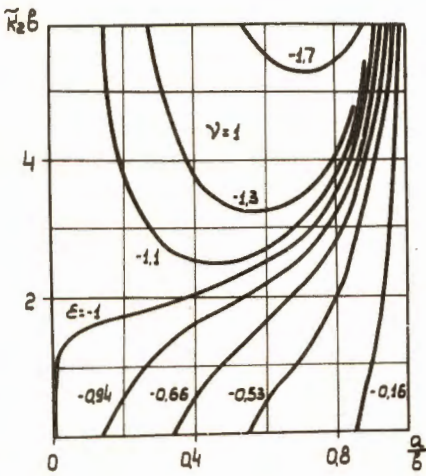
Дисперсионное уравнение при этом имеет тот же вид (19), что и для предыдущей модели. Нетрудно показать, что при  $\frac{a}{b} \rightarrow 0$  (т.е. при  $x = \bar{k}_2 b \rightarrow \infty$ ) дисперсионное уравнение для данной модели переходит в дисперсионное уравнение для предыдущей модели. Действительно, учитывая, что при  $x \rightarrow \infty$  модифицированные функции Бесселя определяются выражениями  $I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ ,  $I'_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ ,  $K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ ,  $K'_\nu(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ , получим соответствующий переход функций (36) к виду, представленному соотношениями (18a).

При анализе этой модели мы ограничимся случаем  $\beta_\phi = 1$ .

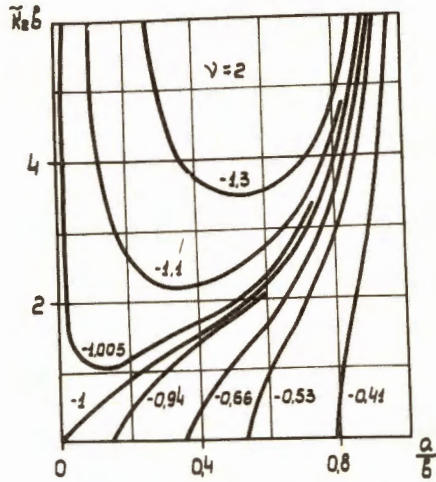
Для этого полагая в уравнении (20)  $\gamma_1^2 = 0$  и учитывая (36), найдем:

$$\epsilon = - \frac{\tilde{\Phi}_{0\nu}}{\tilde{\Phi}_{1\nu}} \left( \frac{\tilde{\Phi}_{0\nu}}{\tilde{\Phi}_{1\nu}} + \frac{\tilde{k}_z a}{\nu + 1} \right). \quad (37)$$

На рис. 7 (а,б) представлено решение этого уравнения для  $\nu = 1, 2$ .



Р и с. 7а



Р и с. 7б

Зависимость частоты от параметров плазменного волновода а)  $\nu = 1$ , б)  $\nu = 2$ .

Следует отметить две характерные области, на которые делится плоскость  $(\tilde{k}_z b, \frac{a}{b})$  в зависимости от значения  $\epsilon$ . Для  $\epsilon < -1$  (т.е.  $\omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ ) кривые  $\tilde{k}_z b(\frac{a}{b})$  имеют отчетливо выраженный минимум. Для значений  $\epsilon$ , лежащих в интервале  $-1 < \epsilon < 0$ , существует граничное значение  $(\frac{a}{b})_0$ , при котором частоты  $\omega$  и  $\omega_0$  равны нулю. Нетрудно показать, что связь между  $\epsilon$  и этим значением  $(\frac{a}{b})_0$  не зависит от  $\nu$  и дается следующим простым соотношением:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_0^2 = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}, \quad (\text{т.е. } \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{2}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)_0^2}). \quad (38)$$

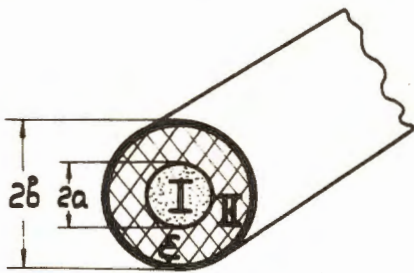
При  $\frac{a}{b} \rightarrow 0$  (случай безграничной плазмы) формула (38) переходит в соотношение (26).

Групповая скорость при  $\beta_\phi = 1$  для данной модели определяется формулой

$$\beta_\Gamma = \frac{A}{A + B},$$

где

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{b}{a} \left( \frac{\bar{\Psi}_{1\nu}}{\bar{\Psi}_{0\nu}} - \frac{\bar{\Phi}_{1\nu}}{\bar{\Phi}_{0\nu}} \right) \left[ \frac{\bar{k}_2 a}{\nu+1} \frac{\bar{\Phi}_{0\nu}}{\bar{\Phi}_{1\nu}} + \left( 1 + \frac{\nu^2}{\bar{k}_2^2 b^2} \right) \frac{\bar{\Psi}_{0\nu}}{\bar{\Phi}_{0\nu}} + \frac{\bar{\Phi}_{1\nu}}{\bar{\Psi}_{1\nu}} \right] + \\
 & + \left( 1 + \frac{2\bar{\Psi}_{0\nu}}{\bar{k}_2 a \bar{\Psi}_{1\nu}} - \frac{2}{\nu} \right) \left( \frac{\bar{\Phi}_{1\nu}}{\bar{\Phi}_{0\nu}} \right)^2 - \frac{(\bar{k}_2 a)^2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{\nu+2}{\nu+1} - \frac{\bar{\Phi}_{1\nu}}{\bar{\Phi}_{0\nu}} \left[ \frac{2\bar{k}_2 a}{\nu(\nu+1)} + \frac{\bar{\Psi}_{1\nu}}{\bar{\Psi}_{0\nu}} - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\bar{k}_2 a} - \frac{\nu+4}{\nu+1} \right] - \frac{\bar{k}_2 a}{\nu+1} \frac{\bar{\Psi}_{1\nu}}{\bar{\Psi}_{0\nu}} + \frac{\nu+1}{(\nu+1)^2} \cdot \frac{\bar{\Psi}_{1\nu}}{\bar{\Psi}_{0\nu}} \bar{k}_2 a, \\
 B = & \frac{2}{\bar{k}_2 a} \frac{\bar{\Psi}_{1\nu}}{\bar{\Psi}_{0\nu}} \left[ 1 + \frac{\bar{\Psi}_{0\nu}}{\bar{\Psi}_{1\nu}} \left( \frac{\bar{\Phi}_{0\nu}}{\bar{\Phi}_{1\nu}} + \frac{\bar{k}_2 a}{\nu+1} \right) \right]^2.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$



Р и с. 8

Диэлектрическая трубка ( II ) с плазмой ( I ) внутри полого металлического цилиндра.

Круглый волновод с диэлектрической трубкой, заполненной магнитоактивной плазмой

Данная модель показана на рис. 8. Внешнее магнитное поле  $H_0$  направлено вдоль оси волновода. При рассмотрении ограничимся случаем  $H_0 \rightarrow \infty$ . Тогда тензор  $\epsilon_{ik}$  будет определяться выражением (13). Используя (4), (14) и (15), запишем поля в плазме (область 1) в виде:

$$E_{\perp} = \left( p + \frac{a}{k} q \right) \frac{I_{\nu}(\bar{\eta} k_1 \rho)}{I_{\nu}(\bar{\eta} k_1 a)}, \quad H_{\perp} = i \left( p \frac{a}{k} + q \right) \frac{J_{\nu}(k \rho)}{J_{\nu}(k a)},$$

$$E_{\theta} = \frac{\nu a}{k_1^2 \rho} E + \frac{ik}{k_1^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad E_{\rho} = -\frac{ia}{k_1^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\nu k}{k_1^2} H_z,$$

$$H_{\theta} = -\frac{ik}{k_1^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\nu a}{k_1^2 \rho} H_z, \quad H_{\rho} = -\frac{\nu k}{k_1^2} E_z - \frac{ia}{k_1^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad (40)$$

где  $k_1^2 = k^2 - a^2$ ,  $\eta^2 = 1 - \gamma_0^2$ ,  $\bar{\eta} = -i\eta$ .

В частности, при  $\gamma = 0$ , т.е. при  $\beta \phi = 1$ , эти формулы переходят в следующие:

$$E_z = (p+q) \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu}, \quad H_z = i(p+q) \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu},$$

$$E_{\rho} = i(p+q) \left\{ (1-\gamma_0^2) \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu+1} + \frac{\nu}{ka} \frac{\gamma_0^2}{4(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} [(ka)^2 - (k\rho)^2] + q \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} \right\},$$

$$E_{\theta} = i(p+q) \left\{ \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu+1} - \frac{\nu}{ka} \frac{\gamma_0^2}{4(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} [(ka)^2 - (k\rho)^2] - q \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} \right\},$$

$$H_{\rho} = -i(p+q) \left\{ \frac{ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu+1} - \frac{\nu}{ka} \frac{\gamma_0^2}{4(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} [(ka)^2 - (k\rho)^2] + p \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} \right\},$$

$$H_{\theta} = i(p+q) \left\{ \frac{(1-\gamma_0^2)ka}{2(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu+1} + \frac{\nu}{ka} \frac{\gamma_0^2}{4(\nu+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} [(ka)^2 - (k\rho)^2] - p \frac{\nu}{ka} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu-1} \right\}.$$

Соотношением между  $p$  и  $q$  дается уравнением (17), причем в данном случае  $\Psi$  и  $\Phi$  определены выражениями:

$$\Psi = \frac{\epsilon}{\gamma_2} \frac{\Psi_{1\nu}}{\Psi_{0\nu}} + \frac{\bar{\eta} I_{\nu+1}(\bar{\eta} k_1 a)}{\gamma_1 I_{\nu}(\eta k_1 a)}, \quad \Phi = \frac{\Phi_{1\nu}}{\gamma_2 \Phi_{0\nu}} - \frac{J_{\nu+1}(k_1 a)}{\gamma_1 J_{\nu}(k_1 a)}, \quad (42)$$

где

$$\Psi_{0\nu} = \begin{vmatrix} J_{\nu}(k_2 b) & N_{\nu}(k_2 b) \\ J_{\nu}(k_2 a) & N_{\nu}(k_2 a) \end{vmatrix}, \quad \Psi_{1\nu} = \begin{vmatrix} J_{\nu}(k_2 b) & N_{\nu}(k_2 b) \\ J_{\nu+1}(k_2 a) & N_{\nu+1}(k_2 a) \end{vmatrix},$$

$$\Phi_{0\nu} = \begin{vmatrix} J'_{\nu}(k_2 b) & N'_{\nu}(k_2 b) \\ J_{\nu}(k_2 a) & N_{\nu}(k_2 a) \end{vmatrix}, \quad \Phi_{1\nu} = \begin{vmatrix} J'_{\nu}(k_2 b) & N'_{\nu}(k_2 b) \\ J_{\nu+1}(k_2 a) & N_{\nu+1}(k_2 a) \end{vmatrix} \quad (43)$$

и  $\eta^2 = 1 - \gamma_0^2$ ,  $\bar{\eta} = -i\eta$ ,  $k_2^2 = k^2 \epsilon - a^2$ ,  $\epsilon$  — проницаемость диэлектрической трубки,  $\gamma_2 = \frac{k_2}{k}$ ,  $\gamma_1 = \frac{k_1}{k}$ .

Учитывая (17), (42) и (43), нетрудно показать, что дисперсионное уравнение по

своей структуре полностью совпадает с уравнением (20) и описывает два класса гибридных волн  $HE_{\nu m}$  и  $EH_{\nu m}$ . Интересно отметить, что при  $\gamma_0 \rightarrow 0$  поля (40) и (41) совпадают с выражениями полей в свободном канале (19).

#### Л и т е р а т у р а

1. Я.Б. Файнберг, М.Ф. Горбатенко. ЖТФ, 29, 549, 1959.
2. Л.М. Пятигорский. Ученые записки ХГУ, 69, 39, 1953.
3. P.Berrett, C.Johuson, IEEE Trans., NS-11, 34, 1964.
4. O.Willi, Z. angew. Phys., 15, 445, 1963.
5. A.Bertil, E.Bengt, Ericsson Techn., 19, 257, 1963.
6. V.Cranatstein, S.Schlesinger, A.Vigants, IEEE Trans. Ant. and Propagat., 11, 489, 1963.
7. В.П. Шестопалов, И.П. Якименко, В.Д. Филь. Радиофизика, 5, 176, 1962.
8. A.Oilner, T.Tamir, J.Appl., 33, 231, 1962.
9. C.Iohnson. Proc. IEEE, 51, 486, 1963.
10. P.Clarricoats, L.Wong, Proc. IEE, 111, 1087, 1964.
11. H.Hahn, Rev.Sci.Instr., 34, 1094, 1963.
12. В.А. Вагян, В.И. Котов. Препринт ОИЯИ 1827, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 марта 1965.