ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2006

В.П. Шириков

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОСТАВЛЕННОЙ СИНЖЕМ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1965

2006



В.П. Шириков

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОСТАВЛЕННОЙ СИНЖЕМ

В 1961 году в одной из работ по теории ядра Такахаши [1] в связи с изучением структуры ядра нуклона рассмотрел уравнения

$$(\nabla^2+\epsilon\ )\phi = 2MfV\phi$$

$$(\nabla^2-\mu^2)V = f\phi^*\phi \qquad \text{при условии} \quad \int\phi^*\phi\, d_3\vec{x} = 1.$$

Здесь $\nabla^2$ – лапласиан, $\phi$ – комплексная волновая функция нуклона, $V$ – действительный потенциал мезона, $M$ – масса нуклона, $\mu$ – масса мезона, $f$ – константа взаимодействия между мезоном и нуклоном и $\epsilon = 2ME$, где $E$ – собственная энергия нуклона. Если дополнительно предположить, что $\epsilon = -\mu^2$, $\phi = kV$, $k^*k = 2M$, то получим уравнение для $V$:

$$(\nabla^2-\mu^2)\ V = 2MfV^2.$$

Делая замену $\mu\vec{x} = \vec{\bar{x}}$ и $2MfV = \mu^2\bar{V}$, можно упростить уравнение для $V$:

$$(\bar{\nabla}^2-1)\bar{V} = \bar{V}^2 \qquad \text{при условии} \qquad \int\bar{V}^2 d_3\vec{\bar{x}} = 2M\frac{f^2}{\mu}.$$

При условии сферической симметрии для $\bar{V}$, стремящегося к нулю при $r = |\vec{\bar{x}}| \to\infty$, имеем уравнение:

$$\bar{V}'' + \frac{2}{r}\bar{V}' - \bar{V} - \bar{V}^2 = 0, \qquad \int_0^\infty r^2\bar{V}^2 dr = \frac{Mf^2}{2\pi\mu}.$$

Если не учитывать последнее условие связи констант и сделать замену переменных $r = x$, $\bar{V} = -y$, то получаем краевую задачу

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y + y^2 = 0, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

$$y'(0) = 0, \quad 0 < y(0) < \infty, \qquad y(\infty) = 0. \tag{2}$$

Поскольку решения уравнения (1) не могут иметь отрицательных минимумов, задача (1)–(2) не может иметь решений с нулями в интервале $0 < x < \infty$. Предполагая, что она имеет положительное решение в этом интервале, Синж [2] построил ряд, сходящийся, по его предположению, всюду в интервале $0 < x < \infty$ к указанному решению. Синж указал значение $y(0)$, соответствующее решению задачи (1)–(2). Существенным предположением было предположение о единственности положительного решения задачи (1)–(2), хотя доказать это не удалось.

Строгое доказательство разрешимости задачи (1)–(2) и более общей краевой задачи

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y + y^n = 0, \quad x \ge 0, \quad 1<n<4 \qquad (3)$$

$$y'(0)=0, \quad 0<y(0)<\infty, \quad y(\infty)=0 \qquad (4)$$

было дано в работах [3,4,5,6]. Однако вопрос о единственности положительных решений этих задач оставался открытым.

Нехари[4] отмечал, что доказательство единственности таких решений даже в случае задачи (1)-(2) кажется сложным, хотя, по-видимому, эта единственность имеет место.

Решению этого вопроса и посвящена данная работа.

Отметим, что задача (3)-(4) возникла впервые в работах по нелинейной теории поля, в частности [7-10], и заменялась иногда эквивалетной краевой задачей

$$\eta'' = \eta - \frac{\eta^n}{x^{n-1}}, \quad x\ge 0, \quad 1<n<4 \qquad (5)$$

$$\eta(0)=0, \quad \eta'(0)=a>0, \quad \eta(\infty)=0, \qquad (6)$$

если $\eta(x) = x\cdot y(x)$.

1. Укажем, прежде всего, некоторые свойства положительных решений $\eta=\eta(x)$ задачи (5)-(6). Как показано в работе[4], $\eta=\eta(x)$ должно удовлетворять нелинейному интегральному уравнению с ядром – функцией Грина оператора $\frac{d^2}{dx^2}-1$ на полупрямой:

$$\eta(x) = e^{-x}\int_0^x t^{1-n}\,\mathrm{sh}\,t\;\eta^n(t)\,dt + \mathrm{sh}\,x\int_x^\infty t^{1-n}e^{-t}\eta^n(t)\,dt. \qquad (7)$$

Показано также, что существует интеграл

$$A = \int_0^\infty t^{1-n}\,\mathrm{sh}\,t\,\eta^n(t)\,dt.$$

Перепишем (7) так:

$$\eta(x) = Ae^{-x} - \left[\int_x^\infty t^{1-n}e^{-x}\,\mathrm{sh}\,t\,\eta^n(t)\,dt - \int_x^\infty t^{1-n}e^{-t}\,\mathrm{sh}\,x\,\eta^n(t)\,dt\right] = Ae^{-x} - \int_x^\infty t^{1-n}\mathrm{sh}(t-x)\,\eta^n(t)\,dt.$$

Следовательно, $0\le\eta(x)<Ae^{-x}$ для всех $x>0$.

Итак, $e^x\eta(x)<A$. Вычислим производную от $e^x\eta(x)$

$$\frac{d}{dx}(e^x\eta(x)) = \frac{d}{dx}\left[A - e^x\int_x^\infty t^{1-n}\mathrm{sh}(t-x)\,\eta^n(t)\,dt\right] =$$

$$= -e^x\int_x^\infty t^{1-n}\mathrm{sh}(t-x)\,\eta^n(t)\,dt + e^x\int_x^\infty t^{1-n}\mathrm{ch}(t-x)\,\eta^n(t)\,dt =$$

$$= e^{2x}\int_x^\infty t^{1-n}e^{-t}\eta^n(t)\,dt = \phi(x)>0.$$



Как видно, $e^x\eta(x)$ возрастает со временем монотонно, оставаясь меньше $A$, т.е. существует $\lim_{x\to\infty} e^x\eta(x) = C$. Отсюда видно, кстати, что $\phi(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Однако

$$\frac{d}{dx}(e^x\eta(x)) = e^x[\eta'(x)+\eta(x)] = \phi(x).$$

Отсюда $e^x\eta'(x) = \phi(x) - e^x\eta(x)$. Для больших $x$ имеем $\eta'(x)<0$, поэтому

$$e^x|\eta'(x)| = e^x\eta(x) - \phi(x) < e^x\eta(x) < A$$

и при $\phi\to0$ даже $\lim_{x\to\infty} e^x|\eta'(x)| = C$, ибо $e^x\eta(x)\to C$ при $x\to\infty$. Отсюда

$$0 < |\eta'(x)| < Ae^{-x}.$$

Более точно:

$$\lim_{x\to\infty} e^x\eta(x) = C\le A, \qquad \lim_{x\to\infty} e^x|\eta'(x)| = C \le A. \qquad (8)$$

Обобщая тождество Нехари, приведенное им для $n=5$, получим для положительных решений задачи (5)-(6) следующее соотношение:

$$\left[x\eta'^2 - \eta\eta' + \frac{\eta^6}{3x^3}\right]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x}(2x\eta'-\eta)\left(\eta + \frac{\eta^5}{x^4} - \frac{\eta^n}{x^{n-1}}\right)dx =$$

$$= \left[x\eta^2 + \frac{\eta^6}{3x^3} - \frac{2}{n+1}\frac{\eta^{n+1}}{x^{n-2}}\right]_{x_0}^{x} - 2\int_{x_0}^{x}\left[\eta^2 - \frac{5-n}{2(n+1)}\frac{\eta^{n+1}}{x^{n-1}}\right]dx.$$

Окончательно

$$\left[-x\eta'^2 + \eta\eta' + x\eta^2 - \frac{2}{n+1}\frac{\eta^{n+1}}{x^{n-2}}\right]_{x_0}^{x} = 2\int_{x_0}^{x}\eta^2\left[1 - \frac{5-n}{2(n+q)}\frac{\eta^{n-1}}{x^{n-1}}\right]. \qquad (9)$$

Если $x_0=0$, $x=\infty$, то левая часть равенства в силу найденной асимптотики для $\eta(x)$ и $\eta'(x)$ обращается в нуль.

Отношение $\frac{\eta}{x}$ монотонно убывает вдоль $\eta=\eta(x)$ от $a$ до нуля с ростом $x$ от 0 до $\infty$. В самом деле, пока $\eta=\eta(x)$ остается выше прямой $\eta=x$ (как было показано в работе[3], для задачи (5)-(6) всегда $a>1$), имеем $\eta''<0$ в силу уравнения (5), и кривая $\eta=\eta(x)$ обращена выпуклостью вверх. После пересечения прямой $\eta=x$ в некоторой точке $x_1$ кривая $\eta=\eta(x)$ выпукла вниз, так как $\eta''>0$, и обязана монотонно убывать. Если бы это было не так, кривая $\eta=\eta(x)$ в некоторой точке $x=x_2$ вновь пересекла бы прямую $\eta=x$, $\eta'(\bar{x})=\frac{\eta(\bar{x})}{\bar{x}}$ в некоторой точке $\bar{x}$, $x_1<\bar{x}<x_2$, и как было показано в работе[3], $\eta=\eta(x)>\frac{\eta(\bar{x})}{\bar{x}}x$ для всех $x>\bar{x}$, что невозможно для решения краевой задачи. Следовательно, $\eta=\eta(x)$ имеет вид, показанный на рис. 1. В частности, $\eta'(x_1)<0$ на прямой $\eta=x$.

Поскольку $\frac{5-n}{2(n+1)}>0$ при рассматриваемых $n$, то для непротиворечивости равенства (9) необходимо потребовать, чтобы $1-\frac{5-n}{2(n+1)}a^{n-1}<0$, где $a=\eta'(0)$.

Итак, для установления количества положительных решений задачи (5)-(6) достаточно рассмотреть лишь те решения уравнения (5), $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=a$, для которых

$$a > \left[\frac{2(n+1)}{5-n}\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{10}$$

II. Предположим теперь, что $\eta=\eta_1(x)$ и $\eta=\eta_2(x)$ – два положительных решения краевой задачи (5) – (6), приходящие на прямую $\eta=x$ в точках $x=x_1$ и $x=x_2$ соответственно, $x_2>x_1$, причем

$$\eta_2'(x_2) > \eta_1'(x_1), \quad |\eta_2'(x_2)| < |\eta_1'(x_1)| \tag{11}$$

в силу замечания, сделанного выше $\eta_i'(x_i)<0$ для $i=1,2$. Проведем через точку $(x_1, \eta_1(x_1))$ горизонталь $\eta=c_1=\eta_1(x_1)$. Пусть $\eta=\eta_2(x)$ пересекает эту горизонталь в точке $x=x_3$. В силу предположения (11) и положительности $\eta_2''(x)$ для $x>x_2$ тем более

$$\eta_2'(x_3) > \eta_1'(x_1).$$

Следовательно, $\eta_2'|_{\eta_2=c} > \eta_1'|_{\eta_1=c}$ в некоторой окрестности ниже горизонтали $\eta=c_1$. Однако значения производных $\eta_i'$ на любой $\eta=c_2$ из таких горизонталей вычисляются по формулам $(i=1,2)$:

$$\eta_i'|_{\eta_i=c_2} = \eta_i'|_{\eta_i=c_1} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\eta_i''}{\eta_i'}\, d\eta = \eta_i'|_{\eta_i=c_1} + \int_{c_2}^{c_1} \frac{\eta_i''}{|\eta_i'|}\, d\eta.$$

Здесь $\eta_i' = \frac{d\eta_i}{dx}$. Отсюда получаем:

$$\eta_2'|_{\eta_2=c_2} - \eta_1'|_{\eta_1=c_2} = \eta_2'|_{\eta_2=c_1} - \eta_1'|_{\eta_1=c_1} + \left[\int_{c_2}^{c_1} \frac{\eta_2''}{|\eta_2'|}\, d\eta - \int_{c_2}^{c_1} \frac{\eta_1''}{|\eta_1'|}\, d\eta\right]. \tag{12}$$

Однако на горизонталях рассматриваемой окрестности

$$\eta_2''|_{\eta_2=c} = \eta_2\left[1 - \frac{\eta_2^{n-1}}{x^{n-1}}\right]_{\eta_2=c} > \eta_1''|_{\eta_1=c} = \eta_1\left[1 - \frac{\eta_1^{n-1}}{x^{n-1}}\right]_{\eta_1=c}$$

в силу того, что $x|_{\eta_2=c} > x|_{\eta_1=c}$ для абсцисс пересечения кривыми $\eta=\eta_1(x)$ и $\eta=\eta_2(x)$ горизонтали $\eta=c$. Следовательно,

$$\frac{\eta_2''}{|\eta_2'|} > \frac{\eta_1''}{|\eta_1'|} \qquad \text{на горизонталях } \eta=c.$$

Значит, разность интегралов в выражении (12) положительна. Итак,

$$\eta_2'|_{\eta_2=c_2} - \eta_1'|_{\eta_1=c_2} > \eta_2'|_{\eta_2=c_1} - \eta_1'|_{\eta_1=c_1} > 0$$

и разность эта растет, когда $c_2 \to 0$. Однако в силу соотношений (8) имеем

$$|\eta_i'|_{\eta_i=c_2} \to A_i e^{-x}|_{\eta_i=c_2},$$

откуда $x|_{\eta_2=c_2} - x|_{\eta_1=c_2} \to \ln\frac{A_1}{A_2}$ при $c_2 \to 0$ $(x\to\infty)$.
Но в таком случае



$$|\eta_2' - \eta_1'|_{\eta=c_2} \to A_2 e^{-x}|_{\eta_2=c_2} - A_1 e^{-x}|_{\eta_1=c_2} \to A_2 e^{-x}|_{\eta_1=c_2}\frac{A_1}{A_2} - A_1 e^{-x}|_{\eta_1=c_2} = 0.$$

Тем самым мы пришли к противоречию, предположив (11), т.е. соотношение $\eta_2'(x_2) \geq \eta_1'(x_1)$ невозможно для положительных решений краевой задачи (5) – (6).

Если мы покажем, что вообще два решения задачи Коши $\eta=\eta_1(x)$ и $\eta=\eta_2(x)$ уравнения $\eta''=\eta-\frac{\eta^n}{x^{n-1}}$, такие что $\eta_1'(0)=a_1$ и $\eta_2'(0)=a_2$, $a_i > \left[\frac{2(n+1)}{5-n}\right]^{\frac{1}{n-1}}$ приходят на биссектрису $\eta=x$ в точках $x_1$ и $x_2$ соответственно, $x_2>x_1$, так что $\eta_2'(x_2)>\eta_1'(x_1)$, то это будет эквивалентно утверждению о единственности положительных решений задачи (5) – (6).

Пусть для определенности $a_1>a_2$. Сделаем преобразование

$$y_i(x) = \eta_i(x) - x \quad (i=1,2),$$

причем всюду в дальнейшем рассмотрим случай $n=2$. Тогда

$$y_1'' + y_1\frac{\eta_1}{x} = 0$$

$$y_2'' + y_2\frac{\eta_2}{x} = 0.$$

Эти уравнения можно также записать в виде:

$$y_1'' + y_1\left(1+\frac{y_1}{x}\right) = 0 \tag{13}$$

$$y_2'' + y_2\left(1+\frac{y_2}{x}\right) = 0. \tag{14}$$

Кроме того,

$$(y_1-y_2)'' + (y_1-y_2)\left[1+\frac{y_1}{x}+\frac{y_2}{x}\right] = 0. \tag{15}$$

Сравнивая уравнение (15) с каждым из уравнений (13) и (14), убеждаемся, в силу положительности $\frac{y_i}{x}$ вплоть до первого после $x=0$ пересечения функциями $y_i(x)$ оси $x$, что разность $(y_1-y_2)$ обращается в нуль до этих пересечений. Это означает, что $\eta=\eta_1(x)$ и $\eta=\eta_2(x)$ пересекаются по крайней мере однажды до прихода на прямую $\eta=x$ в некоторой точке $x_0$, такой что $x_0<x_1$, $x_0<x_2$, $\eta_1(x)-\eta_2(x)>0$ для $0<x<x_0$. Коэффициент при $y_1-y_2$ в уравнении (15) можно оценить:

$$1+\frac{y_1}{x}+\frac{y_2}{x} = \frac{\eta_1}{x}+\frac{\eta_2}{x}-1 < a_1+a_2-1,$$

поэтому, сравнивая уравнение (15) с уравнением

$$z'' + z(a_1+a_2-1) = 0, \quad z(0)=0,$$

получаем оценку для $x_0$:

$$x_0 > \frac{\pi}{\sqrt{a_1+a_2-1}}.$$

Очевидно,

$$\eta_1(x_0)=\eta_2(x_0), \quad \eta_2'(x_0)>\eta_1'(x_0), \quad y_1(x_0)=y_2(x_0), \quad y_2'(x_0)>y_1'(x_0).$$

Если мы покажем, что последнее неравенство достигается достаточно близко к точкам $x_1$ и $x_2$ и не успевает нарушиться вплоть до этих точек, это и будет означать, что

$$\eta_2'(x_2) > \eta_1'(x_1).$$

Предположим, например, что

$$y_i'\left(\frac{\pi}{\sqrt{a_1+a_2-1}}\right) < 0, \quad i=1,2 \tag{16}$$

или что то же

$$\eta_i'\left(\frac{\pi}{\sqrt{a_1+a_2-1}}\right) < 1. \tag{17}$$

Тем более $y_i'(x_0) < 0$, $\eta_i'(x_0) < 1$.

Проведем через точку $(x_0, y_1(x_0))$ горизонталь $y=c_0$, $c_0=y_1(x_0)=y_2(x_0)$. В точке пересечения кривых $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ выполняется неравенство $y_2' > y_1'$. По непрерывности оно верно и в некоторой окрестности возле $y=c_0$. Предположим, что оно нарушилось на некоторой горизонтали $y=c_1$, причем (см. рис. 2)

$$y_2'\big|_{y_2=c_1} = y_1'\big|_{y_1=c_1}, \qquad y_2'\big|_{y_2=c} < y_1'\big|_{y_1=c}, \quad |y_2'|_{y_2=c} > |y_1'|_{y_1=c}$$

для некоторой окрестности горизонталей $y=c$ ниже $y=c_1$.

Имеем в таком случае

$$y_1'\big|_{y_1=c} = y_1'\big|_{y_1=c_1} + \int_{c_1}^{c} \frac{y_1''}{y_1'}\,dy = y_1'\big|_{y_1=c_1} - \int_{c}^{c_1} \frac{|y_1''|}{|y_1'|}\,dy.$$

В силу уравнений (13) и (14) имеем

$$|y_1''|\big|_{y_1=c} = y_1\left[1+\frac{y_1}{x}\right]\Big|_{y_1=c}, \quad c<c_1.$$

В таком случае

$$y_2'\big|_{y_2=c} - y_1'\big|_{y_1=c} = -\left[\int_c^{c_1} \frac{y_2\left(1+\frac{y_2}{x(y_2)}\right)}{|y_2'|}\,dy - \int_c^{c_1} \frac{\left(1+\frac{y_1}{x(y_1)}\right)}{|y_1'|}\,dy\right].$$

На каждой горизонтали ниже $y=c_1$ в указанной окрестности по предположению $|y_2'| > |y_1'|$, а также

$$y_2\left(1+\frac{y_2}{x(y_2)}\right) < y_1\left(1+\frac{y_1}{x(y_1)}\right)$$

вследствие того, что $x(y_2) > x(y_1)$. В таком случае разность интегралов в квадратных скобках последнего равенства отрицательна. Отсюда

$$y_2'\big|_{y_2=c} - y_1'\big|_{y_1=c} > 0, \qquad y_2'\big|_{y_2=c} > y_1'\big|_{y_1=c}, \qquad |y_2'|_{y_2=c} < |y_1'|_{y_1=c}$$

и мы пришли к противоречию.

Докажем теперь справедливость неравенства (17) для любой пары $\eta=\eta_1(x)$, $\eta=\eta_2(x)$, $\eta_1'(0)=a_1$ и $\eta_2'(0)=a_2$. Для этого достаточно доказать его в случае, когда



$a_1=a_2+\omega$, $\omega \ll 1$ и не зависит от $a$, т.е. практически оценить $\eta_i'\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a_i-1}}\right)$.

Воспользуемся для этой цели аппаратом верхних приближений к производным решений $\eta=\eta_i(x)$ уравнения

$$\eta_i'' = \eta_i - \frac{\eta_i^n}{x^{n-1}}, \quad \eta_i(0)=0, \quad \eta_i'(0)=a_i.$$

Мы имеем $\eta_i'' + \eta_i\left[\left(\frac{\eta_i}{x}\right)^{n-1} - 1\right]=0$, $\frac{\eta_i}{x}<a_i$ во всяком случае до $x=x_1$, точки пересечения с биссектрисой $\eta=x$ функции $\eta=\eta_i(x)$. Сравнивая уравнение для $\eta_i(x)$ с решением задачи

$$z_i'' + z_i\left(a_i^{n-1}-1\right)=0, \quad z_i(0)=0, \quad z_i'(0)=a_i$$

по теореме о численном сравнении (Трикоми [11], гл. III, § 20), получаем, что $z_i(x)$ – нижнее приближение к $\eta_i(x)$, пока $z_i \neq 0$. При этом $\phi(x)=\frac{\eta_i(x)}{z_i(x)}$ – возрастающая функция (пока $z_i \neq 0$), $\phi(0)=1$, $\phi(x)>1$, и можно даже показать, что $z_i'(x)$ есть нижнее приближение к $\eta_i'(x)$, пока $z_i \neq 0$. В самом деле, $\phi' \geq 0$ и

$$\phi'(x) = \frac{\eta_i' z_i - \eta_i z_i'}{z_i^2} = \frac{\eta_i}{z_i}\left(\frac{\eta_i'}{\eta_i} - \frac{z_i'}{z_i}\right) \geq 0, \qquad \frac{\eta_i'}{\eta_i} \geq \frac{z_i'}{z_i}, \quad \eta_i' \geq \frac{\eta_i}{z_i} Z_i',$$

$\eta_i'(x) \geq \phi(x) z_i' > z_i'(x)$. Для получения верхнего приближения к $\eta_i'(x)$ возьмем решение задачи

$$\eta_{i+}'' = z_i - \frac{z_i^n}{x^{n-1}}, \quad \eta_{i+}(0)=0, \quad \eta_{i+}'(0)=a_i,$$

причем $z_i(x) = \frac{a_i}{\sqrt{a_i^{n-1}-1}} \sin\sqrt{a_i^{n-1}-1}\, x$. Согласно построению $\eta_{i+}$ и $\eta_{i+}'$ ими можно пользоваться во всяком случае, пока $z_i(x)-x \geq 0$. Как видно, достаточно убедиться для доказательства справедливости неравенства (17) в том, что

$$\eta_{i+}'\left(\frac{\pi}{\sqrt{a_1+a_2-1}}\right)<1 \text{ или } \eta_{i+}'\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a_i-1}}\right)<1 \quad \text{при} \quad a_1 \cong a_2.$$

Но для такой проверки нужно знать, что $\phi(a_i) = z_i\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a_i-1}}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{2a_i-1}} \geq 0$ для рассматриваемых $a_i > \left[\frac{2(n+1)}{5n-n}\right]^{\frac{1}{n-1}}$. В нашем случае $n=2$ имеем $a_i > 2$,

$z_i(x) = \frac{a_i}{\sqrt{a_i-1}} \operatorname{Sin}\sqrt{a_i-1}\,.\,x$. Мы имеем

$$\phi(a) = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \operatorname{Sin} \pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} - \frac{\pi}{\sqrt{2a-1}} = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \operatorname{Sin}\psi(a) - \frac{\pi}{\sqrt{2a-1}}, \quad \psi(a)=\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}}.$$

Как видно,

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \leq \psi(a) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \qquad \psi_a' = \frac{\pi}{2(2a-1)\sqrt{a-1}\sqrt{2a-1}} > 0, \tag{18}$$

т.е. функция $\psi=\psi(a)$ монотонно возрастает.

$$\phi'(a) = \frac{\pi}{(2a-1)\sqrt{2a-1}} + \frac{a-2}{2(a-1)\sqrt{a-1}} \sin\psi(a) + \frac{a\pi}{2(a-1)(2a-1)\sqrt{2a-1}} \cos\psi(a) =$$

$$= \frac{a-2}{2(a-1)\sqrt{a-1}} \sin\psi(a) + \frac{\pi}{(2a-1)\sqrt{2a-1}}\left[1+\frac{a}{2a-2}\cos\psi(a)\right].$$

Поскольку $\frac{a}{2a-2} \le 1$ для $a \ge 2$, а $|\cos\psi(a)| < 1$, вся квадратная скобка здесь положительна. Первое слагаемое справа также положительно, ибо $a > 2$ и $\sin\psi(a) > 0$ в силу (18).

Итак, $\phi'(a) > 0$ и $\phi(a)$ принимает свое минимальное значение при $a = 2$

$$\phi(2) = 2\sin\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} > 0 .$$

Тем более $\phi(a) > 0$ для $a > 2$, что и требовалось. Итак, использование $\eta'_{i+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a_i - 1}}\right)$ законно.

Мы имеем

$$\eta''_{+}(x) = \frac{a}{\sqrt{a-1}}\sin\sqrt{a-1}\,x - \frac{a^2}{a-1}\,\frac{\sin^2\sqrt{a-1}\,x}{x}$$

$$\eta'_{+}(x) = a - \frac{a}{a-1}\cos\sqrt{a-1}\,x + \frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{a-1}\int_0^{\sqrt{a-1}\,x}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt .$$

Преобразуем входящий сюда интеграл:

$$\int_0^q \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2q}\frac{1-\cos r}{r}\,dr \qquad \text{где} \quad r = 2t .$$

Воспользовавшись формулой 2.642 справочника Рыжика и Градштейна, получаем

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2q}\frac{1-\cos r}{r}\,dr = \tfrac{1}{2}\left[\,C + \ln 2q - \mathrm{Ci}\,2q\,\right],$$

где $\mathrm{Ci}(x)$ – интегральный косинус, $C$ – константа Эйлера

$$C \cong 0{,}577\,216 .$$

В таком случае

$$\eta'_{+}(x) = \frac{a^2}{a-1} - \frac{a}{a-1}\cos\sqrt{a-1}\,x - \frac{a^2}{2(a-1)}\left[C + \ln 2\sqrt{a-1}\,x - \mathrm{Ci}\,2\sqrt{a-1}\,x\right].$$

Нам потребуется оценка $\eta'_{+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a-1}}\right)$.

$$\eta'_{+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a-1}}\right) = -\frac{a}{a-1}\cos\psi(a) - \frac{a^2}{2(a-1)}\left[C + \ln 2\psi(a) - \mathrm{Ci}\,2\psi(a) - 2\right]. \quad (19)$$

Можно показать, что правая часть (19) монотонно убывает по $a$, и для проверки неравенства $\eta'_{+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a-1}}\right) < 1$ достаточно убедиться, что оно выполняется при $a = 2$.

В самом деле, при $a = 2$

$$\eta'_{+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a-1}}\right) = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\left[C + \ln\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \mathrm{Ci}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2\right] < 1 ,$$

при больших $a$ правая часть (19) стремится к величине

$$-\frac{a}{a-1}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2(a-1)}\left[C + \ln\pi\sqrt{2} - \mathrm{Ci}\,\pi\sqrt{2} - 2\right],$$

стремящейся к $-\infty$ при $a \to \infty$. Монотонное убывание $\eta'_{+}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2a-1}}\right) = \chi(a)$ можно установить, исследуя



$$\chi'_a = \frac{1}{(a-1)^2}\cos\psi(a) + \frac{a\pi}{2(a-1)(2a-1)\sqrt{a-1}\sqrt{2a-1}}\sin\psi(a) - \frac{a(a-2)}{2(a-1)^2}\phi(a) - \frac{a^2}{4(a-1)(2a-1)}\left[1-\cos 2\psi\right]$$

Здесь $\phi(a) = C + \ln 2\psi(a) - \mathrm{Ci}\,2\psi(a) - 2$. Это, впрочем, громоздко. Нам же достаточно убедиться, что $\chi(a) < 1$. Заметим, что $\phi(a)$ монотонно возрастает ($\psi(a)$, $\ln 2\psi(a)$ и $|\mathrm{Ci}\,2\psi(a)|$ монотонно возрастают, $\mathrm{Ci}\,2\psi(a) < 0$ для $\psi(a)$ из интервала (18). Более точно, это следует из знака $\phi'_a$:

$$\phi'_a = \frac{1}{2(a-1)(2a-1)}\left[\,1 - \cos 2\psi(a)\,\right] > 0 \qquad \text{для} \quad a > 1 .$$

Корень $\phi(a)$ лежит в точке $a \cong 2$, ибо $\phi(2) = C + \ln\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \mathrm{Ci}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2$. Поэтому для $a > 2$ величина $\chi(a)$ оценивается сверху (хотя и грубо) первым слагаемым в правой части (19). Следовательно, для наших целей достаточно убедиться, что

$$-\frac{a}{a-1}\cos\psi(a) = -\frac{a}{a-1}\cos\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} < 1 \qquad \text{для всех} \quad a > 2 .$$

Предположим, однако, что при каком-то значении $a$

$$-\frac{a}{a-1}\cos\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} = 1, \quad \text{т.е.} \quad -\cos\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} = \frac{a-1}{a}. \qquad (20)$$

Так как $\lim\limits_{a\to\infty}\left(-\cos\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}}\right) = -\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}} < 1$, $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a-1}{a} = 1$, то уравнение (20) должно иметь по крайней мере два корня. Следовательно, должны при каком-то $a$ сравняться производные обеих частей уравнения (20):

$$\frac{\pi}{2(2a-1)\sqrt{a-1}\sqrt{2a-1}}\sin\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} = \frac{1}{a^2} \qquad \text{откуда}$$

$$\frac{1}{a^2}\left[1 - \frac{\pi a}{2(2a-1)\sqrt{a-1}\sqrt{2a-1}}\sin\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}}\right] = 0 . \qquad (21)$$

Это равенство может выполняться лишь для тех $a$, где $-\cos\psi(a) > \tfrac{1}{2}$, ибо функции $-\cos\psi(a)$ нужно сначала пересечь прямую $a = \tfrac{1}{2}$, прежде чем она пересечет кривую $\frac{a-1}{a}$, $\frac{a-1}{a} > \tfrac{1}{2}$ для $a > 2$. Но неравенство $-\cos\psi(a) > \tfrac{1}{2}$ или $-\cos\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} > \tfrac{1}{2}$ выполняется, лишь если $\pi\sqrt{\frac{a-1}{2a-1}} > \frac{2\pi}{3}$, т.е. для $a > 5$. Однако при $a = 5$ имеем $\pi a^2 / 2(2a-1)\sqrt{a-1}\sqrt{2a-1} < 1$, и левая часть этого неравенства монотонно убывает с ростом $a$. Это означает, что уравнение (21) не имеет решений при $a > 2$, а, следовательно, неразрешимо для таких $a$ и уравнение (20). Этим завершается доказательство неравенства (17) для $n = 2$, а, следовательно, и доказательство единственности решения задачи (5)–(6) при этом значении $n$.

Итак, решение задачи (1)–(2) единственно.

При необходимости проверки единственности положительного решения задачи (5)–(6) при других $n$ можно применить ту же методику, что и для $n = 2$.

Автор глубоко признателен Е.П. Жидкову за постоянный интерес к данной работе и обсуждения в ходе ее выполнения, а также И.В. Пузынину за расчеты, выполненные им по просьбе автора.

## Литература

1. Y.Takahashi. The Structure of the Nucleon Core by the Hartree Approximation. Nuclear Physics 26, 658 (1961).
2. I.L.Synge. On a Certain non-linear Differential Equation. Proc. Royal Irish. Acad. 1961, A 62, No. 3, , 17-41.
3. Е.П. Жидков, В.П. Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Препринт ОИЯИ Р-1319, Дубна , 1963.
4. Z.Nehari. On a Non-Linear Differential Equation Arising in Nuclear Physics, Proc. Royal Irish. Acad. 1963, A62, No. 9, 117-134.
5. Е.П. Жидков, В.П. Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. ЖВМ и МФ, 4, № 5, 804-816, 1964.
6. В.П. Шириков. Множество решений краевой задачи для некоторых уравнений математической физики. Препринт ОИЯИ Р-1682, Дубна, 1964.
7. R.I.Finkelstein, R.Lelevier, M.Ruderman, Non-Linear Spinor Field. Phys. Rev., 83, 326 (1951).
8. N.Rosen, H.B.Rosenstock. The Force Between Particles in a Non-Linear Field Theory, Phys. Rev., 85, 257 (1952).
9. R.I.Finkelstein, C.Fronsdal, P.Kaus. Non-Linear Spinor Fields. Phys. Rev., 103, 1571 (1956).
10. В.Б. Гласко, Ф. Лерюст, Я.П. Терлецкий, С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ 35, вып. 2 (8),(1958).
11. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 февраля 1965 г.



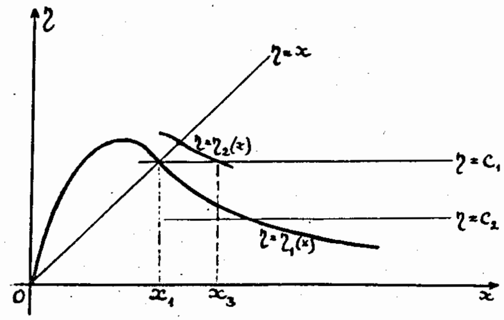


Рис. 1. Положительное решение краевой задачи (5) - (6).

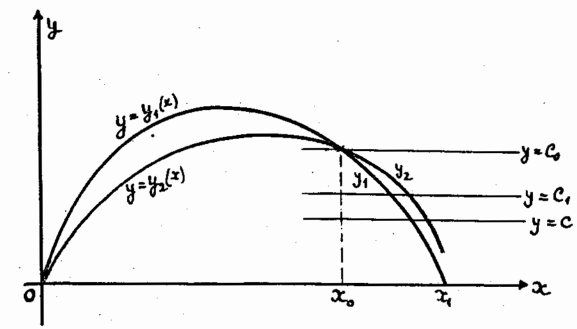


Рис. 2. Два решения уравнений (13) - (14), близкие по начальным условиям.