ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

1733

А.А. Корнейчук, А.С. Марков, Ом Сан Ха

ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1964

1733

А.А. Корнейчук, А.С. Марков, Ом Сан Ха

ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

ВВЕДЕНИЕ

Многочлены Якоби $\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ могут быть определены как решение разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\mathcal{A}_{n+1}\mathcal{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - (\mathcal{B}_n x + C_n)\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \mathcal{D}_{n-1}\mathcal{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0\,, \tag{0.1}$$

где

$$\mathcal{A}_n = n\,;\ \mathcal{B}_n = \frac{(2n+1+2\gamma)(n+1+\gamma)}{n+1+2\gamma}\,;\ C_n = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(2n+1+2\gamma)}{2(n+1+2\gamma)(2n+2\gamma)}\,;\ \mathcal{D}_n = \frac{(n+1+\alpha)(n+1+\beta)(n+2+\gamma)}{(n+2+2\gamma)(n+1+\gamma)}\,; \tag{0.2}$$

$$\gamma = (\alpha+\beta)/2\,;\quad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Это решение удовлетворяет начальным условиям

$$\mathcal{P}_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv 0\,;\quad \mathcal{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv 1\,. \tag{0.3}$$

Важнейшим является свойство ортогональности

$$\int_{-1}^{1}\mathcal{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x)\,\mathcal{P}_\ell^{(\alpha,\beta)}(x)\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = 0\,,\ k\neq\ell\,. \tag{0.4}$$

Интерес к многочленам Якоби определяется и тем, что ряд широко известных систем многочленов является их частным случаем. Например,

$$\mathcal{P}_n^{(0,0)}(x) \equiv \mathcal{P}_n(x) \qquad \text{– многочлены Лежандра}\,, \tag{0.5}$$

$$\Gamma(1/2)\,\Gamma(n+1)\left[\Gamma(n+1/2)\right]^{-1}\mathcal{P}_n^{(-1/2,-1/2)}(x) \equiv T_n(x) \qquad \text{– многочлены Чебышева I-го рода} \tag{0.6}$$

Как средство вычисления многочленов Якоби рекуррентная формула (0.I) особенно удобна при использовании электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ). При этом не нужны таблицы коэффициентов или корней, и порядок многочлена не ограничивается. Вычисления по рекуррентной формуле реализуются в машине в виде простой, компактной программы. Затраты времени будут, разумеется, выше, чем при счете по таблице коэффициентов или корней, но не настолько, чтобы воспрепятствовать использованию формулы (0.I) при счете на ЭЦВМ.

Однако не следует упускать из виду еще один важный момент – точность. При счете по формуле (0.I) на каждом шагу неизбежно делаются погрешности округления. Эти погрешности накапливаются от шага к шагу и для достаточно больших порядков многочлена могут стать недопустимо большими. Данная работа посвящена оценкам погрешностей, которые могут накопиться в процессе вычислений с округлением по формуле (0.I). Ее можно рассматривать также как исследование устойчивости решения $\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ разностного уравнения (0.I).

I. Вспомогательные формулы

Для использования в дальнейших оценках нам надо установить ряд свойств символов $\binom{p}{q}$, которые при целых q являются биномиальными коэффициентами. По определению

$$\binom{p}{q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)} . \qquad (I.1)$$

Из свойства Г-функции

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (I.2)$$

получаем

$$\binom{p+1}{q+1} = \frac{p+1}{q+1}\binom{p}{q} . \qquad (I.3)$$

Покажем, что имеет место следующая формула суммирования:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+\alpha}{k} = \frac{n+1}{\alpha+1}\binom{n+1+\alpha}{n+1}. \qquad (I.4)$$

Действительно, при $n=0$ формула верна:

$$\binom{\alpha}{0} = \frac{1}{\alpha+1}\binom{1+\alpha}{1}. \qquad (I.5)$$

Если она верна для n слагаемых, то

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k+\alpha}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+\alpha}{k} + \binom{n+1+\alpha}{n+1} = \frac{n+2+\alpha}{\alpha+1}\binom{n+1+\alpha}{n+1} = \frac{n+2}{\alpha+1}\binom{n+2+\alpha}{n+2}, \qquad (I.6)$$

и формула верна для $n+1$ слагаемого.

Аналогично может быть доказана справедливость и более общей формулы:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\dots(k-p)\binom{k+\alpha}{k} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-p)}{2+\alpha+p}\binom{n+1+\alpha}{n+1}; \quad p, n = 0, 1, 2, \dots \qquad (I.7)$$

Известно ([I] , равенство (7.32.2)), что

$$\binom{n+\alpha}{n} \sim n^{\alpha} \quad \text{при} \quad n \to \infty . \qquad (I.8)$$

Пользуясь определением (I.I) и асимптотическим разложением для Г-функции ([2] , равенство (8.327)), можно вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha}{n+\beta} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} . \qquad (I.9)$$

Получим некоторые оценки для величины $(n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha}{n+\beta}$, равномерные по n. Представим эту величину в виде

$$(n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha}{n+\beta} = a_n b_n ; \quad a_n = (n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha-\beta}{n} ; \quad b_n = \binom{n+\alpha}{n+\beta} : \binom{n+\alpha-\beta}{n}, \qquad (I.10)$$

и оценим отдельно a_n и b_n. Имеем

$$a_{n+1} = \frac{n+1+\alpha-\beta}{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha-\beta} a_n = \left[\left(1+\frac{\alpha-\beta}{n+1}\right) : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-\beta}\right] a_n . \qquad (I.11)$$

Обозначим $\frac{1}{n+1} = x$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = [1+(\alpha-\beta)x](1+x)^{\beta-\alpha} . \qquad (I.12)$$

Производная $f'(x)$ для $x \geqslant 0$ сохраняет знак:

$$f'(x) = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)x\,(1+x)^{\beta-\alpha-1} \qquad (I.13)$$

и, так как $f(0)=1$ и $0 < x \leqslant 1$, то верны неравенства:

$$f(x) \geqslant 1 , \quad \text{если} \quad (\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha-\beta+1 \geqslant 0 ; \qquad (I.14)$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 , \quad \text{если} \quad (\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha-\beta+1 \geqslant 0 . \qquad (I.15)$$

В первом случае (неравенство (I.14)) a_n образуют возрастающую последовательность, а во втором случае (неравенство (I.15)) - убывающую последовательность. Подставив в (I.9) $\alpha-\beta$ вместо α и нуль вместо β, найдем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} ; \qquad (I.16)$$

далее из (I.10) находим $a_0 = 1$, следовательно,

$$1 \leqslant a_n \leqslant 1/\Gamma(1+\alpha-\beta), \text{ если } 0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant 1 , \quad n = 0, 1, 2, \dots ; \qquad (I.17)$$

$$1/\Gamma(1+\alpha-\beta) \leqslant a_n \leqslant 1 , \quad \text{если} \quad \alpha-\beta \geqslant 1 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant \alpha-\beta \leqslant 0 ; \quad n = 0, 1, \dots \qquad (I.18)$$

Переходим к оценке b_n. Из (I.10) мы можем получить

$$b_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)\alpha}{(n+1)^2 + (n+1)\alpha + \beta(\alpha-\beta)} . \qquad (I.19)$$

Используя (I.9), находим

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\binom{n+\alpha}{n+\beta} : \binom{n+\alpha-\beta}{n}\right] = \left[\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha}{n+\beta}\right] : \left[\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha-\beta}{n}\right] = 1; \qquad (I.20)$$

из (I.10) находим $b_0 = \binom{\alpha}{\beta}$. Если $\alpha > -1$, $\beta(\alpha-\beta) \geqslant 0$, то для $n = 0, 1, \dots$ b_n положительны и образуют убывающую последовательность. Поэтому

$$1 \leqslant b_n \leqslant \binom{\alpha}{\beta} \quad \text{для} \quad \alpha > -1 ; \quad \beta(\alpha-\beta) \geqslant 0 ; \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad (I.21)$$

Аналогично доказывается, что

$$\binom{\alpha}{\beta} \leqslant b_n \leqslant 1 , \quad \text{если} \quad -1-\alpha < \beta(\alpha-\beta) \leqslant 0 ; \quad n = 0, 1, 2, \dots . \qquad (I.22)$$

Объединяя (I.17), (I.18), (I.21) и (I.22), получаем общую оценку

$$m(\alpha,\beta) \leqslant (n+1)^{\beta-\alpha}\binom{n+\alpha}{n+\beta} \leqslant M(\alpha,\beta) , \qquad (I.23)$$

где $m(\alpha,\beta)$ и $M(\alpha,\beta)$ определяются из таблицы I.

Таблица I

<table>
<tr><th></th><th>Неравенства для α, β</th><th>$m(\alpha,\beta)$</th><th>$M(\alpha,\beta)$</th></tr>
<tr><td>I</td><td>$\alpha > -1; \ \beta \geqslant 0; \ 0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant 1$</td><td>$1$</td><td>$[1/\Gamma(1+\alpha-\beta)]\binom{\alpha}{\beta}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$0 \leqslant \alpha-\beta \leqslant 1; \ -1-\alpha < \beta(\alpha-\beta) \leqslant 0$</td><td>$\binom{\alpha}{\beta}$</td><td>$1/\Gamma(1+\alpha-\beta)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\alpha > -1; \ \beta \geqslant 0; \ \alpha-\beta \geqslant 1$</td><td rowspan="2">$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}$</td><td rowspan="2">$\binom{\alpha}{\beta}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\alpha > -1; \ \beta \leqslant 0; \ -1 \leqslant \alpha-\beta \leqslant 0$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\alpha-\beta \geqslant 1; \ -1-\alpha < \beta(\alpha-\beta) \leqslant 0$</td><td rowspan="2">$\binom{\alpha}{\beta}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}$</td><td rowspan="2">$1$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$-1 \leqslant \alpha-\beta \leqslant 0; \ -1-\alpha < \beta(\alpha-\beta) \leqslant 0$</td></tr>
</table>

2. Уравнение для погрешности

Когда значения многочленов Якоби из рекуррентной формулы (0.I) находятся с помощью вычислительной машины, каждая арифметическая операция сопровождается округлением; счет фактически ведется по формуле

$$\mathcal{A}_{n+1}\widetilde{\mathcal{P}}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)+\left(\mathcal{B}_n x+C_n\right)\widetilde{\mathcal{P}}_n^{(\alpha,\beta)}(x)+\mathcal{D}_{n-1}\widetilde{\mathcal{P}}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=\mathcal{A}_{n+1}\Delta_{n+1}\ , \tag{2.I}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ – приближенное значение многочлена, а Δ_{n+1} – суммарная погрешность округления $n+1$ -го шага; последняя сравнительно легко может быть оценена, т.к. порядки величин, участвующих в формуле (2.I), известны.

При $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$ справедлива формула Дарбу (см. [I] , (8.2I.I0)):

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=n^{-1/2}k(\theta)\cos(N\theta+\nu)+O(n^{-3/2}),$$

где $N=n+\gamma+1/2$; $\nu=-(\alpha+1/2)\frac{\pi}{2}$; $\cos\theta=x$; $\gamma=(\alpha+\beta)/2$; $k(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2}$ (2.2)

Известна также равномерная оценка (см. [I] , (7.32.2)):

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|=\binom{n+\lambda}{n},\ \text{где}\ \ \lambda=\max\{\alpha,\beta\}\ ;\ \lambda\geqslant-\tfrac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Исходя из оценок (2.2) и (2.3), естественно предположить (для ЭЦВМ с плавающей запятой) следующие оценки для суммарной погрешности округления n-го шага:

$$\Delta_n\leqslant\Delta k(\theta)\,n^{-1/2}\qquad\text{при}\quad\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon \tag{2.4}$$

$$\Delta_n\leqslant\Delta\binom{n+\lambda}{n}\approx\frac{\Delta n^{\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)}\ ;\quad\lambda=\max\{\alpha,\beta\}\ ;\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{2.5}$$

Константа Δ в (2.4) и (2.5) не зависит от n ; с числом m двоичных разрядов мантиссы ЭЦВМ эта константа связана соотношением

$$\log_2\frac{1}{\Delta}\approx m-4. \tag{2.6}$$

Вычитая (0.I) из (2.I), получим для абсолютной погрешности

$$\varepsilon_k=\widetilde{\mathcal{P}}_k^{(\alpha,\beta)}(x)-\mathcal{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.7}$$

следующее уравнение:

$$\mathcal{A}_{n+1}\varepsilon_{n+1}+\left(\mathcal{B}_n\cos\theta+C_n\right)\varepsilon_n+\mathcal{D}_{n-1}\varepsilon_{n-1}-\mathcal{A}_{n+1}\Delta_{n+1}=0 \tag{2.8}$$

с начальными условиями

$$\varepsilon_{-1}=0\ ;\ \varepsilon_0=0. \tag{2.9}$$

После замены

$$\delta_n=\frac{\Gamma(n+2\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}\,\varepsilon_n$$

уравнение (2.8) принимает вид

$$(n+1)\delta_{n+1}-2(n+\gamma+1/2)\left(\cos\theta+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4(n+\gamma)(n+\gamma+1)}\right)\delta_n+\frac{(n+2\gamma)(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+\gamma)^2}\,\delta_{n-1}-$$
$$-\frac{\Gamma(n+2\gamma+2)}{\Gamma(n+\gamma+2)}(n+1)\Delta_{n+1}=0. \tag{2.I0}$$

Образуем сумму

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{(k+1)\delta_{k+1}-2(k+\gamma+1/2)\left(\cos\theta+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4(k+\gamma)(k+\gamma+1)}\right)\delta_k+\frac{(k+2\gamma)(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+\gamma)^2}\,\delta_{k-1}- \tag{2.II}$$
$$-\frac{\Gamma(k+2+2\gamma)}{\Gamma(k+2+\gamma)}(k+1)\Delta_{k+1}\Big\}\sin(n-k+1)\theta=\sum_{k=0}^{n}\Big\{k\sin(n-k+2)\theta-2k\cos\theta\sin(n-k+1)\theta+$$
$$+k\sin(n-k)\theta-\Big[(2\gamma+1)\cos\theta+\frac{2(k+\gamma+1/2)(\alpha^2-\beta^2)}{4(k+\gamma)(k+\gamma+1)}\Big]\sin(n-k+1)\theta+\frac{(k+1+2\gamma)(k+1+\alpha)(k+1+\beta)}{(k+1+\gamma)^2}\times$$
$$\times\sin(n-k)\theta-k\sin(n-k)\theta\Big\}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+2\gamma+2)}{\Gamma(k+\gamma+2)}(k+1)\sin(n-k-1)\theta\,\Delta_{n+1}=0.$$

Учитывая равенства

$$\delta_{-1}=\frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\,\varepsilon_{-1}=0\ ,\quad\delta_0=\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1)}\,\varepsilon_0=0, \tag{2.I2}$$

$$\sin(l-1)\theta-2\cos\theta\sin l\theta+\sin(l+1)\theta=0\ , \tag{2.I3}$$

окончательно можем записать:

$$(n+1)\sin\theta\,\delta_{n+1}=(2\gamma+1)\sum_{k=1}^{n}\cos(n-k+1)\theta\sin\theta\,\delta_k+\frac{\alpha-\beta}{4}\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{2\gamma}{k+\gamma}\sin(n-k+1)\theta+$$
$$+\frac{2\gamma}{k+1+\gamma}\sin(n-k+1)\theta+\frac{\alpha-\beta}{k+\gamma+1}\sin(n-k)\theta+\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{(k+\gamma+1)^2}\sin(n-k)\theta\Big]\delta_k+ \tag{2.I4}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+2+2\gamma)}{\Gamma(k+2+\gamma)}(k+1)\sin(n-k+1)\theta\,\Delta_{k+1}\ ;$$

при этом

$$n=1,2,\dots\ ;\qquad\delta_1=\frac{\Gamma(2+2\gamma)}{\Gamma(2+\gamma)}\Delta_1.$$

3. Оценка абсолютной погрешности

Предположим, что погрешности округления на $k+1$ шаге оценены по формуле (2.4). Используя последовательно формулы (I.I), (I.7) и (I.23), для последней суммы в (2.I4) получим оценку:

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+2+2\gamma)}{\Gamma(k+2+\gamma)}(k+1)\sin(n-k+1)\theta\,\Delta_{k+1}\right|\leqslant \tag{3.I}$$
$$\leqslant\Delta k(\theta)a(\gamma)\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{k+\gamma-1/2}{k}=\Delta k(\theta)a(\gamma)(n+1)\left(\frac{1}{\gamma+3/2}n+\frac{1}{\gamma+1/2}\right),$$

где

$$a(\gamma)=\begin{cases}\dfrac{(1+2\gamma)\Gamma(1+2\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)}{(1+\gamma)\Gamma^2(1+\gamma)}\ , & \text{если}\quad\gamma\geqslant 0\ ;\\ \Gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\ , & \text{если}\quad -1/2<\gamma\leqslant 0.\end{cases} \tag{3.2}$$

Покажем, что можно подобрать положительную константу C такую, что

$$|\delta_k|\leqslant C\,\frac{k(\theta)a(\gamma)}{\sin\theta}(k+\gamma)\binom{k+\gamma-1/2}{k}, \tag{3.3}$$
$$k=1,2,\dots$$

Чтобы из неравенства

$$|\delta_1|\leqslant\frac{\Gamma(2+2\gamma)}{\Gamma(2+\gamma)}\Delta\frac{k(\theta)}{\sin\theta} \tag{3.4}$$

следовало (3.3) при $k=1$, константа должна удовлетворять неравенству:

$$C \geqslant \frac{2\Delta\Gamma(1+2\gamma)}{(1+\gamma)^2\Gamma(1+\gamma)a(\gamma)} \,. \tag{3.5}$$

Пусть (3.3) верно для $k=1,2,\dots,n$. Из (2.I4) имеем:

$$\begin{aligned} |\delta_{n+1}| \leqslant \frac{k(\theta)a(\gamma)}{(n+1)\sin\theta}\Big\{ C\Big[(2\gamma+1)\sum_{k=1}^{n}(k+\gamma)\binom{k+\gamma-1/2}{k} + \frac{|\alpha-\beta|}{4}\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{2|\gamma|}{k+\gamma}(n+1-k) + \\ + \frac{2|\gamma|}{k+1+\gamma}(n-k+1) + \frac{|\alpha-\beta|}{k+1+\gamma}(n-k) + \frac{|\gamma(\alpha-\beta)|}{(k+\gamma+1)^2}(n-k)\Big](k+\gamma)\binom{k+\gamma-1/2}{k} + \\ + \Delta(n+1)\Big(\frac{1}{\gamma+3/2}n + \frac{1}{\gamma+1/2}\Big)\binom{n+\gamma+1/2}{n+1}\Big\} \,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ограничимся пока случаем $0<\gamma<1/2$, тогда

$$\begin{aligned} |\delta_{n+1}| \leqslant \frac{k(\theta)a(\gamma)}{(n+1)\sin\theta}\Big\{ C\Big[(2\gamma+1-b)\sum_{k=0}^{n}k\binom{k+\gamma-1/2}{k} + (\gamma(2\gamma+1)+b(n+1))\sum_{k=0}^{n}\binom{k+\gamma-1/2}{k}\Big] + \\ + (n+1)\Big(\frac{1}{\gamma+3/2}n + \frac{1}{\gamma+1/2}\Big)\binom{n+\gamma+1/2}{n+1}\Big\} = \Big\{ C\Big[\frac{2\gamma+1-b}{\gamma+3/2}n + \frac{bn}{\gamma+1/2} + \\ + \frac{\gamma(2\gamma+1)+b}{\gamma+1/2}\Big] + \Delta\Big(\frac{1}{\gamma+3/2}n + \frac{1}{\gamma+1/2}\Big)\Big\}\frac{k(\theta)a(\gamma)}{\sin\theta}\binom{n+\gamma+1/2}{n+1} \,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $b = 1/4|\alpha-\beta|(4|\gamma| + |\alpha-\beta|(1+|\gamma|))$. (3.8)

Правые части неравенств (3.3) при $k=n+1$ и (3.7) различаются только множителями, линейными по n . Для того, чтобы из оценки (3.7) при $n \geqslant 1$ следовало неравенство (3.3), необходимо и достаточно выполнения условия:

$$C\Big[\frac{2\gamma+1-b}{\gamma+3/2}n + \frac{b}{\gamma+1/2} + \frac{\gamma(2\gamma+1)+b}{\gamma+1/2}\Big] \leqslant C(n+1+\gamma); \quad n=1,2,\dots, \tag{3.9}$$

которое мы можем переписать в виде

$$C[(1/4-\gamma^2-b)n + (\gamma+3/2)(1/2+1/2\gamma-\gamma^2-b)] \geqslant \Delta(\gamma+1/2)n + \Delta(\gamma+3/2); \quad n=1,2,\dots \,. \tag{3.10}$$

Чтобы прямая

$$y_1(n) = C(1/4-\gamma^2-b)n + C(\gamma+3/2)(1/2+1/2\gamma-\gamma^2-b) \tag{3.11}$$

шла для $n \geqslant 1$ выше прямой

$$y_2(n) = \Delta(\gamma+1/2)n + \Delta(\gamma+3/2), \tag{3.12}$$

как легко проверить, необходимо и достаточно выполнения неравенств:

$$C(1/4-\gamma^2-b) \geqslant \Delta(\gamma+1/2), \tag{3.13}$$

$$C[(1/4-\gamma^2-b) + (\gamma+3/2)(1/2+1/2\gamma-\gamma^2-b)] \geqslant \Delta(\gamma+3/2) + \Delta(\gamma+1/2). \tag{3.14}$$

Учитывая, что константа C должна быть положительной, получаем также требования:

$$1/4-\gamma^2-b \geqslant 0, \qquad \gamma>0; \tag{3.15}$$

$$1/4-\gamma^2-b+(\gamma+3/2)(1/2+1/2\gamma-\gamma^2-b) \geqslant 0, \qquad \gamma>0; \tag{3.16}$$

причем второе можно опустить, как вытекающее из первого.

Итак, (3.3) верно при условии (3.I5) и

$$C = \max\Big\{\frac{2\Delta\Gamma(1+2\gamma)}{(1+\gamma)^2\Gamma(1+\gamma)a(\gamma)}, \frac{\Delta(\gamma+1/2)}{1/4-\gamma^2-b}, \frac{2\Delta(\gamma+1/2)}{1/4-\gamma^2-b+(\gamma+3/2)(1/2+\gamma/2-\gamma^2-b)}\Big\}. \tag{3.17}$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай $-1/2<\gamma<0$. При этом получим, что (3.3) верно при условиях:

$$1/2 + 3/2\gamma + \gamma^2 - b \geqslant 0, \qquad \gamma<0; \tag{3.18}$$

$$1/4 - \gamma^2 - b \geqslant 0, \qquad \gamma<0; \tag{3.19}$$

$$C = \max\Big\{\frac{2\Delta\Gamma(1+2\gamma)}{(1+\gamma)^2\Gamma(1+\gamma)a(\gamma)}, \frac{2\Delta(1+\gamma)}{1/4-\gamma^2-b+(\gamma+3/2)(1/2+3/2\gamma+\gamma^2-b)}, \frac{\Delta(\gamma+1/2)}{1/4-\gamma^2-b}\Big\}. \tag{3.20}$$

Получим оценку типа (3.3) с ограничениями на γ и b более слабыми, чем (3.I5) и (3.I8), (3.I9), но годную не для всех углов θ . Для этого запишем уравнение для δ_k в виде:

$$\begin{aligned} (n+1)\sin\theta\,\delta_{n+1} = (2\gamma+1)\sum_{k=0}^{n}\cos(n-k+1)\theta\sin\theta\,\delta_k + \frac{\alpha-\beta}{4}\sum_{k=0}^{n}\Big[\frac{2\gamma}{k+\gamma}\sin(n-k+1)\theta + \\ + \frac{2\gamma}{k+\gamma+1}\sin(n-k+1)\theta + \frac{\alpha-\beta}{k+\gamma+1}\sin(n-k)\theta + \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{(k+\gamma+1)^2}\sin(n-k)\theta\Big]\delta_k + \\ + \sum_{k=0}^{n}(k+\gamma)\sin(n-k+1)\theta\,\Gamma(k+2+2\gamma)\Delta_{k+1}/\Gamma(k+2+\gamma); \quad \delta_0=0; \quad n=0,1,2,\dots \,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Покажем, что найдется положительная величина $C(\theta)$ такая, что

$$|\delta_k| \leqslant C(\theta)k(\theta)a(\gamma)|k+\gamma|\binom{k+\gamma-1/2}{k}, \qquad k=0,1,2,\dots \,. \tag{3.22}$$

Поскольку $\delta_0=0$, (3.22) очевидно для $k=0$. Пусть (3.22) верно для $k=0,1,\dots,n$. Из (3.2I) имеем:

$$\begin{aligned} |\delta_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+1}\Big\{(2\gamma+1)\sum_{k=0}^{n}|\delta_k| + \frac{b}{\sin\theta}\sum_{k=0}^{n}\frac{|\delta_k|}{|k+\gamma|}\Big\} + \Delta\frac{k(\theta)a(\gamma)}{\sin\theta}\Big(\frac{n}{\gamma+3/2} + \frac{1}{\gamma+1/2}\Big) \leqslant \\ \leqslant k(\theta)a(\gamma)\binom{n+\gamma+1/2}{n+1}\Big\{C(\theta)\Big[\frac{2\gamma+1}{\gamma+3/2}n + \frac{|\gamma|(2\gamma+1)\sin\theta+b}{(\gamma+1/2)\sin\theta} + \\ + (\Delta/\sin\theta)\Big(\frac{1}{\gamma+3/2}n + \frac{1}{\gamma+1/2}\Big) \,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Рассуждая, как при получении требований (3.I5) и (3.I7), заключаем, что (3.22) верно для $k=0,1,2,\dots$, если

$$|\gamma| < 1/2; \tag{3.24}$$

$$\sin\theta > \frac{b}{(\gamma+1/2)(1+\gamma-2|\gamma|)}; \tag{3.25}$$

$$C(\theta) = \max\Big\{\frac{\Delta}{\sin\theta(1/2-\gamma)}, \frac{\Delta}{(\gamma+1/2)(1+\gamma-2|\gamma|)\sin\theta-b}\Big\}. \tag{3.26}$$

Предыдущие оценки зависят от точки $x=\cos\theta$, в которой производятся вычисления . Поэтому получим также оценку, справедливую равномерно на всем интервале $[-1, 1]$. Для этого воспользуемся оценкой для Δ_{n+1} (2.5). Подобно (3.I) получаем:

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=0}^{n}\Gamma(k+2+2\gamma)(k+1)\sin(n-k+1)\theta\,\Delta_{k+1}/\Gamma(k+2+\gamma)\Big| \leqslant \\ \leqslant \Delta\sin\theta\,a(\alpha,\beta)\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(k+1)\binom{k+1+\lambda+\gamma}{k+1} = \\ = \Delta\sin\theta\,a(\alpha,\beta)(n+1)\Big[\frac{n^2}{(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda)} + \frac{(5+2\gamma+2\lambda)n}{(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda)} + 1\Big]\binom{n+1+\gamma+\lambda}{n+1}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где

$$a(\alpha,\beta) = \Gamma(\gamma+1)\frac{M(2\gamma,\gamma)M(\lambda,0)}{m(\gamma+\lambda,0)}; \tag{3.28}$$

$$M(2\gamma,\gamma)=\begin{cases}\Gamma(1+2\gamma)/\Gamma^3(1+\gamma), & \text{если } \gamma\geq 0;\\ \Gamma(1+2\gamma)/\Gamma^2(1+\gamma), & \text{если } \gamma\leq 0;\end{cases}\qquad M(\lambda,0)=\begin{cases}1/\Gamma(1+\gamma), & \text{если } \lambda\geq 0;\\ 1, & \text{если } \lambda\leq 0;\end{cases}$$

$$m(\gamma+\lambda,0)=\begin{cases}1/\Gamma(1+\gamma+\lambda), & \text{если } \gamma+\lambda\geq 0;\\ 1, & \text{если } \gamma+\lambda\leq 0.\end{cases}$$

Предполагая $|\alpha-\beta|<1$, $|\gamma|<1/2$, из (3.2I) имеем: (3.29)

$$|\delta_{n+1}|\leq\frac{1}{n+1}\left\{(2\gamma+1)\sum_{k=0}^{n}|\delta_k|+\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{n-k+1}{k+\gamma}\right|\cdot|\delta_k|\right\}-$$

$$-\left[\frac{n^2}{(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda)}+\frac{(5+2\gamma+2\lambda)n}{(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda)}+1\right]\binom{n+1+\gamma+\lambda}{n+1}\Delta a(\alpha,\beta). \quad (3.30)$$

Подберем константу $c>0$ так, чтобы

$$|\delta_k|\leq c\,a(\alpha,\beta)(k+\gamma)\binom{k+\gamma+\lambda}{k}k; \qquad k=0,1,2,\dots \quad (3.3I)$$

Рассуждениями, аналогичными тем, какими получались предыдущие оценки, получаем для (3.3I) необходимое и достаточное условие:

$$c\{[(2+\lambda)^2-1-\gamma^2]n^2+[2(\lambda+4\gamma+13/4)(\lambda+5/4)+\gamma\lambda^2-\gamma^3+7/8]n+$$
$$+(1+\gamma)(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda)\}\geq\Delta[n^2+(5+2\lambda+2\gamma)n+(2+\gamma+\lambda)(3+\lambda+\gamma)]. \quad (3.32)$$

Нужно обеспечить, чтобы парабола

$$y_1(n)=c[(2+\lambda)^2-1-\gamma^2]n^2+c[2(\lambda+4\gamma+13/4)(\lambda+5/4)+$$
$$+\gamma\lambda^2-\gamma^3+7/8]n+c(1+\gamma)(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda) \quad (3.33)$$

для $n\geq 0$ шла выше параболы

$$y_2(n)=\Delta n^2+\Delta(5+2\lambda+2\gamma)n+(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda).$$

Так как коэффициенты обеих парабол положительны в предположениях (3.29) и $n\geq 0$, для этого достаточно потребовать, чтобы коэффициенты трехчлена $y_1(n)$ были больше соответствующих коэффициентов $y_2(n)$. Это дает:

$$c=\max\left\{\frac{\Delta}{1+\gamma},\frac{\Delta(5+2\gamma+2\lambda)}{2(\lambda+4\gamma+13/4)(\lambda+5/4)+7/8},\frac{\Delta(1+\lambda)(2+\gamma+\lambda)(3+\gamma+\lambda)}{(2+\lambda)^2-1-\gamma^2}\right\}. \quad (3.34)$$

4. Неулучшаемость оценок по порядку n

Итак, получен ряд оценок для величин δ_n. Погрешности при вычислении многочленов Якоби ε_n связаны с δ_n соотношением:

$$\varepsilon_n=\frac{\Gamma(n+\gamma+1)}{\Gamma(n+2\gamma+1)}\delta_n, \quad (4.I)$$

и неравенства для δ_n переходят в оценки для ε_n. Оценки получены при определенных ограничениях на параметры α,β многочленов Якоби $\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и на аргумент $x=\cos\theta$, при котором они вычисляются.

$$|\varepsilon_k|\leq C(\alpha,\beta)\frac{k(\theta)a(\gamma)}{\sin\theta}\cdot\frac{\Gamma(k+\gamma+1)}{\Gamma(k+2\gamma+1)}(k+\gamma)\binom{k+\gamma-1/2}{k}\sim\frac{C(\alpha,\beta)}{(1-x)^{\alpha+3/4}(1+x)^{\beta+3/4}}k^{1/2}. \quad (4.2)$$

$k(\theta)$ задано равенством (2.2), $a(\gamma)$ – равенством (3.2). При $0<\alpha+\beta<1$ на α и

β налагается дополнительное требование (3.I5), а $C(\alpha,\beta)$ задана формулой (3.I7); при $-1<\alpha+\beta\leq 0$ α и β ограничены дополнительно неравенствами (3.I8), (3.I9), а $C(\alpha,\beta)$ задана формулой (3.20). Оценка (4.2) показывает, что погрешность при вычислении многочлена Якоби $\mathcal{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ в любой внутренней точке x отрезка $[-I,I]$ с увеличением k растет не быстрее, чем $const\cdot k^{1/2}$. Так как $\mathcal{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ согласно формуле (2.2) есть величина порядка $k^{-1/2}$, заключаем, что отношение максимума погрешности к максимуму многочлена растет линейно с ростом порядка k. Это значит, что при счете по рекуррентной формуле (I) на участке от k до $10k$ теряется не более одного десятичного знака, если величина $\mathcal{P}_{10k}^{(\alpha,\beta)}(x)$ не слишком мала по сравнению с максимальной. В противном случае – число верных значащих цифр уменьшается из-за малости $\mathcal{P}_{10k}^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Оценка (4.2) становится неэффективной при приближении аргумента x к краям отрезка $[-I,I]$ и совершенно непригодна при $x=\pm 1$.

Далее была получена оценка для погрешности ε_k, справедливая лишь для некоторой внутренней части отрезка $[-I,I]$ по x, но при более слабых ограничениях по α, β.

$$|\varepsilon_k|\leq C(\alpha,\beta,\theta)k(\theta)a(\gamma)\frac{\Gamma(k+\gamma+1)}{\Gamma(k+2\gamma+1)}(k+\gamma)\binom{k+\gamma-1/2}{k}\sim C(\alpha,\beta,\theta)k^{1/2}, \quad (4.3)$$

где $k(\theta)$ задано равенством (2.2), $a(\gamma)$ – равенством (3.2); α и β ограничены неравенством (3.24), ограничения на аргумент x заданы неравенством (3.25), а $C(\alpha,\beta,\theta)$ определена в (3.26). Эта оценка по k имеет тот же порядок, что и оценка (4.2), и поэтому к ней относятся все дополнительные замечания по поводу оценки (4.2).

Равномерная оценка, справедливая для всех $x\in[-1,1]$, имеет вид:

$$|\varepsilon_k|\leq C(\alpha,\beta,\lambda)a(\alpha,\beta)\frac{\Gamma(k+\gamma+1)}{\Gamma(k+2\gamma+1)}k(k+\gamma)\binom{k+\gamma+\lambda}{k}\sim C(\alpha,\beta,\lambda)k^{2+\lambda}. \quad (4.4)$$

$a(\alpha,\beta)$ и $C(\alpha,\beta,\lambda)$ заданы соответственно равенствами (3.28) и (3.34), α и β ограничены неравенствами (3.29). Согласно формуле (2.3) максимум $\mathcal{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ при $x\in[-1,1]$ есть величина порядка k^{λ}. Таким образом, отношение максимума погрешности к максимуму многочлена растет, как k^2 с ростом k. Если об аргументе известно только то, что $x\in[-1,1]$, то при счете по рекуррентной формуле (I) от k до $10k$ оценка (4.4) гарантирует потерю не более двух десятичных знаков для значений $\mathcal{P}_{10k}^{(\alpha,\beta)}(x)$, близких к максимальному.

Покажем, что полученные оценки достигаются по порядку n. Для этого в формуле (2.8) положим

$$\Delta_{n+1}=\Delta\left(\mathcal{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)-\frac{\mathcal{D}_{n-1}}{\mathcal{A}_{n+1}}\mathcal{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right). \quad (4.5)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{D}_{n-1}}{\mathcal{A}_{n+1}} = 1$, а $\mathcal{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ и $\mathcal{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ – величины порядка $n^{-1/2}$, то Δ_{n+1} также будет величиной порядка $n^{-1/2}$. Как легко проверить непосредственной подстановкой, решением уравнения (2.8) при данной Δ_{n+1} будет

$$\mathcal{E}_{n+1} = \Delta \cdot n\, \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{4.6}$$

–величина порядка $n^{1/2}$, что соответствует порядку оценок сверху (4.2), (4.3).

Чтобы показать неулучшаемость по порядку n равномерной оценки (4.4), положим в формуле (2.8)

$$\Delta_{n+1} = \Delta\left(n\, \mathcal{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x^*) - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{\mathcal{D}_{n-1}}{\mathcal{A}_{n+1}}\, \mathcal{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x^*)\right), \tag{4.7}$$

где

$$x^* = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \alpha \geq \beta \geq -1/2, \\ -1 & \text{при} \quad \beta > \alpha \geq -1/2. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой в формулу (0.I) проверяется, что

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x^*) = (x^*)^n \binom{n+\lambda}{n}; \quad \lambda = \max(\alpha,\beta); \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.7), находим

$$\Delta_{n+1} = \Delta\binom{n+1+\lambda}{n+1}(x^*)^n\left(2 + 2\lambda + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n^{\lambda}, \tag{4.9}$$

что соответствует формуле (2.5). В то же время решением уравнения (2.8) с правой частью (4.9) будет

$$\mathcal{E}_n = \frac{\Delta\, n(n-1)}{2}\, \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x^*) \sim n^{2+\lambda}. \tag{4.I0}$$

Таким образом, оценка сверху (4.4) достигается по порядку n для погрешности округления, задаваемой формулой (4.7).

5. Результаты численного счета

Чтобы проверить, насколько оценки (4.2), (4.3), (4.4) соответствуют тем реальным погрешностям, которые получаются при вычислении многочленов Якоби с помощью ЭЦВМ, был проведен счет на машине этих многочленов при различных значениях α, β, x для $n = 1, 2, \ldots, 32000$. Счет проводился параллельно с 36 и 24 двоичными знаками мантиссы. В качестве абсолютной погрешности бралась разность соответствующих многочленов.

Численный счет показал, что с увеличением n эта разность колеблется, причем амплитуда колебаний растет как $n^{1/2}$, в соответствии с оценками (4.2), (4.3). Что же касается множителя при $n^{1/2}$, то он в этих оценках завышен на I – 2 десятичных порядка. Последнее объясняется, видимо, двумя причинами. Во-первых, далеко не всегда погрешности округления равны максимально возможным, как это допускалось при выводе оценок. Во-вторых, в

процессе этого вывода неизбежно делался ряд огрублений.

Эффективность оценки (4.4) проверялась при $x = 1$. Счет показал, что с ростом n погрешность растет как $n^{2+\lambda}$, что соответствует оценке (4.4). Множитель при $n^{2+\lambda}$, не зависящий от n, в этой оценке также несколько завышен.

Для значений $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$, близких к нулю, погрешность с уменьшением $\sin\theta$ увеличивается по тому же закону, что и оценка (4.2).

Подводя итоги настоящей работы, следует сделать прежде всего вывод о практической пригодности рекуррентной формулы (0.I) для вычисления многочленов Якоби весьма больших порядков. С ростом порядка n многочлена погрешность растет не слишком быстро для всех $x \in (-1, 1)$. В то же время вычислять многочлены при $x = \pm 1$ по формуле (0.I) для $n > 1000$ нецелесообразно ввиду большой потери точности. В этом случае можно воспользоваться, например, равенствами

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}; \quad \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.I}$$

или следующими из них рекуррентными формулами

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = -\frac{n+\beta}{n}\mathcal{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(-1); \quad \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{n+\alpha}{n}\mathcal{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1); \quad \mathcal{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv 1; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

Полученные нами оценки абсолютной погрешности верны при известных ограничениях на параметры α, β и аргумент x. Вероятно, эти ограничения в значительной степени связаны со способом получения оценок и могут быть ослаблены.

ЛИТЕРАТУРА

I. Г.Сеге. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, I962.

2. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, I962.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1964 г.