СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

11-5407

В.И. Кочкин, Е.П. Шабалин

ЭФФЕКТИВНАЯ ОДНОТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ КИНЕТИКИ РАЗМНОЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ С РЕАЛЬНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ
ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1970

11-5407

В.И. Кочкин, Е.П. Шабалин

ЭФФЕКТИВНАЯ ОДНОТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ КИНЕТИКИ РАЗМНОЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ С РЕАЛЬНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Плотность делений в реакторе подчиняется следующему интегральному уравнению:

$$N^*(x,t) = \iint N^*(x',t')\, p(x',x.t',t)\, dt'\, dx' + \iint \frac{s(x',t')}{\nu(x,t)} p_s(x',x,t',t)\, dt'\, dx' \quad , \qquad (1)$$

где $N^*(x,t)$ – скорость делений в момент t в единице объема в точке x ("плотность делений"); $p(x',x,t',t)$ – плотность делений в момент t в точке x, вызванных нейтронами одного деления в точке x' в момент t'; $\nu(x,t)$ – число вторичных нейтронов на акт деления в точке x в момент t; $s(x',t')$ – плотность источников нейтронов; $p_s(x'\ x,t',t)$ – плотность генерации вторичных нейтронов делений, вызванных нейтроном источника в точке (x',t'); интегрирование по x' производится по всему пространству, по t' – от $-\infty$ до t.

Введем обозначения: $N(t') = \int N^*(x',t')dx'$ – скорость делений во всем реакторе в момент t' ("мощность реактора");

$$K(t') = \frac{\int N^*(x',t')dx' \iint p(x',x,t',t)\, dx\, dt}{N(t')} \qquad (3)$$

– динамический коэффициент размножения в момент t';

$$P(t',t-t') = \frac{\int N^*(x',t') \int p(x',x,t',t)\,dx\,dx'}{k(t')\,N(t')} \qquad (4)$$

– динамическая плотность распределения вероятности вторичного деления по времени, если первичное деление имело место в момент t'; очевидно,

$$\int P(t',t-t')\,d(t-t') = 1 \;; \qquad (5)$$

аналогичные обозначения вводятся для источника.

Интегрируя (1) по x и, производя замену переменных $\tau = t - t'$, получим:

$$N(t) = \int_0^\infty [N(t-\tau)\,k(t-\tau)\,P(t-\tau,\tau) + S(t-\tau)\,\frac{k_s(t-\tau)}{\nu}\,P_s(t-\tau,\tau)\,]\,d\tau \;.^{x/} \qquad (6)$$

Уравнение (6), строго говоря, не применимо для нахождения $N(t)$, так как расчёт $P(t',\tau)$ и $k(t')$ уже предполагает знание функции $N'(x,t)$.

Однако возможны такие процессы, когда $k(t')$ и $P(t',\tau)$ или весьма слабо зависят от распределения $N^*(x,t)$, или распределение плотности делений $N^*(x,t)$ по пространству мало меняется со временем. Примером данных ситуаций может служить система слабосвязанных реакторов (или многозонного реактора) с мало изменяющимися во времени геометрическими и физическими свойствами.

Тогда $k(t')$ и $P(t',\tau)$ могут быть рассчитаны для равновесного распределения $N^*(x)$ в реальной геометрии системы (например, методом статистического моделирования) и использованы при решении (6).

x/ Подобная запись уравнения кинетики использовалась в /1,2/.

Практически интересные результаты можно получить, предполагая, что $P(t',\tau)$ зависит только от τ.

1) $P(t',\tau) = P_s(t',\tau) = P(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}$.

Уравнение (6) дифференцированием по t сводится к одноточечному уравнению кинетики:

$$N' = \alpha\,(k-1)\,N + \alpha\,\frac{k_s S}{\nu} \,. \qquad (7)$$

Очевидно, что

$$\int_0^\infty \tau\,P(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\alpha} = T$$

– среднее время жизни поколения нейтронов.

2) $P(\tau) = P_s(\tau) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i\,\gamma_i\,e^{-\alpha_i\tau}$.

Замена

$$n_i = \int_{-\infty}^{t} [\,k(t')\,N(t') + \frac{k_s S(t')}{\nu}\,]\,\alpha_i\,\gamma_i\,e^{-\alpha_i\tau}\,dt'$$

сводит (6) к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$n_i' = -\alpha_i\,n_i + \alpha_i\,\gamma_i\,k\sum_{j=1}^{M} n_j + \alpha_i\,\gamma_i\,\frac{k_s S}{\gamma} \qquad (8)$$

$$i = 1,2\,\ldots\,M\,.$$

По определению $n_i(t)$

$$N(t) = \sum_{i=1}^{M} n_i(t) \;.$$

Если $a_1 \gg a_i$ и $\sum_{i=2}^{M} a_i \gamma_i \ll a_1 \gamma_1$, то система (8) может быть записана в виде, аналогичном одноточечному уравнению кинетики с запаздывающими нейтронами:

$$N' = a_1 N (k\gamma_1 - 1) + a_1 \gamma_1 k_s \frac{S}{\nu} + a_1 \sum_{j=2}^{M} a_j C_j$$

$$C_i' = -a_i C_i + k \gamma_i N ,$$

$$C_i = n_i / a_i , \qquad i = 2,3\ldots M .$$

Уравнения (8) отличаются от приближенных уравнений кинетики связанных реакторов (см., например, /3/);искомые функции $n_i(t)$ в настоящей работе есть плотности делений в реакторе нейтронами со временем жизни $1/a_i$, а уравнения кинетики связанных реакторов записываются для плотности делений в определенной пространственной зоне (или определенном реакторе).

3) $P(\tau)$ - произвольная функция, обладающая свойствами плотности распределения вероятности. Пусть в окрестности t_0 около точки t $N(t)$ можно представить в виде двух членов ряда Тэйлора:

$$N(t') \approx N(t) - N'(t)\,\tau \qquad (\tau = t - t') . \tag{9}$$

Предполагая еще, что $k(t)$, $k_s(t)$ и $S(t)$ слабо меняются в этом интервале (их логарифмические производные много меньше $1/t_0$), вместо (6) получим:

$$N(t) = k(t)\,N(t)\,\gamma_p - k(t)\,N'(t)\,T_p\,\gamma_p + \tag{10}$$

$$+ k_s(t)\frac{S(t)}{\gamma}\gamma_p + \int_{t_0}^{\infty} k(t-\tau)\,N(t-\tau)\,P(\tau)\,d\tau ,$$

где

$$\gamma_p = \int_0^{t_0} P(\tau)\,d\tau , \quad \gamma_p T_p = \int_0^{t_0} \tau P(\tau)\,d\tau .$$

Интеграл в правой части (10) есть доля мощности реактора в момент t , определяемая нейтронами, которые появились не ранее, чем за t_0 до момента t . Грубо говоря, за эту часть мощности ответственны "ленивые" нейтроны; в качестве таковых в реакторе могут быть замедляющиеся и тепловые нейтроны, нейтроны из "далеких" пространственных зон, запаздывающие нейтроны с коротким периодом, нейтроны спонтанно делящихся изомеров с малым временем жизни. Очевидно, что

$$N_{\text{зап.}} = \int_{t_0}^{\infty} k\,N\,P\,d\tau < \operatorname{Max}\{kN\} \times \int_{t_0}^{\infty} P\,d\tau =$$

$$= (1 - \gamma_p)\operatorname{Max}\{kN\} .$$

Если t_0 таково, что $1 - \gamma_p = \int_{t_0}^{\infty} P\,d\tau \ll 1$ то, отбрасывая в (10) $N_{\text{зап.}}$, получим дифференциальное уравнение, которое с абсолютной погрешностью не более $(1-\gamma_p)\operatorname{Max}\{kN\}$ определяет мощность:

$$N'(t) = \frac{k(t)\gamma_p - 1}{k(t)\,\gamma_p\,T_p} N(t) + \frac{k_s}{k}\,\frac{S(t)}{\gamma\,T_p} . \tag{11}$$

Уравнение совпадает по виду с одноточечным уравнением кинетики; однако, среднее время жизни поколения T_p здесь определено без учета нейтронов, которые "живут" очень долго.

Величина $\frac{k_s(t)}{k(t)} S(t) = S^*$ суть эффективный источник нейтронов.

Можно показать, что в отсутствие источника разложение (9) оказывается справедливым при условии

$$k - 1 \ll \frac{T_p}{t_0} .$$

4) Пусть $P(\tau)$ есть линейная комбинация произвольной функции, подчиняющейся условиям п. 3 и M экспонент $\alpha_i \gamma_i e^{-\alpha_i \tau}$ ($\alpha_i > 0$). В этом случае (6) сводится к системе уравнений:

$$N' = \frac{k\gamma_p - 1}{k\gamma_p T_p} N + \frac{S}{\nu T_p} + \frac{1}{k\gamma_p T_p} \sum_{j=1}^{M} n_j \tag{12}$$

$$n_i' = -\alpha_i n_i + k\alpha_i \gamma_i (N + S^*/\nu).$$

5) Разлагая $N(t')$ в ряд Тэйлора в точке t и ограничиваясь n-ым членом, получим вместо (6):

$$N' = N \frac{k\gamma_p - 1}{k\gamma_p T_p} + N'' \frac{\overline{\tau_p^2}}{2T_p} + \ldots + \tag{13}$$

$$+ N^{(n)} \frac{\overline{\tau_p^n}}{n!\, T_p} + \frac{k_s S}{k\nu T_p},$$

где $\overline{\tau_p^n}$ – n-ый момент функции $P(\tau)$.

Из вышеизложенного следует, что применимость одноточечного уравнения кинетики определяется видом функции распределения цепочек деления по времени $P(\tau)$. Если в реакторе присутствуют нейтроны с временем жизни, сравнимым с продолжительностью рассматриваемого нестационарного процесса, то одноточечная модель может быть использована в ограниченном интервале времени с определенной погрешностью (см. п. 3). Например, при затухании нейтронного импульса в импульсном реакторе или бустере долгоживущие нейтроны значительно увеличивают "хвост" импульса; если распределение таких нейтронов описывается экспонентой, то мощность реактора можно определить, решая систему (12) (п. 4).

Как показано в [4], одноточечное уравнение кинетики соответствует случаю однозонного односкоростного реактора. Поэтому введением в уравнение (6) $P(\tau)$ для более реальной модели реактора можно надеяться получить следующее приближение к нестационарному поведению мощности реактора. Уравнения (8), (11) и (12), основанные на определенном виде функции распределения, можно назвать "уравнениями одноточечной модели кинетики реактора".

Данный подход позволяет, по-видимому, получить поведение мощности реактора в таком же приближении, что и многоточечные многогрупповые уравнения кинетики[5,8]. Преимущество эффективной одноточечной модели по сравнению с последними заключается в отсутствии альтернатив выбора числа зон и групп; число временных групп нейтронов диктует вид функции $P(\tau)$.

Распределение нейтронов по времени между делениями $P(\tau)$ с достаточной точностью можно вычислить моделированием стохастического процесса стационарного переноса нейтронов методом Монте-Карло по поколениям. Авторы ввели алгоритм оценки величин $\int_{t_i}^{t_i+1} P(\tau)\,d\tau$, $\bar{\tau}$ и $\overline{\tau^2}$ в программу Монте-Карло для трехмерного многозонного реактора[6]. Были рассчитаны кинетические характеристики трех вариантов реакторов на быстрых нейтронах сложной геометрии и состава: 1 – проектный вариант импульсного исследовательского реактора ИБР-2[7], 2 – расчетный вариант ИБР-2 с зоной из U–235 и отражателем и U–238, 3 – вариант гипотетического двухзонного реактора (без водяного замедлителя) – Pu в зоне и W в отражателе.

Функция $P(\tau)$ для всех обсчитанных реакторов монотонно убывает с ростом τ (рис. 1) и хорошо аппроксимируется в интервале $0 < \tau < 10$ мксек суммой нескольких экспонент (табл. 1). Для варианта 1 вклад нейтронов с временем жизни $\tau > 10$ мксек в плотность делений составил $2 \cdot 10^{-4}$, в среднее время жизни – 10%.

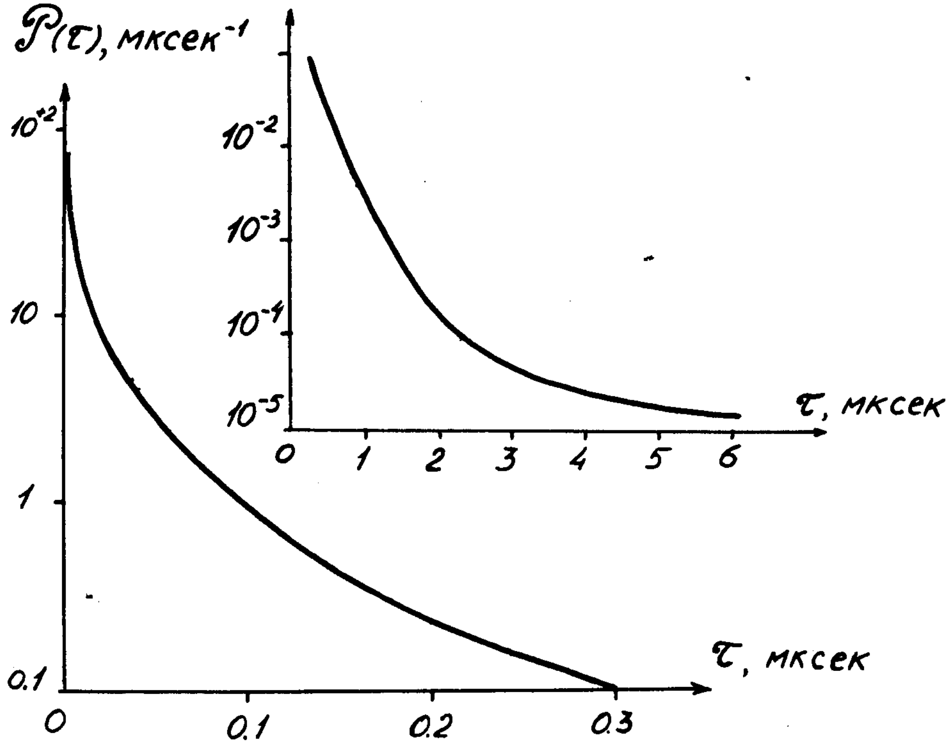

Рис. 1. Плотность распределения нейтронов по времени между делениями $P(\tau)$ для быстрого реактора с тонким отражателем и водяным замедлителем (вариант 1); вверху справа – продолжение $P(\tau)$ в область 0,3 мксек $< \tau <$ 6 мксек.

Таблица 1

Аппроксимация плотности распределения вероятности вторичного деления по времени экспоненциальным рядом $P(\tau) = \sum_i a_i \gamma_i e^{-a_i \tau}$ для трех вариантов реакторов

	(1) $\bar{\tau} = 4\cdot10^{-8}$ сек		(2) $\bar{\tau} = 2{,}7\cdot10^{-8}$ сек		(3) $\bar{\tau} = 4{,}4\cdot10^{-8}$ сек	
i	γ_i	a_i	γ_i	a_i	γ_i	a_i
1	0,347	245	0,408	206	0,43	170
2	0,430	44	0,415	39	0,29	50
3	0,205	14	0,176	14,2	0,28	11,5
4	0,017	4,3	0,001	1,0	–	–
5	0,0008	0,6	–	–	–	–
6	0,0002	–	–	–	–	–

Влияние формы $P(\tau)$ на развитие мощности во времени иллюстрируется рис. 2. Здесь приведены импульсы мощности бустера при размножении ≈ 20 (без учёта запаздывающих нейтронов), подсчитанные для варианта 2 как по обычной одноточечной модели с $T = 2{,}7\cdot10^{-8}$ сек, так и по уравнениям (8) с 4 экспонентами. Различие в величине мгновенной мощности на спаде импульса превышает 20%; энергия за время от 0 до 5 мксек, подсчитанная по эффективной модели, на 7% меньше.

Литература

1. *Т.А. Уэлтон. Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии в Женеве, т. 5, 1955 г. М., Издательство АН СССР, 1958.*

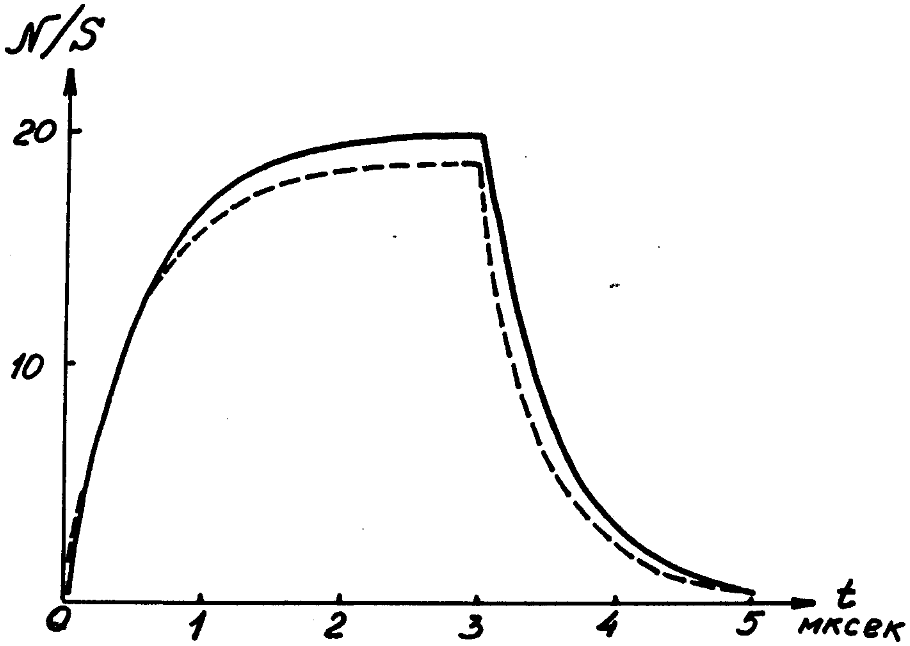

Рис. 2. Форма импульса мощности бустера; в интервале времени $0 < t < 3$ мксек действует постоянный источник нейтронов; $K = 0,95$; $T = 2,7 \cdot 10^{-8}$ сек; сплошная кривая - расчёт по одноточечной модели; пунктирная кривая - расчёт по эффективной одноточечной модели (уравнения (8) настоящей работы).

2. Т.А. Уэлтон. "Кинетика реакторных систем" в сборнике "Теория ядерных реакторов". Госатомиздат 1963.
3. G.E. Hansen and H.A. Sandmeier. Nucl.Sci. and Eng., 22, 315-320 (1965).
4. D. Baroncinic and F.T. Adler. Transactions ANS, v. 4, No 2, Nov., 1961, 257.
5. T. Asaoka and R. Misenta. EURATOM Report EUR-2273, 1965.
6. В.И. Кочкин, Е.П. Шабалин. Препринт ОИЯИ, 11-4098, Дубна, 1968.
7. В.Д. Ананьев и др. Препринт ОИЯИ 13-4392, Дубна, 1969.
8. R.L. Coats and R.L. Long. "Fast Burst Reactors" Proceedings of the National Topical Meeting on Fast Burst Reactors, Albuquerque, January 28-30, 1969. U.S. AEC, 1969, p. 323.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1970 года.