

С 321 1

С-324

77/1-71

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

11 - 5406



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

С.И. Сердюкова

К РАСЧЕТУ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1970

11 - 5406

С.И. Сердюкова

К РАСЧЕТУ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

В работе рассматривается задача о расчёте термоупругих напряжений, возникающих в цилиндре вследствие быстрого нагрева. Автору удалось рассчитать динамические термоупругие напряжения в бесконечном круглом цилиндре. Процесс теплообмена не учитывается. Счёт ведётся по энергетически устойчивой разностной схеме. Порядок изложения таков. Сначала дается математическая постановка задачи. Далее приводится разностная схема. Затем доказывается ее устойчивость. В заключение описываются численные расчёты.

Постановка задачи

Имеется бесконечный круглый цилиндр радиуса $R = 0,2$ см. За малый промежуток времени

$$t_0 = \pi \cdot 10^{-5} \text{ сек}$$

температура цилиндра возрастает от 0° до 100° по закону:

$$T(t) = \begin{cases} 50 (1 - \cos At) , & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{A} = t_0 , \\ 100 , & t > t_0 . \end{cases}$$

В результате такого нагрева в цилиндре возникают упругие напряжения. Обозначим через $u(r, t)$ смещение в радиальном направлении точки, занимавшей в начальный момент положение r . Возникающие термоупругие напряжения обозначим через σ_{rr} (сжимающее напряжение в радиальном направлении), $\sigma_{\phi\phi}$ (растягивающее тангенциальное напряжение), σ_{zz} (сжимающее напряжение в направлении оси цилиндра). Термоупругие напряжения и радиальное смещение связаны ^{/1/} соотношениями:

$$\sigma_{rr} = 2G \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - a \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} T(t) \right\},$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 2G \left\{ \frac{u}{r} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - a \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} T(t) \right\}, \quad (1)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left\{ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - a \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} T(t) \right\}.$$

Замечание. При рассматриваемом распределении температуры радиальное смещение не зависит от положения сечения, осевое смещение равно нулю.

Соответственно равно нулю "скальвающее" напряжение σ_{rz} .

Основное уравнение движения имеет ^{/1/} вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \right).$$

Здесь G - модуль сдвига, σ - коэффициент Пуассона, a - температурный коэффициент линейного расширения, ρ - масса единицы объема.

В наших расчётах

$$G = 788 \cdot 10^8 \text{ г/см}^2,$$

$$\sigma = 0,19808429118,$$

$$a = 16,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град},$$

$$\rho = 17 \text{ г/см}^3$$

(значения параметров взяты из работы ^{/2/}).

В начальный момент цилиндр находится в покое,

$$u(r, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(r, t) \Big|_{t=0} = 0.$$

Предполагается, что поверхность цилиндра свободна от внешних воздействий:

$$\sigma_{rr}(R, t) = 0.$$

Вследствие осевой симметрии ось цилиндра находится в покое:

$$u(0, t) = 0.$$

Итак, радиальное смещение $u(r, t)$ является решением следующей смешанной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad t \geq 0, \\ u(r, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(r, t) \Big|_{t=0} = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{u}{r} \Big|_{r=R} = a \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T(t). \end{array} \right. \quad (2)$$

Решение (2) выписывается в виде ряда по функциям Бесселя. Исследование на уровне главных членов асимптотики показывает, что ряд сходился медленно. Число членов ряда, дающих приближение, зависит от τ . Коэффициентами этого ряда являются интегралы, содержащие функции Бесселя. Так что считать $u(\tau, t)$ с помощью ряда неудобно. Тем не менее этот ряд полезен. С его помощью можно, например, проверять частоты осцилляций численного решения.

Первоначально в основу численного метода была положена разностная схема-мостик. Для повышения порядка точности производился пересчет по схеме-крест.

Автором была установлена ^{/3/} безусловная равномерная устойчивость схемы-мостик для модельного уравнения $u_t + u_x = 0$. В той же работе показано, что соответствующая схема с пересчетом по кресту неустойчива в равномерной метрике. Однако положительный опыт математиков ИПМ, выполнявших по этой схеме сложные газодинамические задачи ^{/4/}, и опыт математиков Сибири, успешно считавших по этой схеме задачу о паводке рек, обнадеживал, что рассматриваемая схема устойчива в какой-то более слабой норме и что эта устойчивость позволит провести расчёт и в нашем случае. Эта надежда не оправдалась. Приблизительно на расстоянии $2t_0$ от начала счёта наблюдается "разбалтывание" результатов по τ со сменой знака буквально при переходе от точки к точке. Причем разбалтывание начинается с $\tau = 0$. Все попытки подправить схему в окрестности оси цилиндра не давали ощутимых результатов. После этого производился счёт по одному "мостику". Теоретические предсказания полностью подтвердились. Схема-мостик обладает хорошими свойствами в смысле устойчивости, однако она недостаточно точна. Из-за недостатка точности наблюдается паразитический экспоненциальный спад: грубо говоря, вместо ряда

$$\sum_1^{\infty} A_k \cos \lambda_k t$$

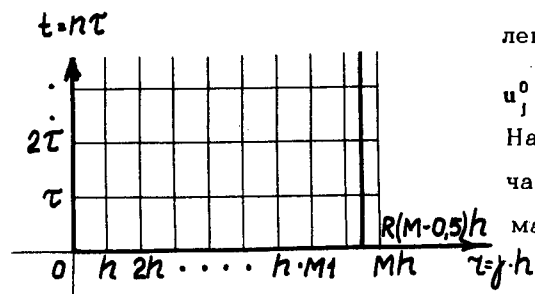
считается ряд

$$\sum_1^{\infty} A_k (\cos \lambda_k t) \exp(-c\tau^2 \lambda_k^2 t),$$

где τ - шаг по времени. Такой ряд быстро вырождается в первую гармонику. Причем расчётное λ_1 прекрасно согласуется с теоретическим. Наблюдаемый экспоненциальный спад можно ослабить, уменьшая τ . Но при этом пропорционально увеличивается время счёта. Есть и другой путь ослабить экспоненциальный спад: увеличить порядок точности схемы с помощью пересчёта. Автором были предприняты попытки построить устойчивую схему с пересчетом. Однако они не увенчались успехом. Далее проводился счёт по одному "кресту". Отношение шагов сетки было подчинено условию Куранта. Это условие проверялось на модельной задаче. Снова появились знакомые осцилляции. После этого окончательно стало ясно, что задача плохо моделируется. Оставалось построить устойчивую разностную схему именно для рассматриваемой задачи, а не для какой-то ее модели, хотя бы это была устойчивость в очень слабой норме! Такая схема была построена.

Энергетически устойчивая разностная схема

Счёт ведется с постоянными шагами: τ - шаг по t , h - шаг по τ . Сетка представлена на рисунке,



На нулевом и первом слоях заданы нулевые начальные данные:

$$u_j^0 = u_j^1 = 0 \quad \text{при } 0 \leq j \leq M.$$

На n -м ($n \geq 2$) слое по t задача (2) заменялась разностной аппроксимацией. $u_0^n = 0$, при $1 \leq j \leq M_1 = M-1$

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{r^2} = \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \left\{ \frac{u_{j+1}^{n+1} r_j + u_j^{n+1} r_j}{r_{j+\frac{1}{2}}} \right. \quad (3)$$

$$\left. - \frac{u_j^{n+1} r_j - u_{j-1}^{n+1} r_{j-1}}{r_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{u_{j+1}^{n-1} r_{j+1} - u_j^{n-1} r_j}{r_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{u_j^{n-1} r_j - u_{j-1}^{n-1} r_{j-1}}{r_{j-\frac{1}{2}}} \right\} / 2h^2,$$

при $j=M-0.5$ задается такая аппроксимация:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{u_M^{n+1} - u_{M1}^{n+1}}{h} + \frac{u_M^{n-1} - u_{M1}^{n-1}}{h} + \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{u_M^{n+1} + u_{M1}^{n+1} + u_M^{n-1} + u_{M1}^{n-1}}{2R} \right\} = \alpha \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T(ur).$$

Схема неявная. Значения u_j^n на каждом следующем слое ($n \geq 2$) находились методом прогонки, которая проводится слева направо. Термоупругие напряжения определяются по формулам (1), в которых производные заменяются разностными аппроксимациями:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{(0,t)} = \frac{u_{(0,t)} - u_{(0,t-h)}}{h} = \frac{8u_2^n - u_3^n}{6h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2), \quad \frac{u}{r} = \frac{u_j^n}{r_j}, \quad 1 \leq j \leq M1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{(R,t)} = \frac{u_M^n - u_{M1}^n}{h} + O(h^2), \quad \frac{u}{r} \Big|_{(R,t)} = \frac{u_M^n + u_{M1}^n}{2R} + O(h^2).$$

Доказательство устойчивости. Дискретный аналог непрерывного закона сохранения энергии

Следуя А.А. Самарскому^{/5/}, строим разностную аппроксимацию вида

$$A \frac{\bar{u}^{n+1} - 2\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1}}{r^2} = B \frac{\bar{u}^{n+1} + \bar{u}^{n-1}}{2h^2} + \bar{D}^n \quad (4)$$

Через \bar{u}^n обозначен вектор значений u на n -м слое:

$$\bar{u}^n = (u_1^n, \dots, u_M^n)$$

Соответственно A и B - матрицы порядка (M, M) . Если A и B симметрические, $A \geq 0$, $B \leq 0$, то имеет место устойчивость в смысле следующего энергетического соотношения:

$$\begin{aligned} & (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n, A (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n)) - (\bar{u}^{n+1}, B \bar{u}^{n+1}) = \\ & = (\bar{u}^n - \bar{u}^{n-1}, A (\bar{u}^n - \bar{u}^{n-1})) - (\bar{u}^{n-1}, B \bar{u}^{n-1}) + (\bar{u}_M^{n+1} - \bar{u}_M^{n-1}) D_M^n. \end{aligned}$$

Докажем, что схеме, по которой ведется счёт, отвечают матрицы A и B , обладающие нужными свойствами. Далее покажем, что для нашего случая энергетическое соотношение является дискретным аналогом непрерывного закона сохранения энергии.

Обозначим через \tilde{R} диагональную матрицу размерности (M, M) :

$$\tilde{R} = \|\| r_j \|\| = \|\| j h \|\|, \quad 1 \leq j \leq M.$$

Запишем (3) в виде матричного уравнения:

$$A \frac{\bar{u}^{-n+1} - 2\bar{u}^{-n} + \bar{u}^{-n-1}}{r^2} = \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \bar{B} \frac{\bar{u}^{-n+1} + \bar{u}^{-n-1}}{2h^2} + \bar{D}^n.$$

Здесь A , \bar{B} , \bar{D}^n имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{M1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{r_M r_{M1}}{2R \cdot bh} \frac{a}{h} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} T^n \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{r_1^3}{r_{1+\frac{1}{2}} r_{1-\frac{1}{2}}} & \frac{r_1 r_2}{2r_{1+\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{r_2 r_1}{2r_{2-\frac{1}{2}}} & \frac{r_2^3}{r_{2+\frac{1}{2}} r_{2-\frac{1}{2}}} & \frac{r_2 r_3}{2r_{2+\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{r_j r_{j-1}}{2r_{j-\frac{1}{2}}} & -\frac{r_j^3}{r_{j+\frac{1}{2}} r_{j-\frac{1}{2}}} & \frac{r_j r_{j+1}}{2r_{j+\frac{1}{2}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{r_M r_{M1-1}}{2r_{M1-\frac{1}{2}}} & -\frac{r_M^3}{r_{M1+\frac{1}{2}} r_{M1-\frac{1}{2}}} & \frac{r_M r_{M1}}{2r_{M1+\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{r_M r_{M1}}{2r_{M1+\frac{1}{2}}} & \frac{2R+bh}{2R-bh} & \frac{r_M r_{M1}}{2R} \end{bmatrix}$$

Замечание: Для того чтобы матрица B была симметрической, мы умножили правое граничное условие на

$$\frac{r_M r_{M1}}{2r_{M1+\frac{1}{2}}} / \left(\frac{bh}{2R} - 1 \right), \quad b = \frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Лемма: Матрицы A и B симметрические, $A \geq 0$, $B \leq 0$ при

$$h < 2R/b.$$

Доказательство: Диагональная матрица A неотрицательна, так как $r_j = jh > 0$ при $j \geq 1$. Симметричность матрицы B следует из ее вида. Остается установить неположительность матрицы B . Покажем, что для любого вектора \bar{x} справедливо неравенство

$$(B\bar{x}, \bar{x}) = \sum_1^{M1} r_j x_j \left(\frac{r_{j-1}}{2r_{j-\frac{1}{2}}} x_{j-1} - \frac{r_j^2}{r_{j+\frac{1}{2}} r_{j-\frac{1}{2}}} x_j + \frac{r_{j+1}}{2r_{j+\frac{1}{2}}} x_{j+1} \right) + r_M x_M \left(\frac{r_{M1}}{2r_{M-\frac{1}{2}}} x_{M1} - \frac{2R+bh}{2R-bh} \frac{r_{M1}}{2r_{M-\frac{1}{2}}} x_M \right) \leq 0.$$

Сумма естественным образом разбивается на три суммы. Объединяем одинаковые слагаемые в первой и третьей суммах. Далее используем элементарное неравенство $2x_j x_{j+1} \leq x_j^2 + x_{j+1}^2$. После этого имеем:

$$(B\bar{x}, \bar{x}) \leq \sum_1^{M1} \frac{r_j r_{j+1}}{2r_{j+\frac{1}{2}}} x_j^2 + \sum_2^M \frac{r_j r_{j-1}}{2r_{j-\frac{1}{2}}} x_j^2 - \sum_1^{M1} \frac{r_j^3}{r_{j+\frac{1}{2}} r_{j-\frac{1}{2}}} x_j^2 - \frac{r_M r_{M1}}{2R} \frac{2R+bh}{2R-bh} x_M^2.$$

Далее достаточно воспользоваться неравенствами

$$\frac{r_1 r_2}{2r_{\frac{3}{2}}} < \frac{r_1^3}{r_{\frac{3}{2}} r_{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{r_j r_{j+1}}{2r_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{r_j r_{j-1}}{2r_{j-\frac{1}{2}}} = \frac{r_j (2r_j^2 - h^2)}{2r_{j+\frac{1}{2}} r_{j-\frac{1}{2}}} < \frac{r_j^3}{r_{j+\frac{1}{2}} r_{j-\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{r_M r_{M1}}{2R} < \frac{r_M r_{M1}}{2R} \frac{2R + bh}{2R - bh} \quad \text{при} \quad 2R > bh.$$

Отсюда следует неположительность В при достаточно малом h.

Теорема. Схема (3) устойчива в смысле следующего энергетического соотношения:

$$\begin{aligned} & \sum_1^{M1} r_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{r^2}{h^2} \frac{2G}{\rho} \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{2Rb-h}{2R-bh} \sum_1^M \frac{(r_j u_j^{n+1} - r_{j-1} u_{j-1}^{n+1})^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} + \\ & + 2G \frac{2R+h}{2R-bh} \left\{ \sum_1^M \frac{1}{2} r_{j-\frac{1}{2}} (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})^2 + \frac{h^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} (u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})^2 \right\} = \\ & = \sum_1^{M1} r_j (u_j^n - u_{j-1}^{n-1})^2 + \frac{r^2}{h^2} \frac{2G}{\rho} \frac{\sigma}{1-2\sigma} \frac{2Rb-h}{2R-bh} \sum_1^M \frac{(r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n)^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{2G}{\rho} \frac{2R+h}{2R-h} \sum_1^M \left\{ \frac{1}{2} r_{j-\frac{1}{2}} (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 + \frac{h^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} (u_j^n + u_{j-1}^n)^2 \right\} + \\ & + \frac{r_M r_{M1}}{2R-bh} \alpha \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} \frac{r^2}{h} (u_M^{n+1} - u_M^{n-1}) T^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношение (5) является дискретным аналогом непрерывного закона сохранения энергии (2):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^R \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial ru}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{2G}{\rho} \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial ru}{\partial r} \right)^2 + r \frac{2G}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{2G}{\rho} u^2 \right\} dr = \alpha \frac{2G}{\rho} \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} R \frac{\partial u(R,t)}{\partial t} T(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство: Умножаем обе части уравнения (4) слева на $r^2 (u^{n+1} - u^{n-1})$.
Полученное скалярное выражение суммируем по n:

$$\sum_{n=1}^N (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n-1}, A(\bar{u}^{n+1} - 2\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1})) = \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \frac{r^2}{h^2} \sum_{n=1}^N (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n-1},$$

$$B(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n-1})) + \sum_{n=1}^N (u_M^{n+1} - u_M^{n-1}) \frac{r_M r_{M1}}{2R-bh} \frac{\alpha}{h} \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} r^2 T^n.$$

После суммирования получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n-1}, A(\bar{u}^{n+1} - 2\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1})) &= (\bar{u}^{N+1} - \bar{u}^N, A(\bar{u}^{N+1} - \bar{u}^N)) - \\ & - (\bar{u}^1 - \bar{u}^0, A(\bar{u}^1 - \bar{u}^0)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n-1}, B(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n-1})) &= (\bar{u}^N, B\bar{u}^N) + (\bar{u}^{N+1}, B\bar{u}^{N+1}) - (\bar{u}^0, B\bar{u}^0) - \\ & - (\bar{u}^1, B\bar{u}^1). \end{aligned}$$

Положим $n=N$, $\bar{u}^0 = \bar{u}^{n-1}$, $\bar{u}^1 = \bar{u}^n$, тогда получим соотношение

$$\begin{aligned}
& (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n, A(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n)) - \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \frac{r^2}{h^2} (\bar{u}^{n+1}, B\bar{u}^{n+1}) = \\
& = (\bar{u}^n - \bar{u}^{n-1}, A(\bar{u}^n - \bar{u}^{n-1})) - \frac{2G}{\rho} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \frac{r^2}{h^2} (\bar{u}^{n-1}, B\bar{u}^{n-1}) + \quad (7) \\
& + (u_M^{n+1} - u_M^{n-1}) \frac{r_M r_{M1}}{2R - bh} \frac{a}{h} \frac{1+\sigma}{1-2\sigma} r^2 T^n.
\end{aligned}$$

Чтобы получить отсюда соотношение (5), суммируем по частям:

$$\begin{aligned}
(\bar{u}, B\bar{u}) &= - \sum_{j=1}^M (r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n) \left(\frac{r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n}{2r_{j-\frac{1}{2}}} \right) + r_M u_M^n \left(\frac{r_M u_M^n - r_{M1} u_{M1}^n}{2R} \right) + \\
& + r_M u_M^n \left\{ \frac{r_{M1} u_{M1}^n}{2R} - \frac{2R+bh}{2R-bh} \frac{r_{M1}}{2R} u_M^n \right\} = \\
& = - \sum_{j=1}^M (r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n) \left(\frac{r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n}{2r_{j-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{2bR-h}{2R-bh} \right) (u_M^n)^2 = \\
& = - \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{1}{2} r_{j-\frac{1}{2}} (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 + \frac{h}{2} ((u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2) + \frac{h^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 \right\} + \\
& + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{2bR-h}{2R-bh} \right) (u_M^n)^2 = \\
& = - \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{1}{2} r_{j-\frac{1}{2}} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{h^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 \right\} - \frac{2bR-h}{2R-bh} (u_M^n)^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2bR-h}{2R-bh} \sum_{j=1}^M (r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n) \left(\frac{r_j u_j^n - r_{j-1} u_{j-1}^n}{2r_{j-\frac{1}{2}}} \right) - \\
& - (1-b) \frac{2R+h}{2R-bh} \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{1}{2} r_{j-\frac{1}{2}} (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 + \frac{h^2}{2r_{j-\frac{1}{2}}} (u_j^n + u_{j-1}^n)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь подставим последнее полученное выражение в (7). После этого остается лишь раскрыть скалярное произведение, содержащее A . Соотношение (5) доказано. Непрерывный закон сохранения энергии (6) может быть получен из соотношения (5) предельным переходом при $r \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

Численные расчёты

Основные расчёты проводились при

$$M = 50, \quad r/h = 10^{-6}.$$

При контрольных пересчетах шаги сетки менялись. Рассматривались два импульса:

$$T_1(t) = \begin{cases} 50(1 - \cos(10^5 t)) & \text{при } 0 \leq t \leq \pi \cdot 10^{-5} = t_0^1, \\ 100 & \text{при } t > t_0^1. \end{cases}$$

$$T_2(t) = \begin{cases} 50(1 - \cos(10^4 t)) & \text{при } 0 \leq t \leq \pi \cdot 10^{-4} = t_0^2, \\ 100 & \text{при } t > t_0^2. \end{cases}$$

Первоначально считались термоупругие напряжения, отвечающие "сжатому" импульсу $T_1(t)$. Расчёт занимает около 10^6 . Далее проводилось два контрольных счёта:

$$1. M = 50, \quad \tilde{\tau} = \tau/2, \quad \tilde{\tau}/h = 10^{-6}/2.$$

$$2. M = 100, \quad \tilde{\tau} = \tau/2, \quad \tilde{\tau}/h = 10^{-6}.$$

Результаты контрольных расчётов хорошо согласуются с основным счётом, на графике их просто невозможно различить.

При переходе к "истинному" импульсу первоначально шаг по времени был увеличен в 10 раз. В результате время счёта оставалось неизменным. Такое увеличение шага по времени казалось автору допустимым, так как истинный импульс $T_2(t)$ растянут по сравнению с $T_1(t)$ в 10 раз. Однако при этом наблюдается сильное расхождение в значениях напряжений, полученных для одного и того же t с τ и с $\tau/2$. Далее была сделана попытка уменьшить число точек на R . Соответствующий эксперимент проводился как для "сжатого" импульса $T_1(t)$, так и для "истинного" импульса $T_2(t)$. При этом наблюдалось сильное расхождение результатов, полученных при $M = 25$, с результатами, полученными при $M = 50$. По-видимому, при $M = 25$ не хватает точности. После неудачных попыток уменьшить время счёта для "истинного" импульса был проведен часовой счёт с теми же τ и h , что и для "сжатого" импульса. Затем было проведено два контрольных счёта:

$$1. M = 50, \quad \tilde{\tau} = \tau/2, \quad \tilde{\tau}/h = 10^{-6}/2,$$

$$2. M = 75, \quad \tilde{\tau} = 2\tau/3, \quad \tilde{\tau}/h = 10^{-6}.$$

При счёте "истинного" импульса T_2 напряжения слегка "раскачиваются". По-видимому, это связано с большим числом шагов по вре-

мени (основному счёту отвечает около 40000 шагов на t_0^2). Тем не менее результаты основного и контрольного счёта согласуются достаточно хорошо.

Приношу благодарность Н.С. Бахвалову и И.Н. Силину за обсуждение результатов счёта и Ю.И. Шелонцеву за консультации по ФОРТРАНУ и большую практическую помощь при отладке программы.

Л и т е р а т у р а

1. Г. Паркус. Неустановившиеся термоупругие напряжения, стр. 11, М., Физматгиз, 1963.
2. В.Ф. Колесов. К динамике сферически симметричного быстрого импульсного реактора. Атомная энергия, 14, вып. 3, 273-280 (1963).
3. С.И. Сердюкова. О безусловной равномерной устойчивости одной разностной схемы для уравнения $u_t + u_x = 0$. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 10, №1, 88-98 (1970).
4. С.К. Годунов. Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Лекции для студентов НГУ. Изд-во СОАН СССР, 1962.
5. А.А. Самарский. О регуляризации разностных схем., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, №1, 62-93 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел

14 октября 1970 года.