

4184

926772

ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4 - 4184



Н.Н.Боголюбов (мл.)

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ СИСТЕМ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ПАРНЫМ
ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P4 - 4184

Н.Н.Боголюбов (мл.)

**ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ СИСТЕМ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ПАРНЫМ
ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

В наших предыдущих работах были изучены вопросы построения асимптотически точного решения для модельной системы с четырехфермионным положительным взаимодействием, соответствующим отталкиванию^{/1,2/}.

Целью настоящей работы являлось изучение проблемы асимптотически точного определения многовременных корреляционных функций любого порядка и соответствующих функций Грина для систем с притяжением. Нам пришлось сформулировать метод более глубокого анализа взаимоотношения между корреляционными функциями, свободными энергиями и аппроксимирующими гамильтонианами.

Отметим, что наша методика^{/3/} для модельных систем с отрицательным четырехфермионным взаимодействием была построена в основном для свободных энергий. Оказалось, однако, возможным развить ее и применить для рассмотрения корреляционных функций. В предлагаемом доказательстве, в частности, используются эти результаты о близости свободных энергий для модельных и аппроксимирующих систем и далее с помощью леммы^{/4/} устанавливаются их связи с корреляционными функциями, причём получающиеся оценки будут оценками для квазисредних (с обычной двухпредельной техникой: сначала $V \rightarrow \infty$, а затем $\tau > 0$, $\tau \rightarrow 0$)^{/5/}. Кратко напомним, что методика, развитая для случая положительного парного четырехфермионного взаимодействия, в случае модельных систем с отрицательным четырехфермионным взаимодействием не применима, поскольку первый случай принципиально отличен от второго.

В первом случае - положительности четырехфермионного взаимодействия - техника доказательства существенно основывалась на факте максимальности свободной энергии, построенной на основе так называемого аппроксимирующего гамильтониана $H_0(\bar{C})$, содержащего параметр \bar{C} .

Во втором же случае - отрицательности четырехфермионного взаимодействия - свободная энергия, вычисленная для аппроксимирующего гамильтониана $\Gamma^0(C)$, будет иметь минимум относительно параметра C , и, кроме того, здесь существенно использование $u-v$ преобразования.

Рассматриваемая модельная задача характеризуется гамильтонианом с отрицательным парным четырехфермионным взаимодействием

$$\Gamma = T - 2V \sum_f \mathcal{J}_f^+ - \tau (\mathcal{J} + \mathcal{J}^+) V, \quad (1)$$

где

$$T = \sum_f T_f \sum_{\sigma} a_{f\sigma}^{\dagger} a_{f\sigma}, \quad T_f = \frac{p^2}{2m} - \mu, \quad g > 0, \quad (2)$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2V} \sum_f \lambda_f \sum_{\sigma} a_{f\sigma}^{\dagger} a_{-f\sigma}, \quad \mathcal{J}^+ = \frac{1}{2V} \sum_f \lambda_f \sum_{\sigma} a_{-f\sigma} a_{f\sigma}^{\dagger},$$

V - объем системы, $f = (p, \sigma)$ - совокупность импульса p и спина σ , импульс p принимает обычные квазидискретные значения, g - положительный параметр, характеризующий взаимодействие.

Для удобства наших дальнейших расчетов мы ввели в гамильтониан системы члены с источниками пар.

$$\tau (\mathcal{J} + \mathcal{J}^+) V, \quad \tau > 0.$$

Функции λ_f и T_f - удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

$$T_{-f} = T_f, \quad \lambda_{-f} = -\lambda_f. \quad (3)$$

$$\frac{1}{2V} \sum_f |\lambda_f| \leq k_1,$$

$$\frac{1}{V} \sum_f |T_f \cdot \lambda_f| \leq k_2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{V} \sum_f \lambda_f^2 \leq k_3.$$

Здесь k_1, k_2, k_3 - некоторые постоянные при $V \rightarrow \infty$.

Мы покажем, что корреляционные функции, составленные из произведения ферми-операторов любого порядка для модельной системы (1), можно с асимптотической точностью вычислять по аппроксимирующему гамильтониану

$$\Gamma^0 = T - 2VC_g(\mathcal{J}^+ + \mathcal{J}) + 2VC_g^2 - r(\mathcal{J}^+ + \mathcal{J})V, \quad (5)$$

который представляет собой квадратичную форму из ферми-операторов и может быть приведен к диагональному виду. Постоянная C , входящая в этот гамильтониан, определяется из условия абсолютного минимума свободной энергии, построенной на его основе.

Перед тем, как мы приступим к доказательству близости корреляционных функций, сделаем некоторые дополнительные замечания о правилах отбора для средних, составленных из произведения ферми-операторов.

Возьмем корреляционные функции - средние, составленные из произвольного числа ферми-операторов на основе модельного гамильтониана (1) и соответствующего аппроксимирующего (5):

$$\langle u \rangle_{\Gamma} = \frac{\text{sp e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}} u}{\text{sp e}^{-\frac{\Gamma}{\theta}}}, \quad (6)$$

$$\langle u \rangle_{\Gamma^0} = \frac{\text{Sp } e^{-\frac{\Gamma^0}{\theta}} u}{\text{Sp } e^{-\frac{\Gamma^0}{\theta}}}, \quad (7)$$

где u — представляет собой некоторое произведение из ферми-операторов с произвольным порядком следования:

$$u = \dots a_{f_1}(t_1) \dots a_{f_n}(t_n) \dots$$

Эти правила отбора будут полезны для того, чтобы сразу указать, какие средние $\langle u \rangle_{\Gamma}$, $\langle u \rangle_{\Gamma^0}$ с произвольным набором ферми-операторов равны нулю, и тем самым исключить их из рассмотрения. Заметим для этого, что наша модельная (1) и аппроксимирующая (5) системы инвариантны относительно следующего специального градиентного преобразования:

$$a_{p\sigma} \rightarrow e^{i\phi} a_{p\sigma}$$

для

$$p = p_0, -p_0$$

и

$$a_{p\sigma} \rightarrow a_{p\sigma}$$

для

$$p \neq p_0,$$

которое ради удобства будем записывать в виде

$$\begin{aligned} a_{f_0} \rightarrow e^{i\phi} a_{f_0}, & \quad a_{f_0}^+ \rightarrow e^{-i\phi} a_{f_0}^+, \\ a_{-f_0} \rightarrow e^{-i\phi} a_{-f_0}, & \quad a_{-f_0}^+ \rightarrow e^{i\phi} a_{-f_0}^+ \end{aligned} \quad (8)$$

(a_f и a_f^+ не меняются, если $f \neq f_0, -f_0$), разумея, что такое преобразование происходит с импульсной переменной p .

Поясним, что к таким преобразованиям (8) можно прийти, например, следующим путем.

Введем унитарный оператор

$$Z = e^{i\phi(n_{p_0} - n_{-p_0})}, \quad Z^\dagger = e^{-i\phi(n_{p_0} - n_{-p_0})},$$

$$Z Z^\dagger = 1,$$

где $n_{p_0} - n_{-p_0}$ — оператор разности числа частиц с импульсами p_0 и $-p_0$, который будет интегралом движения для системы (1). Действуя таким оператором слева и справа на $a_{-f}, a_f, a_f^\dagger, a_{-f}^\dagger$, мы придем к градиентным преобразованиям:

$$a_{f_0} \rightarrow Z^\dagger a_{f_0} Z = e^{i\phi} a_{f_0}; \quad a_{-f_0} \rightarrow Z a_{-f_0} Z = e^{-i\phi} a_{-f_0}.$$

Обратимся сейчас к средним (6,7). Предположим, что в таком произведении из ферми-операторов ψ можно выделить "парные" комбинации операторов вида

$$a_{f_0} a_{-f_0} \dots a_{-g_0}^\dagger a_{g_0}^\dagger \dots a_{h_0} a_{-h_0} \dots a_{s_0}^\dagger a_{s_0}. \quad (9)$$

Тогда, принимая во внимание градиентные преобразования (8), видим, что "фазы" в таких комбинациях компенсируются и потому средние (6) и (7), в которых имеются такие "парные" комбинации операторов, вообще говоря, могут быть отличны от нуля. Напротив, если в рассматриваемом произведении из ферми-операторов ψ имеется хотя бы один ферми-оператор без соответствующей ему "пары", тогда ясно, что соответствующие фазы не компенсируются в таких средних и средние (6), (7) будут равны нулю.

В частности, средние (6),(7), составленные из нечётного числа ферми-операторов, равны нулю.

Займемся теперь нахождением асимптотических оценок для разности

$$\langle u \rangle_{\Gamma} - \langle u \rangle_{\Gamma^0} \quad (10)$$

При этом для построения соответствующих оценок, неравенств оказывается удобным перейти от старых ферми-амплитуд a_f, a_f^+ к новым u_f, u_f^+ , которые связаны известными линейными соотношениями - каноническим преобразованием Н.Н.Боголюбова:

$$a_f = u_f a_f - v_f a_{-f}^+, \quad (11)$$

$$a_f^+ = u_f^+ a_f^+ - v_f a_{-f},$$

где функции u_f и v_f удовлетворяют условиям симметрии

$$u_{-f} = u_f, \quad v_{-f} = -v_f,$$

$$u_f^2 + v_f^2 = 1.$$

Выбирая за u_f, v_f

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{T_f}{E_f}}, \quad v_f = \frac{-\epsilon(f)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{T_f}{E_f}},$$

где

$$E_f = \sqrt{T_f^2 + \lambda_f^2 (2C_g + r)^2} -$$

аппроксимирующий гамильтониан (5), который с помощью преобразования (11) можно привести к диагональному виду, в новых ферми-операторах он примет форму:

$$\Gamma^0 = \sum_f E_f a_f^+ a_f + v \{ 2C_g^2 - \frac{1}{2V} \sum_f (E_f - T_f) \}. \quad (12)$$

Теперь нетрудно заметить, что средние $\langle u \rangle_{\Gamma_0}$, построенные на основе такого гамильтониана, принципиально просто вычисляются с помощью известных правил Вика, Блоха, Доминициса.

Запишем уравнения движения для модельной системы (1) в "новых" ферми-операторах a_f, a_f^+ , учитывая, что в "старых" они имеют вид:

$$i \frac{da_f}{dt} = T_f a_f - \lambda_f a_{-f}^+ (2J_g + r),$$

$$i \frac{da_f^+}{dt} = -T_f a_f^+ + \lambda_f (2J_g + r) a_{-f}.$$

(13)

С помощью (11) введем "новые" ферми-операторы:

$$a_f = a_f u_f + a_{-f}^+ v_f,$$

(14)

$$a_f^+ = a_f^+ u_f + a_{-f} v_f.$$

Дифференцируя (14) по t и выражая производные $\frac{da_f^+}{dt}, \frac{da_f}{dt}$ через правые части уравнений движения (13), имеем

$$i \frac{da_f^+}{dt} = i u_f \frac{da_f^+}{dt} + i v_f \frac{da_{-f}}{dt} =$$

$$= u_f \{-T_f a_f^+ + \lambda_f (2J_g + r) a_{-f}\} + v_f \{T_f a_{-f} + \lambda_f a_f^+ (2J_g + r)\} =$$

$$= -a_f^+ \{T_f u_f - \lambda_f v_f (2J_g + r)\} + \{u_f \lambda_f (2J_g + r) + v_f T_f\} a_f =$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha_f^+ \{ T_f u_f - \lambda_f v_f (2C_g + r) \} + \{ u_f \lambda_f (2C_g + r) + v_f T_f \} \alpha_{-f}^+ + \\
&+ u_f \lambda_f (2 \int_g - 2C_g) \alpha_{-f} + v_f \lambda_f \alpha_f^+ (2 \int_g - 2C_g).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание тождества

$$\begin{aligned}
T_f u_f - \lambda_f v_f (2C_g + r) &= \sqrt{(2C_g + r)^2 \lambda_f^2 + T_f^2} u_f, \\
T_f v_f + \lambda_f u_f (2C_g + r) &= -\sqrt{(2C_g + r)^2 \lambda_f^2 + T_f^2} v_f.
\end{aligned}$$

придем к уравнениям движения в "новых" ферми-операторах:

$$i \frac{d \alpha_f^+}{dt} + E_f \alpha_f^+ = R_f, \tag{15}$$

$$i \frac{d \alpha_f}{dt} - E_f \alpha_f = -R_f^+,$$

где

$$R_f = R_f^{(1)} + R_f^{(2)}, \tag{16}$$

$$R_f^{(1)} = u_f \lambda_f (2 \int_g - 2C_g) \alpha_{-f}, \tag{17}$$

$$R_f^{(2)} = v_f \lambda_f \alpha_f^+ (2 \int_g - 2C_g),$$

$$E_f = \sqrt{(2C_g + r)^2 \lambda_f^2 + T_f^2}. \tag{18}$$

Рассмотрим корреляционную среднюю

$$\langle a_f(t) B(0) \rangle_\Gamma, \quad (19)$$

где $B(0)$ — представляет некоторое произведение из S — ферми-операторов.

Составим уравнения для средних. Продифференцируем (19) по t и воспользуемся уравнениями движения (15). Имеем.

$$i \frac{d}{dt} \langle a_f(t) B(0) \rangle_\Gamma = E_f \langle a_f(t) B(0) \rangle_\Gamma - \langle R_f^+(t) B(0) \rangle_\Gamma, \quad (20)$$

$$i \frac{d}{dt} \langle a_f^+(t) B(0) \rangle_\Gamma = -E_f \langle a_f^+(t) B(0) \rangle_\Gamma + \langle R_f(t) B(0) \rangle_\Gamma. \quad (21)$$

Решениями этих уравнений будут

$$\langle a_f(t) B(0) \rangle_\Gamma = \langle a_f(0) B(0) \rangle_\Gamma e^{-iE_f t} + i e^{-iE_f t} \left\langle \int_0^t e^{iE_f t'} R_f^+(t') B(0) dt' \right\rangle_\Gamma,$$

$$\langle a_f^+(0) B(0) \rangle_\Gamma = \langle a_f^+(0) B(0) \rangle_\Gamma e^{iE_f t} - i e^{iE_f t} \left\langle \int_0^t e^{-iE_f t'} R_f(t') B(0) dt' \right\rangle_\Gamma.$$

Отсюда получаем оценки

$$\begin{aligned} |\langle a_f(t) B(0) \rangle_\Gamma - \langle a_f(0) B(0) \rangle_\Gamma| &\leq \\ &\left| \int_0^t e^{-iE_f t'} \left\langle R_f^+(t') B(0) \right\rangle_\Gamma dt' \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \langle \overset{+}{a}_f(t) B(0) \rangle_{\Gamma} - \langle \overset{+}{a}_f(0) B(0) \rangle_{\Gamma} e^{iE_f t} \right| \leq \\
 & \leq \left| \langle \int_0^t e^{-iE_f t'} R_f(t') B(0) dt' \rangle_{\Gamma} \right|.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Для построения дальнейших мажорационных оценок нам потребуется следующее неравенство^{x/}:

$$|\langle y \cdot w \rangle| \leq \left\{ |\langle y^+ \rangle| |\langle w^+ \rangle| \right\}^{\frac{1}{2}}.
 \tag{24}$$

Оценивая правые части (22), (23) с помощью неравенства (24), имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^t e^{iE_f t'} \langle y \rangle \langle w \rangle dt' \right| \leq \int_0^t \left| \langle e^{iE_f t'} R_f(t') B(0) \rangle \right| dt' \leq \\
 & \leq \int_0^t \left\{ |\langle R_f(t') \rangle| |\langle B(0) \rangle| \right\}^{\frac{1}{2}} dt' \leq
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

^{x/} Доказательство неравенства (24), а также его спектрального аналога

$$|J_{y \cdot w}(\omega)|^2 \leq J_{y^+}(\omega) J_{w^+}(\omega)$$

содержится в работе Н.Н.Боголюбова "Квазисредние в задачах статистической механики". Препринт ОИЯИ Р-1451, Дубна, 1963. Издание 2-е стереотипное, стр. 70-76.

$$\leq |t| \left\{ \left| \langle R_f^+(0) R_f(0) \rangle \right| \left| \langle B^+(0) B(0) \rangle \right| \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

Аналогичным путем оцениваем (23):

$$\left| \int_0^t e^{-iE_f t'} R_f(t') B(0) dt' \right|_{\Gamma} \leq \int_0^t \left| \langle e^{iE_f t'} R_f(t') B(0) \rangle \right|_{\Gamma} dt' \leq$$

$$\leq \int_0^t \left\{ \left| \langle R_f^+(t') R_f(t') \rangle \right| \left| \langle B^+(0) B(0) \rangle \right| \right\}^{1/2} dt' \leq$$

$$\leq |t| \left\{ \left| \langle R_f^+(0) R_f(0) \rangle \right| \left| \langle B^+(0) B(0) \rangle \right| \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Найдем оценки для корреляционных средних

$$\langle R^+(0) R(0) \rangle_{\Gamma}, \quad \langle R(0) R^+(0) \rangle_{\Gamma}, \quad (27)$$

стоящих в правых частях неравенств (25), (26). Принимая во внимание формулы (16-18), запишем

$$\left| \langle R_f^+(0) R_f(0) \rangle_{\Gamma} \right| \leq 2 \langle R_f^{(1)} R_f^{(1)} \rangle_{\Gamma} + 2 \langle R_f^{(2)} R_f^{(2)} \rangle_{\Gamma} \leq$$

$$\leq 8 g^2 \lambda_f^2 (u_f^2 + \frac{1}{2} (g-C)(g-C) a_{-f}^+) + v_f^2 \langle (g-C) a_f^+ (g-C) \rangle_{\Gamma}.$$

Замечая, что $a_{r,r}^+$ - положительный оператор с нормой, ограниченной единицей, найдем

$$\langle (g-C)_{a_r}^+ (g-C) \rangle_{\Gamma} \leq \langle (g-C) (g-C) \rangle_{\Gamma}.$$

Оценим теперь корреляционную среднюю

$$\langle a_{-r}^+ (g-C) (g-C)_{a_{-r}} \rangle$$

учитывая

$$\begin{aligned} (g-C)(g-C) &= (g-C)(g-C) + gg - gg \\ &\leq |gg - gg| + |(g-C)(g-C)| \end{aligned}$$

и

$$|gg - gg| \leq \frac{k_s}{2V},$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle a_{-r}^+ (g-C) (g-C)_{a_{-r}} \rangle &\leq \frac{k_s}{2V} + \langle (g-C)_{a_{-r}}^+ a_{-r} (g-C) \rangle_{\Gamma} \leq \\ &\leq \frac{k_s}{2V} + \langle (g-C) (g-C) \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle R_r(0) R_r(0) \rangle_{\Gamma} \leq 8g^2 \lambda_r^2 (\langle (g-C) (g-C) \rangle_{\Gamma} + \frac{u_r^2 k_s}{2V}). \quad (28)$$

Аналогичным путем оцениваем $\langle R_r(0) R_r(0) \rangle_{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} |\langle R_r(0) R_r(0) \rangle_{\Gamma}| &\leq 2 \langle R_r^{(1)} R_r^{(1)} \rangle_{\Gamma} + 2 \langle R_r^{(2)} R_r^{(2)} \rangle_{\Gamma} \leq \\ &\leq 8g^2 \lambda_r^2 (u_r^2 \langle (g-C)_{a_{-r}}^+ a_{-r} (g-C) \rangle_{\Gamma} + v_r^2 \langle a_r^+ (g-C) (g-C)_{a_r} \rangle_{\Gamma}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\langle (\mathcal{J}-C)_{a_{-f}^+} (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle \leq \langle (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle,$$

а также

$$\langle a_f^+ (\mathcal{J}^+ - C) (\mathcal{J}-C)_{a_f} \rangle \leq \langle a_f^+ (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{a_f} \rangle + \frac{k_s}{2V} \leq$$

$$\leq \langle (\mathcal{J}-C)_{a_f} (\mathcal{J}^+ - C)_{a_f} \rangle + \frac{k_s}{2V} \leq$$

$$\leq \langle (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle + \frac{k_s}{2V}.$$

получаем оценку

$$|\langle R_f(0) R_f(0)_{\Gamma}^+ \rangle| \leq 8g^2 \lambda_f^2 \left(\langle (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle + \frac{k_s}{2V} v_f^2 \right). \quad (29)$$

Окончательно эти оценки (28), (29) будем записывать в виде

$$\langle R_f(0) R_f(0)_{\Gamma}^+ \rangle \leq 8g^2 \lambda_f^2 \left\{ \langle (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle + \frac{k_s}{2V} \right\}. \quad (30)$$

$$\langle R_f(0) R_f(0)_{\Gamma}^+ \rangle \leq 8g^2 \lambda_f^2 \left\{ \langle (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle + \frac{k_s}{2V} \right\}. \quad (31)$$

Отметим, что входящую сюда корреляционную функцию

$$\langle (\mathcal{J}-C) (\mathcal{J}^+ - C)_{\Gamma} \rangle$$

мы можем оценить по уже разработанному способу^{4/}, который учитывает близость свободных энергий, построенных для модельной (1) и аппроксимирующей (5) систем при $V \rightarrow \infty$, а далее с помощью леммы доказать, что

$$\langle (\mathcal{J} - C)(\mathcal{J} - C) \rangle_{\Gamma} \leq \epsilon_0 \left(\frac{1}{V}, \delta \right),$$

$$\langle (\mathcal{J} - C)(\mathcal{J} - C) \rangle_{\Gamma} \leq \epsilon_0 \left(\frac{1}{V}, \delta \right).$$

Здесь $\epsilon_0 \left(\frac{1}{V}, \delta \right)$ — мажорационное выражение, которое при $V \rightarrow \infty$ и для любого положительного δ стремится к нулю.

После этого замечания оценки (30), (31) будем записывать следующим образом:

$$\langle \mathbb{R}_f^+(0) \mathbb{R}_f(0) \rangle_{\Gamma} \leq \epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right), \quad (32)$$

$$\langle \mathbb{R}_f(0) \mathbb{R}_f^+(0) \rangle_{\Gamma} \leq \epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right). \quad (33)$$

Здесь

$$\epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right) = 8g^2 \lambda_f^2 \left\{ \epsilon_0 \left(\frac{1}{V}, \delta \right) + \frac{k_3}{2V} \right\} \rightarrow 0$$

при $V \rightarrow \infty$ и для $\delta > 0$. Теперь после сделанных преобразований, а также принимая во внимание, что

$$\langle \mathbb{B}^{\dagger}(0) \mathbb{B}(0) \rangle \leq 1,$$

неравенства запишем в виде:

$$|\langle \alpha_f(t) \mathbb{B}(0) \rangle_{\Gamma} - \langle \alpha_f^{\dagger}(t) \mathbb{B}(0) \rangle_{\Gamma}| \leq |t| \epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right), \quad (34)$$

$$|\langle \alpha_f^{\dagger}(t) \mathbb{B}(0) \rangle_{\Gamma} - \langle \alpha_f(t) \mathbb{B}(0) \rangle_{\Gamma}| \leq |t| \epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right), \quad (35)$$

$$|\langle \mathbb{B}(0) \alpha_f^{\dagger}(t) \rangle_{\Gamma} - \langle \mathbb{B}(0) \alpha_f(t) \rangle_{\Gamma}| \leq |t| \epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right); \quad (36)$$

где операторы $\bar{a}_f^-(t) = a_f^-(0) e^{-iE_f t}$, $\bar{a}_f^+(t) = a_f^+(0) e^{iE_f t}$ удовлетворяют уравнениям движения с аппроксимирующим гамильтонианом (5).

Будем далее исходить из неравенств (34)–(36). Построим мажорационные оценки, показывающие близость корреляционных функций:

$$\langle \bar{d}_f^+(0) B(0) \rangle_{\Gamma} > \langle \bar{a}_f^+(0) B(0) \rangle_{\Gamma_0}$$

при $V \rightarrow \infty$ и $\delta > 0$.

Воспользуемся спектральными соотношениями, имеем

$$\langle \bar{d}_f^+(t) B(0) \rangle_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\bar{d}_f^+ B}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (37)$$

$$\langle B(0) \bar{a}_f^+(t) \rangle_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\bar{d}_f^+ B}(\omega) e^{\frac{\omega}{\theta}} e^{i\omega t} d\omega. \quad (38)$$

Выберем, далее, функцию $h_{\rho}(t)$:

$$h_{\rho}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\rho} F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) \right\} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (39)$$

$$\frac{1}{\rho} F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\rho}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (40)$$

где

$$F(z) \equiv 0 \quad \text{для } |z| \geq 1, \quad (41)$$

$$F(z) = (1 - z^2)^2 \quad \text{для } |z| < 1.$$

Умножим неравенства (35), (36) на функцию $h_p(t)$. Проинтегрируем полученные соотношения по t в пределах $-\infty < t < +\infty$ и, приняв во внимание спектральные представления (37,38), найдем

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha_B}^+(\omega) F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) d\omega - \langle \alpha_f^+(0) V(0) \rangle_{\Gamma} \right| \leq \frac{\epsilon_2\left(\frac{1}{V}, \delta\right)}{\rho^2}, \quad (42)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha_B}^+(\omega) e^{\frac{\omega}{\theta}} F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) d\omega - \langle V(0) \alpha_f^+(0) \rangle \right| \leq \frac{\epsilon_2\left(\frac{1}{V}, \delta\right) \chi'}{\rho^2}. \quad (43)$$

Здесь $\epsilon_2 = \epsilon\left(\frac{1}{V}, \delta\right) b_0$ стремится к нулю при $V \rightarrow \infty$ и для любого фиксированного положительного δ . Умножим неравенство (43) на фактор $e^{-\frac{E_f}{\theta}}$ и вычтем (42). В результате получим:

$$\left| \langle \alpha_f^+(0) V(0) \rangle_{\Gamma} - \langle V(0) \alpha_f^+(0) \rangle_{\Gamma} e^{-\frac{E_f}{\theta}} \right| \leq \quad (44)$$

$$\leq \epsilon_2\left(\frac{1}{V}, \delta\right) \left(1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}}\right) \frac{1}{\rho^2} + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha_B}^+(\omega) F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) \left\{ e^{\frac{\omega - E_f}{\theta}} - 1 \right\} d\omega \right|.$$

Оценим второй член правой части (44):

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha_B}^+(\omega) F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) \left\{ e^{\frac{\omega - E_f}{\theta}} - 1 \right\} d\omega \right| \leq \quad (45)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| J_{\alpha_B}^+(\omega) \right| \left| F\left(\frac{\omega - E_f}{\rho}\right) \right| e^{\frac{\omega - E_f}{\theta}} - 1 \left| d\omega \right| \leq$$

$$\epsilon_2\left(\frac{1}{V}, \delta\right) = \epsilon_0\left(\frac{1}{V}, \delta\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |h_p(t)| |t| dt = \epsilon\left(\frac{1}{V}, \delta\right) b_0; \quad b_0 = \text{const.}$$

$$\leq |e^{\frac{\rho}{\theta}} - 1| \int_{-\infty}^{+\infty} |J_{\alpha\alpha^+}(\omega)| d\omega \leq \quad (45)$$

$$\leq |e^{\frac{\rho}{\theta}} - 1| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha\alpha^+}(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} J_{\beta\beta^+}(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При этом мы учли определение $F(z)$ — (41). Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_{\alpha\alpha^+}(\omega) d\omega \leq |\langle \alpha(0) \alpha^+(0) \rangle_{\Gamma}| \leq 1, \quad (46)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_{\beta\beta^+}(\omega) d\omega \leq |\langle \beta(0) \beta^+(0) \rangle_{\Gamma}| \leq 1. \quad (47)$$

Учитывая неравенства (45)–(47), перепишем в следующем виде (44):

$$\begin{aligned} & \left| \langle \alpha^+_{\Gamma}(0) \beta(0) \rangle_{\Gamma} - \langle \beta(0) \alpha^+_{\Gamma}(0) \rangle_{\Gamma} e^{-\frac{E_f}{\theta}} \right| \leq \\ & \leq \epsilon_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right) \frac{1}{\rho^2} \left(1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}} \right) + \left| e^{\frac{\rho}{\theta}} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (48)$$

В предыдущих неравенствах до сих пор ρ оставалось произвольной положительной величиной. Понятно, что неравенство (48) будет справедливо при любых положительных ρ . Однако, поскольку мы хотим показать асимптотическую малость правой части неравенства (48), для нас, с одной стороны, целесообразнее выбрать за ρ некоторую функцию от $\epsilon_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right)$ такую, что при $V \rightarrow \infty$ и для любого положительного значения δ $\rho \rightarrow 0$, а, с другой стороны, возможно усилить неравенство (48).

Поэтому выберем за ρ функцию

$$\rho = \left\{ \epsilon_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right) \right\}^{1/8}.$$

Перепишем неравенство (48), сделав в нем некоторые тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} & \left| \langle \hat{a}_r^\dagger, V \rangle_\Gamma + \langle \hat{a}_r^\dagger, V \rangle_\Gamma e^{-\frac{E_f}{\theta}} - \langle \hat{a}_r^\dagger, V + V \hat{a}_r^\dagger \rangle_\Gamma e^{-\frac{E_f}{\theta}} \right| \leq \\ & \leq \epsilon_2^{3/4} \left(\frac{1}{V}, \delta \right) \left(1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}} \right) + \left| e^{\frac{\epsilon_2^{1/8}}{\theta}} - 1 \right|, \end{aligned}$$

или

$$\left| \langle \hat{a}_r^\dagger, V \rangle_\Gamma - \frac{e^{-\frac{E_f}{\theta}}}{1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}}} \langle \hat{a}_r^\dagger, V + V \hat{a}_r^\dagger \rangle_\Gamma \right| \leq \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right), \quad (49)$$

где

$$\bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right) = \epsilon_2^{3/4} \left(\frac{1}{V}, \delta \right) + \frac{\left| e^{\frac{\epsilon_2^{1/8}}{\theta}} - 1 \right|}{1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}}}.$$

Применяя метод индукции, докажем справедливость неравенства при любом n

$$|\Delta_n| = \left| \langle \mathcal{U} \rangle_\Gamma - \langle \mathcal{U} \rangle_{\Gamma^0} \right| \leq \Pi \cdot \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right). \quad (50)$$

Здесь \mathcal{U} означает произведение ферми-операторов порядка n , $\Pi = \text{const}$, $\bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right) \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$ и для $\delta > 0$. Согласно нашим обозначениям

\mathcal{U} можно представить как

$$\mathcal{U} = \hat{a}_r^\dagger V, \quad \mathcal{U} = \alpha_r V, \quad \mathcal{U} = V \alpha, \quad \mathcal{U} = V \hat{a}_r^\dagger,$$

где V представляет произведение $(n-1)$ операторов.

Достаточно провести рассуждения для одного из этих случаев, поскольку для других будут дословно те же рассуждения. Продолжим рассмотрение случая $\mathcal{U} = a_f^+$, $\mathcal{V} = a_f$. Из неравенства (49) видно, что если выражение $\langle a_f^+, \mathcal{V} \rangle$ состоит из n операторов, то антикоммутирует $\langle a_f^+, \mathcal{V} + \mathcal{V} a_f^+ \rangle$ состоит из $(n-2)$ операторов. Здесь число $n \geq 2$, n — чётное. Заметим, что мы рассматриваем только чётные числа n ферми-операторов в средних, поскольку средние, составленные из нечётного числа ферми-операторов, равны нулю в силу правил отбора.

Полагая, например, в (49) $\mathcal{V} = a_f$, имеем

$$|\langle a_f^+, a_f \rangle_{\Gamma} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}}} | \leq \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right).$$

Но, с другой стороны,

$$\langle a_f^+, a_f \rangle_{\Gamma^0} = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_f}{\theta}}}.$$

т.е.

$$|\langle a_f^+, a_f \rangle_{\Gamma} - \langle a_f^+, a_f \rangle_{\Gamma^0}| \leq \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right),$$

или

$$\lim_{V \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} |\langle a_f^+, a_f \rangle_{\Gamma} - \langle a_f^+, a_f \rangle_{\Gamma^0}| = 0.$$

Аналогично для $\langle a_f^+ \rangle$ имеем

$$|\langle a_f^+ \rangle_{\Gamma} - \langle a_f^+ \rangle_{\Gamma^0}| \leq \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right),$$

где

$$\langle a_f^+ \rangle_{\Gamma^0} = \frac{e^{\frac{E_f}{\theta}}}{1 + e^{\frac{E_f}{\theta}}},$$

или

$$\lim_{V \rightarrow \infty, \delta > 0} \{ \langle a_f, a_f^+ \rangle_{\Gamma} - \langle a_f, a_f^+ \rangle_{\Gamma_0} \} = 0.$$

Как мы уже показали, неравенство (49) справедливо при $n=2$. Нетрудно проверить его справедливость и для $n=4, n=6$ и т.д. Чтобы доказать справедливость этого неравенства при любом n , допустим, что оно доказано для некоторого числа операторов s , т.е. предполагаем

$$\left| \langle a_f, B \rangle_{\Gamma} - \frac{e^{-\frac{E_f}{\theta}}}{1 + e^{-\frac{E_f}{\theta}}} \langle a_f, B + B a_f^+ \rangle_{\Gamma_0} \right| \leq \Pi_s \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right),$$

$$\Pi_s = \text{const.}$$

Принимая во внимание, что

$$\langle a_f, B \rangle_{\Gamma_0} = e^{-\frac{E_f}{\theta}} \langle B a_f^+ \rangle_{\Gamma_0},$$

имеем

$$|\Delta_s| = \left| \langle a_f, B \rangle_{\Gamma} - \langle a_f, B \rangle_{\Gamma_0} \right| \leq \Pi_s \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right). \quad (51)$$

Правая часть этого неравенства при $V \rightarrow \infty$ и для любого $\delta > 0$ стремится к нулю. Далее на основе сделанного предположения доказываем справедливость (51) при $n=s+2$. В самом деле,

$$|\Delta_{s+2}| \leq \Pi_{s+2} \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right).$$

Итак, из справедливости неравенства (51) при $n=s$ вытекает его правильность и при $n=s+2$. Но при $n=2$ неравенство справедливо, следовательно, оно справедливо и при $n=4, n=6$ и т.д. Так как последовательным прибавлением пары операторов можно получить любое чётное число операторов, то неравенство-утверждение (50) действительно верно при любом чётном n .

Ввиду произвольности ψ мы можем применять неравенство (50) с любым возможным набором ферми-операторов.

Напомним, еще, что здесь имеет смысл рассматривать не любые произвольные комбинации из ферми-операторов, а только те, которые не обращают в нули средние

$$\langle \psi \rangle_{\Gamma}, \quad \langle \psi \rangle_{\Gamma^0}.$$

Отметим также, что вообще общепринято рассматривать произведения нормального вида, т.е. такие, когда все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. Ясно, что любой произвольный порядок следования операторов всегда можно привести к нормальному виду.

Принимаем далее во внимание, что "старые" ферми-операторы связаны с "новыми" посредством канонических преобразований (11) с ограниченными коэффициентами u_f, v_f , поэтому приведенное доказательство естественно обобщается и на них.

Таким образом, имеем результат

$$|\langle u \rangle_{\Gamma} - \langle u \rangle_{\Gamma^0}| \leq \Pi' \bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right), \quad \Pi' = \text{const},$$

где $\bar{\epsilon}_2 \left(\frac{1}{V}, \delta \right)$ при $V \rightarrow \infty$ и для любого положительного δ стремится к нулю.

Поскольку мы провели рассмотрение для случая безвременных корреляционных функций, доказательство аналогичных соотношений для двумерных или многомерных корреляционных функций не представляет большого труда и может быть проведено методом математической индукции по схеме, предложенной в нашей работе^{/2/}. В случае v -временных корреляционных функций вида

$$\langle u_1(t_1) u_2(t_2) \dots u_p(t_p) \rangle,$$

где

$$u_j(t_j) = A_1^j(t_1) \dots A_p^j(t_1)$$

и $A_p^j(t)$ равно $a_f(t)$ или $a_f^+(t)$, найдем

$$\begin{aligned}
 & | \langle u_1(t_1) \dots u_n(t_n) \rangle_{\Gamma} - \langle u_1(t_1) \dots u_n(t_n) \rangle_{\Gamma_0} | \leq \\
 & \leq | Q_n(t_n - t_{n-1}) + \dots + Q_2(t_2 - t_1) + Q | \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{V}, \delta \right).
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Здесь $Q, Q_2 \dots Q_n$ - некоторые постоянные при $V \rightarrow \infty$.

Отметим теперь, что подобные же асимптотические неравенства для больших систем ($V \rightarrow \infty$) можно получить и в "x-представлении".

Рассмотрим корреляционные средние, составленные из полевых операторных функций в представлении Гейзенберга. Эти полевые функции выражаются "квазидискретными" суммами вида:

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_f a_f(t) e^{i\vec{f} \cdot \vec{x}},$$

$$\Psi^\dagger(t, x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_f a_f^\dagger(t) e^{-i\vec{f} \cdot \vec{x}}.$$

Напомним здесь, что означает соотношение

$$\begin{aligned}
 f_V(x_1, \dots, x_m) & \rightarrow f(x_1, \dots, x_m) \\
 & (V \rightarrow \infty, \delta > 0)
 \end{aligned}$$

Определим его со смыслом, принятым в теории обобщенных функций.

Рассмотрим класс $C(q, r)$; q, r - положительные числа непрерывных и неограниченно дифференцируемых функций $h(x_1, \dots, x_m)$, таких, что во всем пространстве точек E_m, x_1, \dots, x_m

$$|h(x_1, \dots, x_m)| \leq \frac{\text{const}}{\{|x_1| + \dots + |x_m|\}^q},$$

$$\left| \frac{\partial^{\ell_1 + \dots + \ell_m}}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_m^{\ell_m}} h(x_1, \dots, x_m) \right| \leq \frac{\text{const}}{\{|x_1| + \dots + |x_m|\}^q}.$$

где

$$\alpha = 0, 1, 2, \dots, r, \quad \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Тогда, если мы можем фиксировать положительные числа q, r таким образом, что для всякой функции $h(x_1, \dots, x_m)$ из класса $C(q, r)$

$$\begin{aligned} & \int h(x_1, \dots, x_m) f_V(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \rightarrow \\ & \rightarrow \int h(x_1, \dots, x_m) f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m, \end{aligned}$$

мы будем говорить, что имеет место обобщенное предельное соотношение

$$f_V(x_1, \dots, x_m) \rightarrow f(x_1, \dots, x_m)$$

$$\text{при } V \rightarrow \infty, \quad \delta > 0.$$

Нетрудно заметить, что средние от произведения полевых операторов $\Psi^+(t, x), \Psi(t, x)$ могут содержать обобщенные функции. Поэтому и соответствующие предельные соотношения при $V \rightarrow \infty, \delta > 0$ будем понимать в смысле теории обобщенных функций.

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший пример. Рассмотрим корреляционную среднюю

$$\begin{aligned} & \langle \Psi^+(t_1, x_1) \Psi(t_2, x_2) \rangle = \\ & = \frac{1}{V} \sum_{t_1, t_2} \langle a_{t_1}^+(t_1) a_{t_2}(t_2) \rangle e^{-if_1 x_1 + if_2 x_2}. \end{aligned}$$

Учитывая правила отбора, видим, что

$$\langle a_{t_1}^+(t_1) a_{t_2}(t_2) \rangle$$

отлично от нуля лишь при $t_1 = t_2$. Тогда

$$\langle \Psi^+(t_1, x_1) \Psi(t_2, x_2) \rangle = \frac{1}{V} \sum_t \langle a_t^+(t) a_t(t) \rangle e^{i f(x_2 - x_1)}. \quad (59)$$

Умножим (53) на функцию $h(x_2 - x_1)$ из класса $C(q, r)$ и проинтегрируем по x в бесконечных пределах. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x_2 - x_1) \langle \Psi(t_1 x_1) \Psi(t_2 x_2) \rangle dx_2 =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_f \langle a_f^+(t_1) a_f(t_2) \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_2 - x_1) e^{if(x_2 - x_1)} dx_1.$$

Обозначая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x_2 - x_1) e^{if(x_2 - x_1)} dx_2 - dx_1 = \bar{h}(f),$$

запишем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x_2 - x_1) \langle \Psi(t_1 x_1) \Psi(t_2 x_2) \rangle dx_2 =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_f \langle a_f^+(t_1) a_f(t_2) \rangle \bar{h}(f).$$

Взяв числа q и r в классе $C(q, r)$, к которому принадлежит функция $h(x)$, мы можем добиться, чтобы $\bar{h}(f)$ убывала при $f \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|f|}$. Для нас, однако, достаточным будет удовлетворить условию

$$\frac{1}{V} \sum_f |\bar{h}(f)| \leq k = \text{const}.$$

Тогда, замечая, что

$$|\langle a_f^+(t_1) a_f(t_2) \rangle_{\Gamma} - \langle a_f^+(t_1) a_f(t_2) \rangle_{\Gamma_0}| \leq$$

$$\leq \{|t_2 - t_1| Q_1 + Q_2\} \bar{\epsilon} \left(\frac{1}{V}, \delta \right), \quad Q_1, Q_2 = \text{const}.$$

будем иметь:

$$\left| \int h(x_2 - x_1) \left\{ \langle \overset{+}{\Psi}(t_1, x_1) \Psi(t_2, x_2) \rangle_{\Gamma} - \langle \overset{+}{\Psi}(t_1, x_1) \Psi(t_2, x_2) \rangle_{\Gamma_0} \right\} dx \right| \leq$$

$$< \frac{1}{V} \sum |h(t)| |t_2 - t_1| Q_1 + Q_2 \rangle \epsilon \left(\frac{1}{V}, \delta \right) \rightarrow 0$$

при

$$V \rightarrow \infty, \delta > 0.$$

Следовательно, имеет место обобщенное предельное соотношение в "x-представлении"

$$\langle \overset{+}{\Psi}(t_1, x_1) \Psi(t_2, x_2) \rangle_{\Gamma} \rightarrow \langle \overset{+}{\Psi}(t_1, x_1) \Psi(t_2, x_2) \rangle_{\Gamma_0}$$

при

$$V \rightarrow \infty, \delta > 0.$$

В связи с приведенным рассмотрением можно сделать обобщение методом индукции на случай 2n (n=1, 2, ...) операторов этого типа и получить предельные соотношения вида

$$\lim \left\{ \langle \phi(t_1, x_1) \dots \phi(t_n, x_n) \phi(t'_n, x'_n) \dots \phi(t'_1, x'_1) \rangle_{\Gamma} - \right. \\ \left. - \langle \phi(t_1, x_1) \dots \phi(t_n, x_n) \phi(t'_n, x'_n) \dots \phi(t'_1, x'_1) \rangle_{\Gamma_0} \right\} \rightarrow 0$$

при $V \rightarrow \infty$ и для любого положительного δ ,

где полевой оператор $\phi(t, x)$ равен соответственно или $\Psi(t, x)$, или $\overset{+}{\Psi}(t, x)$.

Пользуясь случаем, выражаю свою признательность Н.Н.Боголюбову за ценные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Н.Боголюбов (мл). Препринт ИТФ 68-65, Киев, 1968.
2. Н.Н.Боголюбов (мл). Препринт ИТФ 68-67 , Киев, 1968.
3. N.N.Bogolubov (Jr.). *Physica*, 32, 933-944 (1966).
4. Н.Н.Боголюбов (мл). ДАН СССР, 168, 4 (1966).
5. Н.Н.Боголюбов : Квазисредние в задачах статистической механики .
Препринт ОИЯИ Р-1451, Дубна, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1968 года.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Н.Боголюбов (мл). Препринт ИТФ 68-65, Киев, 1968.
2. Н.Н.Боголюбов (мл). Препринт ИТФ 68-67 , Киев, 1968.
3. N.N.Bogolubov (Jr.). *Physica*, 32, 933-944 (1966).
4. Н.Н.Боголюбов (мл). ДАН СССР, 168, 4 (1966).
5. Н.Н.Боголюбов : Квазисредние в задачах статистической механики .
Препринт ОИЯИ Р-1451, Дубна, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1968 года.