Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 28

А. М. Райгородский

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2003

УДК 519.1
ББК 22.15
Р18

Аннотация

В сороковые годы XX века известными математиками П. Эрдёшом и Г. Хадвигером была поставлена одна из самых коротко формулируемых и в то же время одна из самых ярких и трудных задач комбинаторной геометрии — задача о нахождении хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. минимального числа цветов, в которые можно так раскрасить точки пространства, чтобы точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, оказались раскрашенными в разные цвета.

Эта задача до сих пор не решена даже для $n=2$, т. е. для плоскости, хотя простотой и естественностью своей постановки она сразу привлекла внимание всех математиков. К настоящему времени разработано много интересных и остроумных подходов к её (пока частичному) решению.

Текст брошюры представляет собой запись лекции, прочитанной автором 7 декабря 2002 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей.

Издание осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Департамента образования г. Москвы.

ISBN 5-94057-121-2

Андрей Михайлович Райгородский.

Хроматические числа.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 28).
М.: МЦНМО, 2003. — 44 с.: ил.

Редактор *Г. А. Колюцкий.*
Техн. редактор *М. Ю. Панов.* Корректор *Т. Л. Коробкова.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 10/X 2003 года. Формат бумаги $60\times88\,{}^1\!/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 2,75 + 0,50 (вкл.). Усл. печ. л. 3,18. Уч.-изд. л. 3,45. Тираж 3000 экз. Заказ 3923.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ВВЕДЕНИЕ

Задачу, о которой мы хотим рассказать в этой брошюре, принято относить к разделу математики, называемому «комбинаторной геометрией». Само по себе название раздела уже носит, по-видимому, довольно интригующий характер. В самом деле, взятые в отдельности, слова «комбинаторика» и «геометрия» понятны многим. Однако их сочетание выглядит, быть может, немного неожиданно, и потому следует сперва пояснить, о чём идёт речь.

Очень трудно дать общее и вместе с тем исчерпывающее определение того, что представляет из себя та или иная область математики. За последние десятилетия математика ушла столь далеко на пути абстракции и разделы её столь сильно переплелись между собой, что не всегда возможно чётко разграничить их. Поэтому мы не будем стремиться здесь к какой-либо всеобщности. Мы только ограничимся более или менее ёмкой формулировкой, а также приведём небольшую историческую справку, которая и будет призвана в максимальной мере прояснить ситуацию.

Итак, говоря предельно кратко, комбинаторная геометрия — это часть математики, изучающая различные вопросы, которые, с одной стороны, имеют совершенно геометрическую постановку (скажем, касаются взаимного расположения фигур и точек на плоскости), а с другой стороны, легко поддаются комбинаторной интерпретации. Термин «комбинаторная геометрия» восходит, вероятнее всего, к работам выдающегося специалиста в области соответствующих задач Гуго Хадвигера*), и с этим именем мы ещё будем встречаться в дальнейшем. Конечно, термин появился, как это обыкновенно и бывает, позже задач, и классическими примерами последних являются: знаменитая проблема Борсука о разбиении множеств на части (1933), проблемы, связанные с так называемой теоремой Хелли (1913), задача освещения границы выпуклого тела (1957), задача о хроматических числах и др. Именно последнюю из перечисленных задач мы и обсудим в этой брошюре.

У задачи о хроматических числах, к формулировке которой мы перейдём лишь в следующей главе, авторов было несколько. Во-первых, ещё в начале сороковых годов XX века её поставили замечательные математики Гуго Хадвигер и Пол Эрдёш**), во-вторых, независимо от Эрдёша и Хадвигера ей занимались приблизительно в то же время Е. Нелсон и Дж. Р. Исбелл. В сороковые годы шла Мировая война, и этим обстоятельством обусловлен тот факт, что поначалу хроматические числа не вызвали слишком бурного

*) Г. Хадвигер (1908—1981) — известный немецкий математик.

**) П. Эрдёш (1913—1996) — выдающийся венгерский математик, автор более чем полутора тысяч статей, один из создателей современной венгерской математической школы, а также автор множества известных — и ныне уже ставших классическими — задач комбинаторики, геометрии, теории чисел и теории множеств.

интереса. Потребовалось около 15 лет, чтобы положение изменилось кардинально: после работы Хадвигера 1961 года, посвящённой нерешённым задачам, хроматические числа стали активно изучаться, и за прошедшие с тех пор десятилетия соответствующая наука сделалась одной из самых популярных математических дисциплин в мире. Задачей Эрдёша—Хадвигера занимались многие известные математики, о ней написаны сотни прекрасных статей, имеются монографии, и всё же проблема столь нетривиальна и глубока, что и по сей день остаётся немало неисследованных вопросов, которые связаны с ней и которые, несомненно, поддаются изучению. В этой брошюре мы постараемся дать введение в проблематику: поставим задачу, обсудим ряд ярких и важных результатов, сформулируем некоторые из нерешённых вопросов.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим обыкновенную вещественную прямую, т. е. множество всех вещественных (действительных) чисел, которое принято обозначать $\mathbb{R}$ или же $\mathbb{R}^1$, подчёркивая в последнем случае, что эта прямая одномерна*). Точки на прямой суть действительные числа x, y и т. д., а расстояние между этими точками определяется естественно — как $|x-y|$. Заметим, что в определении хроматического числа (в данном случае хроматического числа прямой) понятие расстояния будет играть одну из основных ролей.

Определение. *Хроматическим***) *числом* прямой называется величина $\chi(\mathbb{R}^1)$, равная минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки $\mathbb{R}^1$, чтобы расстояние между точками одного цвета не могло оказаться равным единице.

Точек на прямой, разумеется, бесконечно много, и, на первый взгляд, определение может показаться не совсем понятным. Однако, в действительности, если речь идёт о раскраске какого-нибудь множества в несколько цветов, то подразумевается попросту, что это множество представляется в виде объединения своих непересекающихся частей, которым и присваиваются в дальнейшем «цвета». В нашем случае это можно символически записать так:

$$\mathbb{R}^1 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_\chi, \tag{1}$$

где для любой пары индексов i, j ($1 \leqslant i \leqslant \chi$, $1 \leqslant j \leqslant \chi$, $i \neq j$) выпол-

*) Интуитивное понятие о размерностях 1, 2 и 3 имеется у каждого из нас; однако в математике используется также и абстрактное (т. е. отвлечённое от повседневной интуиции) понятие размерности, которое позволяет говорить о «четырёхмерных», «пятимерных», «n-мерных» и даже «бесконечномерных» пространствах. Некоторое представление об этом понятии мы постараемся дать позже, когда речь пойдёт о хроматических числах в «большой размерности».

**) Слово «хроматический» греческого происхождения; в переводе на русский язык оно означает «цветной».

няется условие $V_i \cap V_j = \varnothing$ (пересечение V_i и V_j пусто). Тем самым, величина $\chi(\mathbb{R}^1)$ есть, по сути, наименьшее число χ, при котором существует равенство (1) с дополнительным свойством: какова бы ни была часть множества вещественных чисел V_i $(1 \leqslant i \leqslant \chi)$ и каковы бы ни были точки x, y, принадлежащие этой части, расстояние между этими точками не должно равняться единице $(|x-y| \neq 1)$.

Коль скоро определение дано, возникает вопрос: а почему, собственно, мы запрещаем точкам одного цвета находиться именно на расстоянии 1 друг относительно друга? Чем единица лучше любого другого вещественного числа и почему бы нам не взять, скажем, число π в качестве величины «запрещённого» расстояния? Ответ практически очевиден: дело в том, что никакой разницы между числами 1 и π с точки зрения определения величины $\chi(\mathbb{R}^1)$ нет, и единица фигурирует в определении исключительно для красоты. Иными словами, значение $\chi(\mathbb{R}^1)$ вовсе не зависит от того, какое положительное число мы взяли за величину запрещённого расстояния, так как, имея раскраску $\mathbb{R}^1 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_\chi$, в которой между точками одного цвета не может быть расстояния $a > 0$, мы с лёгкостью преобразуем её в раскраску $\mathbb{R}^1 = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\chi$, в которой нет одноцветных точек на расстоянии $b > 0$: для этого мы каждую часть V_i «раздуваем» (или «сжимаем») в b/a раз, получая, в конечном счёте, новую часть W_i.

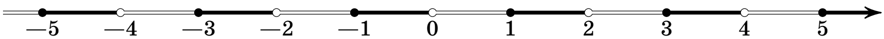

Рис. 1

Задача Эрдёша—Хадвигера ставится теперь очень просто: нужно отыскать значение величины $\chi(\mathbb{R}^1)$. Понятно сразу, что $\chi(\mathbb{R}^1) \geqslant 2$, поскольку одного цвета заведомо не хватит: на всей прямой сколько угодно пар точек, удалённых друг от друга на расстояние 1. Однако это ещё не есть искомое решение, ведь сходу мы даже не знаем, конечно ли наше хроматическое число. Нужно, стало быть, попытаться придумать какую-нибудь («хорошую») раскраску прямой, которая бы использовала как можно меньшее количество цветов. Эта раскраска изображена на рис. 1, и имеет она следующий вид: $\mathbb{R}^1 = V_1 \cup V_2$, где

$$V_1 = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} [2i, 2i+1), \quad V_2 = \mathbb{R}^1 \setminus V_1 = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} [2i-1, 2i).$$

Ясно, что эта двухцветная раскраска обладает надлежащим свойством, и, следовательно, мы получили теорему:

Теорема I. Имеет место точное равенство $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$.

Итак, в случае прямой задача Эрдёша—Хадвигера и ставится, и решается очень легко. В следующем параграфе мы займёмся этой задачей для случая плоскости и убедимся в том, что уже тогда сложность её возрастёт принципиально.

1. Множество $V \subset \mathbb{R}^1$ называется *связным*, если любые две его точки могут быть соединены («связаны») отрезком, целиком лежащим внутри V. Существует ли двухцветная раскраска прямой, при которой каждая из частей, отвечающих цветам, связна?*)

2. Существует ли двухцветная раскраска прямой, при которой каждая из частей, отвечающих цветам, представляет собой объединение непересекающихся отрезков (интервалов)? Существует ли двухцветная раскраска прямой, при которой одна из частей есть объединение интервалов, а другая — отрезков?

ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этой главе мы рассмотрим обычную плоскость, которую принято обозначать $\mathbb{R}^2$. Мы будем представлять себе $\mathbb{R}^2$ как множество всех возможных пар (x_1, x_2) вещественных чисел x_1, x_2, а сами эти пары мы будем называть точками (векторами) и обозначать $\vec{x}=(x_1, x_2)$. Расстояние между точками на плоскости мы введём стандартное — евклидово**): если векторы $\vec{x}=(x_1, x_2)$ и $\vec{y}=(y_1, y_2)$ лежат в $\mathbb{R}^2$, то расстояние между ними — это величина $|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Определение хроматического числа плоскости, которое мы теперь готовы дать, дословно повторяет определение величины $\chi(\mathbb{R}^1)$ из предыдущей главы. Достаточно лишь заменить в старом определении прямую $\mathbb{R}^1$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Как и прежде, хроматическое число мы обозначим греческой буквой χ, только теперь будем писать $\chi(\mathbb{R}^2)$. Естественно, задача Эрдёша—Хадвигера и здесь состоит в нахождении величины χ.

Лёгкость, с которой мы добились успеха в решении «одномерной» задачи, наводит на мысль, что и в случае плоскости дела будут обстоять довольно хорошо. Тем более обескураживающе выглядит следующий набор результатов: несмотря на популярность задачи и на все усилия, которые были в различное время приложены многими замечательными специалистами по комбинаторной геометрии, известны лишь две весьма прозрачных по своему доказательству классических теоремы сорокалетней давности.

*) Двумя чертами слева выделены тексты упражнений для самостоятельного решения.

**) Вообще-то, в математике существует расширенное представление о том, что такое расстояние или, как говорят, «метрика». В одной из заключительных частей брошюры мы скажем несколько слов об этом и о том, как трансформируется понятие хроматического числа в зависимости от того, каким определением расстояния пользоваться.

Теорема II. Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$.

Теорема III. Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$.

Иными словами, на плоскости не только не найдено хроматическое число, но даже «зазор» между имеющимися оценками весьма велик. Теорема II была доказана в 1961 году братьями Мозерами, а теорема III принадлежит Хадвигеру (1961 год). Обе они отнюдь не сложны, и мы дадим их полные доказательства.

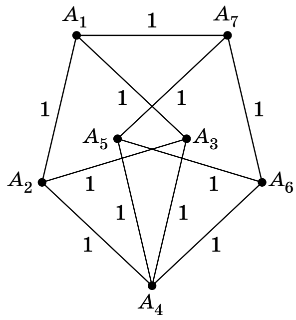

Рис. 2

Доказательство теоремы II. В основе доказательства лежит замечательная точечная конфигурация, предложенная братьями Мозерами и внешне слегка напоминающая веретено, в связи с чем она и носит название «мозеровского веретена» (рис. 2). В самом деле, можно представлять себе, что точки A_1, A_2, A_3, A_4 образуют «иглу», составленную из правильных треугольников с длиной стороны 1, симметричных относительно общего основания A_2A_3. То же самое можно сказать и о точках A_4, A_5, A_6, A_7: это тоже «игла», имеющая общую вершину A_4 с первой иглой и повёрнутая так, чтобы между вершинами A_1 и A_7 обеих игл натягивалась «ниточка» длины 1.

Рассмотрим множество $\mathscr{A}$ вершин веретена — точки $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_7$. Непосредственным перебором ситуаций может быть доказана

Лемма. Каковы бы ни были три различные точки A_i, A_j, $A_k \in \mathscr{A}$, среди них найдётся пара точек (назовём их A и B), таких, что $|A - B| = 1$.

Допустим, что плоскость удалось раскрасить в три цвета. Тогда и точки множества $\mathscr{A}$ отнесены к не более чем трём цветам. Значит, найдутся три точки A_i, A_j, $A_k \in \mathscr{A}$, имеющие один и тот же цвет (иначе количество точек во всём $\mathscr{A}$ не могло бы равняться семи), и, следовательно, в силу леммы, две из них окажутся на расстоянии 1, что противоречит определению хроматического числа. Таким образом, наше допущение неверно, $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$, и теорема II доказана.

Разобранное доказательство, основываясь на его главной идее, можно вложить в более широкий контекст. Действительно, для получения оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$ мы пользовались исключительно свойствами некоторой конечной точечной конфигурации — мозеровского веретена. Дадим следующее определение.

Определение. Множество точек $\mathscr{A}$ на плоскости называется (M, D)-*критической конфигурацией*, если мощность множества $\mathscr{A}$ (т. е. число элементов в $\mathscr{A}$; мощность множества $\mathscr{X}$ обычно обозначают через $\#\mathscr{X}$) равна M и в то же время в любом подмножестве $\mathscr{F}$

множества $\mathscr{A}$, таком, что $\#\mathscr{F}=D+1$, найдётся пара точек F_1, F_2 на расстоянии 1.

Определение устроено так, чтобы всякая (M, D)-критическая конфигурация обладала свойством, аналогичным тому, которое было доказано в лемме для мозеровского веретена. Это попросту означает, что веретено является (M, D)-критической конфигурацией с $M=7$ и $D=2$, а понятие критической конфигурации в целом есть прямое обобщение конструкции братьев Мозеров. Если из леммы мы вывели оценку $\chi(\mathbb{R}^2)\geqslant 4$, то в точности те же рассуждения при наличии какой-нибудь (M, D)-критической конфигурации позволяют доказать неравенство $\chi(\mathbb{R}^2)\geqslant M/D$ в предположении, что M делится на D нацело, и неравенство $\chi(\mathbb{R}^2)\geqslant[M/D]+1$ в противном случае (здесь через $[a]$ обозначена целая часть числа a, и, в частности, для веретена $[M/D]+1=4$).

На первый взгляд, совершенно удивительно, что до сих пор не удалось «соорудить» какую-либо конструкцию, существенно более сложную, чем мозеровская, но критическую и с $[M/D]+1>4$ (с $M/D>4$). Тем более это кажется удивительным, что у нас есть компьютеры, позволяющие производить весьма значительный перебор. И вместе с тем некоторые нетривиальные соображения заставляют предположить, что $\chi(\mathbb{R}^2)=4$. Во всяком случае, в 1994 году А. Сойфер доказал, что не существует (M, D)-критической конфигурации с $[M/D]+1>6$ (с $M/D>6$). Это ещё отнюдь не означает, что $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 6$, но и этот факт весьма замечательный.

Доказательство теоремы III. Имея целью обосновать результат Хадвигера, естественно попытаться явно указать какую-нибудь раскраску плоскости в необходимое число цветов. Вообще говоря, в математике зачастую встречаются и «неконструктивные» доказательства (т. е. такие доказательства, которые позволяют лишь за счёт некоторых соображений убедиться в существовании искомого объекта и из которых невозможно выделить его явного описания), но, памятуя о наглядной простоте конструкции для оценки хроматического числа $\mathbb{R}^1$, разумно всё же и в двумерной ситуации попробовать обратиться к наглядному методу. Дабы сделать подход максимально понятным и, более того, готовым к дальнейшим приложениям, мы обсудим сперва неравенство $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 9$, доказательство которого является прямым обобщением доказательства оценки $\chi(\mathbb{R}^1)\leqslant 2$. В самом деле, рассмотрим квадрат с длиной стороны, равной 2,1, и разрежем его на девять более мелких квадратиков-клеточек со сторонами вели-

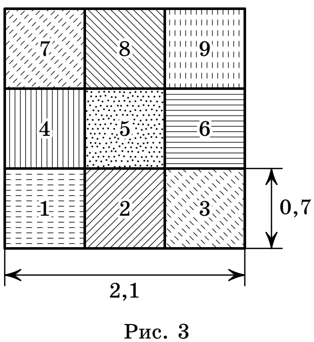

Рис. 3

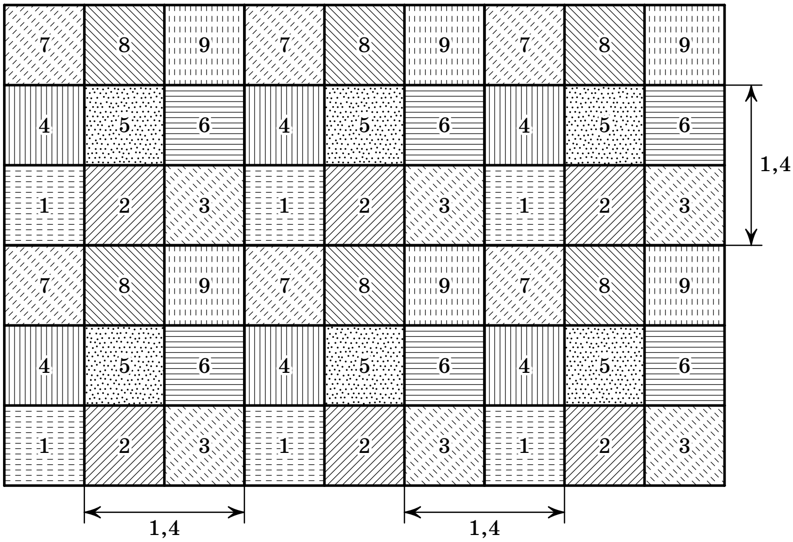

Рис. 4

чины 0,7 (рис. 3). Каждый мелкий квадратик окрасим в свой цвет. Чтобы не было неоднозначности, границы квадратиков раскрасим произвольным образом: скажем, общей границе клеточек «1» и «2» присвоим цвет «1» (хотя могли бы с равным успехом присвоить ей и цвет «2») и т. д. Ясно, что каковы бы ни были точки $\vec{x}$, $\vec{y}$, одновременно попадающие в любую фиксированную клеточку, расстояние между ними не превосходит длины диагонали клеточки, т. е. величины $\sqrt{0,7^2+0,7^2}=\sqrt{0,98}<1$. Стало быть, в рамках большого квадрата с условиями, которым должна удовлетворять искомая раскраска, всё в порядке: точки одного цвета отстоят друг от друга на расстояние, не равное единице. Однако квадрат — это ещё отнюдь не всё $\mathbb{R}^2$. Как поступить? Очень просто: достаточно «замостить» плоскость копиями нашего квадрата, получаемыми посредством параллельных переносов (рис. 4). При этом следует, во-первых, применить параллельные переносы и к разбиениям квадратов на клеточки, т. е. сохранить как само разбиение, так и нумерацию его элементов (раскраску), а во-вторых, в неоднозначных случаях, возникающих на границах квадратов, выбрать цвета произвольным образом. С тем, что внутри каждого из квадратов, замощающих плоскость, раскраска обладает требуемыми свойствами, мы уже согласились. Однако это не мешает, в принципе, возникновению одноцветных точек $\vec{x}$ и $\vec{y}$, которые бы находились в разных квадратах и были бы при этом таковы, что $|\vec{x}-\vec{y}|=1$.

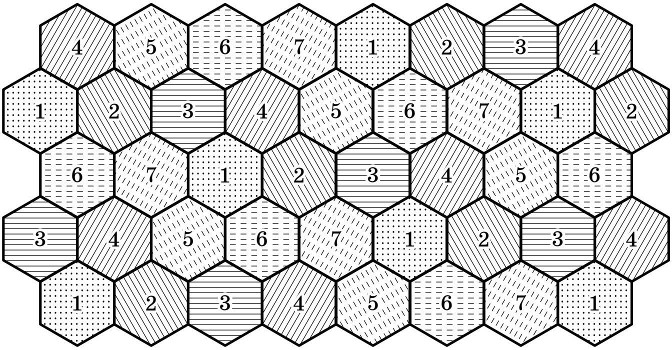

Рис. 5

По счастью, последнее обстоятельство не имеет места: если точки из разных квадратов окрашены в один цвет, то они заведомо удалены друг от друга на расстояние, не меньшее, чем $2\cdot 0{,}7=1{,}4>1$ (см. рис. 4). Тем самым, и впрямь $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 9$, раскраска абсолютно «эффективна», и тот факт, что она вполне аналогична одномерной, не вызывает сомнений: двумерное чередование квадратов естественно обобщает одномерное чередование отрезков.

Итак, раскраска плоскости в девять цветов получена, и она, безусловно, является обобщением двухцветной раскраски прямой. Однако плоскость, в отличие от прямой, двумерна, свободы действий у нас здесь гораздо больше, и, в частности, ничто не заставляет нас непременно относить к одному цвету те и только те точки, объединение которых есть объединение каких-либо квадратиков (см. упражнение 3). Хадвигеровское рассуждение как раз и базируется на этой дополнительной свободе: оказывается, что вместо квадратов удобнее рассмотреть правильные шестиугольники. Структура раскраски Хадвигера приведена на рис. 5: это своего рода бесконечные пчелиные соты, распространённые на всё $\mathbb{R}^2$ (чего в природе, разумеется, не бывает). Каждый из замощающих плоскость правильных шестиугольников изначально устроен так, чтобы максимальное расстояние между точками, лежащими в нём, было «немного» меньше единицы. Смысл слова «немного» сводится тогда к тому, что и расстояние между точками из разных шестиугольников одного цвета окажется «слегка» больше единицы. Иначе говоря, величина $\varepsilon>0$ подбирается столь маленькой, чтобы, во-первых, для любых двух точек $\vec{x}$, $\vec{y}$ из одного шестиугольника было выполнено условие $|\vec{x}-\vec{y}|\leqslant 1-\varepsilon$, а во-вторых, любые векторы $\vec{x}'$, $\vec{y}'$ из различных одноцветных ячеек обладали свойством $|\vec{x}-\vec{y}|\geqslant 1+\varepsilon'$, где величина $\varepsilon'>0$ некоторым образом зависела бы от ε. Читателю предоставляется самому попытаться отыскать возможные значения упомянутых величин: ничего, кроме знания простейшей планиметрии, для этого не потребуется. Опять-таки, как и в случае раскраски квадратами, неоднозначность в выборе цветов на границах ячеек устраняется взятием произвольного из по крайней мере двух возможных вариантов.

Теорему III мы доказали, причём по ходу дела построили две весьма симметричные по своей природе раскраски плоскости. Повторяя сказанное в начале параграфа, можно ещё раз заметить, что, конечно же, для получения хорошего результата о хроматических числах вовсе не обязательно стремиться предъявлять конкретные и тем более столь симметричные конструкции. Однако ситуации, изученные нами, допускают глубокую интерпретацию, позволяющую вложить их в существенно более широкий контекст: с одной стороны, это приведёт к новому и более нетривиальному пониманию природы возникающей симметрии, с другой стороны, это даст возможность распространить найденные методы на случай бо́льших размерностей (о чём подробнее ниже), и, наконец, это подскажет нам весьма содержательные задачи, часть из которых решена, в то время как ещё очень многие вопросы подлежат исследованию. Прежде чем об этом рассказать, подчеркнём, что «неконструктивных» подходов к реальному улучшению оценки $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 7$ до сих пор предложено не было (впрочем, см. приложение 2), и потому тем важнее детально разобраться с положением дел, связанных с «эффективными» методами.

Начнём с обещанной интерпретации наших раскрасок. Для этого нам понадобится ввести несколько определений и сформулировать один довольно тонкий факт из науки, которую принято называть геометрией чисел*).

Определение. *Решёткой* Λ на плоскости называется множество всех точек вида $a\vec{x}+b\vec{y}=(ax_1+by_1,\ ax_2+by_2)$, где векторы $\vec{x}=(x_1,\ x_2)$ и $\vec{y}=(y_1,\ y_2)$ неколлинеарны (т. е. точки $(0,\ 0)$, $(x_1,\ x_2)$ и $(y_1,\ y_2)$ не лежат на одной прямой), а величины a и b принимают любые целочисленные значения. Говорят, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ образуют *базис* решётки Λ.

Простейшим примером решётки является решётка всех векторов с целыми координатами. Эту решётку принято обозначать через $\mathbb{Z}^2$, и порождена она естественным базисом из векторов $(1,\ 0)$ и $(0,\ 1)$. Заметим, что базис в решётке определён неоднозначно,

*) Название «геометрия чисел» звучит, пожалуй, не менее загадочно, чем наш основной термин «комбинаторная геометрия». Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что эта замечательная наука, в главном своём аспекте устанавливающая связь между задачами теории чисел и геометрией, в определённом смысле была известна ещё К. Ф. Гауссу (1777—1855) и Л. Эйлеру (1707—1783), но как отдельная и бурно развивающаяся дисциплина оформилась в конце XIX — начале XX века в трудах Г. Ф. Вороного (1868—1908), А. Н. Коркина (1837—1908), Е. И. Золотарёва (1847—1878) и Г. Минковского (1864—1909).

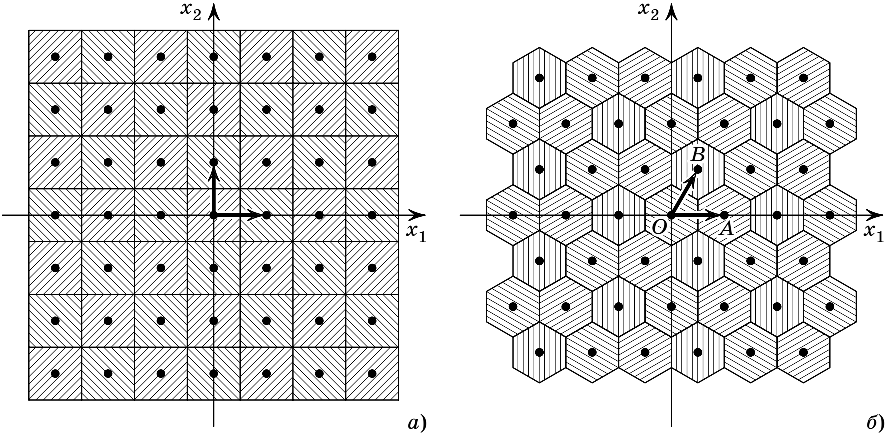

Рис. 6

т. е., скажем, $\mathbb{Z}^2$ можно породить и другой парой векторов, например, (2, 1) и (5, 2).

Определение. *Разбиением плоскости на многоугольники* называется бесконечное множество $\mathscr{T}$, состоящее из таких (многоугольных) фигур T_1, T_2, ..., что их объединение $T_1 \cup T_2 \cup \ldots$ совпадает со всем $\mathbb{R}^2$ и что любые две из них пересекаются, как максимум, по элементам границы (сторонам, вершинам).

Типичными примерами разбиения плоскости являются те, с помощью которых мы задали раскраски $\mathbb{R}^2$ в девять и семь цветов.

Определение. Пусть дана некоторая решётка Λ. *Многоугольником Вороного*, отвечающим точке $\vec{x}$ этой решётки, называется множество $V_{\vec{x}}$, состоящее из всех точек плоскости, для которых точка $\vec{x}$ есть одна из ближайших точек в Λ:

$$V_{\vec{x}}=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^2:\ |\vec{y}-\vec{x}|\leqslant|\vec{y}-\vec{z}|\quad \forall\ \vec{z}\in\Lambda\}.$$

Доказательство того факта, что для всякой решётки Λ и всякой точки $\vec{x}\in\Lambda$ множество $V_{\vec{x}}$ будет и впрямь многоугольником (корректность определения) предоставляется читателю в качестве лёгкого упражнения. Имеет место замечательная теорема, которую мы не будем доказывать в этой брошюре.

Теорема. Какова бы ни была решётка Λ на плоскости, множество всех многоугольников Вороного $V_{\vec{x}}$, отвечающих точкам $\vec{x}\in\Lambda$, образует разбиение $\mathbb{R}^2$. Такое разбиение называется (*решётчатым*) *разбиением Вороного*.

Рассмотрим две решётки: решётку $\mathbb{Z}^2$ и решётку Λ, порождённую векторами OA и OB, изображёнными на рис. 6, *б* и расположенными так, чтобы треугольник OAB был правильным с длиной стороны 1. Оказывается, что многоугольники Вороного для $\mathbb{Z}^2$ суть квадраты, и соответствующее разбиение Вороного — это разбиение, дающее раскраску в девять цветов (рис. 6, *а*); многоугольники же Вороного для Λ суть шестиугольные ячейки, образующие, в конечном счёте, разбиение Вороного, которое мы, ещё не зная «науки», уподобили пчелиным сотам (рис. 6, *б*). Итак, смысл симметрии прояснён: решётка и её разбиение Вороного являются абсолютно регулярными, симметричными объектами. Заметим, что последняя решётка Λ называется гексагональной*) и что она играет огромную роль не только в науке о хроматических числах, но и в науке о «плотнейшей упаковке» кругов единичного диаметра на плоскости.

Таким образом, мы имеем разумный общий подход к построению раскрасок плоскости: нужно взять произвольную решётку, рассмотреть её разбиение Вороного и попытаться в соответствии с некоторым правилом сообщить цвета многоугольникам Вороного этого разбиения. Методы, используемые в геометрии чисел, позволяют, однако же, доказать, что ничего лучшего, чем гексагональная решётка, в этом отношении придумать нельзя, т. е. что в любом решётчатом разбиении Вороного придётся задействовать не менее семи красок.

Потерпев фиаско на пути отыскания совершенно симметричных раскрасок $\mathbb{R}^2$, мы имеем полное право усложнить себе задачу и расширить область поиска за счёт рассмотрения таких разбиений плоскости, при которых каждая часть представляет собой объединение многоугольников, не обязательно являющихся множествами Вороного какой-либо решётки. К сожалению, до сих пор такой поиск к успеху не привёл. Однако сама деятельность, связанная с ним, порождает глубокие и важные задачи о природе раскрасок, имеющие значительный самостоятельный интерес. Мы сформулируем их в соответствующем разделе.

3. Докажите, что если цвета в раскраске плоскости суть объединения многоугольников, то понадобится по крайней мере шесть таких цветов.

4. Найдите нижнюю оценку для минимального числа цветов в раскраске $\mathbb{R}^2$, при которой каждый цвет есть объединение треугольников.

5. Сделайте то же, что и в упражнении 4, но для случая разбиения на квадраты. Какова наилучшая верхняя оценка в этом случае, т. е. может ли быть усилено уже известное нам неравенство $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 9$?

6. Постройте разбиение Вороного, отвечающее решётке, порождённой векторами $(1,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

*) Гексагон (греч.) — шестиугольник.

ТРЁХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Мы уже рассмотрели задачу о хроматических числах на прямой ($\mathbb{R}^1$) и на плоскости ($\mathbb{R}^2$). В результате из всех пространств, интуитивное представление о природе которых у нас имеется и которые, тем самым, можно определять без дополнительных пояснений, неизученным осталось лишь трёхмерное — (евклидово) пространство $\mathbb{R}^3$, состоящее из всех возможных троек вещественных чисел, т. е. точек (векторов) $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ (где x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ — координаты), и снабжённое (евклидовым) расстоянием

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2},$$

где $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$. Величина $\chi(\mathbb{R}^3)$ — хроматическое число трёхмерного пространства — определяется точно так же, как это было сделано для случаев меньшей размерности, и задача Эрдёша—Хадвигера состоит, опять-таки, в её отыскании. Учитывая сравнительное фиаско, которое мы потерпели в случае плоскости, понятно, что рассчитывать мы можем только на получение более или менее хороших оценок для числа $\chi(\mathbb{R}^3)$ и что зазор между этими оценками, скорее всего, возрастёт. В самом деле, наилучшими к настоящему времени являются следующие теоремы.

Теорема IV (Д. Е. Райский, 1970). Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^3)\geqslant 5$.

Теорема V (Д. Кулсон, 2000). Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 15$.

Исследуя хроматическое число плоскости, мы не напрасно старались вложить возникавшие оценки в тот или иной более широкий контекст: помимо всего прочего, найденные нами общие рецепты позволят теперь обосновать теоремы IV и V.

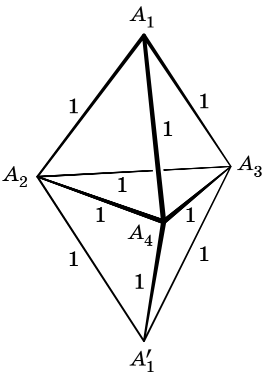

Рис. 7

Доказательство теоремы IV. Воспользуемся концепцией (M, D)-критических конфигураций. Конечно, до сих пор мы имели представление лишь о плоских конфигурациях такого типа. Однако их определение для $\mathbb{R}^3$ выглядит полностью аналогично, и если нам удастся придумать конфигурацию с достаточно большим значением $[M/D]+1$ или M/D (со значением 5), то всё будет в порядке.

Искомая конфигурация является прямым обобщением конструкции братьев Мозеров. Действительно, рассмотрим правильный тетраэдр в $\mathbb{R}^3$ с длиной ребра 1 и вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 7). Рассмотрим также тетраэдр $A'_1A_2A_3A_4$, симметричный первому

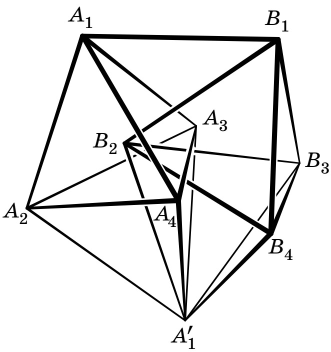

Рис. 8

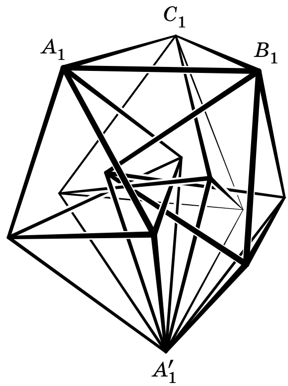

Рис. 9

относительно общего основания $A_2A_3A_4$ (см. рис. 7). Получается аналог того, что на плоскости мы назвали иглой. Фиксируя «нижний конец» иглы (точку A_1'), мы поворачиваем иглу в пространстве так, чтобы «верхний конец» новой (второй) иглы (скажем, вектор B_1) оказался на расстоянии 1 от точки A_1 (между A_1 и B_1 натянулась «ниточка» единичной длины) (рис. 8). В принципе, для получения полноценного трёхмерного веретена нужно бы образовать ещё и третью иглу с нижним концом в A_1', а верхним — в такой точке C_1, что одновременно $|A_1-C_1|=1$ и $|B_1-C_1|=1$ (рис. 9). Эта конструкция имеет важные приложения в комбинаторной геометрии, но для наших целей хватит и веретена из двух игл — веретена $A_1A_2A_3A_4A_1'B_2B_3B_4B_1$ (см. рис. 8). Непосредственно очевидно, что это веретено есть (M, D)-критическая конфигурация с $M=9$ и $D=2$ (среди любых трёх вершин веретена найдётся пара на расстоянии 1). Следовательно, $\chi(\mathbb{R}^3)\geqslant[M/D]+1=5$, и теорема IV доказана.

Тот факт, что оценка Райского тридцатилетней давности, несмотря на усилия специалистов и на наличие мощной вычислительной техники, до сих пор не улучшена, обескураживает в ещё большей степени, чем аналогичное обстоятельство, касающееся мозеровского неравенства $\chi(\mathbb{R}^2)\geqslant 4$: если для плоскости существуют соображения, заставляющие верить в точность столь простой конструкции, как веретено, то в пространстве и таких соображений нет.

Обсуждение теоремы V. Заметим сперва, что совсем легко может быть получена оценка $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 27$. Эта оценка является прямым переносом на трёхмерную ситуацию простейших методов, позволивших отыскать неравенства $\chi(\mathbb{R}^1)\leqslant 2$ и $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 9$: на прямой мы чередовали отрезки, на плоскости — квадраты, ясно, что в пространстве нужно для тех же целей использовать кубы.

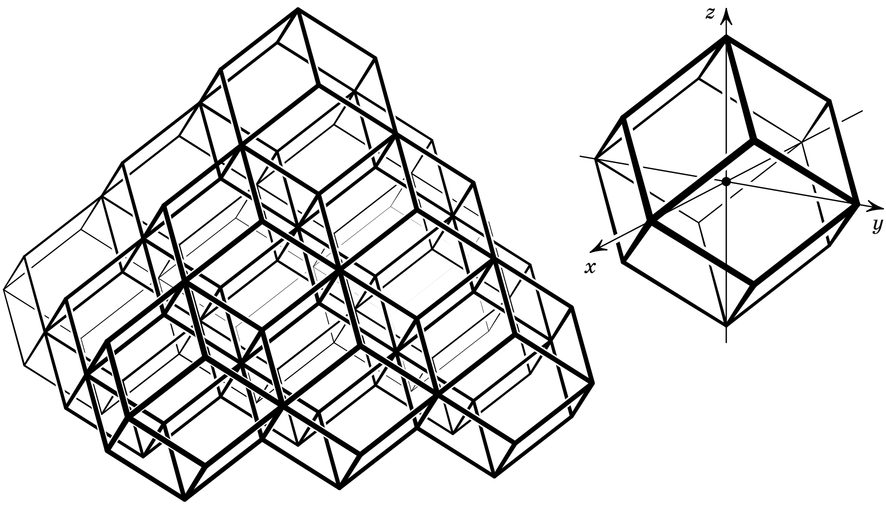

Рис. 10

Например, можно «замостить» всё $\mathbb{R}^3$ «большими» кубами с длиной ребра 1,65, разбитыми, в свою очередь, одним и тем же способом на 27 «маленьких» кубиков-«цветов», имеющих длину ребра 0,55. Тогда длина диагонали в одноцветном кубике оказывается равна $0{,}55\sqrt{3}<1$, а расстояние между любыми двумя одноцветными кубиками не меньше, чем $1{,}1>1$.

Результат Кулсона, к обсуждению которого мы собираемся приступить, опирается, по-существу, на ту же «решётчатую» технику, которая, в конечном счёте, позволила нам обосновать двумерный результат Хадвигера. Иными словами, мы и здесь столкнёмся с совершенно эффективным построением раскраски, причем оно опять-таки будет основано на рассмотрении разбиений Вороного.

Определение. *Решёткой* Λ в пространстве называется множество всех точек вида

$$a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=(ax_1+by_1+cz_1,\ ax_2+by_2+cz_2,\ ax_3+by_3+cz_3),$$

где векторы $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3)$ и $\vec{z}=(z_1, z_2, z_3)$ некомпланарны (т. е. точки $(0, 0, 0)$, (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) не лежат в одной плоскости), а величины a, b и c принимают любые целочисленные значения. Говорят, что векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ образуют *базис* решётки Λ.

Таким образом, решётка в $\mathbb{R}^3$ — это непосредственный аналог двумерной решётки, а её простейшим примером является решётка $\mathbb{Z}^3$, состоящая из всех векторов с целыми координатами

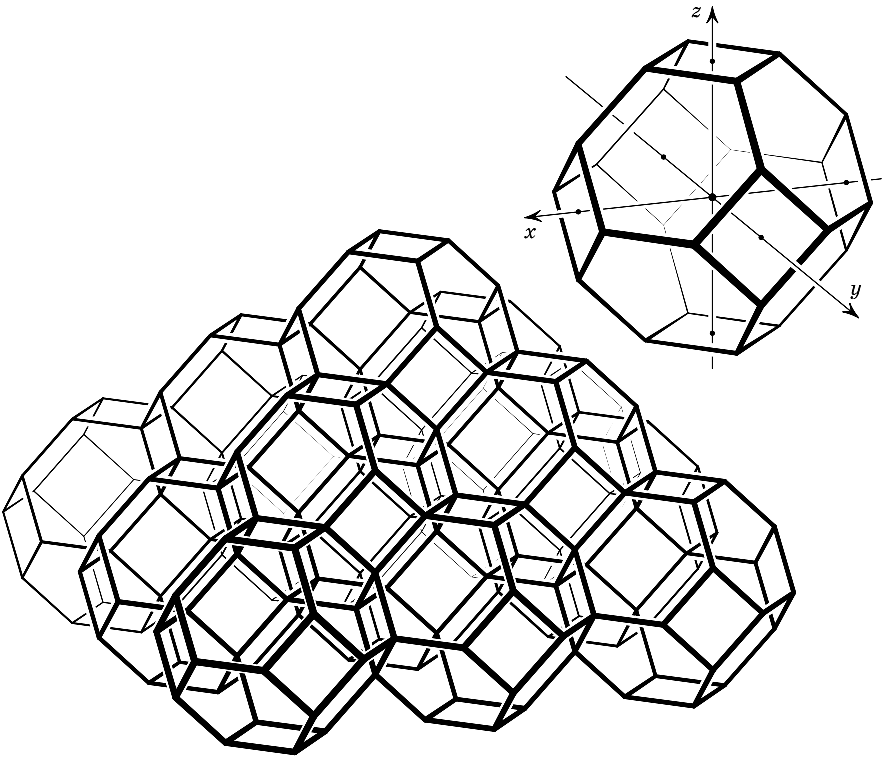

Рис. 11

и порождённая естественным базисом из векторов (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1).

Определение. *Разбиением пространства на многогранники* называется бесконечное множество $\mathscr{T}$, состоящее из таких (многогранных) тел T_1, T_2, ..., что их объединение $T_1 \cup T_2 \cup \ldots$ совпадает со всем $\mathbb{R}^3$ и что любые два из них пересекаются, как максимум, по элементам границы (граням, рёбрам и вершинам).

Определение множества Вороного, отвечающего точке решётки Λ, даётся в точности так же, как это было сделано и в случае плоскости. Только теперь множество Вороного — это многогранник (докажите это). Имеет место теорема, которая обобщает теорему о разбиении плоскости на многоугольники и которую мы тем более в этой брошюре доказывать не будем.

Теорема. Какова бы ни была решётка Λ в пространстве, множество всех многогранников Вороного, отвечающих элементам $\vec{x} \in \Lambda$, образует разбиение $\mathbb{R}^3$. Такое разбиение называется (*решётчатым*) *разбиением Вороного*.

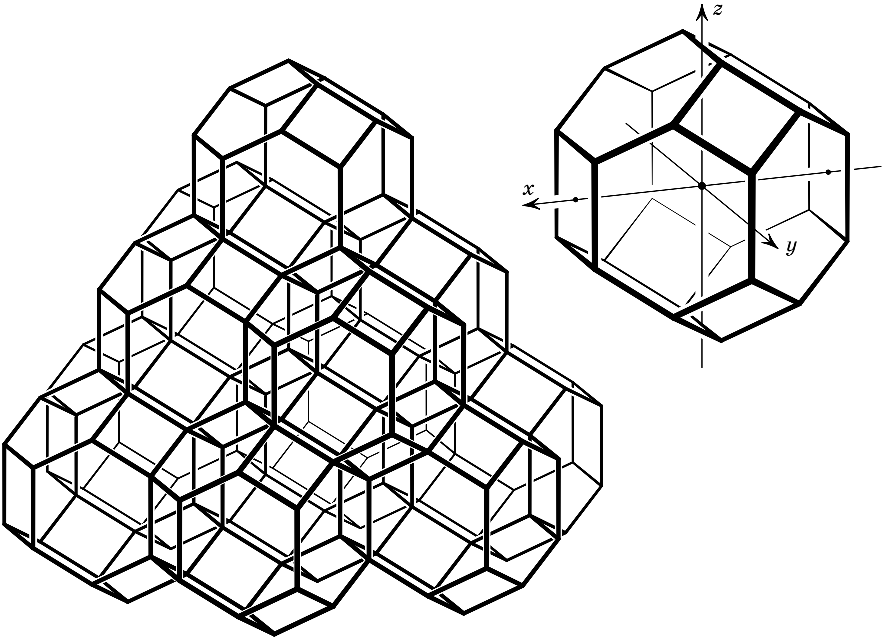

Рис. 12

Из теоремы вытекает общий рецепт построения раскраски: нужно взять какую-нибудь решётку Λ в $\mathbb{R}^3$ и по определённому правилу раскрасить её многогранники Вороного в достаточно маленькое число цветов. Дальнейшая проблема состоит в том, чтобы цвета оказались расположенными в верном порядке, т. е. чтобы, с одной стороны, сами многогранники имели, как говорят, диаметр (наибольшее расстояние между точками), меньший единицы, а с другой стороны, расстояние между многогранниками одного цвета было больше единицы. В этой брошюре мы не станем вдаваться в подробности того, как решается последняя проблема. Мы здесь заметим лишь, что оценка $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 27$ уже получена с помощью общего метода, поскольку кубы суть многогранники Вороного для решётки $\mathbb{Z}^3$. Заметим также, что оценка $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 21$, принадлежащая Сойферу (1996), может быть доказана за счёт рассмотрения решётки, порождённой базисом из векторов $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$; оценка $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 18$, найденная Кулсоном в 1997 году, следует из свойств разбиения Вороного для решётки с базисом $(1, 0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 0, 1)$, а результат теоремы V обусловлен структурой решётки, построенной на векторах

$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$. Наконец, на рис. 10—12 изображены многогранники Вороного, отвечающие перечисленным разбиениям (решёткам).

Замечая напоследок, что средствами геометрии чисел можно доказать неулучшаемость кулсоновского неравенства $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 15$ при помощи решётчатых разбиений пространства, мы приходим, в частности, к следующим интересным и важным задачам.

7. Попробуйте получить по возможности лучшую нижнюю оценку для минимального числа цветов в раскраске $\mathbb{R}^3$, при которой каждый цвет обладает надлежащим свойством с запретом расстояния и при этом является объединением многогранников.

8. Можно ли усилить оценку $\chi(\mathbb{R}^3)\leqslant 27$ за счёт рассмотрения раскрасок кубами?

9. Попытайтесь раскрашивать пространство многогранниками того или иного типа. Сколько цветов, в зависимости от выбранного множества, придётся задействовать, и скольких цветов заведомо хватит? Можно ли придумать такой многогранник, чтобы цветов потребовалось, скажем, больше 30?

10. Постройте разбиение Вороного для решётки с базисом $(1, 0, 0)$, $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В предыдущих главах мы весьма подробно изучили задачу Эрдёша—Хадвигера в пространствах, с которыми мы, в принципе, достаточно хорошо знакомы: обычные школьные курсы планиметрии и стереометрии уже содержат в себе всю необходимую информацию об их природе, да и повседневной интуиции вполне хватает для того, чтобы слова «размерность 1» или, скажем, «размерность 3» не вызывали какого-либо недоумения. Однако в математике часто возникают (и активно используются) различные объекты, определение которых не предполагает наличия в той или иной степени конкретных образов, которыми можно было бы оперировать, имея целью дать себе максимально наглядное, «жизненное» (т. е. имеющее аналог в окружающем нас мире) представление об этих объектах. Такие объекты носят обыкновенно вполне абстрактный характер, и человеку, не подготовленному к встрече с ними, может показаться странной сама идея их рассмотрения. На самом же деле, огромное количество совершенно реальных, «прикладных» задач зачастую сводится как раз к исследованию свойств подобного рода «невообразимых» конструкций и понятий. Более того, у специалистов, работающих с этими понятиями, появляется особая интуиция, которая уже полностью отвлечена от повседневных образов и опирается лишь на внутреннее ви́дение соответствующей концепции.

Тем самым, определения и термины, которые нам понадобятся, мы постараемся ввести наименее формальным способом, так как для понимания сути проблемы хроматических чисел требуется совсем немного.

Итак, мы хотим сформулировать задачу Эрдёша—Хадвигера в том изначальном — «классическом» — виде, в каком она была поставлена своими авторами. Для этого нам понадобится понятие *n-мерного евклидова пространства*, которое, памятуя о прежних обозначениях, мы будем записывать в виде выражения $\mathbb{R}^n$, указывая в верхнем индексе на размерность. В сущности, само понятие вводится крайне просто: фактически, $\mathbb{R}^n$ — это есть множество всех возможных наборов из n вещественных чисел («координат» или «компонент») $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — «векторов» (или «точек») $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, снабжённое «расстоянием»

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2},$$

где, естественно, $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ есть прямое обобщение для $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Как видно, даже будучи прямым обобщением известных конструкций, «геометрически» $\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant 4$ становится чем-то малоосязаемым и, безусловно, абстрактным. Тем не менее, научиться работать с таким объектом, даже не имея чисто геометрической интуиции его внутренней структуры, не так уж сложно: в нашей ситуации на помощь здесь приходит комбинаторика, и это обстоятельство может служить одним из обоснований термина «комбинаторная геометрия», с которого мы начали нашу брошюру.

Коль скоро мы знаем, что такое $\mathbb{R}^n$, понятна и постановка задачи Эрдёша—Хадвигера: как всегда, необходимо отыскать величину $\chi(\mathbb{R}^n)$, равную минимальному числу цветов, в которые можно так раскрасить всё n-мерное пространство, что одноцветных точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1, существовать не будет. Заметим, как и в начале брошюры, что расстояние 1 в определении хроматического числа играет лишь условную роль: оно без труда заменяется любым другим положительным расстоянием, и значение величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ от этого никак не зависит. Для удобства изложения упомянутое расстояние мы будем в дальнейшем называть «критическим» или «запрещённым».

Ясно, что раз задача была трудной уже в размерностях 2 и 3, то ожидать упрощения ситуации при условии неограниченного возрастания величины n отнюдь не приходится. Прежде чем приступать к подробному обсуждению и доказательству известных (и объяснению неизвестных, но предполагаемых гипотетически) результатов, мы вкратце изложим их. В следующей таблице приведены верхние и нижние оценки для $\chi(\mathbb{R}^n)$ в размерностях n, $4 \leqslant n \leqslant 15$. Кроме того, в таблице указаны фамилии авторов оценок и годы появления в печати соответствующих публикаций*).

n	$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant$	Автор, год	$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant$	Автор, год
4	6	Д. Е. Райский, 1971	49	Д. Кулсон, 2002
5	8	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	4^5	фольклор
6	10	А. М. Райгородский, 2000	4^6	фольклор
7	15	А. М. Райгородский, 2000	4^7	фольклор
8	16	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	4^8	фольклор
9	16	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	5^9	фольклор
10	19	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	5^{10}	фольклор
11	20	А. М. Райгородский, 2000	5^{11}	фольклор
12	24	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	5^{12}	фольклор
13	31	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	5^{13}	фольклор
14	35	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	5^{14}	фольклор
15	37	Д. Ларман и К. А. Роджерс, 1972	5^{15}	фольклор

В таблицу вошли результаты для $n \leqslant 15$. По-видимому, нет смысла пытаться распространить эту таблицу на бо́льшие значения n. Вернее, это, конечно, можно сделать, но в любом случае где-нибудь рано или поздно придётся остановиться. Другое дело, что очень интересно попробовать понять, как устроены верхние и нижние оценки для хроматического числа, когда n не есть фиксированная константа, а когда n неограниченно возрастает. Иными словами, разумно постараться записать оценки в виде $u(n) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant v(n)$, где $u(n)$ и $v(n)$ суть функции от n. И здесь хронологическая последовательность результатов такова. В 1971 году Д. Е. Райский, с именем которого мы уже сталкивались прежде, показал, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant n+2$ (заметьте, что при $n=2$ упомянутая оценка отвечает теореме братьев Мозеров, а при $n=3$ — это результат всё того же Райского). В 1972 году два выдающихся английских математика Д. Ларман и К. А. Роджерс установили, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant c_1 n^2$, где c_1 — вполне конкретная константа, не зависящая от размерности (значение c_1 мы выпишем позже). В 1978 году Д. Ларман улучшил последний результат, заменив его неравенством $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant c_2 n^3$. Наконец, в 1981 году П. Франкл и Р. Уилсон совершили настоящий прорыв, доказав свою знаменитую теорему, о которой в надлежащем месте мы скажем несколько

*) Оценки, авторство которых мы приписываем фольклору, разумеется, крайне слабы, и нет сомнений в том, что они могут быть значительно улучшены. Однако похоже, что за эту неблагодарную работу ещё никто не брался.

слов и из которой, в частности, вытекает оценка вида $\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant\geqslant\gamma_1\cdot 1{,}207^n$ ($\gamma_1>0$ — конкретная константа). В действительности, запись оценки может быть слегка уточнена, но, по-существу, нам хватит и этого*). Неравенство Франкла—Уилсона удалось слегка усилить лишь спустя почти 20 лет после его появления: соответствующий факт был обнаружен автором этой брошюры, и состоит он в том, что $\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant\gamma_2\cdot 1{,}239^n$. Опять-таки мы не приводим здесь это утверждение в своём самом точном виде.

После всего сказанного выше у читателя может возникнуть совершенно резонный вопрос: а что же с верхними оценками для хроматических чисел? Не окажется ли так, что и вовсе, несмотря на уже установленную нами ограниченность величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ при $n\leqslant 3$, в каких-нибудь бо́льших размерностях она сделается бесконечной (т. е. будет иметь место равенство $v(n)=\infty$, означающее, что при некотором n, какое бы конечное число цветов v мы ни взяли, раскрасить с помощью них всё $\mathbb{R}^n$ надлежащим образом не получится)? Вопрос тем более резонен, что в случае положительного на него ответа (или даже гипотетической возможности такового) значимость теорем, упомянутых выше, несколько блёкнет: ведь в сравнении с бесконечностью и степенная функция, и экспонента мало отличаются друг от друга. Утешительным обстоятельством является то, что, конечно, хроматические числа всегда ограничены. Легче всего обосновать оценку $\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant(4[\sqrt{n}+1])^n$, и мы не преминём сделать это, когда перейдём к детальному обсуждению (а не перечислению) результатов. Эта оценка настолько естественно обобщает уже заготовленные нами в предыдущих главах факты, что приписывать её какому-либо автору не принято. В то же время она существенно разнится с самой лучшей из нижних**), и потому для её улучшения были предприняты абсолютно оправданные усилия: в 1972 году Ларман и Роджерс показали, что $\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant\gamma_3\cdot 3{,}001^n$. Как всегда, для большей прозрачности мы не выписываем оценку в самом точном виде.

Итак, хроматическое число «зажато» между двумя экспонентами: $\gamma_2\cdot 1{,}239^n\leqslant\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant\gamma_3\cdot 3{,}001^n$; эти экспоненты никто в настоящий

*) Слово «прорыв» здесь отнюдь не случайно: тот, кто хотя бы немного знаком с теорией пределов, знает, что функция вида c^n при $c>1$ (такая функция называется «экспонентой») растёт «быстрее» любой степенной, т. е. что для любого фиксированного $k\in\mathbb{R}$ выполнено соотношение $n^k/c^n\to 0$ при $n\to\infty$. Иначе говоря, оценка Франкла—Уилсона не только лучше при достаточно больших n, чем оценки Лармана и Роджерса, но она заведомо превосходит всякую оценку схожего вида. «Эмпирически», т. е. опытным путём, убедиться в этом может каждый — даже если слово «предел» для него ново. Попробуйте, например, сопоставить n^{100} и $1{,}207^n$, и вы увидите, что, начиная с некоторого n_0, значения второй функции станут всё быстрее и быстрее увеличиваться по сравнению со значениями первой. То же самое произойдёт и для n^{1000} (по отношению к экспоненте), и для $n^{1000000}$, и т. д.

**) Здесь вновь правильнее было бы говорить в терминах теории пределов, но и компьютерного счёта достаточно, чтобы увидеть, насколько быстрее, чем экспонента, растёт функция $(4[\sqrt{n}+1])^n$.

момент ничем лучшим заменять не умеет, а главная проблема состоит, разумеется, именно в «сближении» верхней и нижней оценок. В дальнейшем об этой проблеме мы ещё поговорим.

Доказательство теоремы Райского: $\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant n+2$

Коль скоро мы уже умеем обосновывать аналогичные результаты при фиксированных $n=2$ и 3, логично предположить, что и в случае произвольной размерности метод, с помощью которого доказывается теорема Райского, напоминает своих «маломерных» предшественников. В действительности, так оно и есть. Проблема, однако, заключается в том, что, не имея, скажем, четырёхмерной интуиции, мы не можем без определённой подготовки сказать, что является аналогом иглы в $\mathbb{R}^4$, и т. д. Дабы разобраться с этой проблемой, давайте подумаем: а в чём состоит сходство между конструкциями братьев Мозеров и Райского (т. е. между двумерным и трёхмерным веретеном)? Ответ напрашивается сам собой: для построения игл, а стало быть, и веретена на плоскости мы использовали правильные треугольники с длинами сторон 1; для соответствующего построения в пространстве $\mathbb{R}^3$ мы прибегли к помощи правильных тетраэдров с единичными рёбрами. Естественно, тем самым, попробовать обобщить понятия (правильных) треугольников и тетраэдров на размерности $n\geqslant 4$.

Определение. Если расстояние между любыми двумя точками из множества точек $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}$, лежащих в пространстве $\mathbb{R}^n$, равно одному и тому же фиксированному числу (например, единице), то говорят, что $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n+1}$ суть вершины *правильного n-мерного симплекса*. Сам симплекс представляет собой «выпуклую оболочку» своих вершин, т. е. множество всех векторов $\vec{x}$, которые можно записать в виде $\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1}$, где $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$, $\ldots$, $\lambda_{n+1}\geqslant 0$ и $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n+1}=1$*).

Привести пример правильного симплекса (и, таким образом, доказать, по крайней мере, корректность определения) ничего не стоит: достаточно взять, скажем, множество вершин $\vec{x}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)$, $\vec{x}_2=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)$, $\ldots$, $\vec{x}_n=\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{x}_{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{1+n}}{n\sqrt{2}}, \frac{1+\sqrt{1+n}}{n\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1+\sqrt{1+n}}{n\sqrt{2}}\right)$. Кроме того, тот факт, что множество вершин правильного симплекса есть прямой аналог

*) Запись $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1}$ подразумевает, как и прежде, что векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\ldots$, $\vec{x}_{n+1}$ представлены в координатной форме, что каждую координату вектора $\vec{x}_i$ мы домножаем на число λ_i и что затем сложение векторов мы производим покомпонентно.

множества вершин правильного треугольника, а равно и множества вершин правильного тетраэдра, очевиден без дальнейших пояснений: всякий раз попарные расстояния между векторами, образующими упомянутые множества, совпадают друг с другом, причём и впрямь у треугольника ($n=2$) число вершин есть $2+1=3$, а у тетраэдра ($n=3$) оно равно $3+1=4$. Остаётся осознать, что треугольник с тетраэдром, действительно, получаются как выпуклые оболочки множеств своих вершин, и это мы предлагаем сделать читателю самостоятельно. Заметим ещё, что понятие выпуклой оболочки играет весьма значительную роль в геометрии. Заметим, наконец, что одномерный симплекс — это отрезок.

k-мерной гранью (n-мерного) симплекса называется выпуклая оболочка любой совокупности $k+1 \leqslant n$ вершин, выбранных из множества $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n+1}$. Ясно, что всего у симплекса столько k-мерных граней, сколькими способами такой выбор можно осуществить. Число этих способов равно биномиальному коэффициенту $C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$. Рёбрами симплекса называют одномерные грани-отрезки*).

В целом, геометрия симплекса довольно красива, и на её примере вполне можно почувствовать, что собой представляют многомерные задачи. Сравнивая известные характеристики треугольников и тетраэдров с аналогичными характеристиками для симплексов произвольной размерности, легко понять, насколько геометрично $\mathbb{R}^n$, даже несмотря на отсутствие у нас изначальной интуиции. Вообще, можно было бы ещё долго обсуждать аналогии между «маломерными» и «многомерными» ситуациями. Однако нашей целью является доказательство теоремы Райского, и к нему мы теперь практически готовы перейти.

Рассмотрим симплекс $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ (скажем, тот, координаты вершин которого мы уже выписывали ранее; во всяком случае, мы предполагаем, что длина каждого ребра этого симплекса равна 1**)) и зафиксируем одну (любую) из его граней размерности $n-1$: допустим, это будет грань $A_1A_2\ldots A_n$. Пользуясь исключительно координатной записью векторов в нашем n-мерном пространстве, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма. Помимо симплекса $A_1A_2\ldots A_{n+1}$, существует ровно один (правильный) симплекс $A_1A_2\ldots A_nA'_{n+1}$, имеющий общую грань $A_1A_2\ldots A_n$ с исходным. Если называть объединение двух упо-

*) Проверьте корректность сказанного, т. е. примените определение к треугольнику и тетраэдру и убедитесь в том, что понятие ребра-отрезка отвечает интуитивно очевидному.

**) Ясно, что «длина ребра» — это попросту расстояние между точками A_i и A_j, выпуклой оболочкой которых это ребро является, т. е. длина ребра — это длина отрезка A_iA_j.

мянутых симплексов — «многогранник» $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}A'_{n+1}$ — «иглой», то найдётся другая игла $A'_{n+1}B_1B_2\ldots B_nB_{n+1}$, такая, что у неё с первой иглой есть в точности одна общая вершина A'_{n+1} и что расстояние между вершинами A_{n+1} и B_{n+1} равно 1.

Мы оставляем несложное доказательство леммы читателю. Заметим также, что появившееся в формулировке леммы определение иглы (да и вся лемма) наиболее естественным образом обобщает соответствующие объекты (и факты) из малых размерностей.

Вспоминая теперь, что мы в размерностях 2 и 3 называли (M, D)-критической конфигурацией, легко понять, как такой объект должен быть определён в $\mathbb{R}^n$ (см. соответствующую главу, где всё полностью аналогично). Более того, нетрудно проверить, что множество точек A_1, A_2, ..., A_{n+1}, A'_{n+1}, B_1, B_2, ..., B_{n+1} образует $(2n+3, 2)$-критическую конфигурацию, а стало быть, по стандартным соображениям,

$$\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant\left[\frac{2n+3}{2}\right]+1=n+2,$$

и теорема Райского доказана.

Доказательство теоремы Лармана—Роджерса: $\chi(\mathbb{R}^5)\geqslant 8$

Доказывая теорему Райского, мы, безусловно, спокойно могли обойтись без каких-либо геометрических определений, рассуждений и аналогий: в принципе, нам достаточно было бы выписать все векторы A_1, A_2, ..., A_{n+1}, A'_{n+1}, B_1, B_2, ..., B_{n+1} в координатной форме и сослаться на свойства критических конфигураций. Тем не менее, мы намеренно пошли по более трудному пути: во-первых, только на том пути можно было реально понять пружины доказательства (формалистика исключительно вредит пониманию «кухни» и отбивает — по крайней мере на первых порах — способность к самостоятельному мышлению и проникновению в суть предмета, без осознания которой вряд ли возможно дальнейшее творчество), а во-вторых, со столь геометричной ситуацией*) нам уже столкнуться, по-видимому, не удастся. Познакомившись однажды с глубокой геометрической подоплёкой «многомерной» деятельности и заполучив, тем самым, некий опыт и интуицию, мы откажемся теперь от чисто геометрической почвы и постараемся научиться извлекать максимальную пользу из комбинаторной интерпретации задачи.

Для удобства будем называть $(0, 1)$-векторами в $\mathbb{R}^n$ любые векторы, координаты которых могут принимать всего два различных значения — 0 и 1. В пятимерном пространстве рассмотрим следующее семейство Σ из 16-ти $(0, 1)$-векторов: в Σ лежит вектор

*) При доказательстве нижних оценок.

из одних нулей («начало координат» (0, 0, 0, 0, 0)), все $C_5^2=10$ векторов с двумя единицами (векторы (1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1) и т. д.) и все $C_5^4=5$ векторов с четырьмя единицами. Как всегда, мы хотим показать, что Σ есть (M, D)-критическая конфигурация с достаточно большим отношением величины M к величине D, причём сразу ясно, что $M=16$. Для нахождения величины D мы впервые воспользуемся тем обстоятельством, что в качестве «запрещённого расстояния» в определении хроматического числа вовсе не обязательно брать единицу. На сей раз мы положим это расстояние равным $\sqrt{2}$ и сообразно этому будем трактовать само понятие критической конфигурации.

Очень удобно интерпретировать (0, 1)-векторы и расстояния между ними в чисто комбинаторных терминах. Для этого полезно ввести в рассмотрение конечное множество, состоящее из n (в данном случае $n=5$) различных элементов. Такое множество мы будем обозначать $\mathcal{R}_n$ и зачастую представлять его себе как отрезок натурального ряда (множества всех натуральных чисел): например, можно считать, что $\mathcal{R}_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ или что $\mathcal{R}_n=\{3, 4, \ldots, n+2\}$, и т. д. Если мы захотим уточнить, о каком именно отрезке идёт речь, мы напишем $\mathcal{R}_{i,j}$, подразумевая множество $\{i, \ldots, j\}$, т. е. множество, состоящее из всех натуральных чисел от i до j включительно. Таким образом, $\mathcal{R}_n=\mathcal{R}_{i,i+n-1}$, где i — произвольное число, зависящее от контекста.

Каждому (0, 1)-вектору $\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы сопоставляем подмножество $M=M_{\vec{x}}$ в $\mathcal{R}_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ по принципу: если $x_i=1$, то мы «кладём» i в наше M; иначе — не кладём. Более формально, $M=\{i\in\mathcal{R}_n\colon\ x_i=1\}$. В результате связь между векторами и множествами получается взаимно однозначной. Кроме того, расстояния между векторами однозначно интерпретируются мощностями пересечений соответствующих множеств и наоборот, т. е. $|\vec{x}-\vec{y}|=a$ тогда и только тогда, когда $\#(M_{\vec{x}}\cap M_{\vec{y}})=b$, где между числами a и b существует известная зависимость.

В частности, векторам из Σ отвечают множества из такой совокупности $\mathcal{M}=\{M_1, \ldots, M_{16}\}$, что среди множеств M_i есть ровно одно (единственно возможное) «пустое» (оно получается из вектора (0, 0, 0, 0, 0)), ровно 10 (всевозможных) двухэлементных и ровно 5 (всевозможных) четырёхэлементных. Запрещённому расстоянию отвечают, в свою очередь, следующие мощности пересечений (проверьте!):

1) если $\#M_i=0$, $\#M_j=2$, то $\#(M_i\cap M_j)=2$;
2) если $\#M_i=2$, $\#M_j=2$, то $\#(M_i\cap M_j)=1$;
3) если $\#M_i=4$, $\#M_j=2$, то $\#(M_i\cap M_j)=2$;
4) если $\#M_i=4$, $\#M_j=4$, то $\#(M_i\cap M_j)=3$.

Исходя из условий 1)—4), простым перебором ситуаций нетрудно показать, что какова бы ни была подсовокупность множеств $\mathscr{M}'$ в $\mathscr{M}$, свободная от запрещённых пересечений, мощность её не будет превосходить двух. В самом деле, достаточно заметить, что $\mathscr{M}'$ не может одновременно содержать два различных четырёхэлементных множества (условие 4)), что вместе с пустым множеством она не может содержать ни одного двухэлементного (условие 1)) и что если в ней имеется четырёхэлементное множество, то сразу двух двухэлементных множеств в ней уже не окажется (условия 2) и 3)). Но тогда в силу взаимной однозначности соответствия между множествами и векторами последнее обстоятельство немедленно влечёт неравенство $D \leqslant 2$. Следовательно, $\chi(\mathbb{R}^5) \geqslant M/D = 8$, и теорема Лармана—Роджерса доказана.

Доказательство теоремы Лармана—Роджерса: $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant c_1 n^2$ и обсуждение методов её усиления

Настало время конкретизировать значение константы c_1, и для этого мы сформулируем теорему Лармана—Роджерса ещё раз — в самом точном виде.

Теорема Лармана—Роджерса. Пусть $n \geqslant 2$. Тогда имеет место оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant C_{n+1}^3 / n'$, где, в свою очередь,
$n' = n$, если $n = 4q$, $q \in \mathbb{N}$, т. е. n делится на 4 нацело;
$n' = n - 1$, если $n = 4q + 1$ или $n = 4q + 2$, $q \in \mathbb{N}$;
$n' = n + 1$, если $n = 4q + 3$, $q \in \mathbb{N}$.

Во-первых, очевидно, что в утверждении теоремы исчерпаны все возможные ситуации, ведь и впрямь либо $n = 4q$, либо $n = 4q + 1$, либо $n = 4q + 2$, либо $n = 4q + 3$. Во-вторых, ясно, как в зависимости от величины остатка при делении n на 4 выглядит c_1. Вернее, можно слегка «огрубить» результат и записать его в форме

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \frac{(n+1)n(n-1)}{6n'} \geqslant \frac{n(n-1)}{6} \geqslant \frac{n^2}{12}$$

(здесь мы использовали тот факт, что, с одной стороны, $n' \leqslant n + 1$, а с другой, $n \geqslant 2$ и, стало быть, $n(n-1) = n^2 - n \geqslant n^2/2$). Конечно, в действительности $c_1 \approx 1/6$, в то время как мы только что удовольствовались одной двенадцатой, но это и не столь принципиально: всё равно реально мы будем применять саму теорему*), вычислять биномиальный коэффициент и т. д., а c_1 (не важно уж, меньше она одной шестой или нет) есть просто элемент стандартной (более удобной и короткой) записи.

Перейдём теперь к изложению сути того механизма, который лежит в основе доказательства неравенств Лармана—Роджерса. В целом, идея здесь та же, что и в случае с оценкой $\chi(\mathbb{R}^5) \geqslant 8$,

*) См. таблицу оценок при $n = 10$, 12, 13, 14, 15.

подробно изученной в предыдущем параграфе. Иными словами, нам следует, как обычно, воспользоваться концепцией (M, D)-критической конфигурации с некоторым критическим расстоянием, причём в качестве искомой конфигурации мы выбираем систему $(0, 1)$-векторов с подходящими свойствами. Итак, рассмотрим множество $(n+1)$-мерных векторов

$$\Sigma=\{\vec{x}=(x_1, \ldots, x_{n+1}):\\ x_i\in\{0, 1\}\ \forall\ i=1, \ldots, n+1;\quad x_1+\ldots+x_{n+1}=3\}.$$

На первый взгляд, может показаться немного странным то, что, желая работать с n-мерным евклидовым пространством и, соответственно, с n-мерными конфигурациями, мы тем не менее рассматриваем систему векторов с числом координат, на единицу большим ожидаемого. В конечном счёте, формальное объяснение должно опираться на представление о том, что такое подпространства («плоскости») меньшей размерности в $\mathbb{R}^n$. Кое-какие понятия подобного рода ещё возникнут в задачах в конце следующего параграфа. Сейчас же, дабы чересчур не заострять внимание на деталях, можно либо считать, что мы слегка ослабили оценку и доказываем её не в $\mathbb{R}^n$, а в $\mathbb{R}^{n+1}$, либо «на пальцах» обосновать n-мерность конструкции, исходя из тех соображений, что в определении множества Σ сумма координат каждого из векторов, принадлежащих множеству, фиксирована (равна 3) и что, следовательно, одна из координат находится в жёсткой зависимости от остальных: если вспомнить, что, скажем, на плоскости это бы означало попадание Σ на прямую, а в пространстве — на плоскость, то положение дел становится гораздо более ясным.

Дальнейшая деятельность вполне аналогична деятельности из предшествующей части этой главы. Понятно, что, какое бы критическое расстояние мы впоследствии ни фиксировали, уж заведомо (для Σ) $M=C_{n+1}^3$, и, таким образом, очевидна природа числителя в оценке $\chi(\mathbb{R}^n)$, указанной в теореме. Для отыскания знаменателя, т. е. величины D в критической конфигурации, нужно, естественно, задаться некоторым запрещённым расстоянием: положим таковое равным 2. Проинтерпретируем Σ посредством известной нам комбинаторики: возьмём $\mathcal{R}_{n+1}$ и установим стандартное соответствие между семейством векторов Σ и совокупностью $\mathcal{M}$ всех трёхэлементных подмножеств множества $\mathcal{R}_{n+1}$. Тогда запрещённому расстоянию между векторами будет однозначно отвечать пересечение множеств по одному общему элементу.

Лемма. Если произвольная подсовокупность множеств $\mathcal{M}'$ в совокупности множеств $\mathcal{M}$ обладает тем свойством, что любые два множества M_1, M_2, принадлежащие ей, не пересекаются между собой ровно по одному элементу (т. е. либо $\#(M_1\cap M_2)=2$, либо $\#(M_1\cap M_2)=0$), то $\#\mathcal{M}'\leqslant n'$.

Доказать лемму не слишком трудно при помощи метода математической индукции. Чтобы не загромождать эту брошюру излишними подробностями, мы не приводим этого доказательства. Мы надеемся, что заинтересованный читатель постарается обосновать лемму самостоятельно: такая комбинаторика возникнет и при обсуждении возможностей усиления теоремы Лармана—Роджерса, так что прочувствовать её полезно. Сама теорема уже фактически доказана: достаточно лишь заметить, что из леммы и из прямого соответствия между множествами и векторами вытекает равенство $D=n'$.

За счёт чего разумно пытаться усиливать полученный результат? В принципе, можно было бы надеяться на уточнение оценки в лемме. Однако на этом пути нас ждёт разочарование: оценка и без того точна в том плане, что найдётся совокупность $\mathscr{M}'$ трёхэлементных подмножеств в $\mathscr{R}_{n+1}$, такая, что все надлежащие ограничения на мощности попарных пересечений её элементов выполнены и что в то же время $\#\mathscr{M}'=n'$. Примером может служить следующая конструкция. Пусть $t=\left[\frac{n+1}{4}\right]$. Тогда $4t\leqslant n+1$, а $4(t+1)>n+1$, т. е. либо $n+1=4t$, либо $n+1=4t+1$, либо $n+1=4t+2$, либо $n+1=4t+3$. Разобьём $\mathscr{R}_{4t}=\{1, 2, \ldots, 4t\}\subseteq\mathscr{R}_{n+1}$ на t последовательных непересекающихся четырёхэлементных частей $\mathscr{R}_{1,4}$, $\mathscr{R}_{5,8}$, …, $\mathscr{R}_{4t-3,4t}$, а $\mathscr{R}_{n+1}$ представим, соответственно, в виде $\mathscr{R}_{n+1}=\mathscr{R}_{4t}\cup\mathscr{R}$, где, в зависимости от ситуации, $\#\mathscr{R}=i$, $0\leqslant i\leqslant 3$. Пусть $\mathscr{M}_j$, $j=1, 2, \ldots, t$, — это совокупность всех (четырёх) трёхэлементных подмножеств множества $\mathscr{R}_{4j-3,4j}$. Пусть, кроме того, $\mathscr{M}_{t+1}$ определена тогда и только тогда, когда $\#\mathscr{R}=3$, причём определена она попросту как $\mathscr{M}_{t+1}=\{\mathscr{R}\}$ (в $\mathscr{M}_{t+1}$ ровно один элемент). Тогда $\mathscr{M}'$ мы положим либо равным $\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2\cup\ldots\cup\mathscr{M}_t$, либо равным $\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2\cup\ldots\cup\mathscr{M}_{t+1}$. Все множества в $\mathscr{M}'$ трёхэлементны, попарные их пересечения устроены как положено, а количество их есть $4t$ или $4t+1$, что, как нетрудно проверить, совпадает с n'*).

Коль скоро лемма нам не помощник и усилить её не удаётся, нужно искать иной путь к улучшению оценок. Оказывается, такой путь состоит в обобщении конфигурации Σ. Так, например, результат Лармана 1978 года ($\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant c_2n^3$) использует множество векторов

$$\Sigma=\{\vec{x}=(x_1, \ldots, x_{n+1})\colon x_i\in\{0, 1\}\ \forall\ i=1, \ldots, n+1;\ x_1+\ldots+x_{n+1}=5\}.$$

Это множество является (M, D)-критичной конфигурацией с запрещённым расстоянием $\sqrt{6}$, отвечающим мощности 2 пересечения

*) Мы неявно предполагали, что $n+1\geqslant 4$. Однако в меньших размерностях всё делается вообще мгновенно (убедитесь в этом).

пятиэлементных подмножеств $\mathcal{R}_{n+1}$, с $M=C_{n+1}^5$ и $D\leqslant \mathrm{const}\cdot n^2$. Доказательство последнего неравенства получается из аналога леммы, который и обосновывается более или менее схожим образом (но технически уже совсем нетривиально).

После всего сказанного становится видна общая стратегия дальнейших возможных усилений описанных оценок. Принято, в этой связи, рассматривать семейства (0, 1)-векторов вида

$$\Sigma=\{\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n):\ \ x_i\in\{0, 1\}\ \forall\ i=1, \ldots, n;\quad x_1+\ldots+x_n=a\},$$

где $a=a(n)$ — произвольное (возможно, зависящее от размерности, но фиксированное при каждом n) натуральное число, меньшее, чем n. Здесь $M=C_n^a$, а D определяется величиной запрещённого расстояния — тоже неким параметром $l=l(n)$, удовлетворяющим естественным ограничениям вида $l>0$ или $l\leqslant 2a$ и т. д. Понятно, что зависимость D от l и прочих факторов должна вытекать из леммы, в которой бы максимально точным образом оценивалась сверху мощность произвольной совокупности a-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, такой, что любые два множества в ней не имеют права обладать конкретной мощностью пересечения (эта мощность пересечения однозначно отвечает значению параметра l, и читателю предлагается самостоятельно вывести формулу, позволяющую по размерности, числу единичных координат в каждом векторе конфигурации и запрещённому расстоянию находить запрещённую мощность пересечения). Дабы не оставаться голословными, мы сформулируем самую сильную в отношении следствий для хроматических чисел лемму, которую как раз и доказали в 1981 году Франкл и Уилсон, обосновав, таким образом, «экспоненциальность» роста $\chi(\mathbb{R}^n)$. Эта лемма касается векторной конструкции с параметрами $a<n/2$ и $l=\sqrt{2p}$, где p — минимальное простое число, для которого $a-2p<0$, т. е. $p\approx a/2$*). Ясно, что запрещённое пересечение тут имеет мощность $a-p$, т. е. запрещать «полезнее» всего пересечения, мощность которых приблизительно равна половине мощности каждого из множеств.

Лемма (теорема Франкла—Уилсона). Если произвольная подсовокупность множеств $\mathcal{M}'$ в совокупности $\mathcal{M}$ всех a-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$ обладает тем свойством, что любые два множества M_1, M_2, принадлежащие ей, не пересекаются между собой ровно по $a-p$ элементам, то $\#\mathcal{M}'\leqslant C_n^{p-1}$.

Из леммы немедленно следует оценка $\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant \dfrac{M}{D}=\dfrac{C_n^a}{C_n^{p-1}}$, и, если максимизировать её по a, то мы и получим неравенство $\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant$

*) Заметим, что существование простого числа p с указанными свойствами — факт уже весьма нетривиальный. Его доказательство требует знания сложнейшего аппарата современной аналитической теории чисел. Для результата Франкла—Уилсона этот факт принципиален.

$\geqslant\gamma_1\cdot 1{,}207^n$. На самом деле, для понимания последнего утверждения необходимо записать биномиальные коэффициенты в виде выражений $C_x^y=\dfrac{x!}{y!\,(x-y)!}$, а затем приближать значения факториалов за счёт формулы Стирлинга: при достаточно больших x выполнено соотношение

$$x!\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

(здесь $\pi\approx 3{,}1415926$ и $e\approx 2{,}718281828$ — стандартные константы, а значок «$\sim$» — тоже стандартный — следует понимать в том смысле, что при неограниченном возрастании величины x отношение факториала к выражению, стоящему справа от значка, становится всё ближе и ближе к единице, т. е. в некотором роде $x!$ всё менее и менее отличается от своего приближения)*).

Теорема Франкла—Уилсона (лемма) является одной из «жемчужин» комбинаторики (или, дабы быть более точными, «экстремальной теории гиперграфов»**)). Её доказательство уже отнюдь не основано на методе математической индукции, как это было с теоремами Лармана—Роджерса и Лармана, оно поистине изящно и крайне нетривиально в том плане, что, будучи удивительно простым, оно в то же время опирается на столь неожиданную в данном контексте технику, что не вполне понятно, как вообще авторам удалось увязать её с искомым результатом. Одна из модификаций подхода Франкла—Уилсона была даже включена двумя известными современными математиками М. Айгнером и Г. Циглером в монографию под названием «Доказательства из КНИГИ». В этой монографии воплощена мысль Эрдёша о том, что у Бога есть некая КНИГА, в которой содержатся самые красивые доказательства математических утверждений и что изредка людям удаётся туда заглянуть. К сожалению, в рамках нашей брошюры обосновать лемму нам не удастся: потребовались бы чересчур многочисленные дополнительные пояснения тех понятий, которые всё же лучше воспринимаются студентами по крайней мере второго семестра первого курса. Отсылая заинтересованного читателя к оригинальным работам и обзорам (см. [1]), мы заметим лишь, что теорема

---

*) Более аккуратно о формуле Стирлинга можно говорить в терминах теории пределов. Сейчас же достаточно ограничиться и нестрогим пониманием ситуации. Попробуйте воспользоваться приведённой методикой, скажем, в случае, когда $n=4p$ (p — простое), $a=2p-1$: к таким параметрам теорема Франкла—Уилсона, безусловно, применима.

**) Гиперграф — это просто совокупность подмножеств конечного множества, а эпитет «экстремальный» употреблён из тех соображений, что интересующие нас задачи предполагают отыскание каких-либо экстремальных (т. е., например, максимальных или минимальных) конструкций и результатов: отыскание максимальной мощности совокупности с запретами на мощности попарных пересечений её элементов и др.

Франкла—Уилсона возникла далеко не только в связи с изучением хроматических чисел. Эта теорема есть лишь одна из многих в ряду тех, что относятся к уже упомянутой экстремальной теории гиперграфов. Не менее известной в этой науке является, скажем, теорема Эрдёша—Ко—Радо о том, что если k-элементные подмножества n-элементного множества попарно пересекаются и $k \leqslant n/2$, то таких подмножеств не может быть больше, чем C_{n-1}^{k-1}. Мы не будем вдаваться в дальнейшие подробности, но ещё раз подчеркнём, что описанная комбинаторика весьма красива, многообразна и, несомненно, достойна серьёзного внимания и тщательного изучения.

В заключение параграфа добавим, что конструкции автора этой брошюры, позволившие ему в 2000 году слегка улучшить оценку Франкла—Уилсона, принципиально отличаются ото всех, что были описаны выше: вместо (0, 1)-векторов в них рассматриваются (0, 1, —1)-векторы (т. е. векторы с тремя возможными значениями координат). В свою очередь, дополнительные видоизменения техники Франкла—Уилсона и др. дают известные усиления оценок для хроматических чисел. Отметим, кстати, что (0, 1, —1)-векторы уже не допускают столь наглядной интерпретации в терминах подмножеств конечного множества. Разумеется, можно говорить об «упорядоченных парах непересекающихся подмножеств в $\mathscr{R}_n$», но удобнее здесь оказывается работать непосредственно с векторами, запрещая не пересечениям, как то было в леммах, принимать конкретные значения, а скалярным произведениям, т. е. величинам $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Последнее обобщение, в действительности, абсолютно прозрачно, ведь для (0, 1)-векторов скалярное произведение и мощность пересечения соответствующих множеств, очевидно, совпадают.

11. Докажите, что в некотором смысле оценка в теореме Франкла—Уилсона неулучшаема (ср. обсуждение леммы Лармана—Роджерса), а именно: полагая, например, $n = 4p$ (p — простое), $a = 2p - 1$, можно построить совокупность $\mathscr{M}'$ a-элементных подмножеств n-элементного множества, которая бы обладала всеми необходимыми свойствами и в то же время имела мощность, допустим, $\mu(n)$, такую, что величина $\mu(n)$ отличается от значения верхней оценки, даваемой теоремой (т. е. от величины C_n^{p-1}) не более чем в $P(n)$ раз, где $P(n) = u_tn^t + u_{t-1}n^{t-1} + \ldots + u_1n + u_0$ — некоторый (конкретный) многочлен степени t, зависящий от переменной n. Впрочем, для начала найдите хотя бы какую-нибудь, по возможности лучшую, оценку снизу для подобного $\mu(n)$.

12. (Н е р е ш ё н н а я   п р о б л е м а.) Можно ли в условиях теоремы Франкла—Уилсона избавиться от требования простоты числа p? Сохранится ли при этом оценка? Если нет, то какая оценка будет точной?

13. Зафиксируйте какую-нибудь «маленькую» размерность n, например, $n=4$, 5, ..., 10 и т. д. Можно ли ожидать, что конструкции из $(0, 1)$-векторов дадут в этой размерности достаточно большую нижнюю оценку на хроматическое число? Иными словами, постарайтесь получить максимально хорошую верхнюю оценку для величины

$$\chi(\{0, 1\}^n) = \max_{\Sigma, l} \chi(\Sigma, l),$$

где Σ — произвольное семейство n-мерных $(0, 1)$-векторов, l — произвольное запрещённое расстояние, а $\chi(\Sigma, l)$ — это минимальное количество цветов, которые можно выбрать так, чтобы раскрасить все элементы из Σ с естественным условием: если какие-либо два элемента отстоят друг от друга на расстояние l, то они раскрашены в разные цвета. Ясно, что искомая оценка будет служить мерилом того, насколько, в действительности, разумно рассматривать именно системы $(0, 1)$-векторов для решения задачи Эрдёша—Хадвигера. Заметим, что об этой оценке известно довольно много. Однако точного результата здесь никто не знает.

14. Проделайте то же, что и в задаче 13, но для систем $(0, 1, -1)$-векторов (с запретами на скалярные произведения). Про такие системы, кстати, известно гораздо меньше. Ещё хуже устроена жизнь для систем общего вида — скажем, систем $(b_1, b_2, \ldots, b_t)$-векторов, т. е. векторов, у которых координатам разрешается принимать ровно t перечисленных значений: здесь имеются лишь многомерные оценки автора, так что возможность для творчества тут ничем не ограничена.

15. (Нерешённая проблема.) Постройте наилучшую (т. е. дающую наилучшие неравенства) критическую конфигурацию с помощью $(0, 1, -1)$-векторов. Гипотеза состоит в том, что конструкция, предложенная автором, отнюдь не оптимальна (см. [1]) и что, вообще говоря, улучшение техники обязано привести к весьма существенному усилению оценки $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \gamma_2 \cdot 1{,}239^n$.

Доказательство оценки $\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (4[\sqrt{n}+1])^n$ и обсуждение методов её усиления

Искомое доказательство, в конечном счёте, опирается на соображения, полностью аналогичные тем, что мы использовали при обосновании простейших «маломерных» оценок $\chi(\mathbb{R}^1) \leqslant 2$, $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 9$ и $\chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 27$. Однако вновь, как и при обсуждении теоремы Райского, мы сталкиваемся с необходимостью перенесения некоторых вполне стандартных понятий с размерностей 1, 2 и 3 на размерности $n \geqslant 4$, где одной обыденной интуицией, как правило (и к сожалению), обойтись не удаётся. Если для теоремы

Райского нам потребовалось понятие симплекса — обобщение понятий правильного треугольника и правильного тетраэдра, то для интересующей нас оценки нам нужно будет осознать, что́ представляет собой n-мерный куб — аналог отрезка на прямой, квадрата на плоскости и обычного куба в обычном же пространстве (нашей целью будет, естественно, «замощение» $\mathbb{R}^n$ кубами: ср. похожие доказательства при $n \leqslant 3$).

Вообще говоря, существует несколько эквивалентных определений n-мерного куба. Часть из них мы приведём в разделе задач в конце параграфа, и это, безусловно, будет способствовать возникновению лучшей геометрической интуиции у читателя. Сейчас же мы воспользуемся лишь одним из возможных определений — тем, которое наиболее удобно для обоснования неравенства $\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (4[\sqrt{n}+1])^n$. В любом случае, мы откажемся от чисто комбинаторного подхода и постараемся вернуться к классической геометрии.

Определение. *Единичным n-мерным кубом* (который мы обозначим $[0, 1]^n$) мы будем называть выпуклую оболочку множества всех 2^n $(0, 1)$-векторов в $\mathbb{R}^n$. Сами $(0, 1)$-векторы мы будем называть (в данном контексте) *вершинами* единичного куба. Произвольный куб (скажем, $\mathcal{K}$) будет тогда получаться из единичного посредством преобразований «растяжения» («сжатия») и параллельного переноса: $\mathcal{K} = k \cdot [0, 1]^n + \vec{x}$, где $k > 0$ — произвольный коэффициент, отвечающий за «растяжение» («сжатие»), а $\vec{x}$ — произвольный n-мерный вектор, за счёт которого осуществляется перенос. При этом равенство между множествами понимается в том смысле, что каждый вектор $\vec{y}$ в $\mathcal{K}$ может быть представлен в виде $\vec{y} = k\vec{z} + \vec{x}$, где, в свою очередь, $\vec{z} \in [0, 1]^n$ (и наоборот, $k\vec{z} + \vec{x} \in \mathcal{K}$ для каждого $\vec{z} \in [0, 1]^n$).

Понятно, что данное определение есть и впрямь точный аналог соответствующих одно-, двух- и трёхмерных, и читателю остаётся лишь с лёгкостью убедиться в этом (ср. задачи).

Рассмотрим «большой» куб $\mathcal{K}_1 = \dfrac{2[\sqrt{n}+1]}{\sqrt{n}} \cdot [0, 1]^n$ и «маленький» куб-«кирпичик» $\mathcal{K}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \cdot [0, 1]^n$. В дальнейшем посредством $\mathcal{K}_1$ мы замостим всё n-мерное пространство, а $\mathcal{K}_2$ будет отвечать за тот или иной цвет в искомой раскраске внутри каждого из больших кубов. В самом деле, фиксируя произвольный вектор вида $\vec{a} = \left(\dfrac{a_1}{2\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{a_n}{2\sqrt{n}}\right)$, a_i — целые и $0 \leqslant a_i \leqslant 4[\sqrt{n}+1] - 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, применим преобразование параллельного переноса к кубику $\mathcal{K}_2$: $\mathcal{K}_2 \mapsto \mathcal{K}_2 + \vec{a}$. Непосредственная проверка показывает, что в результате мы получим $(4[\sqrt{n}+1])^n$ копий нашего кирпичика, причём объединение этих копий совпадёт с $\mathcal{K}_1$. Каждую из полученных копий раскрасим в свой цвет. (Если какая-нибудь точка $\vec{x}\in\mathscr{K}_1$ попадает одновременно в несколько копий, то ей мы присвоим цвет произвольным образом.) Пользуясь исключительно одним определением расстояния в $\mathbb{R}^n$, убеждаемся, что между любыми двумя точками внутри всякого кирпичика расстояние не превосходит $1/2<1$. Теперь «разносим» раскраску куба $\mathscr{K}_1$ на всё пространство опять-таки с помощью параллельных переносов, последовательно добавляя к $\mathscr{K}_1$ всевозможные векторы вида $\vec{b}=(kb_1, \ldots, kb_n)$, где $b_1, \ldots, b_n$ — целые, а $k=2[\sqrt{n}+1]/\sqrt{n}$ (снова при неоднозначности выбираем цвет наугад). Ясно, что расстояние между точками одного цвета, лежащими в разных копиях большого куба, никак не меньше, чем $\frac{2[\sqrt{n}+1]}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}>1$, и, стало быть, $\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant(4[\sqrt{n}+1])^n$.

Известно два способа усиления только что доказанного неравенства. Первый способ состоит попросту в том, чтобы сделать слегка менее грубыми проведённые выше рассуждения. В связи с этим мы предлагаем читателю самостоятельно произвести надлежащие выкладки и убедиться в том, что $\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant(\sqrt{n}+2)^n$. Конечно, последняя оценка значительно (примерно в 4^n раз) лучше изначальной. Однако и она, по сути, столь же далека от оценки $\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant c\cdot 3{,}001^n$, которая, как мы помним, является наилучшей из обоснованных к настоящему времени. Оказывается, что методы геометрии чисел работают не только в размерностях $n\leqslant 3$, и второй способ нетривиального улучшения оценок хроматического числа опирается как раз на обобщение подробно изученной нами соответствующей техники на случай $n>3$. Иными словами, в любой размерности можно определить понятие решётки (по аналогии с тем, как это было сделано на плоскости и в $\mathbb{R}^3$), понятие многогранника и разбиения Вороного и, пользуясь достаточно сложными результатами Роджерса, Эрдёша и некоторых других авторов, организовать решётчатую раскраску в $c\cdot 3{,}001^n$ цветов. К сожалению, даже упомянутые определения (не говоря уже о результатах) носят более тонкий характер, чем все объекты, с которыми нам доводилось сталкиваться в этой брошюре: для их максимального прояснения потребовалось бы слишком много времени и места, и потому мы считаем возможным не рассматривать их подробно, а лишь ограничимся сделанным упоминанием. Заметим, наконец, что, по всей видимости, геометрико-числовые инструменты, используемые для отыскания верхних оценок на хроматическое число, не являются оптимальными*). Тем не менее, никто не знает,

*) Во всяком случае, нельзя надеяться на получение с их помощью оценки, лучшей, чем $\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant 2^{n+1}-1$ (Кулсон, 2000), хотя, безусловно, даже подобная оценка весьма далека от своего доказательства или опровержения. Кстати, при $n=2$ величина $2^{n+1}-1$ равна 7, а при $n=3$ равна 15 (см. сс. 11 и 19).

чем их следует заменить с целью дальнейшего продвижения в вопросе.

16. Докажите, что

$$[0, 1]^n=\{\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n):\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ \ i=1, \ldots, n\}.$$

17. Назовём гиперплоскостью в n-мерном пространстве множество всех векторов, координаты которых удовлетворяют соотношению $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$, где a_1, ..., a_n, b — некоторые вещественные числа, причём все $a_i\neq 0$, $i=1$, ..., n. Докажите, что всякая гиперплоскость может быть естественным образом отождествлена с $\mathbb{R}^{n-1}$.

18. Назовём l-мерной гранью ($0\leqslant l\leqslant n-1$) единичного n-мерного куба любое множество вида

$$[0, 1]^n\cap\{\vec{x}=(x_1, \ldots, x_n):\ x_{i_1}=\varepsilon_1, \ldots, x_{i_{n-l}}=\varepsilon_{n-l}\}.$$

Здесь i_1, ..., i_{n-l} — произвольный набор несовпадающих индексов, лежащих в пределах от 1 до n, а ε_j — либо 0, либо 1. Найдите число различных l-мерных граней единичного куба и убедитесь в том, что оно совпадает с соответствующими величинами, получающимися при $n=1$, 2, 3. Дайте естественное определение l-мерной грани произвольного куба $\mathscr{K}$.

19. Докажите, что в рамках приведённой нами раскраски $\mathbb{R}^n$ копии маленьких кубов либо не пересекаются, либо пересекаются между собой по граням какой-нибудь размерности l. То же самое — для больших кубов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ТЕОРИИ ГРАФОВ

В предыдущих главах мы изложили многие важные результаты, касающиеся проблемы Эрдёша—Хадвигера: кое-что мы просто сформулировали, кое-что доказали, кое-что предложили в качестве задач или и вовсе нерешённых проблем и гипотез. Теперь же в общих чертах обсудим глубокий математический контекст, в который, на самом деле, вкладывается наша проблема: с одной стороны, это позволит ещё лучше понять основную подоплёку нашей деятельности, с другой стороны, это даст возможность прочувствовать нетривиальные связи между различными разделами математики в целом и комбинаторики в частности.

Одной из наиболее бурно развивающихся математических теорий является теория графов. Прежде чем пояснить, что же такое, собственно, есть граф, мы заметим, не вдаваясь в подробности, что этот объект, во всей своей полноте начавший исследоваться приблизительно в середине XX века, возникает при постановке, решении и комбинаторно-геометрической интерпретации огромного числа современных задач науки. Про графы написано бесчисленное множество замечательных статей, монографий, популярных книг и учебников, и мы, естественно, не преследуем цель хоть в какой-то мере покрыть в рамках этой главы даже малую долю имеющихся фактов. Отсылая заинтересованного читателя к соответствующей литературе (см., скажем, [2]), мы только введём несколько необходимых нам определений и с их точки зрения прокомментируем понятие хроматического числа.

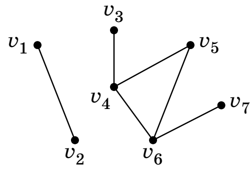

Рис. 13

Определение. *Графом* называется «пара» (V, E), где V — некоторое (произвольное) множество объектов v_i, природа которых нам, в принципе, не важна, а E — это некоторое множество (различных) пар (v_i, v_j) элементов V, причём мы считаем, что $(v_i, v_j)=(v_j, v_i)$ (т. е. что рассматриваемые пары «не упорядочены», а сам граф «не ориентирован») и что $(v_i, v_i)\notin E$ (т. е. что в графе нет «петель»). Множества V и E могут быть как конечными, так и бесконечными; первое из них носит название «множества вершин графа», второе — «множества его рёбер».

Разумеется, определение звучит ужасающе. Тем не менее оно, по счастью, допускает вполне прозрачную геометрическую интерпретацию. Действительно, каждому элементу из абсолютно абстрактного V (т. е. каждой вершине графа) можно сопоставить какую-нибудь точку на плоскости. В свою очередь, каждому ребру ставится в соответствие линия, которая соединяет точки, отвечающие вершинам этого ребра (рис. 13). Понятно, конечно, что подобная интерпретация далеко не единственна: всё зависит от того, какие точки мы возьмём в качестве образов вершин и как начертим линии рёбер. В этом отношении возникает классическая проблема: можно ли «вложить» граф в плоскость, т. е. можно ли придумать такое соответствие между объектами в V и E и аналогичными объектами на плоскости, чтобы при нём линии рёбер графа пересекались между собой исключительно по вершинам? Например, на рис. 14, *а*, *б* приведены две различные интерпретации одного и того же графа, причём в первой из них условие вложения нарушено, а во второй всё в порядке (здесь в обоих случаях $V=\{v_1, \ldots, v_{10}\}$, а $E=\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5),$

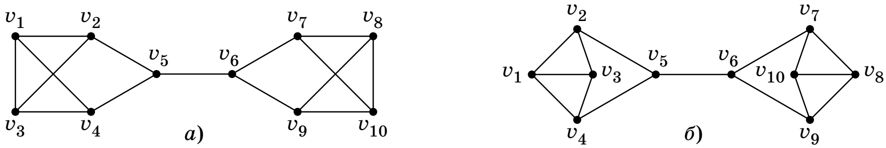

Рис. 14

K_5 $K_{3,3}$

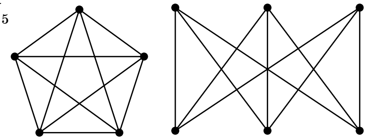

Рис. 15

$(v_4, v_5), \ldots, (v_9, v_{10})\})$. Проблема была решена Л. С. Понтрягиным в 1927 году и, независимо, К. Куратовским в 1930 году: конечный граф вкладывается в плоскость тогда и только тогда, когда его множества вершин и рёбер не содержат в себе подмножеств, изображённых на рис. 15, быть может, с дополнительными вершинами на рёбрах (строгую формулировку см. в книге [2]). Факт, обнаруженный Понтрягиным и Куратовским, является весьма нетривиальным и глубоким.

Заметим, во-первых, что всякий (конечный) граф легко вкладывается в $\mathbb{R}^3$ (попробуйте доказать это). Заметим также, что, позволяя множеству V быть бесконечным, а потом «кодируя» его точками плоскости, мы немного слукавили. Дело в том, что в теории множеств, разработанной Г. Кантором в XIX веке, существует целая иерархия бесконечностей, так что, например, бесконечность множества натуральных чисел и бесконечность множества рациональных чисел в самом точном смысле относятся к одному и тому же классу, в то время как бесконечность множества вещественных чисел принципиально отличается от двух последних: она, как говорят, «мощнее». Есть бесконечности и более мощные, чем бесконечность множества точек на плоскости; поэтому, беря «их» в качестве множеств вершин графа, мы не сможем проинтерпретировать их точками в $\mathbb{R}^2$. Однако в рамках этой брошюры об этом не стоит беспокоиться: никаких «заумных» графов мы строить не будем, и всё сказанное выше в наших дальнейших ситуациях будет верно.

Одним из весьма распространённых примеров того, как графы возникают в приложениях, могут служить знакомые всем компьютерные сети — Интернет и пр. Вершинами графа тогда являются объединённые в сеть компьютеры, а рёбра графа суть, если угодно, провода, соединяющие «вершины» и позволяющие им, тем самым, производить обмен информацией. Математика (комбинаторика) возникает в тот момент, когда мы задаёмся целью изучить поведение нашей системы в предположении наличия возможных сбоев в процессах передачи информации: различные (как правило, числовые) характеристики графа помогают, например, отследить, с какой «вероятностью» (строго определяемой степенью достоверности) система будет в том или ином смысле «хорошо» (или, наоборот, «плохо») функционировать. Замечательно то, что в роли одной из упомянутых числовых характеристик графа выступает его *хроматическое число*, определяемое как минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа с тем, чтобы вершины, соединённые рёбрами, были раскрашены в разные цвета.

В контексте последнего определения становится ясно, что, на самом деле, хроматические числа пространств, которые мы до сих пор изучали, суть не что иное, как хроматические числа бесконечных графов $G_n=(V_n, E_n)$, где $V_n=\mathbb{R}^n$, а $E_n=\{(v_1, v_2)=(\vec{x}, \vec{y})\colon |\vec{x}-\vec{y}|=a\}$, $a>0$ — произвольное фиксированное вещественное число (критическое расстояние). Иными словами, множество вершин графа G_n совпадает со всем n-мерным евклидовым пространством, а множество рёбер этого графа состоит из всех возможных пар n-мерных векторов, расстояние между которыми равно критическому. Единственный вопрос, который, вследствие замечаний, сделанных выше, может здесь возникнуть, — почему граф со столь «жирным» множеством вершин тоже допускает геометрическую интерпретацию. Ответ сводится, с одной стороны, к ссылке на всё ту же канторовскую теорию множеств, утверждающую, что между точками в $\mathbb{R}^n$ и точками в $\mathbb{R}^2$ имеется взаимно однозначное соответствие, т. е. что и впрямь какая-то двумерная интерпретация допустима. С другой стороны, само определение G_n уже совершенно геометрично, так что особенно стремиться тут к понижению размерности, пожалуй, и не стоит.

На язык теории графов очень удобно и полезно переводить понятие (M, D)-критической конфигурации. Для этого, правда, нужно сперва сказать, что подграфом $G'=(V', E')$ графа $G=(V, E)$ называется граф, множество вершин V' которого вкладывается в множество вершин V графа G, причём у этого графа, в свою очередь, множество рёбер E', заданное на V', естественно, является подмножеством множества E. Если хроматические числа графов обозначать, как и прежде, греческой буквой χ, то из определений, очевидно, вытекает неравенство $\chi(G)\geqslant\chi(G')$. Разумеется, неравенство применимо и к графу G_n с его подграфами. В частности, в качестве последних можно брать конечные подграфы $\Sigma=(V', E')$, считая, что $\#V'=M$. Стандартный способ отыскания нижних оценок для хроматических чисел конечных графов состоит в следующем. Пусть $\alpha(\Sigma)$ есть максимальная мощность подмножества в множестве вершин V', такого, что никакие два его элемента не соединены ребром. Величина $\alpha(\Sigma)$ называется *числом независимости* графа Σ, и нетрудно видеть, что $\chi(\Sigma)\geqslant M/\alpha(\Sigma)$. В то же время, вспоминая связь между обычным определением хроматического числа пространства и определением той же величины при помощи графа G_n, легко убедиться в том, что $\alpha(\Sigma)$, по сути, есть просто теоретико-графовый эквивалент величины D из критической конфигурации. Таким образом, мы, действительно, имеем право понимать множество Σ и как (M, D)-критическую конфигурацию, и как граф с множеством вершин мощности M

и числом независимости, равным D, т. е. оценка $\chi(\mathbb{R}^n)\geqslant M/D$, в конечном счёте, проистекает из теоретико-графового неравенства $\chi(G_n)\geqslant\chi(\Sigma)\geqslant M/\alpha(\Sigma)$. Заметим, наконец, что нет никакой необходимости распространять описанную технику на бесконечные подграфы графа G_n, поскольку выполнена

Теорема Эрдёша—де-Брёйна. Если у бесконечного графа конечное хроматическое число, то оно достигается на некотором его конечном подграфе.

Коль скоро мы знаем, что $\chi(G_n)=\chi(\mathbb{R}^n)\leqslant\gamma_3\cdot 3{,}001^n<\infty$, то всё, стало быть, обосновано, и, в частности, намного прозрачнее то обстоятельство, что мы рассматривали именно конечные конструкции: ничего нового их бесконечные аналоги нам бы не принесли.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определяя расстояние между векторами в $\mathbb{R}^2$, мы сделали замечание о том, что такое естественное и вполне отвечающее наглядному опыту понятие, вообще говоря, не является единственно возможным с точки зрения математики. Если правильно выделить наиболее существенные свойства, которыми обладает стандартное расстояние, то окажется, что эти же свойства можно положить в основу общего определения, т. е. считать «расстоянием» всякую функцию $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ двух векторных аргументов, которая удовлетворяет упомянутым требованиям. В действительности, довольно легко понять, что функция $\rho(\vec{x}, \vec{y})=|\vec{x}-\vec{y}|$, которой мы до сих пор с успехом пользовались (обычное, «евклидово» расстояние), имеет ровно три отличительных особенности. Во-первых, она всегда неотрицательна и равна нулю только в случае, когда её аргументы совпадают. Во-вторых, она «симметрична», т. е. $|\vec{x}-\vec{y}|$ есть то же, что и $|\vec{y}-\vec{x}|$ (не имеет значения, откуда начинать мерить расстояние). Наконец, она подчиняется «неравенству треугольника»: $|\vec{x}-\vec{y}|\leqslant|\vec{x}-\vec{z}|+|\vec{z}-\vec{y}|$ (длина любой стороны треугольника с вершинами в точках $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ не превосходит суммы длин двух других его сторон). Отталкиваясь от перечисленных свойств, т. е. изначально их постулируя, мы приходим к понятию *метрики*, обобщающему понятие расстояния: метрика — это просто любая функция $\rho(\vec{x}, \vec{y})$, которая обладает этими тремя свойствами функции $|\vec{x}-\vec{y}|$. Про метрику можно говорить очень много; однако, с одной стороны, это не является целью нашей брошюры, а с другой стороны, уже имеется прекрасная брошюра [3]. Отсылая заинтересованного читателя к этой брошюре, а также к другой литературе, посвящённой метрическим пространствам, мы лишь приводим здесь необходимое нам определение и обсуждаем непосредственно те вопросы, которые напрямую связаны с задачей о хроматических числах.

Итак, *метрическим пространством* называется любая пара (X, ρ), где X — это произвольное (абстрактное) множество, а $\rho = \rho(x, y)$ — метрика на нём ($x, y \in X$). Классическими примерами метрических пространств являются, скажем, пространства $(\mathbb{R}^n, \rho_\alpha)$, где при $\alpha \in [1, \infty)$ величина ρ_α задаётся равенством

$$\rho_\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (|x_1 - y_1|^\alpha + \ldots + |x_n - y_n|^\alpha)^{1/\alpha},$$

а при $\alpha = \infty$ соответствующая величина есть $\max\{|x_1 - y_1|, \ldots$ $\ldots, |x_n - y_n|\}$. В частности, ρ_2 — это евклидово расстояние. Ещё одним примером может служить пространство $C[0, 1]$, состоящее из всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ и снабжённое метрикой $\rho(f, g) = \max\limits_x |f(x) - g(x)|$.

Коль скоро у нас имеется какое-нибудь метрическое пространство (X, ρ), мы можем рассмотреть его хроматическое число $\chi((X, \rho), a)$. Здесь $a > 0$ — величина критического «расстояния», т. е. $\chi((X, \rho), a)$ — это, как всегда, минимальное количество цветов, необходимых для такой раскраски всех элементов («точек») множества X, при которой точки x, y, отстоящие друг от друга на «расстояние» a ($\rho(x, y) = a$), обязательно оказываются раскрашенными в разные цвета. Подчеркнём, что в такой общей ситуации значение критического расстояния может играть весьма существенную роль. Более того, хроматическое число отнюдь не обязано быть конечным. Заметим, наконец, что $\chi((X, \rho), a) = \chi(G)$, где $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин $V = X$ и множеством рёбер $E = \{(x, y) \in X \colon \rho(x, y) = a\}$.

Задача об изучении хроматических чисел метрических пространств была предложена в 1976 году М. Бендой и М. Перлесом. Некоторая пикантность положения состоит в том, что соответствующая работа упомянутых авторов ни разу не была опубликована. Тем не менее она весьма известна среди специалистов, и потому её по праву можно считать едва ли не одной из самых популярных неопубликованных математических работ.

Рассмотрим лишь два наиболее важных метрических пространства. Первое метрическое пространство, которое мы хотели бы здесь упомянуть, — это пространство $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$. В отличие от классического случая с метрикой ρ_2, тут всё устроено очень просто: $\chi((\mathbb{R}^n, \rho_\infty), 1) = 2^n$. В самом деле, неравенство $\chi((\mathbb{R}^n, \rho_\infty), 1) \geqslant 2^n$ вытекает из рассмотрения множества всех n-мерных $(0, 1)$-векторов: попарные «расстояния» между этими векторами равны 1, а количество их есть как раз 2^n. В то же время раскраска пространства $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ в 2^n нужных цветов строится следующим образом: вектору $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ присваивается цвет с «именем» $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = 0$, если наибольшее целое число a_i, не превосходящее x_i, чётно, и $\varepsilon_i = 1$, если a_i нечётно. Ясно, что различных «имён» 2^n и что для любых одноцветных $\vec{x}$, $\vec{y}$ заведомо $\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) \neq 1$.

Другое важное метрическое пространство намного более забавно и, уж во всяком случае, куда более нетривиально с точки зрения проблемы Эрдёша—Хадвигера. Это пространство $(\mathbb{Q}^n, \rho_2)$, где $\mathbb{Q}^n$ — множество всех n-мерных векторов с рациональными координатами. Дело в том, что множество таких векторов всюду плотно в $\mathbb{R}^n$, т. е. у любого вещественного вектора есть сколь угодно близкий к нему рациональный сосед. Естественно было бы ожидать тогда, что задача отыскания хроматического числа $\mathbb{Q}^n$ с критическим расстоянием, равным, допустим, 1*), окажется не менее трудной, чем классическая «вещественная» задача. Однако ожидание оправдывается лишь наполовину, и набор результатов, приведённых в таблице, полученных в разные годы для «малых» размерностей, не может не впечатлять.

Результат	Автор, год
$\chi((\mathbb{Q}^1, \rho_2), 1) = 2$	фольклор
$\chi((\mathbb{Q}^2, \rho_2), 1) = 2$	Вудалл, 1973
$\chi((\mathbb{Q}^3, \rho_2), 1) = 2$	Бенда и Перлес, 1976
$\chi((\mathbb{Q}^4, \rho_2), 1) = 4$	Бенда и Перлес, 1976
$7 \leqslant \chi((\mathbb{Q}^5, \rho_2), 1)$	М. Манн, 2001
$\chi((\mathbb{Q}^5, \rho_2), 1) \leqslant 8$	Чилакамарри, 1990

Что касается неограниченного возрастания величины n, то тут всё становится на свои места: удаётся доказать лишь, что $\chi((\mathbb{Q}^n, \rho_2), 1) \geqslant c_1 \cdot 1{,}172^n$ (А. М. Райгородский, 2001 год) и что $\chi((\mathbb{Q}^n, \rho_2), 1) \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant c_2 \cdot 3{,}001^n$ (Ларман и Роджерс, 1972 год), а стало быть, зазор между верхней и нижней оценками даже более велик, чем то было в классическом случае. Иными словами, «вещественный» результат Лармана—Роджерса не удалось улучшить в «рациональной» ситуации. И это несмотря на столь значительные успехи в размерностях $n \leqslant 5$.

В этой брошюре мы не станем приводить доказательства перечисленных фактов. Заметим только, что все нижние оценки хроматического числа пространства $(\mathbb{Q}^n, \rho_2)$ опять-таки получаются за счёт построения (M, D)-критических конфигураций. Верхние же оценки в малых размерностях вытекают из детального изучения арифметических свойств числителей и знаменателей

*) Понятно, что для $\mathbb{Q}^n$ принципиально, берём ли мы в качестве запретного расстояния рациональное или иррациональное число.

в дробях $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ таких, что $\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2+\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2=1$. К сожалению, с ростом размерности арифметические методы перестают работать.

В заключение сформулируем замечательную гипотезу Бенды и Перлеса.

Гипотеза. Пусть G_1^n — это граф, хроматическое число которого есть $\chi(\mathbb{R}^n)$, а G_2^n — аналогичный граф для рационального пространства. Тогда любой конечный подграф графа G_1^2 может быть реализован (с сохранением числа вершин и расстояний между ними) как какой-нибудь конечный подграф графа G_2^4.

Смысл гипотезы в том, что если она верна, то автоматически верно и равенство $\chi(\mathbb{R}^2)=4$. В самом деле, $\chi(G_2^4)=4$, поскольку $\chi(\mathbb{Q}^4)=4$. Следовательно, хроматическое число любого конечного подграфа в G_2^4 не превосходит четырёх. Далее, если гипотеза верна, то хроматическое число каждого конечного подграфа в G_1^2 также не может быть больше четырёх. Значит, по теореме Эрдёша—де-Брёйна $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 4$.

20. Найдите $\chi((\mathbb{R}^2, \rho_1), 1)$.

21. Рассмотрим пространство $(\mathbb{Q}^2(\sqrt{2}), \rho_2)$, где $\mathbb{Q}^2(\sqrt{2})$ состоит из всех возможных двумерных векторов с координатами вида $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\sqrt{2}$. Найдите $\chi((\mathbb{Q}^2(\sqrt{2}), \rho_2), 1)$.

22. Рассмотрим в $\mathbb{Q}^5$ только те векторы, у которых знаменатели всех координат нечётны. Чему равно хроматическое число пространства таких векторов, если, как всегда, метрика евклидова, а критическое расстояние есть 1?

23. Назовём диаметром множества максимальное расстояние между принадлежащими ему точками. Докажите, что всякий трёхмерный многогранник диаметра 1 и с вершинами в рациональных точках разбивается на две части диаметра меньше 1.

24. Приведите пример метрического пространства с бесконечным хроматическим числом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой небольшой брошюре мы постарались рассказать о наиболее важных аспектах классической проблемы Эрдёша—Хадвигера. Даже из нашего (в сущности, весьма краткого и схематичного) изложения видно, насколько красива и нетривиальна поставленная задача: и результаты, и разнообразные методы их получения дают богатый материал для исследования, приводят к появлению новых идей и методов — в комбинаторной геометрии, да и не только в ней (а ещё и в геометрии чисел, теории графов и т. д.). В действительности, нам удалось осветить здесь лишь малую долю многогранной проблематики, связанной с хроматическими числами.

Желая воодушевить заинтересованного читателя на самостоятельные исследования, мы укажем в заключение ещё на две близких постановки задачи о раскрасках пространств.

Определим две величины: $\chi(\mathbb{R}^n, a_1, \ldots, a_k)$ и $\chi(\mathbb{R}^n, \mathscr{A})$. Число $\chi(\mathbb{R}^n, a_1, \ldots, a_k)$ — это минимальное число цветов, в которые можно так раскрасить все векторы в n-мерном пространстве, чтобы векторы, отстоящие друг от друга на одно (любое) из расстояний $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, оказались раскрашенными в разные цвета. Величина $\chi(\mathbb{R}^n, \mathscr{A})$ — это наименьшее количество красок, необходимых для такой раскраски $\mathbb{R}^n$, при которой точки одного цвета не могут образовывать множество $\mathscr{A}$. Ясно, что обе введённые величины напрямую обобщают понятие обычного хроматического числа. Изучение этих величин дало ряд прекрасных результатов. Например, на плоскости первая из них может быть, за счёт надлежащего выбора чисел $a_1 > 0, \ldots, a_k > 0$ в качестве критических расстояний, сделана больше, чем $ck\sqrt{\ln k}$ ($c > 0$ — некоторая постоянная). С ростом размерности она также ведёт себя принципиально по-другому, нежели чем величина $\chi(\mathbb{R}^n)$. Мы уже не станем вдаваться здесь в какие-либо подробности и скажем только, что нерешённых проблем относительно $\chi(\mathbb{R}^n, a_1, \ldots, a_k)$ и $\chi(\mathbb{R}^n, \mathscr{A})$ ещё больше, чем для классического хроматического числа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56. — Вып. 1. — С. 107—146.

[2] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

[3] Скворцов В. А. Примеры метрических пространств. — М.: МЦНМО, 2002. — (Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 16).

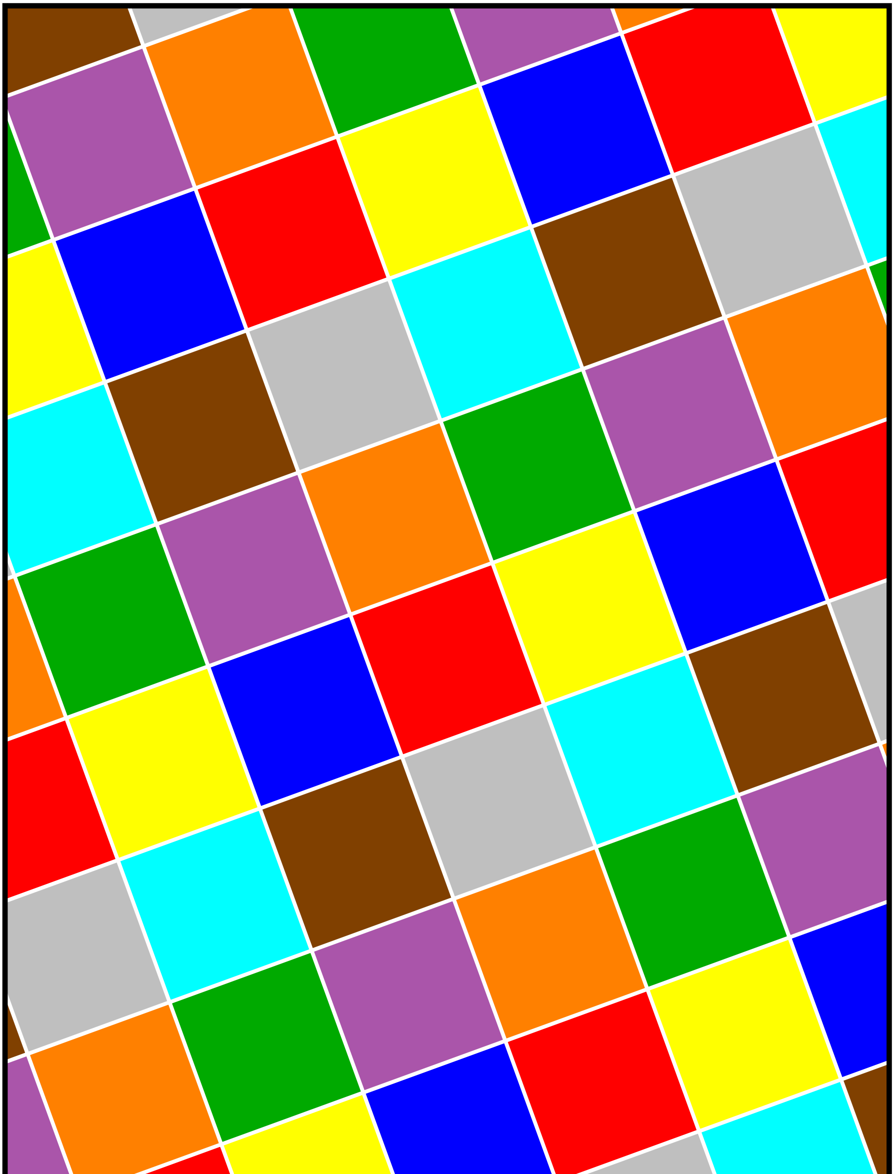

Рис. Ц1

Ц в е т а:

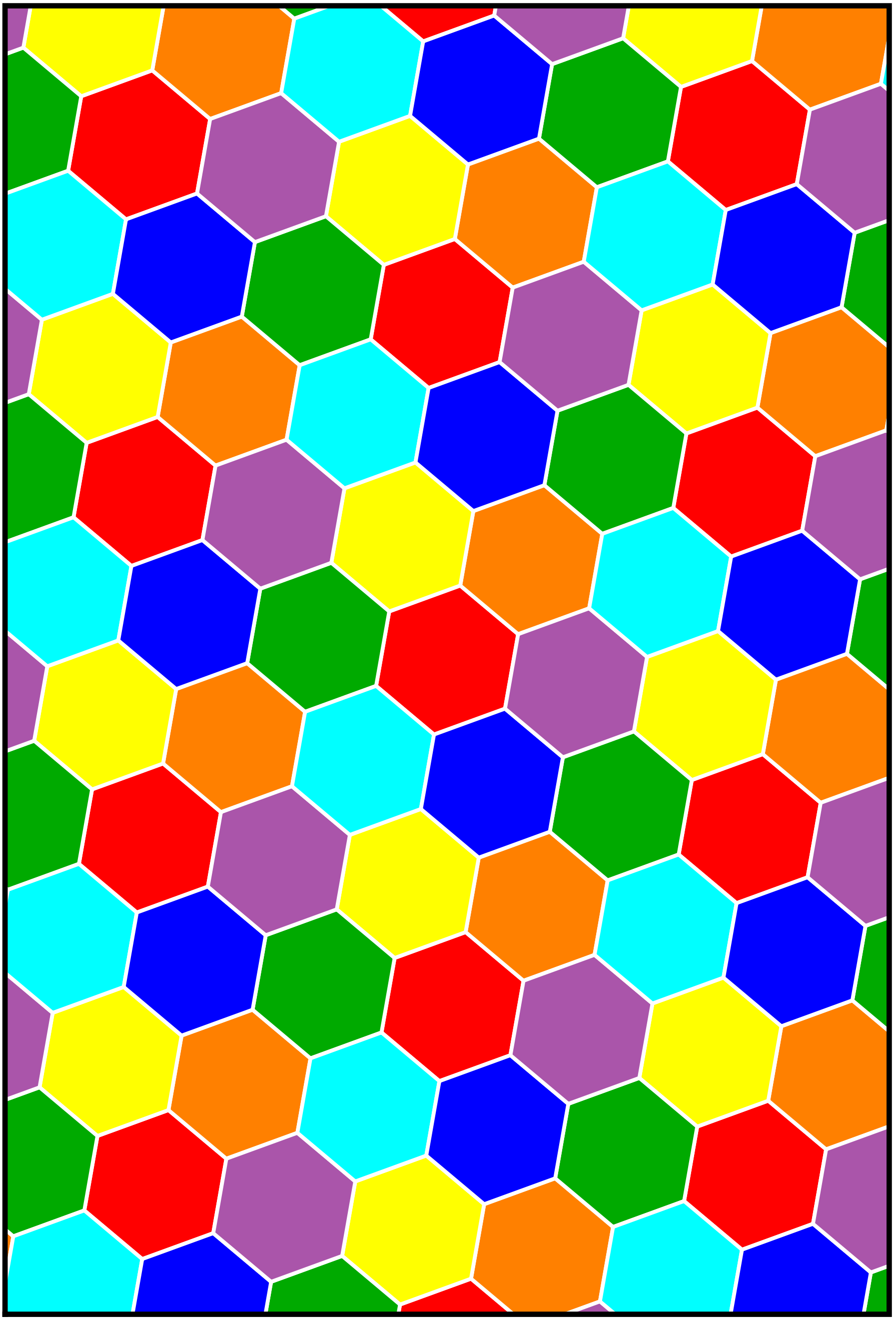

Рис. Ц2

Ц в е т а:

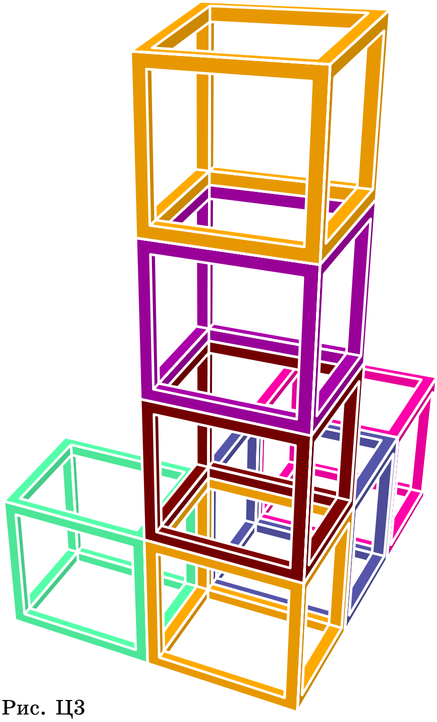

Рис. Ц3

Желая сделать максимально наглядными раскраски плоскости и трёхмерного пространства, которые мы обсуждали в начале нашей брошюры, мы предприняли попытку нарисовать их. Разумеется, в двумерном случае с этим нет никаких проблем, и на рис. Ц1, Ц2 мы видим раскраски плоскости в девять и семь цветов соответственно.

В трёхмерной ситуации возникают значительные трудности, преодолеть которые оказывается весьма непросто. Действительно, как нарисовать многогранники Вороного, которые сами по себе довольно сложно устроены, да ещё раскрасить их по-разному так, чтобы это было видно?

Справиться с такой задачей помогает метод изображения пространства, придуманный голландским художником М. Эшером и реализованный для раскрасок, связанных с оценками хроматических чисел, М. Ю. Пановым. Метод сводится к тому, чтобы оставить от многогранника только его «рёберный каркас» (рис. Ц3—Ц6), а грани не изображать. Ведь мы хотим одновременно наблюдать несколько разноцветных многогранников по каждому из трёх пространственных направлений, а этого проще всего

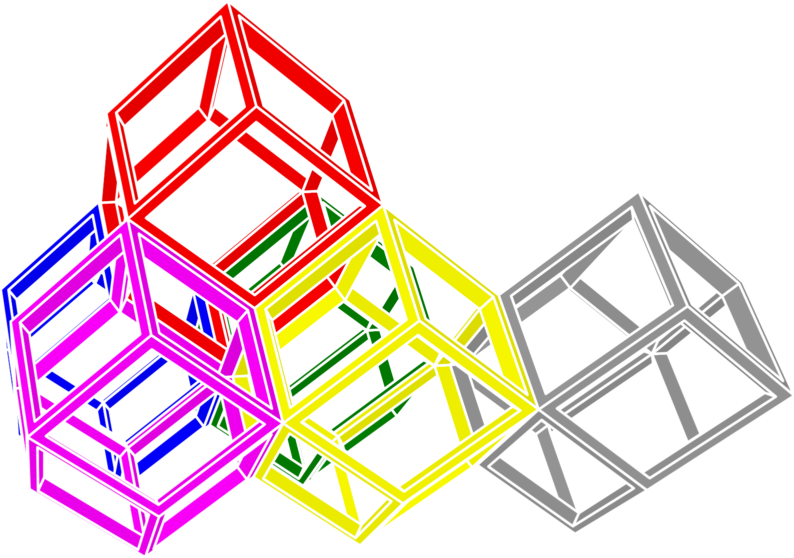

Рис. Ц4

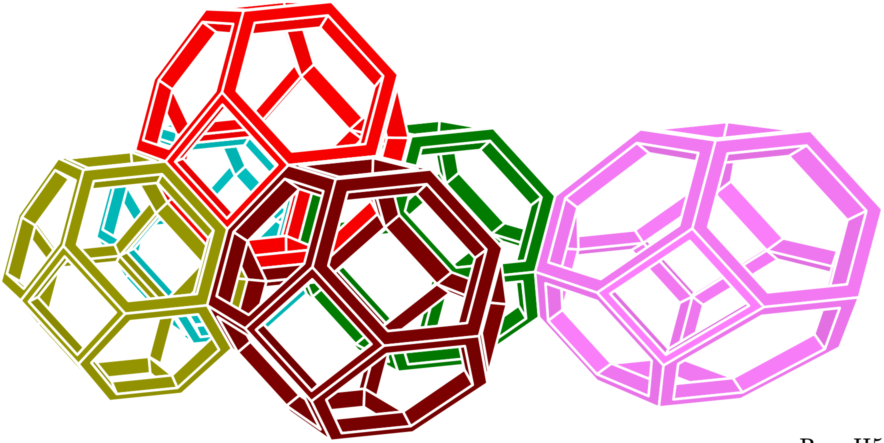

Рис. Ц5

добиться, сделав стенки (грани) прозрачными. Тем самым, мы и за внешним видом многогранника по его каркасу уследим, и во все стороны посмотрим.

Конечно, рис. Ц7—Ц10 выглядят всё равно крайне запутанно, но такова уж природа проблемы. Скажем, на рис. Ц7 изображена раскраска $\mathbb{R}^3$ кубами. Как бы сидя внутри одного из кубов, мы окидываем взглядом всю перспективу, и все 27 цветов нам хорошо видны. Аналогично обстоит дело с рис. Ц8—Ц10. На рис. Ц8 мы видим раскраску Сойфера в 21 цвет, на рис. Ц9 и Ц10 — раскраски Кулсона в 18 и 15 цветов соответственно.

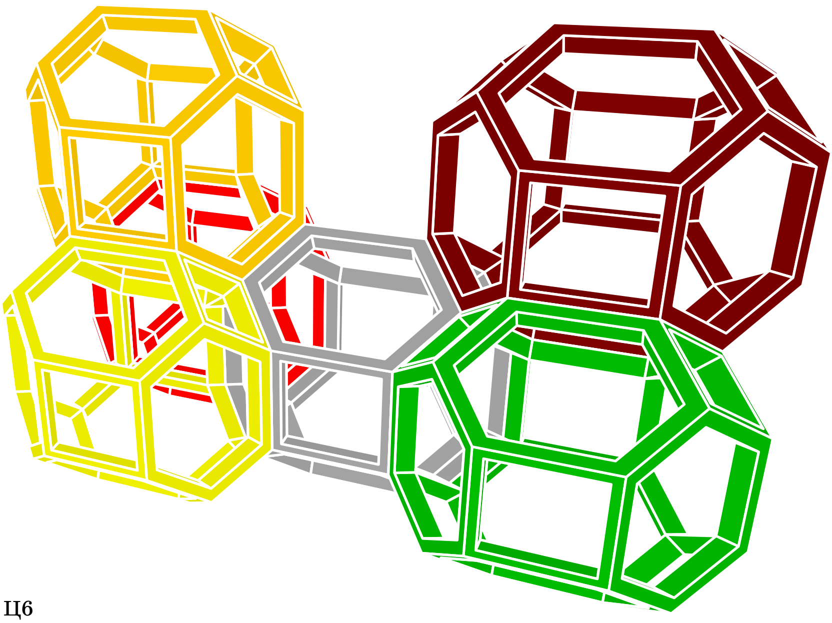

Рис. Ц6

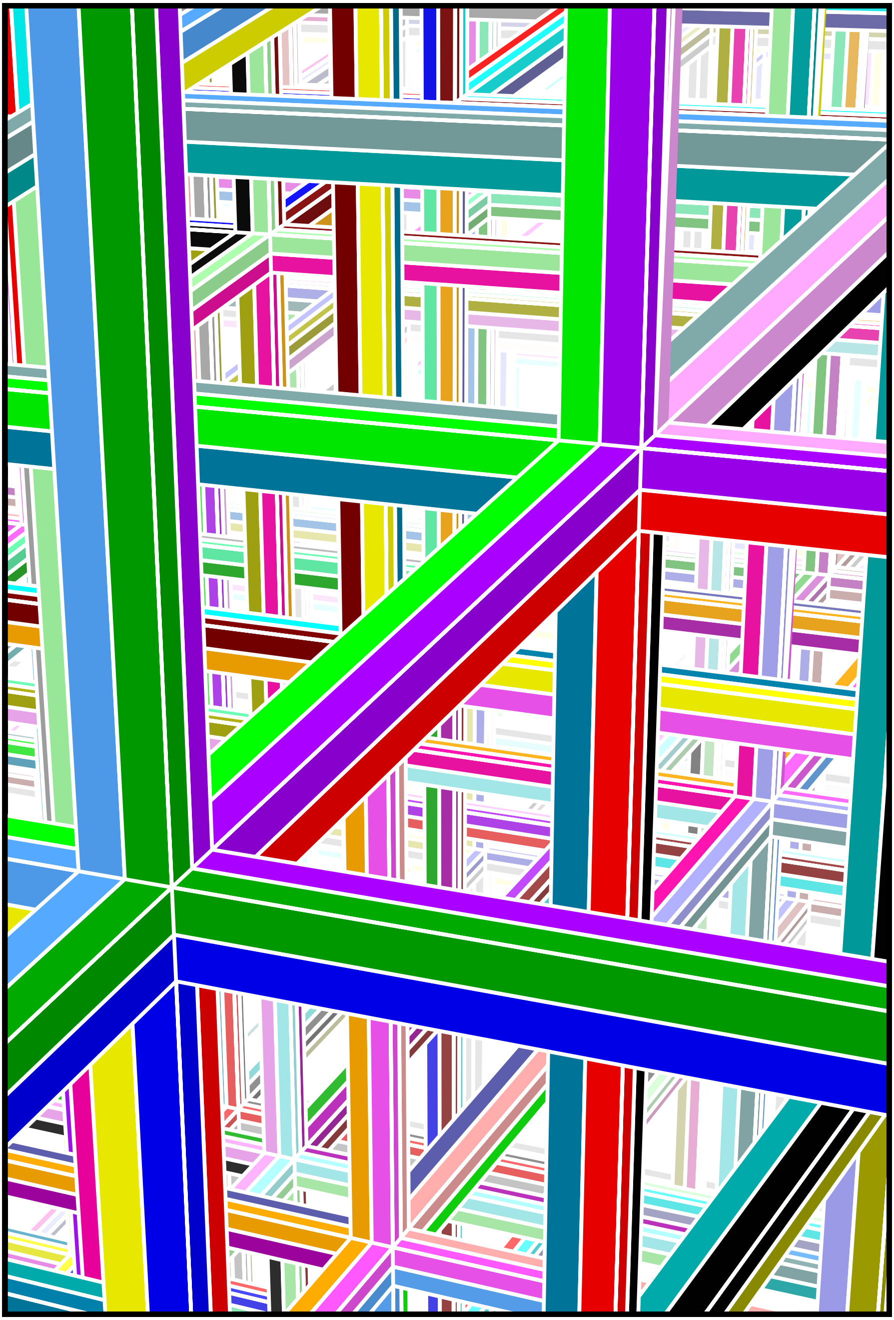

Рис. Ц7

Цвета:

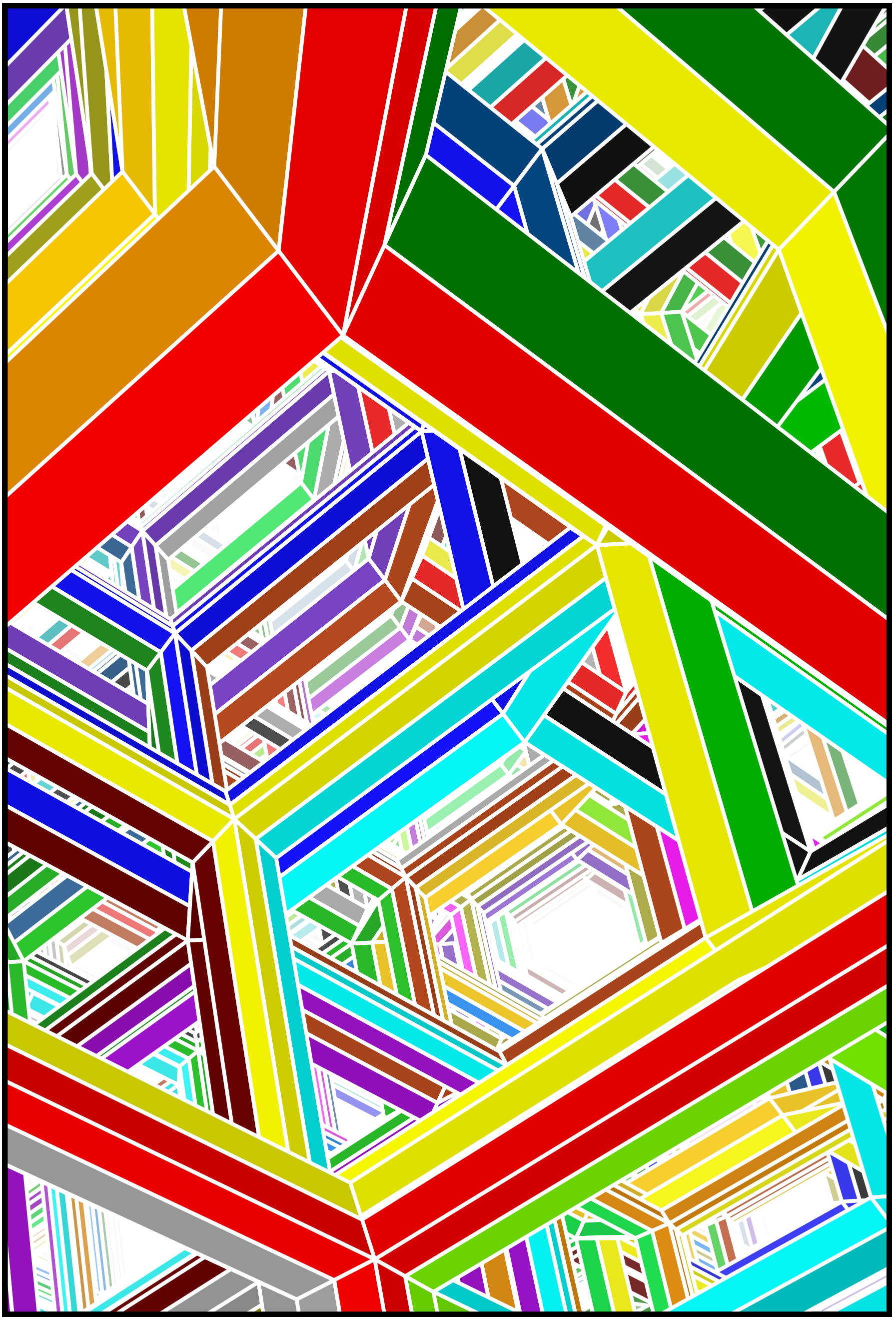

Рис. Ц8

Цвета:

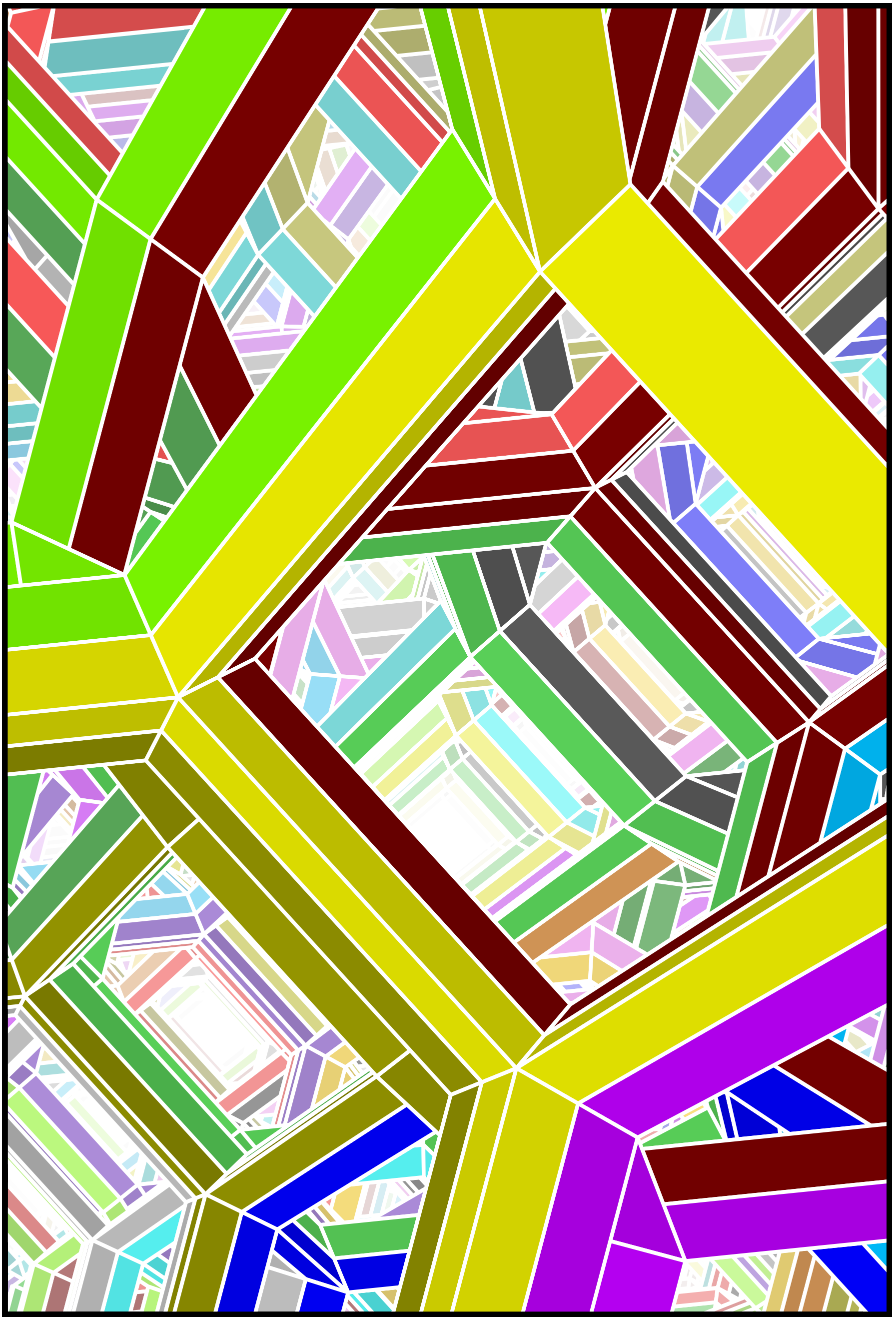

Рис. Ц9

Цвета:

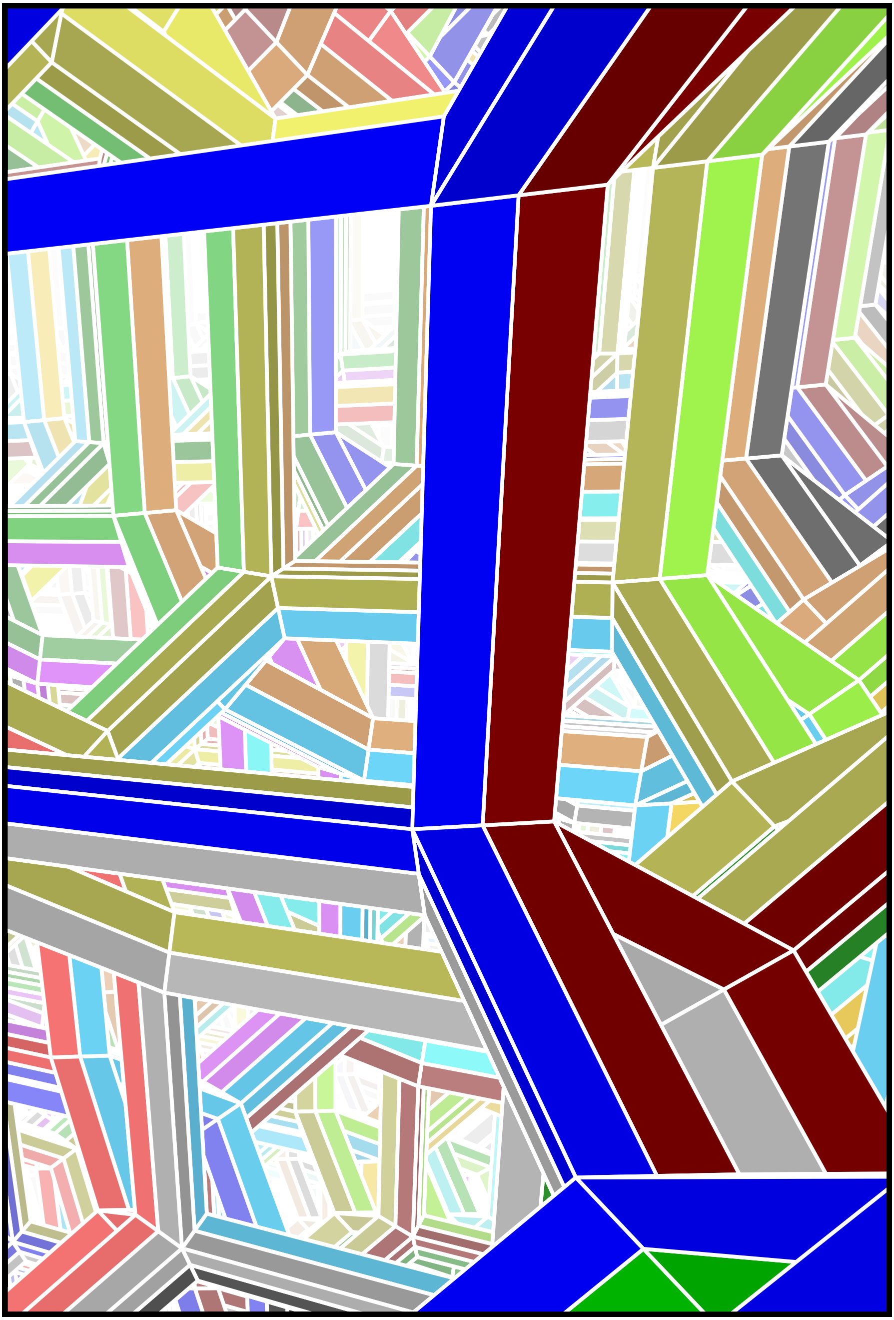

Рис. Ц10

Ц в е т а: