МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 1

Издание выходит с 2003 года

Москва
2003

УДК 51
ББК (В)22.1
С56

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2003. Вып. 1: Сб. статей. — 108 с.

Предисловие

Этим выпуском открывается серия “Современные проблемы математики” — рецензируемое *продолжающееся издание* Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии будут публиковаться работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание будет уделяться исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

Идея этого издания принадлежит академику А. А. Болибруху, который приложил немало усилий для ее осуществления. Первый выпуск серии содержит *описания* работ сотрудников МИАН, удостоенных Государственных премий Российской Федерации за 1999 и 2002 гг. (этим определяется специфика представленных обзоров, отражающих, в основном, результаты самих авторов). Данный выпуск готовился при непосредственном участии А. А. Болибруха, в частности, им была тщательно выверена собственная статья. Безвременная кончина Андрея Андреевича не позволила ему увидеть свой замысел осуществленным.

Редакционный совет посвящает эту публикацию светлой памяти Андрея Андреевича Болибруха.

Редакционный совет

Указом Президента РФ № 1307 от 29 сентября 1999 г. присуждены Государственные премии Российской Федерации в области науки и техники:

академику Гончару А. А. — за цикл работ “Рациональные аппроксимации аналитических функций”;

академику Новикову П. С. (посмертно), члену-корреспонденту Адяну С. И. — за цикл работ по созданию нового метода исследования периодических групп, позволившего решить ряд известных проблем алгебры, не поддававшихся решению длительное время.

Указом Президента РФ № 831 от 5 августа 2002 г. присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники:

академику Болибруху А. А. — за цикл работ “Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами”.

Проблема Бернсайда о периодических группах и смежные вопросы

С. И. Адян

В работах П. С. Новикова и С. И. Адяна, опубликованных в 1959–1975 гг., был создан новый метод исследования периодических групп, основанный на классификации периодических слов посредством сложной совместной индукции. Метод был создан для решения известной проблемы Бернсайда о периодических группах, но он позволил авторам решить и ряд других трудных проблем теории групп. В настоящей статье дается расширенный обзор как результатов, содержащихся в представленном цикле работ, так и других значительных результатов, полученных после 1975 года С. И. Адяном и другими авторами на базе созданной теории и ее модификаций.

Введение

Проблема Бернсайда о периодических группах фиксированного периода была поставлена известным английским ученым Бернсайдом в 1902 году в следующей форме (см. [1]).

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *— конечное число независимых элементов, порождающих группу* G, *в которой для любого элемента* x

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Программы поддержки ведущих научных школ.

выполнено соотношение $x^n = 1$, где n — данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?

Впоследствии группы, определенные m порождающими и тождественным соотношением $x^n = 1$, получили название *свободных бернсайдовых групп периода n* и обозначение

$$B(m,n) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\ x^n = 1\rangle.$$

Более общий вопрос о локальной конечности периодических групп без ограничения на порядки элементов получил название "*общая проблема Бернсайда*".

В 1950 году в работе В. Магнуса [37] была сформулирована еще одна проблема, которая тесно связана с проблемой Бернсайда. Магнус назвал ее "restricted Burnside Problem", а в русской алгебраической литературе по инициативе И. Н. Санова [28] она была названа "*ослабленная проблема Бернсайда*". В ней требовалось выяснить, существует ли максимальная конечная периодическая группа с данным числом порождающих m и фиксированным периодом n. Связь ослабленной проблемы с основной проблемой Бернсайда сводится к тому, что если бы не существовало бесконечных периодических групп, то группа $B(m,n)$ и была бы максимальной конечной периодической группой при этих m и n. На самом деле оказалось, что при достаточно больших периодах n ослабленная проблема имеет положительное решение, хотя свободные периодические группы $B(m,n)$ достаточно большого периода не только бесконечны, но и имеют бесконечное число различных факторгрупп (см. раздел 3).[1] Проблема Бернсайда привлекала внимание выдающихся алгебраистов многих стран в силу естественности и максимальной простоты своей постановки. Очевидно, любая конечная группа удовлетворяет тождественному соотношению $x^n = 1$, где n есть порядок этой группы. Естественно возникает вопрос о верности обратного утверждения. В результате многочисленных исследований был получен положительный

[1] Позже ослабленной проблемой Бернсайда занимались также И. Н. Санов, Г. Хигман, А. И. Кострикин, Е. И. Зельманов и др. Все они работали в направлении, намеченном Магнусом, т.е. исследовали лиевы кольца с тождеством Энгеля. Именно за результаты по ослабленной проблеме Бернсайда Ефиму Зельманову была присуждена Филдсовская премия.

ответ на поставленный вопрос для некоторых специальных классов групп, а также возникли различные варианты этой проблемы для разных алгебраических систем. Однако сама проблема Бернсайда в ее первоначальной формулировке оставалась открытой в течение многих десятилетий.

В своей монографии по истории комбинаторной теории групп В. Магнус дает подробный анализ истории исследований по проблеме Бернсайда и при этом отмечает (см. [29, с. 57]): "*Само собой напрашивается сравнение влияния проблемы Бернсайда на комбинаторную теорию групп с влиянием последней теоремы Ферма на развитие алгебраической теории чисел*".

Положительный ответ на вопрос Бернсайда для $n = 3$ был получен самим Бернсайдом в [1] (1902), для $n = 4$ — И. Н. Сановым в [27] (1940) и для $n = 6$ — М. Холлом в [34] (1958). Кроме того, была доказана локальная конечность всех матричных групп при ограниченном периоде элементов самим Бернсайдом в [2] (1905), а при неограниченных периодах — И. Шуром в [37] (1911).

В 1964 году Е. С. Голод впервые доказал, что общая проблема Бернсайда имеет отрицательное решение, т.е. существуют бесконечные 2-порожденные периодические группы с неограниченными периодами элементов [20]. Позже такого рода примеры были построены также С. В. Алешиным [18], Р. И. Григорчуком [21] и другими авторами.

Отрицательное решение проблемы Бернсайда было получено в фундаментальной работе [4], опубликованной в 1968 году в серии совместных статей двух авторов в журнале *Известия АН СССР. Сер. матем.* Т. 32, №№ 1–3. Была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого нечетного периода $n \geqslant 4381$ и любого числа порождающих $m \geqslant 2$ свободная периодическая группа $B(m, n)$ бесконечна.*

Для доказательства этой теоремы авторами была создана новая теория, суть которой заключается в классификации периодических слов данного нечетного периода в групповом алфавите, а также преобразований таких слов на базе периодических соотношений. Характерной особенностью теории является доказательство большого числа утверждений совместной индукцией по натуральному параметру, причем определения используемых понятий вводятся попутно в ходе той же индукции.

Здесь уместно напомнить о том, что еще в 1959 году П. С. Новиков в своей заметке [3] анонсировал отрицательное решение проблемы Бернсайда в более сильной форме. Однако при реализации намеченного им плана встретились серьезные трудности. В 1960 году П. С. Новиков предложил автору настоящего обзора работать вместе по осуществлению намеченного им замысла. В результате нашей 8-летней совместной работы и была создана новая теория, позволившая дать отрицательное решение проблемы Бернсайда в основном ее варианте для нечетных периодов $n \geqslant 4381$. Хотя П. С. Новиков публиковал заметку [3] под давлением сложившихся обстоятельств, автор настоящего обзора убежден, что факт публикации анонса в [3] сыграл положительную роль в активизации работы авторов над проблемой. Без этого анонса могло бы не быть того энтузиазма, с которым мы работали эти годы, а возможно, не было бы и самого результата. Во всяком случае, до этого алгебраисты думали лишь о положительном решении проблемы Бернсайда, а некоторые даже говорили о “предложении Бернсайда”, а не о проблеме. Так один из тогдашних лидеров советской алгебры профессор А. Г. Курош в своей известной монографии “Теория групп”, вышедшей в 1953 году, писал, что решение вопроса о локальной конечности периодических групп “не удается получить даже при условии, что порядки элементов ограничены в совокупности”. Ясно, что здесь подразумевается положительное решение этого вопроса. Не является случайным и тот факт, что первые примеры локально бесконечных периодических групп были построены Е. С. Голодом после публикации заметки [3].

Характерной особенностью созданной в [4] теории является то, что почти все утверждения этой теории, включая определения основных понятий, вводятся и доказываются одной совместной индукцией по натуральному параметру, который называется *рангом*. Это, конечно, создает определенные трудности при чтении работы, так как читатель должен некоторое время иметь дело с понятиями и утверждениями, которые будут определены или доказаны ниже.

В 1975 году была опубликована монография автора [10], в которой рассматриваемая теория была усовершенствована и все полученные к этому времени результаты, в том числе и теорема 1, были распространены на нечетные периоды $n \geqslant 665$. По сравнению с первоначальным текстом совместных публикаций 1968 года в монографии [10] изложение было существенно упрощено. Кроме того, книга снабжена указателем, позволяющим читателю легко находить нужные определения, к которым он вынужден периодически обращаться при чтении доказательств.

1. Краткое описание теории

Основные идеи созданной двумя авторами теории здесь будут изложены в версии, которая была опубликована в монографии [10]. Для этого фиксируем нечетный период $n \geqslant 665$ и два числовых параметра $p = 9$ и $q = 90$. Будем рассматривать слова в групповом алфавите

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_m^{-1}, \qquad m > 1. \tag{1}$$

Слово A в алфавите (1) называется *минимальным периодом ранга* 1, если A есть кратчайший период несократимого слова A^n. Период A называется *элементарным периодом ранга* 1, если в слово A^n не входит никакое подслово вида $B^t B_1$, где B_1 есть начало периода B, длина $|B|$ меньше $|A|$ и $|E| \geqslant p|B|$. Если же в слово A^n входит подслово такого вида, то A называется периодом ранга 2, а A^n — периодическим словом ранга 2 с периодом A.

Для точного определения индукцией по натуральному параметру α понятий периода ранга α и элементарного периода ранга α требуется попутно ввести определения ряда других понятий, связанных с рангом α, как-то:

1. *ядро ранга α данного слова*;
2. *приведенное слово ранга α*;

3. *поворот ранга* α;
4. *отношение эквивалентности слов в ранге* α;
5. *взаимная нормированность двух вхождений в ранге* α;
6. *операция смыкания ранга* α *для данных двух слов*

и т. д.

Точные определения всех этих понятий можно найти в [10, гл. 1, § 4]. Здесь же мы ограничимся лишь указанием некоторых существенных особенностей рассматриваемой системы понятий.

Допустим, что для ранга $\alpha-1 \geqslant 0$ уже определены следующие понятия:

1. *приведенные слова ранга* $\alpha - 1$ (множество всех таких слов обозначается через $\mathcal{R}_{\alpha-1}$, причем $\mathcal{R}_0$ есть множество всех несократимых слов в алфавите (1) и $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}_{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$);
2. *ядра ранга* α *данного слова* $X \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ (ядрами ранга 0 слова X из $\mathcal{R}_0$ являются все вхождения букв в слово X, а в общем случае это вхождения некоторых подслов в X);
3. *отношение эквивалентности в ранге* $\alpha - 1$ для слов X, Y из $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ (обозначается через $X \overset{\alpha-1}{\sim} Y$, причем $X \overset{0}{\sim} Y$ означает, что X и Y равны графически);
4. *элементарный период ранга* $\alpha - 1$ при $\alpha > 1$ (точное определение элементарных периодов ранга 1 дано выше).

Слово A в алфавите (1) называется *периодом ранга* α, если слово A^n принадлежит множеству $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ и имеет такое ядро ранга $\alpha - 1$, длина которого меньше двух длин периода A. При этом слово A^n называется *периодическим словом ранга* α. Оно будет содержать много ядер ранга $\alpha-1$, которые равномерно распределены во всех периодах A. Среди периодов ранга α мы сначала выбираем так называемые минимальные периоды ранга α. Для этого мы рассматриваем всевозможные слова Y, эквивалентные A^n в ранге $\alpha - 1$. Мы говорим, что период A *не минимален в ранге* α, если среди слов, эквивалентных A^n в ранге $\alpha - 1$, найдется такое слово вида PB^tQ, где $t \geqslant p$, B есть период ранга α, в слове B^n на каждый период B приходится меньше ядер ранга $\alpha - 1$, чем в слове A^n приходится на период A; и в то же время подслово B^t содержит не меньше ядер ранга $\alpha - 1$, чем их приходится на 3 периода A слова A^n. В противном случае мы называем A *минимальным периодом ранга* α.

Среди минимальных периодов ранга α выбираются элементарные периоды ранга α. При этом каждый минимальный период ранга α, который не является элементарным периодом ранга α, оказывается периодом следующего ранга $\alpha+1$.

Элементарными словами ранга α с периодом A называются внутренние сегменты слов, эквивалентных в ранге $\alpha-1$ слову A^n с элементарным периодом A. Они порождаются так называемыми *порождающими вхождениями.* Элементарное слово E ранга α называется *элементарной t-степенью ранга* α, если в его порождающем вхождении содержится больше ядер ранга $\alpha-1$, чем их приходится на $t-1$ периодов слова A^n.

Далее вводится понятие *нормированного вхождения* элементарного слова E ранга α в данное слово X из множества $\mathcal{R}_{\alpha-1}$. Такие вхождения обладают многими свойствами их порождающих вхождений.

На основе ряда установленных свойств элементарных слов ранга α и их вхождений вводится понятие *r-поворота ранга* α. Пусть $r \geqslant 9$ и $A = A_1A_2$ есть элементарный период ранга α. Переход

$$X \overset{0}{\sim} TA^tA_1Q \to TA^{-n+t+1}A_2^{-1}Q \overset{0}{\sim} Y \tag{2}$$

называется *простым r-поворотом ранга* α данного вхождения $T * A^tA_1 * Q$ элементарного слова A^tA_1, если слова X, Y лежат в $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ и в обоих вхождениях $T * A^tA_1 * Q$ и $T * A^{-n+t+1}A_2^{-1} * Q$ содержатся нормированные вхождения элементарных r-степеней ранга α с периодами A и A^{-1} соответственно. Очевидно, переход (2) равносилен применению определяющего соотношения $1 = A^{-n}$ с последующим сокращением в свободной группе.

Понятие r-поворота ранга α естественным образом распространяется на переходы вида $X_1 \to Y_1$, где слова X_1 и Y_1 эквивалентны в ранге $\alpha-1$ словам X и Y соответственно. Если $r \geqslant k \geqslant 9$, то всякий r-поворот ранга α есть также k-поворот того же вхождения.

Некоторые q-повороты ранга α называются *реальными поворотами ранга* α. Два слова X, Y из множества $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ называются эквивалентными в ранге α (пишем $X \overset{\alpha}{\sim} Y$), если либо $X \overset{\alpha-1}{\sim} Y$, либо можно указать некоторую последовательность реальных поворотов ранга α, переводящую X в Y.

При рассмотрении последовательностей реальных поворотов ранга α важную роль играет понятие *совпадения индивидуальностей* вхождений элементарных p-степеней ранга α в слова рассматриваемой последовательности. Для простого поворота ранга α это понятие вводится следующим образом. Выделенные в повороте (2) вхождения периодических слов по определению соответствуют друг другу по индивидуальности в (2), а каждое содержащееся в T (или в Q) нормированное вхождение элементарной p-степени E ранга α в слово X естественным образом соответствует по индивидуальности в (2) лежащему точно в том же положении в T (или в Q) вхождению слова E в слово $TA^{-n+t+1}A_2^{-1}Q$ при условии, что оно также нормированное. Это отношение транзитивно распространяется на любые последовательности реальных поворотов ранга α, т.е. на отношение $X \overset{\alpha}{\sim} Y$.

Далее для нормированных вхождений элементарных p-степеней ранга α в слово X вводится понятие *устойчивости* в данном реальном повороте $X \to Y$ ранга α. Нормированное вхождение V элементарной p-степени E ранга α в слово X называется *ядром ранга* α слова X, если оно устойчиво (т.е. не затрагивается) в любом реальном повороте ранга α, не являющемся поворотом самого вхождения V, и никакое его нормированное продолжение не обладает этим свойством. Если два слова эквивалентны в ранге α, то они содержат одинаковое число ядер ранга α. Таким образом, число ядер ранга α данного слова является инвариантом эквивалентных преобразований в ранге α.

Приведенное слово ранга $\alpha - 1$ называется *приведенным словом ранга* α (пишем $X \in \mathcal{R}_\alpha$), если все его ядра ранга α содержат не более чем $n - 176$ периодов.

На множестве $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ следующим образом определяется операция умножения слов, называемая *смыканием ранга* α:

$$[X, Y]_\alpha = PQ \iff (X \overset{\alpha}{\sim} PT \;\&\; Y \overset{\alpha}{\sim} T^{-1}Q \;\&\; PQ \in \mathcal{R}_{\alpha-1}).$$

Доказывается, что эта операция на множестве $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ определена однозначно с точностью до эквивалентности в ранге α и ассоциативна. Более того, множество классов эквивалентности в ранге α слов из $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ с этой бинарной операцией образует группу, изоморфную группе

$$B(m,n,\alpha) = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\ \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A \in \bigcup_{i=1}^{\alpha} \mathcal{A}_i \right\} \right\rangle,$$

где $\mathcal{A}_i$ есть множество всех элементарных периодов ранга i. В частности, для любых слов X, Y из $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ выполнено соотношение

$$X \overset{\alpha}{\sim} Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = Y \ \text{ в группе } \ B(m,n,\alpha).$$

В пределе мы получаем группу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$. Тем самым завершается доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *При нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ изоморфна группе*

$$B(m,n,\infty) = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\ \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i \right\} \right\rangle. \qquad (3)$$

Таким образом, изложенный в работах [2] и [8] подход заключается в том, что, начиная со свободной группы $B(m,n,0) = F_m$, мы последовательно добавляем определяющие соотношения вида $A^n = 1$, сначала для всех элементарных периодов ранга 1, затем для всех элементарных периодов ранга 2 и т. д. При этом само понятие элементарного периода ранга α, так же как и все сопутствующие ему понятия для ранга α, определяются на базе ранее построенного отношения “ $\overset{\alpha-1}{\sim}$ ”, т.е. на базе отношения равенства слов в уже построенной группе $B(m,n,\alpha-1)$.

Группы $B(m,n)$ могут быть заданы независимой системой определяющих соотношений. Такая система определяющих соотношений для группы $B(m,n)$ получается путем выбора в каждом классе взаимно сопряженных в группе $B(m,n,\alpha-1)$ элементарных периодов ранга α по одному элементарному периоду с дополнительным условием, чтобы они не были сопряжены также и отрицательным степеням уже выбранных элементарных периодов данного ранга. Доказывается, что выбранные таким образом множества элементарных периодов ранга α независимы. Обозначим их через $\overline{\mathcal{E}}_\alpha$. В результате получается следующее усиление теоремы 2.

Теорема 3. *При нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ имеет следующее экономное задание*:

$$B(m,n) = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\ \left\{ A^n = 1 \;\middle|\; A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{E}}_i \right\} \right\rangle, \qquad (4)$$

где ни одно из определяющих соотношений нельзя выкинуть.

Доказательство бесконечности группы $B(m,n)$ опирается на существование бесконечных двубуквенных слов, которые не содержат подслов вида A^3 (так называемых последовательностей Туэ–Аршона). Роль такой последовательности здесь может играть последовательность слов C_i в двубуквенном групповом алфавите (1), которая определяется индуктивно на основе следующих равенств:

$$C_1 = a_1, \qquad C_{i+1} = C_i a_2 C_i^{-1}.$$

Несложный анализ показывает, что все эти слова C_i не содержат квадратов слов.

Среди многочисленных утверждений, доказываемых совместной индукцией, в нашей теории есть следующая простая, но ключевая лемма.

Лемма 1. *Если слово X не содержит подслов вида A^9, то оно приведено в любом ранге α и не эквивалентно никакому отличному от него несократимому слову.*

Легко доказывается, что каждое слово в алфавите группы $B(m,n)$ равно в ней некоторому слову, которое является приведенным во всех рангах. Очевидно, если два слова эквивалентны в некотором ранге α, то они равны в группе $B(m,n)$. Доказывается, что для слов, являющихся приведенными во всех рангах, верно и обратное, т.е. верна

Лемма 2. *Если слова X и Y являются приведенными во всех рангах, то*

$$X = Y \ \text{ в } \ B(m,n) \quad \Longleftrightarrow \quad X \overset{\alpha}{\sim} Y \ \text{ при некотором } \ \alpha.$$

В силу лемм 1 и 2 слова C^i задают бесконечное число попарно неравных друг другу элементов группы $B(m,n)$. Тем самым завершается доказательство следующего аналога теоремы 1.

Теорема 4. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ бесконечна.*

Так как свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ является факторгруппой групп $B(m,nk)$ при любых $k > 1$, то из бесконечности группы $B(m,n)$ непосредственно следует также бесконечность бернсайдовых групп $B(m,nk)$ при нечетных $n \geqslant 665$ и любых $k > 1$.

Заметим, что до сих пор $n = 665$ остается наименьшим значением периода, при котором удалось доказать бесконечность свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$.

2. Свойства свободных периодических групп нечетного периода

Как это часто бывает в математике, при появлении нового метода, решающего проблему, не поддававшуюся долгое время усилиям математиков, созданный авторами метод исследования периодических групп вскоре нашел ряд других важных приложений. В том же 1968 году вышли еще две совместные статьи [5] и [6], в которых было доказано, что рассматриваемые группы $B(m,n)$ не могут быть заданы с помощью конечного числа определяющих соотношений и в них разрешимы проблемы равенства слов и сопряженности. Было также доказано, что все абелевы подгруппы этих групп конечны. В монографии [10] все результаты совместных статей двух авторов [4]–[6] были доказаны уже для любых нечетных периодов $n \geqslant 665$. Это существенное понижение границы для n в монографии было достигнуто в результате дальнейшего усовершенствования метода.

Разрешимость проблемы распознавания равенства слов для $B(m,n)$ вытекает из принципа эффективности (см. [10, I.5.4]), согласно которому все рассматриваемые множества слов, функции и отношения между словами и их подсловами алгоритмически эффективны, что также проверяется попутно совместной индукцией. Для доказательства разрешимости проблемы сопряженности кроме принципа эффективности используется следующая лемма.

Лемма 3. *В группе $B(m,n)$ всякое непустое слово сопряжено некоторой степени A^r некоторого элементарного периода A некоторого ранга α, причем этот элементарный период, его степень r и ранг α можно найти алгоритмически.*

По этой лемме вопрос о распознавании сопряженности любых двух слов сводится к распознаванию сопряженности соответствующих элементарных периодов, что, в свою очередь, легко проверяется на основе принципа эффективности.

С помощью последовательности Туэ–Аршона строятся примеры элементарных периодов сколь угодно большого ранга, откуда следует, что рассматриваемые группы $B(m,n)$ не могут быть заданы с помощью конечного числа определяющих соотношений, так как соотношение $A^n = 1$ для периода A данного ранга не может быть выведено из таких же соотношений для периодов меньших рангов.

Доказательство утверждения, что при нечетных $n \geqslant 665$ всякая коммутативная подгруппа группы $B(m,n)$ циклическая и ее порядок есть делитель числа n, получено на основе леммы:

Лемма 4. *Любой неединичный элемент x группы $B(m,n)$ равен в $B(m,n)$ некоторой степени некоторого элемента z, имеющего порядок n, причем все коммутирующие с x элементы являются степенями того же элемента z.*

Из этой леммы легко вытекает тривиальность центра группы $B(m,n)$.

В работе [9] доказано, что все конечные подгруппы в $B(m,n)$ также являются циклическими. Там же установлено, что группа

$B(2,n)$ содержит подгруппу, изоморфную $B(3,n)$. Несколько позже в кандидатской диссертации В. Л. Ширваняна (1976) было доказано, что наш метод позволяет доказать вложимость $B(\infty,n)$ с бесконечным числом порождающих в группу $B(2,n)$. Отсюда легко следует

Теорема 5. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ содержит бесконечные убывающие и бесконечные возрастающие цепочки вложенных подгрупп.*

На самом деле, в группах $B(m,n)$ существуют также бесконечные убывающие и бесконечные возрастающие цепочки нормальных подгрупп. При составных $n = rs$, где $r \geqslant 665$ нечетно и $s > 1$, это доказывается несложно. Несколько сложнее доказательство аналогичного свойства при любых простых $n \geqslant 665$ и $m > 65$. Для доказательства последнего утверждения в работе [13] была рассмотрена новая модификация первоначальной теории. В ней наряду с поворотами периодических слов используются также повороты так называемых *метапериодических слов*, которые не имеют периодичности. Хотя такие повороты появляются только в ранге 1, они обеспечивают возможность бесконечного числа последовательных нетривиальных факторизаций группы $B(m,n)$, в том числе и при простых $n \geqslant 665$.

Эта новая конструкция позволила нам впервые построить примеры конечно порожденных групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$ и имеющих неразрешимую проблему равенства.

Многие из перечисленных выше свойств групп $B(m,n)$ можно рассматривать как существенные усиления утверждения о бесконечности групп $B(m,n)$. Они аналогичны известным свойствам неабелевых свободных групп. В монографии [10] был доказан еще более неожиданный результат о том, что рассматриваемые группы $B(m,n)$ имеют экспоненциальный рост. Функция роста $\gamma(s)$ конечно порожденной группы определяется как число различных элементов, которые представимы в виде произведения не более чем s порождающих. В частности, было установлено, что в группе $B(2,n)$ (при нечетных $n \geqslant 665$) имеется не менее $4 \cdot (2.9)^{s-1}$ различных элементов, которые представимы в виде слова длины s. Заметим, что это очень близко к свободной группе, так как для свободной группы с двумя порождающими число различных элементов данной длины s в точности равно $4 \cdot 3^{s-1}$. Заметим, что для решения самой проблемы Бернсайда, по существу, требовалось лишь ответить на вопрос: может ли функция роста группы $B(m,n)$ быть неограниченной?

В 1982 году в работе [15] была доказана следующая теорема.

Теорема 6. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ не является аменабельной и симметричное случайное блуждание на $B(m,n)$ не является возвратным.*

Тем самым впервые были найдены неаменабельные группы, удовлетворяющие нетривиальному тождеству.

Результат о случайных блужданиях, в свою очередь, явился отрицательным ответом на вопрос, поставленный еще в 1959 году известным американским вероятностником Кестеном [36].

Оба утверждения теоремы 6 были высказаны автором в виде гипотез еще в 1977 году в работе [14, с. 10]. Доказательство этих результатов в [15] опирается на результат Р. И. Григорчука (см. [22]), который свел вопрос об оценке спектрального радиуса симметрического случайного блуждания на группе G с m порождающими к оценке показателя роста нормальной подгруппы свободной группы F^m, факторизация по которой дает группу G. В 1977 году такое сведение еще не было известно. Для оценки спектрального радиуса случайного блуждания на группе $B(m,n)$ была указана такая система определяющих соотношений этой группы, которая удовлетворяет условию Дэна, причем скорость сходимости соответствующего алгоритма Дэна не меньше 228, а относительная скорость сходимости не меньше $1/3$. Напомним, что условием Дэна для данной группы G, заданной множеством определяющих соотношений A, называется требование, чтобы каждое равное 1 в G слово имело вид PEQ, где E есть кусок левой части A одного из определяющих соотношений, длина которого больше половины длины A. При этом *скоростью сходимости* алгоритма Дэна относительно A называется максимальное число δ_R такое, что всегда разность длин $|E| - |QP|$ не меньше δ_R, а *относительной скоростью сходимости* для R — максимальное число γ_R, удовлетворяющее условию $|E| - |QP| \geqslant \gamma_R \cdot |PEQ|$.

Как было отмечено в [31], соединение содержащихся в работах [30] и [15] конструкций позволяет легко получить следующую интересную теорему.

Теорема 7. *При $m \geqslant 1$ и нечетных $n \geqslant 665$ свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ может быть представлена как предел бесконечной последовательности групп, задаваемых конечным числом определяющих соотношений с условием Дэна,*

$$G_0, G_1, \ldots, G_i, G_{i+1}, \ldots,$$

где G_0 есть свободная группа с m порождающими и каждая группа G_{i+1} получается добавлением к заданию группы G_i одного соотношения вида $A^n = 1$.

Напомним, что группы, удовлетворяющие условию Дэна, недавно с легкой руки Г. Громова почему-то были названы *гиперболическими по Громову.*

3. Независимые системы групповых тождеств

Уже в 1969 году автору стало ясно, что, модифицируя созданный нами метод, можно использовать его для построения групп с различными наперед заданными свойствами. Эта идея была впервые применена для решения известной проблемы конечного базиса теории групп. Требовалось выяснить, можно ли любую систему групповых тождеств привести к эквивалентной ей конечной системе тождеств, иначе говоря, можно ли любое многообразие групп задать конечной системой тождеств? Отрицательный ответ был получен в самой сильной форме. Была доказана

Теорема 8. *Система групповых тождеств*

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\}, \tag{5}$$

где $n \geqslant 1003$ — фиксированное нечетное число, а p — параметр, пробегающий все простые числа, является независимой, т.е. ни одно из этих тождеств не вытекает из остальных.

Для доказательства этой теоремы требовалось по любому значению параметра $p = l$ построить некоторую группу, удовлетворяющую всем тождествам (5), кроме того из них, которое получается при $p = l$. Искомая группа G_l строилась на основе некоторой модификации созданного нами метода. В этой модификации наряду со всеми понятиями работы [4] индукцией по рангу α определялось понятие допустимого периода ранга $\alpha + 1$. Именно, минимальный период D ранга $\alpha+1$ называется *допустимым в ранге* α, если можно указать такие слова A и B, что после подстановки их в левую часть тождества (5) при $p \neq l$ получается слово, которое сопряжено в группе $B(m, n, \alpha)$ некоторой степени периода D. В новой теории рассматриваются только такие повороты (2) ранга α, в которых A есть допустимый элементарный период ранга α. Вносится соответствующая корректировка всех определений основных понятий. В частности, все ограничения на число периодов в ядрах ранга α приведенных слов ранга относятся только к тем ядрам, которые связаны с допустимыми периодами ранга α. Искомая группа G_l строится в новой теории аналогично тому, как в первоначальной теории строилась группа $B(m, n, \infty)$.

Истинность тождеств (5) при $p \neq l$ в построенной группе доказывается аналогично тому, как в первоначальной теории доказывалась истинность тождества $x^n = 1$. При этом ключевую роль играет

Лемма 5. *Если элементарный период D допустим в ранге α и в слово D^9 не входит никакая допустимая* 17*-степень ранга α, то период D допустим и в некотором ранге α.*

Эта лемма существенно используется также в доказательстве того, что тождество (5) при $p = l$ в группе G_l не выполняется.

4. Некоммутативные аналоги аддитивной группы рациональных чисел

Известно, что каждая коммутативная группа со свойством бесконечности пересечения любой пары ее циклических подгрупп изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы рациональных чисел. Поэтому это свойство можно считать характеристическим свойством аддитивной группы рациональных чисел. В теории групп давно стоял открытый вопрос о существовании некоммутативных групп с таким же свойством, которые можно было называть некоммутативными аналогами аддитивной группы рациональных чисел. Очевидно, такая группа не должна иметь элементов конечного порядка. Тем не менее в 1971 году в работе [8] с помощью некоторой модификации нашей теории было впервые получено положительное решение этого вопроса. Построенные нами конечно порожденные некоммутативные группы без кручения $A(m,n)$, в которых пересечение любых двух нетривиальных подгрупп бесконечно, являются центральными расширениями групп $B(m,n)$ с циклическим центром. Они задаются в следующем виде:

$$A(m,n) = \Big\langle a_1, a_2, \dots, a_m, d; \quad a_j d = d a_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ \Big\{ A^n = d \;\Big|\; A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathcal{E}}_i \Big\} \Big\rangle, \tag{6}$$

где $\overline{\mathcal{E}}_i$ — независимые множества элементарных периодов ранга i, которые использовались в экономном задании (4) для группы $B(m,n)$. Тем самым было установлено, что в нашей теории можно использовать не только периодические соотношения; достаточно, чтобы они содержали длинные периодические отрезки. В то время как подгруппы группы рациональных чисел либо являются циклическими, либо имеют бесконечное число порождающих, их некоммутативные аналоги $A(m,n)$ могут иметь любое конечное число $m \geqslant 2$ порождающих.

Основное свойство групп $A(m,n)$ заключается в следующем утверждении.

Лемма 6. *Любой элемент групп $A(m,n)$ равен некоторой степени элемента d, порождающего центр группы, причем d имеет бесконечный порядок.*

Обозначим через $\overline{A}(m,n)$ результат добавления к соотношениям группы $A(m,n)$ еще одного соотношения $d^n = 1$. Из леммы 6 легко следует

Теорема 9. *Счетная группа $\overline{A}(m,n)$ допускает только дискретную топологию.*

В самом деле, из леммы 6 следует, что в группе $\overline{A}(m,n)$ любой неединичный элемент является решением одного из конечного числа уравнений

$$x^n = d, \quad x^n = d^2, \quad \dots, \quad x^n = d^{n-1}. \tag{7}$$

Если оснастить группу $\overline{A}(m,n)$ какой-то топологией, то в полученной топологической группе множество всех решений каждого уравнения из конечного множества (7), а значит, и их объединение будет замкнутым множеством. Следовательно, дополнение к этому замкнутому множеству будет открытым и будет содержать единственный элемент — единицу группы.

Вопрос о существовании счетных групп с таким свойством был поставлен А. А. Марковым и оставался открытым несколько десятилетий.

5. Периодические произведения групп

В работе [11] было установлено, что с использованием некоторой модификации нашей теории могут быть построены новые операции умножения групп, названные *периодическими произведениями данного периода n*. Эта операция умножения обладает всеми свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп, в том числе и свойством наследственности по подгруппам. Последнее свойство означает, что если в периодическом произведении H двух или более групп в каждой компоненте выбрать по подгруппе, то эти подгруппы порождают в H периодическое произведение самих подгрупп.

В работе [12] был установлен следующий критерий простоты группы, являющейся периодическим произведением нечетного периода данного семейства групп.

Теорема 10. *Периодическое произведение нечетного периода $n \geqslant 665$ данного семейства групп является простой группой в том и только том случае, когда каждая компонента этого произведения становится единичной группой при добавлении тождества $x^n = 1$.*

Этот критерий простоты позволяет строить новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk, где $k > 1$ и $n \geqslant 665$. В частности, доказано, что для любого множества нечетных простых чисел M, содержащего хотя бы одно число $p \geqslant 664$, можно построить счетную периодическую группу G со *спектром* M. Это означает, что множество всех порядков элементов группы G совпадает с M.

6. Некоторые результаты других авторов

В 1973 году известный английский математик Джон Бриттон предпринял попытку дать альтернативное отрицательное решение проблемы Бернсайда. В своей работе [32] он претендовал на независимое решение проблемы Бернсайда. При подготовке к печати монографии [10] перед автором встал вопрос, как ссылаться на эту работу. Настораживал тот факт, что в 282-страничной статье Бриттона доказывалось существование нечетного периода n, при котором группа бесконечна, но не были указаны конкретные значения для периода группы. Поэтому мы тщательно проверили работу [32]. Эта проверка показала, что доказательство Бриттона основано на противоречивой системе неравенств между используемыми им параметрами. Это противоречие было отмечено в предисловии к монографии [10]. Позже в письме [33] Бриттон и сам признал со ссылкой на [10], что его доказательство было ошибочным.

Через несколько лет после издания монографии [10] у авторов появились последователи, которые не только разобрались в новом методе, но и смогли применить его для получения новых результатов. Так, А. Ю. Ольшанский рассмотрел геометрическую модификацию метода Новикова–Адяна с использованием диаграмм Ван Кампена, которые являются известным эквивалентом выводов равенств слов из данной системы определяющих соотношений. Многочисленные результаты, полученные на этом пути им и его учениками, приведены в книге [26]. Наиболее ярким из них следует признать его результат 1982 года о существовании для простых $n > 10^{75}$ бесконечной 2-порожденной группы, порядки всех собственных подгрупп которой являются делителями числа n (так называемые "монстры Тарского"). В работе [19] В. С. Атабекян и С. В. Иванов распространили этот результат на любые нечетные периоды $n > 10^{80}$. В 1989 году во время обсуждения кандидатской диссертации ученика А. Ю. Ольшанского В. С. Губы ученики А. Ю. Ольшанского высказали предположение, что предложенный А. Ю. Ольшанским метод существенно отличается от оригинальной теории Новикова–Адяна, так как он позволяет строить такие монстры Тарского, которые не были построены с помощью первоначальной теории. Для опровержения этой иллюзии мы с И. Г. Лысенком обещали и в 1991 году опубликовали совместную работу [17], в которой была доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Для любого нечетного периода $n \geqslant 1003$ существует 2-порожденная бесконечная группа, всякая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n.*

Доказательство этой теоремы было проведено на оригинальном языке монографии [10] и основано на изложенной в последней главе этой книги технике при тех же значениях периода $n \geqslant 1003$. После этого не осталось никаких сомнений в том, что используемый А. Ю. Ольшанским подход есть несколько упрощенная и ослабленная модификация метода Новикова–Адяна с использованием геометрического языка диаграмм Ван Кампена для данной системы определяющих соотношений вместо цепочки выводов из этих соотношений. Разумеется, это не умаляет значение результатов, полученных А. Ю. Ольшанским и его учениками с использованием этого языка. В частности, можно упомянуть работу В. С. Губы [24], в которой с помощью техники А. Ю. Ольшанского впервые были построены конечно порожденные полные группы, т.е. группы, в которых из каждого элемента можно извлечь корень любой степени n.

Здесь следует также отметить очень важные результаты, которые были получены в 90-е годы независимо С. В. Ивановым [35] и И. Г. Лысенком [25]. Они установили бесконечность свободных периодических групп $B(m, n)$ для достаточно больших четных периодов n.

При этом им пришлось попутно исследовать структуру конечных подгрупп группы $B(m, n)$ и добавить соответствующие свойства к рассматриваемой системе утверждений, доказываемых совместной индукцией. В процессе доказательства выяснилось, что для применения метода в четном случае нужно потребовать, чтобы период n имел достаточно большой четный множитель: у Лысенка — не менее 2^4, а у Иванова — не менее 2^9. Кстати, внимательный читатель легко заметит, что, анонсируя свой результат, С. В. Иванов в 1992 году еще не знал, что такое условие надо будет наложить на период. Иначе он не стал бы акцентировать внимание на случае, когда этот множитель равен 2 или 4. Позже И. Г. Лысенок показал, что именно в этих случаях метод не удается применить. Впрочем, в своей итоговой статье Иванов это дело исправил.

Любопытно отметить, что в результате статья Лысенка с доказательством бесконечности групп $B(m, n)$ при $n = 2^4 k \geqslant 8000$ (в английской версии) заняла 202 страницы, а статья Иванова [35] с доказательством для периодов $n = 2^9 k \geqslant 2^4 \cdot 8$ заняла 307 страниц. Все дело в том, что оба автора использовали более экономный язык диаграмм Ван Кампена, а схемы индукции они использовали разные: Иванов проводил индукцию по схеме, изложенной в книге Ольшанского [26], а Лысенок — по схеме, изложенной в книге [10].

Список литературы

[1] Burnside W., “On an unsettled question in the theory of discontinuous groups” // *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1902, **33**, 230–238.

[2] Burnside W., “On criteria for the finiteness of the order of linear substitutions” // *Proc. London Math. Soc.*, 1905, **3**, 435–440.

[3] Новиков П. С., “О периодических группах” // *Докл. АН СССР*, 1959, **127**(4), 749–752.

[4] Новиков П. С., Адян С. И., “О бесконечных периодических группах. I, II, III” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1968, **32**(1), 212–244; **32**(2), 251–524; **32**(3), 709–731.

[5] Новиков П. С., Адян С. И., “Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1968, **32**(4), 971–979.

[6] Новиков П. С., Адян С. И., “О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности тождества для свободных периодических групп нечетного порядка” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1968, **32**(5), 1176–1190.

[7] Адян С. И., “Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств” // *Докл. АН СССР*, 1970, **190**(3), 499–501; *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1970, **34**(4), 719–734.

[8] Адян С. И., “О некоторых группах без кручения” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1971, **35**(3), 459–468.

[9] Адян С. И., “О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя” // *Труды МИАН*, 1971, **112**, 64–72.

[10] Адян С. И., *Проблема Бернсайда и тождества в группах.* – М.: Наука, 1975.

[11] Адян С. И., “Периодические произведения групп” // *Труды МИАН*, 1976, **142**, 3–21.

[12] Адян С. И., “О простоте периодических произведений групп” // *Докл. АН СССР*, 1978, **241**(1), 745–748.

[13] Адян С. И., “Нормальные подгруппы свободных периодических групп” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1981, **45**(5), 1139–1149.

[14] Адян С. И., “Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами” // *УМН*, 1977, **32**(1), 3–15.

[15] Адян С. И., // *Случайные блуждания на свободных периодических группах,* // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1982, **46**(6), 1139–1149.

[16] Адян С. И., “Исследования по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам” // *Труды МИАН*, 1984, **168**, 171–196.

[17] Адян С. И., Лысенок И. Г., “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1991, **55**(5), 933–990.

[18] Алешин С. В., “Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах” // *Матем. заметки*, 1972, **11**(3), 319–328.

[19] Атабекян В. С., Иванов С. В., *Два замечания о группах ограниченного периода.* Деп. в ВИНИТИ 30.03.1987, № 2243-В87.

[20] Голод Е. С., “О ниль-алгебрах в финитно-аппроксимируемых группах” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1964, **28**(2), 273–276.

[21] Григорчук Р. И., “О проблеме Бернсайда о периодических группах” // *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(1), 53–54.

[22] Григорчук Р. И., “Симметрические случайные блуждания на дискретных группах” // *Многокомпонентные случайные системы.* – М.: Наука, 1978, 132–152.

[23] Губа В. С., “Конечно порожденная полная группа” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1986, **50**(5), 50–67.

[24] Губа В. С., *Построение групп с новыми свойствами с помощью диаграмм сокращения.* Автореферат канд. дисс. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

[25] Лысенок И. Г., “Бесконечные бернсайдовы группы четного периода” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, **60**(3), 3–224.

[26] Ольшанский А. Ю., *Геометрия определяющих соотношений в группах.* – М.: Наука, 1989.

[27] Санов И. Н., “Решение проблемы Бернсайда для показателя 4” // *Ученые записки ЛГУ. Сер. матем.*, 1940, **10**, 166–170.

[28] Санов И. Н., “Установление связи между периодическими группами с периодом числом и кольцами Ли” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1952, **16**(1), 23–58.

[29] Чандлер Б., Магнус В., *Развитие комбинаторной теории групп.* – М.: Мир, 1985.

[30] Adian S. I., "On the word probem for groups defined by periodic relations" // *Lecture Notes in Math.*, 1980, **806**, 41–46.

[31] Adyan S. I., Lysionok I. G., "The method of classification of periodic words and the Burnside problem" // *Contemp. Math.*, 1992, **131** (Part 1), 13–28.

[32] Britton J. L., "The existence of infinite Burnside groups" // *Stud. Logic Found. Math.*, 1973, **71**, 67–348.

[33] Britton J. L., "Erratum: The existence of infinite Burnside groups" // *Stud. Logic Found. Math.*, 1980, **95**, 71.

[34] Hall M. jun., "Solution of the Burnside problem for exponent six" // *Illinois J. Math.*, 1958, **2**, 764–786.

[35] Ivanov S. V., "The free Burnside groups of sufficiently large exponents" // *Int. J. Algebra Comput.*, 1994, **4**, 1–307.

[36] Kesten H., "Symmetric random walks on groups" // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959, **92**, 336–354.

[37] Magnus W., "A connection between the Baker–Hausdorf formula and a problem of Burnside" // *Ann. of Math.* (2), 1950, **52**, 111–126; 1953, **57**, 606.

[38] Shur I., "Über Gruppen periodisher Linearer Substitutionen" // *S. Ber. Preuss. Akad.*, 1911, 619–627.

Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами

А. А. Болибрух

Введение

В настоящей работе рассматриваются следующие задачи аналитической теории дифференциальных уравнений: 21-я проблема Гильберта для фуксовых систем линейных дифференциальных уравнений, проблема нормальной формы Биркгофа для системы линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой и проблема классификации изомонодромных деформаций фуксовых систем.

Во всех трех случаях речь идет о дифференциальных уравнениях с мероморфными коэффициентами, линейных в первых двух упомянутых проблемах и нелинейных уравнениях в частных производных в третьей проблеме. В настоящей работе показано, что все три эти проблемы, занимающие центральное место в аналитической теории дифференциальных уравнений, тесно связаны между собой и что методы решения одной из них могут быть с успехом применены к решению других.

Главным результатом представляемой работы является решение 21-й проблемы Гильберта для линейных фуксовых систем.

Эта проблема связана с некоторым специальным классом линейных дифференциальных уравнений на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, с классом так называемых фуксовых систем.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$df = \omega f \tag{0.1}$$

на сфере Римана, где $\omega = \|\omega_{ij}\|$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, — матрица дифференциальных 1-форм, голоморфных на $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением некоторого конечного множества D особых точек $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Точка a_i называется фуксовой точкой системы (0.1), если форма ω имеет в этой точке полюс первого порядка. Обозначим через $B^i = \operatorname{res}_{a_i}\omega$ вычеты формы ω в точках a_i. Если точки ∞ нет среди особых точек фуксовой системы (0.1), то по теореме о сумме вычетов

$$\sum_{i=1}^{n} B^i = 0. \tag{0.2}$$

Фуксова система в координате z комплексной плоскости может быть записана следующим образом:

$$\frac{df}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} B^i \frac{1}{z - a_i}\right) f. \tag{0.3}$$

Рассмотрим в окрестности точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ фундаментальную матрицу $Y(z)$ пространства X решений системы (0.1) (столбцы матрицы $Y(z)$ образуют базис в X). Обозначим через $Y'(z)$ аналитическое продолжение $Y(z)$ вдоль петли γ, лежащей в $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$. Матрица $Y'(z)$ также является фундаментальной матрицей пространства X, поэтому

$$Y'(z)G = Y(z), \qquad G \in GL(p; \mathbb{C}).$$

Сопоставление $\gamma \mapsto G$ зависит лишь от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ и задает гомоморфизм

$$\chi \colon \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus D, z_0) \to GL(p; \mathbb{C}) \tag{0.4}$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ в группу невырожденных комплексных матриц порядка p. Гомоморфизм (0.4) называется представлением монодромии или просто монодромией системы (0.1), а группа $\operatorname{Im}\chi$ — группой монодромии этой системы. При замене точки z_0 на z_0' или при замене фундаментальной матрицы $Y(z)$ матрицы монодромии G переходят в $S^{-1}GS$, где S — неособая постоянная матрица. Тем самым монодромия системы (0.1) определена с точностью до эквивалентности.

Аналогично определяется представление монодромии и для скалярных линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами

$$u^{(p)} + q_1(z)u^{(p-1)} + \cdots + q_p(z)u = 0. \tag{0.5}$$

При этом вместо матрицы $Y(z)$ следует рассмотреть матрицу, i-й столбец которой имеет вид $\left(u_i, \dfrac{du_i}{dz} \dots \dfrac{d^{p-1}u_i}{dz^{p-1}}\right)^t$, где $u_1, \dots, u_p$ — базис в пространстве решений уравнения (0.5), а t означает транспонирование. Уравнение (0.5) называется *фуксовым* в особой точке a_i, если порядок полюса коэффициента $q_j(z)$ этого уравнения в точке a_i не превосходит числа j.

Все особые точки являются для фуксовой системы (0.3) *регулярными* особыми точками. Последнее означает, что любое решение f при приближении к особой точке a_i по любой секториальной окрестности с вершиной в точке a_i, не совпадающей с $\mathbb{C}$, растет не быстрее некоторой степени расстояния $|z - a_i|$ до этой точки.

Класс систем (0.1) с регулярными особыми точками содержит в себе класс фуксовых систем, но не исчерпывается им[1].

В отличие от систем, для уравнений (0.5) понятия фуксовости и регулярности эквивалентны[2].

2. Задача восстановления фуксова уравнения по его монодромии (0.4) впервые упоминается Риманом в одной из заметок конца 1850-х годов[3]. В 1900 г. она была включена Д. Гильбертом в число его “Математических проблем” под номером XXI и сформулирована следующим образом[4]:

“Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии”.

Сложилась традиция, по которой эта проблема применительно к фуксовым системам называется в литературе проблемой Римана–Гильберта. (Аналогичное название употребляется и для

[1] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[2] Ibid.

[3] *Риман Б.* Сочинения. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.

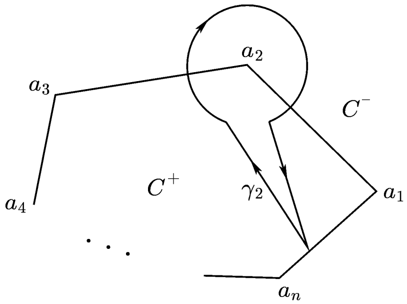
[4] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969.

другой задачи, которая здесь не рассматривается[5].) Конформным преобразованием $\overline{\mathbb{C}}$ всегда можно добиться того, чтобы точки ∞ не было среди особых точек системы (0.1), поэтому проблему Римана–Гильберта можно сформулировать так:

Дано представление (0.4). *Показать, что всегда существует система* (0.3), (0.2) *с заданной монодромией* (0.4).

Долгое время считалось, что проблема Римана–Гильберта полностью решена И. Племелем в работе 1908 года[6]. Однако в начале 1980-х годов в его доказательстве были обнаружены лакуны[7]. Метод решения, предложенный Племелем, состоял в сведении проблемы Римана–Гильберта к так называемой однородной граничной задаче Гильберта теории сингулярных интегральных уравнений. Подробное исследование последней задачи содержится в книге Н. И. Мусхелишвили[8] и уже упомянутой книге Н. П. Векуа. Указанное сведение осуществляется следующим образом.

Пусть все точки $a_1, \ldots, a_n$ лежат в конечной комплексной плоскости. Соединим их простым замкнутым контуром L (см. диаграмму).



Зададим на L кусочно постоянную невырожденную матричную функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = G_i \cdots G_1, \qquad t \in [a_i; a_{i+1}),$$

[5] См., например, *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.

[6] *Plemelj J.* Problems in the sense of Riemann and Klein. New York: Interscience Publ., 1964.

[7] *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы I. Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985; *Treibich Kohn A.* Un résultat de Plemelj // Progr. Math., 1983, **37**, 307–312.

[8] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

где G_i — матрица монодромии (0.4), соответствующая обходу точки a_i по “малой” петле. Обозначим через $\mathbb{C}^+$ область конечной плоскости комплексного переменного, ограниченную контуром L, через $\mathbb{C}^-$ — дополнение к $\mathbb{C}^+$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим следующую задачу: найти все такие пары векторфункций $\varphi^+ = (\varphi^+_{(1)}, \ldots, \varphi^+_{(p)})$ и $\varphi^- = (\varphi^-_{(1)}, \ldots, \varphi^-_{(p)})$, что:

1) $\varphi^+(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}^+$, $\varphi^-(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}^-$ и имеет степенной рост в точке ∞;

2) $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ непрерывны вплоть до контура L за исключением точек $a_1, \ldots, a_n$ и на (a_i, a_{i+1}) связаны соотношением

$$\varphi^+(t)g(t) = \varphi^-(t);$$

3) $\varphi^\pm(z)(z - a_i)^\varepsilon$ стремится к нулю для некоторого $0 \leqslant \varepsilon < 1$ при приближении точки z к a_i по областям $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ соответственно.

Эта задача сводится к задаче с непрерывной функцией $g(t)$ (Племель и Векуа осуществляют такое сведение по-разному), которая затем решается методами теории сингулярных интегральных уравнений. При этом оказывается, что всегда существует такая система решений $\varphi^\pm_1(z), \ldots, \varphi^\pm_p(z)$, для которой выполнены следующие условия:

а) определитель матрицы Y, строчки которой составлены из вектор-функций $\varphi^\pm_1(z), \ldots, \varphi^\pm_p(z)$, отличен от нуля во всех точках комплексной плоскости $\mathbb{C}$ за исключением точек из D;

б) матрица $z^S \cdot Y(z)$, где S — некоторая целочисленная диагональная матрица, голоморфно обратима в точке ∞.

Функция $\varphi^+_l(z)$ из этой системы решений допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути, не пересекающего множества D особых точек, в любую точку $\mathbb{C} \setminus D$. Из свойства 2) следует, что при продолжении φ^+_l вдоль “малой” петли, обходящей точку a_i, φ^+_l переходит в $\varphi^+_l G_i^{-1}$ (на диаграмме $i = 2$), поэтому то же самое верно и для матрицы $Y(z)$. Таким образом, при аналитическом продолжении вдоль петли γ с началом и концом в точке z_0 матрица Y переходит в $\widetilde{Y}$, где

$$\widetilde{Y} G = Y, \qquad G = \chi([\gamma]).$$

То же самое верно и для матрицы

$$Y' = (z - a_1)^S Y,$$

которая уже является голоморфно обратимой в точке ∞ согласно свойству б) построенной системы решений.

Отсюда и из свойства а) следует, что матричная форма

$$\omega = dY'(Y')^{-1} \tag{0.6}$$

однозначна на $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфна вне особых точек $a_1, \dots, a_n$ из D. Система (0.1) с матричной формой (0.6) имеет заданную монодромию (0.4), а точки $a_1, \dots, a_n$ являются для нее регулярными особыми точками.

Далее Племель применяет некоторую процедуру, с помощью которой переходит от построенной системы к другой с той же монодромией и с теми же особыми точками, которая уже является фуксовой во всех точках, кроме, быть может, одной. Доказательство Племеля в этой части не вызывает никаких возражений. Что же касается утверждения Племеля о том, что в последней точке систему также можно привести к фуксовой, то строгое доказательство в общем случае в его работе отсутствует. Однако рассуждение Племеля можно довести до конца, если одна из матриц монодромии G_i диагонализируема[9].

Итак, в работе Племеля доказана разрешимость проблемы Римана–Гильберта в случае, когда одна из матриц монодромии G_i, соответствующая обходу точки a_i по "малой" петле, диагонализируема.

Племель также первым решил проблему, аналогичную проблеме Римана–Гильберта, в классе систем с регулярными особыми точками.

После опубликования результата тематика работ, связанных с проблемой Римана–Гильберта, переместилась в основном в область эффективного построения матриц фуксовой системы по заданным матрицам монодромии $G_1, \dots, G_n$. В конце 1920-х годов И. А. Лаппо-Данилевский с помощью развитого им метода аналитических функций от матриц представил решения фуксовой системы и матрицы монодромии $G_1, \dots, G_n$ в виде сходящихся рядов от матриц коэффициентов этой системы[10]. Эффективное

[9] *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы I. Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985.

[10] *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.

решение проблемы Римана–Гильберта сводилось в этом случае к обращению полученных рядов и исследованию вопроса сходимости, который был решен в его работе положительно для матриц $G_1, \ldots, G_n$, близких к единичной матрице.

Тем самым Лаппо-Данилевский доказал разрешимость проблемы Римана–Гильберта для представлений (0.4), матрицы монодромии которых, соответствующие обходам точек a_i по “малым” петлям, близки к единичной матрице.

В 1956 г. разрешимость проблемы Римана–Гильберта для представления (0.4) размерности $p = 2$ в случае трех особых точек доказал Б. Л. Крылов, построив эффективное решение задачи[11].

Аналогичную задачу для четырех особых точек рассмотрел Н. П. Еругин[12].

Новый этап в изучении проблемы Римана–Гильберта открыла работа Х. Рёрля[13] 1957 года, впервые применившего к ее решению методы теории расслоений. (Фактически соображения такого рода восходят к Г. Биркгофу[14], передоказавшему результат Племеля, однако в то время адекватного геометрического языка для соответствующего описания не было.)

По представлению (0.4) Рёрль строит главное расслоение F' на $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ со структурной группой $GL(p; \mathbb{C})$. Построенное расслоение оказывается голоморфно тривиальным (поскольку оно является топологически тривиальным расслоением на многообразии Штейна[15]), поэтому форма ω из (0.6), построенная по голоморфной тривиализации этого расслоения, определяет систему (0.1) с заданными особыми точками и заданной монодромией. Затем Рёрль продолжает расслоение F' на всю сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Продолженное расслоение всегда имеет мероморфное сечение, голоморфно обратимое вне точек из D. Построенная по этому сечению система (0.1) имеет заданную монодромию, а точки $a_1, \ldots, a_n$ являются для нее регулярными особыми точками.

---

[11] *Крылов Б. Л.* Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса // Труды Казан. авиац. ин-та, 1956, **31**, 203–445.

[12] *Еругин Н. П.* Проблема Римана. Минск: Наука и техника, 1982.

[13] *Röhrl H.* Das Riemann–Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen // Math. Ann., 1957, **133**(1), 1–25.

[14] *Birkhoff G. D.* A theorem on matrices of analytic functions // Math. Ann., 1913, **74**, 122–133.

[15] *Grauert H.* Analytische Faserungen uber holomorph-vollstandingen Raumen // Math. Ann., 1958, **135**(3), 263–273.

Таким образом, Рёрль передоказал результаты Племеля, а также доказал разрешимость проблемы Римана–Гильберта на некомпактной римановой поверхности. Кроме того, Рёрль доказал разрешимость в классе систем с регулярными особыми точками проблемы, аналогичной проблеме Римана–Гильберта, для произвольной римановой поверхности (при этом, правда, у построенной системы появляются, вообще говоря, дополнительные "ложные" особенности, не дающие вклада в монодромию).

В 1979 году появилась работа В. Деккерса[16], из результатов которой вытекает разрешимость проблемы Римана–Гильберта для любого набора точек $a_1, \ldots, a_n$ и любого представления (0.4) размерности $p = 2$. Различные аспекты проблемы Римана–Гильберта и связанные с ней задачи рассматривались также в работах[17].

3. Результаты по проблеме Римана–Гильберта представлены в главе 1. Основным результатом здесь является следующий:

Теорема 1. *Для любого $n > 3$, любого набора точек $a_1, \ldots, a_n$ и любого $p \geqslant 3$ найдется такое представление* (0.4), *для которого не существует реализующей его фуксовой системы.*

Теорема 1 означает, что проблема Римана–Гильберта имеет в общем случае *отрицательное решение.*

Отрицательный ответ на проблему, поставленную Гильбертом, порождает следующий вопрос: какие представления монодромии все-таки могут быть реализованы фуксовыми системами? Здесь главным является следующий результат, полученный в [3].

Теорема 2. *Любое неприводимое представление* (0.4) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы*[18].

[16] *Dekkers W.* The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(C)$ // Lecture Notes in Math., 1979, **712**, 33–43.

[17] *Голубева В. А.* Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // УМН, 1976, **31**(2), 135–202; *Сато М., Дзимбо М., Мива Т.* Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983; *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // Physica D, 1981, **2**, 407–448.

[18] Этот результат был получен независимо также В. Костовым в *Kostov V. P.* Fuchsian systems on CP^1 and the Riemann–Hilbert problem // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1992, **315**, 143–148.

Метод исследования проблемы Римана–Гильберта, обобщающий подходы Рёрля и Делиня[19], состоит в следующем: вначале мы строим расслоение (точнее, серию расслоений) на сфере Римана с логарифмической связностью, имеющей заданную монодромию и заданные особые точки. Тем самым, исходная задача сводится к вопросу о тривиальности этого расслоения (точнее, какого-либо из построенных расслоений), ибо в тривиальном расслоении логарифмическая связность задает фуксову систему дифференциальных уравнений.

Затем, мы исследуем вопрос о тривиальности построенного расслоения (серии расслоений) и получаем условия разрешимости проблемы Римана–Гильберта.

Как известно, задача построения фуксова линейного дифференциального уравнения p-го порядка с данной монодромией и данными особыми точками имеет в общем случае при $p > 1$ отрицательное решение, так как такое уравнение содержит меньше параметров, чем множество классов эквивалентности представлений (0.4) (такой подсчет параметров восходит к Пуанкаре[20]). Поэтому при построении фуксова уравнения возникают дополнительные особые точки коэффициентов, которые не дают вклада в монодромию и называются “ложными” особыми точками. В разделе 1.3 главы 1 найдено точное значение для минимально возможного числа m_0 таких точек.

По любому фуксову в окрестности точки a_i уравнению с помощью специальной замены можно построить фуксову систему, однако это построение носит существенно локальный характер[21]. В работе [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *По любому фуксову уравнению на сфере Римана можно построить фуксову систему* (0.3) *с теми же особыми точками и той же монодромией.*

В разделе 1.2 главы 1 сформулированы также различные достаточные условия реализуемости представления (0.4) фуксовой системой.

[19] *Deligne P.* Equations différentielles a points singuliers réguliers // Lecture Notes in Math., 1970, **163**, 1–133.

[20] *Пуанкаре А.* О группах линейных уравнений. М.: Наука, 1974. (Избр. тр. Т. 3.)

[21] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

В разделе 1.1 этой главы представлено краткое описание устройства пространства решений дифференциального уравнения с регулярными особыми точками, принадлежащее А. Х. М. Левелю[22].

4. Методы, развитые для исследования проблемы Римана–Гильберта, находят применение и в других задачах аналитической теории дифференциальных уравнений. К их числу относится задача о биркгофовой стандартной форме.

Рассмотрим в окрестности бесконечно удаленной точки систему линейных дифференциальных уравнений

$$z\frac{dy}{dz} = C(z)y, \tag{0.7}$$

с матрицей коэффициентов $C(z)$ размера (p,p) и вида

$$C(z) = z^r\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n}, \qquad C_0 \neq 0, \quad r \geqslant 0, \tag{0.8}$$

где ряд сходится в некоторой окрестности $O_\infty = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ точки ∞.

Напомним, что число r называется *рангом Пуанкаре* системы (0.7) в особой точке ∞. Если $r > 0$, то эта особая точка является, вообще говоря, иррегулярной особой точкой.

Под действием преобразования

$$x = \Gamma(z)y \tag{0.9}$$

система (0.7) переходит в систему

$$z\frac{dx}{dz} = \widetilde{C}(z)x, \tag{0.10}$$

где

$$\widetilde{C}(z) = z\frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1} + \Gamma C(z)\Gamma^{-1}. \tag{0.11}$$

Если $\Gamma(z)$ голоморфно обратимо в O_∞ , то $\Gamma(z)$ называется *аналитическим преобразованием*. Если же $\Gamma(z)$ аналитично в O_∞, а функции Γ, Γ^{-1} лишь мероморфны в точке ∞, то $\Gamma(z)$ называется *мероморфным преобразованием*. Ясно, что аналитическое преобразование, в отличие от мероморфного, не меняет ранга Пуанкаре системы.

[22] *Levelt A. H. M.* Hypergeometric functions // Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, 1961, **64**, 361–401. (См. также [1], [5].)

В 1913 году Биркгоф[23] доказал, что любая система (0.7) аналитическим преобразованием может быть приведена к такой системе (0.10), в которой матрица коэффициентов $\widetilde{C}(z)$ имеет вид

$$\widetilde{C}(z) = \widetilde{C}_r z^r + \cdots + \widetilde{C}_0, \tag{0.12}$$

т.е. $\widetilde{C}(z)$ является многочленом степени r от переменной z.

С тех пор система вида (0.10), (0.12) называется *биркгофовой стандартной формой* исходной системы (0.7).

Однако доказательство Биркгофа оказалось ошибочным, и в начале 1950-х годов Гантмахер привел контрпример к утверждению Биркгофа[24]. Как оказалось, доказательство Биркгофа проходит лишь для случая, когда матрица монодромии системы (0.7) в точке ∞ может быть приведена к диагональному виду.

Однако позднее было установлено, что препятствием к аналитической редукции системы к биркгофовой стандартной форме является ее приводимость.

Система (0.7) называется *приводимой*, если с помощью аналитического преобразования (0.9) она может быть приведена к виду (0.10) с матрицей коэффициентов $\widetilde{C}$, имеющей блочный верхнетреугольный вид

$$\widetilde{C}(z) = \begin{pmatrix} C' & * \\ 0 & C'' \end{pmatrix} \tag{0.13}$$

В противном случае система называется *неприводимой*.

Основным результатом главы 2 является следующая теорема:

Теорема 4. *Любая неприводимая система* (0.7) *может быть преобразована к биркгофовой стандартной форме с помощью аналитического преобразования* (0.9).

(Ранее, в случае системы двух уравнений аналогичный результат был получен Юркатом, Лутцем и Пейеримхофом[25], а в случае трех уравнений — Бальзером[26].)

---

[23] *Birkhoff G. D.* Collected mathematical papers // J. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 259–306.

[24] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[25] *Jurkat W. B., Lutz D. A., Peyerimhoff A.* Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic differential equations. I // J. Math. Anal. Appl., 1976, **53**, 438–470; II // Houston J. Math., 1976, **2**, 207–238.

[26] *Balser W.* Analytic transformation to Birkhoff standard form in dimension three // Funkcial. Ekvac., 1990, **33**(1), 59–67.

В представленном цикле работ рассматривается также вопрос о возможности преобразования системы линейных дифференциальных уравнений к биркгофовой стандартной форме с помощью мероморфного преобразования, не повышающего ранга Пуанкаре системы в особой точке.

Эта задача является естественным обобщением предыдущей на более широкий класс преобразований и представляет значительный интерес в связи с тем, что мероморфные преобразования не меняют ни матриц Стокса, ни монодромии системы. Вопрос о возможности мероморфного приведения системы к биркгофовой стандартной форме возникает при исследовании обратной задачи в дифференциальной теории Галуа, при вычислении матриц Стокса, при доказательстве свойства Пенлеве для изомонодромных деформаций линейных систем с иррегулярными особыми точками и т.п.

В 1976 году Юркат, Лутц и Пейеримхоф в уже цитированной работе доказали что задача приведения системы уравнений к биркгофовой стандартной форме мероморфным преобразованием в случае системы двух уравнений всегда имеет положительное решение. В 1989 году Бальзер[27] доказал аналогичный результат для системы трех уравнений.

В работе [11] мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 5. *Любая система* (0.7) *четырех и пяти уравнений, имеющая не более двух неприводимых блоков, может быть приведена к биркгофовой стандартной форме с помощью не повышающего ранга Пуанкаре мероморфного преобразования* (0.9).

5. В главе 3 решается задача об описании изомонодромных деформаций фуксовых систем дифференциальных уравнений.

Наиболее известным видом изомонодромной деформации фуксовой системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^0}{z-a_i^0}\right) y$$

на сфере Римана является деформация, задаваемая уравнением Шлезингера. Она определяется пфаффовой системой

$$dy = \omega_s y, \qquad \omega_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i)$$

[27] *Balser W.* Meromorphic transformation to Birkhoff standard form in dimension three // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 1989, **36**, 233–246.

и начальными данными $B_i(a)|_{a^0} = B_i^0$. Условие изомонодромности эквивалентно условию полной интегрируемости $d\omega_s = \omega_s \wedge \omega_s$ последней системы. Указанное условие имеет вид

$$dB_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j}\, d(a_i - a_j).$$

Оно и называется *уравнением Шлезингера* изомонодромных деформаций.

Уравнение Шлезингера исследовалось самим Шлезингером[28], Джимбо и Мивой[29], Б. Мальгранжем[30], Итсом и Новокшеновым[31], Сибуйей[32] и другими математиками с различных точек зрения.

Оказывается, что если матрицы B_i^0 коэффициентов деформируемой системы не имеют резонансов, то любая изомонодромная деформация либо описывается уравнением Шлезингера, либо сводится к последнему голоморфной по параметру деформации заменой[33] $y' = C(a)y$. Последние деформации полностью описываются вполне интегрируемыми пфаффовыми системами с формой коэффициентов

$$\omega_n = \omega_s + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r(a) da_r.$$

В настоящей работе мы приводим описание общего вида изомонодромных деформаций произвольной фуксовой системы при наличии резонансов. Напомним, что матрица коэффициентов B_i^0 называется резонансной, если для какой-либо пары ее собственных значений разность между этими собственными значениями

[28] *Schlesinger L.* Über Lösungen gewisser Differentialgleichungen als Funktionen der singularen Punkte // J. Reine Angew. Math., 1905, **129**, 287–294.

[29] *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // Physica D, 1981, **2**, 407–448.

[30] *Malgrange B.* Sur les déformations isomonodromiques // Progr. Math., 1983, **37**, 427–438.

[31] *Its A., Novokshenov V.* The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations // Lecture Notes in Math., 1986, **1191**.

[32] *Sibuya S.* Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation. Providence, 1990.

[33] *Iwasaki K. et al.* From Gauss to Painlevè. A modern theory of special functions. Braunschweig: Vieweg, 1991.

является натуральным числом. Наибольшее число r_i из таких чисел называется максимальным i-резонансом системы.

Мы доказываем, что *любая изомонодромная деформация фуксовой системы определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой с формой коэффициентов вида* $\omega = \omega_n + \omega_m$, где ω_m некоторая мероморфная равная нулю при $z = \infty$ дифференциальная форма с полюсами порядка не выше, чем r_i на $\{z - a_i = 0\}$.

1. Проблема Римана–Гильберта

§ 1.1. Локальное устройство фуксовой системы

Рассмотрим пространство X решений системы (0.1) в окрестности регулярной особой точки a_i. Будем считать, что $a_i = 0$ (для чего сделаем замену координат $z \mapsto z - a_i$). Выберем какую-либо фундаментальную матрицу $Y(z)$ пространства решений X и обозначим через G матрицу монодромии фундаментальной матрицы $Y(z)$ в точке 0.

Обозначим через E матрицу $(1/2\pi i)\ln G$. Выберем раз и навсегда собственные значения ρ^j матрицы E так, чтобы выполнялись неравенства
$$0 \leqslant \operatorname{Re} \rho^j < 1. \tag{1.1}$$

Определим матрицу z^E следующим образом:
$$z^E = \exp(E \ln z) = I + E \ln z + \cdots + E^n \ln^n \frac{z}{n!} + \cdots .$$

Тогда при аналитическом продолжении вдоль петли σ матричная функция z^E переходит в
$$\exp(E(\ln z + 2\pi i)) = z^E \exp(2\pi i E) = z^E G,$$

то есть матрица z^E имеет ту же монодромию, что и исходная фундаментальная матрица $Y(z)$. Поэтому имеет место

Лемма 1. *Фундаментальная матрица $Y(z)$ имеет следующее разложение в проколотой окрестности $\dot{O}$ точки $z = 0$:*
$$Y(z) = M(z) z^E, \tag{1.2}$$

где $M(z)$ — однозначная матричная функция в $\dot{O}$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая техническая лемма, касающаяся характера поведения матричной функции z^E в окрестности нуля.

Лемма 2. *Элементы* $((a_{ij}))$ *матрицы* z^E *имеют вид*

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{p} z^{\rho^l} P_{ij}^l(\ln z), \tag{1.3}$$

где ρ^l *— собственные значения матрицы* E, *а* $P_{ij}^l(\ln z)$ *— многочлены от* $\ln z$ *степени не больше* $p-1$.

Следствие 1. *Точка* $z=0$ *является регулярной особой точкой для системы* (0.1) *тогда и только тогда, когда матрица* $M(z)$ *в разложении* (1.2) *мероморфна в нуле.*

На пространстве решений системы с регулярной особой точкой можно ввести понятие нормирования (целочисленной скорости роста решений) следующим образом. Из лемм 1 и 2 следует, что любое решение $y(z)$ может быть записано в виде так называемой конечной логарифмической суммы

$$y(z) = \sum_{j,l\in\sigma} f_{jl}(z) z^{\rho_j} (\ln z)^{b_l},$$

где f_{jl} — ряды Лорана с конечной главной частью, числа ρ_j удовлетворяют соотношению (1.1), b_l — целые неотрицательные, и подобные члены (относительно пар (ρ_j, b_l)) приведены.

Нормированием решения $y(z)$ *в нуле называется минимум нормирований рядов* f_{jl} *по всем* $j, l \in \sigma$, *где, в свою очередь, под нормированием функции* $f_{jl}(z)$ *в нуле понимается порядок ее нуля или порядок ее полюса (со знаком минус) в точке* $z = 0$.

Рассмотрим вновь пространство решений X системы (0.1).

Предложение 1. *Нормирование* φ *задает отображение* φ: $X \to \mathbb{Z} \cup \infty$, *обладающее следующими свойствами*:

а) $\varphi(y_1 + y_2) \geqslant \min(\varphi(y_1), \varphi(y_2))$, *причем если* $\varphi(y_1) \neq \varphi(y_2)$, *то имеет место равенство*;

б) $\varphi(cy) = \varphi(y)$ *для любого* $c \in \mathbb{C} \setminus 0$;

в) $\varphi(\sigma^* y) = \varphi(y)$, *где* σ^* *— оператор монодромии системы в особой точке* $z = 0$.

Из свойств а) и б) следует, что нормирование φ принимает на X конечное число значений $\infty > \psi^1 > \cdots > \psi^m$ и задает фильтрацию
$$0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^m = X \tag{1.4}$$
пространства X линейными подпространствами
$$X^k = \{y \in X \,|\, \varphi(y) \geqslant \psi^k\}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$
Согласно свойству в) оператор σ^* сохраняет эту фильтрацию. Обозначим через k_l размерность факторпространства X^l/X^{l-1}, а через ${}^l\sigma^*$ — ограничение σ^* на X^l.

Рассмотрим базис $e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1$ пространства X^1, в котором матрица оператора ${}^1\sigma^*$ имеет верхний треугольный вид, дополним его до базиса $e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{k_2}^2$ пространства X^2, в котором верхний треугольный вид имеет матрица оператора ${}^2\sigma^*$ и т.д. (Для построения элементов $e_1^l, \ldots, e_{k_l}^l$ достаточно рассмотреть произвольный базис $\overline{e}_1^l, \ldots, \overline{e}_{k_l}^l$ факторпространства X^l/X^{l-1}, в котором матрица индуцированного оператором ${}^l\sigma^*$ оператора ${}^{l,l-1}\sigma^* \colon X^l/X^{l-1} \to X^l/X^{l-1}$, имеет верхний треугольный вид, а затем выбрать произвольных представителей этого базиса в X^l.)

Построенный базис $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ пространства X обладает следующими свойствами:

1) нормирование φ принимает на элементах базиса (e) все свои значения $\psi^1, \ldots, \psi^m$ (с учетом кратностей $k_1, \ldots, k_m$);

2) $\varphi(e_{l+1}) \leqslant \varphi(e_l)$, $l = 1, \ldots, p-1$;

3) матрица G оператора σ^* имеет в этом базисе верхний треугольный вид.

Определение 1. Базис (e) пространства X решений системы (0.1) с регулярной особой точкой 0, удовлетворяющий свойствам 1)–3), называется *левелевским*.

Пример 1. Пусть оператор σ^* приводится к жордановой клетке. Тогда соответствующий жорданов базис (e) будет левелевским базисом пространства X.

Любой другой левелевский базис пространства X может быть получен из (e) верхнетреугольным преобразованием.

Доказательство. Обозначим через Y^l подпространство размерности l пространства X, натянутое на векторы $e_1, \ldots, e_l$ жорданова базиса (e). Фильтрация

$$0 \subset Y^1 \subset \cdots \subset Y^p = X$$

является единственной фильтрацией длины p пространства X, инвариантной относительно действия σ^*, поскольку элементы $e_1, \ldots, e_p$ образуют цепочку присоединенных векторов, т.е.

$$\sigma^*(e_l) = \lambda e_l + e_{l-1}, \qquad l = 2, \ldots, p, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0.$$

Другими словами, любое подпространство X^l пространства X размерности d_l, инвариантное относительно действия σ^*, совпадает с Y^l. Отсюда немедленно следует, что жорданов базис (e) ассоциирован с фильтрацией (1.4), т.е. удовлетворяет свойствам 1), 2). Так как (e) удовлетворяет и свойству 3), то (e) — левелевский базис пространства X.

Вторая часть утверждения следует из того, что в условиях примера любой базис, в котором матрица оператора монодромии имеет верхнетреугольный вид, может быть получен из жорданового некоторым верхнетреугольным преобразованием. □

Рассмотрим пространство решений X системы (0.1) с регулярной особой точкой $z = 0$ и произвольный левелевский базис (e) пространства X. Обозначим через G матрицу оператора σ^* в базисе (e), а через $A = \operatorname{diag}(\varphi^1, \ldots, \varphi^p)$ — диагональную целочисленную матрицу нормирований этого базиса, т.е. $\varphi^l = \varphi(e_l)$. Рассмотрим матрицу E из (1.1). Имеет место следующее утверждение из [1].

Лемма 3. *Матрицы $z^A G z^{-A}$ и $z^A E z^{-A}$ голоморфны в точке $z = 0$. Нормирование матричной функции $z^A z^E z^{-A}$ в точке 0 равно нулю.*

Теорема 6. *Для фундаментальной матрицы $Y_e(z)$, построенной по левелевскому базису (e) пространства решений X системы (0.1) в $\dot{O}$ с регулярной особой точкой 0, имеет место следующее разложение:*

$$Y_e(z) = U(z) z^A z^E, \tag{1.5}$$

где матрица $U(z)$ однозначна и голоморфна в окрестности точки 0.

Следующая теорема, принадлежащая голландскому математику А. Х. М. Левелю[34], выделяет фуксовы системы среди всех систем с регулярной особой точкой.

Теорема 7. *Система* (0.1) *с регулярной особой точкой* $z = 0$ *фуксова в этой точке тогда и только тогда, когда в разложении* (1.5)

$$Y_e(z) = U(z)z^A z^E, \tag{1.6}$$

для фундаментальной матрицы $Y_e(z)$, *построенной по левелевскому базису* (e) *пространства решений* X *системы* (0.1) *в* $\dot{O}$, *матрица* $U(z)$ *голоморфно обратима в окрестности точки* 0.

Числа $\varphi^j + \rho^j = \beta^j$ называются *показателями* системы в регулярной особой точке 0. Согласно последней теореме они задают асимптотики решений фуксовой системы в этой особой точке.

В качестве немедленного следствия получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Показатели фуксовой системы*

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_0(z)}{z}\, y \tag{1.7}$$

в нуле совпадают с собственными значениями матрицы $B_0(0)$ *коэффициентов этой системы.*

§ 1.2. Метод решения. Достаточные условия разрешимости

Первый этап в решении проблемы Римана–Гильберта состоит в построении на проколотой сфере Римана $B = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ расслоения F с голоморфной связностью ∇, имеющей заданную монодромию (0.4). Напомним эту хорошо известную конструкцию[35].

Рассмотрим конечное покрытие пространства B связными односвязными окрестностями $\{U_i\}$ со связными односвязными пересечениями. Выберем в каждой окрестности по точке z_0^i и

[34] *Levelt A. H. M.* Hypergeometric functions // Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, 1961, **64**, 361–401.

[35] *Atiyah M. F.* Complex analytic connections in fibre bundles // Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**(1), 181–207.

соединим точку z_0 с этими точками путями η_i. Внутри каждого множества $U_i \cup U_j$ с непустым пересечением $U_i \cap U_j$ соединим точки z_0^i и z_0^j путем δ_{ij}. Обозначим через g_{ij} матрицу

$$g_{ij} = \chi\left(\left[\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \eta_j^{-1}\right]\right),$$

где через $\xi \circ \zeta$ обозначается путь, являющийся результатом последовательного обхода путей ξ и ζ (предполагается, что конец пути ξ совпадает с началом пути ζ), а через ξ^{-1} — путь ξ, проходимый в обратном направлении. Гомотопический класс пути ξ обозначается через $[\xi]$ и гомотопический класс постоянной петли z_0 через e.

Ясно, что $g_{ij} = (g_{ji})^{-1}$ и $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = I$ в случае непустого пересечения $U_i \cap U_j \cap U_k$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}
&\chi\left(\left[\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \eta_j^{-1}\right]\right) \chi\left(\left[\eta_j \circ \delta_{jk} \circ \eta_k^{-1}\right]\right) \chi\left(\left[\eta_k \circ \delta_{ki} \circ \eta_i^{-1}\right]\right)\\
&\quad = \chi\left(\left[\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \eta_j^{-1} \circ \eta_j \circ \delta_{jk} \circ \eta_k^{-1} \circ \eta_k \circ \delta_{ki} \circ \eta_i^{-1}\right]\right)\\
&\quad = \chi\left(\left[\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \delta_{jk} \circ \delta_{ki} \circ \eta_i^{-1}\right]\right) = \chi(e) = I,
\end{aligned}$$

так как петля $\delta_{ij} \circ \delta_{jk} \circ \delta_{ki}$ гомотопна постоянной петле (так как $U_i \cap U_j \cap U_k$ односвязно).

Рассмотрим векторное расслоение F на B, построенное по покрытию $\{U_i\}$ и постоянному коциклу $\{g_{ij}\}$. Введем в расслоении F голоморфную связность ∇, задав ее нулевыми формами $\omega_i = 0$ в данном координатном описании расслоения F. Имеет место следующее утверждение:

Предложение 2. *Построенная связность ∇ имеет заданную монодромию* (0.4).

Доказательство. Рассмотрим петлю γ, лежащую в B и конечное покрытие этой петли окрестностями $U_1, \ldots, U_m$. Можно считать, что $z_0 \in U_1$ и $\eta_1 = z_0$. Монодромия связности вдоль пути γ равна $G_\gamma = (g_{1m}g_{mm-1}\cdots g_{21})^{-1}$. Но в нашем случае

$$\begin{aligned}
&(g_{1m}g_{mm-1}\cdots g_{21})^{-1} = g_{21}^{-1}\cdots g_{mm-1}^{-1}g_{1m}^{-1} = g_{12}\cdots g_{m-1m}g_{m1}\\
&\quad = \chi\left(\left[\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \eta_2^{-1}\right]\right)\cdots\chi\left(\left[\eta_{m-1} \circ \delta_{m-1m} \circ \eta_m^{-1}\right]\right)\\
&\qquad \times \chi\left(\left[\eta_m \circ \delta_{m1} \circ \eta_1^{-1}\right]\right)
\end{aligned}$$

$$= \chi\left(\left[\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \eta_2^{-1} \circ \cdots \circ \eta_{m-1} \circ \delta_{m-1m} \circ \eta_m^{-1} \circ \eta_m \circ \delta_{m1} \circ \eta_1^{-1}\right]\right)$$
$$= \chi\left(\left[\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \cdots \circ \delta_{m-1m} \circ \delta_{m1} \circ \eta_1^{-1}\right]\right]) = \chi([\gamma]),$$

так как петля $\delta_{12} \circ \cdots \circ \delta_{m-1m} \circ \delta_{m1}$ гомотопна петле γ. □

Легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. *Любое голоморфное векторное расслоение на проколотой сфере Римана B с голоморфной связностью, имеющей монодромию* (0.4), *эквивалентно расслоению* (F, ∇).

Следующий этап состоит в продолжении построенного расслоения на всю сферу Римана до расслоения с логарифмической связностью ∇', совпадающей с исходной связностью вне особых точек $a_1, \ldots, a_n$.

Рассмотрим окрестность U_α нашего покрытия, граница которой содержит точку a_i. Рассмотрим базис горизонтальных сечений $(e_1^\alpha, \ldots, e_p^\alpha)$ связности ∇ над U_α. Поскольку монодромия связности ∇ по построению совпадает с (0.4), то при аналитическом продолжении вдоль малой петли δ_i, обходящей точку a_i против часовой стрелки этот базис перейдет в базис $(e_1^\alpha, \ldots, e_p^\alpha)G_i$, где G_i — матрица, сопряженная к матрице монодромии в точке a_i. Рассмотрим функцию $(z - a_i)^{-E_i}$ в окрестности U_α, точнее, некоторую ветвь этой функции.

Сечения $(\xi_1^0, \ldots, \xi_p^0) = (e_1^\alpha, \ldots, e_p^\alpha)(z - a_i)^{-E_i}$ (где собственные значения матрицы $E_i = (1/2\pi i)\ln G_i$ нормализованы согласно неравенствам (1.1)) образуют базис голоморфных сечений расслоения F над $O_i \setminus \{a_i\}$ (и, значит, расслоение F голоморфно-тривиально над $O_i \setminus \{a_i\}$). (Действительно, при продолжении вдоль δ_i этот базис переходит в себя.) Сечения $(\xi_1^0, \ldots, \xi_p^0)$ уже не являются горизонтальными, и форма связности ∇ в этом базисе имеет вид

$$\omega^\xi = E_i \frac{dz}{z - a_i}\,. \tag{1.8}$$

Продолжим расслоение F в точку a_i следующим образом. Рассмотрим цилиндр $O_i \times \mathbb{C}^p$ (тривиальное векторное расслоение над O_i) с базисом сечений $(s_1, \ldots, s_p)$, где $s_i = (z, e_i)$, а e_i — i-й элемент стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^p$.

Приклеим цилиндр $O_i \times \mathbb{C}^p$ к пространству расслоения F_E, отождествив при всех i сечения ξ_i^0 с s_i над $O_i \setminus \{a_i\}$ и продолжив склейку на $(O_i \setminus \{a_i\}) \times \mathbb{C}^p$ по линейности. Получим расслоение над $B \cup O_i$. Какой вид имеет координатное описание этого расслоения в окрестности точки a_i?

Обозначим окрестность O_i через U_0. Если в качестве исходного базиса $(e^\alpha) = (e_1^\alpha, \ldots, e_p^\alpha)$ выбран базис, соответствующий исходной тривиализации расслоения F (т.е. $(e^\alpha) g_{\alpha\beta} = (e^\beta)$ для непустых $U_\alpha \cap U_\beta$), то по построению $g_{0\alpha}(z) = (z - a_i)^{E_i}$. Для любой другой окрестности U_β, содержащей точку a_i в своем замыкании, $g_{0\beta}(z)$ является результатом аналитического продолжения функции $g_{0\alpha}(z)$ в U_β вдоль пути δ_i. (После такого продолжения, вернувшись в U_α, получим вместо выбранной первоначально ветви $(z - a_i)^{E_i}$ ветвь $(z - a_i)^{E_i} G_i$, что и обеспечивает корректность продолжения расслоения.

Любой другой базис $(\widetilde{e}^\alpha)$ горизонтальных сечений связан с базисом (e^α) соотношением $(\widetilde{e}^\alpha) = (e^\alpha) S_i$ и при продолжении вдоль δ_i переходит в $(\widetilde{e}^\alpha) \widetilde{G}_i$, где $\widetilde{G}_i = S_i^{-1} G_i S_i$. Выберем такой базис $(\widetilde{e}^\alpha)$, для которого матрица $\widetilde{G}_i$ является верхнетреугольной. Обозначим через Λ_i диагональную матрицу с целочисленными элементами λ_i^j, $j = 1, \ldots, p$, образующими невозрастающую последовательность: $\lambda_i^j \geqslant \lambda_i^{j+1}, j = 1, \ldots, p-1$. Будем называть такие матрицы *допустимыми*.

Рассмотрим базис локальных сечений $(\xi^{\Lambda_i}) = (\widetilde{e}^\alpha)(z - a_i)^{-\widetilde{E}_i} \times (z - a_i)^{-\Lambda_i}$ расслоения F над $O_i \setminus \{a_i\}$ и продолжим расслоение F в точку a_i аналогично тому, как это было сделано выше, заменив сечения базиса (ξ^0) на (ξ^{Λ_i}). Форма ω^{Λ_i} связности ∇ в этом базисе имеет вид

$$\omega^{\Lambda_i} = \big(\Lambda_i + (z - a_i)^{\Lambda_i} \widetilde{E}_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}\big) \frac{dz}{z - a_i}\,. \tag{1.9}$$

Так как матрица $(z - a_i)^{\Lambda_i} \widetilde{E}_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}$ голоморфна в точке a_i (см. лемму 3), то форма ω^{Λ_i} имеет логарифмическую особенность в этой точке.

Функция перехода $\widetilde{g}_{0\alpha}$ построенного расслоения (в исходном координатном описании) записывается в виде

$$\widetilde{g}_{0\alpha} = (z - a_i)^{\Lambda_i} (z - a_i)^{\widetilde{E}_i} S_i^{-1} = (z - a_i)^{\Lambda_i} S_i^{-1} (z - a_i)^{E_i}.$$

Рассмотрим набор $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, состоящий из допустимых матриц $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ (будем называть такой набор *допустимым*). Продолжим расслоение F в каждую точку a_i с помощью соответствующей матрицы Λ_i, получим голоморфное векторное расслоение F^Λ на всей сфере Римана с логарифмической связностью ∇^Λ. Обозначим множество всех таких расслоений через $\mathcal{F}$.

Расслоение F^0 со связностью ∇^0 (т.е., продолжение, построенное по набору $\Lambda_1 = \cdots = \Lambda_n = 0$) называется *каноническим продолжением* исходного расслоения (F, ∇).

Продолжение $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ расслоения (F, ∇) зависит также от выбора матриц $S_1, \ldots, S_n$ (от способа приведения матриц монодромии к верхнетреугольной форме), от исходного координатного описания расслоения F и от выбора ветвей функций $(z - a_i)^{E_i}$. Последние две зависимости несущественны, так как они сводятся к соответствующему изменению матриц $S_1, \ldots,\ S_n$. Что касается зависимости расслоения от $S_1, \ldots, S_n$, то она, действительно, очень важна. Два расслоения, построенные по одному и тому же допустимому набору Λ, но по разным матрицам S_i, вообще говоря, могут быть не эквивалентны.

Однако, в дальнейшем для краткости изложения мы будем опускать эту зависимость (постоянно “держа” ее в уме).

Все сказанное выше не относится к каноническому продолжению $(F^0,\ \nabla^0)$, которое зависит лишь от исходного представления (0.4).

Следующее утверждение является немедленным следствием теоремы 7 и вышеприведенной конструкции.

Предложение 3. *Множество $\mathcal{F}$ содержит все голоморфные векторные расслоения с логарифмическими связностями на сфере Римана с данными особыми точками и данной монодромией.*

Поскольку фуксова система на сфере Римана с данными особыми точками и монодромией может быть рассмотрена как связность в некотором тривиальном расслоении, в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Представление* (0.4) *может быть реализовано в качестве представления монодромии некоторой фуксовой системы на сфере Римана с заданными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{F}$ расслоений, построенных по представлению* (0.4), *содержит хотя бы одно голоморфно тривиальное расслоение.*

Таким образом, мы свели проблему Римана–Гильберта к исследованию вопроса о голоморфной тривиальности некоторого расслоения (множества расслоений) на сфере Римана.

Как известно[36], любое голоморфное расслоение E на сфере Римана раскладывается в прямую сумму одномерных

$$E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(k_p), \tag{1.10}$$

где числа k_i целые, $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_p$, и расслоение $\mathcal{O}(k)$ задается следующим координатным описанием $\mathcal{O}(k) = (\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}} \setminus 0, g_{0\infty} = z^k)$.

Из этой теоремы (называемой теоремой Биркгофа–Гротендика) немедленно следует, что каждое расслоение на сфере Римана мероморфно тривиально. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *У любого голоморфного векторного расслоения E на сфере Римана существует базис мероморфных сечений, голоморфный вне одной произвольной наперед заданной точки.*

Доказательство. Рассмотрим координатное описание (1.10) расслоения E и произвольную точку $b \in \mathbb{C}$. Функции $w_i = ((z-b)/z)^{k_i}$, $v_i = (z-b)^{k_i}$ голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$ и $\mathbb{C}$ соответственно (за исключением точки b), и столбцы матриц $W = \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_p)$, $V = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_p)$ задают координатное описание требуемого базиса (так как $V = g_{0\infty} W$). $\square$

В качестве следствия получаем следующее утверждение, принадлежащее Племелю.

Теорема 9. (Племель) *Любое представление* (0.4) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой системы с регулярными особыми точками, фуксовой во всех точках кроме, быть может, одной, с любыми наперед заданными допустимыми нормированиями в фуксовых точках.*

---

[36] *Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комплексном проективном пространстве. М.: Мир, 1984.

Доказательство. Рассмотрим произвольное расслоение E из построенного множества $\mathcal{F}$ расслоений с данной монодромией и данными особыми точками. Положим $b = a_i$ и рассмотрим базис $(e) = (e_1, \ldots, e_p)$ сечений этого расслоения, построенный в предыдущем предложении.

В базисе из этих сечений логарифмическая связность ∇ определяет систему линейных дифференциальных уравнений с данными особыми точками и монодромией, фуксовую во всех особых точках и имеющую регулярную особенность в точке a_i.

Действительно, так как этот базис лишь мероморфен в точке a_i, то $(\xi^{\Lambda_i}) = (e)U(z)$, где (ξ^{Λ_i}) — голоморфный базис локальных сечений расслоения E над окрестностью O_i точки a_i, задающий продолжений расслоения F, построенного по монодромии (0.4), в точку a_i, и матричная функция $U(z)$ мероморфна в a_i.

Поэтому согласно (1.9) форма ω_i связности имеет в O_i следующий вид

$$\omega_i = dUU^{-1} + U\left(\Lambda_i + (z-a_i)^{\Lambda_i}\widetilde{E}_i(z-a_i)^{-\Lambda_i}\right)U^{-1}\frac{dz}{z-a_i}. \quad (1.11)$$

А фундаментальная матрица пространства решений этой системы (горизонтальных сечений связности) вблизи точки a_i записывается следующим образом

$$Y_i(z) = U(z)(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{\widetilde{E}_i}.$$

Поэтому точка a_i — регулярная особая для построенной системы. В силу произвольности выбранного расслоения из $\mathcal{F}$ нормирования в точках, отличных от a_i, могут быть выбраны произвольными допустимыми. □

Набор чисел $k_1, \ldots, k_p$ называется *типом расщепления* расслоения. Он полностью характеризует голоморфный тип расслоения, в то время как сумма этих чисел, называемая *степенью* расслоения E полностью характеризует его топологический тип. Таким образом, расслоение E голоморфно тривиально тогда и только тогда, когда все числа $k_1, \ldots, k_p$ равны нулю.

В теории интегральных уравнений эти числа называются *частными индексами*, и как хорошо известно, в общем случае их вычислить невозможно. Однако, для некоторых специальных классов представлений (0.4) об этих числах можно получить некоторую информацию, достаточную для решения проблемы Римана–Гильберта.

Теорема 10. *Рассмотрим расслоение $E \in \mathcal{F}$ с логарифмической связностью ∇, построенное по неприводимому представлению* (0.4) *с особыми точками $a_1, \dots, a_n$. Для типа расщепления этого расслоения имеют место следующие неравенства*

$$k_i - k_{i+1} \leqslant n - 2, \qquad i = 1, \dots, p - 1. \tag{1.12}$$

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с заданной монодромией и особыми точками, форма коэффициентов ω' которой имеет простые полюса во всех особых точках кроме a_i, а в окрестности этой точки имеет вид

$$\omega' = -\frac{K}{z - a_i}\,dz + (z - a_i)^{-K}\omega(z - a_i)^K,$$

а фундаментальная матрица пространства решений системы

$$dy = \omega' y$$

в окрестности точки a_i представляется в виде

$$Y_i(z) = (z - a_i)^{-K} V(z)(z - a_i)^{\Lambda_i}(z - a_i)^{E_i}, \tag{1.13}$$

где форма ω имеет логарифмическую особенность в a_i. (Существование такой системы следует из теоремы Племеля 9 и теоремы Биркгофа–Гротендика (1.10).) Нетрудно видеть, что набор диагональных элементов матрицы K совпадает с типом расщепления расслоения E.

Предположим, что для некоторого l имеет место неравенство $k_l - k_{l+1} > n - 2$. Так как элементы ω_{mj} и u_{mj} матричных дифференциальных форм ω' и ω при $m \neq j$ связаны соотношением

$$\omega_{mj}(z) = u_{mj}(z)(z - a_i)^{-k_m + k_j}.$$

то для $m > l$, $j \leqslant l$ согласно предположению получаем $k_j - k_m > n - 2$. Поэтому порядки нулей дифференциальных форм $\omega_{mj}(z)$ с указанными индексами в точке a_i больше числа $n - 3$, в то время как сумма порядков полюсов в особых точках, отличных от a_i не превосходит числа $n - 1$ (так как форма ω' имеет логарифмические особенности в этих точках). Так как форма ω' голоморфна в бесконечности, то ее коэффициенты имеют нуль порядка 2 этой точке. Окончательно получаем, что для коэффициентов форм $\omega_{mj}(z)$ с указанными индексами сумма порядков нулей на сфере Римана больше числа $n-1$, в то время как сумма порядков полюсов не превосходит этого числа. Значит, эти формы тождественно равны нулю, и стало быть, форма ω' имеет вид

$$\omega' = \begin{pmatrix} \omega^1 & * \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где размер матричной формы ω^1 равен (l, l).

Но это означает, что монодромия построенной системы приводима (так как она "содержит" монодромию подсистемы с матрицей ω^1), что противоречит условию. Таким образом неравенство (1.12) действительно имеет место. □

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма, связывающая тип расщепления расслоения с показателями (т.е. с асимптотиками решений) системы в особой точке (см. [5]).

Лемма 5. *Для любой голоморфно обратимой в нуле матричнозначной функции $U(z)$ и для любой диагональной целочисленной матрицы K найдется многочлен $\Gamma(z)$ от $1/z$ с матричными коэффициентами, голоморфно обратимый вне точки нуль и такой, что*

$$\Gamma(z)z^K U(z) = \widetilde{U}(z)z^D, \tag{1.15}$$

где матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_p)$ может быть получена из матрицы K некоторой перестановкой ее диагональных элементов, $\widetilde{U}(z)$ голоморфно обратима в нуле.

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим векторное расслоение E из $\mathcal{F}$, построенное по неприводимому представлению (0.4) и матрицам $\Lambda_2 = \cdots = \Lambda_n = 0$, $\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \dots, \lambda_p)$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} > (n-2)(p-1)$, $i = 1, \dots, p-1$.

Вновь рассмотрим базис мероморфных сечений расслоения E, голоморфный вне точки a_1 и такой, что фундаментальная матрица пространства решений системы

$$dy = \omega y,$$

построенной по логарифмической связности ∇, в окрестности точки a_1 имеет вид

$$Y_1(z) = (z-a_1)^{-K} V(z)(z-a_1)^{\Lambda_1}(z-a_1)^{E_1},$$

и система является фуксовой вне точки a_1.

Согласно лемме 5 существует такая матрица $\Gamma(z)$, голоморфно обратимая вне точки a_1, что

$$\Gamma(z)(z-a_1)^{-K} V(z) = U(z)(z-a_1)^{D},$$

где матрица D получена из $-K$ некоторой перестановкой диагональных элементов, а матрица $U(z)$ голоморфно обратима в точке a_1. Так как для элементов матрицы K имеют место неравенства (1.12), то для любых соседних диагональных элементов матрицы D получаем $|d_i - d_{i+1}| \leqslant (n-2)(p-1)$. Поэтому матрица $H_1 = D + \Lambda_1$ допустима, т.е. для диагональных элементов h_i этой матрицы выполнено условие $h_i > h_{i+1},\ i = 1, \ldots, p-1$.

Перейдем от построенной системы с матрицей коэффициентов ω и фундаментальной матрицей Y_1 к системе с фундаментальной матрицей $Y_1' = \Gamma(z) Y_1$.

Так как матрица $\Gamma(z)$ голоморфно обратима вне точки a_1, новая система будет вновь фуксовой вне a_1. В окрестности точки a_1 матрица Y_1' будет иметь вид

$$\begin{aligned} Y_1' = \Gamma(z) Y_1 &= U(z)(z-a_1)^{D}(z-a_1)^{\Lambda_1}(z-a_1)^{E_1} \\ &= U(z)(z-a_1)^{H_1}(z-a_1)^{E_1} \end{aligned}$$

с голоморфно обратимой матрицей $U(z)$, допустимой матрицей H_1 и верхнетреугольной матрицей E_1. Поэтому построенная система будет фуксовой и в точке a_1. □

Различные достаточные условия реализуемости представления (0.4) фуксовой системой представлены в [5]. Приведем здесь лишь некоторые из них.

Теорема 11. *Пусть все матрицы $\chi(\sigma_j)$ монодромии представления χ одновременно приводятся к следующему виду*:

$$G_j = \begin{pmatrix} G_j^1 & * \\ 0 & G_j^2 \end{pmatrix},$$

где размер каждой матрицы G_j^1 — (l,l). *Пусть набор матриц* $G_1^i,\dots,G_n^i$ *определяет представление* χ_i, $i=1,2$, *и пусть представление* χ_2 *реализуется в качестве монодромии некоторой фуксовой системы. Если представление* χ_1 *неприводимо и если для некоторого* i *матрица* G_i *имеет вид*

$$G_i = \begin{pmatrix} G'_j & * \\ 0 & G''_j \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где G'_i *имеет размер* (t,t), $0<t\leqslant l$, *то монодромия* χ *также может быть реализована как монодромия некоторой фуксовой системы.*

Теорема 12. *Любое представление* χ *является подпредставлением (факторпредставлением) представления, которое может быть реализовано в качестве монодромии некоторой фуксовой системы.*

Предложение 5. *Пусть все подпредставления представления* χ *неразложимы. Если матрицы монодромии этого представления можно одновременно привести к виду*

$$\chi(\sigma_i) = \begin{pmatrix} \underline{G_i^1} & & & \\ & |\underline{G_i^2} & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & |\underline{G_i^m} \end{pmatrix},$$

так, что для некоторого i *матрица* $\chi(\sigma_i)$ *имеет блочный вид* (1.16), *где размер матрицы* G'_i *не превосходит размера матрицы* G_i^1, *то представление* χ *может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы.*

§ 1.3. Контрпример к проблеме Римана–Гильберта

Из теоремы 2, в частности, следует, что контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта (если таковые имеются) следует искать среди приводимых представлений.

Рассмотрим специальный тип представлений (0.4), который в дальнейшем будем называть *Б-представлениями.*

Определение 2. Представление (0.4) называется *Б-представлением*, если это представление приводимо, и если жорданова нормальная форма каждой из матриц монодромии G_i состоит ровно из одной жордановой клетки.

Теорема 13. *Б-представление* (0.4) *может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы тогда и только тогда, когда тип расщепления канонического продолжения* F^0 *расслоения* F, *построенного по этому представлению, равен* $(k,\dots,k)$.

Доказательство. Если тип расщепления канонического продолжения равен $(k,\dots,k)$, то согласно теореме 9 и соотношению (1.13) найдется система уравнений на сфере Римана с заданной монодромией и особыми точками, фуксовая в точках $a_2,\dots,a_n$, имеющая в этих точках нулевые нормирования и такая, что ее фундаментальная матрица в окрестности точки a_1 имеет вид (1.13) с нулевой матрицей Λ_1 и скалярной матрицей $K = kI$:

$$Y_1(z) = (z-a_1)^{-kI}V(z)(z-a_1)^{E_1}. \qquad (1.17)$$

Но

$$(z-a_1)^{-kI}V(z)(z-a_1)^{E_1} = V(z)(z-a_1)^{-kI}(z-a_1)^{E_1}.$$

Значит, эта система фуксова и в точке a_1. (В этом случае тривиальным оказывается расслоение, построенное из расслоения F с помощью допустимых матриц $\Lambda_1 = -kI$, $\Lambda_2 = \dots = \Lambda_n = 0$.)

Пусть теперь Б-представление (0.4) реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы (0.3) с матрицами нормирований $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$. Последнее означает, что соответствующее расслоение $E \in \mathcal{F}$, построенное по данному представлению и допустимым матрицам $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$, голоморфно тривиально. Пусть размерность подпредставления χ' нашего Б-представления χ равна l. Обозначим через X_l соответствующее подпространство пространства решений X системы, инвариантное относительно действия монодромии χ. Приведем все матрицы монодромии представления χ одновременно к блочному верхнетреугольному виду

$$G_i = \begin{pmatrix} G_i' & * \\ 0 & G_i'' \end{pmatrix}, \qquad i = 1,\dots,n,$$

рассмотрим соответствующую фундаментальную матрицу $Y(z)$, в базисе из столбцов которой матрицы монодромии имеют указанный вид.

Так как матрица G_i сопряжена к жордановой клетке, то согласно примеру 1 получаем, что первые l элементов любого левелевского базиса пространства X в любой особой точке принадлежат подпространству X_l. Поэтому согласно теореме 7 в окрестности точки a_i матрица Y представима следующим образом

$$Y(z) = U_i(z)(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{E_i}S_i,$$

где матрицы E_i, S_i имеют такой же блочный верхнетреугольный вид, что и матрицы G_i, а допустимая матрица Λ_i имеет вид $\Lambda_i = \operatorname{diag}(\Lambda_i', \Lambda_i'')$.

Тем самым у расслоения E имеется подрасслоение F' ранга l, построенное по представлению χ' и допустимым матрицам Λ_i'. Заметим, что степень этого подрасслоения неотрицательна, и она равна нулю тогда и только тогда, когда все матрицы Λ_i скалярные: $\Lambda_i = c_i I, \quad i = 1, \dots, n$.

Действительно, пусть $\Lambda_i = \operatorname{diag}(\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^p)$. Тогда в силу допустимости имеем $\lambda_i^1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_i^p$ и

$$\frac{\lambda_i^1 + \dots + \lambda_i^l}{l} \geqslant \frac{\lambda_i^1 + \dots + \lambda_i^p}{p},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа λ_i^j равны. Поэтому для степени этого подрасслоения имеем

$$\begin{aligned}\frac{\deg(F')}{l} &= \frac{1}{l}\sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\Lambda_i' + E_i') = \sum_{i=1}^n \left(\rho_i + \frac{\lambda_i^1 + \dots + \lambda_i^l}{l}\right) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^n \left(\rho_i + \frac{\lambda_i^1 + \dots + \lambda_i^p}{p}\right) = \frac{\deg(E)}{p} = 0,\end{aligned}$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда все матрицы Λ_i скалярные.

Но расслоение E тривиально, следовательно его подрасслоение F' должно иметь неположительную степень[37]. Поэтому $\deg(F') = 0$ и $\Lambda_i = c_i I$, $i = 1, \dots, n$.

[37] Приведенные здесь соображения могут быть проинтерпретированы на языке векторных расслоений в терминах *полустабильности векторного расслоения со связностью*, см. *Bolibrukh A.* On sufficient conditions for the existence of a Fuchsian equation with prescribed monodromy // J. Dynam. Control Systems, 1999, **5**(4), 453–472.

Преобразуем построенную систему к системе с фундаментальной матрицей

$$Y'(z) = \left(\prod_{i=2}^{n}(z-a_i)^{-c_i}(z-a_1)^{c}\right)Y(z), \qquad c = \sum_{i=2}^{n} c_i.$$

Эта система будет по-прежнему фуксовой во всех точках и иметь нулевые нормирования в точках $a_2, \ldots, a_n$. В точке a_1 согласно построению фундаментальная матрица этой системы может быть представлена в виде (1.17) с $k = -(c+c_1)$. Но последнее означает, что тип расщепления канонического продолжения F^0 расслоения, построенного по исходному Б-представлению, равен $(k, \ldots, k)$. □

Следствие 3. *Если Б-представление может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы, то степень канонического продолжения F^0 расслоения F, построенного по этому представлению, должна делиться нацело на ранг представления.*

Оказывается, существуют Б-представления, которые этому свойству не удовлетворяют.

Следующий пример является контрпримером к утверждению Гильберта. Он означает, что проблема Римана–Гильберта имеет в общем случае отрицательное решение.

Пример 2. Рассмотрим матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

и произвольный набор точек a_1, a_2, a_3. Представление χ с особыми точками a_1, a_2, a_3 и матрицами монодромии G_i, $i = 1, 2, 3$, не может быть реализовано в качестве представления монодромии какой-либо фуксовой системы.

Доказательство. Заметим, что $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = I$, матрица G_2 может быть преобразована к матрице G_1, а матрица G_3 может быть преобразована к жордановой клетке с собственным значением -1. Действительно, для матрицы G_2 имеем

$$S_2^{-1} G_2 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

а для матрицы G_3 получаем

$$S_3^{-1} G_3 S_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 & 3 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{pmatrix}.$$

Степень канонического продолжения равна

$$\deg(F^0) = \operatorname{tr} E_1 + \operatorname{tr} E_2 + \operatorname{tr} E_3 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \not\equiv 0 \pmod 4.$$

Поэтому согласно следствию 3 это представление не может быть реализовано как представление монодромии какой-либо фуксовой системы. □

Оказывается, в размерности три все контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта даются Б-представлениями. А именно имеет место следующая теорема [1]

Теорема 14. *Проблема Римана–Гильберта для представления* (0.4) *размерности* $p = 3$ *имеет положительное решение тогда и только тогда, когда это представление является Б-представлением и тип расщепления канонического продолжения расслоения, построенного по этому представлению, равен* $(k, \ldots, k)$.

Минимальная размерность представления, в которой появляется контрпример к проблеме Римана–Гильберта, равна трем, а минимальное число особых точек при этом равно четырем (см. [1]).

Рассмотрим систему

$$df = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} \frac{dz}{z^2} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z+1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z-1/2} \right) f. \tag{1.18}$$

Эта система фуксова в точках -1, 1, $1/2$, а точка ∞ является для нее точкой голоморфности, так как вычет в бесконечности формы системы равен нулю. Нетрудно показать, что точка 0 является регулярной особой точкой для этой системы.

Также непосредственно проверяется, что все матрицы монодромии этой системы приводятся к жордановой клетке с собственным значением 1 (каждая матрица с помощью своего преобразования). Так как эта система содержит одномерную подсистему, монодромия всей системы приводима. Значит, представление монодромии этой системы является Б-представлением.

Показатели этой системы в точках -1, 1, $1/2$ равны нулю, а в точке 0 ее фундаментальная матрица может быть записана в виде (см. [1], [5])

$$Y(z) = z^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} U(z) z^{E_0},$$

где $U(z)$ голоморфно обратимая матрица в точке нуль.

Отсюда немедленно следует, что тип расщепления канонического продолжения расслоения, построенного по представлению монодромии этой системы, равен $(1, 0, -1)$, и стало быть, согласно теореме 13 это представление не может быть реализовано никакой фуксовой системой.

Построенный контрпример обладает следующим свойством неустойчивости. При любом сколь угодно малом изменении положения особой точки ноль и при сохранении матриц монодромии соответствующее представление монодромии уже может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы. Поэтому этот пример представляет интерес для теории изомонодромных деформаций фуксовых систем. А именно, точка $(0, -1, 1, 1/2)$ пространства $\mathbb{C}^4$ является подвижной особой точкой для соответствующего уравнения Шлезингера изомонодромных деформаций, построенного по этому представлению[38].

Исходя из приведенного примера, нетрудно построить контрпример к проблеме Римана–Гильберта для любого числа особых точек, большего трех и для любого представления (0.4) ранга, большего двух (и тем самым доказать теорему 1) (см. [1]).

Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ расслоений, построенных в главе 1 по неприводимому представлению (0.4).

Для произвольного расслоения $F \in \mathcal{F}$ рассмотрим число

$$\gamma(F) = pk_1 - \deg(F) = pk_1 - \sum_{i=1}^{p} k_i,$$

где числа $k_1, \ldots, k_p$ задают тип расщепления расслоения F.

Определение 3. Число

$$\gamma_m(\chi) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \gamma(F)$$

назовем *максимальным фуксовым весом представления* χ.

Это число согласно теореме 10 не превосходит числа $(n-2) \times p(p-1)/2$. Оно оказывается тесно связанным с асимптотиками решений фуксовых систем с данной монодромией.

Рассмотрим пространство X решений фуксовой системы (0.1), (0.3) двух уравнений. Обозначим показатели этой системы в точке a_i через β_i^1, β_i^2 и рассмотрим число

$$\gamma(\omega) = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i^1 - \beta_i^2|,$$

которое имеет смысл *суммы разностей асимптотик решений по всем особым точкам.*

Рассмотрим множество Ω всех фуксовых систем двух уравнений на $\overline{\mathbb{C}}$ с данным представлением (0.4) монодромии (согласно теореме 2 это множество не пусто).

[38] *Bolibruch A.* On orders of movable poles of the Schlesinger equation // J. Dynam. Control Systems, 2000, **6**(1), 57–74.

Теорема 15.

$$\min_{\omega \in \Omega} \gamma(\omega) = \gamma_m(\chi).$$

В терминах минимального фуксова веса представления удается выразить минимально возможное число дополнительных ложных особых точек m^0 (посчитанных с кратностями, которые совпадают с порядками нулей вронскиана соответствующего "минимального" фуксового уравнения), возникающих при построении скалярного фуксового дифференциального уравнения с неприводимой монодромией (0.4).

Теорема 16. *Минимально возможное число m^0 дополнительных ложных особых точек, возникающих при построении скалярного фуксового дифференциального уравнения с неприводимой монодромией* (0.4), *равно*

$$m^0 = \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - \gamma_m(\chi).$$

Для теории изомонодромных деформаций особый интерес представляет следующая проблема, которую можно рассматривать как некоторое обобщение проблемы Римана–Гильберта.

Пусть заданы неприводимое представление (0.4) *и набор* Λ *целочисленных матриц* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, *удовлетворяющие условию*

$$\sum = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j = 0. \tag{1.19}$$

Всегда ли найдется фуксова система с данными (0.4) *и* Λ? (*Задача существования фуксовой системы с заданными асимптотиками решений и монодромией.*)

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен (см. [1]). Имеются наборы нормирований Λ, которые не реализуются никакими фуксовыми системами с данной неприводимой монодромией. Будем называть такие наборы (для данной монодромии и особых точек) *запрещенными наборами нормирований.*

Ясно, что если набор $\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ запрещен, то то же самой верно для набора $\Lambda' = \{\Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_n\}$, где

$$\Lambda'_i = \Lambda_i + k_i I, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = 0. \tag{1.20}$$

(В самом деле, преобразование

$$y' = \Gamma y, \qquad \Gamma(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{\Lambda_i' - \Lambda_i} \tag{1.21}$$

переводит исходную фуксову систему с набором нормирований Λ в фуксову систему с набором нормирований Λ'.)

Будем называть такие наборы нормирований *эквивалентными.*

Верно ли, что *для каждого неприводимого представления* (0.4) *существует лишь конечное число неэквивалентных запрещенных наборов нормирований*?

Если бы сформулированная гипотеза была верна, то это упростило бы исследование некоторых вопросов теории фуксовых уравнений. Например, удалось бы получить классификацию четырехмерных представлений, нереализуемых никакими фуксовыми системами и т.д.

Та же самая гипотеза может быть сформулирована в терминах векторных расслоений. Рассмотрим множество векторных расслоений $\mathcal{F}$ на сфере Римана с логарифмическими связностям, построенное по данному неприводимому представлению (0.4) (см. главу 1). Обозначим через $\mathcal{F}_0$ подмножество топологически тривиальных расслоений (т.е., расслоений, степень которых равна нулю) в $\mathcal{F}$. Хорошо известно, что пространство аналитически нетривиальных векторных расслоений со степенью равной нулю образует аналитическое подмножество N коразмерности один в пространстве всех аналитических векторных расслоений с тем же условием на степень[39]. Верно ли, что пересечение $\mathcal{F}_0$ с N состоит из конечного числа точек? Это другая, геометрическая формулировка гипотезы о запрещенных нормированиях.

В работах [8], [10] показано, что эта гипотеза неверна и приведены соответствующие классы неприводимых представлений с бесконечным числом запрещенных нормирований. Строятся они следующим образом.

Обозначим через Σ множество точек $(a_1, \dots, a_n)$, а через Σ' множество $(b_1, \dots, b_k)$. Рассмотрим рациональное отображение

$$f\colon (\overline{\mathbb{C}}, \Sigma) \longrightarrow (\overline{\mathbb{C}}, \Sigma'), \qquad f = \frac{R(z)}{Q(z)}\,, \tag{1.22}$$

[39] *Bojarski B.* Connections between complex and global analysis // Complex analysis. Methods, trends, and applications. Berlin: Akad. Verl., 1983. 97–110; *Прессли Э.*, *Сигал Г.* Группы петель. М.: Мир, 1990.

такое, что многочлены R и Q не имеют общих делителей, $f^{-1}(\Sigma') = \Sigma$ и по крайней мере одна из точек множества Σ является критической точкой для f (т.е. $df = 0$ в этой точке).

Пусть представление

$$\chi' \colon \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma', t_0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}) \tag{1.23}$$

неприводимо. Рассмотрим представление

$$\chi_b \colon \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma, z_0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}), \tag{1.24}$$

где $\chi_b = \chi' \circ f_{\#}, \quad f(z_0) = t_0$.

Теорема 17. *Для представления χ_b существует бесконечное число запрещенных неэквивалентных наборов нормирований.*

В случае, когда показатели во всех точках кроме одной зафиксированы, данная теорема дает полное описание всех неприводимых представлений с бесконечным числом запрещенных нормирований[40].

В общем случае вопрос о том, все ли представления с бесконечным числом запрещенных нормирований даются теоремой 17, остается открытым.

В работе [8] представлены также новые серии контрпримеров, не сводящиеся к Б-представлениям.

2. Биркгофова стандартная форма

Эта задача, которая на первый взгляд выглядит как локальная (и исходная система, и искомое преобразование определены лишь локально в окрестности точки ∞), на самом деле носит глобальный характер, так как итоговая система задана уже на всей сфере Римана. Поэтому ее естественно переформулировать в терминах расслоений и связностей.

Рассмотрим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (0.7), в базисе из столбцов которой матрица G монодромии системы имеет верхний треугольный вид. Тогда

$$Y(z) = T(z) z^{E}, \tag{2.1}$$

[40] *Kostov V. P.* Quantum states of monodromy groups // J. Dynam. Control Systems, 1998, **5**(1), 51–100; [10].

где матричная функция $T(z)$ однозначна и голоморфно обратима в O_∞, а $E = \dfrac{1}{2\pi i}\ln G$, причем собственные значения ρ^j матрицы E удовлетворяют неравенствам (1.1).

Зададим расслоение F с помощью следующего координатного описания: $F = (O_\infty, O_0 = \mathbb{C}, g_{\infty 0} = T(z))$. Формы

$$\omega_\infty = \frac{C(z)}{z}\,dz \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{E}{z}\,dz,$$

определенные в окрестностях O_∞ и O_0 соответственно, задают в расслоении F связность ∇, голоморфную вне точек $0, \infty$, имеющую логарифмическую особенность в нуле и полюс порядка $r+1$ в бесконечности.

Действительно, из (0.7) следует, что

$$\frac{C(z)}{z}\,dz = dY(z)(Y(z))^{-1} = dT(z)(T(z))^{-1} + T(z)\frac{E}{z}\,dz(T(z))^{-1}$$

и следовательно, $\omega_\infty = dg_{\infty 0}g_{\infty 0}^{-1} + g_{\infty 0}\omega_0 g_{\infty 0}^{-1}$.

Рассмотрим базис (e) из p сечений расслоения F, линейно независимых и голоморфных вне точки ноль и мероморфных в этой точке. В базисе из этих сечений форма $(\widetilde{C}(z)/z)dz$ связности ∇ имеет вид

$$\widetilde{C}(z) = \widetilde{C}_r z^r + \dots + \widetilde{C}_0 + \frac{\widetilde{C}_1}{z} + \dots + \frac{\widetilde{C}_{-k}}{z^k}\,. \qquad (2.2)$$

Действительно, на координатном языке последнее утверждение означает существование такой голоморфно обратимой в окрестности O_∞ матрицы Γ и такой голоморфно обратимой в $\mathbb{C}\setminus 0$ и мероморфной в нуле матричной функции $U(z)$, что $\Gamma g_{\infty 0} = U(z)$ (здесь столбцы матриц Γ и U задают координатное описание элементов базиса (e)). Поэтому система линейных дифференциальных уравнений (0.10) с фундаментальной матрицей

$$\widetilde{Y}(z) = \Gamma(z)Y(z) = \Gamma(z)T(z)z^E = U(z)z^E,$$

определенной во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и с матрицей коэффициентов (2.2), не имеет особых точек на сфере Римана, за исключением точек ноль и бесконечность, причем точка ноль является для нее регулярной особой точкой. Поэтому матрица $\widetilde{C}(z)$ является рациональной функцией с единственным полюсом в нуле в комплексной плоскости и с полюсом порядка r в бесконечности.

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 18. *Любая система* (0.7) *с помощью аналитического преобразования может быть приведена к системе* (0.10) *на сфере Римана с матрицей коэффициентов* $\widetilde{C}(z)$ *вида* (2.2). *Причем особая точка ноль будет для этой системы регулярной особой точкой.*

Теорема 18 означает, что, решая задачу о биркгофовой стандартной форме, мы с самого начала можем рассматривать вместо системы (0.7) систему (0.10) с матрицей коэффициентов вида (2.2), для которой точка ноль является регулярной особой точкой.

Приведем матрицу монодромии G с помощью матрицы S к верхнетреугольному виду (возможно, отличному от того, к которому она была приведена в разложении (2.1)) и рассмотрим произвольную допустимую матрицу $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, т.е. матрицу с целочисленными диагональными элементами, удовлетворяющими неравенствам $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p$.

Зададим расслоение F^Λ с помощью следующего координатного описания: $F^\Lambda = (O_\infty,\, O_0 = \mathbb{C},\, g^\Lambda_{\infty 0} = T(z)z^{-\Lambda})$. Формы

$$\omega_\infty = \frac{C(z)}{z}\, dz \quad \text{и} \quad \omega_0^\Lambda = \left(\Lambda + z^\Lambda E z^{-\Lambda}\right) \frac{dz}{z},$$

определенные в окрестностях O_∞ и O_0 соответственно, задают в расслоении F^Λ связность ∇^Λ, голоморфную вне точек $0, \infty$, имеющую логарифмическую особенность в нуле и полюс порядка $r+1$ в бесконечности.

Голоморфный тип построенного расслоения зависит от матрицы Λ и от способа приведения матрицы монодромии к верхнетреугольному виду (т.е. от матрицы S).

Обозначим множество построенных расслоений со связностями через $\mathcal{E}$.

Следующее утверждение аналогично теореме 8 и доказывается почти также (с некоторыми упрощениями, так как приходится следить всего за одной фуксовой точкой).

Теорема 19. *Система* (0.7) *может быть приведена аналитическим преобразованием к биркгофовой стандартной форме тогда и только тогда, когда множество* $\mathcal{E}$ *содержит хотя бы одно голоморфно тривиальное расслоение.*

Имеет место в этом случае и аналог теоремы 10.

Теорема 20. *Рассмотрим расслоение* $E \in \mathcal{E}$ *со связностью* ∇, *построенное по неприводимой системе* (0.7). *Для типа расщепления этого расслоения имеют место следующие неравенства*

$$k_i - k_{i+1} \leqslant r, \qquad i = 1, \dots, p-1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно теореме Биркгофа–Гротендика (см. (1.10)) найдутся такие матрицы $\Gamma \in H^0(O_\infty)$, $U \in H^0(\mathbb{C})$, что

$$\Gamma g^{\Lambda}_{\infty 0}(z) = \Gamma T(z) z^{-\Lambda} = z^{-K} U(z),$$

где диагональные элементы матрицы K задают тип расщепления расслоения E (см. формулу (1.13)).

Аналитическое преобразование исходной системы, задаваемое матрицей Γ, переводит ее в систему (0.10), где

$$\frac{\widetilde{C}(z)}{z}\, dz = -\frac{K}{z}\, dz + z^{-K} \omega z^{K},$$
$$\omega = dU U^{-1} + U \left(\Lambda + z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}\right) U^{-1} \frac{dz}{z}\,,$$

а фундаментальная матрица пространства решений системы (0.10) в $\mathbb{C}$ представляется в виде

$$Y'(z) = z^{-K} U(z) z^{\Lambda} z^{E}. \tag{2.4}$$

Заметим, что форма ω имеет логарифмическую особенность в 0.

Предположим, что для некоторого l имеет место неравенство $k_l - k_{l+1} > r$. Так как элементы ω'_{ij} и ω_{ij} матричных дифференциальных форм $\widetilde{C}(z)dz/z$ и ω связаны соотношением

$$\omega'_{ij}(z) = \omega_{ij}(z) z^{-k_i + k_j}.$$

то для $i > l,\ j \leqslant l$ согласно предположению получаем $k_j - k_i > r$. Поэтому порядки нулей дифференциальных форм $\omega'_{ij}(z)$ с указанными индексами в точке 0 больше числа $r-1$, в то время как порядки полюсов коэффициентов этих форм в бесконечности не превосходят числа $r-1$ (так как форма $\widetilde{C}(z)dz/z$ имеет полюс порядка $r+1$ в ∞). Значит, эти формы тождественно равны нулю, и стало быть, форма $\widetilde{C}(z)dz/z$ имеет вид (0.13). Значит, исходная система приводима. Полученное противоречие означает, что неравенства (2.3) имеют место. $\square$

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства следующего утверждения, которое аналогично теореме 2.

Теорема 21. *Любая неприводимая система* (0.7) *может быть преобразована к биркгофовой стандартной форме с помощью аналитического преобразования* (0.9).

Доказательство. Рассмотрим расслоение $F \in \mathcal{E}$, построенное по допустимой матрице Λ, удовлетворяющей условию $\lambda_i - \lambda_{i+1} > r(p-1), \quad i = 1, \ldots, p-1$.

Действуя так же, как при доказательстве предыдущего утверждения, приведем исходную систему с помощью аналитического преобразования к виду (0.10) с фундаментальной матрицей (2.4).

Согласно лемме 5 существует такая матрица $\Gamma'(z)$, голоморфно обратимая вне точки 0, что

$$\Gamma'(z)z^{-K}U(z) = U''(z)z^{D},$$

где матрица D получена из $-K$ некоторой перестановкой диагональных элементов, а матрица $U''(z)$ голоморфно обратима в $\mathbb{C}$. Так как для элементов матрицы K имеют место неравенства (2.3), то для любых соседних диагональных элементов матрицы D получаем $|d_i - d_{i+1}| \leqslant r(p-1)$. Поэтому матрица $H = D + \Lambda$ допустима, т.е. для диагональных элементов h_i этой матрицы выполнено условие $h_i \geqslant h_{i+1},\ i = 1, \ldots, p-1$.

Перейдем от системы (0.10) к системе с матрицей коэффициентов $C''(z)$ и фундаментальной матрицей Y'' с помощью аналитической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$ замены $Y'' = \Gamma'(z)Y'$. Тогда

$$Y''(z) = U''(z)z^{H}z^{E}$$

с голоморфно обратимой матрицей $U''(z)$, т.е. построенная система фуксова в нуле. Согласно построению эта система не имеет особых точек кроме точек 0 и ∞, значит, матрица $C''(z)$ коэффициентов этой системы голоморфна в $\mathbb{C}$ (напомним, что система имеет вид (0.7)).

В силу аналитичности проведенных замен, матрица $C''(z)$ коэффициентов этой системы имеет полюс того же порядка r в бесконечности, что и матрица исходной системы (0.7). По теореме Лиувилля получаем, что $C''(z)$ — матричный многочлен степени r от z. □

3. Изомонодромные деформации фуксовых систем

Рассмотрим семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\right)y, \qquad \sum_{i=1}^{n} B_i(a) = 0, \tag{3.1}$$

голоморфно зависящее от параметра $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D(a^0)$, где $D(a^0)$ — шар малого радиуса с центром в точке $a^0 = (a_1^0, \ldots, a_n^0)$ пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j}\{(a_i - a_j) = 0\}$.

Семейство (3.1) задано на пространстве $T = \overline{\mathbb{C}} \times D(a^0) \setminus \bigcup_{i=1}^{n}\{(z-a_i) = 0\}$, которое ретрагируется (при помощи некоторого отображения r) на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}$. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(T, (z_0, a^0))$ изоморфна группе $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^0, \ldots, a_n^0\}, z_0)$, которая порождена гомотопическими классами петель g_i^0, обходящими особые точки a_i^0 соответственно по окружностям малого радиуса. Мы будем обозначать гомотопический класс петли g_i^0 по-прежнему через g_i^0.

Семейство (3.1) называется *изомонодромным* (или *изомонодромной деформацией* исходной фуксовой системы, соответствующей значению параметра $a = a^0$), если для любого фиксированного a соответствующая система из (3.1) имеет ту же самую монодромию, что и при $a = a^0$ (по отношению к гомотопическим классам петель $g_i^a = r_{\#}^{-1}(g_i^0)$ и g_i^0 соответственно). Последнее означает, что для каждого значения параметра a найдется фундаментальная матрица $Y(z, a)$ соответствующей системы из (3.1), имеющая одни и те же матрицы монодромии (по отношению к g_i^a) для всех $a \in D(a^0)$. В этом случае семейство матриц $Y(z,a)$ называется *изомонодромным семейством матриц.*

Нетрудно показать, см.[41] и [9], что

Предложение 6. *Для любого изомонодромного семейства* (3.1) *найдется изомонодромное семейство фундаментальных матриц, аналитическое по совокупности z и a в $T = \overline{\mathbb{C}} \times D(a^0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{(z - a_i) = 0\}$.*

Матрица $Y(z,a)$ как функция на T имеет некоторую монодромию, которая в силу аналитичности $Y(z,a)$ зависит лишь от гомотопических классов петель в T с началом в (z_0, a^0). Из условия изомонодромности этой матрицы следует, что ее матрицы монодромии как функции начальной точки (z_0, a^0) при фиксированном z_0 являются локально постоянными по отношению к изменению a^0. С другой стороны, из определения монодромии системы линейных дифференциальных уравнений следует, что эти матрицы локально постоянны по отношению к изменению z_0 при любом фиксированном a^0.

Следовательно, матричная дифференциальная 1-форма $\omega = dY(z,a)Y^{-1}(z,a)$ является однозначной и может быть рассмотрена как форма на T. Действительно, для всех $g \in \pi_1(T, (z_0, a^0))$ имеем для аналитического продолжения $g^*\omega$ формы ω вдоль g

$$g^*\omega = dg^*Y(z,a)g^*Y^{-1}(z,a) = (dY(z,a))G_g G_g^{-1} Y^{-1}(z,a) = \omega.$$

По построению пфаффова система

$$dy = \omega y \tag{3.2}$$

на T вполне интегрируема (это означает, что $d\omega = \omega \wedge \omega$) и для любого фиксированного значения a она совпадает с соответствующей фуксовой системой из (3.1). В результате получаем следующее утверждение[42].

[41] *Anosov D. V.* Concerning the definition of isomonodromic deformation of Fuchsian systems // Ulmer Seminaire über Funktionalysis und Differentialgleichungen. Heft 2, 1997, 1–12.

[42] См. также *Iwasaki K. et al.* From Gauss to Painlevè. A modern theory of special functions. Braunschweig: Vieweg, 1991.

Теорема 22. *Семейство* (3.1) *фуксовых систем является изомонодромным тогда и только тогда, когда на* T *существует матричная дифференциальная* 1*-форма* ω *такая, что*

i) $\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\,dz$ *для любого фиксированного* $a \in D(a^0)$;

ii) $d\omega = \omega \wedge \omega$.

Отсюда следует, что любое изомонодромное семейство (3.1) полностью определяется соответствующей формой ω со свойствами i), ii). Нашей целью является описание общего вида такой формы ω.

Наиболее известный вид изомонодромных деформаций задается формой

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\,d(z-a_i). \tag{3.3}$$

Соответствующая деформация называется *деформацией Шлезингера.* Непосредственное вычисление показывает, что условие ii) для этой формы эквивалентно следующему соотношению:

$$dB_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i-a_j}\,d(a_i-a_j), \tag{3.4}$$

которое называется *уравнением Шлезингера.*

Для фундаментальной матрицы $Y^s(z,a)$ пфаффовой системы (3.2) с формой $\omega = \omega_s$ имеет место следующее тождество:

$$Y^s(\infty, a) \equiv \mathrm{const}. \tag{3.5}$$

Действительно,

$$d_a Y^s(\infty,a)(Y^s(\infty,a))^{-1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\,d(a_i)\bigg|_{z=\infty} \equiv 0.$$

Поэтому тождество (3.5) действительно имеет место.

Произвольные изомонодромные деформации не сводятся к одним лишь деформациям Шлезингера (3.3). В самом деле, для произвольного изомонодромного семейства (3.1) вида (3.3) можно рассмотреть семейство с изомонодромной фундаментальной матрицей $Y'(z,a) = \Gamma(a) \times Y(z,a)$, где $\Gamma(a^0) = I$, $\Gamma(a) \neq \mathrm{const}$.

Новое семейство вновь будет изомонодромным, но описывающая его форма будет иметь вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i'(a)}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r(a) da_r, \tag{3.6}$$

где $B_i' = \Gamma B_i \Gamma^{-1}$, $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r da_r = d\Gamma\Gamma^{-1}$. Ясно, что для изомонодромной фундаментальной матрицы этого семейства нормализующее условие (3.5) не будет выполнено.

Но деформации (3.3), (3.6) не исчерпывают все возможные виды деформаций в резонансном случае (хотя они полностью описывают все такие деформации в случае отсутствия резонансов[43]).

Прежде чем переходить к формулировке основной теоремы этой главы, рассмотрим следующее важное утверждение, относящееся к изомонодромным фуксовым семействам, которое по сути является *теоремой Гантмахера о виде решений фуксовой системы с параметром.*

Рассмотрим аналитическую изомонодромную фундаментальную матрицу $Y(z,a)$, матрицы монодромии G_i которой имеют блочный диагональный вид $G_i = \operatorname{diag}(G_i^1, \ldots, G_i^k)$, где каждый блок G_i^j соответствует некоторому корневому подпространству размерности s_j оператора монодромии. Обозначим через $E_i = \operatorname{diag}(E_i^1, \ldots, E_i^k)$ матрицу $(2\pi i)^{-1} \ln G_i$, собственные значения ρ_i^j которой нормализованы согласно (1.1).

Теорема 23. *Для фундаментальной матрицы $Y(z,a)$ семейства (3.1) имеет место следующее разложение в окрестности $\{z-a_i=0\}$:*

$$Y(z,a)S(a) = U_i(z,a)(z-a_i)^{\Lambda_i}\ (z-a_i)^{E_i(a)}, \tag{3.7}$$

где $S(a)$ голоморфно обратима в $D(a^0)$ и имеет тот же самый блочно-диагональный вид, что и E_i, $U_i(z,a)$ голоморфно обратима в окрестности $\{z-a_i=0\}$, Λ_i имеет тот же самый блочно-диагональный вид $\Lambda_i = \operatorname{diag}(\Lambda_i^1, \ldots, \Lambda_i^k)$, что и E_i, с целочисленными диагональными матрицами Λ_i^j, элементы ${}^s\lambda_i^j$ которых удовлетворяют следующим неравенствам:

$${}^s\lambda_i^j \geqslant {}^{s+1}\lambda_i^j, \tag{3.8}$$

и $E_i(a) = S^{-1}(a) E_i S(a)$.

[43] Ibid.

Доказательство. Согласно теореме Гантмахера[44] (см. также [1] или [5]) для каждого фиксированного $a \in D(a^0)$ существует матрица $S(a)$ такая, что разложение (3.7) имеет место с некоторой матрицей $\Lambda_i(a)$ (Если матрица монодромии имеет единственно собственное значение, то это разложение совпадает с (1.6)). Вначале мы докажем, что матричная функция $\Lambda_i(a)$ не зависит от a, а затем покажем, что матрица $S(a)$ может быть выбрана аналитической по a.

Лемма 6. *При любой изомонодромной деформации собственные значения* $\{\beta_i^j\}$ *матрицы коэффициентов* $B_i(a)$ *семейства* (3.1) *и элементы* $\{\lambda_i^j\}$ *матрицы* Λ_i *из* (3.7) *не меняются.*

Доказательство. Из (3.1), (3.7) следует, что

$$B_i = \lim_{z\to a_i}\left((z-a_i)\frac{dY_i}{dz}\,Y_i^{-1}\right) = U_i(a_i,a)(\Lambda_i(a)+E_i^0)U_i^{-1}(a_i,a), \tag{3.9}$$

где $E_i^0 = \lim_{z\to a_i} L_i$, $L_i = (z-a_i)^{\Lambda_i(a)}E_i(z-a_i)^{-\Lambda_i(a)}$ голоморфна в a_i, потому что $(z-a_i)\dfrac{dY_i}{dz}\,Y_i^{-1}$ голоморфна, а U_i голоморфно обратима в a_i.

Так как матрицы $\Lambda_i(a)$ и E_i^0 перестановочны, то из соотношения (3.9) следует, что собственные значения матрицы B_i совпадают с собственными значениями $\beta_i^j = \lambda_i^j(a) + \rho_i^j$ матрицы $\Lambda_i + E_i^0$.

По определению при изомонодромной деформации числа ρ_i^j (логарифмы собственных значений матриц монодромии, нормализованные согласно (1.1)) не меняются. Но, с другой стороны, из непрерывности матриц $B_i(a)$ и их собственных значений по параметру a следует, что целые числа $\lambda_i^j(a) = \beta_i^j - \rho_i^j$ также не зависят от a. Следовательно, и числа β_i^j также не зависят от a. Лемма доказана. □

По построению матрица $Y(z,a)$ имеет вид

$$Y(z,a) = M(z,a)(z-a_i)^{E_i} \tag{3.10}$$

в некоторой окрестности гиперплоскости $P = \{z - a_i = 0\}$, где $M(z,a)$ — мероморфная в окрестности P матричная функция,

[44] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

голоморфная вне P. Из леммы 6 следует, что для любых $a \in D$ имеет место соотношение

$$\begin{gathered} Y(z,a)S(a) = M(z,a)S(a)(z-a_i)^{S^{-1}E_iS}, \\ M(z,a)S(a) = U(z,a)(z-a_i)^{\Lambda_i}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Нам нужно доказать, что матрицу $S(a)$ можно выбрать аналитической по a. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 7. *Рассмотрим мероморфную в $O \times D(a^0)$ матрицу $M(z,a)$ размера (q,p), $q \geqslant p$, голоморфную в $\dot{O} \times D(a^0)$ и имеющую там ранг p, где $O \subset \mathbb{C}$ — некоторая окрестность нуля и $\dot{O} = O \setminus \{0\}$. Пусть A — некоторая постоянная диагональная целочисленная матрица. Если для любого значения a из окрестности $\widetilde{U}$ точки $a^* \in D$ существуют невырожденная матрица $S(a)$ и голоморфная матрица $U(z,a)$ ранга p в $O \times \widetilde{U}$ такие, что*

$$M(z,a)S(a) = U(z,a)z^A, \tag{3.12}$$

то матрицу $S(a)$ можно выбрать аналитической по a в некоторой окрестности a^*.

Доказательство. Рассмотрим индукцию по числу p столбцов матрицы M.

При $p = 1$ доказывать нечего. Предположим, что утверждение верно для всех матриц с числом столбцов, меньшим чем k, где $k < p$. Докажем его для $k = p$. Можно считать, что $A = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_p)$, где $s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_p$, $s_p = 0$. (Этого всегда можно добиться умножением M на скалярную матрицу $z^{-s_p}I$.) Пусть в разложении (3.12) $s_l \neq 0$, $s_{l+1} = \cdots = s_p = 0$. Не ограничивая общности, можно считать также, что $S(a^*) = I$. В этом случае из (3.12) следует, что первые l столбцов матрицы $M(0,a^*)$ нулевые и что ранг $M(0,a)$ равен $p-l$ для всех $a \in \widetilde{U}$. Рассмотрим базисный минор матрицы $M(0,a^*)$. Этот минор включает лишь элементы столбцов с номерами $l+1, \ldots, p$, и в силу его непрерывности соответствующие элементы матрицы $M(0,a)$ образуют ненулевой минор при всех $a \in U^*$, где $U^* \subset \widetilde{U}$ — некоторая окрестность точки a^*. Так как ранг матрицы $M(0,a)$ равен $p-l$ для всех a, то соответствующий минор является базисным минором для $M(0,a)$ при всех $a \in U^*$. Поэтому каждый j-й столбец $M(0,a)$ с номером $0 < j < l+1$ выражается единственным образом в виде линейной комбинации столбцов с номерами $l+1,\dots,p$ и коэффициенты c_k^j каждой такой линейной комбинации являются голоморфными функциями в U^*. Рассмотрим нижнетреугольную матрицу $R_1(a)$ с единичными элементами на главной диагонали и такую, что ее j-й столбец совпадает со столбцом $(0,\dots,0,1,0,\dots,0,-c_{l+1}^j,\dots,-c_p^j)^t$ при $j < l+1$, а столбцы с номерами j, большими чем l, совпадают со столбцами e_j стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^p$. Построенная матрица голоморфна при всех $a \in U^*$, и согласно построению

$$M(z,a)R_1(a) = M^1(z,a)z^{A^1}, \tag{3.13}$$

где $A^1 = \operatorname{diag}(s_1^1,\dots,s_p^1)$, $s_{l+1}^1 = \dots = s_p^1 = 0$. Можно считать, что $s_1^1 \geqslant s_2^1 \geqslant \dots \geqslant s_l^1$. (Этого всегда можно добиться умножением R_1 на подходящую постоянную блочно-диагональную матрицу $T = \operatorname{diag}(T', I)$ с блоком T' размера l.)

Из (3.12), (3.13) следует, что

$$M^1(z,a)z^{A^1}S^1(a) = U(z,a)z^A,$$

где $S^1(a) = R_1^{-1}(a)S^{-1}(a)$ имеет верхнетреугольный блочный вид $S^1 = \begin{pmatrix} S_1 & * \\ 0 & S' \end{pmatrix}$, потому что лишь последние $p-l$ столбцов матриц $M^1(z,a)z^{A^1}$ и $U(z,a)z^A$ не обращаются в нуль при $z=0$.

Рассмотрим матрицы $M_1(z,a)$, $U_1(z,a)$, образованные первыми l столбцами матриц $M^1(z,a)z^{A^1}$, $U(z,a)$ соответственно и соответствующий блок A_1 матрицы A. В этом случае получаем, что для каждого $a \in U^*$

$$M_1(z,a)S_1(a) = U_1 z^{A_1}.$$

Так как $l < p$, из предположения индукции для l следует, что матрицу $S_1(a)$ можно выбрать голоморфной в некоторой окрестности $U' \subset U^*$ точки a^*. Рассмотрим матрицу $R_2 = \operatorname{diag}(S_1, I)$. Матрица $R(a) = R_1(a)R_2(a)$ голоморфно обратима в U', и по построению

$$M(z,a)R(a) = M^1(a)z^{A^1}R_2(a) = V(z,a)z^A$$

для некоторой голоморфной матричной функции $V(z,a)$ ранга p в $O \times U'$. □

Из соотношения (3.7) следует, что матрица $S(a)$ имеет ту же блочно-диагональную форму, что и матрицы Λ_i, E_i. Следовательно, мы можем ограничиться доказательством теоремы для каждого блока матриц Λ_i, E_i, $S(a)$ и для матриц $M_j(z,a)$, образованных соответствующими столбцами M в отдельности. Теперь локальный вариант теоремы для каждого такого набора матриц следует из леммы 7 (после замены $z \mapsto z - a_i$ независимой переменной).

Доказательство в глобальном варианте представлено в [9]. □

Напомним, что матрица B_i коэффициентов фуксовой системы называется *резонансной*, если для какой-либо пары ее собственных значений разность между этими собственными значениями является натуральным числом. Наибольшее число r_i из всех таких разностей называется *максимальным i-резонансом системы.*

Согласно (3.7) и (3.9)

$$r_i = \max_{j=1,\dots,k} ({}^1\lambda_1^j - {}^{s_j}\lambda_i^j). \tag{3.14}$$

Следующая теорема дает описание общего вида формы ω из теоремы 22.

Теорема 24. *Любая матричная дифференциальная* 1*-форма* ω *на*

$$\overline{\mathbb{C}} \times D(a^0) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{z - a_i = 0\},$$

задающая изомонодромную деформацию (3.1) (*см. теорему* 22) *имеет вид*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\, d(z - a_i) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{r_l} \frac{\gamma_{t,k,l}(a)}{(z - a_l)^t}\, da_k + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r(a) da_r, \tag{3.15}$$

где $\gamma_{t,k,l}(a), \gamma_r(a)$ *голоморфны в* $D(a^0)$, r_l — *максимальный* l*-резонанс системы* (3.1) *при* $a = a_0$.

Доказательство. По теореме 23 произвольная изомонодромная фундаментальная матрица $Y(z,a)$ семейства (3.1) после умножения на некоторую невырожденную постоянную матрицу T

имеет следующее разложение в окрестности гиперплоскости $P = \{z - a_i = 0\}$:

$$Y(z,a)T = U_i(z,a)(z-a_i)^{\Lambda_i} S^{-1}(a)(z-a_i)^{E_i}$$

для некоторых голоморфно обратимых матриц $U_i,\ S(a)$. Поэтому в окрестности P

$$\omega = dYY^{-1} = \omega_1 + \omega_2,$$

где

$$\begin{aligned}\omega_1 &= dU_iU_i^{-1}\\ &\quad+ \frac{U_i}{z-a_i}\left(\Lambda_i + (z-a_i)^{\Lambda_i} S_i^{-1} E_i S_i (z-a_i)^{-\Lambda_i}\right) U_i^{-1} d(z-a_i)\\ &= \frac{B_i}{z-a_i}\, d(z-a_i) + \text{некоторая голоморфная форма},\end{aligned}$$

так как по условию теоремы ω имеет полюс первого порядка в точке a_i для любого фиксированного a_i. Заметим, что форма

$$\omega_2 = U_i(z-a_i)^{\Lambda_i} d_a S_i^{-1} S_i (z-a_i)^{-\Lambda_i} U_i^{-1} \tag{3.16}$$

имеет полюс порядка не больше чем r_i на P в силу блочно-диагональной структуры матриц Λ_i и S_i и определения (3.14) максимального i-резонанса r_i системы. □

Следствие 4. *Если форма ω определяет изомонодромную деформацию* (3.1), *то пфаффова система* (3.2) *с формой коэффициентов ω имеет регулярные особые точки на дивизоре $\bigcup_{i=1}^{n}\{z - a_i = 0\}$.*

В этом смысле все изомонодромные деформации фуксовых систем являются регулярными деформациями.

Следствие 5. *Если для каждой матрицы монодромии G_i семейства* (3.1) *и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{rank}(G_i - \lambda I) \geqslant p - 1,$$

то изомонодромная деформация (3.1) *задается дифференциальной формой ω вида* (3.6).

Доказательство. Условие следствия означает, что любую изомонодромную фундаментальную матрицу умножением на некоторую постоянную невырожденную матрицу T_i можно привести к такому виду, что каждый блок G_i^j ее матрицы монодромии G_i будет жордановой клеткой. В [5] показано, что в этом случае матрицу $S(a)$ в теореме 23 можно выбрать равной единичной матрице I. Следствие доказано. $\square$

Следствие 6. *Если при любом i матрица B_i семейства* (3.1) *не имеет резонансов, то любая форма ω, задающая изомонодромную деформацию* (3.1), *имеет вид* (3.6).

Доказательство. В рассматриваемом случае $r_i = 0$ для любого i. $\square$

В следующем примере приведена изомонодромная деформация, которая не сводится к деформации Шлезингера (ни к нормализованной, ни к ненормализованной).

Пример 3. Семейство

$$\frac{dy}{dz} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2a}{a^2-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{z+a} + \begin{pmatrix} 0 & -6a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \begin{pmatrix} 2 & 3+3a \\ \dfrac{1}{1+a} & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{z-1} + \begin{pmatrix} -3 & -3+3a \\ \dfrac{1}{a-1} & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{z+1} \right) y$$

фуксовых систем является изомонодромным и задается следующей вполне интегрируемой дифференциальной формой:

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2a}{a^2-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{d(z+a)}{z+a} + \begin{pmatrix} 0 & -6a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z} + \begin{pmatrix} 2 & 3+3a \\ \dfrac{1}{1+a} & -1 \end{pmatrix} \frac{d(z-1)}{z-1} + \begin{pmatrix} -3 & -3+3a \\ \dfrac{1}{a-1} & 2 \end{pmatrix} \frac{d(z+1)}{z+1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2a}{a^2-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{da_1}{z+a}.$$

Эта форма имеет вид (3.15), и она не сводится к виду (3.6). Так как слагаемое $\sum_{i=1}^n \gamma_i(a)da_i$ в записи формы отсутствует, этот пример является примером так называемой *нормализованной деформации.*

Каждая дифференциальная форма ω, задающая изомонодромную деформацию (3.1), имеет вид $\omega = \omega_s + \sum_{i=1}^n \psi_i(z,a)da_i$ (см. (3.15), (3.3)). Верно ли, что слагаемое $\sum_{i=1}^n \psi_i(z,a)da_i$ определяется однозначно "главной частью" ω_s (мы называем эту часть "главной", потому что она выписывается непосредственно по коэффициентам фуксова семейства)? Ответ на этот вопрос отрицателен.

Имеется следующая свобода в выборе $\sum_{i=1}^n \psi_i(z,a)da_i$: можно заменить изомонодромную матрицу $Y(z,a)$, описывающую нашу деформацию, на $Y(z,a)R(a)$, где $R(a)$ принадлежит централизатору матриц монодромии $G_1,\ldots,G_n$ матрицы $Y(z,a)$. Ясно, что эта замена не меняет форму ω_s, но может изменить форму $\sum_{i=1}^n \psi_i da_i$. При этом имеет место следующее утверждение[45].

Предложение 7. *Если монодромия фуксового семейства* (3.1) *неприводима, то дифференциальная форма* ω, *задающая изомонодромную деформацию* (3.1) (*см. теорему* 24), *определяется однозначно семейством* (3.1) *с точностью до слагаемого* $df(a)f^{-1}(a)I$, *где* $f(a)$ — *произвольная голоморфная функция на* $D(a^0)$.

Доказательство. Рассмотрим какую-либо изомонодромную матрицу $Y(z,a)$ семейства (3.1). Из неприводимости монодромии и из леммы Шура следует, что любая другая изомонодромная матрица $Y'(z,a)$ с той же монодромией должна иметь вид $Y'(z,a) = Y(z,a)R(a)$, где $R(a) = f(a)I$ — некоторая скалярная матрица. Поэтому

$$\begin{aligned}\omega' &= dY'(z,a)(Y')^{-1}(z,a)\\ &= dY(z,a)Y^{-1}(z,a) + Y(z,a)dR(a)R^{-1}(a)Y(z,a)\\ &= \omega + df(a)f^{-1}(a)I.\end{aligned}$$

[45] *Iwasaki K. et al.* From Gauss to Painlevè. A modern theory of special functions. Braunschweig: Vieweg, 1991.

Если монодромия семейства (3.1) приводима, то оно может иметь нетривиальные симметрии вида

$$\Gamma(z,a) = Y(z,a)C(a)Y^{-1}(z,a),$$

где $C(a)$ принадлежит централизатору матриц монодромии матрицы $Y(z,a)$. Это приводит к появлению различных дифференциальных форм, задающих данную деформацию (3.1) (даже в случае, когда набор матриц коэффициентов системы семейства является неприводимым).

Список публикаций

[1] Болибрух А. А., “Проблема Римана–Гильберта” // *УМН*, 1990, **45**(2), 3–47.

[2] Болибрух А. А., “О построении фуксова дифференциального уравнения по представлению монодромии” // *Матем. заметки*, 1990, **48**(5), 22–34.

[3] Болибрух А. А., “О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта” // *Матем. заметки*, 1992, **51**(2), 9–19.

[4] Болибрух А. А., “Фуксовы системы с приводимой монодромией и проблема Римана–Гильберта” // *Нелинейные операторы в глобальном анализе. Новое в глобальном анализе.* Изд-во Воронежского ун-та, 1991. 5–20.

[5] Болибрух А. А., “21-ая проблема Гильберта для линейных фуксовых систем” // *Труды МИАН*, 1994, **206**, 160.

[6] Болибрух А. А., “Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме” // *Докл. РАН*, 1994, **334**(5), 553–555.

[7] Болибрух А. А., “Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме” // *Труды МИАН*, 1994, **203**, 33–40.

[8] Болибрух А. А., “К вопросу о существовании фуксовых систем с данными асимптотиками” // *Труды МИАН*, 1997, **216**, 32–44.

[9] Болибрух А. А., “Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей” // *Труды МИАН*, 1998, **221**, 127–142.

[10] Болибрух А. А., “О фуксовых системах с заданными асимптотиками и монодромией” // *Труды МИАН*, 1999, **224**, 112–121.

[11] Болибрух А. А., “Мероморфное преобразование к биркгофовой стандартной форме в малых размерностях” // *Труды МИАН*, 1999, **225**, 87–95.

Рациональные аппроксимации аналитических функций

А. А. Гончар

1. Введение

Проблематика, связанная с классическими конструкциями рациональных аппроксимаций аналитических функций (непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их различные обобщения), составляет важное направление на стыке теории приближений, комплексного анализа, вычислительной математики. Развитие этого направления в 18–19 вв. (в основном, в рамках классической теории непрерывных дробей) связано с именами многих выдающихся математиков — от Эйлера, Лагранжа, Гаусса до Чебышева, Маркова, Стилтьеса. Интерес к конструктивным рациональным аппроксимациям вновь значительно возрос в последние десятилетия. Благодаря современному развитию вычислительной техники, начиная с 1960-х годов аппроксимации Паде и их обобщения находят новые многочисленные приложения к самым разнообразным вопросам физики, механики и других наук. С другой стороны, теоретический анализ возникающих при этом математических проблем приводит к принципиально новым задачам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов и других областях анализа.

Настоящая работа отражает вклад автора в теорию конструктивных рациональных аппроксимаций аналитических функций. В работу включены результаты, опубликованные автором (частично — совместно с учениками) в 1969–1997 гг. Эти результаты относятся к теории сходимости аппроксимаций Паде и более общих рациональных интерполяционных процессов, существенно расширяющих рамки классической теории непрерывных дробей, обратным задачам теории аппроксимаций Паде, применению многоточечных аппроксимаций Паде (решений интерполяцонной задачи Коши–Якоби) к вопросу о скорости чебышевской рациональной аппроксимации аналитических функций, асимптотическим свойствам аппроксимаций Эрмита–Паде для систем функций марковского типа. Развитые методы и полученные результаты позволили, в частности, дать решения ряда задач в рассматриваемом направлении, долгое время остававшихся открытыми и активно обсуждавшихся в литературе, во всяком случае, начиная с 50–60-х годов.

Подчеркнем, что всюду в работе речь идет о приближениях заданных функций рациональными функциями со *свободными* полюсами; все рассматриваемые аппроксимации имеют *нелинейный* характер. Оптимальный (в том или ином смысле) выбор коэффициентов как числителя, так и знаменателя аппроксимирующей рациональной функции позволяет соответствующим аппроксимациям моделировать особенности приближаемой функции и осуществлять эффективное аналитическое продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд. С этим связаны принципиальные преимущества рассматриваемых аппроксимаций по сравнению с полиномиальными аппроксимациями, а также рациональными аппроксимациями с заранее *фиксированными* полюсами.

2. Теория сходимости. Обратные задачи

2.1. *Аппроксимации Паде* — это локально наилучшие рациональные аппроксимации аналитической функции, заданной своим разложением в степенной ряд (или формального степенного ряда). Точнее, аппроксимацией Паде типа (n, m) степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{2.1}$$

называется рациональная функция $f_{n,m}(z)$ класса

$$\Re_{n,m} = \left\{ r(z) : r(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0},\ \sum_0^m |b_k| \neq 0 \right\},$$

имеющая максимально возможный (в классе $\Re_{n,m}$) порядок касания с рядом f в точке $z = 0$. Аппроксимация Паде $f_{n,m}$ может быть определена также как отношение p/q любых полиномов p, q ($q \not\equiv 0$), удовлетворяющих соотношениям

$$\deg p \leqslant n, \quad \deg q \leqslant m, \quad (qf - p)(z) = Az^{n+m+1} + \cdots. \tag{2.2}$$

Для любой пары индексов (n, m) *существует единственная* аппроксимация Паде $f_{n,m}$ ряда f. Она вычисляется непосредственно по коэффициентам $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$ заданного степенного ряда. Для *нормальных* индексов (n, m) имеем

$$(f - f_{n,m})(z) = Bz^{n+m+1} + \cdots. \tag{2.3}$$

Совокупность всех аппроксимаций $f_{n,m}$, $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, составляет *таблицу* Паде ряда f. Наибольший интерес (как для теории, так и для приложений) представляют *диагональные* последовательности $\{f_{n,n+j}\}$, $j \in \mathbb{Z}$ — фиксировано (в первую очередь — *главная диагональ* $\{f_{n,n}\}$) и *строки* таблицы Паде $\{f_{n,m}\}$, $m \in \mathbb{N}$ — фиксировано.

Классические алгоритмы, связанные с разложением функций или переразложением степенных рядов в непрерывные дроби, тесно связаны с аппроксимациями Паде. Как правило, подходящие дроби таких непрерывных дробей являются диагональными аппроксимациями Паде соответствущих степенных рядов. Многие фундаментальные результаты, связанные с аппроксимациям Паде, были получены в рамках классической теории непрерывных дробей.

Основные результаты *теории сходимости непрерывных дробей* формулируются в терминах, связанных с параметрами соответствующих непрерывных дробей. Это существенно сужает возможности применения методов и результатов теории непрерывных дробей к вопросам сходимости аппроксимаций Паде для общих классов аналитических функций.

В *теории сходимости аппроксимаций Паде* основной интерес представляют результаты двух типов — прямые и обратные.

В *прямых* теоремах на основании известной заранее информации об аналитическом продолжении функции, заданной своим разложением в степенной ряд (области голоморфности и мероморфности, расположение и характер особых точек, принадлежность функции тому или иному классу, например, классу алгебраических функций и т.п.) делаются те или иные выводы о сходимости соответствующих аппроксимаций, асимптотическом поведении их полюсов, скорости сходимости и др. Отметим, что при общих предположениях об аналитических свойствах заданной функции ее аппроксимации Паде могут иметь “*случайные*” полюсы в области голоморфности приближаемой функции; поэтому в соответствующих теоремах общего характера речь идет о сходимости вне “малых” исключительных множеств (почти равномерная сходимость, сходимость по мере или по емкости). В *обратных* задачах исходные данные связаны с самими аппроксимациями Паде; особый интерес представляют обратные теоремы, в которых на основе минимальной информации о предельном поведении полюсов аппроксимаций Паде делается вывод о сходимости этих аппроксимаций, аналитическом продолжении приближаемой функции, расположении и характере ее особенностей. Ясно, что с точки зрения приложений особенно важны именно обратные результаты. Далее приведены основные результаты работы, относящиеся к теории сходимости аппроксимаций Паде.

2.2. Исторически первый результат о сходимости *строк* таблицы Паде был получен Монтессу де Болором в 1902 году. Опираясь на формулы Адамара для радиусов m-мероморфности функции f, заданной своим разложением в степенной ряд, он доказал следующую теорему: если функция f имеет ровно m полюсов в круге $D\colon |z| < R$ (здесь и в дальнейшем полюсы считаются с учетом их кратностей), то m-я строка $\{f_{n,m}\}$ ее таблицы Паде равномерно сходится к f внутри (на компактных подмножествах) области D', которая получается из D удалением полюсов функции f. По существу, была доказана равномерная сходимость $\{f_{n,m}\}$ к f внутри D в *сферической метрике*. Отсюда уже следует, что полюсы аппроксимаций сходятся к полюсам заданной функции: каждый полюс функции “притягивает” столько полюсов аппроксимаций, какова его кратность, и сходятся они к полюсам f со скоростью геометрической прогрессии (*геометрически*). Обращая последнее утверждение, автор получил следующий результат (по-видимому, первый результат *обратного* характера для произвольного m): если полюсы m-й строки Паде формального степенного ряда f геометрически сходятся к некоторым точкам комплексной плоскости, то ряд f определяет m-мероморфную функцию в круге D, содержащем все эти точки.

Тот факт, что в этих результатах речь идет о функциях, имеющих ровно m полюсов в круге D, связан с существом дела. В общем случае (когда число полюсов f в D может быть $< m$), ситуация усложняется; тем не менее и в общем случае можно доказать, что m-я строка $\{f_{n,m}\}$ сходится к f внутри D, например, по емкости (или равномерно, но вне множества произвольно малой 1-меры). Опираясь, в частности, на это утверждение, и для общего случая удалось "сомкнуть" прямые и обратные теоремы и в терминах, связанных с предельным поведением полюсов строк таблицы Паде, полностью охарактеризовать m-мероморфное продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд.

Сформулируем основной результат работы [12]. Пусть f — произвольный степенной ряд вида (2.1) (вообще говоря, формальный), $R_0 = R_0(f)$ — радиус сходимости ряда f. Если $R_0 > 0$, то через $f = f(z)$ будем обозначать сумму ряда в его круге сходимости $D_0 = D_0(f)$ и аналитическую функцию, определяемую элементом (f, D_0). В этом случае при любом натуральном m положим: $D_m = D_m(f)$ — круг m-мероморфности f (максимальный открытый круг с центром в нуле, в который функция $f(z)$, $z \in D_0$, продолжается как мероморфная функция, имеющая $\leqslant m$ полюсов); $R_m = R_m(f)$ — радиус круга D_m; $d_m = d_m(f) = \{(a_1, \nu_1), \dots, (a_s, \nu_s)\}$, — дивизор полюсов f в D_m, $|d_m| = \nu_1 + \dots + \nu_s$ — число полюсов f в D_m. Если $R_0 = 0$, то $R_m = 0$ при любом m.

Пусть $\{f_{n,m}\}$ (m — фиксировано, $n = 1, 2, \dots$) — m-я строка таблицы Паде ряда f. Для $a \in \mathbb{C}$ введем две характеристики — $\Delta(a)$ и $\mu(a)$, связанные с асимптотическим поведением последовательности множеств $P_{n,m} = \{z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n}\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n}$, $m_n \leqslant m$, — конечные (свободные) полюсы рациональной функции $f_{n,m}$. Первая из интересующих нас характеристик определяется формулой

$$\Delta(a) = \limsup_{n \to \infty} \prod_{z_{n,j} \in U} |z_{n,j} - a|^{1/n}$$

(U — фиксированный круг с центром в точке a). Вторую характериристику — целое неотрицательное число $\mu(a)$ — определим следующим образом. Будем считать, что $z_{n,j}(a)$ — это полюсы $z_{n,j} \in U$, перенумерованные в порядке неубывания их расстояний от точки a. Положим

$$\delta_j(a) = \limsup_{n\to\infty} |z_{n,j}(a) - a|^{1/n}, \qquad j = 1, \dots, m',$$

где $m' = \liminf m_n$; для $j = m'+1, \dots, m$ по определению $\delta_j(a) = 1$. Очевидно, величины $\Delta(a)$ и $\delta_j(a)$ не зависят от выбора U. Если $\Delta(a) = 1$ (тогда все $\delta_j(a) = 1$), то $\mu(a) = 0$. Если $\Delta(a) < 1$, то при некотором μ имеем: $\delta_1(a) \leqslant \dots \leqslant \delta_\mu(a) < 1$, в то время как $\delta_{\mu+1}(a) = 1$ (или $\mu = m$); в этом случае полагаем $\mu(a) = \mu$.

Теорема. *Пусть f формальный степенной ряд, m — натуральное число и $a \neq 0$ — фиксированная точка плоскости $\mathbb{C}$ ($a \in \mathbb{C}^*$). Следующие утверждения эквивалентны*:

i) $a \in D_m$ *и f имеет полюс в точке a*;

ii) $\Delta(a) < 1$ (*или, что то же самое*, $\mu(a) \geqslant 1$).

При этом (*если выполнено какое-либо из условий* i), ii)) *имеют место формулы*:

$$R_m = \frac{|a|}{\Delta(a)}, \qquad \nu = \mu(a),$$

где ν — кратность полюса f в точке a.

Положим

$$P_m = \{a \in \mathbb{C}^* : \Delta(a) < 1\} = \{a \in \mathbb{C}^* : \mu(a) \geqslant 1\}.$$

Из теоремы вытекает следствие: $R_m > R_0$ *в том и только том случае, когда* $P_m \neq \varnothing$; *при этом*

$$R_m = \frac{|a|}{\Delta(a)} \quad \text{для всех} \quad a \in P_m, \qquad d_m = \{(a, \mu(a)) : a \in P_m\},$$

в частности, $|d_m| = \sum_{a\neq 0} \mu(a)$.

Простая геометрическая природа характеристик Δ и μ (и, тем самым, связанных с ними формул) позволила доказать аналогичные результаты для значительно более общих (чем классические аппроксимации Паде) рациональных интерполяционных процессов; подробнее см. [7], [12].

2.3. Наибольший интерес в рассматриваемом круге вопросов представляют *диагональные* аппроксимации. Всюду в дальнейшем обсуждаются результаты, относящиеся к диагональным аппроксимациям Паде $f_{n,n} = f_n$ и их обобщениям.

Первые результаты о сходимости диагональных аппроксимаций Паде для общих классов аналитических функций были получены Наттоллом (1970 г.) и Поммеренке (1973 г.). Теорема Наттолла относилась к мероморфным функциям (во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$), теорема Поммеренке — к однозначным аналитическим функциям, множество особенностей которых имеет нулевую емкость; в первой работе речь шла о сходимости по мере, во второй — о *сходимости по емкости* (второе — значительно сильнее). Существенным развитием этих результатов является следующая теорема ([2], [3]).

Теорема. *Пусть f — функция, голоморфная в точке $z = 0$, U — произвольно малая окрестность нуля и*

$$\rho_n = \rho_n(f, U) = \inf_{r \in \mathfrak{R}_n} \|f - r\|_U$$

($\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{n,n}$, $\|g\|_U$ — sup-*норма g на U). Если*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = 0, \tag{2.4}$$

то:

i) *аналитическая функция f, определяемая элементом (f, U), однозначна в своей вейерштрассовой естественной области существования W_f*;

ii) *последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}$ сходится по емкости к f внутри области W_f.*

Утверждение i) этой теоремы представляет собой *локальное* условие (в классе всех аналитических функций, множество особенностей которых имеет нулевую емкость — необходимое и достаточное условие) однозначности в *целом* аналитической функции f, определяемой элементом (f, U).

Хорошо известно, что мероморфные в $\mathbb{C}$ функции и однозначные аналитические функции, множество особенностей которых имеет нулевую емкость, удовлетворяют условию (2.4).

Справедливо также следующее утверждение: *пусть f — функция, голоморфная в области G $(0 \in G)$ и U — произвольно малая окрестность нуля*; *если $|f - f_n|^{1/n} \to 0$ по мере в U, то*

$|f - f_n|^{1/n} \to 0$ *по емкости внутри* G. Тем самым, из быстрой сходимости f_n к f по мере в U уже следуют утверждения i), ii) теоремы.

Аналогичные результаты получены автором и для функций многих переменных (см. [4]).

2.4. Фундаментальное значение для теории *обратных* задач имеет следующий вопрос. Предположим, что диагональные аппроксимации Паде f_n, $n \geqslant n_0$, формального степенного ряда f не имеют полюсов (голоморфны) в круге $D_r\colon |z| < r$; можно ли утверждать, что в этом случае последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри D_r и, тем самым, ряд f определяет функцию, голоморфную в этом круге? Положительный ответ на этот вопрос получен в работе [13]. Сформулируем здесь достаточно общую теорему в этом направлении (в [13] доказаны более сильные утверждения).

Пусть D — открытый круг, содержащий точку $z = 0$, или область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являющаяся объединением таких кругов (например, $D = \mathbb{C} \setminus [a, +\infty)$, $a > 0$), $G = D \setminus e$, где $e \not\ni 0$ — относительно замкнутое подмножество области D, имеющее нулевую емкость; f_n, $n = 1, 2, \dots,$ — последовательность диагональных аппроксимаций Паде ряда f такая, что

$$(f - f_n)(z) = A_n z^{2n+1} + \cdots$$

для всех достаточно больших n.

Теорема. *Если аппроксимации Паде f_n формального степенного ряда f не имеют полюсов в области G (для всех $n \geqslant n(f)$), то последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри (на компактных подмножествах) области G и, тем самым, ряд f определяет функцию, голоморфную в G.*

Заметим, что из классических результатов о нормальных семействах мероморфных функций (теорема Монтеля) вытекает равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ в заданной области G в том случае, когда функции этой последовательности в области G выпускают *три* значения a, b и $c = \infty$. Теорема показывает, что последовательности диагональных аппроксимаций Паде имеют замечательную специфику — их равномерная сходимость (в областях указанного вида) вытекает уже из того факта, что функции f_n выпускают в области G только *одно* значение $c = \infty$ (не имеют полюсов).

Утверждения теоремы справедливы и в том случае, когда множество полюсов диагональных аппроксимаций Паде *не имеет предельных точек в области* G. Последнее условие, очевидно, и необходимо для равномерной сходимости внутри G (по определению). Принципиальное значение соответствующего *критерия равномерной сходимости* заключается в том, что формулируется он в терминах, связанных только с предельным поведением *полюсов* диагональных аппроксимаций Паде.

Такой же характер имеет следующий *критерий равномерной сходимости в сферической метрике* (при тех же условиях на f и G); см. [16].

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны*:

i) *последовательность* $\{f_n\}$ *диагональных аппроксимаций Паде ряда* f *равномерно сходится в сферической метрике внутри области* G;

ii) *существует дискретное подмножество* P *области* G $(0 \notin P)$ *и функция* $p\colon P \to \mathbb{N}$ *такие, что множество полюсов рациональных функций последовательности* $\{f_n\}$ *не имеет предельных точек в области* $G \setminus P$ *и для каждой точки* $a \in P$ *справедливы соотношения*

$$\limsup_{n\to\infty} |z_{n,j}(a) - a|^{1/n} < 1, \quad j = 1, \dots, p(a),$$
$$\liminf_{n\to\infty} |z_{n,p+1}(a) - a| > 0, \quad p = p(a),$$

где $z_{n,j}(a)$ — *полюсы* f_n, *перенумерованные в порядке невозрастания их расстояний от точки* a.

В частности, если выполнено условие ii), *то ряд* f *определяет мероморфную функцию* $f(z)$, $z \in G$, *множество полюсов которой совпадает с* P, *а кратность полюса* f *в точке* $a \in P$ *равна* $p(a)$.

Последний вывод (уже для случая круга и конечного числа полюсов) наиболее важен для приложений.

3. Скорость рациональных аппроксимаций аналитических функций

3.1. Задачи, связанные со скоростью чебышевских рациональных аппроксимаций аналитических функций, занимают центральное место в рассматриваемой теории. Анализ вопросов сходимости рациональных интерполяционных процессов (метод многоточечных аппроксимаций Паде) позволил в последние годы решить основные задачи в этом направлении.

Пусть E — компакт в расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, f — непрерывная функция на E, $\mathfrak{R}_n$ — класс всех рациональных функций от z порядка не выше n ($\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{n,n}$). Обозначим через $\rho_n = \rho_n(f, E)$ расстояние от f до $\mathfrak{R}_n$ (в чебышевской метрике на E). Если f *голоморфна* на компакте E ($f \in H(E)$), то последовательность ρ_n стремится к нулю *геометрически*; точнее,

$$\limsup_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = q < 1. \tag{3.1}$$

Величина $q = q(f, E)$ является основной характеристикой скорости рациональной аппроксимации f на E. Вопросы описания величины q в терминах, связанных с аналитическим продолжением функции f, играют фундаментальную роль в теории рациональных аппроксимаций аналитических функций.

Далее предполагается, что компакт E состоит из конечного числа нетривиальных связных компонент (континуумов). Пусть F — компакт, принадлежащий дополнению к E, и $h(E, F)$ — *модуль* конденсатора (E, F); иначе говоря, $h(E, F) = 1/c$, где $c = c(E, F)$ — *емкость* этого конденсатора. Следующая теорема вытекает из результатов Уолша (1930-х годов), относящихся к интерполяции рациональными функциями с *фиксированными* полюсами: если функция f голоморфна в открытом множестве $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F$ и $E \subset G$, то $q \leqslant \exp(-h(E, F))$.

Верхнюю грань величины $h(E, F)$ в классе всех компактов F таких, что f допускает голоморфное (однозначное аналитическое) продолжение в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F$, обозначим через $h = h(f, E)$ и назовем эту величину *модулем голоморфности* функции $f \in H(E)$. В наиболее интересных случаях существует единственный компакт F_f, для которого $h(E, F_f) = h$; открытое множество $G_f = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F_f$

называется *максимальной областью голоморфности функции* $f \in H(E)$.

Из (3.1) следует, что для любой $f \in H(E)$ величины q и h связаны неравенством

$$q \leqslant e^{-h}. \tag{3.2}$$

Эта оценка позволяет вычислить q только при $h = +\infty$; последнее означает, что функция f — однозначная аналитическая функция, множество особенностей которой имеет нулевую емкость. В общем случае нельзя описать величину q в терминах, связанных только с понятием аналитического продолжения f по Вейерштрассу (более того, с рациональными аппроксимациями связана возможность обобщения этого понятия); в частности, q нельзя выразить через h. Построены примеры функций, для которых $0 < q = e^{-h}$; однако, эти функции имеют весьма экзотическую природу. Результаты, полученные автором в 1980-х годах, показывают, что для широких классов аналитических функций, включающих важнейшие функции анализа, q *вычисляется по* h, причем справедливо соотношение (ср. (3.2))

$$q = \lim_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = e^{-2h}. \tag{3.3}$$

Уже первые результаты достаточно общей природы, относящиеся к функциям марковского типа и приводящие к формуле (3.3) (см. [8], [14]), основывались на интерполяциях рациональными функциями со *свободными* полюсами.

3.2. Прежде чем переходить к описанию итоговых результатов в рассматриваемом направлении, остановимся на методе многоточечных аппроксимаций Паде и схеме его применения к задачам о скорости рациональной аппроксимации.

Пусть $f \in H(E)$, $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots,$ — треугольная таблица точек (узлов интерполяции), принадлежащих компакту E; положим

$$A_n(z) = (z - \alpha_{n,1}) \cdots (z - \alpha_{n,n}).$$

Фиксируем натуральное число n и рассмотрим рациональную функцию $R_n = P_n/Q_n$, где P_n, Q_n — произвольные полиномы от z, удовлетворяющие условиям

$$\deg P_n \leqslant n - 1, \quad \deg Q_n \leqslant n \quad (Q_n(z) \not\equiv 0); \quad \frac{Q_n f - P_n}{A_{2n}} \in H(E). \tag{3.4}$$

Последнее соотношение означает, что $Q_nf-P_n=0$ во всех точках $2n$-й строки таблицы α. Полиномы, удовлетворяющие (3.4), *существуют* для любой $f\in H(E)$; их отношение определяет *единственную* рациональную функцию R_n (с точностью до обычного отождествления). Эта рациональная функция называется *многоточечной аппроксимацией Паде* (в рассматриваемом случае, типа $(n-1,n)$) функции f, соответствующей узлам интерполяции $\alpha_{2n,1},\dots,\alpha_{2n,2n}$. Если $Q_n\neq 0$ в этих узлах, то R_n интерполирует в них функцию f. В противном случае, при переходе от Q_nf-P_n к $f-R_n$ некоторые из интерполяционных условий теряются; однако, потеря d_n условий интерполяции сопровождается понижением (на d_n) степеней числителя и знаменателя R_n.

Основные трудности, связанные с применением многоточечных аппроксимаций Паде, лежат в анализе асимптотического поведения их полюсов (в первую очередь, с вопросом о том, как это поведение связано с характером и расположением особенностей функции f).

Если функция $f\in H(E)$ допускает голоморфное продолжение в открытое множество $G=\widehat{\mathbb{C}}\setminus F$ (без ограничения общности можно считать, что E и F — компакты в $\mathbb{C}$ и $f(\infty)=0$), то полиномы Q_n удовлетворяют *комплексным* соотношениям ортогональности

$$\int_\gamma Q_n(t)\,t^j\,\frac{f(t)\,dt}{A_{2n}(t)}=0,\qquad j=0,1,\dots,n-1,\tag{3.5}$$

где γ — контур, охватывающий F (γ лежит в дополнении к $E\cup F$). Для разности $f-R_n$ имеем

$$(f-R_n)(z)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{A_{2n}(z)}{(Q_nQ)(z)}\int_\gamma\frac{(Q_nQf)(t)\,dt}{A_{2n}(t)(z-t)}\,,\tag{3.6}$$

где Q — произвольный полином степени не выше n (интегралы в (3.5), (3.6) не зависят от γ и их можно записывать как $\oint_F$).

В 1983–1988 гг. на основе метода многоточечных аппроксимаций Паде был решен ряд узловых задач, связанных со скоростью рациональных аппроксимаций аналитических функций. Общая теорема относится к последовательностям функций, задающихся интегралами типа Коши; она формулируется в терминах, связанных с равновесным распределением заряда на пластинах конденсатора при условии, что на одной из его пластин действует *внешнее поле*. Изучение характера сходимости многоточечных аппроксимаций Паде приводит к вопросам, относящимся к предельным распределениям нулей ортогональных многочленов с переменными (зависящими от номера многочлена) весовыми функциями (см. (3.5)); теоретико-потенциальные задачи равновесия с внешним полем позволяют охарактеризовать такие распределения (для вещественного случая см. [14], [15]). В случае комплексных соотношений ортогональности (для многозначных аналитических функций, например, для функций с конечным числом точек ветвления) возникает также проблема выбора компакта F. Важные результаты в этом направлении получены Шталем; в частности, им доказаны гипотезы Наттолла и автора, относящиеся к локальным аппроксимациям. Полученные результаты показывают, что полюсы аппроксимаций "выбирают" экстремальную систему кривых F_f (при надлежащем выборе узлов интерполяции α). Однако, в общем случае анализ задач о предельном распределении свободных полюсов аппроксимаций (нулей ортогональных многочленов) удобно основывать непосредственно на свойстве *симметрии* соответствующей системы "разрезов" F. Вопросы построения кривых, обладающих надлежащим свойством симметрии, и вычисления параметров соответствующих теоретико-потенциальных задач, связаны с экстремальными задачами геометрической теории функций (типа задач Чеботарева и Лаврентьева) и траекториями квадратичных дифференциалов на римановых поверхностях.

3.3. Прежде чем формулировать основную теорему (см. [18], [19]), введем необходимые для этого понятия. Пусть (E, F) — конденсатор, φ — вещественная непрерывная функция (внешнее поле) на F ((E, F, φ) — оснащенный конденсатор). Обозначим через $M(E, F)$ множество всех вещественных мер (зарядов) вида $\mu = \mu_F - \mu_E$, где μ_E, μ_F — вероятностные меры на E, F (соответственно).

Существует единственный заряд λ, минимизирующий энергию (с учетом поля φ) в классе $M(E, F)$:

$$J_\varphi(\lambda) = \inf\{J_\varphi(\mu) : \mu \in M(E, F)\},$$

где

$$J_\varphi(\mu) = \iint \log \frac{1}{|t-z|}\, d\mu(t)\, d\mu(z) + 2\int \varphi(t)\, d\mu_F(t).$$

Если дополнение к $E \cup F$ *связно, то заряд* λ (*и только этот заряд — в классе* $M(E,F)$) *удовлетворяет следующим соотношениям равновесия* (*приблизительно всюду на указанных множествах*; $V = V^\lambda$ *— логарифмический потенциал* λ):

$$\begin{gathered} V(z) = w_1, \quad z \in E, \\ (V+\varphi)(z) = \min_F (V+\varphi) = w_2, \quad z \in L = \operatorname{Supp} \lambda_F. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Положим $w = w(E,F,\varphi) = w_2 - w_1$; *равновесная константа* w, как и *равновесный заряд* $\lambda = \lambda_F - \lambda_E$, единственным образом определяется соотношениями равновесия (3.7).

Будем говорить, что оснащенный конденсатор (точнее, его пластина F) обладает свойством симметрии в гармоническом поле φ и писать $(E,F,\varphi) \in S$, если выполнены условия:

i) φ — гармоническая функция в некоторой окрестности Ω пластины F;

ii) $L = \operatorname{Supp} \lambda_F$ — правильный компакт ($\operatorname{cap}(L \setminus L_0) = 0$, где L_0 — множество всех точек $\zeta \in L$, окрестности которых пересекаются с L по аналитической дуге);

iii) $\dfrac{\partial(V+\varphi)}{\partial n_+}(\zeta) = \dfrac{\partial(V+\varphi)}{\partial n_-}(\zeta)$, $\zeta \in L_0$, где $\partial/\partial n_\pm$ — производные по нормали к L_0 в противоположных направлениях.

Теорема. *Пусть* Φ_n *— последовательность функций, голоморфных в окрестности* Ω *пластины* F *конденсатора* (E,F), *и* g *— функция, голоморфная в* $\Omega \setminus F$. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

i) $(2n)^{-1} \log \dfrac{1}{|\Phi_n|} \to \varphi$ *равномерно внутри* Ω;

ii) $(E,F,\varphi) \in S$;

iii) $g \in H_0(\Omega \setminus F)$

(*последнее означает, что* $g \in H(\Omega \setminus F)$ *и имеет достаточно правильный скачок на* L_0). *Тогда для последовательности функций*

$$f_n(z) = \oint_F \frac{\Phi_n(t) g(t)\, dt}{t - z}, \qquad z \in E,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(f_n, E)^{1/n} = e^{-2w}, \qquad w = w(E,F,\varphi).$$

При $\Phi_n(z) \equiv 1$ (тем самым, $\varphi \equiv 0$) из этой теоремы вытекает, что соотношение (3.3) справедливо, в частности, в следующих случаях:

1) E — континуум и элемент (f, E) определяет многозначную аналитическую функцию с конечным числом точек ветвления (в частности, алгебраическую функцию);

2) E есть объединение конечного числа попарно непересекающихся континуумов $E_1, \dots, E_N$ и $f_j(z) \equiv c_j$ для $z \in E_j$, $j = 1, \dots, N$ (случай двух отрезков вещественной прямой соответствует классической задаче Золотарева; для двух континуумов в комплексной плоскости формула (3.3) содержится в работе [1]).

3.4. Эта же теорема легла в основу решения известной задачи о скорости рациональной аппроксимации экспоненты на полуоси (см. [19]). Положим

$$r_n = \rho_n\bigl(e^{-x}, E^+\bigr), \qquad E^+ = [0, +\infty].$$

Многочисленные работы были посвящены последовательному улучшению констант c_1, c_2 в оценках вида

$$0 < c_1 \leqslant \liminf r_n^{1/n} \leqslant \limsup r_n^{1/n} \leqslant c_2 < 1$$

и приближенным вычислениям (гипотетически существующего) предела $r_n^{1/n}$. С другой стороны, сама возможность геометрической скорости рациональной аппроксимации функции e^{-x}, имеющей существенную особенность в точке $z = \infty \in E^+$, породила большое число исследований в этом направлении.

Приведенная выше теорема приводит к решению этой задачи в терминах, связанных с равновесным зарядом в поле $\varphi(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} z$ на (заранее неизвестной) пластине F оснащенного конденсатора (E, F, φ). Требование $(E, F, \varphi) \in S$ позволяет найти эту пластину и дать явное решение соответствующей задачи равновесия в терминах, связанных с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Мы приведем ответ в наиболее интересной (теоретико-числовой) форме.

Теорема. *Существует предел $\nu = \lim_{n\to\infty} r_n^{1/n}$; его значение ν совпадает с (единственным) положительным корнем уравнения:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{8}\,, \qquad a_n = \Bigl|\sum_{d\,|\,n} (-1)^d d\Bigr|. \tag{3.8}$$

Другими словами, коэффициент a_n является модулем алгебраической суммы всех (простых и составных) делителей числа n, в которой четные делители учитываются со знаком плюс, а нечетные — со знаком минус. Вычисление ν на основе (3.8) не составляет труда.

Явное решение получено и для более общей задачи о скорости рациональной аппроксимации функции e^{-z} в угловых областях вида $E_\theta\colon |\arg z| \leqslant \theta < \pi/2$. А именно, существует

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n\bigl(e^{-z}, E_\theta\bigr)^{1/n} = \nu_\theta \in (0,1);$$

при этом $\nu_\theta = -h^2$, где $h = \exp(\pi i\omega'/\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{\vartheta_0(t)}{\vartheta_3(t)}\right)^{2\alpha} dt = 0, \qquad \alpha = 1 - \frac{\theta}{\pi}$$

(ϑ_0, ϑ_3 — тэта-функции, соответствующие $\tau = \omega'/\omega$).

4. Метод векторных потенциалов. Аппроксимации Эрмита–Паде

4.1. Классическое понятие равновесного распределения заряда — для компакта (проводника) F и для конденсатора (F_1, F_2) (F_j — непересекающиеся компакты в $\widehat{\mathbb{C}}$) — играет важную роль во многих вопросах теории приближений. Ряд задач, относящихся к рациональным аппроксимациям аналитических функций, естественным образом приводит к более общему понятию равновесного распределения зарядов (*равновесной меры*) для *системы проводников* $(F_1, F_2, \dots, F_m)$; при этом задаются *величины зарядов* на каждом из проводников, закон их взаимодействия (взаимодействие зарядов, принадлежащих F_j и F_k, может быть различно для разных j, k, и общий закон взаимодействия задается $(m\times m)$-матрицей) и *внешние поля*, действующие в пределах этих проводников.

В соответствии со сказанным выше, *исходными данными* рассматриваемой задачи являются:

$F = (F_1, \dots, F_m)$ — множество компактов в $\widehat{\mathbb{C}}$;

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ — вектор с положительными координатами;

$A = \|a_{j,k}\|$ — вещественная симметричная $(m \times m)$-матрица;

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — множество непрерывных функций в $\widehat{\mathbb{C}}$ со значениями в $(-\infty, +\infty]$, $\varphi_j(x) \not\equiv \infty$, $x \in F_j$.

Далее предполагается, что F_j — отрезки вещественной прямой, A — положительно определенная матрица и $a_{j,k} = 0$ при $F_j \cap F_k \neq \varnothing$.

Через $M = M_\theta(F)$ обозначим множество всех векторных мер $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, где μ_j — (положительные борелевские) меры, причем $S(\mu_j) = \operatorname{Supp} \mu_j \subset F_j$ и $|\mu_j| = \mu_j(F_j) = \theta_j$. Для меры $\mu \in M$ определим *векторный потенциал* $W^\mu = \bigl\{W_j^\mu(x),\ x \in F_j : j = 1, \dots, m\bigr\}$, где

$$W_j^\mu(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} V^{\mu_k}(z) + \varphi_j(z), \qquad z \in \mathbb{C}$$

(V^ν — логарифмический потенциал ν). *Энергия* (удвоенная) меры μ — с учетом матрицы взаимодействия и вектора внешних полей — задается формулой:

$$J_\varphi(\mu) = (A\mu, \mu) + 2 \int \varphi \, d\mu = \sum_{j,k=1}^{m} a_{j,k}(\mu_j, \mu_k) + 2 \sum_{k=1}^{m} \int \varphi_k \, d\mu_k,$$

где (μ_j, μ_k) — взаимная энергия указанных мер. Сформулируем теорему, лежащую в основе метода векторных потенциалов (ср. [17]).

Теорема. *Каждая из следующих задач имеет единственное решение λ в классе M; решения этих задач совпадают*:

(A) $J_\theta(\lambda) = \min_{\mu \in M} J_\theta(\mu)$;

(B) $W_j^\lambda(x) \equiv w_j = \min_{F_j} W_j^\lambda$, $x \in S(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$;

(C) $\min_{F_j} W_j^\lambda = \max_{\mu \in M(j,\lambda)} \min_{F_j} W_j^\mu$, $j = 1, \dots, m$; $M(j, \lambda)$ *— множество мер $\mu \in M$ таких, что $\mu_k = \lambda_k$ для всех $k \neq j$.*

Векторная мера λ, решающая задачи (A), (B), (C), называется *равновесной мерой*. Наиболее важной для приложений является характеризация меры λ как решения задачи равновесия (B). Соответствующее утверждение теоремы можно сформулировать так: *существует единственная мера $\lambda \in M$ такая, что (для некоторых констант w_j) имеют место соотношения: $W_j^\lambda(x) = w_j$ на $S(\lambda_j)$ и $W_j^\lambda(x) \geqslant w_j$ на всем отрезке F_j*, $j = 1, \dots, m$. Это свойство равновесия однозначно определяет и меру λ, и набор *равновесных констант* $w = (w_1, \dots, w_m)$.

Теорема справедлива и при более общих предположениях относительно исходных данных задачи.

4.2. В классической работе Эрмита о трансцендентности числа e была введена конструкция рациональных аппроксимаций, сыгравшая важную роль в ряде задач анализа и теории чисел. В дальнейшем соответствующие рациональные функции стали называться аппроксимациями Эрмита–Паде. Один из основных вариантов этой конструкции состоит в построении рациональных аппроксимаций с общим знаменателем для конечного набора степенных рядов с центром в точке $z=\infty$:

$$f=(f_1,\dots,f_m);\qquad f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}\,,\quad j=1,\dots,m. \tag{4.1}$$

А именно, фиксируем мультииндекс $n=(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{Z}_+^m$; положим $|n|=n_1+\dots+n_m$. Всегда *существует* полином $Q_n(z)\not\equiv 0$, $\deg Q_n\leqslant|n|$, удовлетворяющий соотношениям:

$$(Q_nf_j-P_{n,j})(z)=\frac{A_{n,j}}{z^{n_j+1}}+\cdots\,,\qquad j=1,\dots,m \tag{4.2}$$

(справа стоят ряды по возрастающим степеням $1/z$, $P_{n,j}$ — полиномиальная часть степенного разложения Q_nf_j в точке $z=\infty$). Для любого решения задачи (4.2) рациональные функции $R_{n,j}=P_{n,j}/Q_n$, $j=1,\dots,m$, называются *аппроксимациями Эрмита–Паде* (или *совместными аппроксимациями Паде*) для набора степенных рядов (4.1). Если любой полином Q_n, удовлетворяющий соотношениям (4.2), с необходимостью имеет степень $|n|$ (такие индексы называются *нормальными*), то существует единственный (с точностью до нормирующего числового множителя) полином Q_n, удовлетворяющий этим соотношениям, и, тем самым, *единственный* набор $\{R_{n,j}\}$ аппроксимаций Эрмита–Паде для f. Случай $m=1$ соответствует классическим аппроксимациям Паде (для степенных разложений с центром в точке $z=\infty$); далее рассматриваются $m\geqslant 2$.

4.3. Опишем результаты, полученные для функций марковского типа:

$$f_j(z)=\widehat{s}_j(z)=\int\frac{ds_j(x)}{z-x}\,,\qquad j=1,\dots,m, \tag{4.3}$$

где s_j — конечные положительные борелевские меры с компактными носителями на вещественной прямой. Степенные разложения марковских функций f_j в точке $z=\infty$ имеют вид (4.1), где $c_{j,k} = \int x^k\,ds_j(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ — моменты мер s_j. Полиномы Q_n в этом случае удовлетворяют следующей системе соотношений ортогональности:

$$\int Q_n(x)x^k\,ds_j(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4.4}$$

Эта система для функций марковского типа может служить определением *полиномов Эрмита–Паде* Q_n, соответствующих мультииндексу n (как и выше, вместе со стандартными условиями $Q_n(z) \not\equiv 0$, $\deg Q_n \leqslant |n|$).

Через $\Delta(s_j)$ будем обозначать минимальный отрезок, содержащий носитель меры s_j. В дальнейшем удобно считать, что задается *система отрезков* Δ_j и мер s_j таких, что $\Delta(s_j) = \Delta_j$, $j = 1, \dots, m$.

Вопросы сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для случая, когда отрезки Δ_j попарно не пересекаются (*системы Анжелеско*) был изучен в работе [11]. В этом случае все индексы нормальны и многочлен Q_n имеет n_j различных нулей внутри отрезка Δ_j, $j = 1, \dots, m$. Основываясь на методе векторных потенциалов (в рассматриваемых здесь задачах внешние поля отсутствуют, но они возникают в процессе доказательства соответствующих теорем) был получен первый результат общего характера, характеризующий предельные распределения нулей многочленов Q_n и области сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде $R_{n,j}$.

Меру, ассоциированную с нулями произвольного полинома $q(z)$, обозначим через $\mu(q)$: $\mu(q) = \sum \delta_\zeta$, где сумма берется по всем нулям полинома q (с учетом их кратностей). Пусть Λ_θ — произвольная последовательность мультииндексов n, для которой

$$\lim \frac{n_j}{|n|} = \theta_j > 0, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Предполагается, что меры s_j удовлетворяют условию: $s_j' > 0$ почти всюду на Δ_j.

Теорема. *Пусть $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ — набор попарно непересекающихся отрезков, λ — равновесная векторная мера, соответствующая исходным данным: Δ, θ и матрице взаимодействия $A = \|a_{j,k}\|$, где $a_{j,j} = 2$, $a_{j,k} = 1$ при $j \neq k$ $(\varphi \equiv 0)$.*

Тогда

$$\frac{1}{|n|}\,\mu(Q_n) \to \lambda_1 + \dots + \lambda_m$$

при $n \in \Lambda_\theta$, $|n| \to \infty$, *и*

$$\lim_{n\in\Lambda_\theta} |(f_j - R_{n,j})(z)|^{1/|n|} = \exp\bigl(W_j^\lambda(z) - w_j\bigr),$$
$$z \in D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup \Delta_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

где w_j, $j = 1, \dots, m$, *— набор равновесных констант.*

Содержащееся в теореме утверждение о (слабой) сходимости мер, ассоциированных с нулями полинома Q_n, эквивалентно следующей асимптотической формуле

$$\lim_{n\in\Lambda_\theta} |Q_n(z)|^{1/|n|} = \exp\biggl(-\sum_{j=1}^{m} V^{\lambda_j}(z)\biggr), \qquad z \in D.$$

Из теоремы следует, что последовательность аппроксимаций Эрмита–Паде $R_{n,j}$ *сходится* в области $D_j^+ = \bigl\{z \in D : w_j - W_j^\lambda(z) > 0\bigr\}$ и *расходится* в области $D_j^- = \bigl\{z \in D : w_j - W_j^\lambda(z) < 0\bigr\}$. Области сходимости всегда не пусты (они содержат точку $z = \infty$); непустыми могут оказаться и области расходимости. Последний факт — возможность существования областей расходимости — в *марковской* ситуации впервые был обнаружен в связи с приведенной теоремой.

Принципиальное значение имеет тот факт, что описанная асимптотическая картина (предельное распределение нулей Q_n, характер сходимости аппроксимаций $R_{n,j}$) определяется только *геометрией* задачи и не зависит от самих функций f_j (мер s_j).

В последующих работах на основе метода векторных потенциалов были изучены асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде для *систем Никишина* (Е. М. Никишин, Г. Шталь и др.). Эти системы соответствуют случаю, когда все отрезки Δ_j совпадают; Никишин предложил специальную конструкцию мер s_j, гарантирующую “независимость” соотношений ортогональности (4.4), и доказал свойство нормальности (тем самым, единственность аппроксимаций) для мультииндексов n, $n_1 \geqslant \dots \geqslant n_m$.

Удобно ввести следующие обозначения. Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся отрезки вещественной прямой, σ_1 и σ_2 — меры с носителями на F_1, F_2 соответственно. Определим меру $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$

формулой: $d\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle(x) = |\widehat{\sigma}_2(x)|\, d\sigma_1(x)$, $x \in F_1$. Для системы отрезков $F_1, \dots, F_m$ таких, что $F_{j-1} \cap F_j = \varnothing$, $j = 2, \dots, m$, и мер $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, $S(\sigma_j) \subset F_j$, индуктивно определим меры $\langle\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\rangle = \langle\sigma_1, \langle\sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\rangle\rangle$, $k = 2, \dots, m-1$. Меры s_j, приводящие к системам Никишина, определяются по заданным $\Delta_1 = F_1, \dots, F_m$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_m$: $s_1 = \sigma_1 = \langle\sigma_1\rangle$, $s_2 = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, $\dots$, $s_m = \langle\sigma_1, \dots, \sigma_m\rangle$. Отвлекаясь от других параметров задачи равновесия, связанной с системами Никишина, отметим, что матрица $A = \|a_{j,k}\|$ в этом случае такова: $a_{j,j} = 2$, $a_{j,j\pm1} = -1$, остальные $a_{j,k} = 0$.

4.4. В недавней работе [21] рассматриваемые задачи исследованы для произвольных марковских систем, удовлетворяющих условию: *для любых $j \neq k$ отрезки Δ_j и Δ_k или не пересекаются, или совпадают* (обобщенные системы Никишина или GN-системы). Каждая GN-система определяется с помощью (плоского) графа-дерева Γ, m вершин которого, по существу, нумеруют функции соответствующей системы (4.3). Множество вершин графа можно рассматривать как частично упорядоченное множество $(\Gamma, \prec)$ с аксиомой индукции: каждый непустой отрезок $\{\beta : \beta \prec \alpha\}$ имеет наибольший элемент α_-. Удобно рассматривать также расширенный граф $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{\omega\}$, где $\omega \notin \Gamma$ — наименьший элемент $\overline{\Gamma}$ (корневая вершина графа).

Отношение “непосредственного следования” для вершин $\alpha_- \prec \alpha$ (ребро графа $\overline{\Gamma}$) будем обозначать символом $\to$ (от α_- к α). Через α^+ обозначим множество всех элементов, “непосредственно следующих” за α; отношение “соседства”, в котором находятся элементы множества α^+, обозначается символом $\leftrightarrow$.

Каждому $\alpha \in \Gamma$ приводится в соответствие отрезок F_α и мера σ_α с носителем на F_α; предполагается, что два отрезка не пересекаются, если их индексы связаны одним из отношений $\to$ или $\leftrightarrow$, а меры удовлетворяют условию: $\sigma'_\alpha > 0$ почти всюду на F_α (для всех $\alpha \in \Gamma$).

Для любого $\alpha \in \Gamma$ существует единственная *определяющая* эту вершину цепочка элементов вида: $\gamma \to \dots \to \beta \to \alpha$, $\gamma \in \omega^+$. GN-*системой, соответствующей графу Γ и заданному набору мер $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, назовем систему марковских функций $f_\alpha = \widehat{s}_\alpha$*, где $s_\alpha = \langle\sigma_\gamma, \dots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha\rangle$, $\alpha \in \Gamma$ ($\gamma \to \dots \to \beta \to \alpha$ — цепочка, определяющая α).

В работе [21] исследованы асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде для произвольных GN-систем. Ограничимся здесь описанием исходных данных задачи равновесия, в терминах которой формулируются основные результаты работы: $F = \{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, где F_α — носители мер σ_α; $\theta = \{\theta_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, θ_α — функция распределения, соответствующая заданному на графе распределению вероятностей $\{p_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$; $A = \|a_{j,k}\|$ — матрица взаимодействия зарядов, элементы которой определяются следующим образом: $a_{\alpha,\beta} = 2$, если $\alpha = \beta$; $a_{\alpha,\beta} = -1$, если индексы связаны отношением $\to$; $a_{\alpha,\beta} = 1$, если индексы связаны отношением $\leftrightarrow$; $a_{\alpha,\beta} = 0$ в остальных случаях. Все результаты асимптотического характера для аппроксимаций Эрмита–Паде GN-систем связаны с равновесной мерой λ, соответствующей этим исходным данным. В частности, для предельного распределения нулей Q_n имеем:

$$\frac{1}{|n|}\,\mu(Q_n) \to \sum_{k\in\omega^+} \lambda_k$$

(подробнее см. [21]).

5. Заключение

Основные результаты работы относятся к теории сходимости конструктивных рациональных аппроксимаций аналитических функций. Развита теория обратных задач, непосредственно связанная с применениями метода аппроксимаций Паде к вопросам эффективного аналитического продолжения функций. В терминах, связанных с предельным поведением полюсов строк таблицы Паде, дана полная характеристика мероморфного продолжения функции, заданной своим разложением в степенной ряд. Получено *локальное* условие однозначности аналитической функции в целом и доказаны теоремы сходимости рациональных аппроксимаций для соответствующих классов функций. Для широкого класса областей доказан принципиально новый критерий равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде: *голоморфность аппроксимаций в данной области влечет их равномерную сходимость внутри этой области.* На основе метода многоточечных аппроксимаций Паде решены узловые задачи, относящиеся к вопросу о скорости чебышевской рациональной аппроксимации аналитических функций, в частности, известная задача о скорости рациональной аппроксимации экспоненты на полуоси. Разработаны новые подходы, основанные на применении векторных потенциалов и связанных с ними равновесных мер (метод векторных потенциалов), которые позволили изучить асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде для систем функций марковского типа и доказать соответствующие теоремы сходимости.

Методы и результаты представленной работы существенно использовались и получили дальнейшее развитие в ряде последующих работ российских и зарубежных математиков.

Список публикаций

[1] Гончар А. А., “О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями” // *Матем. сб.*, 1969, **78**, 640–654.

[2] Гончар А. А., “Локальное условие однозначности аналитических функций” // *Матем. сб.*, 1972, **89**(1), 148–164.

[3] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1973, **92**(1), 152–164.

[4] Гончар А. А., “Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных” // *Матем. сб.*, 1974, **93**(2), 296–313.

[5] Гончар А. А., “Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки” // *Матем. сб.*, 1974, **94**(2), 265–282.

[6] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **97**(4), 607–629.

[7] Гончар А. А., “О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **98**(4), 564–577.

[8] Гончар А. А., “О скорости рациональных аппроксимаций некоторых аналитических функций” // *Матем. сб.*, 1978, **105**(2), 147–164.

[9] Гончар А. А., Лопес Г., “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1978, **105**(4), 512–524.

[10] Гончар А. А., Лунгу К. Н., “Полюсы диагональных аппроксимаций Паде и аналитическое продолжение функций” // *Матем. сб.*, 1980, **111**(2), 279–292.

[11] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа” // *Труды МИАН*, 1981, **157**, 31–48.

[12] Гончар А. А., “Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций” // *Матем. сб.*, 1981, **115**(4), 590–613.

[13] Гончар А. А., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1982, **118**(4), 535–556.

[14] Гончар А. А., “О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций” // *Труды МИАН*, 1984, **166**, 52–60.

[15] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов” // *Матем. сб.*, 1984, **125**(1), 117–127.

[16] Гончар А. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике.” // *Математические структуры — вычислительная математика — математическое моделирование.* София, 1984. **2**, 29–35.

[17] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “О задаче равновесия для векторных потенциалов” // *УМН*, 1985, **40**(4), 155–156.

[18] Гончар А. А., “Рациональные аппроксимации аналитических функций” // *Труды Международного конгресса математиков (США, Беркли, 1986)*, 1987, **1**, 739–748.

[19] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций” // *Матем. сб.*, 1987, **134**(3), 306–352.

[20] Гончар А. А., Рахманов Е. А., Суетин С. П., “О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений” // *Труды МИАН*, 1991, **200**, 136–146.

[21] Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н., “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для функций марковского типа” // *Матем. сб.*, 1997, **188**(5), 33–58.

Содержание

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 1

Ответственный за выпуск *А. Д. Изаак*
Компьютерная верстка *Е. И. Иванниковой, О. Г. Мисюриной*

Сдано в набор 15.08.2003. Подписано в печать 25.12.2003.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 6,75. Тираж 150 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/spm/ e-mail: spm@mi.ras.ru