

ANALYTISCHE GEOMETRIE

Kennzeichnend für die analytische Geometrie ist das Bearbeiten geometrischer Probleme mittels Rechnungen und (allgemeiner) algebraischer Methoden sowie umgekehrt auch das weitere Untersuchen und Interpretieren gewisser Terme und Gleichungen auf geometrischem Wege, durch Anwenden geometrischer Verfahren.

Gerade diese Einheit von geometrischen und algebraischen Arbeitsweisen stand erstmals bei Pierre de FERMAT (1601–1655) und René DESCARTES (1596–1650) im Zentrum der Überlegungen, die deshalb als Begründer der analytischen Geometrie gelten. Historische Quellen stellten dabei vor allem die zu dieser Zeit stark bearbeitete antike Kegelschnittslehre (APOLLONIOS von Perge, um 200 v. Chr.) in Verbindung mit einer symbolischen Algebra („Buchstabenrechnen“), die Variablen und auch Parameter in Gleichungen benutzte (François VIETA, 1540–1603; u.a.). Nach Kartendarstellungen in der Antike gelangten Fermat und Descartes über Koordinaten eines Punktes zur Beschreibung und Untersuchung von geometrischen Figuren als Lösungsmengen von Gleichungen. Die weitere Entwicklung der analytischen Geometrie im 18. und 19. Jahrhundert wurde entscheidend bestimmt durch die Tätigkeit solcher herausragender Mathematiker und Naturwissenschaftler wie Leonhard EULER (1707–1783), Carl Friederich GAUSS (1777–1855), William Rowan HAMILTON (1805–1865), Hermann GRASSMANN (1809–1877) und Hermann WEYL (1885–1955). Determinanten, Matrizen, Vektoren und Gruppen als grundlegende algebraische Begriffe und Arbeitsmittel bewirkten eine Bereicherung der analytischen Geometrie – sowohl die breite Anwendbarkeit der Vektorrechnung in der Physik als auch ihre Bedeutung in der gesamten Mathematik ließen den Begriff des Vektorraumes zu einem fundamentalen Strukturbegriff in der modernen Mathematik und zu einem wichtigen Instrument der gesamten Naturwissenschaften werden.

Heute finden als Aspekt einer allgemeinen Mathematisierung Denk- und Arbeitsweisen der analytischen Geometrie und linearen Algebra in allen Naturwissenschaften, in der Technik und auch in wirtschafts- und geisteswissenschaftlichen Bereichen Anwendung. Die folgenden Abschnitte werden dies an zahlreichen Beispielen verdeutlichen. Ein einfaches, schon mit den Mitteln der Schulmathematik bearbeitbares praktisches Problem sei hier (in Anlehnung an den Bau des Autobahnkreuzes Erfurt A4/A71) vorangestellt:

Bei der Planung der Kreuzung zweier Autobahnen (Brückenkonstruktion), die sich unter einem Winkel von 75° schneiden, soll eine kreisförmige Straße vorgesehen werden, die den Wechsel von einer auf die andere Autobahn ermöglicht. Die Ausfahrten sollen jeweils 80 m vom Schnittpunkt der äußeren Fahrbahnbegrenzung entfernt liegen. Wie groß muss der Radius der kreisförmigen Straße gewählt werden? (Die Höhenunterschiede der beiden Fahrbahnen bleiben hier unberücksichtigt.)



G Analytische Geometrie und lineare Algebra

G 1 Vektoren im Anschauungsraum

G 1.1 Pfeile und Vektoren

Aus dem Physikunterricht sind bereits einige wichtige Größen wie *Kraft*, *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* als *vektorielle Größen* bekannt. Diese werden im Unterschied beispielsweise zum Begriff Masse nicht allein durch einen Wert, einen *Betrag* beschrieben, sondern für ihre Bestimmung ist außerdem noch die Angabe der *Richtung* ihrer Wirkung (ihre Wirkungsline) und des *Richtungssinns* erforderlich. Diese drei Aspekte von physikalischen vektoriellen Größen führten zur geometrischen Veranschaulichung solcher Größen durch *gerichtete Strecken* (auch *Pfeile* genannt).

G 1

Beispiel G 1: Pfeile und vektorielle Größen in drei verschiedenen Bereichen

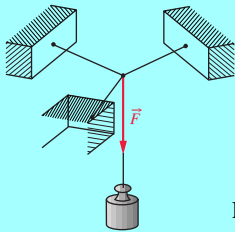


Fig. G 1

Eine Straßenbahn-Oberleitung wird durch eine Dreipunktaufhängung gehalten. Durch die Gewichtskraft \vec{F} entstehen auf die Aufhängepunkte wirkende Kräfte (vgl. Beispiel G 22).

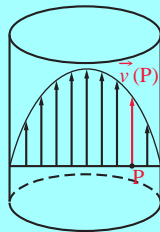


Fig. G 2

Durch ein Rohr strömende Flüssigkeit; Geschwindigkeit v mit Richtung für ein Teilchen (im Punkt P). Fig. G 2 zeigt ein Strömungsprofil (vgl. Beispiel G 23).

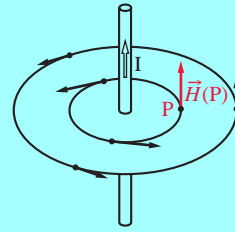


Fig. G 3

Magnetisches Feld eines stromdurchflossenen Leiters in einer Ebene, die senkrecht zum Leiter ist (vgl. Beispiel G 24).

G 2

Beispiel G 2:

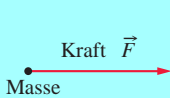


Fig. G 4a



Bahn

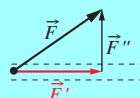


Fig. G 4b

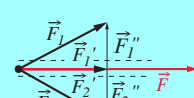


Fig. G 4c

In der Fig. G 4a wird eine Kraft \vec{F} , die auf eine Masse wirkt, durch einen Pfeil veranschaulicht. Die Länge des Pfeiles, die Lage auf einer Geraden (Richtung) und der Richtungssinn der Wirkung (Orientierung) beschreiben diese Kraft \vec{F} .

In der Fig. G 4b ist modellhaft der Sachverhalt dargestellt, dass eine (konstante) Kraft \vec{F} auf eine Masse wirkt, die sich nur auf einer geradlinigen Bahn bewegen kann, wobei die Kraft \vec{F} aber nicht entlang der Bahn wirkt. Man kann sich in einem solchen Fall die Kraft „zerlegt“ denken: Ein Teil der Kraft \vec{F} bewirkt eine gleichmäßige Beschleunigung der Masse entlang der Bahn. Der andere Teil der Kraft \vec{F} wirkt – in unserem Fall – auf deren obere Wand.

In der dritten Situation (Fig. G 4c) wirken auf die Masse zwei gleich große Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 symmetrisch zur Bahn der Masse. Die in Richtung der Bahn wirkenden Anteile \vec{F}_1' und \vec{F}_2' ergeben zusammen die aus \vec{F}_1 und \vec{F}_2 resultierende Kraft \vec{F} . Die auf die Wände der Bahn wirkenden Kräfte \vec{F}_1'' und \vec{F}_2'' heben sich hier gegenseitig auf.

Um in der Geometrie mit gerichteten Strecken (Pfeilen) rechnen zu können, ist es nützlich, Verschiebungen in der Ebene oder im Raum genauer zu betrachten (Fig. G 5).

Man erkennt an dieser Figur, dass alle Verschiebungspfeile ein und derselben Verschiebung, also alle Elemente einer bestimmten Pfeilkategorie,

- gleich lang sind,
- parallel zueinander verlaufen und
- in dieselbe Richtung zeigen, also gleich orientiert sind.

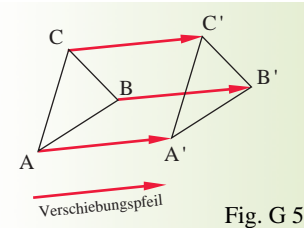


Fig. G 5

Jede Verschiebung ist demzufolge bereits durch *einen* ihrer Verschiebungspfeile eindeutig bestimmt. Die Menge aller Pfeile einer Verschiebung, d.h. eine *Pfeilkategorie*, wird *Verschiebungsvektor* oder kurz *Vektor* genannt. Dieser hier anschaulich gefasste Vektorbegriff prägt wesentlich die analytische Geometrie und ist nützlich für das Modellieren und Lösen praktischer Probleme (vgl. Beispiel G 1). Auch bei der vektoriellen Größe *Kraft* abstrahiert man so von dem Anfangspunkt, ihrem Angriffspunkt, und hat wie bei einer Verschiebung die Menge aller Pfeile, die gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert sind, vor Augen.

Definition G 1:

Unter einem **Vektor** versteht man die Menge aller Pfeile, die gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert sind. Ein einzelner Pfeil aus dieser Menge heißt ein *Repräsentant* des Vektors.

G 1

Genau wie einige physikalische Größen, z. B. die Geschwindigkeit \vec{v} , bezeichnet man Vektoren vorwiegend mit kleinen und mit Pfeilen versehenen lateinischen Buchstaben: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , ..., \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{x} , ... Pfeile, wie in Fig. G 6, *stellen* Vektoren *dar*, *repräsentieren* sie.

Der Vektor \vec{a} beschreibt also die Menge aller Pfeile \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , ... bzw. die Verschiebung, die A in B, C in D, ... überführt. Man unterscheidet daher häufig nicht zwischen dem Vektor \vec{a} und einem seiner Repräsentanten und setzt $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \dots$, $\vec{b} = \overrightarrow{PQ} = \dots$

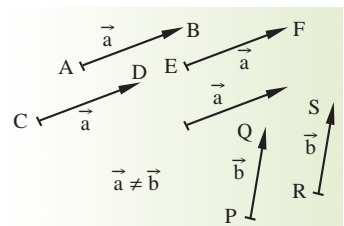


Fig. G 6

Als Folgerung aus der Definition G 1 und aus der Kennzeichnung eines Vektors durch einen Pfeil (Repräsentant) ergibt sich: Zwei Vektoren sind genau dann *gleich*, wenn sie mit ein und demselben Pfeil \overrightarrow{GH} beschrieben werden können: $\vec{c} = \overrightarrow{GH} = \vec{d}$ (genau dann stimmen die Pfeilkategorien überein).

G 1.2 Addition und Vervielfachung von Vektoren

Um mit Vektoren rechnen zu können, werden zunächst erforderliche Operationen mit Vektoren definiert und anschließend dafür Rechengesetze angegeben.

Das bekannte Kräfteparallelogramm, nach dem aus zwei Kräften \vec{F}_1 und \vec{F}_2 die resultierende Kraft \vec{F} konstruiert wird, lässt sich als Muster für die Addition von Vektoren allgemein ansehen. Dabei könnte man die Addition zweier Kräfte auch so verstehen, dass diese beiden Kräfte „naheinander wirken“ (Fig. G 7).

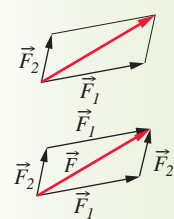


Fig. G 7

Ausgehend davon, dass Verschiebungen in der Ebene bzw. im Raum Vektoren sind, sei festgelegt:

G 2

Definition G 2:

Die **Addition zweier Vektoren** bedeutet die Nacheinanderausführung der sie beschreibenden Verschiebungen. Das Resultat ist stets wieder durch eine Verschiebung beschreibbar.

In der Fig. G 8 ist die Summe der Vektoren \vec{a} und \vec{b} der Vektor \vec{c} , also $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, wobei mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ der Summenvektor $\vec{c} = \overrightarrow{AP}$ mit $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CD}$ ist.

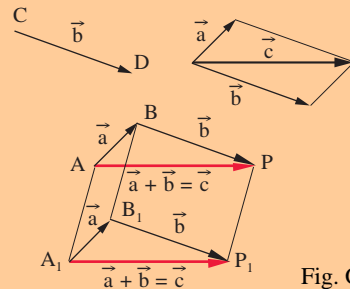


Fig. G 8

Wie Fig. G 8 zeigt, ist die Definition der Addition zweier Vektoren offensichtlich unabhängig von der Wahl der konkreten Pfeile (der Repräsentanten der Vektoren).

Die Addition zweier Vektoren kann mithilfe der Dreiecksregel (Aneinanderlegen der Vektoren, Fig. G 9) oder mithilfe der Parallelogrammregel (\vec{a} und \vec{b} spannen ein Parallelogramm auf, Fig. G 10) erfolgen.

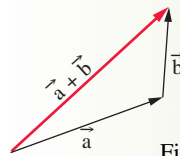


Fig. G 9

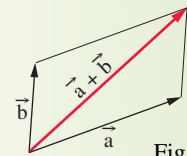


Fig. G 10

Rechengesetze für die Vektoraddition lassen sich wegen der beliebigen Wahl der Pfeilrepräsentanten leicht geometrisch begründen. Fig. G 11 und Fig. G 12 zeigen zu den folgenden Regeln die Gleichheit zweier Rechenwege anhand von Repräsentanten.

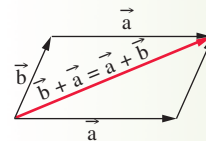


Fig. G 11

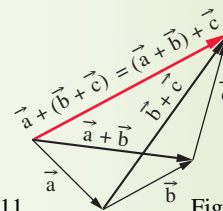


Fig. G 12

G 1

Satz G 1: **Kommutativgesetz der Addition von Vektoren**

Für alle Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

G 2

Satz G 2: **Assoziativgesetz der Addition von Vektoren**

Für alle Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} gilt: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Wegen der Assoziativität der Vektoraddition ist die Summe dreier Vektoren von der Reihenfolge der schrittweisen Addition unabhängig. Deshalb setzt man kurz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, lässt also bei einer Summe von mehr als zwei Vektoren gegebenenfalls Klammern weg (bzw. fügt diese zwecks einer Strukturierung sinnvoll ein).

Wie bei der Addition von Zahlen existiert auch für die Vektoraddition ein neutrales Element, der Nullvektor $\vec{0}$:

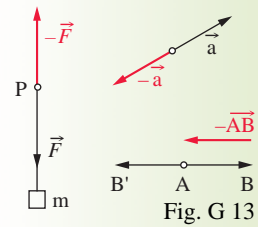
G 3

Definition G 3:

Nullvektor $\vec{0}$ nennt man denjenigen Vektor, der durch die identische Abbildung in der Menge der Verschiebungen beschrieben wird. Für jeden Vektor \vec{a} gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Der Nullvektor ist ebenfalls eine Menge von Pfeilen, die hier aber die Länge 0 besitzen. Die „Pfeile“ entarten zu Punkten – die durch sie bewirkte „Verschiebung“ überführt jeden Punkt in sich selbst.

Man kann sich den Nullvektor auch dadurch erzeugt denken, dass zu einem Vektor \vec{a} der zu ihm *entgegengesetzte Vektor* $-\vec{a}$ addiert wird: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Greift z. B. (Fig. G 13) an einem Punkt P eine Kraft \vec{F} an, so erhält man ein Kräftegleichgewicht, wenn zugleich eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft $-\vec{F}$ (die Gegenkraft) wirkt. Kraft und Gegenkraft ergeben zusammen den Nullvektor: $\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$, einen Vektor mit der Länge 0.



Definition G 4:

Unter dem **entgegengesetzten Vektor** $-\vec{a}$ eines Vektors \vec{a} versteht man denjenigen Vektor, dessen Pfeile im Vergleich zu denen von \vec{a} gleich lang, parallel und entgegengesetzt orientiert sind.

G 4

Den zu \vec{a} entgegengesetzten Vektor $-\vec{a}$ erhält man also, indem man die Orientierung von \vec{a} umkehrt: Wenn $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, dann ist $-\vec{a} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB'}$, wobei B und B' symmetrisch zu A liegen.

Mithilfe eines entgegengesetzten Vektors lässt sich nun die Subtraktion von Vektoren erklären:

Definition G 5:

Ein Vektor \vec{b} wird von einem **Vektor \vec{a} subtrahiert**, indem man den zu \vec{b} entgegengesetzten Vektor $-\vec{b}$ zu \vec{a} addiert: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

G 5

Die Differenz zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist somit gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$. Die Fig. G 14 veranschaulicht auch die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ in einem von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramm.

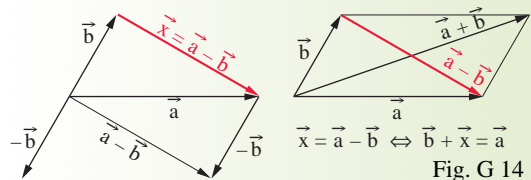


Fig. G 14

Verbunden mit der anschaulichen Erfassung des Begriffs *Vektor* ist die Beschreibung und Veranschaulichung der Addition von mehr als zwei Vektoren durch eine *Vektorkette*. So nennt man den geschlossenen Streckenzug, den beispielsweise in Fig. G 15 die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und \vec{d} bilden. Es gilt: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{0}$.

Für die Darstellung eines Vektors aus der (geschlossenen) Vektorkette ist zu beachten: Man durchläuft vom Anfangspunkt dieses Vektors (Pfeils) den Streckenzug unter Berücksichtigung der Vorzeichen der durchlaufenden Vektoren der Kette bis zu seinem Endpunkt; beispielsweise ergibt sich dann (Fig. G 15): $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ bzw. $\vec{a} = \vec{d} - \vec{c} - \vec{b}$.

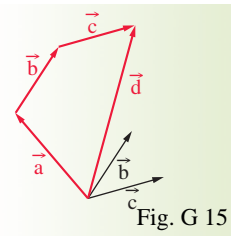


Fig. G 15

Die Addition mehrerer gleicher Zahlen führt in der Arithmetik zur *Vervielfachung*. Diese Vorgehensweise kann man auf Vektoren übertragen, wobei auch physikalische Sachverhalte die nachfolgende Definition motivieren. Man denke z. B. an die Verdopplung einer Geschwindigkeit, an die Halbierung einer Kraft oder an die Gegenkraft zu einer Kraft.

Gleiche Richtung und gleiche Orientierung von zwei Vektoren bzw. Pfeilen fassen wir im Folgenden mit „gleich gerichtet“ und gleiche Richtung und entgegengesetzte Orientierung mit „entgegengesetzt gerichtet“ zusammen.

G 6

Definition G 6:

Die **Vervielfachung $r \vec{a}$ eines Vektors \vec{a} mit einer reellen Zahl r** ist ein Vektor mit folgenden (in Bezug auf \vec{a} formulierten) Eigenschaften:

$r \vec{a}$ im Vergleich zu \vec{a}	
$r > 0$	gleich gerichtet, r -fache Länge
$r < 0$	entgegengesetzt gerichtet, $ r $ -fache Länge
$r = 0$	$0 \vec{a} = \vec{0}$
(Für $r = 1$ erhält man $1 \vec{a} = \vec{a}$.)	

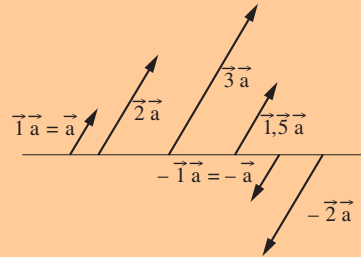


Fig. G 16

Da bei einer *Vervielfachung von Vektoren* eine Multiplikation mit einer reellen Zahl, einem *Skalar*, erfolgt, nennt man sie auch **S-Multiplikation von Vektoren**.

G 3

Beispiel G 3:

Betrachtet wird eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und einem Streckungsfaktor $k \in \mathbb{R}$. Im Ergebnis der zentrischen Streckung erhalten wir aus dem Vektor \vec{a} (dargestellt durch den Pfeil \overrightarrow{AB}) den Vektor $k\vec{a} = \overrightarrow{A'B'}$ (Fig. G 17).

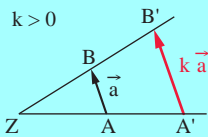
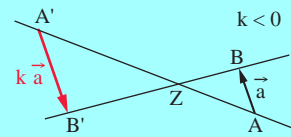


Fig. G 17



G 4

Beispiel G 4:

Fig. G 18 zeigt, wie man mithilfe von Strahlensätzen für einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ die Vektoren $s\vec{a}$, $r(s\vec{a})$ und $(rs)\vec{a}$ ($r, s \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $s > 0$) konstruieren kann. Hierzu bestimmen wir durch eine Teilfigur unterhalb des Zahlenstrahls konstruktiv das Produkt rs . Die Fig. G 18 begründet das Rechengesetz $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ für den Fall $r > 0$, $s > 0$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mit abgewandelten Figuren kann man auch die weiteren im Satz G 3 genannten Gesetze verdeutlichen.

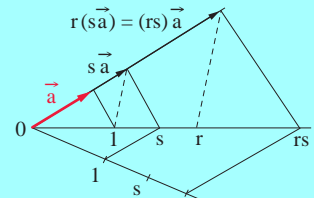


Fig. G 18

G 3

Satz G 3: Rechnen mit Vervielfachungen von Vektoren

Für alle reellen Zahlen r und s sowie für alle Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt:

$$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a} \quad (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a} \quad r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}.$$

Ergänzende Regeln sind: • Aus $r\vec{a} = \vec{0}$ folgt $r = 0$ oder $\vec{a} = \vec{0}$ • $r(-\vec{a}) = (-r)\vec{a} = -(r\vec{a})$

G 5

Beispiel G 5:

Im Dreieck OAB sei $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ sowie M der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} . M stellt dann zugleich auch den Mittelpunkt des durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms dar. Der Vektor \overrightarrow{OM} ist somit ein halber „Diagonalenvektor“ – also gilt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

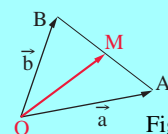


Fig. G 19

Nutzt man nun die **Addition, die Subtraktion** (Definitionen G 2 und G 5) und die Vervielfachung von Vektoren (Definition G 6) in Verbindung mit den Rechenregeln, so kann man auf einem zweiten Weg ebenfalls zu der obigen Darstellung von \overrightarrow{OM} gelangen:

Es gilt $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, wobei $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ist.

Folglich ergibt sich: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$.

Ergebnis: Sind $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ Vektoren (Pfeile) mit gemeinsamem Anfangspunkt O und ist M der Mittelpunkt von \overline{AB} , so ist der (im Dreieck OAB seitenhalbierende) Vektor $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$ das *arithmetische Mittel* von \vec{a} und \vec{b} .

Die bei der Besprechung von **Vielfachen eines Vektors** herangezogene Eigenschaft der *Länge* bezog sich genau genommen auf die Länge eines Pfeiles bzw. einer gerichteten Strecke, also auf eine *Streckenlänge*. Bei Vektoren spricht man in diesem Zusammenhang vom *Betrag* (vgl. Abschnitt G 1.1, Betrag einer vektoriellen Größe aus der Physik).

Definition G 7:

Der **Betrag** $|\vec{a}|$ eines Vektors \vec{a} ist gleich der Länge der Strecke \overline{AB} für einen beliebigen Repräsentanten \overrightarrow{AB} von \vec{a} . Gilt also $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, so ist $|\vec{a}| = |\overline{AB}|$. Im Fall $|\vec{a}| = 1$ nennt man \vec{a} einen *Einheitsvektor*.

G 7

Mithilfe der Definition G 7 und der Ungleichung für die Seitenlängen eines Dreiecks erhält man:

Satz G 4: Rechnen mit Beträgen von Vektoren

Für beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt:

$$\begin{aligned} & \bullet |\vec{a}| \geq 0 & \bullet |r \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}| & \bullet |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \end{aligned}$$

G 4

G 1.3 Vektoren in der Ebene und im Raum: Basis; Komponentenzerlegung

Betrachtet werden vom Nullvektor $\vec{0}$ verschiedene Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 in einer Ebene mit

- \vec{a}_1 ist ein Vielfaches von \vec{a}_2 (Fig. G 20a) bzw.
- \vec{a}_1 ist kein Vielfaches von \vec{a}_2 (Fig. G 20b)

sowie Vektoren \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 , die als Pfeile mit einem gemeinsamen Anfangspunkt ein räumliches Gebilde (eine räumliche Figur) darstellen (Fig. G 20c).

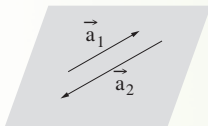


Fig. G 20a

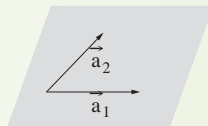


Fig. G 20b

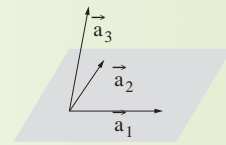


Fig. G 20c

Mit dem Begriff der Parallelität von Vektoren und weiteren Begriffen gelangen wir hier und in G 1.4 zur zahlenmäßigen Erfassung eines Vektors.

G 8

Definition G 8:

Ein Vektor \vec{a} ist genau dann zu einem Vektor \vec{b} **parallel** ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), wenn es eine reelle Zahl r oder eine reelle Zahl s gibt, so dass $\vec{a} = r \vec{b}$ oder $\vec{b} = s \vec{a}$ gilt.

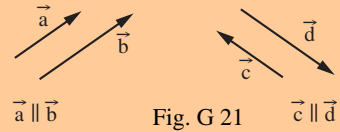


Fig. G 21

Im Einklang mit weiterführenden Überlegungen enthält diese Definition, dass der Nullvektor $\vec{0}$ zu allen Vektoren parallel ist.

Ausgehend von einem Vektor \vec{a} mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ kann man durch Bildung aller Vielfachen von \vec{a} alle zum Vektor \vec{a} parallelen Vektoren \vec{x} erzeugen: $\vec{x} = r \vec{a}$, $r \in \mathbb{R}$.

In der Ebene seien nun zwei nicht parallele Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 gegeben, die wir uns durch Pfeile mit einem gemeinsamen Anfangspunkt O veranschaulicht denken (Fig. G 20b, G 22). Bildet man den Vektor \vec{b} als Summe eines Vielfachen von \vec{a}_1 und eines Vielfachen von \vec{a}_2 , also $\vec{b} = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2$, so ist \vec{b} ein Vektor der Ebene.

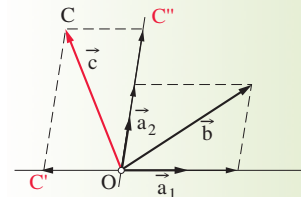


Fig. G 22

Es sei jetzt ein Vektor $\vec{c} = \vec{OC}$ in dieser Ebene gegeben. Auf Parallelen in Richtung von \vec{a}_1 bzw. in Richtung von \vec{a}_2 durch C erhalten wir Punkte C' und C'' so, dass $OC'C''$ ein Parallelogramm, $\vec{OC'}$ ein Vielfaches von \vec{a}_1 und $\vec{OC''}$ ein Vielfaches von \vec{a}_2 ist. Das heißt aber: Zu den Vektoren \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und einem gegebenen Vektor \vec{c} gibt es reelle Zahlen s_1 und s_2 mit $\vec{c} = \vec{OC} = \vec{OC'} + \vec{OC''} = s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2$. Man sagt: \vec{c} ist eine *Linearkombination* von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 .

G 9

Definition G 9:

Der Vektor \vec{b} heißt **Linearkombination der Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2** , wenn es reelle Zahlen r_1 und r_2 gibt, so dass $\vec{b} = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2$ gilt.

Allgemein (und unabhängig von besonderen Eigenschaften der Vektoren \vec{a}_i):

Der Vektor \vec{b} heißt **Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$** , wenn es reelle Zahlen r_1, r_2, \dots, r_n gibt, so dass $\vec{b} = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n$ gilt.

r_1, r_2, \dots, r_n nennt man die **Koeffizienten der Linearkombination**.

Die Nichtparallelität von zwei Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 (Negation von $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$) erfasst genau das „aufspannende“ Verhalten dieser Vektoren (Fig. G 22), wie Satz G 5 zeigt:

G 5

Satz G 5: **Nichtparallelität von Vektoren**

Zwei Vektoren sind genau dann nicht parallel ($\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2$), wenn

- $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und
- aus $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ folgt, dass $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$.

Der *Beweis* dieser Äquivalenzaussage ist in zwei Richtungen zu führen:

(I) Voraussetzung: \vec{a}_1 und \vec{a}_2 seien nicht parallel ($\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2$).

Behauptung: Es gilt $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und aus $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ folgt $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$.

Beweis der Behauptung:

Wegen der Voraussetzung und Definition G 8 gibt es keine reellen Zahlen r und s mit $\vec{a}_1 = r \vec{a}_2$ oder $\vec{a}_2 = s \vec{a}_1$. Also gelten für alle reellen Zahlen r und s die Ungleichungen $\vec{a}_1 \neq r \vec{a}_2$ und $\vec{a}_2 \neq s \vec{a}_1$, woraus $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ bzw. $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$ folgt.

Es sei nun $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$. Angenommen, es wäre $r_1 \neq 0$ oder $r_2 \neq 0$, dann ergäbe sich aus $r_1 \vec{a}_1 = -r_2 \vec{a}_2$ im ersten Fall $\vec{a}_1 = -\frac{r_2}{r_1} \vec{a}_2$ und im zweiten Falle $\vec{a}_2 = -\frac{r_1}{r_2} \vec{a}_1$, was jeweils einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Also muss $r_1 = r_2 = 0$ gelten.

(II) Voraussetzung: Es gelte $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und aus $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ folge $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$.

Behauptung: $\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2$.

Beweis der Behauptung:

Angenommen, es wäre $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Dann folgt nach der Definition G 8, dass $\vec{a}_1 = r \vec{a}_2$ oder $\vec{a}_2 = s \vec{a}_1$ ($r, s \in \mathbb{R}$). Im Fall $\vec{a}_1 = r \vec{a}_2$ erhielte man $1 \vec{a}_1 - r \vec{a}_2 = \vec{0}$; für $\vec{a}_2 = s \vec{a}_1$ analog $-s \vec{a}_1 + 1 \vec{a}_2 = \vec{0}$ und damit jeweils einen Widerspruch zum zweiten Teil der Voraussetzung.

(I) und (II) zusammen ergibt den Beweis des Satzes.

Bemerkungen:

- Sind zwei Vektoren nicht parallel, so sind sie stets auch beide vom Nullvektor verschieden.
- Allein schon die Gültigkeit der Implikation „ $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$ “ (s. Beweisteil II) kennzeichnet die Nichtparallelität von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 .

Beispiel G 6:

Gegeben seien in der Ebene zwei nicht parallele Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 . Der in Fig. G 23 durch einen Pfeil angegebene Vektor \vec{b} kann dann nach Einzeichnen von Parallelen in Richtung von \vec{a}_1 bzw. \vec{a}_2 als **Linearkombination** von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 geschrieben werden:

$$\vec{b} = 0,5 \vec{a}_1 + 2 \vec{a}_2$$

Analog erkennt man:

$$\vec{c} = -2,5 \vec{a}_1 + 1,5 \vec{a}_2 \quad \vec{d} = -2 \vec{a}_1 + 3,5 \vec{a}_2$$

Der Vektor \vec{e} ist allein ein Vielfaches des Vektors \vec{a}_2 : $\vec{e} = -1,5 \vec{a}_2$

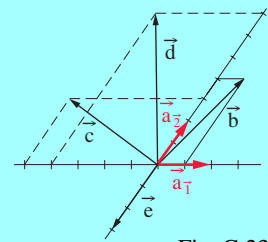


Fig. G 23

G 6

Mit Blick auf Fig. G 22 und Fig. G 23 und den dazu entwickelten Gedanken sei hervorgehoben:

- Mittels der nicht parallelen Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 können alle Vektoren der Ebene linear kombiniert werden.
- Die Darstellung (Zerlegung) eines Vektors der Ebene als Linearkombination von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 ist eindeutig.

Diese Eindeutigkeit der Zerlegung – *geometrisch* ist sie durch die eindeutige Ausführbarkeit der Konstruktionsschritte klar – steht in direktem Zusammenhang mit der zweiten Bedingung für die Nichtparallelität von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 im Satz G 5:

Aus $\vec{b} = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2$ und $\vec{b} = r_1' \vec{a}_1 + r_2' \vec{a}_2$ (also \vec{b} in *zwei* Darstellungen) folgt:

$$\vec{0} = \vec{b} - \vec{b} = (r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2) - (r_1' \vec{a}_1 + r_2' \vec{a}_2) = (r_1 - r_1') \vec{a}_1 + (r_2 - r_2') \vec{a}_2,$$

woraus sich nach Satz G 5 ergibt:

$$r_1 - r_1' = 0 \text{ und } r_2 - r_2' = 0 \text{ bzw. } r_1 = r_1' \text{ und } r_2 = r_2'.$$

Als Rechtfertigungssatz für die nachfolgende Definition G 10 kann nunmehr also festgehalten werden:

G 6

Satz G 6: Darstellungssatz für Vektoren der Ebene

Sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2 nicht parallele Vektoren in der Ebene, so gibt es für jeden Vektor \vec{b} der Ebene eindeutig bestimmte reelle Zahlen x und y mit $\vec{b} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2$.

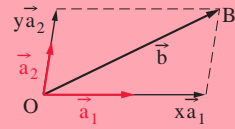


Fig. G 24

G 10

Definition G 10:

Sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2 nicht parallele Vektoren der Ebene, so heißt die Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ eine **Basis** für die Vektoren der Ebene. In der Darstellung $\vec{b} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2$ eines Vektors \vec{b} bezeichnet man

- die reellen Zahlen x und y als die **Koordinaten von \vec{b} bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$** und
- die Vektoren $x \vec{a}_1$ und $y \vec{a}_2$ als die **Komponenten von \vec{b} bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$**

Sind die Vektoren \vec{b} und \vec{c} bezüglich einer Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ dargestellt (Fig. G 25), gilt also

$$\vec{b} = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2; \quad \vec{c} = s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2,$$

so ergeben sich aufgrund der Rechengesetze über Vektoren folgende Regeln:

$$\vec{b} + \vec{c} = (r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2) + (s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2) = (r_1 + s_1) \vec{a}_1 + (r_2 + s_2) \vec{a}_2$$

$$t \vec{b} = t(r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2) = (t \cdot r_1) \vec{a}_1 + (t \cdot r_2) \vec{a}_2$$

Das heißt: Ermittelt man die **Summe $\vec{b} + \vec{c}$** , so addieren sich die Koordinaten bezüglich einer Basis; bildet man die **Vervielfachung $t \vec{b}$** ($t \in \mathbb{R}$), so werden die Koordinaten mit t multipliziert. Im Beispiel G 6

(vgl. Fig. G 23) ergibt $\vec{b} + \vec{c}$ durch Addition der entsprechenden Koordinaten von \vec{b} und \vec{c} gerade den Vektor \vec{d} .

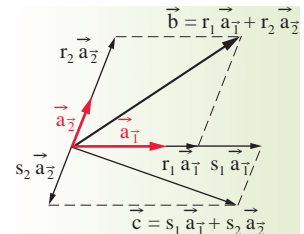


Fig. G 25

Die Übersicht in der nachfolgenden Fig. G 26 verdeutlicht Begriffsbildungen für Vektoren des Anschauungsraums, die in einer Geraden bzw. in einer Ebene liegen bzw. ein (wirklich) räumliches System von Vektoren bilden (vgl. auch Fig. G 20). Dabei sei vereinbart, dass man von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ mit $n \geq 2$ spricht, also über mindestens zwei Vektoren eine Eigenschaft ausdrückt.

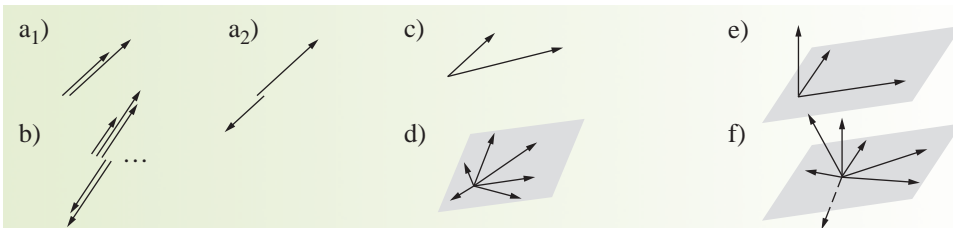


Fig. G 26

Vektoren, deren Pfeile (Repräsentanten) auf einer Geraden liegen können, heißen **kollineare Vektoren** (sie sind somit paarweise parallel – vgl. Fig. G 26a₁, a₂) und b)).

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ einer Ebene, die also durch Pfeile ein und derselben Ebene beschrieben werden, nennt man **komplanare Vektoren**. Sind Vektoren kollinear, so hebt man ihre sich daraus unmittelbar ergebende schwächere Eigenschaft der Komplanarität nicht mehr hervor.

Besonders wichtig ist nach Satz G 6 in Fig. G 26 der Fall c) von **zwei** Vektoren, die nicht kollinear (also nicht parallel) sind. Damit sind die Negationen von „kollinear“ bzw. „komplanar“ in Bezug auf Vektoren des Anschauungsraumes angesprochen. Jeweils nicht kollineare Vektoren sind in Fig. G 26c) bis f) und nicht komplanare in Fig. G 26e) und f) abgebildet.

Mit *drei* nicht komplanaren Vektoren – vgl. Fig. G 26e) – lassen sich die ebenen Betrachtungen mit Zusammenfassungen in Satz G 5 und vor allem in Satz G 6 sowie Definition G 10 auf den Raum ausdehnen. Analog zur Darstellung von Vektoren in der Ebene kann man so mit drei Vektoren, deren Pfeile mit einem gemeinsamen Anfangspunkt O die Kanten eines Tetraeders (dreiseitige Pyramide) bilden, die also nicht komplanar sind, einen Darstellungssatz angeben und den Begriff **Basis** für die Vektoren des Raumes definieren:

Satz G 7: Darstellungssatz für Vektoren im Raum

Sind \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_3 nicht komplanare Vektoren des Raumes, so gibt es für jeden Vektor \vec{b} eindeutig bestimmte reelle Zahlen x, y und z mit $\vec{b} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2 + z \vec{a}_3$.

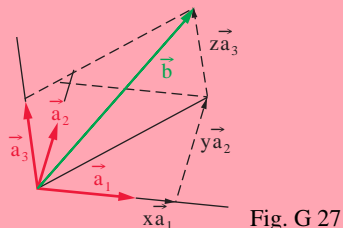


Fig. G 27

G 7

Definition G 11:

Sind \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_3 nicht komplanare Vektoren, so heißt $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ eine **Basis** für die Vektoren des Raumes.

In der Darstellung $\vec{b} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2 + z \vec{a}_3$ eines Vektors \vec{b} bezeichnet man

- die reellen Zahlen x, y und z als **Koordinaten von \vec{b} bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$** und
- die Vektoren $x \vec{a}_1, y \vec{a}_2$ und $z \vec{a}_3$ als **Komponenten von \vec{b} bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$** .

G 11

Ist mit $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ in der Ebene bzw. mit $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ im Raum jeweils eine feste Basis vorgegeben, so kann man *jeden Vektor* der Ebene bzw. des Raumes nach Satz G 6 bzw. G 7 durch seine Koordinaten beschreiben. Sie stellen für einen ebenen Vektor ein geordnetes Paar und für einen räumlichen Vektor ein geordnetes Tripel dar. Man notiert diese Koordinaten vorzugsweise in Spaltenform:

$\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für Vektoren in der Ebene und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für Vektoren im Raum.

Ein beim Arbeiten mit Vektoren häufig verwendetes Vorgehen ist Gegenstand des folgenden Satzes:

Satz G 8: Prinzip des Koordinatenvergleichs

Zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

der Ebene

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

des Raumes

sind genau dann gleich, wenn sie jeweils in ihren Koordinaten übereinstimmen:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x; a_y = b_y$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x; a_y = b_y; a_z = b_z$$

G 8

Der *Beweis* wird hier für ebene Vektoren durchgeführt:

Die Richtung von „rechts nach links“ in der Äquivalenzaussage wird sofort über die Darstellung der Vektoren in einer Zeile bestätigt:

Wenn $a_x = b_x$ und $a_y = b_y$, so folgt: $\vec{a} = a_x \vec{a}_1 + a_y \vec{a}_2 = b_x \vec{a}_1 + b_y \vec{a}_2 = \vec{b}$.

Umgekehrt sei nun $\vec{a} = \vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Dann folgt aus $\vec{a} = \vec{b}$ mit

den Darstellungen bezüglich der Basis:

$$a_x \vec{a}_1 + a_y \vec{a}_2 = b_x \vec{a}_1 + b_y \vec{a}_2 \quad \text{bzw.} \quad (a_x - b_x) \vec{a}_1 + (a_y - b_y) \vec{a}_2 = \vec{0}.$$

Da \vec{a}_1 und \vec{a}_2 nicht parallel sind, folgt hieraus nach Satz G 5 $a_x - b_x = 0$ sowie $a_y - b_y = 0$ und damit die Behauptung.

Man erkennt, dass der zweite Teil des Beweises zugleich die Eindeutigkeit der Zerlegung bezüglich \vec{a}_1 und \vec{a}_2 enthält (vgl. die Bemerkungen nach Beispiel G 6).

G 7

Beispiel G 7:

Gegeben seien zwei nicht parallele Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 in der Ebene; $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ist also eine Basis der Vektoren der Ebene. Wir veranschaulichen beide Basisvektoren durch Pfeile mit einem gemeinsamen Anfangspunkt O und betrachten weiterhin einen Vektor $\vec{a} = \vec{PQ}$. Nach Satz G 6 gibt es reelle Zahlen x und y mit $\vec{a} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2$.

Für die Zerlegung von \vec{a} in die beiden Komponenten $x \vec{a}_1$ und $y \vec{a}_2$ wird der Pfeil \vec{PQ} so verschoben, dass P in O übergeht; das Bild von Q sei der Punkt A. Mittels paralleler Geraden durch A in Richtung von \vec{a}_1

bzw. in Richtung von \vec{a}_2 erhält man die beiden Komponenten. Aus der Fig. G 28 ist ablesbar:

$$\vec{a} = 1,5 \vec{a}_1 + 0,5 \vec{a}_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

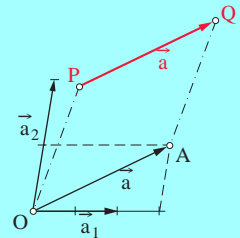


Fig. G 28

G 8

Beispiel G 8:

Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen 3, 2 und 4. Von einem Eckpunkt seien die Einheitsvektoren \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 in Richtung der drei Kanten eingezeichnet (Fig. G 29).

Der Pfeil, der diesen Eckpunkt als Anfangspunkt hat und eine Raumdiagonale beschreibt, besitzt als Vektor \vec{a} bezüglich der Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ des Raumes folgende Darstellung:

$$\vec{a} = 2 \vec{a}_1 + 3 \vec{a}_2 + 4 \vec{a}_3 \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

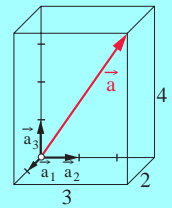


Fig. G 29

G 1.4 Basen und Koordinatensysteme

Für die Entwicklung der analytischen Geometrie in der Ebene bzw. im Anschauungsraum ist es erforderlich, einen Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren herzustellen.

Ist $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ eine Basis für die Vektoren der Ebene, so ist jeder Vektor $\vec{b} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2$ durch seine Koordinaten x und y beschrieben.

Man kann nun durch Auszeichnung eines beliebigen Punktes O, der als *Ursprung* bezeichnet wird, jedem Punkt P der Ebene eindeutig den Vektor $\vec{p} = \vec{OP}$ und umgekehrt jedem Vektor \vec{a} eindeutig den Punkt A mit $\vec{a} = \vec{OA}$ zuordnen (Fig. G 30). Vektoren, die zur

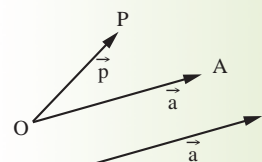


Fig. G 30

Beschreibung von Punkten bezüglich eines Ursprungs O benutzt werden, nennt man Ortsvektoren dieser Punkte bezüglich O , kurz auch **Ortsvektoren**.

Die Verbindung der Begriffe „*Basis für die Vektoren der Ebene (des Raumes)*“ und „*Ursprung*“ führt zum Begriff des *Koordinatensystems*.

Definition G 12:

Ein **Koordinatensystem** der Ebene besteht aus einem fest gewählten Punkt O als Ursprung und einer Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ für die Vektoren der Ebene. Es wird mit $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ bezeichnet.

Im Raum liegt mit $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ ein Koordinatensystem vor, falls $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ eine Basis für die Vektoren des Raumes bildet, d. h., falls diese drei Vektoren nicht komplanar sind (Fig. G 31).

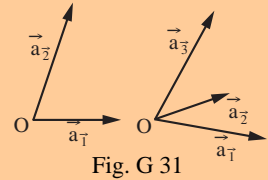


Fig. G 31

G 12

Zur Erläuterung dieser Definition stellen wir fest:

Es sei

$(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ein Koordinatensystem der Ebene. $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ ein Koordinatensystem des Raumes.

Dann ist jedem Punkt P umkehrbar eindeutig

a) der Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und

b) ein Zahlenpaar $(x; y)$ mit

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2$$

a) der Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und

b) ein Zahlentripel $(x; y; z)$ mit

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2 + z \vec{a}_3$$

zugeordnet.

Man spricht dann bei dem Zahlenpaar $(x; y)$ bzw. bei dem Zahlentripel $(x; y; z)$ von den *Koordinaten des Punktes P* und schreibt: $P(x; y)$ bzw. $P(x; y; z)$.

Definition G 13:

Ein Koordinatensystem

$(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ der Ebene heißt

kartesisches Koordinatensystem,

falls die Basisvektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2
orthogonal ($\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$)¹⁾

und wie in Fig. G 32 ($\vec{a}_i = \vec{e}_i$) angeordnete Einheitsvektoren sind:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 1$$

$(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ des Raumes heißt

falls die Basisvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$
paarweise orthogonal
($\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2, \vec{a}_2 \perp \vec{a}_3, \vec{a}_3 \perp \vec{a}_1$)

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = 1$$

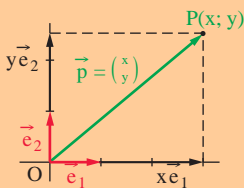
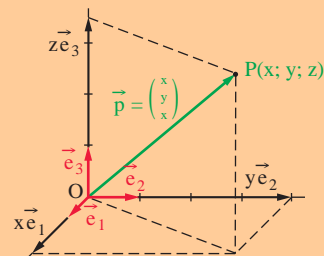


Fig. G 32



G 13

¹⁾ \vec{a}_1, \vec{a}_2 heißen orthogonal, falls mit $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ der Winkel $\sphericalangle A_1OA_2$ ein rechter Winkel ist.

Bezeichnung eines kartesischen Koordinatensystems
in der Ebene: $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

im Raum: $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

In der Ebene sind die Vektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 so angeordnet, dass \vec{e}_1 entgegen dem Uhrzeigersinn (mathematisch positiver Drehsinn) „auf kürzestem Weg“ in \vec{e}_2 gedreht werden kann. Im Raum soll die gleiche Überführung von \vec{e}_1 in \vec{e}_2 bei einer gedachten Rechtsschraube ein Herausdrehen in die \vec{e}_3 -Richtung bewirken.

G 9

Beispiel G 9:

Bezeichnet man in Fig. G 23 den gemeinsamen Anfangspunkt aller Vektoren mit O, so ist $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ ein Koordinatensystem der Ebene. Nun kann zum Beispiel der Vektor \vec{b} allein durch seine Koordinaten 0,5 und 2 bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ gekennzeichnet werden. Diese Koordinaten stellen ein geordnetes Paar reeller Zahlen dar,

so dass wir für \vec{b} bezüglich der Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ auch $\vec{b} = (0,5; 2)$ oder $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ schreiben. Der Vektor \vec{b} ist zuerst als *Zeilenvektor* und an zweiter Stelle als *Spaltenvektor* bezüglich $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ dargestellt.

Notieren wir die in den Fig. G 33a/b eingezeichneten Ortsvektoren bzw. Vektoren bezüglich der kartesischen Koordinatensysteme $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bzw. $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ als Spaltenvektoren, so ergibt sich

für Fig. G 33a: $\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und

für Fig. G 33b: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

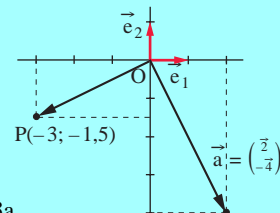


Fig. G 33a

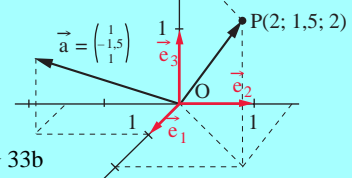


Fig. G 33b

G 10

Beispiel G 10:

Gegeben seien die Punkte $A_1(3; 1)$, $A_2(2; 5)$ und $X(-3; 5,5)$ durch ihre Koordinaten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (Fig. G 34).

a) Wir stellen die Vektoren $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ und $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ als **Linearkombinationen** von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 dar:

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2;$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = -3\vec{e}_1 + 5,5\vec{e}_2$$

b) Für die Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_2}$ und $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2$ gilt

$$\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix}.$$

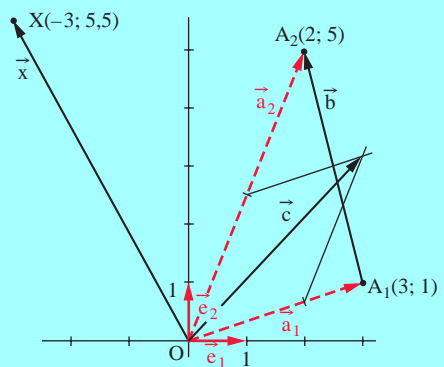
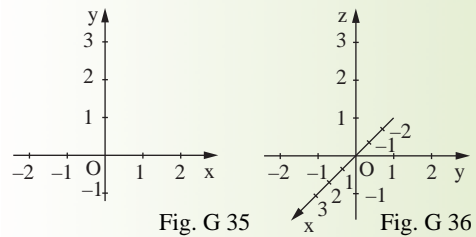


Fig. G 34

- c) Die Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 sind nicht parallel, d.h., $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ist eine Basis für die Vektoren der Ebene. Eine rechnerische Überprüfung bestätigt diese Feststellung (vgl. Satz G 5):
 Aus $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$, also $r_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, folgt nach dem **Prinzip des Koeffizientenvergleichs**
- $$\begin{aligned} 3r_1 + 2r_2 &= 0 \\ r_1 + 5r_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und daraus } r_1 = 0 \text{ und } r_2 = 0.$$
- d) Nun kann der Vektor \vec{x} als **Linearkombination** von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 dargestellt werden.
 Aus dem Ansatz $\vec{x} = x' \vec{a}_1 + y' \vec{a}_2$ ergibt sich mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $$x' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} 3x' + 2y' &= -3 \\ x' + 5y' &= 5,5. \end{aligned}$$
- Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $x' = -2$ und $y' = 1,5$, so dass $\vec{x} = -2 \vec{a}_1 + 1,5 \vec{a}_2$ gilt.
 -2 und $1,5$ sind die Koordinaten von \vec{x} bezüglich der Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

Ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene bzw. im Raum ist über ein Paar orthogonaler Einheitsvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 bzw. über paarweise orthogonale Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gewonnen worden, die man sich an einem Punkt O, dem *Koordinatenursprung*, angeheftet denkt.

Mit den Einheitsvektoren \vec{e}_i sind nun sowohl *Einheitspunkte* $E_1(1; 0)$ und $E_2(0; 1)$ bzw. $E_1(1; 0; 0)$, $E_2(0; 1; 0)$ und $E_3(0; 0; 1)$ wie auch *Koordinatenachsen* als Verbindungsgeraden von O mit den Einheitspunkten festgelegt. Jede Koordinatenachse kann als Zahlengerade aufgefasst werden; die Figuren G 35 und G 36 zeigen diese Achsen jeweils mit einer Skala (Darstellung der ganzen Zahlen).



Die Koordinatenachsen werden einzeln als x-, y- und z-Koordinatenachse (kurz: x-Achse usw.) bezeichnet, wobei in der Ebene ebenfalls *Abszissenachse* für die x-Achse und *Ordinatenachse* für die y-Achse gebräuchlich sind. Im Raum wird durch je zwei Koordinatenachsen genau eine *Koordinatenebene* festgelegt: Es entstehen die xy-, yz- und xz-Koordinatenebene (kurz: xy-Ebene usw.).

Fig. G 35 und Fig. G 36 zeigen, dass bei einer Beschreibung von Punkten (bzw. Punktmengen) mittels Koordinaten die vektorielle Herkunft eines gegebenen Koordinatensystems zurücktreten kann. Durch ein Koordinatensystem erfolgt eine Zerlegung der Ebene bzw. des Raumes. Neben den Koordinatenachsen und im Raum zusätzlich den Koordinatenebenen ergeben sich in der Ebene 4 *Quadranten* und im Raum 8 *Oktanten* (Fig. G 37 und Fig. G 38a).

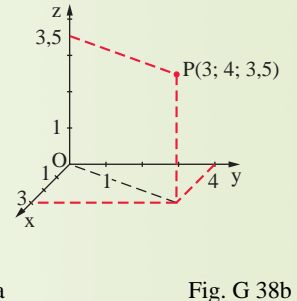
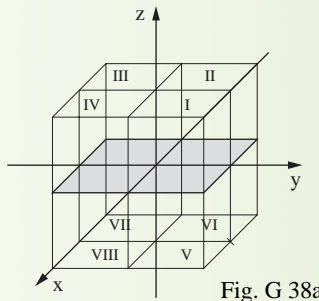
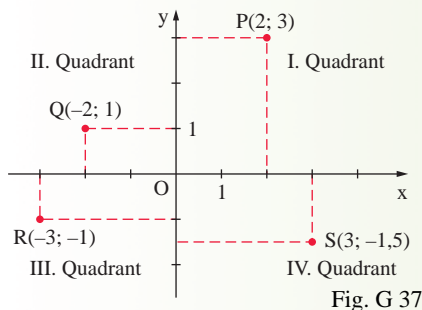


Fig. G 38b veranschaulicht den räumlichen Sachverhalt für einen Punkt P im I. Oktanten, also mit durchweg positiven Koordinaten. P hat die Koordinaten $x = 3$, $y = 4$ und $z = 3,5$. Aus der Darstellung ist zu erkennen, wie man in einem Schrägbild des Koordinatensystems von den Koordinaten zur Einzeichnung des Punktes kommt und wie man umgekehrt von einem Punkt P durch orthogonale Projektionen zu den Abschnitten auf den Achsen geführt wird.

Neben kartesischen Koordinatensystemen in der Ebene bzw. im Raum werden gelegentlich auch **schiefwinklige Koordinatensysteme** genutzt (vgl. Fig. G 39–G 41). Selbst ein Verzicht auf gleich lange Einheiten auf den Achsen eines Koordinatensystems mit paarweise senkrechten Achsen (**rechtwinkliges Koordinatensystem**) kann zweckmäßig sein. Alle o.g. Koordinatensysteme der Ebene und des Raumes werden zusammenfassend als **Systeme von Parallelkoordinaten** bezeichnet.

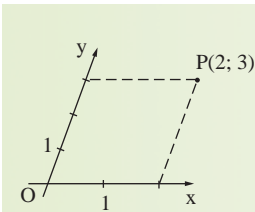


Fig. G 39

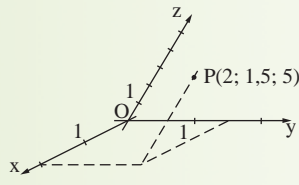
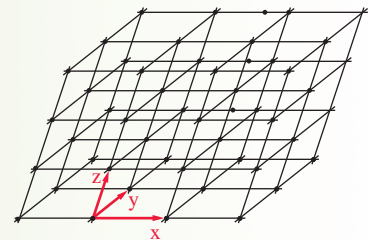


Fig. G 40



Raumgitter, Kristallstruktur Fig. G 41

Andere Arten der Beschreibung von Punkten in der Ebene bzw. im Raum mithilfe von Zahlen werden durch vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in den Naturwissenschaften und der Technik angeregt. Sie erlauben auch in der Mathematik eine bessere Beschreibung von Zusammenhängen und sind dadurch dann oft geeignet, Erkenntnisse klarer und übersichtlicher zu erfassen sowie Anwendungsfelder zu erweitern. Als Beispiel seien ebene und räumliche Polarkoordinatensysteme genannt.

G 1.5 Punkte, Strecken und Dreiecke in einem Koordinatensystem

Die bisher erworbenen Kenntnisse über Koordinaten und Koordinatensysteme¹⁾ sollen nun für Berechnungen an Strecken und Dreiecken genutzt werden.

- *Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ in der Ebene und im Raum*

Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ sei durch die Koordinaten ihrer Endpunkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ (in der Ebene) bzw. $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ (im Raum) gegeben. Um die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Strecke zu bestimmen, kann man – und darin besteht ein Vorzug vektorieller Arbeitsweise – die Betrachtungen für die Ebene und den Raum zunächst einheitlich durchführen. In beiden Fällen werden die Punkte P_1 und P_2 durch ihre Ortsvektoren \vec{p}_1 bzw. \vec{p}_2 (bezüglich O, dem Koordinatenursprung) beschrieben.

Wie in Beispiel G 5 gezeigt, gilt für den Mittelpunkt M bzw. für seinen Ortsvektor \vec{m} :

$\vec{m} = \frac{1}{2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$. Im ebenen Fall erhält man daraus mit $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ für $\vec{m} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}$ durch

Koordinatenvergleich $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ und $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Im räumlichen Fall ergibt sich die dritte Koordinate analog als ein arithmetisches Mittel.

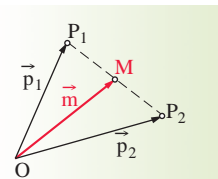


Fig. G 42

¹⁾ Bei den folgenden Betrachtungen wird stets die Verwendung eines ebenen bzw. eines räumlichen *kartesischen* Koordinatensystem vorausgesetzt.

Satz G 9: StreckenmittelpunktFür den **Mittelpunkt M** der Strecke $\overline{P_1P_2}$

- in der Ebene mit den Endpunkten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ gilt $M(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$;
- im Raum mit den Endpunkten $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ gilt $M(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2})$.

G 9

Beispiel G 11:

- a) Es sind die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{OP_1}$ mit dem Koordinatenursprung O und $P_1(-2; 5)$ als Endpunkte zu berechnen. Mithilfe einer Zeichnung überprüfen wir das Ergebnis (Fig. G 43). Einsetzen in die Formel aus Satz G 9 ergibt

$$M(\frac{-2+0}{2}; \frac{5+0}{2}), \text{ also } M(-1; \frac{5}{2}).$$

- b) Gegeben sind die Punkte $P_1(1; 1)$ und $M(3; 2)$. Man bestimme die Koordinaten des Punktes P_2 so, dass M Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$ ist.

$$\text{Aus } x_m = \frac{x_1+x_2}{2} \text{ folgt } 2x_m = x_1 + x_2 \text{ bzw. } x_2 = 2x_m - x_1.$$

$$\text{Entsprechend gilt } y_2 = 2y_m - x_1. \text{ Also: } x_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5; \quad y_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

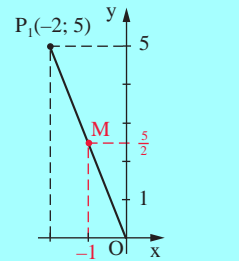


Fig. G 43

G 11

- *Schwerpunkt eines Dreiecks*

Beispiel G 12: Schwerpunkt S eines Dreiecks $P_1P_2P_3$

Ein Dreieck $P_1P_2P_3$ sei durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben: $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$.

Vor Berechnung der Schwerpunktskoordinaten soll zunächst elementargeometrisch bewiesen werden, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks einander in einem Punkt schneiden und dass dieser Schnittpunkt (der Schwerpunkt des Dreiecks genannt wird) eine Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Dafür genügt es zu zeigen, dass der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden $\overline{P_1P_1'}$ und $\overline{P_2P_2'}$ **beide Strecken im Verhältnis 2 : 1 teilt** (Fig. G 44):

Es seien P_4 und P_5 die Mittelpunkte von $\overline{P_1S}$ bzw. $\overline{P_2S}$. Einerseits ist $\overline{P_2'P_1'}$ eine Mittellinie in $P_1P_2P_3$, andererseits ist $\overline{P_4P_5}$ eine Mittellinie in P_1P_2S : Beide Strecken sind parallel zu $\overline{P_1P_2}$ und halb so groß wie $\overline{P_1P_2}$. Folglich ist $P_4P_5P_1'P_2'$ ein Parallelogramm und seine Diagonalen halbieren einander in S. Damit teilt S sowohl $\overline{P_1P_1'}$ als auch $\overline{P_2P_2'}$ im Verhältnis 2 : 1.

Mit den Koordinaten von P_1 , P_2 und P_3 werden nun die Koordinaten von S berechnet:

Der Mittelpunkt P_1' von $\overline{P_2P_3}$ hat die Koordinaten $\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}$. Für den Punkt S gilt

$$\vec{P_1S} = \frac{2}{3} \vec{P_1P_1'} \quad \text{bzw.} \quad \vec{s} - \vec{p_1} = \frac{2}{3} (\vec{p_1'} - \vec{p_1}).$$

Damit ergibt sich für den Ortsvektor \vec{s} vom Schwerpunkt S:

$$\vec{s} = \vec{p_1} + \frac{2}{3} (\vec{p_1'} - \vec{p_1}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ y_2+y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix}$$

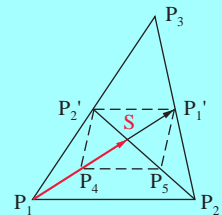


Fig. G 44

G 12

$$\text{bzw. } x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ und } y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

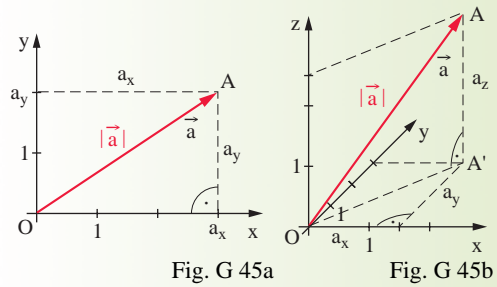
Die Koordinaten des Schwerpunktes S eines Dreiecks $P_1P_2P_3$ sind demnach das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der drei Eckpunkte.

• *Betrag eines Vektors / Länge einer Strecke*

Von einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ sind die Koordinaten der Endpunkte bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben: $P_i(x_i; y_i)$ bzw. $P_i(x_i; y_i; z_i)$, $i = 1, 2$. Gesucht ist die Länge s der Strecke $\overline{P_1P_2}$. Wir nutzen „vektoriellen Möglichkeiten“ zum Lösen dieser koordinatengeometrisch formulierten Problemstellung: Die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ wird offensichtlich bestimmt, indem man den Betrag des Vektors $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ ermittelt (vgl. Fig. G 42 und Fig. G 47).

Deshalb betrachten wir zunächst den Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors \vec{a} in der Ebene bzw. im Raum (vgl. Definition G 7). Wird der Vektor \vec{a} als Ortsvektor bezüglich des Koordinatenursprungs O dargestellt, so ist mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ eine gerichtete Strecke OA gegeben, deren Länge wir bestimmen (Fig. G 45):

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$



Durch Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS im ebenen Fall (Fig. G 45a) und zweimalige Anwendung dieses Satzes im räumlichen Fall (Fig. G 45b: $|\overrightarrow{OA'}|^2 = a_x^2 + a_y^2$ und $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA'}|^2 + a_z^2}$) erhält man:

G 10

Satz G 10: **Betrag eines Vektors**

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ ein Vektor der Ebene bzw. des Raumes mit Koordinaten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems. Dann gilt für den Betrag

- des ebenen Vektors \vec{a} : $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$;
- des räumlichen Vektors \vec{a} : $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Wie man aus Fig. G 45a erkennt, ist der Betrag $|\vec{a}|$ eines ebenen Vektors die Länge der Diagonalen im Rechteck mit den Seitenlängen a_x und a_y . Fig. G 45b zeigt, dass für den räumlichen Vektor \vec{a} der Betrag $|\vec{a}|$ gleich der Länge der Raumdiagonalen im Quader mit den Kantenlängen a_x , a_y und a_z ist.

G 13

Beispiel G 13:

(1) Zu ermitteln ist der Betrag des Vektors a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zu a): $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

Zu b): $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$

Für komplizierte Zahlenwerte oder längere Serien von Betragsberechnungen kann der Einsatz eines GTA sinnvoll

sein. Fig. G 46 zeigt dies für den Fall $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, wobei in

Zeile 1 eine Betragsfunktion definiert und in Zeile 2 dann angewendet wird.

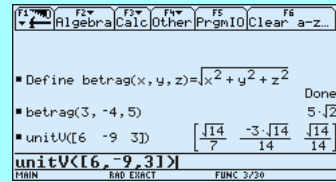


Fig. G 46

(2) Man bestimme zu a) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

den Vektor \vec{b}^0 , der zu \vec{b} gleichgerichtet ist und den Betrag 1 hat (\vec{b}^0 ist ein Einheitsvektor). Zunächst berechnen wir den Betrag von \vec{b} .

Zu a): $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; zu b): $|\vec{b}| = \sqrt{36 + 81 + 9} = \sqrt{129} = 3 \cdot \sqrt{14} \approx 11,22$

Wir hätten auch $\vec{b} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ betrachten können und bekämen dann ebenso

$$|\vec{b}| = \left| 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{14}.$$

Durch Multiplizieren des Vektors \vec{b} mit $\frac{1}{|\vec{b}|}$ erhält man schließlich \vec{b}^0 , denn $\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Also:

$$\text{Zu a): } \vec{b}^0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zu b): } \vec{b}^0 = \frac{1}{3\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Probe bestätigt in beiden Fällen: $|\vec{b}^0| = 1$.

Bei Einsatz eines GTA erhielten wir im Fall b) z.B. die Darstellung wie in Fig. G 46, Zeile 3.

Soll nun die Länge einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ auf vektoriellern Wege ermittelt werden, so bestimmt man den Betrag des Vektors $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$.

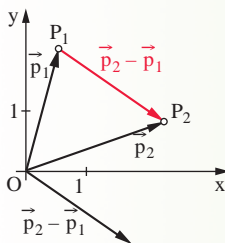


Fig. G 47a

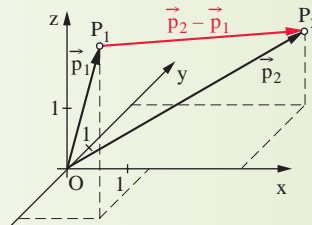


Fig. G 47b

Satz G 11: Länge einer Strecke

Für die Länge s einer Strecke $\overline{P_1P_2}$

- in der Ebene mit den Endpunkten $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ gilt

$$s = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
- im Raum mit den Endpunkten $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ gilt

$$s = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

G 14

Beispiel G 14:

a) Es ist die Länge s der Strecke $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(2; 5; -3)$ und $P_2(1; 7; -5)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}s &= |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-7)^2 + (-3+5)^2} \\ &= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \text{ (LE)}\end{aligned}$$

b) Man berechne den Abstand von $P_1(4; 3; 3,5)$ und $P_2(6; -2; 6,5)$ jeweils zum Ursprung O sowie $s = |\overline{P_1P_2}|$.

$$s_1 = |\overline{OP_1}| = \sqrt{16+9+12,25} = \sqrt{37,25} \approx 6,10 \text{ (LE)}$$

$$s_2 = |\overline{OP_2}| = \sqrt{36+4+42,25} = \sqrt{82,25} \approx 9,07 \text{ (LE)}$$

$$\begin{aligned}s &= |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(4-6)^2 + (3+2)^2 + (3,5-6,5)^2} \\ &= \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38} \approx 6,16 \text{ (LE)}\end{aligned}$$

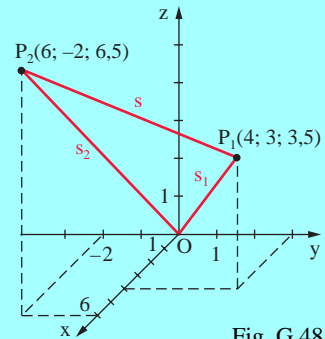


Fig. G 48

• Flächeninhalt eines Dreiecks

Ist ein Dreieck in der Ebene¹⁾ durch die Koordinaten seiner Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben, so verlangt die Berechnung seines Flächeninhaltes mit der Inhaltsformel $A = \frac{1}{2} gh$ erst das Ermitteln zweier Zwischenergebnisse (g und h). Mit elementargeometrischen Überlegungen in dem Koordinatensystem lässt sich jedoch eine Flächenformel ableiten, die direkt die Koordinaten der Eckpunkte benutzt: Gegeben sei ein Dreieck $P_1P_2P_3$ mit $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$. Durch die Projektion von P_1 , P_2 und P_3 auf die x -Achse entstehen drei Trapeze mit den Inhalten A_1 , A_2 und A_3 (Fig. G 49).

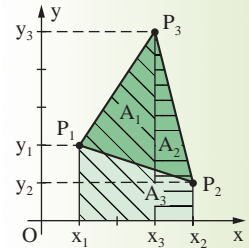


Fig. G 49

Es gilt für den Inhalt A des Dreiecks: $A = A_1 + A_2 - A_3$ mit

$$A_1 = \frac{1}{2} (y_3 + y_1)(x_3 - x_1); \quad A_2 = \frac{1}{2} (y_2 + y_3)(x_2 - x_3); \quad A_3 = \frac{1}{2} (y_2 + y_1)(x_2 - x_1).$$

$$\text{Folglich ist } A = \frac{1}{2} [(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - (y_2 + y_1)(x_2 - x_1)]$$

$$\text{und nach Vereinfachung } A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Für das Dreieck $P_1P_2P_3$ mit $P_1(1; 2)$, $P_2(4; 1)$ und $P_3(3; 5)$ ergibt sich $A_{123} = 5,5$. Verändern wir die Reihenfolge der Eckpunkte von $P_1P_2P_3$ in $P_1P_3P_2$, so erhalten wir nach obiger Formel $A_{132} = -5,5$. Mit der Änderung der Reihenfolge der Eckpunkte im Dreieck $P_1P_2P_3$ ist auch eine Änderung der Orientierung des Dreiecks verbunden. Die obige Formel für den Inhalt A gibt einen *vorzeichenbehafteten* Flächeninhalt an, der dies berücksichtigt. Setzt man den rechten Term in Betragsstriche, so besteht Übereinstimmung mit dem Resultat nach $A = \frac{1}{2} gh$. Die somit abgeleitete Formel gilt auch, wenn die Punkte P_1 , P_2 und P_3 nicht alle im ersten Quadranten liegen.

G 12

Satz G 12: Flächeninhalt eines Dreiecks in der Ebene

Für den Flächeninhalt A des Dreiecks $P_1P_2P_3$ mit den Eckpunkten $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$ gilt $A = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$.²⁾

¹⁾ Mithilfe der etwas weiter entwickelten Vektorrechnung wird in Abschnitt G 8 gezeigt, wie man für ein im Raum liegendes Dreieck den Flächeninhalt aus den Koordinaten der Eckpunkte ermittelt.

²⁾ Die Indizes der drei Summanden gehen in Reihenfolge durch zyklische Vertauschung auseinander hervor.

Beispiel G 15: Kollinearität dreier Punkte

Mit der Inhaltsformel (Satz G 12) für ein Dreieck kann auch rechnerisch ermittelt werden, ob drei in einem kartesischen Koordinatensystem gegebene Punkte auf ein und derselben Geraden liegen (also **kollinear** sind) oder nicht.

Da bei einem nicht entarteten Dreieck $P_1P_2P_3$ für den Flächeninhalt A stets $A > 0$ gilt, folgt aus Satz G 12: Drei Punkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$ sind genau dann kollinear (bilden ein entartetes Dreieck mit $A = 0$), wenn $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$.

Zum Beispiel liegen die Punkte $P_1(-2; 1)$, $P_2(4; 3)$ und $P_3(-5; 0)$ auf derselben Geraden (sind also kollinear), da $(-2)(3 - 0) + 4(0 - 1) + (-5)(1 - 3) = 0$ ist.

G 15

G 1.6 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit

Der Begriff *Vektorraum* (s. Abschnitt G 9) ist ein fundamentaler Strukturbegriff der modernen Mathematik. Mit der *linearen Unabhängigkeit von Vektoren* soll nun einer der wichtigsten Begriffe aus diesem Bereich erörtert werden. Dabei erscheinen die Sätze G 5, G 6 und G 7 über nicht parallele Vektoren bzw. über drei nicht komplanare Vektoren und der Begriff der Basis (Definition G 10 und G 11) für die Vektoren der Ebene bzw. des Raumes unter einem neuen, verallgemeinerungsfähigen Gesichtspunkt.

Beispiel G 16:

In Fig. G 50 sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und \vec{x} durch \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} bzw. \vec{OX} angegeben.

a) Es lässt sich feststellen:

- \vec{x} ist eine **Linearkombination** der Vektoren \vec{a} und \vec{b} , denn es gilt $\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- \vec{x} ist eine Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{c} , da $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c}$ ist.
- \vec{x} ist auch eine Linearkombination der Vektoren \vec{b} und \vec{c} , da $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{b} - 2\vec{c}$ gilt.

b) Gegeben sei der Vektor \vec{d} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} , nämlich

$$\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

Der Vektor \vec{d} wird durch den Pfeil \vec{OD} dargestellt, wobei D der Mittelpunkt von \vec{OX} ist: $\vec{d} = \vec{OD}$. Man erkennt.

- \vec{x} ist weder ein Vielfaches von \vec{a} noch ein Vielfaches von \vec{b} oder \vec{c} .
- \vec{x} ist aber ein Vielfaches von \vec{d} , denn es gilt $\vec{x} = 2\vec{d}$.

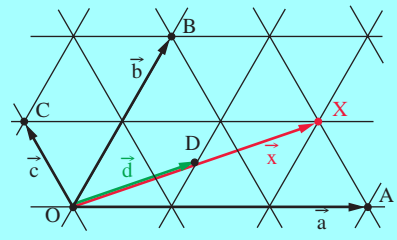


Fig. G 50

G 16

Beispiel G 17:

Gegeben sei ein Quader ABCDEFGH (Fig. G 51) mit den eingezeichneten Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{x} , \vec{y} und \vec{z} .

Für die Vektoren \vec{x} bzw. \vec{y} gilt:

$$\vec{x} = \vec{c} = \vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}, \vec{y} = \vec{BG} = \vec{AH}$$

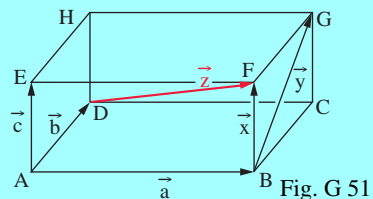


Fig. G 51

G 17

Der Vektor \vec{y} lässt sich weder als **Linearkombination** der Vektoren \vec{a} und \vec{b} noch als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{c} darstellen. Es gilt aber $\vec{y} = \vec{b} + \vec{c}$.

Der Vektor \vec{z} kann als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dargestellt werden:

$$\vec{z} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

Aber:

- \vec{z} ist keine Linearkombination von zwei der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .
- Keiner der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist als Linearkombination der restlichen zwei darstellbar.

Beispiel G 17 zeigt: *Keiner der (drei nicht komplanaren) Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} lässt sich als Linearkombination der übrigen beiden Vektoren darstellen.* Ersetzt man einen der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} durch \vec{z} , so hat die neue Menge von drei Vektoren ebenfalls diese Eigenschaft. Was wir zuvor für zwei Vektoren mit „nicht parallel“ und für drei Vektoren mit „nicht komplanar“ beschrieben haben, lässt sich durch den Begriff „linear unabhängig“ einheitlich und für Verallgemeinerungen offen definieren:

G 14

Definition G 14:

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, falls sich *kein* Vektor von ihnen als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen lässt.

Kann man *wenigstens* einen der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen, so heißen die Vektoren **linear abhängig**.

Eine Vektormenge, die nur aus dem Element \vec{a} besteht, wird mit eingeordnet: Man betrachtet $\vec{a} \neq \vec{0}$ als linear unabhängig und $\vec{a} = \vec{0}$ als linear abhängig.

Nach dem Beweis zu Satz G 5 konnte man bemerken, dass die Nichtparallelität zweier Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 allein durch folgende Implikation gekennzeichnet ist:

$$\text{Wenn } r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 = \vec{0}, \quad \text{so } r_1 = 0 \text{ und } r_2 = 0.$$

Für drei nicht komplanare Vektoren ist die entsprechende Implikation nach Satz G 7 (vgl. die Eindeutigkeitsaussage) erfüllt:

$$\text{Wenn } r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + r_3 \vec{a}_3 = \vec{0}, \quad \text{so } r_1 = r_2 = r_3 = 0. \quad (*)$$

Und umgekehrt: Genügen drei Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_3 der Eigenschaft (*), so sind sie nicht komplanar.

Allgemein können wir nach Definition G 14 festhalten: Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, so lässt sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch $0 \vec{a}_1 + 0 \vec{a}_2 + \dots + 0 \vec{a}_n$ (durch die so genannte *triviale Linearkombination des Nullvektors*) darstellen, d. h.:

$$\text{Aus } r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{folgt } r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0.$$

Denn gäbe es ein $r_i \neq 0$ in der Linearkombination von $\vec{0}$, so könnte durch Umstellung der Gleichung nach $r_i \vec{a}_i$ und Division durch r_i der Vektor \vec{a}_i als Linearkombination der übrigen Vektoren dargestellt werden, was aber bei linear unabhängigen Vektoren unmöglich ist (vgl. Definition G 14).

Die oben definierte *lineare Abhängigkeit* hat sofort die Existenz einer nichttrivialen Linearkombination des Nullvektors zur Folge:

Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig, so existiert ein Vektor, z. B. \vec{a}_1 , der sich mithilfe der übrigen darstellen lässt: $\vec{a}_1 = r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n$. Daraus folgt $\vec{0} = (-1) \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n$.

Damit lässt sich feststellen:

Satz G 13: Lineare Unabhängigkeit und lineare Abhängigkeit

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sind *linear unabhängig*, wenn aus $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n = \vec{0}$ stets $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ folgt.

Gibt es dagegen reelle Zahlen r_1, r_2, \dots, r_n , die *nicht alle* gleich 0 sind, so dass $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n = \vec{0}$ gilt, so sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ *linear abhängig*.

G 13

Für Vektoren der Ebene gilt: Es können maximal jeweils zwei Vektoren linear unabhängig sein – jeder hinzukommende Vektor der Ebene lässt sich aus diesen beiden linear kombinieren (Satz G 6).
Für Vektoren im Raum gilt: Es können maximal jeweils drei Vektoren linear unabhängig sein – jeder hinzukommende Vektor des Raumes lässt sich hier aus diesen drei linear kombinieren (Satz G 7).

Beispiel G 18:

(1) Die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt sich

mit jedem der folgenden drei Argumente begründen:

- \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 sind Basisvektoren eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems (also zusätzlich noch Einheitsvektoren und paarweise orthogonal).
- Keiner der drei Vektoren ist eine Linearkombination der übrigen beiden; beispielsweise kann die erste Koordinate von \vec{e}_1 niemals aus einer Linearkombination der ersten Koordinaten von \vec{e}_2 und \vec{e}_3 entstehen.
- Der Nullvektor lässt sich aus \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 nur trivial linear kombinieren:
Aus $r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$ folgt $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

(2) Man weise nach, dass

- $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Vektoren sind,
- $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear abhängige Vektoren sind.

Außerdem soll einer der drei Vektoren \vec{b}_1 als Linearkombination der anderen zwei dargestellt werden. Im Folgenden wird nur der Ansatz notiert, das Problem aber im Beispiel G 41 (Abschnitt G 3) nochmals aufgegriffen.

Aus der unbestimmten Linearkombination des Nullvektors

$$\begin{array}{rcl|l}
 r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + r_3 \vec{a}_3 = \vec{0} & & s_1 \vec{b}_1 + s_2 \vec{b}_2 + s_3 \vec{b}_3 = \vec{0} & \\
 \text{ergibt sich das lineare Gleichungssystem} & & & \\
 \hline
 2r_1 + 3r_2 - r_3 = 0 & & 3s_1 + 7s_2 - s_3 = 0 & \\
 r_1 + 3r_2 + r_3 = 0 & & s_1 - s_2 + 2s_3 = 0 & \\
 -2r_1 - 2r_2 + 4r_3 = 0 & & 5s_1 + 7s_2 + 4s_3 = 0 &
 \end{array}$$

G 18

Um den verlangten Nachweis zu erbringen, muss die Rechnung für das linke Gleichungssystem zu der *eindeutigen* Lösung $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ führen, für das rechte Gleichungssystem aber neben $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ auch eine Lösung mit einem von null verschiedenen Wert für mindestens ein s_i ($i = 1, 2, 3$) ergeben. Für das Gleichungssystem mit den s_i -Variablen sei hier mit $s_1 = -3$, $s_2 = 1$ und $s_3 = 2$ eine Lösung vorgegeben. (Durch Einsetzen dieser Werte bestätigt man dies; prinzipielle Erörterungen zu einem Lösungsalgorithmus erfolgen in Abschnitt G 3.) Somit ergibt sich $\vec{b}_2 = 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_3$ (der Einfachheit halber stellen wir \vec{b}_2 als Linearkombination von \vec{b}_1 und \vec{b}_3 dar), eine Gleichung, die man mit den konkreten Spaltenvektoren \vec{b}_i überprüfen kann.

Nutzt man den GTA, so stehen mit **simult** und **rref** zwei Befehle zur Verfügung. Man beachte, dass **simult** nur für *eindeutig* lösbare Gleichungssysteme vom Typ „ n Variablen und n Gleichungen“ genutzt werden kann (vgl. Fig. G 52 sowie Fig. G 59 im Beispiel G 22). Wegen dieser Einschränkungen werden wir – bis auf Fig. G 52 und Fig. G 59 – im Weiteren nur mit **rref** arbeiten.

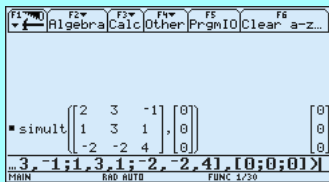


Fig. G 52

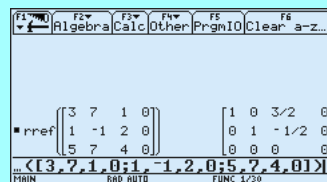


Fig. G 53

Der rechte Ausdruck in Fig. G 53 gibt das Zahlenschema eines umgeformten (zu dem links wiedergegebenen äquivalenten) Gleichungssystems wieder:

$$\begin{array}{rcl} s_1 + 0s_2 + \frac{3}{2}s_3 = 0 & & s_1 + \frac{3}{2}s_3 = 0 \\ 0s_1 + 1s_2 - \frac{1}{2}s_3 = 0 & \text{bzw.} & s_2 - \frac{1}{2}s_3 = 0 \\ 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0 & & \end{array}$$

Mit $s_3 = t^*$ (freier Parameter) erhält man $s_1 = -\frac{3}{2}t^*$ und $s_2 = \frac{1}{2}t^*$ bzw. in Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = t^* \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t^* \in \mathbb{R}. \quad \text{Da } t^* \text{ eine beliebige reelle Zahl ist, kann man die Lösung auch in der}$$

$$\text{Form } \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ angeben (wie aus dem Schirmbild ablesbar).}$$

G 1.7 Beweise unter Verwendung von Vektoren

In den folgenden Beispielen werden Sätze der ebenen Geometrie *vektoriell* bewiesen. Neben einer Figur mit Eintragungen von Pfeilen/Vektoren erfassen wir jeweils die *Voraussetzungen* des Satzes mithilfe von Vektoren, notieren mit Vektoren die Behauptung und schließen auf dieser Basis den Beweis an.

G 19

Beispiel G 19:

Man beweise: Die Verbindungsstrecke der **Mittelpunkte** zweier Dreiecksseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so lang wie diese.

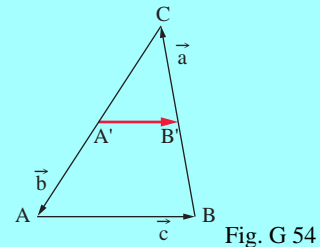
Voraussetzungen (Fig. G 54):

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{B'C} = \frac{1}{2} \vec{a}; \quad \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\text{Behauptung: } \overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2} \vec{c}$$

$$\text{Beweis: } \overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2} \vec{b} + (-\frac{1}{2} \vec{a}) = -\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{a}) = -\frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Mit } \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \text{ folgt } \overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2} (-\vec{c}) = \frac{1}{2} \vec{c}.$$



Neben der Kennzeichnung von **Vektoren** in einer Figur kann auch die Methode benutzt werden, **Punkte** einer Figur mithilfe von **Ortsvektoren** (bezüglich eines einmal gewählten Punktes O der Ebene/des Raumes) zu beschreiben.

Beispiel G 20:

Für den Ortsvektor \vec{m} des Mittelpunktes M einer

Strecke \overline{AB} gilt (Fig. G 55):

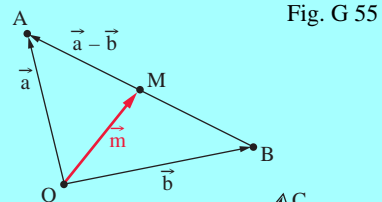
$$\vec{m} = \vec{b} + \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \text{ bzw. kurz } \vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

Wir beweisen nun den Satz aus Beispiel G 19 mithilfe von Ortsvektoren:

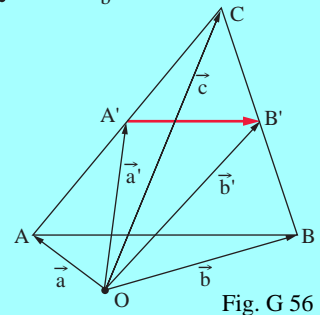
Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a'}, \vec{b'}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B, C, A' bzw. B' (Fig. G 56).

$$\text{Dann gilt wegen } \vec{a'} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}; \quad \vec{b'} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}:$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{b'} - \vec{a'} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$



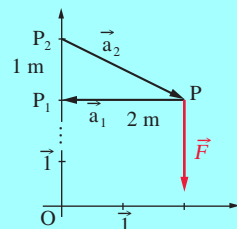
G 20



G 1.8 Praktische Anwendungen

Beispiel G 21:

Am äußeren Ende eines Tragarmes (Fig. G 57a) greift durch eine Last eine Kraft \vec{F} mit $|\vec{F}| = 1200 \text{ N}$ an. Der Tragarm hat eine Länge von 2 m und wird durch ein Zugseil gehalten, das 1 m oberhalb des Trägers befestigt ist.



G 21

In Fig. G 57b ist die Zerlegung (Umkehrung der **Vektoraddition**) der Kraft \vec{F} in die Komponente \vec{F}_1 für den Tragarm und in die Komponente \vec{F}_2 für das Zugseil angegeben. Durch Messung – bei geeigneter Wahl des Maßstabes – bzw. durch Auswertung am rechtwinkligen Dreieck als halbe Parallelogrammfigur der Vektoraddition ergibt sich $|\vec{F}_1| = 2400 \text{ N}$ und $|\vec{F}_2| = \sqrt{1,2^2 + 2,4^2} \cdot 1000 \text{ N} \approx 2683 \text{ N}$.

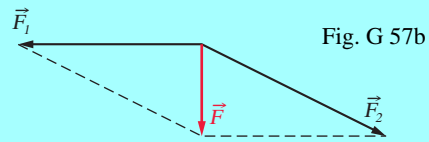


Fig. G 57b

Rechnerisch kann die Aufgabe auch in folgender Weise gelöst werden:

Wir zerlegen \vec{F} in Komponenten bez. des Vektors $\vec{a}_1 = \overrightarrow{PP_1}$ (Tragarm) und des Vektors $\vec{a}_2 = \overrightarrow{P_2P}$ (Zugseil): $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$

Wegen $\vec{a}_1 = \overrightarrow{PP_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \overrightarrow{P_2P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Fig. G 57a) muss gelten:

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1200 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_2 &= -1200 \end{aligned}$$

Mit den sich daraus ergebenden Lösungen $x_1 = x_2 = 1200$ ist $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2400 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2400 \\ -1200 \end{pmatrix}$, d. h., für die Beträge der Vektoren \vec{F}_1 und \vec{F}_2 gilt, wie oben bereits erhalten,

$$|\vec{F}_1| = 2400 \text{ N} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{F}_2| \approx 2683 \text{ N}.$$

G 22

Beispiel G 22:

Die in Fig. G 1 skizzierte Dreipunktaufhängung für die Oberleitung einer Straßenbahn soll mit den in Fig. G 58 dargestellten Koordinaten konkret bearbeitet werden:

$P(3; 4; 0)$, $P_1(0; 0; 2)$, $P_2(0; 6; 2)$, $P_3(11; 3; 2)$.

Damit erhalten wir die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{PP_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \overrightarrow{PP_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \overrightarrow{PP_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

in deren Richtung die Kräfte \vec{F}_1 , \vec{F}_2 bzw. \vec{F}_3 wirken. Sie entstehen, wenn voraussetzungsgemäß eine Kraft \vec{F} in P angreift und in Richtung der negativen z-Achse wirkt.

Es sei $|\vec{F}| = 440$ (gemessen in N). Die Kräfte \vec{F}_1 , \vec{F}_2 und \vec{F}_3 sind **Vielfache der Vektoren** \vec{a}_1 , \vec{a}_2 bzw. \vec{a}_3 , also gilt: $\vec{F}_1 = x_1 \vec{a}_1$, $\vec{F}_2 = x_2 \vec{a}_2$, $\vec{F}_3 = x_3 \vec{a}_3$.

Der Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -440 \end{pmatrix}$ hat die Kraft $-\vec{F}$ als Resultierende von \vec{F}_1 , \vec{F}_2 und \vec{F}_3 entgegenzuwirken,

um einen Gleichgewichtszustand zu erzeugen. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$x_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 440 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 440 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir mit bekannten Methoden lösen. So ist x_3 in der ersten und letzten Gleichung durch $x_3 = -4x_1 + 2x_2$ aus der zweiten Gleichung ersetzbar.

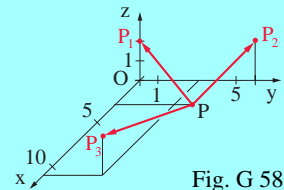


Fig. G 58

Wir erhalten als Lösung: $x_1 = \frac{130}{3} \approx 43,3$; $x_2 = \frac{350}{3} \approx 116,6$ und $x_3 = 60$

Fig. G 59 zeigt die Lösung des Systems mittels GTA:

Mit den Werten x_1 bis x_3 erhalten wir die Koordinaten der Vektoren:

$$\vec{F}_1 = x_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -130 \\ -\frac{520}{3} \\ \frac{260}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = x_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -350 \\ \frac{700}{3} \\ \frac{700}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_3 = x_3 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 480 \\ -60 \\ 120 \end{pmatrix}$$

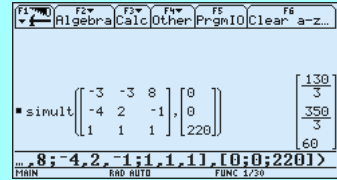


Fig. G 59

Von Interesse sind die **Beträge der Kräfte (in N)**:

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{130^2 + \left(\frac{520}{3}\right)^2 + \left(\frac{260}{3}\right)^2} \approx 233,4; \quad |\vec{F}_2| = \sqrt{350^2 + \left(\frac{700}{3}\right)^2 + \left(\frac{700}{3}\right)^2} \approx 481,0;$$

$$|\vec{F}_3| = \sqrt{480^2 + 60^2 + 120^2} \approx 498,4.$$

Auf die Verankerungspunkte wirken also Kräfte von rund 233,4 N, 481 N bzw. 498,4 N.

Beispiel G 23:

Betrachtet wird die Geschwindigkeit von Teilchen einer Flüssigkeit, die durch ein Rohr strömt. Dazu schafft man sich eine Modellvorstellung und geht von der Fig. G 2 in Beispiel G 1 aus. Das Rohr sei ein Zylindermantel mit der z-Achse eines räumlichen Koordinatensystems als Achse des Zylinders. Die Geschwindigkeit eines Teilchens in einem Punkt sei unabhängig von seiner z-Koordinate und die Geschwindigkeit von Teilchen auf Kreisen in der xy-Ebene um O sei konstant. Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist also nur eine Funktion des Abstandes von der Achse des Rohres (bzw. des Abstandes vom Rand des Zylinders).

Ein so genanntes *Strömungsprofil* erhält man demnach schon, indem man beispielsweise für $z = 0$ in der xz-Ebene die Geschwindigkeit der Teilchen analysiert.

In unserem Modell habe das Rohr den Radius 1. Für die Punkte auf der x-Achse im Intervall

$(-1; 1)$ seien die Geschwindigkeitsvektoren durch $\vec{v}(P) = \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-x^2 \end{pmatrix}$ gegeben.

In Fig. G 60a werden sie für $z = 0$ und $z = 1,5$ veranschaulicht:

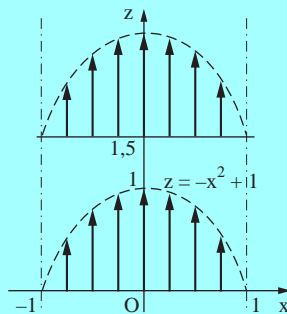


Fig. G 60a

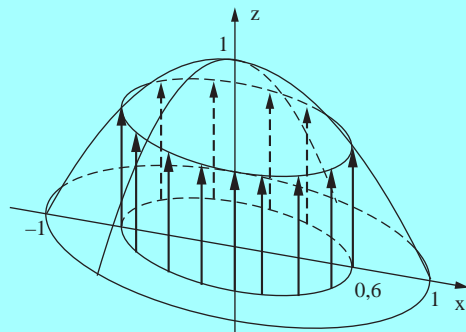


Fig. G 60b

Wird das für $z = 0$ in Fig. G 60a erhaltene Strömungsprofil um die z -Achse gedreht, so bekommt man eine Vorstellung über das räumliche Strömungsprofil. Eine analytische Beschreibung der Geschwindigkeitsvektoren im zylindrischen Rohr erhält man durch

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Eine Veranschaulichung der Vektoren auf der Kreisscheibe, die durch die Ungleichung $x^2 + y^2 < 1$ beschrieben wird ($z = 0$), gibt die Fig. G 60b. Die Endpunkte der Vektoren liegen auf einem Teil eines nach unten geöffneten Rotationsparaboloids.

G 24

Beispiel G 24:

Fig. G 3 des Beispiels G 1 zeigt eine Veranschaulichung des *magnetischen Feldes* eines geraden, von Gleichstrom durchflossenen Leiters. Für eine Beschreibung dieses physikalischen Phänomens legen wir das Koordinatensystem so, dass der Leiter in der z -Achse liegt und die Stromrichtung mit der positiven z -Richtung übereinstimmt.

Über die Wirkungsrichtung und die Stärke $|\vec{H}|$ des magnetischen Feldes \vec{H} geben physikalische Gesetze Auskunft:

(1) Der Vektor $\vec{H}(P)$ in einem Punkt P (P nicht auf der z -Achse) liegt so auf einer Tangente an den Kreis (Tangentialvektor) in einer Parallelebene zur xy -Ebene mit dem Mittelpunkt auf der z -Achse, dass mit seiner Richtung die „Rechte-Hand-Regel“ gilt (vgl. Fig. G 3).

(2) Die Stärke des magnetischen Feldes, also der Betrag von $\vec{H}(P)$, ist umgekehrt proportional zum Abstand des Punktes P vom Leiter.

Mit diesen Eigenschaften kann man in dem vereinbarten Koordinatensystem das magnetische Feld \vec{H} durch die Formel $\vec{H}(x; y; z) = \frac{k}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreiben. Dabei hängt der Proportionalitätsfaktor k von den gewählten Einheiten und von magnetischen Konstanten sowie von der Stärke des Stroms ab, zu dem die Feldstärke $|\vec{H}(P)|$ proportional ist.

Wir berechnen den Betrag von \vec{H} und veranschaulichen \vec{H} in Abhängigkeit vom Abstand des Punktes P zum Leiter in einem r - $|\vec{H}|$ -Diagramm. Damit sind wir dann bei einer Veranschaulichung von Vektoren $\vec{H}(P)$ in der xy -Ebene:

r sei der Abstand des Punktes $P(x; y; z)$ vom Leiter (z -Achse); er ist unabhängig von der z -Koordinate von P . Für diesen Abstand gilt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Fig. G 62).

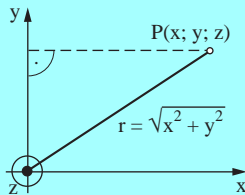


Fig. G 62

Für den Betrag des magnetischen Feldvektors $\vec{H}(P)$ bzw. für die magnetische Feldstärke in P gilt dann:

$$|\vec{H}| = \frac{k}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{k}{r^2} \cdot r = \frac{k}{r}$$

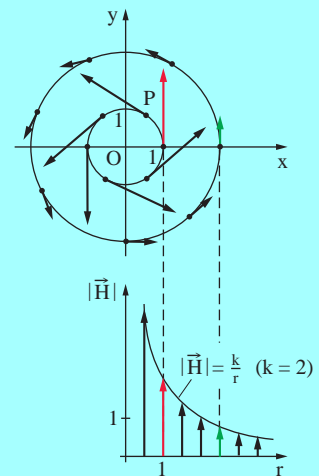


Fig. G 61

Die Formel für \vec{H} gibt also die Eigenschaft (2) richtig wieder. Fig. G 61 zeigt die Verhältnisse in einem $r-|\vec{H}|$ -Diagramm mit $k = 2$. Auch die Gültigkeit der Eigenschaft (1) wird durch eine ergänzende Darstellung von magnetischen Feldvektoren in der xy -Ebene bestätigt.

(Vgl. dazu beispielsweise für Punkte P auf dem Einheitskreis, also $x^2 + y^2 = 1$ und $k = 2$, die eingezeichneten Vektoren mit ihrer Koordinatendarstellung $\begin{pmatrix} -2y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}$).

G 2 Geraden in der Ebene und im Raum

G 2.1 Punktrichtungsgleichung einer Geraden

Sind in der Ebene (Fig. G 63) oder im Raum (Fig. G 64) ein Punkt P_0 und ein Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gegeben, so ist dadurch eine Gerade g durch P_0 mit der Richtung von \vec{a} eindeutig bestimmt.

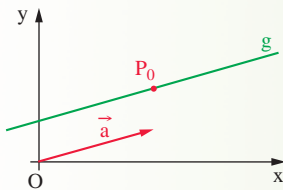


Fig. G 63

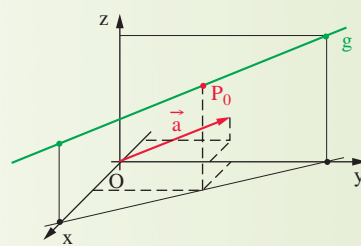


Fig. G 64

Um eine vektorielle Beschreibung der Geraden g zu erhalten, nutzt man die Überlegungen aus G 1.2, dass sich bei der Vervielfachung eines Vektors \vec{a} mit einer reellen Zahl zwar dessen Betrag, aber nicht dessen Richtung ändert. Folglich liegen alle Punkte X mit dem Ortsvektor \vec{x} , für den

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + t \vec{a} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

gilt, auf der durch P_0 und \vec{a} bestimmten Geraden. $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ bezeichnet dabei den *Ortsvektor* des Punktes P_0 . Umgekehrt gehört zu jedem Punkt X von g eine solche eindeutig bestimmte Zahl t , dass \vec{x} nach (1) der Ortsvektor dieses Punktes X ist. Fig. G 65 und Fig. G 66 zeigen die entsprechenden Situationen für verschiedene t .

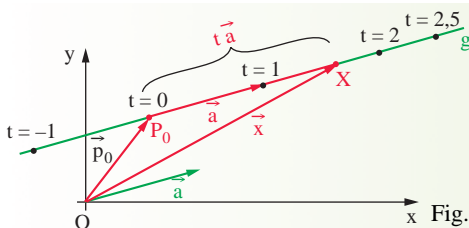


Fig. G 65

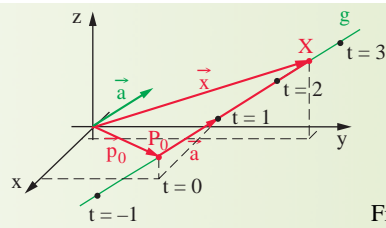


Fig. G 66

Die Gleichung (1) heißt auch *Punktrichtungsgleichung* der Geraden g . Der Vektor \vec{a} wird als *Richtungsvektor* von g und die reelle Zahl t als *Parameter* bezeichnet. Damit ist (1) eine *Parametergleichung der Geraden* g in vektorieller Schreibweise (kurz auch: eine *Vektorgleichung*). Es gilt:

Satz G 14: Punktrichtungsgleichung einer Geraden in Parameterform

Die Gerade g , die durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ und den Richtungsvektor \vec{a} ($\vec{a} \neq \vec{0}$) bestimmt ist, kann durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{p}_0 + t \vec{a}$ ($t \in \mathbb{R}$) beschrieben werden.

G 25

Beispiel G 25:

Gegeben sei in der Ebene eine Gerade g durch den Punkt $P_0(-1; 3)$ mit dem **Richtungsvektor** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Punktrichtungsgleichung von g .

Für $t_1 = 2,4$ erhält man $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2,4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,4 \\ -4,8 \end{pmatrix}$, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3,4 \\ -1,8 \end{pmatrix}$. Damit ist $X_1(-3,4; -1,8)$ ein Punkt von g .

Auch mit dem GTA können wir die Koordinaten von Punkten auf g in Abhängigkeit von t berechnen. Fig. G 67 (zusammengefügt aus mehreren Schirmbildern) zeigt zwei Beispiele. Umgekehrt lässt sich für einen Punkt X_2 das zugehörige t bestimmen, falls X_2 zu g gehört. Unter der Annahme, dass z.B. $X_2(1; 7) \in g$, gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1t_2 \\ -2t_2 \end{pmatrix}.$$

Weil zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in ihren Koordinaten übereinstimmen (vgl. Satz G 8/**Prinzip des Koordinatenvergleichs**), erhält man das Gleichungssystem

$$(I) \quad 2 = -1 \cdot t_2$$

$$(II) \quad 4 = -2 \cdot t_2.$$

Aus (I) folgt $t_2 = -2$. Da dieser Wert auch die Gleichung (II) erfüllt, ist $X_2(1; 7)$ ein Punkt von g .

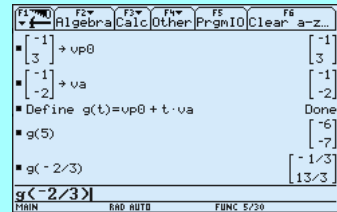


Fig. G 67

G 26

Beispiel G 26:

Gegeben sei im Raum eine Gerade h durch den Punkt

$P_0(-1; 3; 2)$ und den **Richtungsvektor** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann

ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die **Punktrichtungsgleichung** von h .

Für $t_1 = -0,7$ erhält man

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 0,7 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,4 \\ -0,7 \\ -1,4 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2,4 \\ 3,7 \\ 3,4 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $X_1(-2,4; 3,7; 3,4)$ ein Punkt von h . Fig. G 68 zeigt, wie sich mittels eines GTA die Koordinaten weiterer Punkte von h in Abhängigkeit vom Parameter t bestimmen lassen.

Nun sei ein weiterer Punkt $X_2(1; 2; 1)$ gegeben und es soll das zugehörige t_2 bestimmt werden.

$$\text{Wenn } X_2 \text{ auf } h \text{ liegt, so muss} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_2 \\ -1t_2 \\ -2t_2 \end{pmatrix} \quad \text{gelten.}$$

Analog zu Beispiel G 25 erhält man hier drei Gleichungen mit der Unbekannten t_2 :

$$(I) \quad 2 = 2 \cdot t_2$$

$$(II) \quad -1 = -1 \cdot t_2$$

$$(III) \quad -1 = -2 \cdot t_2.$$

Aus (I) ergibt sich $t_2 = 1$. Dieser Wert erfüllt auch die Gleichung (II), nicht aber (III). Damit gibt es keinen Parameter t_2 , der die Gleichung $\vec{x}_2 = \vec{p}_0 + t_2 \vec{a}$ erfüllt, und folglich ist X_2 kein Punkt von h .

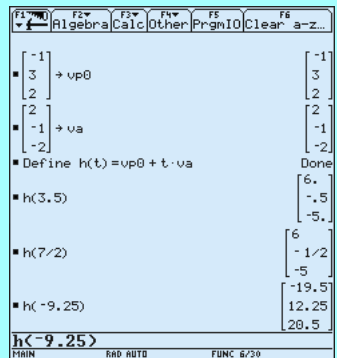


Fig. G 68

Wir wenden uns nun stärker der Beschreibung einer Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem zu. g sei eine Gerade in der Ebene, die durch den Punkt $P_0(x_0; y_0)$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bestimmt ist. Dabei wird wieder vorausgesetzt, dass \vec{a} vom Nullvektor $\vec{0}$ verschieden ist, d.h., dass a_x und a_y nicht gleichzeitig 0 werden. Unter diesen Voraussetzungen ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ die Punktrichtungsgleichung von g mit t als Parameter. Daraus soll nun eine **parameterfreie Gleichung** von g gewonnen werden, was erfordert, t aus dieser Gleichung zu eliminieren.

Aus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, woraus $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{pmatrix}$ folgt.

Durch Koordinatenvergleich (vgl. Satz G 8) erhält man daraus das Gleichungssystem:

$$(I) \quad x - x_0 = t a_x$$

$$(II) \quad y - y_0 = t a_y$$

Nach Multiplikation von (I) mit a_y und (II) mit $-a_x$ ergibt sich durch Addition der beiden Gleichungen $(x - x_0) a_y - (y - y_0) a_x = 0$. (2)

Die Gleichung (2) ist nun eine parameterfreie Gleichung, die die Gerade g in der Ebene beschreibt.

Satz G 15: **Parameterfreie Punktrichtungsgleichung einer Geraden in der Ebene**

Die Gerade g der Ebene, die durch den Punkt $P_0(x_0; y_0)$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bestimmt ist, lässt sich durch die parameterfreie Gleichung $(x - x_0) a_y - (y - y_0) a_x = 0$ beschreiben.

Diese Gleichung nimmt für $a_x \neq 0$ die Form $y - y_0 = \frac{a_y}{a_x} (x - x_0)$ bzw. $y - y_0 = m (x - x_0)$ an. m ist dabei der Anstieg der Geraden.

G 15

Beispiel G 27:

Ist g eine Gerade der Ebene, die durch $P_0(-1; 3)$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bestimmt wird, so ist

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Punktrichtungsgleichung von g in Parameterform (vgl. Beispiel G 25).

Unter Anwendung von Satz G 15 erhält man eine parameterfreie Punktrichtungsgleichung von g :

$$(x + 1) \cdot (-2) - (y - 3) \cdot (-1) = 0, \text{ also } -2(x + 1) + (y - 3) = 0 \text{ bzw. } y = 2x + 5.$$

Ist h eine weitere Gerade, die ebenfalls durch den Punkt P_0 geht, aber den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat, so ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Punktrichtungsgleichung von h in Parameterform. Daraus erhält man mit Satz G 15 ebenfalls eine parameterfreie Gleichung von h :

$$(x + 1) \cdot 2 - (y - 3) \cdot 0 = 0, \text{ also } 2(x + 1) = 0 \text{ bzw. } x = -1.$$

Durch diese Gleichung wird die zur y -Achse parallele Gerade durch P_0 beschrieben.

G 27

Durch Auflösen der Klammern in (2) ergibt sich $a_y x - a_x y - a_y x_0 + a_x y_0 = 0$. Ersetzen wir in dieser Gleichung zur Verkürzung a_y durch a , $-a_x$ durch b und $(-a_y x_0 + a_x y_0)$ durch d , so erhält man die **allgemeine parameterfreie Gleichung einer Geraden in der Ebene**: $ax + by + d = 0$. (3)

Aufgrund der Voraussetzung $\vec{a} \neq \vec{0}$ dürfen in dieser Gleichung a und b nicht gleichzeitig 0 werden (d.h., es muss $a^2 + b^2 > 0$ gelten). Außerdem kann man aus (3) sofort einen Richtungsvektor der Geraden, nämlich $\vec{a} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ablesen.

G 16

Satz G 16: Richtungsvektor einer Geraden der Ebene

Hat eine Gerade g der Ebene die allgemeine parameterfreie Gleichung $ax + by + d = 0$, so ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g .

G 28

Beispiel G 28:

Es seien g_1 , g_2 und g_3 drei Geraden in der Ebene, die durch den Punkt $P_0(3; 5)$ gehen und durch die Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt sind (Fig. G 69). Für g_1 erhält man mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $1 \cdot x + 2 \cdot y + d = 0$, in der d noch zu bestimmen ist. Da $P_0(3; 5)$ diese Gleichung erfüllen muss, gilt $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + d = 0$, woraus $d = -13$ folgt. Damit ist $x + 2y - 13 = 0$ die gesuchte Gleichung von g_1 .

Analog gilt für g_2 : $3 \cdot x + 0 \cdot y + d = 0$; mit $P_0(3; 5)$ erhält man $3 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + d = 0$, also $d = -9$. Somit ist $3x - 9 = 0$ bzw. $x = 3$ die gesuchte Gleichung von g_2 .

Für g_3 ergibt sich $0 \cdot x - 2 \cdot y + d = 0$. Mit $P_0(3; 5)$ folgt $-2 \cdot 5 + 10 = 0$ bzw. $y = 5$ als Gleichung von g_3 .

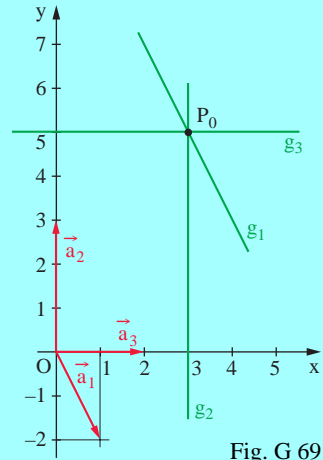


Fig. G 69

Für $b \neq 0$ lässt sich (3) auch nach y umstellen. Man erhält $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{d}{b}$. (4)

Diese Gleichung ist in der Form $y = mx + n$ bereits bekannt.

Werden die obigen Ersetzungen rückgängig gemacht, so ist

$$m = \frac{a_y}{a_x} \quad \text{und} \quad n = -\frac{-a_y x_0 + a_x y_0}{-a_x} = y_0 - \frac{a_y}{a_x} \cdot x_0.$$

Dabei geht die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0; y_0)$ und hat den

Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, der wegen $b \neq 0$ (d.h. $a_x \neq 0$) nicht parallel zur y -Achse verläuft (vgl. auch Fig. G 70).

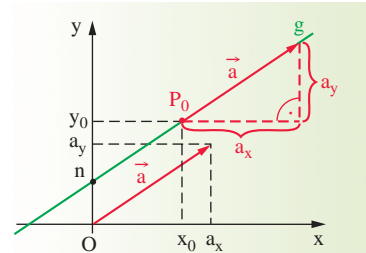


Fig. G 70

G 29

Beispiel G 29:

Gegeben ist eine Gerade g in der Ebene durch die Gleichung $y = 2x + 3$. Gesucht ist eine Parametergleichung dieser Geraden.

Aus $y = 2x + 3$ erhält man $2x - 1y + 3 = 0$, woraus nach Satz G 16 ein Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von g abgelesen werden kann. Außerdem ist z.B. $S(0; 3)$ ein Punkt von g , womit sich $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Parametergleichung von g ergibt.

Die Betrachtungen zu parameterfreien Geradengleichungen gelten nur für Geraden in der Ebene. Für Geraden im Raum lässt sich keine parameterfreie Gleichung angeben. Hier sind wir auf das Arbeiten mit Gleichungen in Vektorschreibweise angewiesen.

G 2.2 Zweipunktgleichung einer Geraden

Es soll nun die Gleichung einer durch zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 in der Ebene bzw. im Raum gegebenen Geraden g ermittelt werden (Fig. G 71 bzw. Fig. G 72).

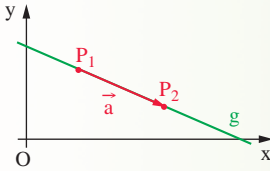


Fig. G 71

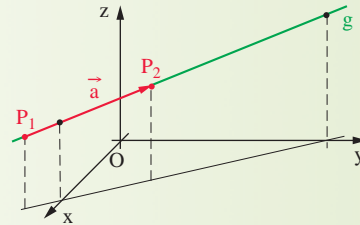


Fig. G 72

Weil durch $\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ ein **Richtungsvektor** dieser Geraden g bestimmt ist, lässt sich die Gleichung von g nach Satz G 14 notieren. Man erhält $\vec{x} = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$, ($t \in \mathbb{R}$).

In dieser Gleichung bezeichnen \vec{p}_1 bzw. \vec{p}_2 die Ortsvektoren von P_1 bzw. P_2 und \vec{x} den Ortsvektor eines beliebigen Punktes X von g . Es gilt

Satz G 17: Zweipunktgleichung einer Geraden in Parameterform

Die Gerade g , die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ($P_1 \neq P_2$) mit den Ortsvektoren \vec{p}_1 und \vec{p}_2 bestimmt ist, kann durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ ($t \in \mathbb{R}$) beschrieben werden.

G 17

Beispiel G 30:

In Fig. G 73 ist ein Quader mit den Kantenlängen 3, 2 und 5 bezüglich eines Koordinatensystems dargestellt. Es ist die Gleichung der in diesem Bild markierten Diagonalen zu ermitteln.

Die Diagonale verläuft durch die zwei Punkte $P_1(3; 2; 0)$ und $P_2(0; 0; 5)$. Damit gilt für die Gleichung der Diagonalen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \text{ also } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

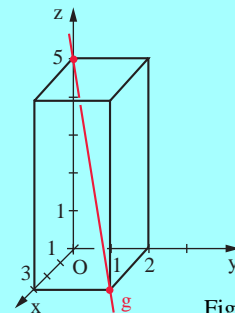


Fig. G 73

G 30

Wie bei den Betrachtungen in G 2.1 zur Punkttrichtungs-gleichung einer Geraden soll nun für eine durch zwei Punkte gegebene Gerade eine **parameterfreie Gleichung in Koordinatenschreibweise** hergeleitet werden. Auch hier ist dies allerdings nur für eine Gerade in der Ebene möglich.

Eine Gerade g in der Ebene verlaufe also durch die beiden voneinander verschiedenen Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ (Fig. G 74).

Dann ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right]$ die Zweipunktgleichung

von g . Durch Umformungen erhält man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$, woraus folgt:

$$(I) \quad x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$(II) \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

bzw.

$$(I) \quad x - x_1 = t(x_2 - x_1)$$

$$(II) \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1)$$

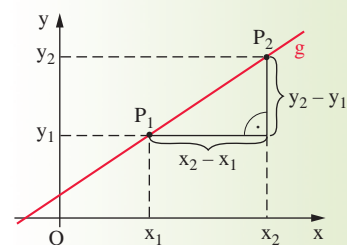


Fig. G 74

Multipliziert man (I) mit $(y_2 - y_1)$ sowie (II) mit $-(x_2 - x_1)$ und addiert anschließend die beiden neuen Gleichungen, so ergibt sich mit $(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$ eine parameterfreie Gleichung der Geraden g.

G 18

Satz G 18: Parameterfreie Zweipunktgleichung einer Geraden in der Ebene

Die Gerade g der Ebene, die durch die zwei verschiedenen Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ bestimmt ist, lässt sich durch die parameterfreie Gleichung

$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$ beschreiben. Diese Gleichung nimmt für $x_2 - x_1 \neq 0$ die Form $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ an. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist dabei der Anstieg der Geraden g.

Eine besondere Form der parameterfreien Zweipunktgleichung einer Geraden g in der Ebene erhält man, wenn man die Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen zugrunde legt (Fig. G 75). Schneidet die Gerade g die x-Achse im Punkt $S_x(s_x; 0)$, $s_x \neq 0$, und die y-Achse in $S_y(0; s_y)$, $s_y \neq 0$, so ist $(x - s_x)(s_y - 0) - (y - 0)(0 - s_y) = 0$, also $(x - s_x)s_y + y s_x = 0$ die Gleichung der Geraden g.

Dividiert man diese Gleichung durch $s_x \cdot s_y$, so ergibt sich schließlich

$$\frac{x}{s_x} - 1 + \frac{y}{s_y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} = 1.$$

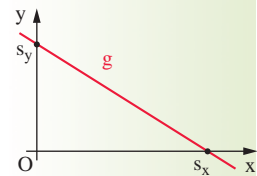


Fig. G 75

G 19

Satz G 19: Achsenabschnittsgleichung einer Geraden in der Ebene

In der Ebene ist $\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} = 1$ ($s_x \neq 0$ und $s_y \neq 0$) die Achsenabschnittsgleichung einer Geraden mit den Achsenschnittpunkten $S_x(s_x; 0)$ und $S_y(0; s_y)$.

G 31

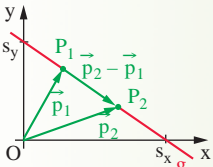
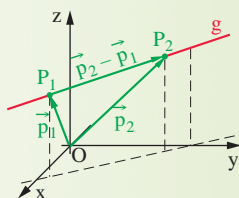
Beispiel G 31:

Gegeben sei eine Gerade g, die die x-Achse bei $s_x = 3$ und die y-Achse bei $s_y = -4$ schneidet (vgl. Fig. G 75). Dann ist $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ eine Gleichung von g.

Eine Umformung liefert $4x - 3y = 12$ bzw. $y = \frac{4}{3}x - 4$.

In der folgenden Tabelle fassen wir die **verschiedenen analytischen Beschreibungsmöglichkeiten** einer Geraden noch einmal zusammen.

		in der Ebene	im Raum
Punktrichtungsgleichung	Bild	<p>Das Diagramm zeigt ein zweidimensionales Koordinatensystem mit der x-Achse und der y-Achse. Eine rote Gerade g verläuft durch den ersten Quadranten. Ein Punkt P_0 liegt auf der Geraden. Ein Vektor \vec{a} zeigt von P_0 in die Richtung der Geraden. Der Ursprung ist mit O bezeichnet.</p>	<p>Das Diagramm zeigt ein dreidimensionales Koordinatensystem mit der x-Achse, der y-Achse und der z-Achse. Eine rote Gerade g verläuft durch den ersten Oktanten. Ein Punkt P_0 liegt auf der Geraden. Ein Vektor \vec{a} zeigt von P_0 in die Richtung der Geraden. Der Ursprung ist mit O bezeichnet.</p>
		$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

		in der Ebene	im Raum
Punktrichungsgl.	Vektorschreibweise	$\vec{x} = \vec{p}_0 + t \vec{a}, t \in \mathbb{R}$	
	Koordinatenschreibweise	$y = m \cdot x + n \quad m = \frac{a_y}{a_x}, a_x \neq 0$ $n = y_0 - \frac{a_y}{a_x} \cdot x_0$ $a \cdot x + b \cdot y + d = 0$ $a = a_y, b = -a_x, d = a_x y_0 - a_y x_0$	Beschreibung mit einer Gleichung ist nicht möglich.
Zweipunktgleichung	Bild	$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 	$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 
	Vektorschreibweise	$\vec{x} = \vec{p}_1 + t(\vec{p}_2 - \vec{p}_1), t \in \mathbb{R}$	
	Koordinatenschreibweise	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1), x_1 \neq x_2$ $\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} = 1 \quad s_x \neq 0, s_y \neq 0$	Beschreibung mit einer Gleichung ist nicht möglich.

G 2.3 Lagebeziehungen von Geraden

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse über mögliche Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene sollen nun unter Verwendung der Aussagen in den Abschnitten G 2.1 und G 2.2 weiter fundiert und vor allem auch auf Geraden des Raumes ausgedehnt werden. Wir machen uns dabei die Charakterisierung des Verlaufes einer Geraden mithilfe eines Richtungsvektors zu Nutze.

Definition G 15: Parallelität von Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 der Ebene oder des Raumes heißen genau dann **parallel zueinander**, wenn die zugehörigen Richtungsvektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 linear abhängig (also parallel) sind.

G 15

Diese Definition schließt ein, dass auch *zwei zusammenfallende Geraden* parallel zueinander sind. Für den Fall, dass die Richtungsvektoren zweier Geraden linear unabhängig und die Geraden dann also nicht parallel zueinander sind, werden wir anschließend eine weitere Unterteilung insbesondere für Geraden im Raum vornehmen.

Beispiel G 32:

Es ist die **Lagebeziehung der beiden Geraden** g_1 und g_2 zu untersuchen, die durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{gegeben sind.}$$

Die Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind wegen $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$ **linear abhängig**, woraus

G 32

nach Definition G 15 die Parallelität von g_1 und g_2 folgt.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob die beiden Geraden zusammenfallen. Dazu überprüfen wir, ob ein Punkt von g_1 , etwa $P_0 = (1; 1; 0)$, auch ein Punkt von g_2 ist („Punktprobe“).

Wäre dies der Fall, so müsste es eine reelle Zahl t_0 geben, so dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

Aus dieser Beziehung ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und der Unbekannten t_0 :

$$(I) \quad 1 = 1 + 4t_0$$

$$(II) \quad 1 = 2 - 2t_0$$

$$(III) \quad 0 = 2 + 2t_0$$

Aus Gleichung (I) erhält man $t_0 = 0$. Dieser Wert erfüllt aber nicht die beiden anderen Gleichungen, so dass das gegebene Gleichungssystem keine Lösung hat. Folglich liegt der Punkt P_0 von g_1 nicht auf g_2 und die beiden Geraden fallen nicht zusammen.

Betrachtet man dagegen die beiden Geraden h_1 und h_2 der Ebene, die durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben sind, so lässt sich feststellen, dass die zugehörigen Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **linear unabhängig** und die beiden Geraden daher nicht parallel sind. Weil es sich bei h_1 und h_2 um Geraden in der Ebene handelt, folgt sofort, dass beide Geraden einander in einem Punkt schneiden müssen.

Zur Veranschaulichung der Parallelität von zwei Geraden betrachten wir den in Fig. G 76 dargestellten Pyramidenstumpf. Es gilt hier $g \parallel h$ und $h \parallel u$. Man erkennt, dass dann auch $g \parallel u$ sein muss (die Parallelität ist in der Menge der Geraden eine transitive Relation).

Im Beispiel G 32 wurde bereits darauf aufmerksam gemacht, dass zwei nicht parallele Geraden der Ebene einander in genau einem Punkt schneiden. Diese Situation ist für zwei Geraden im Raum etwas anders. Fig. G 77 zeigt anhand der Kanten eines Pyramidenstumpfs wieder verschiedene nichtparallele Geraden. So haben g und h keinen gemeinsamen Punkt, sie schneiden einander also nicht, obwohl beide Geraden nicht parallel zueinander sind. Man sagt, dass g und h *windschief zueinander* sind. Dagegen besitzen aber die beiden Geraden g und u , die ebenfalls nicht parallel zueinander sind, einen gemeinsamen Punkt S , einen Schnittpunkt.

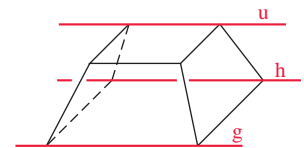


Fig. G 76

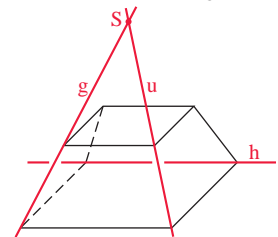
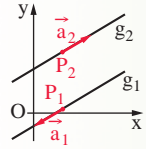
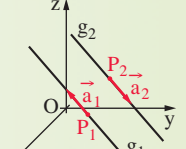
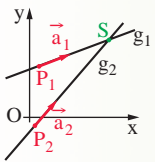
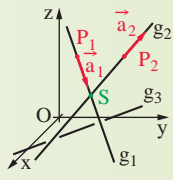


Fig. G 77

In der folgenden Tabelle sind die **Lagemöglichkeiten von zwei Geraden** g_1 und g_2 zusammengestellt:

g_1, g_2	in der Ebene	im Raum
Richtungsvektoren sind linear abhängig	 <p>g_1 und g_2 sind parallel zueinander.</p> <p>$g_1 \parallel g_2$</p>	 <p>$g_1 \parallel g_2$</p>

g_1, g_2	in der Ebene	im Raum
Richtungsvektoren sind linear unabhängig	 <p>g_1 und g_2 schneiden einander in genau einem Punkt.</p> <p>$g_1 \cap g_2 = \{S\}$</p>	 <ul style="list-style-type: none"> g_1 und g_2 schneiden einander in genau einem Punkt. $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ g_1 und g_3 sind windschief zueinander. $g_1 \cap g_3 = \emptyset$ mit $g_1 \nparallel g_3$

Natürlich lässt sich die Lagebeziehung von zwei Geraden in der Ebene auch dann ermitteln, wenn die beiden Geraden durch parameterfreie Gleichungen gegeben sind. Es ist dazu nicht notwendig, diese Gleichungen in Parameterschreibweise umzuformen. Sind etwa die beiden Geraden gegeben durch $g_1: y = m_1 x + n_1$ und $g_2: y = m_2 x + n_2$, so gilt $g_1 \parallel g_2$ genau dann, wenn die beiden Anstiege m_1 und m_2 übereinstimmen ($m_1 = m_2$). Ist darüber hinaus noch $n_1 = n_2$, so fallen diese beiden Geraden zusammen.

Beispiel G 33:

Für je zwei der vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 mit

$$g_1: y = 2x - 1, \quad g_2: y = \frac{1}{3}x - 1, \quad g_3: 3x + y - 9 = 0, \quad g_4: 3x + y + 1 = 0$$

ist die gegenseitige Lage zu untersuchen und das erhaltene Resultat durch Darstellung der Geraden in einem gemeinsamen Koordinatensystem zu überprüfen.

Wir notieren zunächst die Gleichungen von g_3 und g_4 in expliziter Form, um die **Anstiege** m_1, \dots, m_4 besser vergleichen zu können:

$$g_3: y = -3x + 9, \quad g_4: y = -3x - 1.$$

Es kann festgestellt werden:

- Wegen $m_1 \neq m_2, m_1 \neq m_3, m_1 \neq m_4, m_2 \neq m_3$ und $m_2 \neq m_4$ schneiden die jeweils zugehörigen zwei Geraden einander.
- Allein die Geraden g_3 und g_4 sind wegen $m_3 = m_4$ und $n_3 \neq n_4$ ($n_3 = 9$ und $n_4 = -1$) „echt“ parallel zueinander.

Fig. G 78 bestätigt noch einmal die rechnerisch ermittelten Lagebeziehungen.

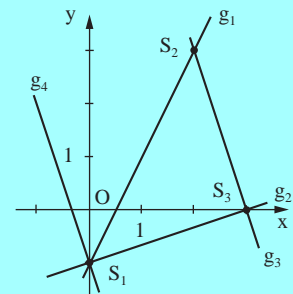


Fig. G 78

G 33

G 2.4 Schnittpunkte von zwei Geraden

Das folgende Beispiel zeigt exemplarisch die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden, wenn diese durch ihre *parameterfreien Gleichungen* gegeben sind.

Beispiel G 34:

Zwei Geraden g_1 und g_2 seien durch Gleichungen

$$g_1: 3x - y - 2 = 0 \quad \text{und} \quad g_2: 2x + y - 8 = 0 \quad \text{gegeben.}$$

Wenn ein Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$ von g_1 und g_2 existiert, so muss sowohl $3x_s - y_s = 2$ als auch

$$2x_s + y_s = 8 \quad \text{gelten. Es ist also das Gleichungssystem} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x_s - y_s = 2 \\ \text{(II)} & 2x_s + y_s = 8 \end{array} \quad \text{zu lösen.}^{1)}$$

G 34

¹⁾ Zur Vereinfachung verzichten wir nachfolgend bei derartigen Aufgaben i. Allg. auf eine Indizierung.

Addieren wir beispielsweise die beiden Gleichungen, so erhalten wir $5x_s = 10$, damit $x_s = 2$ und durch Einsetzen dann $y_s = 4$.

Das Gleichungssystem hat also die Lösung $x_s = 2$ und $y_s = 4$, d. h. (geometrisch interpretiert), die Geraden g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt $S(2; 4)$.

Wenn die Gleichungen zweier Geraden in *vektorieller Form* gegeben sind, so geht man bei der Untersuchung der Lagebeziehungen und speziell der Schnittpunktsbestimmung in folgender Weise vor:

G 35

Beispiel G 35:

Es ist die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2 zu untersuchen, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\text{a) } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zu a): $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren von g_1 bzw. g_2 . Weil die Gleichung

$\vec{a}_1 = r \vec{a}_2$ keine Lösung für r besitzt, sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2 **linear unabhängig**, d. h., g_1 und g_2 sind nicht parallel zueinander. Folglich können diese beiden Geraden einander schneiden oder windschief zueinander sein. Nehmen wir an, dass g_1 und g_2 einen gemeinsamen Punkt, also einen Schnittpunkt S besitzen. Bezeichnet man dann den Ortsvektor zum Punkt S mit \vec{x}_s , so muss es in den Gleichungen von g_1 und g_2 eine reelle Zahl t_1 bzw. t_2 so geben, dass

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ist. Dann folgt aber}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{woraus man durch Koordinatenvergleich erhält:}$$

$$\begin{array}{ll} -2t_1 - 5t_2 = 1 & \text{Dieses Gleichungssystem besitzt die } \textit{eindeutig bestimmte} \text{ Lösung } t_1 = 2 \\ 1,5t_1 - 3t_2 = 6 & \text{und } t_2 = -1, \text{ d. h.: Es gibt genau einen gemeinsamen Punkt } S \text{ von } g_1 \text{ und} \\ 1t_1 + 1t_2 = 1 & g_2. \text{ Die Koordinaten dieses Schnittpunktes } S \text{ lassen sich z. B. mit } t_1 = 2 \\ & \text{aus der Gleichung für } g_1 \text{ bestimmen. Wir erhalten } S(-2; 2; 3). \end{array}$$

Zu b): Auch in diesem Falle verlaufen die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel zueinander, da die

zugehörigen Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **linear unabhängig** sind.

$$\begin{array}{ll} 2t_1 + 2t_2 = -1 & \text{Bei gleichem Vorgehen wie im Fall a) erhalten wir das nebenstehende} \\ 1,5t_1 - 4t_2 = 6 & \text{Gleichungssystem, das } \textit{keine Lösung} \text{ besitzt. Das heißt: } g_1 \text{ und } g_2 \text{ haben} \\ 1t_1 + 1t_2 = 2 & \text{keinen gemeinsamen Punkt – sie sind windschief zueinander.} \end{array}$$

Zu c): Weil $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Gleichung $\vec{a}_1 = -\frac{1}{2} \vec{a}_2$ erfüllen, sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2

linear abhängig und folglich g_1 und g_2 parallel zueinander. Es ist noch zu untersuchen, ob g_1 und g_2 ggf. zusammenfallen. Dazu nehmen wir auch hier an, dass die beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen. Wir erhalten damit das nachfolgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} 2t_1 + 4t_2 = -1 & \text{Da dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt, haben } g_1 \text{ und } g_2 \text{ kei-} \\ 1,5t_1 + 3t_2 = 6 & \text{nen Punkt gemeinsam. Die beiden Geraden sind also „echt“ parallel} \\ 1t_1 + 2t_2 = 2. & \text{zueinander.} \end{array}$$

Beispiel G 36:

Gegeben ist im Raum eine Gerade g durch den Punkt $P_0(1; 2; 3)$ und mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Es ist die Lage der senkrechten Projektion g' von g in die xy -Ebene bezüglich der Achsen des Koordinatensystems zu untersuchen.

Die Gerade g hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

g' ist durch den Punkt $P'(1; 2; 0)$ und den Richtungsvektor

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt (Fig. G 79).

Damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Gleichung von g' .

Es wird nun die Lage von g' bezüglich der Achsen des Koordinatensystems untersucht:

Um die Lage von g' bezüglich der x -Achse zu ermitteln, ist die

Gleichung $t_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Unbekannten t_x und t_1 zu untersuchen.

Dies führt zu dem Gleichungssystem

- (I) $1 \cdot t_x - 1 \cdot t_1 = 1$, Aus (II) folgt $t_1 = -2$ und damit aus (I) $t_x = -1$. Weil (III) eine wahre Aussage ist, schneidet g' die x -Achse. Der Schnittpunkt ist $S_x(-1; 0; 0)$.
 (II) $0 \cdot t_x - 1 \cdot t_1 = 2$,
 (III) $0 \cdot t_x - 0 \cdot t_1 = 0$

Für die Lageermittlung bezüglich der y -Achse ist die Gleichung $t_y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den

Unbekannten t_y und t_2 zu untersuchen. Auch in diesem Fall erhält man eine eindeutig bestimmte Lösung: $t_y = 1$, $t_2 = -1$. Damit ist $S_y(0; 1; 0)$ der Schnittpunkt von g' und der y -Achse.

Bezüglich der z -Achse ist die Gleichung $t_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Unbekannten t_z und t_3 zu

untersuchen. Diese Gleichung hat keine Lösung für t_z und t_3 , also schneidet g' nicht die z -Achse. Weil g' auch nicht parallel zur z -Achse ist, sind g' und die z -Achse zwei windschiefe Geraden.

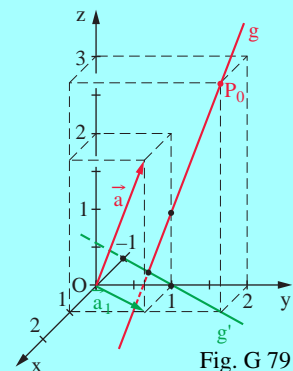


Fig. G 79

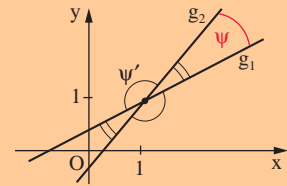
G 2.5 Schnittwinkel von zwei Geraden in der Ebene

G 16

Definition G 16:

Schneiden zwei Geraden g_1 und g_2 einander in einem Punkt S , so entstehen zwei Paare jeweils kongruenter Scheitelwinkel ψ bzw. ψ' (Fig. G 80). Der kleinere der beiden Winkel heißt **Schnittwinkel** von g_1 und g_2 .

Fig. G 80



Die analytische Bestimmung des Schnittwinkels zweier Geraden der Ebene führen wir hier vorerst nur für Geraden durch, die durch parameterfreie Gleichungen gegeben sind. Auf die Bestimmung des Schnittwinkels von Geraden, die durch vektorielle Gleichungen beschrieben sind, und dann auch auf Schnittwinkel von Geraden im Raum wird im Abschnitt G 6.2 eingegangen.

Sind also g_1 und g_2 zwei Geraden der Ebene, so kann ihr Schnittwinkel – nachfolgend mit ψ bezeichnet – höchstens 90° betragen, nämlich dann, wenn $g_1 \perp g_2$. Solche Geraden g_1 und g_2 heißen auch orthogonal. Es ist also stets $\psi \leq 90^\circ$.

Wir betrachten zunächst zwei Geraden g_1 und g_2 , die einander im Punkt S unter einem rechten Winkel schneiden. Liegt dabei eine der Geraden parallel zur y -Achse und dann folglich die zu ihr senkrechte Gerade parallel zur x -Achse (oder umgekehrt), so ist dies auch sofort aus den Gleichungen ablesbar ($g_1: x = a$, $g_2: y = b$). Bei allen anderen Lagen von orthogonalen Geraden g_1 und g_2 können wir für die Untersuchung somit von Gleichungen der Form $g_1: y = m_1x + n_1$ und $g_2: y = m_2x + n_2$ ausgehen, in denen $m_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$ ist.

Die Geraden g_1 und g_2 schneiden in einem solchen Fall beide die x -Achse und das in Fig. G 81 eingezeichnete Dreieck ABS zeigt, dass zwischen den Winkeln α_1 und α_2 und damit wegen $m_1 = \tan \alpha_1$ und $m_2 = \tan \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \neq 0^\circ$) auch zwischen den Anstiegen m_1 und m_2 ein Zusammenhang besteht.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABS ergibt sich

$$\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2) = 90^\circ \quad \text{bzw.} \quad \alpha_1 = \alpha_2 - 90^\circ \quad \text{und damit}$$

$$\tan \alpha_1 = \tan(\alpha_2 - 90^\circ) = -\tan(90^\circ - \alpha_2).$$

Da $-\tan(90^\circ - \alpha_2) = -\frac{\sin(90^\circ - \alpha_2)}{\cos(90^\circ - \alpha_2)} = -\frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{1}{\tan \alpha_2}$ („Formeln und Tabellen“, S. 35), erhalten

$$\text{wir } m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{bzw.} \quad m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Aus $g_1 \perp g_2$ mit den oben angegebenen Gleichungen folgt also $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Da sich die Schlüsse zum eben abgeleiteten Satz einzeln umkehren lassen, ergibt sich aus $m_1 \cdot m_2 = -1$ auch die Beziehung $g_1 \perp g_2$.

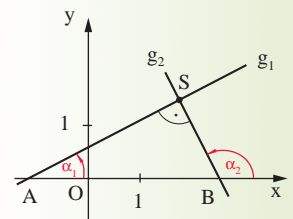


Fig. G 81

G 20

Satz G 20: Orthogonalität von Geraden der Ebene

Für Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ ($m_1, m_2 \neq 0$) gilt $g_1 \perp g_2$ genau dann, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Beispiel G 37:

Gegeben seien Geraden g_1, g_2, g_3 mit den Gleichungen

$$g_1: y = 3x - 12, \quad g_2: y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, \quad g_3: y = 3x - 2.$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Anstiege m_1, m_2 und m_3 unmittelbar entnehmen und auf diese Weise sofort paarweise besondere Lagebeziehungen zwischen den Geraden feststellen.

- g_1 und g_2 sind orthogonal, da $m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1$.
- g_1 und g_3 sind parallel, da $m_1 = m_3$ gilt.
- g_2 und g_3 sind orthogonal. Dies folgt sowohl geometrisch begründet aus den in a) und b) ermittelten Beziehungen als auch analytisch aus $m_2 \cdot m_3 = -1$.

Fig. G 82 veranschaulicht obige Aussagen.

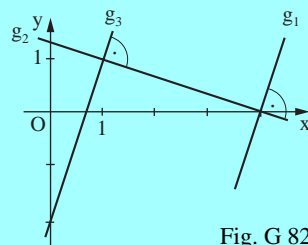


Fig. G 82

G 37

Die Größe des *Schnittwinkels* ψ zweier Geraden g_1 und g_2 (Definition G 16) kann man mithilfe der Anstiege m_1 und m_2 bzw. der Anstiegswinkel α_1 und α_2 berechnen. Wie Fig. G 83 zeigt, ist

$$\psi = |\alpha_2 - \alpha_1| \text{ für } |\alpha_2 - \alpha_1| \leq 90^\circ \quad \text{bzw.} \quad \psi = 180^\circ - |\alpha_2 - \alpha_1| \text{ für } |\alpha_2 - \alpha_1| > 90^\circ.$$

Mithilfe eines Additionstheorems

($\tan \psi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$; „Formeln und Tabellen“, S. 35) lässt sich eine Formel gewinnen, die die Berechnung der Größe des Schnittwinkels zweier Geraden unmittelbar aus deren Anstiegen gestattet:

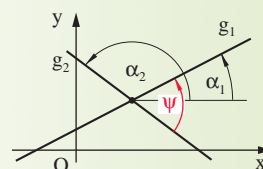
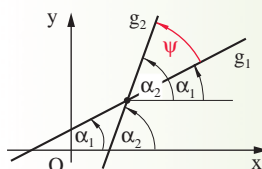


Fig. G 83

Satz G 21: **Schnittwinkel von Geraden der Ebene**

Ist ψ der Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ ($m_1 \neq m_2, m_1 \cdot m_2 \neq -1$), so gilt $\tan \psi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$.

G 21

Beispiel G 38:

Man berechne den Schnittwinkel ψ der Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen

$$g_1: y = 0,5x - 11 \quad \text{und} \quad g_2: 4y + 3x + 2 = 0.$$

Es gilt: $m_1 = 0,5$ sowie $m_2 = -\frac{3}{4}$ (wegen $g_2: y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$). Daraus folgt nach Satz G 21:

$$\tan \psi = \left| \frac{-\frac{3}{4} - 0,5}{1 + 0,5 \cdot (-\frac{3}{4})} \right| = \left| \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} \right| = 5, \text{ also } \psi \approx 63,4^\circ.$$

Die entsprechende Rechnung sieht auf dem Schirm des GTA (sofern vorher auf Winkelangabe in Grad umgestellt wurde) wie im Fig. G 84 aus. Wenn eine größere Anzahl von Schnittwinkelberechnungen durchgeführt werden soll, kann es u. U. nützlich sein, die Formel einzuspeichern, so dass dann nur noch die Werte für m_1 und m_2 einzugeben sind (Fig. G 85).

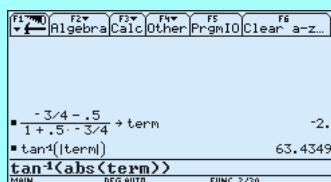


Fig. G 84

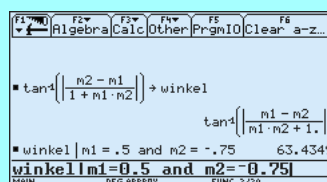


Fig. G 85

G 38

G 3 Lineare Gleichungssysteme

G 3.1 Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen; GAUSSsches Eliminierungsverfahren

Beim Lösen vieler praktischer Probleme sind Zahlen zu bestimmen, die gleichzeitig mehreren linearen Gleichungen, also einem System solcher Gleichungen genügen. Sowohl diese unmittelbaren Anwendungsmöglichkeiten als auch die grundlegende Bedeutung linearer Gleichungssysteme für die Entwicklung der so vielschichtig nützlichen *linearen Algebra* veranlassen zur Systematisierung und Erweiterung der bisher erworbenen Erkenntnisse über solche Gleichungssysteme und deren Lösungen.

Bereits in den Abschnitten G 1 und G 2 wurden als Ergänzung des traditionellen Vorgehens GTA-Schirmbilder mit der Lösung eines linearen Gleichungssystems betrachtet. Es wurden dort gleichsam „Listen“ von Vektoren verarbeitet, die als Gleichungssysteme zu interpretieren waren. Die bisherige, aus einer Mischung von Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren bestehende Arbeitsweise soll nachfolgend durch die Behandlung des für mathematisches Arbeiten und für strukturelles Verständnis sehr wichtigen **GAUSSschen Eliminierungsverfahrens** auf die Stufe eines *Algorithmus für das Lösen linearer Gleichungssysteme* gehoben werden. Dabei werden in stärkerem Maße auch ergänzende Einblicke in den Gebrauch des GTA möglich.

Die Grundgedanken des GAUSSschen Algorithmus kann man sich anhand der Arbeitsschritte beim Lösen konkreter Gleichungssysteme mit zwei oder drei Variablen verdeutlichen. Das folgende einfache Beispiel betont das für den GAUSSschen Algorithmus wichtige *Additionsverfahren*:

G 39

Beispiel G 39:

Das lineare Gleichungssystem

$$(I) \quad 3x + y = 9$$

$$(II) \quad x - 2y = -4$$

lösen wir mithilfe des Additionsverfahrens.

Wir multiplizieren die Gleichung (II) mit -3 und addieren dazu die Gleichung (I):

$$\begin{array}{rcl} (I) & 3x + y = 9 & \\ (II) & x - 2y = -4 & \cdot (-3) \end{array} \quad \downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} (I) & 3x + y = 9 & \\ (II') & 7y = 21 & (y = 3) \end{array}$$

Das Einsetzen von $y = 3$ in (I) ergibt $x = 2$; die Lösung des linearen Gleichungssystems ist das Zahlenpaar $(x; y) = (2; 3)$.¹⁾

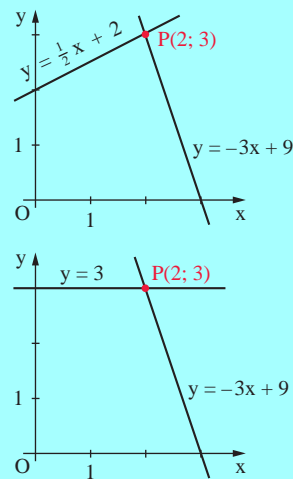


Fig. G 86

Betrachtet man das obige Vorgehen, so lässt sich feststellen: Das Ausgangssystem (I)/(II) wurde in ein System (I)/(II') umgeformt, indem man

- Gleichung (I) erneut notierte,
- aus Gleichung (II) durch Umformung Gleichung (II') gewann.

¹⁾ Eine Lösung eines Gleichungssystems mit 3 bzw. n Variablen besteht aus 3 bzw. n Zahlen, die jede Gleichung des Systems erfüllen. Wir schreiben dafür $(x; y; z)$ bzw. $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ und nennen dies ein *Tripel* bzw. *n-Tupel* von Zahlen.

Mit den Gleichungen (I) und (II') liegt ein *neues Gleichungssystem* vor, welches die *gleiche Lösung (Lösungsmenge)* wie das Ausgangssystem hat (vgl. auch die beiden Darstellungen in Fig. G 86). Es handelt sich bei dem beschriebenen Schritt also um eine *äquivalente Umformung (Äquivalenzumformung)* eines gesamten Gleichungssystems, hier des Ausgangssystems.

Definition G 17:

Zwei lineare Gleichungssysteme mit den gleichen Variablen sind genau dann **äquivalent**, wenn sie beide die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Im Sonderfall können also auch beide *nicht lösbar* sein, d. h., die leere Menge von Variablenbelegungen als Lösungsmenge haben.

G 17

Beispiel G 40:

Wir versuchen, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2x + 3y - z = 1 \\ \text{(II)} & x + 3y + z = 2 \\ \text{(III)} & -2x - 2y + 4z = 4 \end{array} \quad (1)$$

durch Äquivalenzumformungen in ein System der Form (falls möglich)

$$\begin{array}{lll} x & = c_1 & \text{bzw.} \quad 1x + 0y + 0z = c_1 \\ y & = c_2 & \text{ausführlich} \quad 0x + 1y + 0z = c_2 \\ z & = c_3 & 0x + 0y + 1z = c_3 \end{array} \quad (2)$$

zu bringen.

Für die Umformungen, die von (1) auf (2) führen, nutzen wir im Wesentlichen das Additionsverfahren. Dabei wird von (1) aus *schrittweise* vorgegangen:

1. Schritt: Man eliminiert ab der 2. Gleichung die 1. Variable (hier x) – in unserem Beispiel durch Multiplikation von Gleichung (II) mit (-2) und Addition zu Gleichung (I) (ergibt (II')) sowie durch Addition von (I) zu (III) (ergibt (III'))); die 1. Gleichung wird unverändert notiert.

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 2x + 3y - z = 1 \\ \text{(II)} & x + 3y + z = 2 \\ \text{(III)} & -2x - 2y + 4z = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-2) \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

1. Schritt

2. Schritt: Man schreibt die 1. und 2. Gleichung (also (I) und (II')) unverändert auf und formt die 3. Gleichung mithilfe der zweiten so um, dass die 2. Variable (hier y) nicht mehr vorkommt – in unserem Beispiel durch Multiplikation von Gleichung (III') mit 3 und Addition von (II') (ergibt (III'')).

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 2x + 3y - z = 1 \\ \text{(II')} & -3y - 3z = -3 \\ \text{(III')} & y + 3z = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 3 \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

2. Schritt

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & 2x + 3y - z = 1 \\ \text{(II'')} & -3y - 3z = -3 \\ \text{(III'')} & 6z = 12 \end{array} \quad (3)$$

(III'') hat die Lösung $z = 2$ und damit ergibt sich durch schrittweises Einsetzen $y = -1$ und $x = 3$.

Die Form (3) nennt man *Dreiecksform* des gegebenen linearen Gleichungssystems. Eine weitere Umformung bis zur Darstellung (2) wird in der Regel nicht durchgeführt.

G 40

Das am Gleichungssystem (1) praktizierte Vorgehen heißt **GAUSSsches Eliminierungsverfahren**. Es besteht – wie wir sahen – aus einer Reihe von *Einzelumformungen*, die sich auch für den allgemeinen Fall als *Äquivalenzumformungen* bestätigen lassen:

- a) Eine Gleichung wird mit einer Zahl (verschieden von 0) multipliziert – die restlichen Gleichungen bleiben unverändert.
- b) Zu einer Gleichung wird eine andere addiert *und* diese „andere“ sowie die übrigen Gleichungen werden unverändert übernommen.

Wir ergänzen noch:

- c) Zwei Gleichungen werden vertauscht. (Dies kann zweckmäßig oder auch notwendig sein, wenn z.B. in der 1. Gleichung des Systems die 1. Variable nicht auftritt.)

Geht man von einer angenommenen Lösung eines linearen Gleichungssystems aus und betrachtet ein zweites Gleichungssystem, das nach der Einzelumformung a) oder b) aus dem ersten entstanden ist, so hat das zweite System auch diese Lösung. Ebenso ist in beiden Fällen jede Lösung des zweiten Systems eine Lösung des Ausgangssystems. Es gilt:

G 22

Satz G 22: Äquivalenzumformungen eines linearen Gleichungssystems

Beim Übergang von einem linearen Gleichungssystem zu einem neuen bewirken folgende Operationen Äquivalenzumformungen:

- Vertauschen von zwei Gleichungen;
- Multiplizieren einer Gleichung mit einer von 0 verschiedenen Zahl;
- Addieren einer anderen Gleichung oder eines Vielfachen einer anderen Gleichung zu einer Gleichung.

Dabei ist wesentlich, dass man die „andere Gleichung“ in das neue System übernimmt.

Die Schrittfolge für das Vorgehen beim GAUSSschen Eliminierungsverfahren lässt sich folgendermaßen kurz zusammenfassen:

- (0) Gegebenenfalls Gleichungen neu ordnen (Vertauschen von Gleichungen).
- (1) Gleichung (I) unverändert *übernehmen*.
- (2) Mithilfe von Gleichung (I) die Variable x (1. Variable) in der Gleichung (II) (wird dadurch zu (II')), dann in (III) (wird dadurch zu (III')) usw. *eliminieren*.
- (3) a) (I) und die zuerst umgeformte Gleichung (II') unverändert *übernehmen*.
b) Mithilfe von (II') die 2. Variable (Variable y) ab Gleichung (III') (falls weitere vorhanden sind) *eliminieren*.

Nach Fortführung des Verfahrens ist die Dreiecksform oder eine andere entsprechende Form, wie wir sie in G 3.2 betrachten werden, erreicht. Satz G 22 sichert dabei, dass das nach Anwendung des GAUSSschen Eliminierungsverfahrens am Ende erhaltene System die gleiche Lösungsmenge wie das Ausgangssystem besitzt.

G 41

Beispiel G 41:

Wir lösen das Gleichungssystem aus Beispiel G 22 sowie die beiden Gleichungssysteme aus Beispiel G 18(2) nach dem GAUSSschen Eliminierungsverfahren:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & -3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0 & \cdot 4 \downarrow \\
 \text{(II)} & -4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \cdot (-3) \downarrow \\
 \text{(III)} & x_1 + x_2 + x_3 = 220 & \cdot 3 \downarrow
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & -3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0 \\
 \text{(II')} & -18x_2 + 35x_3 = 0 & (*) \\
 \text{(III')} & 11x_3 = 660
 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung

$$x_3 = 60, x_2 = \frac{35 \cdot 60}{18} = \frac{350}{3} \approx 116,6 \text{ und } -3x_1 = 3 \cdot \frac{350}{3} - 8 \cdot 60 = -130 \text{ bzw. } x_1 = \frac{130}{3} \approx 43,3.$$

Setzt man zum Lösen dieses Systems einen GTA ein und verwendet die **rref**-Funktion, so erhält man nebenstehendes Schirmbild. Das Ergebnis ist ein *Gleichungssystem in Diagonalform*; es ergibt sich aus der Dreiecksform (*) durch Eliminieren der Variablen oberhalb der Diagonalen im Koeffizientenschema (Fortführung des GAUSSschen Algorithmus, rückläufige Eliminierung):

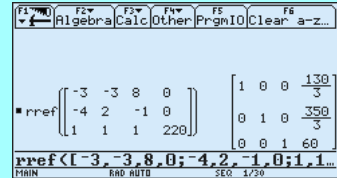


Fig. G 87

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & -3x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0 & \uparrow \\
 \text{(II')} & -18x_2 + 35x_3 = 0 & \uparrow \cdot (-35) \\
 \text{(III'')} & x_3 = 60 & \uparrow \cdot (-8)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 \text{(I')} & -3x_1 - 3x_2 = -480 & \uparrow \\
 \text{(II''')} & 3x_2 = 350 & \uparrow \\
 \text{(III''')} & x_3 = 60
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I'')} & -3x_1 - 3x_2 = -480 \\
 \text{(II'')} & -18x_2 = 60 \cdot (-35) \\
 \text{(III'')} & x_3 = 60
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 \text{(I'')} & -3x_1 = -130 \\
 \text{(II'')} & 3x_2 = 350 \\
 \text{(III'')} & x_3 = 60
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I''')} & x_1 = \frac{130}{3} \\
 \text{(II''')} & x_2 = \frac{350}{3} \\
 \text{(III''')} & x_3 = 60
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(2) (I)} & 2r_1 + 3r_2 - r_3 = 0 & \downarrow \\
 \text{(II)} & r_1 + 3r_2 + r_3 = 0 & \cdot (-2) \downarrow \\
 \text{(III)} & -2r_1 - 2r_2 + 4r_3 = 0 & \downarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & 2r_1 + 3r_2 - r_3 = 0 & \downarrow \\
 \text{(II')} & -3r_2 - 3r_3 = 0 & \downarrow \\
 \text{(III')} & r_2 + 3r_3 = 0 & \cdot 3 \downarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & 2r_1 + 3r_2 - r_3 = 0 \\
 \text{(II')} & -3r_2 - 3r_3 = 0 \\
 \text{(III'')} & 6r_3 = 0
 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat mit $r_3 = r_2 = r_1 = 0$ nur die triviale Lösung; es ist also eindeutig lösbar.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(3) (I)} & 3s_1 + 7s_2 + s_3 = 0 & \cdot (-5) \downarrow \\
 \text{(II)} & s_1 - s_2 + 2s_3 = 0 & \cdot (-3) \downarrow \\
 \text{(III)} & 5s_1 + 7s_2 + 4s_3 = 0 & \cdot 3 \downarrow
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & 3s_1 + 7s_2 + s_3 = 0 \\
 \text{(II'')} & 2s_2 - s_3 = 0 & \cdot (-1) \downarrow \\
 \text{(III'')} & 2s_2 - s_3 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & 3s_1 + 7s_2 + s_3 = 0 \\
 \text{(II')} & 10s_2 - 5s_3 = 0 & :5 \\
 \text{(III')} & -14s_2 + 7s_3 = 0 & :(-7)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 \text{(I)} & 3s_1 + 7s_2 + s_3 = 0 \\
 \text{(II'')} & 2s_2 - s_3 = 0 \\
 \text{(III''')} & 0 = 0
 \end{array}$$

Die am Ende im äquivalent umgeformten Gleichungssystem erhaltene Situation wird im folgenden Abschnitt G 3.2, insbesondere im Beispiel G 42a) näher untersucht.

Sieht man nun in Annäherung an die Darstellung auf einem GTA ein lineares Gleichungssystem lediglich als ein Zahlenschema an, so kann man auf die Tabelle der zugehörigen Koeffizienten und der Absolutglieder den GAUSSschen Algorithmus analog zum oben erarbeiteten Verfahren anwenden:

$$\begin{array}{l}
 3x + y + 2z = 1 \\
 9x - 5y - 3z = 5 \\
 2x - 3y - 2z = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc|ccc}
 x & y & z & & & \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 1 & \cdot (-3) \downarrow & \cdot (-2) \downarrow \\
 9 & -5 & -3 & 5 & & \\
 2 & -3 & -2 & 0 & & \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & -8 & -9 & 2 & \cdot (-11) \downarrow & \\
 & -11 & -10 & -2 & \cdot 8 \downarrow & \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 1 & & \\
 & -8 & -9 & 2 & & \\
 & & 19 & -38 & &
 \end{array}$$

Die letzten drei Zeilen geben das Koeffizientenschema des in Dreiecksform umgeformten Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{llll}
 19z = -38 & \text{bzw.} & z = -2 \\
 -8y - 9z = 2 & \text{d.h., mit } z = -2 \text{ gilt} & y = 2 \\
 3x + y + 2z = 1 & \text{d.h., mit } y = 2, z = -2 \text{ gilt} & x = 1
 \end{array}$$

Diese Auflösung erhält man auch durch Fortführen der Eliminierung bis zur Diagonalform; das Ergebnis ist:

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & -2
 \end{array}$$

In dieser Form gibt auch die **rref**-Funktion des GTA das Ergebnis an.

G 3.2 Lösbarkeit und Lösungsmenge von Gleichungssystemen

Grundsätzliche und allgemeine Aussagen zur Lösbarkeit und zur Lösungsmenge von beliebigen linearen Gleichungssystemen kann man schon durch die Bearbeitung von Gleichungssystemen mit drei Variablen gewinnen.

G 42

Beispiel G 42:

Gegeben seien die folgenden vier linearen Gleichungssysteme mit drei Variablen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) (I)} & x + y - 3z = 1 \\
 & \text{(II)} \quad x + 2y - 5z = -1 \\
 \text{c) (I)} & x - z = 5 \\
 & \text{(II)} \quad x + y = 3 \\
 & \text{(III)} \quad 2x + y - z = 8 \\
 \text{b) (I)} & 2x - 3y + z = 2 \\
 & \text{(II)} \quad 2x - 3y + z = 1 \\
 \text{d) (I)} & 2x + 2y + z = 8 \\
 & \text{(II)} \quad 2x + y = 3 \\
 & \text{(III)} \quad x - y + z = 4 \\
 & \text{(IV)} \quad x + y + z = 6
 \end{array}$$

Diese Gleichungssysteme unterscheiden sich offenbar von den im bisherigen Unterricht betrachteten Gleichungssystemen aus 3 Gleichungen und mit 3 Variablen, welche eindeutig lösbar sind:

- Die Gleichungssysteme a), b) und d) enthalten jeweils drei Variable, bestehen aber aus 2 bzw. 4 Gleichungen.
- Beim Gleichungssystem b) stimmen die linken Seiten der beiden Gleichungen überein, die rechten Seiten aber sind verschieden. Dieser Widerspruch bedeutet, dass das System keine Lösung besitzt, d.h., es existiert kein Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, das beiden Gleichungen genügt.

- Das Gleichungssystem c) besitzt die Besonderheit, dass die Gleichung (III) durch die Addition der Gleichungen (I) und (II) entsteht: Ein Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, welches hier (I) und (II) erfüllt, genügt auch sofort der Gleichung (III). Das Gleichungssystem (I) bis (III) ist also äquivalent zum System, welches nur aus (I) und (II) besteht.

Wir wenden nun das GAUSSsche Eliminierungsverfahren auf jedes der obigen Beispiele an und heben die dabei auftretenden Besonderheiten hervor.

Zu a):

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y - 3z = 1 & \\ \text{(II)} & x + 2y - 5z = -1 & \cdot (-1) \downarrow \end{array} \quad (4) \qquad \begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y - 3z = 1 & \\ \text{(II')} & -y + 2z = 2 & \end{array} \quad (5)$$

Das erhaltene System (5) bezeichnet man als *Trapezform* des linearen Gleichungssystems (4): Die letzte Gleichung (II') hat die Gestalt $-y + 2z = 2$. Im Unterschied zur Dreiecksform des Systems, wo die letzte (dritte) Gleichung die dritte Variable als eine reelle Zahl festlegte (vgl. Gleichung (III')) in Beispiel G 40), bedingt hier in (II') jede reelle Zahl für z eine bestimmte reelle Zahl für y und umgekehrt. Mit jedem Paar $(y; z)$ reeller Zahlen, das der Gleichung (II') genügt, ist dann durch Gleichung (I) ein x -Wert bestimmt. Die Lösungsmenge ist *unendlich*.

Beim GAUSSschen Eliminierungsverfahren werden die drei Variablen in einer bestimmten Reihenfolge behandelt. Wir beginnen deshalb hier damit, dass wir z frei belegen, d.h., der Variablen z wird eine beliebige reelle Zahl zugeordnet. Als Ausdruck dafür, dass diese Variable bei der Angabe der Lösungsmenge des Gleichungssystems ein *freier Parameter* ist, setzt man $z = t$.

Mit $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) ergeben sich damit für die Bestimmung von x und y folgende zu (5) äquivalente Gleichungssysteme.

$$\begin{array}{lcl} x + y & = & 1 + 3t \\ y & = & -2 + 2t \\ z & = & t \end{array} \quad \cdot (-1) \uparrow \qquad \begin{array}{lcl} x & = & 3 + t \\ y & = & -2 + 2t \\ z & = & t \end{array} \qquad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen für das lineare Gleichungssystem (4) sind die Tripel $(3 + t; -2 + 2t; t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Zu b):

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2x - 3y + z = 2 & \\ \text{(II)} & 2x - 3y + z = 1 & \cdot (-1) \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2x - 3y + z = 2 & \\ \text{(II')} & 0 = 1 & \end{array}$$

Das GAUSSsche Eliminierungsverfahren führt mit (II') auf eine falsche Aussage – einen Widerspruch, der ausdrückt, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

zu c):

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x - z = 5 & \cdot (-1) \downarrow \cdot (-2) \downarrow \\ \text{(II)} & x + y = 3 & \\ \text{(III)} & 2x + y - z = 8 & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \text{(I)} & x - z = 5 & \\ \text{(II')} & y + z = -2 & \\ \text{(III')} & y + z = -2 & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} x & = & 5 + t \\ y & = & -2 - t \\ z & = & t \end{array} \qquad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das nach Eliminierung von x erhaltene Gleichungssystem ist äquivalent zu dem nur aus den Gleichungen (I) und (II') bestehenden System. Nach Einführung von $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) als freiem Parameter sind die Tripel $(5 + t; -2 - t; t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems.

zu d):

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2x + 2y + z = & 8 \\ \text{(II)} & 2x + y = & 3 \\ \text{(III)} & x - y + z = & 4 \\ \text{(IV)} & x + y + z = & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-1) \downarrow \\ \cdot(-2) \downarrow \\ \cdot(-2) \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2x + 2y + z = & 8 \\ \text{(II')} & y + z = & 5 \\ \text{(III')} & 4y - z = & 0 \\ \text{(IV')} & -z = & -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-4) \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2x + 2y + z = & 8 \\ \text{(II')} & y + z = & 5 \\ \text{(III'')} & -5z = & -20 \\ \text{(IV')} & -z = & -4 \end{array}$$

Die Gleichungen (III'') und (IV') stimmen überein. Mit den Gleichungen (I), (II') und (III'') liegt ein äquivalentes System in Dreiecksform vor. Die eindeutig bestimmte Lösung ist das Tripel (1; 1; 4).

Ob ein lineares Gleichungssystem lösbar oder nicht lösbar ist, kann in der Regel erst nach einer Rechnung entschieden werden.

G 43

Beispiel G 43:

Wir wenden das GAUSSsche Eliminierungsverfahren auf das folgende Gleichungssystem an.

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y - 2z = & 1 \\ \text{(II)} & x - 2y + z = & 1 \\ \text{(III)} & -2x + y + z = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \downarrow \\ \cdot(-1) \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y - 2z = & 1 \\ \text{(II')} & 3y - 3z = & 0 \\ \text{(III')} & 3y - 3z = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-1) \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & x + y - 2z = & 1 \\ \text{(II')} & 3y - 3z = & 0 \\ \text{(III'')} & 0 = & 3 \end{array}$$

Nach (III'') ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Der Widerspruch ist schon aus den Gleichungen (II') und (III') erkennbar.

Lösung mit GTA:

Fig. G 88

Die letzte Zeile bei Anwendung von **rref** ist $0 \ 0 \ 0 \ 1$ und drückt mit $0 = 1$ (Gleichheitszeichen vor der letzten Zahl) den Widerspruch aus. Übrigens führt in der linken Spalte die Umformungsoperation $3 \cdot \text{(I)} + (-1) \cdot \text{(III')}$ gerade auf die 1. Zeile $1 \ 0 \ -1 \ 0$ in obigem Ergebnis-Zahlenschema.

Durch die bisherigen Überlegungen wurden wir mit Beispielen für (lösbare) lineare Gleichungssysteme bekannt, die genau eine Lösung (Beispiele G 40 und G 42d) bzw. unendlich viele Lösungen besitzen (Beispiele G 42a) und c)). Hier ordnet sich auch ein Gleichungssystem mit 3 Variablen ein, welches nur aus einer Gleichung besteht – zum Beispiel $x + 2y - z = 3$.

Die Gleichung gibt analog zu den Beispielen G 42a) und c) Anlass zur Einführung von *zwei freien Parametern*. Wir setzen $y = r, z = s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ und erhalten als Lösungen die Tripel $(3 - 2r + s; r; s)$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Es sei bemerkt, dass ein Gleichungssystem (mit 3 Variablen) sich nach Anwendung des GAUSS-Verfahrens auf eine Gleichung reduzieren kann (Trapezform).

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

- *Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems*
Führen die Äquivalenzumformungen des GAUSSschen Eliminierungsverfahrens auf eine Trapez- oder Dreiecksform des Systems zu keinem Widerspruch, so ist das System *lösbar*.
Ergibt sich dabei ein Widerspruch (am Ende $0 = b$ mit $b \neq 0$), so ist das Gleichungssystem *nicht lösbar*.
- *Lösungsmengen für lösbare Gleichungssysteme (mit 3 Variablen)*
 - a) Das Gleichungssystem hat *genau eine Lösung* (genau ein Lösungstriplett $(x; y; z)$), falls mithilfe des GAUSSschen Eliminierungsverfahrens eine Dreiecksform erreichbar ist.
 - b) Das Gleichungssystem hat *unendlich viele Lösungen*, falls Äquivalenzumformungen zu einer Trapezform des Systems führen. Für Gleichungssysteme mit 3 Variablen erhält man dann Lösungsmengen (Triplett reeller Zahlen), die mithilfe von einem freien Parameter oder von zwei freien Parametern darstellbar sind.

G 3.3 Determinanten; Regel von CRAMER

Für lineare Gleichungssysteme mit n Variablen und n Gleichungen, die eindeutig lösbar sind, kann man jede einzelne Variable unabhängig von den anderen berechnen. Wir wollen nachfolgend am Beispiel bzw. mit einem allgemeinen Ansatz für Gleichungssysteme mit 2 Variablen eine Regel kennen lernen, die sich auf eindeutig lösbare Systeme mit n Variablen und n Gleichungen ausdehnen lässt.

Beispiel

$$\begin{array}{r|l} 3x_1 - x_2 = 2 & \cdot (-2) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & \cdot 3 \end{array} \downarrow$$

$$5x_2 = 20$$

Allgemeiner Fall

$$\begin{array}{r|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdot (-a_{21}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \cdot a_{11} \end{array} \downarrow$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

Für das Beispiel ergibt sich sofort die Lösung $x_2 = 4$ und $x_1 = 2$. Das allgemein notierte Gleichungssystem, von dem wir $a_{11} \neq 0$ voraussetzen können, ist eindeutig lösbar, falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist.

Dann folgt $x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ und analog $x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$. Man erhält also für x_1 und x_2 jeweils

Darstellungen, die aus dem Koeffizientenschema und den Absolutgliedern des Gleichungssystems

„gut strukturiert“ aufgebaut sind. Die Koeffizienten des Gleichungssystems fassen wir zu dem Koeffizientenschema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ zusammen (s. Abschnitt G 5.4)¹⁾, wobei sie wie im Gleichungssystem angeordnet werden. Die im Nenner von x_1 und x_2 stehende Zahl $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ heißt die **Determinante** des Koeffizientenschemas $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ oder kurz die *Koeffizientendeterminante*. Man schreibt

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{oder auch} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Die Elemente a_{11} und a_{22} stehen auf der so genannten *Hauptdiagonalen*, a_{12} und a_{21} auf der *Nebendiagonalen* des Schemas. Die Determinante eines zweireihigen Koeffizientenschemas berechnet man also, indem man vom Produkt der Hauptdiagonalelemente das Produkt der Nebendiagonalelemente subtrahiert.

¹⁾ Solche Zahlenschemata besitzen eine eigenständige math. Bedeutung und werden *Matrizen* genannt.

Auch die Zähler von x_1 und x_2 können nun als Determinanten notiert werden:

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

In Bezug auf das eingangs genannte Gleichungssystem bezeichnen wir diese beiden Determinanten als *Zählerdeterminanten* von x_1 und x_2 . Man erhält diese, indem man im Koeffizientenschema die erste bzw. zweite Spalte durch die Absolutglieder b_1, b_2 des Gleichungssystems ersetzt und dann die Determinanten bildet.

G 23

Satz G 23: Regel von CRAMER (für zwei Variable)

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$
 ist eindeutig lösbar, falls $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$.

Seine Lösung ist dann $(x_1; x_2)$ mit
$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Also: Will man mithilfe der CRAMERSchen Regel die Lösung $(x_1; x_2)$ für ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen ermitteln, so berechnet man

- (1) die Koeffizientendeterminante,
- (2) die Zählerdeterminanten und
- (3) die Quotienten aus jedem der im 2. Schritt erhaltenen Werte und dem Wert aus Schritt 1.

Diese Quotienten sind dann das Lösungspaar des Gleichungssystems.

Für obiges Beispiel gilt also:

$$\begin{aligned} (1): \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 & (2): \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = 10 & (3): x_1 &= \frac{10}{5} = 2 \\ & & \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 20 & x_2 &= \frac{20}{5} = 4 \end{aligned}$$

Für Gleichungssysteme mit 3 Variablen und 3 Gleichungen geht man analog zum Fall $n = 2$ vor, verwendet hier aber *dreireihige Determinanten*. Es gilt:

G 24

Satz G 24: Regel von CRAMER (für drei Variable)

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$
 ist eindeutig lösbar,

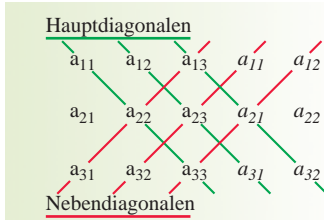
falls $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$. Die Lösung ist dann das Zahlentripel $(x_1; x_2; x_3)$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}, & x_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}, & x_3 &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Für das Lösungstriplet $(x_1; x_2; x_3)$ eines eindeutig lösbaren Gleichungssystems mit 3 Variablen und 3 Gleichungen bildet die *Koeffizientendeterminante* jeweils den Nenner für x_1 , x_2 bzw. x_3 . Die *Zählerdeterminanten* von x_1 , x_2 bzw. x_3 entstehen, indem man die Spalten 1, 2 bzw. 3 des Koeffizientenschemas durch die Spalte der Absolutglieder ersetzt.

Für die Berechnung von dreireihigen Determinanten kann man die Regel von SARRUS anwenden:

- Füge zum Koeffizientenschema¹⁾ die 1. und 2. Spalte jeweils noch einmal rechts dazu!
- Subtrahiere von der Summe der 3 Produkte der Hauptdiagonalelemente die Summe der 3 Produkte der Nebendiagonalelemente!



$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

G 3.4 Praktische Anwendungen

Beispiel G 44:

- a) In einem Unternehmen wird eine Kupferlegierung L benötigt, die 85 % Kupfer, 10 % Zink und 5 % Zinn enthält. Zur Verfügung stehen aber nur Legierungen L_1 , L_2 und L_3 mit den in nebenstehender Tabelle angegebenen Zusammensetzungen.

	L_1	L_2	L_3
Kupfer	80 %	85 %	95 %
Zink	10 %	15 %	0 %
Zinn	10 %	0 %	5 %

Ob die benötigte Legierung L durch Zusammensetzung aus den Legierungen L_1 , L_2 und L_3 hergestellt werden kann, zeigt die Auswertung des folgenden Ansatzes:

Mit x_1 , x_2 und x_3 bezeichnen wir die Mengen der Legierungen L_1 , L_2 bzw. L_3 für die Herstellung einer Mengeneinheit der benötigten Legierung L, also

$$(I) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Weitere Gleichungen ergeben sich aus den Anteilen von Kupfer, Zink und Zinn in L_1 , L_2 und L_3 einerseits und in L andererseits:

$$(II) \quad 0,8x_1 + 0,85x_2 + 0,95x_3 = 0,85$$

$$(III) \quad 0,1x_1 + 0,15x_2 = 0,1$$

$$(IV) \quad 0,1x_1 + 0,05x_3 = 0,05$$

Das aus den Gleichungen (I) bis (IV) bestehende System wird mithilfe des GAUSSschen Eliminationsverfahrens gelöst:¹⁾

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 80x_1 + 85x_2 + 95x_3 & = & 85 \\ 10x_1 + 15x_2 & = & 10 \\ 10x_1 & + & 5x_3 = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-80) \quad \cdot (-10) \quad \cdot (-10) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \end{array}$$

Lösung mit GTA:

Fig. G 89

G 44

¹⁾ Das Koeffizientenschema ist hier eine dreireihige Matrix.

²⁾ Bei vier Gleichungen mit drei Variablen ist die CRAMERSche Regel *nicht* anwendbar.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 5x_2 + 15x_3 & = & 5 \\
 5x_2 - 10x_3 & = & 0 \\
 -10x_2 - 5x_3 & = & -5
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \downarrow \cdot 2 \\ \downarrow \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 5x_2 + 15x_3 & = & 5 \\
 25x_3 & = & 5 \\
 25x_3 & = & 5
 \end{array}$$

Die letzte Gleichung im abschließend umgeformten System stimmt mit der vorletzten überein. Sie kann gestrichen werden. Aus der Dreiecksform des Systems ergibt sich $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$ und $x_3 = \frac{1}{5}$. Das heißt: Das Einschmelzen der Legierungen L_1 , L_2 und L_3 für die benötigte Kupferlegierung ist im Verhältnis 2 : 2 : 1 vorzunehmen.

- b) Einschmelzen der Legierungen L_1 , L_2 und L_3 im Verhältnis 1 : 1 : 3 (also $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ bzw. $\frac{3}{5}$ der drei Legierungen) ergibt eine Kupferlegierung von 90 % Kupfer, 5 % Zink und 5 % Zinn: $80 \cdot \frac{1}{5} + 85 \cdot \frac{1}{5} + 95 \cdot \frac{3}{5} = 16 + 17 + 57 = 90$; $10 \cdot \frac{1}{5} + 15 \cdot \frac{1}{5} = 5$; $10 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} = 5$
- c) Will man aus den Legierungen L_1 , L_2 und L_3 eine Kupferlegierung mit 82 % Kupfer, 8 % Zink und 10 % Zinn herstellen, so muss zur Ermittlung der Einschmelzanteile folgendes Gleichungssystem (vgl. a)) gelöst werden.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 80x_1 + 85x_2 + 95x_3 & = & 82 \\
 10x_1 + 15x_2 & = & 8 \\
 10x_1 + 5x_3 & = & 10
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} \cdot (-80) \\ \cdot (-10) \\ \cdot (-10) \\ \downarrow \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 5x_2 + 15x_3 & = & 2 \\
 5x_2 - 10x_3 & = & -2 \\
 -10x_2 - 5x_3 & = & 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \downarrow \cdot 2 \\ \downarrow \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 5x_2 + 15x_3 & = & 2 \\
 25x_3 & = & 4 \\
 25x_3 & = & 4
 \end{array}$$

Lösung mit GTA:

Fig. G 90

Es folgt $x_3 = \frac{4}{25}$, $x_2 = -\frac{2}{25}$ und $x_1 = \frac{23}{25}$ als eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems. Die Aufgabenstellung enthält jedoch mit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ noch eine Bedingung, die wegen $x_2 < 0$ nicht erfüllt ist.

Die angegebene Legierung kann also aus L_1 , L_2 und L_3 *nicht* hergestellt werden.

G 45

Beispiel G 45:

Im Betriebsteil A eines Unternehmens sollen die Erzeugnisse E_1 und E_2 , im Betriebsteil B die Erzeugnisse E_3 und E_4 aus einem Rohstoff R produziert werden. Insgesamt stehen 6000 Mengeneinheiten (ME) Rohstoff zur Verfügung, wobei man für die Herstellung eines Stücks von E_1 , E_2 , E_3 bzw. E_4 jeweils 5, 10, 8 bzw. 4 ME Rohstoff benötigt.

Betriebsteil A kann für die Produktion 1400 Stunden Maschinenzeit aufwenden und braucht für ein Stück der Sorten E_1 bzw. E_2 jeweils 5 Stunden; Betriebsteil B hat eine Kapazität von 900 Stunden Maschinenzeit und benötigt für die Herstellung eines Stückes E_3 2 Stunden und für ein Stück E_4 3 Stunden.

Es sind die möglichen Produktionszahlen je Erzeugnis in Abhängigkeit von den verfügbaren *Maschinenzeiten* und dem *Rohstoffbedarf* zu bestimmen.

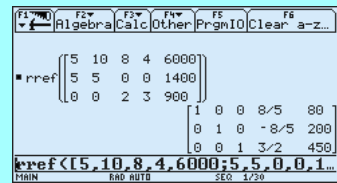
Die Auswertung der Informationen führt auf ein Gleichungssystem mit den Variablen x_1, x_2, x_3 und x_4 (für die Stückzahlen E_1, E_2, E_3 bzw. E_4):

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 4x_4 & = & 6000 \\ 5x_1 + 5x_2 & = & 1400 \\ 2x_3 + 3x_4 & = & 900 \end{array} \quad \cdot (-1) \downarrow$$

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 4x_4 & = & 6000 \\ 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 & = & 4600 \\ 2x_3 + 3x_4 & = & 900 \end{array} \quad (x_4 = t)$$

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 & = & 6000 - 4t \\ 5x_2 + 8x_3 & = & 4600 - 4t \\ 2x_3 & = & 900 - 3t \end{array} \quad \cdot (-4) \uparrow : 2$$

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 10x_2 & = & 2400 + 8t \\ 5x_2 & = & 1000 + 8t \\ x_3 & = & 450 - \frac{3}{2}t \end{array} \quad \cdot (-2) \uparrow : 5$$



(Zur Interpretation dieser Bildschirmangabe s. Beispiel G 18.)

Fig. G 91

Durch schrittweises Auflösen bzw. Einsetzen erhält man:

$$(1) \ x_1 = 80 - \frac{8}{5}t \quad (2) \ x_2 = 200 + \frac{8}{5}t \quad (3) \ x_3 = 450 - \frac{3}{2}t \quad (4) \ x_4 = t$$

Da die Stückzahlen x_i natürliche Zahlen sind, gilt wegen (1) $t \leq 50$ (also $x_4 \leq 50$; für $x_4 = 50$ ist $x_1 = 0, x_2 = 280$ und $x_3 = 375$). Andererseits bedingt die erforderliche Ganzzahligkeit der Werte, dass $x_4 = t$ wegen (1) bis (3) durch 2 und 5, also durch 10 teilbar sein muss. Das heißt, x_4 kann nur die 10er-Werte von 0 bis 50 annehmen. Aus diesen Überlegungen erhält man die nebenstehenden möglichen Produktionszahlen für die einzelnen Erzeugnisse:

x_4	x_3	x_2	x_1
50	375	280	0
40	390	264	16
30	405	248	32
20	420	232	48
10	435	216	64
0	450	200	80

Beispiel G 46:

Es wird ein Gleichstromkreis betrachtet, der vier Widerstände R, R_1, R_2 und R_3 sowie eine Spannungsquelle U enthält (Fig. G 92).

Für diesen Stromkreis gelten das OHMSche Gesetz $U = I \cdot R$ sowie die Gesetze im verzweigten und unverzweigten Stromkreis, nach denen

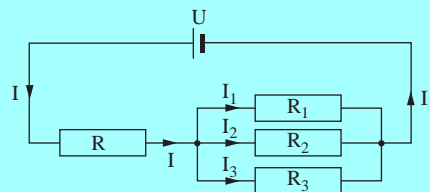


Fig. G 92

- die Summe aller Ströme in einem Knoten (Leiterverzweigung) gleich 0 ist (*Knotensatz*: In einem Knoten ist die Summe aller zufließenden Ströme gleich der Summe aller abfließenden Ströme),

- in jedem geschlossenen Leiterkreis die Summe der Spannungsabfälle gleich der Urspannung ist (*Maschensatz*),
- in allen Zweigen eines verzweigten Stromkreises die Spannung gleich ist.

Es sind der Gesamtstrom I und die Teilströme I_1 , I_2 und I_3 bei einer anliegenden Spannung $U = 10 \text{ V}$ und den Widerständen $R = 30 \Omega$, $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$ und $R_3 = 50 \Omega$ zu berechnen
Nach oben genannten Gesetzen gilt:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 - I &= 0 \text{ A} \\ 50 \Omega \cdot I_1 + 30 \Omega \cdot I &= 10 \text{ V} \\ 100 \Omega \cdot I_2 + 30 \Omega \cdot I &= 10 \text{ V} \\ 50 \Omega \cdot I_3 + 30 \Omega \cdot I &= 10 \text{ V} \end{aligned}$$

Wenden wir den GAUSSschen Algorithmus auf das Gleichungssystem an, so erhalten wir neben der Lösung $I_1 = 0,08 \text{ A}$; $I_2 = 0,04 \text{ A}$; $I_3 = 0,08 \text{ A}$ und $I = 0,2 \text{ A}$ zusätzlich die Information, dass die vier Gleichungen „unabhängig“ voneinander sind: Das Gleichungssystem mit 4 Variablen und 4 Gleichungen ist eindeutig lösbar. Fig. G 93 zeigt das Schirmbild bei Einsatz eines GTA.

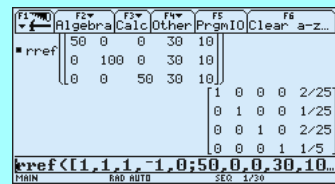


Fig. G 93

Nunmehr sollen vier Widerstände im Stromkreis ausgetauscht und wiederum die Ströme ermittelt werden. Vertauscht man dabei lediglich die drei Widerstände R_1 , R_2 und R_3 untereinander, so ergäbe sich nach den oben angeführten Gesetzen keine neue Information. Anders verhält es sich, wenn man den Widerstand R gegen einen der drei Widerstände R_1 , R_2 bzw. R_3 wechselseitig tauscht.

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werte für die Ausgangsschaltung und zwei Varianten an, wobei für die Berechnungen in Zeile 2 bzw. 3 (Fig. G 94/ Fig. G 95) wiederum der GTA eingesetzt wurde.

R_1	R_2	R_3	R	I_1	I_2	I_3	I
50Ω	100Ω	50Ω	30Ω	$\frac{2}{25} \text{ A} = 0,08 \text{ A}$	$\frac{1}{25} \text{ A} = 0,04 \text{ A}$	$\frac{2}{25} \text{ A} = 0,08 \text{ A}$	$\frac{1}{5} \text{ A} = 0,2 \text{ A}$
50Ω	30Ω	50Ω	100Ω	$\frac{3}{125} \text{ A} = 0,024 \text{ A}$	$\frac{1}{25} \text{ A} = 0,04 \text{ A}$	$\frac{3}{125} \text{ A} = 0,024 \text{ A}$	$\frac{11}{125} \text{ A} = 0,088 \text{ A}$
30Ω	100Ω	50Ω	50Ω	$\frac{2}{25} \text{ A} = 0,08 \text{ A}$	$\frac{3}{125} \text{ A} = 0,024 \text{ A}$	$\frac{6}{125} \text{ A} = 0,048 \text{ A}$	$\frac{19}{125} \text{ A} = 0,152 \text{ A}$

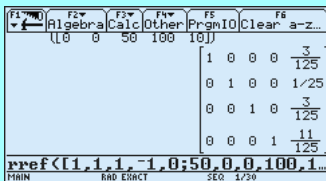


Fig. G 94

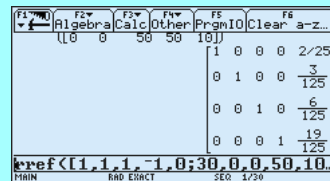


Fig. G 95

G 4 Ebenen im Raum

G 4.1 Parametergleichung einer Ebene

Wie jede Gerade in der Ebene und im Raum durch die Vorgabe von zwei verschiedenen Punkten eindeutig bestimmt ist, so wird auch jede Ebene ε im Raum durch drei Punkte, die nicht alle auf derselben Geraden liegen, eindeutig festgelegt. In Fig. G 96 sind dies die drei Punkte P_0 , A und B für die Ebene ε . Diese drei Punkte bestimmen ihrerseits zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{P_0A}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{P_0B}$. Folglich ist jede Ebene auch durch einen Punkt P_0 und **zwei linear unabhängige Vektoren** \vec{u} und \vec{v} eindeutig festgelegt. In der Ebene ε lässt sich zu jedem beliebigen Punkt X der Vektor $\overrightarrow{P_0X}$ eindeutig als **Linearkombination** der Vektoren \vec{u} und \vec{v} bestimmen: $\overrightarrow{P_0X} = r\vec{u} + s\vec{v}$ ($r, s \in \mathbb{R}$).

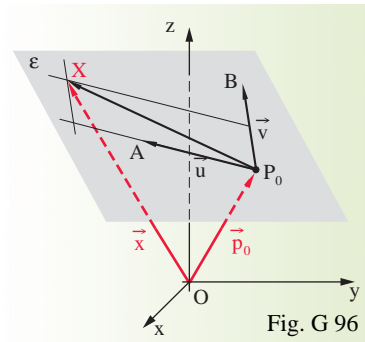


Fig. G 96

Bezeichnet O den Ursprung des Koordinatensystems, so ist

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0X} = \vec{p}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}, \quad \text{also} \quad \vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{u} + s\vec{v} \quad (r, s \in \mathbb{R}).$$

Durchlaufen nun r und s unabhängig voneinander alle reellen Zahlen, so beschreibt die erhaltene Gleichung die Ebene ε . Wir fassen diese Überlegungen zusammen:

Satz G 25: Punktrichtungsgleichung einer Ebene in Parameterform

Ist P_0 ein Punkt des Raumes mit dem zugehörigen Ortsvektor \vec{p}_0 und sind \vec{u} und \vec{v} zwei linear unabhängige Vektoren, so wird die dadurch eindeutig bestimmte Ebene ε durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{p}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$ ($r, s \in \mathbb{R}$) beschrieben.

G 25

\vec{u} und \vec{v} nennt man **Richtungsvektoren** (oder auch **Spannvektoren**) sowie \vec{p}_0 einen **Stützvektor** der Ebene ε .

Bedenkt man, dass in Gleichung (1) die Vektoren \vec{u} und \vec{v} durch drei Punkte A, B, P_0 der Ebene ε bestimmt wurden, so lässt sich (1) auch in der Form $\vec{x} = \vec{p}_0 + r(\vec{a} - \vec{p}_0) + s(\vec{b} - \vec{p}_0)$ angeben. Damit gilt:

Satz G 26: Dreipunktegleichung einer Ebene in Parameterform

Sind P_0 , A und B drei Punkte des Raumes, die nicht auf derselben Geraden liegen, und bezeichnen \vec{p}_0 , \vec{a} und \vec{b} die zugehörigen Ortsvektoren, so wird die dadurch eindeutig bestimmte Ebene ε durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{p}_0 + r(\vec{a} - \vec{p}_0) + s(\vec{b} - \vec{p}_0)$ ($r, s \in \mathbb{R}$) beschrieben.

G 26

In den Gleichungen (1) und (2) heißen r und s *Parameter*.

Beispiel G 47:

Wir betrachten die Ebene ε , die durch die drei Einheitspunkte $E_x(1; 0; 0)$, $E_y(0; 1; 0)$ und $E_z(0; 0; 1)$ des Koordinatensystems eindeutig bestimmt ist (Fig. G 97).

Wählt man z. B. E_x als Ausgangspunkt, so sind

G 47

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren der Ebene ϵ . Folglich lässt sich nach Satz G 25 die Ebene ϵ durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}) \text{ beschreiben.}$$

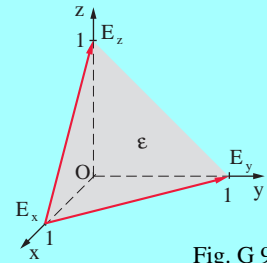


Fig. G 97

G 48

Beispiel G 48:

Stellt man ein regelmäßiges Tetraeder der Kantenlänge 2 so in ein Koordinatensystem, wie es in Fig. G 98 dargestellt ist, so haben die Ecken die Koordinaten $A(0; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(\sqrt{3}; 1; 0)$ und $D(\frac{1}{3}\sqrt{3}; 1; \frac{2}{3}\sqrt{6})$. Die Ebene durch die Punkte B, C, D kann

Satz G 26 zufolge also durch die Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}) \text{ beschrieben werden.}$$

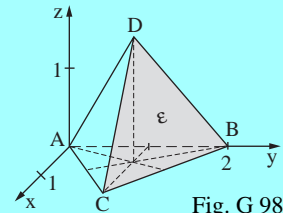


Fig. G 98

Wir bestimmen nun den *Schnittpunkt dieser Ebene mit der z-Achse* des Koordinatensystems. Weil für jeden Punkt P der z-Achse die x- und die y-Koordinate den Wert 0 hat, werden mittels obiger Gleichung von \vec{x} solche reellen Zahlen r und s ermittelt, für die

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{gilt. Durch Koordinatenvergleich erhält man ein}$$

Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten r und s:

$$(I) \quad 0 = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r - \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot s$$

$$(II) \quad 0 = 1 + 0 \cdot r + 1 \cdot s$$

$$(III) \quad z = \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot r - \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot s$$

Aus (II) folgt $s = -1$. Mit diesem Wert ermitteln wir aus (I) $r = -1$ sowie durch Einsetzen für r und s in (III) schließlich $z = 3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Damit ist $P_z(0; 0; 2\sqrt{6})$ der Schnittpunkt der z-Achse mit der Ebene ϵ .

G 49

Beispiel G 49:

Wir betrachten den Punkt $P_1(0; 1; 2)$ und alle weiteren Punkte, die sich aus P_1 durch Permutation der Koordinaten ergeben. Es soll bewiesen werden, dass diese sechs Punkte

a) in einer Ebene liegen und

b) bei geeignet gewählter Reihenfolge ein regelmäßiges Sechseck bilden.

Zu a):

Aus $P_1(0; 1; 2)$ ergeben sich durch Permutation der Koordinaten die folgenden Punkte:

$P_2(0; 2; 1)$, $P_3(1; 0; 2)$, $P_4(1; 2; 0)$, $P_5(2; 0; 1)$ und $P_6(2; 1; 0)$.

Zur Bearbeitung von a) werden beispielsweise die Punkte P_1 , P_2 und P_3 als Ausgangspunkte für eine Ebene ε gewählt und es wird zuerst gezeigt, dass diese drei Punkte nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Dazu betrachtet man die beiden Vektoren $\vec{a} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ und $\vec{b} = \vec{p}_3 - \vec{p}_1$. \vec{a} und \vec{b} sind linear unabhängig, denn es gibt keine reelle Zahl k , so dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. Damit sind P_1 , P_2 und P_3 nicht kollinear und bestimmen demzufolge eine Ebene ε , die nach Satz G 26 durch die Gleichung

$$\varepsilon: \vec{x} = \vec{p}_1 + r(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + s(\vec{p}_3 - \vec{p}_1), \quad \text{also} \quad \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Nun prüft man, ob die restlichen drei Punkte P_4 , P_5 und P_6 in dieser Ebene ε liegen. Für $P_4(1; 2; 0)$ müsste es dann zwei Zahlen r_4 und s_4 geben, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt. Aus dieser Gleichung erhält man das Gleichungssystem}$$

(I) $1 = 0 \cdot r_4 + 1 \cdot s_4$, Gleichung (I) führt sofort zu $s_4 = 1$ und aus (III) folgt dann $r_4 = 2$. Da

(II) $1 = 1 \cdot r_4 - 1 \cdot s_4$, diese beiden Zahlen auch (II) erfüllen, liegt P_4 in ε .

(III) $-2 = -1 \cdot r_4 + 0 \cdot s_4$.

Analog verfährt man mit den Punkten P_5 und P_6 . Für $P_5(2; 0; 1)$ ergibt sich

(I) $2 = 0 \cdot r_5 + 1 \cdot s_5$, Hier erhält man aus (I) und (III) $s_5 = 2$ und $r_5 = 1$. Diese beiden Zahlen

(II) $-1 = 1 \cdot r_5 - 1 \cdot s_5$, erfüllen auch (II), weshalb P_5 zu ε gehört.

(III) $-1 = -1 \cdot r_5 + 0 \cdot s_5$.

Für P_6 erhalten wir schließlich das Gleichungssystem

(I) $2 = 0 \cdot r_6 + 1 \cdot s_6$, Aus (I) und (III) folgt $s_6 = 2$ und $r_6 = 2$, die beide auch (II) erfüllen.

(II) $0 = 1 \cdot r_6 - 1 \cdot s_6$, Damit ist P_6 ebenfalls ein Punkt von ε .

(III) $-2 = -1 \cdot r_6 + 0 \cdot s_6$.

Damit ist nachgewiesen, dass P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 und P_6 in einer (gemeinsamen) Ebene liegen.

Zu b):

Es werden zuerst alle möglichen Abstände zwischen zwei verschiedenen Punkten des ebenen Sechsecks berechnet. Der Einsatz eines GTA verringert dabei den Rechenaufwand. Dazu definiert man zuerst eine Funktion

rabstand($px1, py1, pz1, px2, py2, pz2$) = $\sqrt{((px1-px2)^2 + (py1-py2)^2 + (pz1-pz2)^2)}$ für den Abstand zweier Punkte $P(px1, py1, pz1)$ und $Q(px2, py2, pz2)$ im Raum¹⁾

¹⁾ Nach Behandlung des Skalarprodukts zweier Vektoren (Abschnitt G 6) wird es möglich sein, diese Funktion einfacher zu beschreiben und insbesondere die Eingabe der Werte bequemer zu gestalten.

- (I) $x = x_0 + r \cdot u_x + s \cdot v_x$, Multipliziert man
 (II) $y = y_0 + r \cdot u_y + s \cdot v_y$, (I) mit $(u_y v_z - u_z v_y)$, (II) mit $(u_z v_x - u_x v_z)$, (III) mit $(u_x v_y - u_y v_x)$
 (III) $z = z_0 + r \cdot u_z + s \cdot v_z$, und addiert diese Gleichungen anschließend, so erhält man

$$\begin{array}{rcl}
 x \cdot (u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) & x_0(u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y) & + r \cdot (u_x \cdot u_y \cdot v_z - u_x u_z v_y) \\
 + y \cdot (u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) & + y_0(u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z) & + r \cdot (u_y \cdot u_z \cdot v_x - u_x u_y v_z) \\
 + z \cdot (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) & + z_0(u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x) & + r \cdot (u_x \cdot u_z \cdot v_y - u_y u_z v_x)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ = 0 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ = 0 \end{array}$$

Also

$$\underbrace{(u_y v_z - u_z v_y)}_a \cdot x + \underbrace{(u_z v_x - u_x v_z)}_b \cdot y + \underbrace{(u_x v_y - u_y v_x)}_c \cdot z - \underbrace{x_0(u_y v_z - u_z v_y) + y_0(u_z v_x - u_x v_z) + z_0(u_x v_y - u_y v_x)}_d = 0.$$

Mit den angegebenen Abkürzungen erhält man mit $ax + by + cz + d = 0$ (2)

eine **parameterfreie Gleichung der Ebene** ϵ , die auch als Ebenengleichung in *Koordinatenschreibweise* (kurz auch: Koordinatengleichung) bezeichnet wird. Dabei dürfen die Koeffizienten a, b, c nicht gleichzeitig den Wert 0 annehmen, d.h., es muss $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ gelten. Die Gleichung (2) entspricht der parameterfreien Gleichung $ax + by + d = 0$ einer *Geraden* in der Ebene.

Ebenfalls analog zu der entsprechenden Gleichung einer Geraden in der Ebene ist $\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} + \frac{z}{s_z} = 1$ die **Achsenabschnittsgleichung** einer Ebene, die die Koordinatenachsen in den Punkten $S_x(s_x; 0; 0)$, $S_y(0; s_y; 0)$ und $S_z(0; 0; s_z)$ schneidet. Da $\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} + \frac{z}{s_z} = 1$ eine parameterfreie Ebenengleichung ist und $S_x(s_x; 0; 0)$, $S_y(0; s_y; 0)$ und $S_z(0; 0; s_z)$ diese Gleichung erfüllen, lässt sich diese Aussage leicht bestätigen.

Beispiel G 50:

Aus der Parametergleichung der Ebene ϵ in Beispiel G 49 $\epsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

erhält man durch **Koordinatenvergleich** das folgende Gleichungssystem:

- (I) $0r + 1s = x$
 (II) $1r - 1s = y - 1$
 (III) $-1r + 0s = z - 2$

Aus (I) ergibt sich $s = x$ und aus (III) $r = 2 - z$. Setzt man diese Ausdrücke für s und r in (II) ein, so erhält man $(2 - z) - x = y - 1$, woraus $x + y + z - 3 = 0$ als parameterfreie Gleichung der Ebene ϵ folgt.

Aus dieser Gleichung ergibt sich auch sofort die Achsenabschnittsgleichung von ϵ :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1.$$

Die Ebene schneidet folglich die Koordinatenachsen jeweils an der Stelle 3 (Fig. G 102).

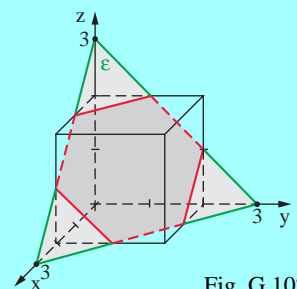
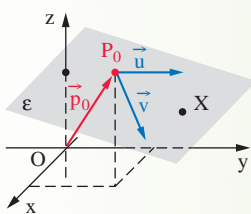
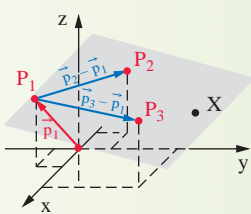
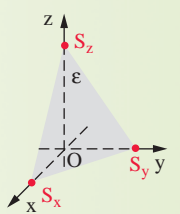


Fig. G 102

Die Möglichkeiten zur analytischen Beschreibung einer Ebene sind nachfolgend zusammengefasst:

	Punktrichtungsgleichung	Dreipunktegleichung
<p>$X(x; y; z)$ ist ein beliebiger Punkt der Ebene ε.</p> <p>$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OP}$</p>	<p>$P_0(x_0; y_0; z_0) \quad \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$</p> <p>$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$</p> <p>$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linear unabhängig</p> 	<p>$P_1(x_1; y_1; z_1) \quad P_2(x_2; y_2; z_2) \quad P_3(x_3; y_3; z_3)$</p> <p>$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$</p>  
Vektorschreibweise	$\vec{x} = \vec{p}_0 + r \vec{u} + s \vec{v}; r, s \in \mathbb{R}$	$\vec{x} = \vec{p}_1 + r (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + s (\vec{p}_3 - \vec{p}_1); r, s \in \mathbb{R}$
Koordinatenschreibweise	$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{mit } a^2 + b^2 + c^2 > 0$	
	$\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} + \frac{z}{s_z} = 1 \quad \text{mit } s_x, s_y, s_z \neq 0$	

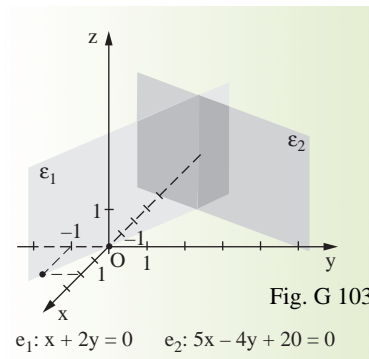
G 4.3 Spezielle Ebenen

Ausgehend von der allgemeinen parameterfreien Gleichung einer Ebene

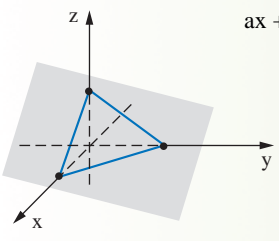
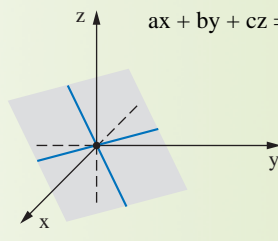
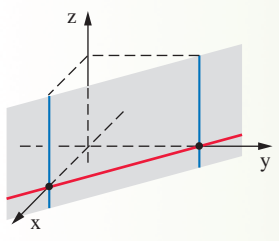
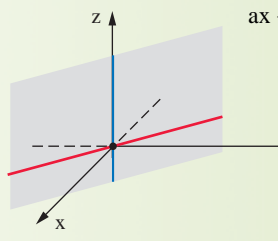
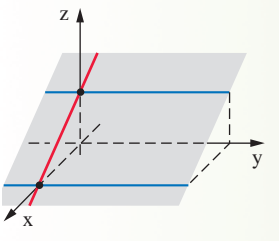
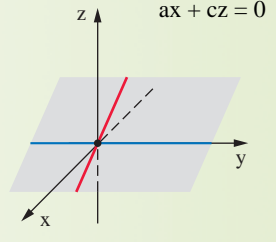
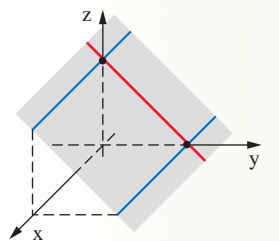
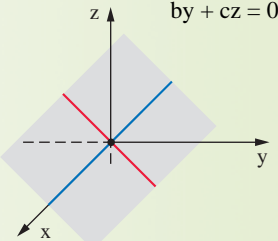
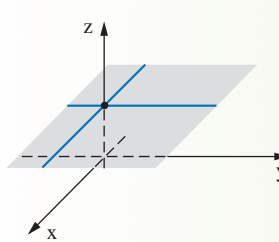
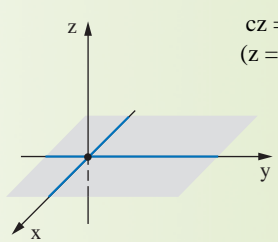
$$\varepsilon: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{mit } a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

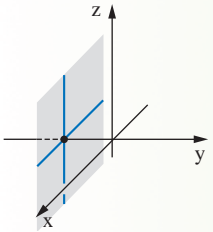
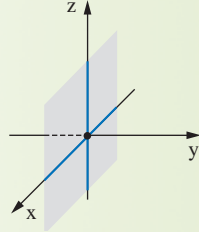
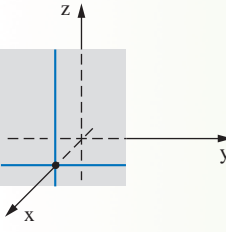
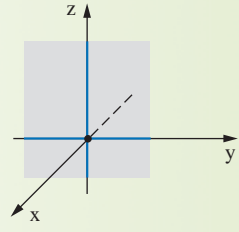
sollen nachfolgend Sonderfälle für die Koeffizienten a, b, c untersucht und die Lage der entsprechenden Ebene im Raum veranschaulicht werden.

- Für $d = 0$ verläuft die Ebene ε durch den Koordinatenursprung. In diesem Fall wird die zugehörige Gleichung $ax + by + cz = 0$ nämlich von den Koordinaten des Koordinatenursprungs $O(0; 0; 0)$ erfüllt.
- Für $c = 0$ und $a, b \neq 0$ besitzt die zu betrachtende Ebene die Gleichung $ax + by + d = 0$. Diese Gleichung wird von allen Punkten $X(x'; y'; z')$ des Raumes erfüllt, für die $ax' + by' + d = 0$ gilt, wobei z' jeden beliebigen Wert annehmen kann. Das heißt aber: ε ist eine Ebene, die auf der xy -Ebene senkrecht steht. Für $z = 0$ beschreibt $ax + by + d = 0$ eine Gerade in der xy -Ebene. In Fig. G 103 sind zwei konkrete Beispiele dargestellt.



Dieser und alle weiteren Fälle werden in der folgenden Tabelle systematisch zusammengefasst.

a	b	c	$d \neq 0$	$d = 0$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$ax + by + cz + d = 0$  ϵ in beliebiger Lage ϵ enthält den Koordinatenursprung nicht.	$ax + by + cz = 0$  ϵ enthält den Koordinatenursprung.
$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$ax + by + d = 0$  $\epsilon \perp xy\text{-Ebene}$ ϵ enthält die z-Achse nicht.	$ax + by = 0$  ϵ enthält die z-Achse.
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$ax + cz + d = 0$  $\epsilon \perp xz\text{-Ebene}$ ϵ enthält die y-Achse nicht.	$ax + cz = 0$  ϵ enthält die y-Achse.
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$by + cz + d = 0$  $\epsilon \perp yz\text{-Ebene}$ ϵ enthält die x-Achse nicht.	$by + cz = 0$  ϵ enthält die x-Achse.
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$cz + d = 0$  $\epsilon \perp z\text{-Achse}$ ϵ ist parallel zu xy-Ebene.	$cz = 0$ $(z = 0)$  ϵ ist die xy-Ebene.

a	b	c	$d \neq 0$		$d = 0$	
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$by + d = 0$  ε ist parallel zu xz-Ebene.		$by = 0$ $(y = 0)$  ε ist die xz-Ebene.	
			$\varepsilon \perp y\text{-Achse}$			
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$ax + d = 0$  ε ist parallel zu yz-Ebene.		$ax = 0$ $(x = 0)$  ε ist die yz-Ebene.	
			$\varepsilon \perp x\text{-Achse}$			

G 51

Beispiel G 51:

Betrachtet wird die Gerade g , die durch den Punkt $P_0(3; 2; 2)$ und den

Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Raum bestimmt ist (Fig. G 104).

Aus der Parametergleichung der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhält

man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x = 3 - \frac{3}{2}t \quad \left| \cdot 1 \downarrow + \right| \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \downarrow + \right| \\ \text{(II)} \quad & y = 2 + 1t \quad \left| \cdot \frac{3}{2} \downarrow + \right| \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \downarrow + \right| \\ \text{(III)} \quad & z = 2 + \frac{1}{2}t \quad \left| \cdot (-1) \downarrow + \right| \quad \left| \cdot \frac{3}{2} \downarrow + \right| \end{aligned}$$

Eliminiert man nun aus (I) und (II), aus (II) und (III) sowie aus (I) und (III) auf die links angeordnete Weise jeweils den Parameter t , so erhält man die drei Gleichungen

$$2x + 3y = 12, \quad y - 2z = -2 \quad \text{bzw.} \quad x + 3z = 9.$$

Diese Gleichungen lassen sich jeweils als spezielle Ebenen interpretieren, wobei jede Ebene die Gerade g enthält und senkrecht zu einer Koordinatenebene ist. Die Figuren G 105a bis c zeigen diese drei Ebenen zusammen mit g . In der entsprechenden Koordinatenebene erhält man die jeweilige Projektion g' , g'' bzw. g''' von g . Daher heißen diese Ebenen auch projizierende Ebenen.

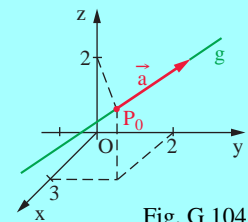
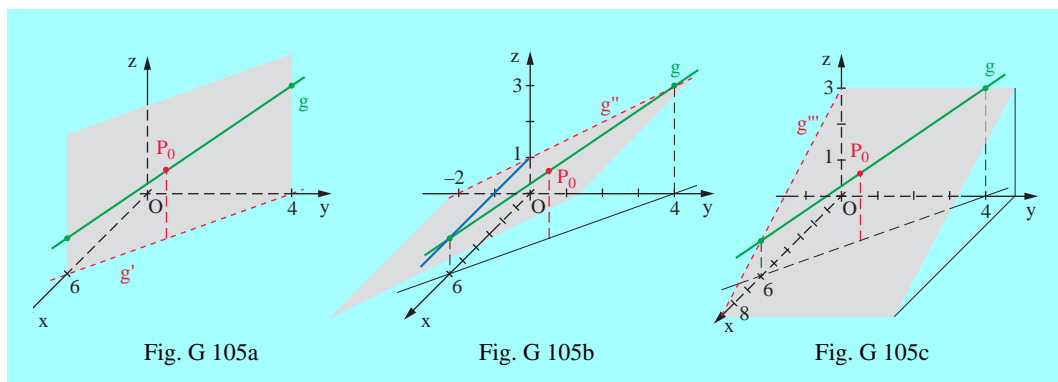


Fig. G 104



G 4.4 Lagebeziehungen von Gerade und Ebene

Aus der Anschauung lässt sich entnehmen, dass zwischen einer Geraden g und einer Ebene ϵ die folgenden Lagebeziehungen bestehen können:

- g und ϵ haben keinen Punkt gemeinsam; g ist „echt“ parallel zu ϵ (Fig. G 106a).
- g liegt in ϵ ; auch in diesem Fall ist g parallel zu ϵ (Fig. G 106b).
- g und ϵ haben genau einen Punkt gemeinsam; sie schneiden einander (Fig. G 106c).

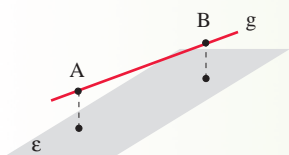


Fig. G 106a

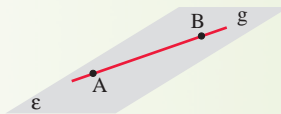


Fig. G 106b

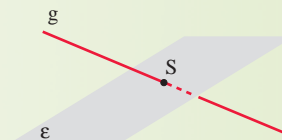


Fig. G 106c

Geraden und Ebenen im Raum können mithilfe von Richtungsvektoren beschrieben werden. Dies führt zu einem Kriterium dafür, ob eine Gerade g mit dem Richtungsvektor \vec{a} zu einer Ebene mit den Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} parallel ist oder diese in genau einem Punkt schneidet. Man muss nur feststellen, ob das Vektorsystem $\{\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}\}$ linear abhängig oder linear unabhängig ist. Fig. G 107a, Fig. G 107b und Fig. G 107c verdeutlichen diesen Zusammenhang.

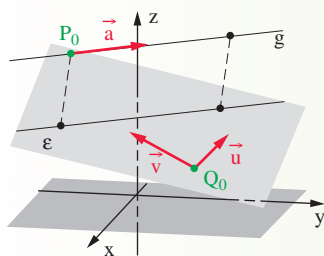


Fig. G 107a

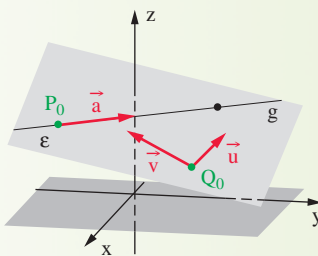


Fig. G 107b

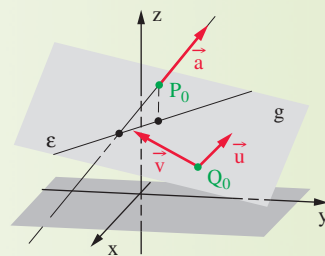


Fig. G 107c

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die möglichen Fälle:

Richtungsvektoren von g, ε		$g: \vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}; \varepsilon: \vec{x} = \vec{q}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$
Richtungsvektor \vec{a} von g ist linear abhängig von zwei Richtungsvektoren \vec{u}, \vec{v} von ε	$g \parallel \varepsilon$ <ul style="list-style-type: none"> $g \cap \varepsilon = \emptyset$, d.h.: g hat mit ε keinen gemeinsamen Punkt oder $g \cap \varepsilon = g$, d.h.: g liegt in ε. 	$\vec{p}_0 + t_1\vec{a} = \vec{q}_0 + r_1\vec{u} + s_1\vec{v}$ <ul style="list-style-type: none"> hat für die unbekannten Parameter t_1, r_1 und s_1 keine Lösung ($g \cap \varepsilon = \emptyset$) oder hat unendlich viele Lösungen ($g \cap \varepsilon = g$).
Richtungsvektor \vec{a} von g ist linear unabhängig von zwei Richtungsvektoren \vec{u}, \vec{v} von ε	$g \not\parallel \varepsilon$ $g \cap \varepsilon = \{S\}$, d.h.: g hat mit ε genau einen Punkt S gemeinsam	$\vec{p}_0 + t_1\vec{a} = \vec{q}_0 + r_1\vec{u} + s_1\vec{v}$ <ul style="list-style-type: none"> hat für die unbekannten Parameter t_1, r_1 und s_1 genau eine Lösung ($g \cap \varepsilon = \{S\}$).

Neben der Untersuchung eines Vektorsystems $\{\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}\}$ auf lineare Abhängigkeit kann man zur Ermittlung der gegenseitigen Lage einer Ebene ε und einer Geraden g auch folgendermaßen vorgehen: Es wird angenommen, dass $g: \vec{x} = \vec{p}_0 + t\vec{a}$ und $\varepsilon: \vec{x} = \vec{q}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$ einen Punkt S gemeinsam haben. In diesem Fall muss es drei reelle Zahlen t_1, r_1 und s_1 so geben, dass $\vec{p}_0 + t_1\vec{a} = \vec{q}_0 + r_1\vec{u} + s_1\vec{v}$ gilt. Nach dem Prinzip des Koordinatenvergleichs erhält man aus dieser Vektorgleichung ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen und mit den drei Unbekannten t_1, r_1 und s_1 . Interpretation der Lösung dieses Gleichungssystems führt dann zu einer Aussage über die zu untersuchende Lagebeziehung.

G 52

Beispiel G 52:

Gegeben seien eine Ebene ε und drei Geraden g, h und i durch ihre Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} & g: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix} \\ h: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & i: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist die Lagebeziehung von g, h bzw. i bezüglich ε zu bestimmen.

a) Betrachten wir zuerst g und ε . Wir nehmen an, dass g und ε gemeinsame Punkte haben.

Dann muss es in der Gleichung von ε reelle Zahlen s_1 und r_1 und in der Gleichung von g eine reelle Zahl t_1 geben, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$(I) \quad 2 = -1t_1 - 0,5r_1 + 0s_1$$

$$(II) \quad 3 = -1t_1 + 1r_1 + 0,5s_1$$

$$(III) \quad 0 = 1,5t_1 - 0,5r_1 + 1,5s_1$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die Lösungen $t_1 = -2$, $r_1 = 0$ und $s_1 = 2$. Folglich hat g mit ε genau einen Punkt S gemeinsam. Diesen *Schnittpunkt* S können wir leicht aus der Gleichung für g bestimmen, wenn wir $t = -2$ wählen.

Es ergibt sich $S(1; 2; 4)$.

b) Unter der Annahme, dass h und ε gemeinsame Punkte haben, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

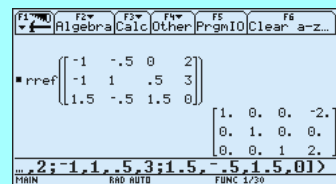


Fig. G 108

Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das folgende Gleichungssystem:

$$(I) \quad 1t_2 - 0,5r_2 + 0s_2 = 1$$

$$(II) \quad -3t_2 + 1r_2 + 0,5s_2 = -2$$

$$(III) \quad -2t_2 - 0,5r_2 + 1,5s_2 = 1$$

Mithilfe des GAUSSschen Eliminierungsverfahrens erhält man schließlich:

$$(I') \quad t_2 = 0,5t$$

$$(II') \quad r_2 = -2 + t$$

$$(III') \quad s_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Das bedeutet: Das Ausgangsgleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. Folglich liegt h in ϵ .

- c) Nimmt man an, dass die Gerade i und die Ebene ϵ gemeinsame Punkte besitzen, so ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$(I) \quad 1t_3 + 0,5r_3 + 0s_3 = -1$$

$$(II) \quad 3t_3 + 1r_3 + 0,5s_3 = -2$$

$$(III) \quad -2t_3 + 0,5r_3 - 1,5s_3 = -2$$

bzw. nach Umformung nach dem GAUSSschen Eliminierungsverfahren

$$(I') \quad t_3 + 0,5r_3 + 0s_3 = -1$$

$$(II') \quad -0,5r_3 + 0,5s_3 = 1$$

$$(III') \quad 0 = -1.$$

Das Ausgangssystem hat also keine Lösung – kein Punkt von i gehört auch zu ϵ . Damit ist die Gerade i „echt“ parallel zur Ebene ϵ .

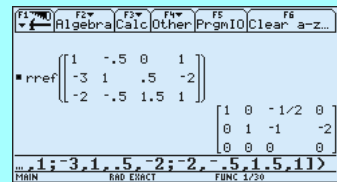


Fig. G 109

GTA-Lösung:

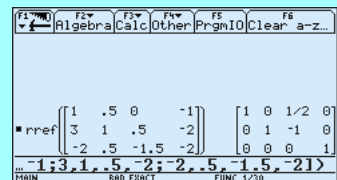


Fig. G 110

G 4.5 Lagebeziehungen von zwei Ebenen

Aus der Anschauung kann man entnehmen, dass sich zwei Ebenen ϵ und η in folgenden Lagebeziehungen zueinander befinden können:

- ϵ und η haben keinen Punkt gemeinsam; ϵ ist „echt“ parallel zu η (Fig. G 111a).
- ϵ fällt mit η zusammen; auch in diesem Fall ist ϵ parallel zu η (Fig. G 111b).
- ϵ und η haben genau eine Gerade gemeinsam; sie schneiden einander (Fig. G 111c).

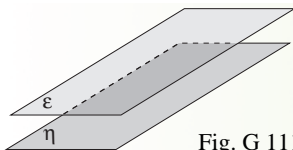


Fig. G 111a

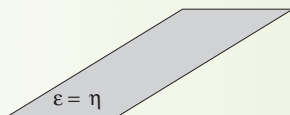


Fig. G 111b

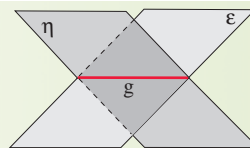


Fig. G 111c

Wie bei den Betrachtungen zur Lagebeziehung einer Geraden bezüglich einer Ebene lässt sich auch hier die Beschreibung der beiden betrachteten Ebenen mithilfe ihrer Richtungsvektoren nutzen. Sind \vec{u} und \vec{v} zwei Richtungsvektoren von ϵ sowie \vec{c} und \vec{d} zwei Richtungsvektoren von η , so könnte man das Vektorsystem $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}, \vec{d}\}$ untersuchen. Da jedoch alle vier Vektoren zum dreidimensionalen Raum gehören, ist dieses Vektorsystem immer linear abhängig (vgl. S. 251), weshalb dessen Betrachtung für die unsere Problemstellung keinen Wert besitzt. Aus raumgeometrischen Überlegungen kann man folgern, dass wir zwei Vektorsysteme betrachten müssen: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}\}$ und $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}\}$.

Sind diese beiden Systeme gleichzeitig linear abhängig, so liegen die beiden betrachteten Ebenen ε und η parallel zueinander (Fig. G 112a und b). Im anderen Fall (wenigstens eines der beiden Systeme ist linear unabhängig) schneiden beide Ebenen einander in einer Geraden (Fig. G 112c).

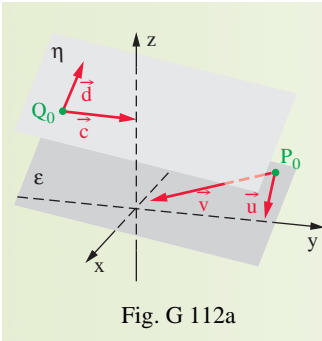


Fig. G 112a

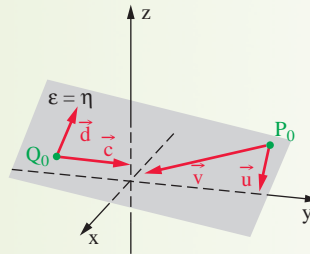


Fig. G 112b

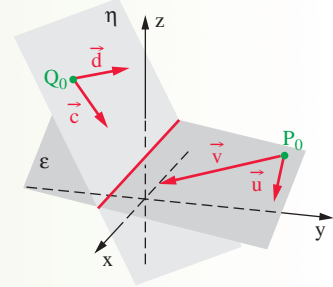


Fig. G 112c

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die möglichen Fälle:

Richtungsvektoren von ε und η		$\varepsilon: \vec{x} = \vec{p}_0 + r \vec{u} + s \vec{v}$ $\eta: \vec{x} = \vec{q}_0 + r \vec{c} + s \vec{d}$	$\varepsilon: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\eta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
Beide Vektorsysteme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}\}$ und $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}\}$ sind linear abhängig.	$\varepsilon \parallel \eta$	$\vec{p}_0 + r_1 \vec{u} + s_1 \vec{v} = \vec{q}_0 + r_2 \vec{c} + s_2 \vec{d}$ Das Gleichungssystem mit den Unbekannten r_1, s_1, r_2, s_2	$a_1x_s + b_1y_s + c_1z_s + d_1 = 0$ $a_2x_s + b_2y_s + c_2z_s + d_2 = 0$ mit den Unbekannten x_s, y_s, z_s
	<ul style="list-style-type: none"> $\varepsilon \cap \eta = \emptyset$ (Fig. G 112a) ε und η haben keinen gemeinsamen Punkt. 	hat keine Lösung.	
	<ul style="list-style-type: none"> $\varepsilon = \eta$ (Fig. G 112b) ε und η fallen zusammen. 	hat eine Lösung mit genau zwei Parametern.	
Wenigstens eines der beiden Vektorsysteme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{c}\}$, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}\}$ ist linear unabhängig.	$\varepsilon \not\parallel \eta$ <ul style="list-style-type: none"> $\varepsilon \cap \eta = g$ (Fig. G 112c) ε und η schneiden einander in einer Geraden g. 	hat eine Lösung mit genau einem Parameter.	

Analog zu den Überlegungen in G 4.4 kann man auch hier annehmen, dass die Ebenen ε und η gemeinsame Punkte haben. Dabei können in Abhängigkeit von der Schreibweise folgende Fälle auftreten:

- Sind die Gleichungen der beiden Ebenen in Vektorschreibweise $\varepsilon: \vec{x} = \vec{p}_0 + r \vec{u} + s \vec{v}$ und $\eta: \vec{x} = \vec{q}_0 + r \vec{c} + s \vec{d}$ gegeben und bezeichnet S einen solchen gemeinsamen Punkt, so gibt es Zahlen r_1, s_1 bzw. r_2, s_2 , so dass $\vec{p}_0 + r_1 \vec{u} + s_1 \vec{v} = \vec{q}_0 + r_2 \vec{c} + s_2 \vec{d}$ gilt. Diese Beziehung führt auf ein lineares Gleichungssystem mit *drei* Gleichungen und den vier Unbekannten r_1, s_1, r_2 und s_2 (s. Beispiel G 53).
- Sind die beiden Ebenen in Koordinatenschreibweise $\varepsilon: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ und $\eta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ gegeben, so folgt aus der angenommenen Existenz eines gemeinsamen Punktes $S(x_s; y_s; z_s)$ ein lineares Gleichungssystem mit *zwei* Gleichungen und den *drei* Unbekannten x_s, y_s und z_s (s. Beispiel G 54).

- Ist schließlich ε in Vektorschreibweise und η in Koordinatenschreibweise gegeben, so erhält man eine Gleichung mit den zwei Unbekannten r_1 und s_1 (s. Beispiel G 55). Entsprechend der Lösungsmenge des jeweiligen Gleichungssystems kann man dann Rückschlüsse auf die Lagebeziehung der beiden Ebenen ε und η ziehen.

Beispiel G 53:

Wir betrachten die beiden Ebenen ε und η mit den Gleichungen

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2,5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \eta: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Wenn beide Ebenen gemeinsame Punkte haben, dann muss es reelle Zahlen r_1, s_1, r_2 und s_2 geben, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Ein **Koordinatenvergleich** führt zu dem Gleichungssystem:

$$(I) \quad 2 = 1r_1 + 0,5s_1 - 0,5r_2 + 0s_2$$

$$(II) \quad 3 = 1r_1 + 2,5s_1 + 1r_2 + 0,5s_2$$

$$(III) \quad -3 = -3r_1 - 2s_1 - 0,5r_2 + 1,5s_2$$

Unter Verwendung des GAUSSschen Eliminationsverfahrens und $s_2 = t$ erhalten wir daraus:

$$(I') \quad r_1 = t$$

$$(II') \quad s_1 = 2 - t$$

$$(III') \quad r_2 = -2 + t$$

$$(IV') \quad s_2 = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

Verwendet man nur r_2 und s_2 in der Gleichung von η , so ergibt sich $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als

Lösung für die gemeinsamen Punkte von ε und η . Diese Gleichung beschreibt eine Gerade, nämlich die Schnittgerade der beiden betrachteten Ebenen.

GTA-Lösung:

Fig. G 113

Beispiel G 54:

Wir betrachten die beiden Ebenen τ und μ mit den Gleichungen

$$\tau: 11x + 1y + 4z - 29 = 0 \quad \text{und} \quad \mu: 3x - 2y - 58z - 58 = 0.$$

Gibt es einen Punkt $S(s_x; s_y; s_z)$, der zu beiden Ebenen gehört, so erhält man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den drei Unbekannten s_x, s_y, s_z :

$$(I) \quad 11s_x + 1s_y + 4s_z - 29 = 0$$

$$(II) \quad 3s_x - 2s_y - 58s_z - 58 = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung (Fig. G 114)

$$s_x = \frac{116}{25} + 2t, \quad s_y = -\frac{551}{25} - 26t, \quad s_z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit schneiden die beiden Ebenen einander in einer Geraden

$$\text{mit der Gleichung } \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{116}{25} \\ -\frac{551}{25} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -26 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

GTA-Lösung:

Fig. G 114

G 55

Beispiel G 55:

Wir betrachten die beiden Ebenen ε und τ mit den Gleichungen

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau: 11x + 1y + 4z - 29 = 0.$$

ε und τ mögen einen Punkt $S(s_x; s_y; s_z)$ gemeinsam haben. Nachdem wir die Vektorgleichung von ε in drei Gleichungen für die Koordinaten von S aufgespalten haben, setzen wir diese in die Gleichung von τ ein. Es ergibt sich die Gleichung

$$11(3 - 1r_1 - 0,5s_1) + 1(4 - 1r_1 - 2,5s_1) + 4(-2 + 3r_1 + 2s_1) - 29 = 0$$

mit den Unbekannten r_1 und s_1 . Durch Umformen der linken Seite dieser Gleichung erhält man $0 = 0$. Folglich erfüllen alle reellen Zahlen r_1 und s_1 diese Gleichung – ε und τ fallen zusammen.

G 5 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

G 5.1 Struktur der Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Absolutglieder (d.h. die Konstanten auf den rechten Seiten der Gleichungen) alle den Wert 0 haben, heißt *homogen*. Sind nicht alle Absolutglieder gleich 0, so nennt man das System *inhomogen*.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung, und zwar die aus lauter Nullen bestehende „triviale“ Lösung. Solche Gleichungssysteme traten schon bei der Untersuchung von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit auf (vgl. Abschnitt G 1.6, Beispiel G 18). Jede Gleichung eines homogenen linearen Gleichungssystems mit drei Variablen kann als Ebenengleichung gedeutet werden.

G 56

Beispiel G 56:

Mithilfe des GAUSSschen Eliminierungsverfahrens ist das folgende homogene lineare Gleichungssystem mit 4 Variablen zu lösen:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & x_2 - & 5x_3 - 3x_4 = 0 \\
 -x_1 + & & + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\
 -2x_1 + & x_2 + & x_3 + 9x_4 = 0 \\
 x_1 - & x_2 + & x_3 - 5x_4 = 0
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -2 \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \\ \\ \downarrow \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & x_2 - & 5x_3 - 3x_4 = 0 \\
 & x_2 - & 3x_3 + x_4 = 0 \\
 & 3x_2 - & 9x_3 + 3x_4 = 0 \quad : 3 \\
 & -2x_2 + & 6x_3 - 2x_4 = 0 \quad : (-2)
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Die letzten 3 Gleichungen stimmen überein – das} \\ \text{System besteht also aus 2 Gleichungen mit 4} \\ \text{Variablen. Es können damit 2 freie Parameter ein-} \\ \text{geführt werden.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & x_2 - & 5x_3 - 3x_4 = 0 \\
 & x_2 - & 3x_3 + x_4 = 0 \quad (x_3 = r; x_4 = s; r, s \in \mathbb{R})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & x_2 & = 5r + 3s \\
 & x_2 & = 3r - s \\
 & x_3 & = r \\
 & x_4 & = s
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \cdot (-1) \\ \uparrow \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2r + 4s \\ x_2 &= 3r - s \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neben der trivialen Lösung (0; 0; 0; 0) ist für $r = 1$ und $s = 0$ das 4-Tupel (2; 3; 1; 0) und für $r = 0$ und $s = 1$ das 4-Tupel (4; -1; 0; 1) jeweils eine spezielle Lösung.

Lösung mit GTA:

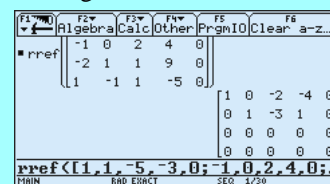


Fig. G 115

(Zur Interpretation vgl. Abschnitt G 1.6, S. 252.)

Für die Darstellung der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen sollen Lösungsvektoren als *Zeilenvektoren* (so auch in G 5.3) geschrieben werden. Für solche *n -Tupel reeller Zahlen* erfolgt die *Vervielfachung* und die *Addition* koordinatenweise, und zwar so, wie das nach Definition G 10 (in G 1.3) für ebene Vektoren mit Paaren von Koordinaten begründet wurde:

- Für $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ und $r \in \mathbb{R}$ ist $r(a_1; a_2; \dots; a_n) = (ra_1; ra_2; \dots; ra_n)$ das *r -fache* von $(a_1; a_2; \dots; a_n)$.
- Für $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ und $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ist $(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n)$ die *Summe* der n -Tupel $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ und $(b_1; b_2; \dots; b_n)$.

Für das Gleichungssystem in Beispiel G 56 sind die Lösungen alle 4-Tupel der Form

$(x_1; x_2; x_3; x_4) = r(2; 3; 1; 0) + s(4; -1; 0; 1)$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Verallgemeinert lässt sich feststellen:

Satz G 27: **Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems**

Für ein homogenes lineares Gleichungssystem gilt:

- Jedes Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung des Gleichungssystems.
- Die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung des Gleichungssystems.

G 27

Die beiden Teilaussagen dieses Satzes können in folgender Weise zusammengefasst werden:

Sind $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ und $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen, so ist auch $r(a_1; a_2; \dots; a_n) + s(b_1; b_2; \dots; b_n)$ für $r, s \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieses Systems.

Zum *Beweis* des Satzes soll hier nur festgehalten werden: Nach Ermittlung eines Lösungstupels (bzw. eines Lösungsvektors) eines homogenen linearen Gleichungssystems (wie in Beispiel G 56) wird ein Vielfaches davon betrachtet. Die vervielfachten Koordinaten des Lösungsvektors setzen wir in jeden Term links vom Gleichheitszeichen des Systems ein. Der Vervielfachungsfaktor kann jeweils ausgeklammert werden, wodurch innerhalb der Klammern Ausdrücke mit dem Wert 0 verbleiben, da man von einer Lösung ausgegangen war. Als Produkt aus dem Vervielfachungsfaktor und 0 ergibt sich wiederum jeweils der Wert 0. Das heißt aber: Das Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung des Systems. Analog verfährt man bezüglich der Summe zweier Lösungen.

Für das Beispiel G 56 sei abschließend eine *geometrische Deutung* angemerkt: Der Nullvektor $\vec{0} = (0; 0; 0; 0)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems. Alle weiteren Lösungen lassen sich durch alle Linearkombinationen der *linear unabhängigen Vektoren* (2; 3; 1; 0) und (4; -1; 0; 1) erzeugen (wobei die lineare Unabhängigkeit aus den letzten beiden Koordinaten der beiden Vektoren erkennbar ist). Alle Lösungsvektoren sind damit Ortsvektoren einer Ebene durch den Koordinatenursprung $O(0; 0; 0; 0)$ im 4-dimensionalen Raum aller 4-Tupel reeller Zahlen.

G 5.2 Lineare Gleichungssysteme in Vektorschreibweise

Bei der Untersuchung von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ auf lineare Unabhängigkeit oder Abhängigkeit wurde die Linearkombination $r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_n \vec{a}_n = \vec{0}$ (1) betrachtet (vgl. Abschnitt G 1.6, auch Beispiel G 18). Diese Vektorgleichung führte auf ein (homogenes) lineares Gleichungssystem.

Gibt man nun ein (beliebiges) lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen vor,

$$\begin{aligned} \text{also} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \quad (2)$$

so kann man jetzt umgekehrt sowohl die Koeffizienten einer Variablen zu einem Spaltenvektor als auch die Absolutglieder zu einem Vektor zusammenfassen. Man erhält

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{bzw. kurz} \quad x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}. \quad (3)$$

Die Schreibweise (3) führt zu einem *Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems*: Ist nämlich ein n -Tupel $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ reeller Zahlen eine Lösung von (2) bzw. (3), so stellt \vec{b} eine **Linearkombination** von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ dar. Ist dagegen (2) bzw. (3) nicht lösbar, so gibt es kein solches n -Tupel reeller Zahlen für (3), d.h., \vec{b} ist *keine* **Linearkombination** der Vektoren \vec{a}_i .

G 28

Satz G 28: Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Ein lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen und mit n Variablen ist genau dann lösbar, wenn der Vektor \vec{b} der Absolutglieder eine Linearkombination der Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ der Koeffizienten entsprechender Variablen ist.

Das im Abschnitt G 3.1 (S. 274) in einem Schema diskutierte Gleichungssystem aus 3 Gleichungen und mit 3 Variablen hat in der Vektorschreibweise die Form:

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Anwendung des GAUSSschen Algorithmus (vgl. Schema, S. 273) wird das System äquivalent wiedergegeben durch

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \text{bzw.:} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das nicht lösbare Gleichungssystem aus Beispiel G 43 (Abschnitt G 3.2, Fig. G 88) führte auf das (äquivalente) Zahlenschema bzw. auf die Vektorgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

welche offenbar (vgl. die letzte Koordinate in der Vektorgleichung) durch kein Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen erfüllt wird.

G 5.3 Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

Um genauere Aussagen über die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems (1) treffen zu können, betrachten wir neben einem solchen System das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem (2) jeweils in Vektorschreibweise:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{kurz: } x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b} \quad (\vec{b} \neq \vec{0}) \quad (1)$$

$$\text{und } x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (2)$$

Beide Gleichungssysteme haben also das gleiche Koeffizientenschema für die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n . Ist nun $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ eine Lösung des inhomogenen Systems

und $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, so stellt

$$(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*) + (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) = (x_1^* + x_1^0; x_2^* + x_2^0; \dots; x_n^* + x_n^0)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems dar, wie man durch Einsetzen der jeweiligen Lösungen in (1) bzw. (2) und nachfolgender Addition beider Vektorgleichungen sieht.

Beispiel G 57:

Für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4x + & 3z & = 12 \\ & y & = 5 \end{array}$$

erhalten wir mit $z = t$ die Lösung

$$\begin{array}{lcl} x = 3 - \frac{3}{4}t & & \\ y = 5 & \text{bzw.} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z = t & & \end{array} \quad (3)$$

Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4x + & 3z & = 0 \\ & y & = 0 \end{array}$$

besitzt mit $z = t$ dementsprechend die Lösung

$$\begin{array}{lcl} x = -\frac{3}{4}t & & \\ y = 0 & \text{bzw.} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z = t & & \end{array} \quad (4)$$

In Fig. G 116 sind die Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 eingezeichnet, die zu den beiden Gleichungen des inhomogenen Systems gehören, und es sind die Lösungsmengen für das inhomogene und das zugehörige homogene System gekennzeichnet (vgl. die Vektorgleichungen (3) und (4), verstanden als Gleichungen der Schnittgeraden g_1 und g_2 zwischen den Ebenen ϵ_1 : $4x + 3z = 12$ und ϵ_2 : $y = 5$ bzw. der Ebenen ϵ_3 : $4x + 3z = 0$ und ϵ_4 : $y = 0$).

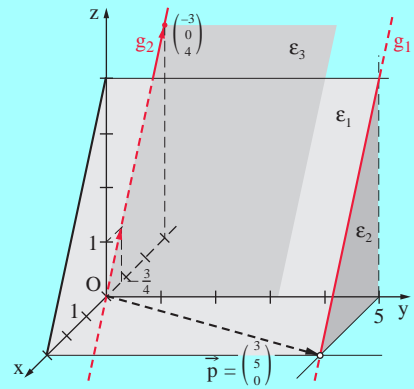


Fig. G 116

G 57

An Beispiel G 57 lässt sich ablesen, dass man alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems erhält, indem man zu jeder Lösung des zugehörigen homogenen Systems eine feste Lösung des inhomogenen Systems addiert. Folgende Überlegungen führen zu einer Verallgemeinerung dieser Erkenntnis:

- Da die entsprechende Begründung aus Beispiel G 57 für jeden Fall zutrifft, lässt sich feststellen: Für eine Lösung $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ eines inhomogenen Gleichungssystems (1) und für jede

Lösung $(x_1^\circ; x_2^\circ; \dots; x_n^\circ)$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems (2) ist stets $(x_1^* + x_1^\circ; x_2^* + x_2^\circ; \dots; x_n^* + x_n^\circ)$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

- Es seien $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ und $(x_1^\bullet; x_2^\bullet; \dots; x_n^\bullet)$ zwei Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems (1). Dann gilt

$$(x_1^\bullet - x_1^*)\vec{a}_1 + (x_2^\bullet - x_2^*)\vec{a}_2 + \dots + (x_n^\bullet - x_n^*)\vec{a}_n = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

und somit ist $(x_1^\bullet - x_1^*; x_2^\bullet - x_2^*; \dots; x_n^\bullet - x_n^*) = (x_1^\circ; x_2^\circ; \dots; x_n^\circ)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems (2). Die letzte Gleichung lässt sich umformen in

$(x_1^\bullet; x_2^\bullet; \dots; x_n^\bullet) = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*) + (x_1^\circ; x_2^\circ; \dots; x_n^\circ)$, woraus zu entnehmen ist, wie man jede Lösung des inhomogenen Gleichungssystems gewinnen kann.

G 29

Satz G 29: Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems

Wenn $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ eine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen ist, so erhält man *alle* Lösungen dieses inhomogenen Systems, indem man zu $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ jede Lösung des zugehörigen homogenen Systems addiert.

G 5.4 Koeffizientenmatrix; Vektoren und Matrizen

In Abschnitt G 3.1 wurde schon das GAUSSsche Eliminierungsverfahren allein auf das *Zahlenschema* angewandt, welches ein lineares Gleichungssystem vollständig beschreibt. Dabei handelte es sich allerdings nur um eine *tabellarische Verkürzung* von Äquivalenzumformungen eines Gleichungssystems nach dem GAUSSschen Algorithmus. Mengen derartiger *rechteckiger Zahlenschemata* sollen nun nachfolgend in unterschiedlicher Weise zu neuen, selbstständigen Rechenbereichen entwickelt werden, wobei praktische Beispiele zugleich die Nützlichkeit eines solchen Vorgehens belegen.

Betrachtet man das lineare Gleichungssystem (1) aus Beispiel G 40 (Abschnitt G 3.1), so lässt sich einmal das Zahlenschema abheben, welches das System vollständig beschreibt, und zum anderen dasjenige, welches nur aus den Koeffizienten der Variablen besteht:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 1 \\ x + 3y + z & = & 2 \\ -2x - 2y + 4z & = & 4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{array} \right) \quad (1)$$

Derartige rechteckige Zahlenschemata nennt man *Matrizen* (Singular: *Matrix*). Bezogen auf das genannte Gleichungssystem in (1) ist die aus 3 Spalten bestehende Matrix die *Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems. Das *gesamte* Gleichungssystem wird durch Hinzunahme des Spaltenvektors der Absolutglieder zur Koeffizientenmatrix wiedergegeben: Diese Matrix heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix*.

Bei einem linearen Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen wie in G 5.2 (2) spricht man analog von

- der Koeffizientenmatrix,
- dem Vektor der Variablen,
- dem Vektor der Absolutglieder

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dabei sei vereinbart, Matrizen auch kurz mit großen lateinischen Buchstaben, wie A, B, C, \dots , zu bezeichnen.

• *Multiplikation Matrix · Vektor*

Eine (Koeffizienten-)Matrix und Vektoren können als Bausteine eines linearen Gleichungssystems angesehen werden. Dabei zeigt uns die Vektorschreibweise des Gleichungssystems (3) in G 5.2, dass die Koeffizientenmatrix eine Zusammenfassung der Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ist, die jeweils die Koeffizienten einer Variablen geordnet enthalten.

Die Zuordnung der Variablen zu den Zahlen in der Koeffizientenmatrix bestimmt (dann definitionsgemäß) die Multiplikation „Matrix · Vektor“. Im folgenden Beispiel wird nochmals der Beginn einer tabellarischen Berechnung des Gleichungssystems (1) angegeben und dabei gezeigt, wie $A \cdot \vec{x}$ auszuführen ist:

$$\begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & \\
 \hline
 2 & 3 & -1 & 1 \\
 1 & 3 & 1 & 2 \\
 -2 & -2 & 4 & 4 \\
 \hline
 \dots & & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ x+3y+z \\ -2x-2y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Für die Produktbildung $A \cdot \vec{x}$ muss zunächst vorausgesetzt werden, dass die Anzahl der Spalten in der Matrix A mit der Anzahl der Koordinaten des Vektors \vec{x} übereinstimmt. Wie aus (3) ersichtlich, erhält man dann die Koordinaten des neuen Spaltenvektors, der durch die Multiplikation $A \cdot \vec{x}$ oder (für einen konstanten Vektor \vec{c}) durch $A \cdot \vec{c}$ entsteht, jeweils als Summe der Koordinatenprodukte aus Zeilenvektor von A und Spaltenvektor \vec{x} bzw. \vec{c} („Zeile mal Spalte“).

Folgende Beispiele illustrieren noch einmal die allgemeine Vorschrift für die *Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor*:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \\ ek_1 + fk_2 + gk_3 + hk_4 \end{pmatrix},
 \quad
 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Dabei wurde im rechts stehenden Zahlenbeispiel als Matrix die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus Beispiel G 42d verwendet, welches das Tripel (1; 1; 4) zur Lösung hat.

Die praktische Nützlichkeit des Produkts einer Matrix mit einem Vektor zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel G 58:

Bei der Herstellung von Produkten aus bestimmten Rohstoffen sollen die Kosten je Produkt aus den Rohstoffkosten möglichst *rationell* berechnet werden.

Werden z.B. drei Produkte P_1, P_2 und P_3 zu 40%, 20%, 30%, 10% bzw. zu 10%, 10%, 30%, 50% bzw. zu 20%, 10%, 10%, 60% aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4 hergestellt, so beschreibt bereits die folgende Tabelle (in Mengeneinheiten ME) die Zusammensetzung einer ME je Produkt wesentlich übersichtlicher als der komplizierte Text:

	R_1	R_2	R_3	R_4
P_1	0,4	0,2	0,3	0,1
P_2	0,1	0,1	0,3	0,5
P_3	0,2	0,1	0,1	0,6

Das Zahlenschema dieser Tabelle können wir als (technologische) Matrix T des Herstellungsverfahrens ansehen. Werden die Rohstoffkosten (in Geldeinheiten GE) je ME mit $K_1 = 15, K_2 = 12,$

$K_3 = 10$ und $K_4 = 8$ veranschlagt, so lassen sich durch Multiplikation von Matrix T mit dem Spaltenvektor \vec{k} der Kosten (Kostenvektor) die Einzelkosten für jedes der Produkte P_1, P_2, P_3 je ME in dem zugehörigen Ergebnisvektor erfassen:

$$T \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,2 \\ 9,7 \\ 10,0 \end{pmatrix}$$

Die Kosten für 1 ME z. B. des Produkts P_1 ergeben sich durch Multiplikation des obersten Zeilenvektors von T mit dem Vektor \vec{k} : $(0,4 \cdot 15 + 0,2 \cdot 12 + 0,3 \cdot 10 + 0,1 \cdot 8)$ GE = 12,2 GE.

• *Multiplikation Matrix · Matrix*

Ein Anwendungsbeispiel mit einer betriebswirtschaftlichen Fragestellung soll die Grundlage für die Definition der Multiplikation von Matrizen bilden.

G 59

Beispiel G 59:

In einem Produktionsablauf werden aus 3 Rohstoffen 2 Zwischenprodukte erzeugt, aus denen dann direkt 3 verschiedene Endprodukte entstehen. Fig. G 117 gibt die Zusammensetzung je einer Einheit des Zwischenproduktes Z_1 bzw. des Endproduktes E_1 an. Die anschließenden Tabellen a) und b) komplettieren die Daten für die restlichen Produkte.

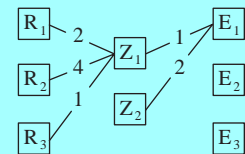


Fig. G 117

Die Tabelle c) ist die Umsetzung der Frage: Wie viel Rohstoffeinheiten werden zur Herstellung von je einer Einheit des Endproduktes E_1 , E_2 bzw. E_3 benötigt?

	R_1	R_2	R_3
Z_1	2	4	1
Z_2	3	1	4

a)

	Z_1	Z_2
E_1	1	2
E_2	2	1
E_3	3	1

b)

	R_1	R_2	R_3
E_1	a_1	b_1	c_1
E_2	a_2	b_2	c_2
E_3	a_3	b_3	c_3

c)

Für das Produkt E_1 *allein* könnten wir nun ermitteln:

$$E_1 = 1 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 = 1 \cdot (2R_1 + 4R_2 + 1R_3) + 2 \cdot (3R_1 + 1R_2 + 4R_3) = 8R_1 + 6R_2 + 9R_3 \quad (5)$$

Die Gesamtzusammenhänge zwischen End- und Zwischenprodukten sowie zwischen Roh- und Zwischenprodukten hingegen lassen sich nur beschreiben, wenn man Gleichungssysteme (ggf. in Matrizendarstellung) verwendet:

$$\begin{aligned} 1Z_1 + 2Z_2 &= E_1 \\ 2Z_1 + 1Z_2 &= E_2 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}; \quad 2R_1 + 4R_2 + 1R_3 = Z_1 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \\ 3Z_1 + 1Z_2 &= E_3 \end{aligned} \quad (6) \quad (7)$$

Durch Einsetzen von $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ aus der Matrizengleichung (7) in die Gleichung (6) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Wie durch die obigen Überlegungen zur Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor schon vorbereitet, ermittelt man das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen, indem man die Matrix

A mit jeder Spalte (jedem Spaltenvektor) der Matrix B multipliziert, wobei die Anzahl der Spalten in A mit der Anzahl der Zeilen in B übereinstimmen muss. Die dabei entstehenden Spaltenvektoren bilden die Spalten der Produktmatrix $A \cdot B$. Auf unser Beispiel angewendet heißt das

wegen $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$ (also „1. Zeile \cdot 1. Spalte“); $2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$ (also „2. Zeile \cdot 1. Spalte“); ...; $1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 6$ (also „1. Zeile \cdot 2. Spalte“); ...; $3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$ (also: „3. Zeile \cdot 3. Spalte“):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 6 \\ 9 & 13 & 7 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 6 \\ 9 & 13 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Daraus lassen sich außer der bereits auf anderem Weg ermittelten Gleichung $8R_1 + 6R_2 + 9R_3 = E_1$ zugleich die Beziehungen $7R_1 + 9R_2 + 6R_3 = E_2$ und $9R_1 + 13R_2 + 7R_3 = E_3$ ablesen: Die Produktmatrix in (9) gibt also gerade den Zusammenhang zwischen Endprodukten und Rohstoffen wieder und stellt somit die ausgerechnete Tabelle c) dar.

In Beispiel G 59 war in Gleichung (8) entsprechend der Einsetzung *zuerst* die Multiplikation „Matrix \cdot Vektor“ aus (7) und *dann* „Matrix \cdot (neuem) Vektor“ aus (6) auszuführen.

Anschließend haben wir in Einklang mit dieser nacheinanderfolgenden Multiplikation das Produkt „Matrix \cdot Matrix“ ($A \cdot B$) gebildet. Bedenkt man, dass ein Spaltenvektor (wie auch ein Zeilenvektor) eine spezielle Matrix ist, so wurde in diesem Beispiel also die Assoziativität der Matrizenmultiplikation bereits mit vorweggenommen: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Für die Formulierung der nachfolgenden Definition ist die Angabe der *Zeilenzahl* und der *Spaltenzahl* einer Matrix wichtig. Die Matrix A in (2) (s. S. 300) hat m Zeilen und n Spalten; das Zahlenpaar (m, n) heißt der **Typ der Matrix A**, wobei es auch üblich ist, die Matrix A als eine $(m \times n)$ -Matrix (gelesen: *m Kreuz n*) zu bezeichnen.

Definition G 18:

Es sei A eine $(m \times n)$ -Matrix und B eine $(p \times q)$ -Matrix.

Das Produkt $A \cdot B$ existiert, falls $n = p$ ist (falls also die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt).

Die **Produktmatrix $A \cdot B = C$** ist dann eine Matrix von Typ (m, q). Sie wird wie folgt gebildet:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = i \left(\begin{array}{c|c} & c_{ik} \\ \hline & k \end{array} \right) \quad (p = n)$$

mit $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$.

Stimmen für die $(m \times n)$ -Matrix A und die $(p \times q)$ -Matrix B die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B überein, so heißen A und B (in dieser Reihenfolge!) auch *verkettet*.

G 18

G 5.5 Weitere Rechenoperationen mit Matrizen; Rechenregeln

Sind Vektoren bezüglich eines Koordinatensystems der Ebene oder des Raumes dargestellt oder – etwas verallgemeinert – als n-gliedrige Spaltenvektoren (bzw. einheitlich als Zeilenvektoren: n-Tupel reeller Zahlen, vgl. G 5.1), so erfolgt die Addition zweier Vektoren durch die Addition entsprechender Koordinaten. Analog erhält man **das skalare Vielfache eines Vektors**, in dem man jede Koordinate mit dem Skalar (also einer reellen Zahl) multipliziert. Diese Verknüpfungen werden auf Matrizen gleichen Typs (also Matrizen gleicher Zeilen- und gleicher Spaltenzahl) übertragen.

G 19

Definition G 19: Addition von Matrizen gleichen Typs

$A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ seien $(m \times n)$ -Matrizen. Dann versteht man unter ihrer Summe $A + B$ eine Matrix C mit der Eigenschaft

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die **Summe** $A + B = C = (c_{ik})$ ist eine Matrix vom Typ (m, n) mit $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

G 20

Definition G 20: Skalare Vervielfachung einer Matrix (Multiplikation mit einer reellen Zahl)

$A = (a_{ik})$ sei eine $(m \times n)$ -Matrix und r eine reelle Zahl. Dann versteht man unter dem Vielfachen rA von Matrix A eine Matrix C mit der Eigenschaft

$$rA = C = r \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & \dots & r \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & \dots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Das **Vielfache** $rA = C = (c_{ik})$ ist eine Matrix vom Typ (m, n) mit $c_{ik} = r \cdot a_{ik}$.

- Rechenregeln für die Addition und die Vervielfachung von Matrizen**

In der Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen, also aller Matrizen gleichen Typs, gilt für beliebige $(m \times n)$ -Matrizen A, B und C sowie $r, s \in \mathbb{R}$:

- | | |
|--|----------------------------|
| (1) $A + B = B + A$ | (5) $r(sA) = (r \cdot s)A$ |
| (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ | (6) $(r + s)A = rA + sA$ |
| (3) Es gibt es eine Matrix O mit $A + O = A$. | (7) $r(A + B) = rA + rB$ |
| (4) Zu A gibt es eine Matrix $-A$ mit $A + (-A) = O$. | (8) $1A = A$ |

Die in den Sätzen G 1 und G 2 (Abschnitt G 1.2) und in Verbindung mit Nullvektor und entgegengesetztem Vektor beschriebenen Eigenschaften sind hier als Spezialfall mit enthalten.

Auf eine detaillierte Begründung der einzelnen Rechenregeln wird verzichtet. Man müsste dazu jeweils von der Definition G 19 bzw. G 20 ausgehen und außerdem die bekannten Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen nutzen.

- Rechenregeln für die Multiplikation von Matrizen**

Aus der Verbindung von Addition und Vervielfachung mit der Multiplikation von Matrizen ergeben sich folgende Eigenschaften der Matrizenverknüpfung:

A, A_1, A_2 seien $(m \times n)$ -Matrizen, B, B_1, B_2 seien $(n \times q)$ -Matrizen und C sei eine $(q \times t)$ -Matrix. Dann gilt:

- | | |
|---|---|
| (1) $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B;$ | $A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2$ |
| (2) $r(A \cdot B) = (rA) \cdot B = A \cdot (rB)$ ($r \in \mathbb{R}$) | (3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ |

Stimmen Zeilen- und Spaltenzahl einer Matrix überein, so nennt man diese $(n \times n)$ -Matrix auch **n-reihige Matrix** bzw. **quadratische Matrix**. Für eine n -reihige Matrix E_n mit

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \text{ und eine } (m \times n)\text{-Matrix } A \text{ gelten dann folgende Gleichungen:}$$

$$(4) \quad A \cdot E_n = A, \quad E_m \cdot A = A$$

Wegen der Eigenschaft (4) heißt eine solche quadratische Matrix $E = E_n$ **Einheitsmatrix**.

Anmerkung: Selbst bei existierenden Produkten $A \cdot B$ und $B \cdot A$ gilt im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.

- Die inverse Matrix A^{-1} zu einer Matrix A

Im Zahlenbereich \mathbb{R} ist hinsichtlich der Multiplikation die Zahl 1 das neutrale Element:

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Für von 0 verschiedene reelle Zahlen ist die Multiplikation umkehrbar ($a \cdot x = b$) und speziell gibt es zu jedem a mit $a \neq 0$ die inverse Zahl $a^{-1} = \frac{1}{a}$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Die zu betrachtende Matrix A sei eine $(n \times n)$ -Matrix, also eine quadratische Matrix. Dann gilt mit der n -reihigen Einheitsmatrix $E = E_n$ die Gleichung: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Der Vergleich mit den reellen Zahlen führt zur Aufgabe, eine Matrix X derart zu bestimmen, dass $A \cdot X = X \cdot A = E$ gilt. Falls eine solche Matrix X existiert, so soll sie *inverse Matrix* zu A genannt und mit A^{-1} bezeichnet werden: $X = A^{-1}$.

Für die weiteren Überlegungen ist wiederum nützlich, die n -reihige Matrix A als Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems (in der Schreibweise von G 5.4) zu betrachten, also: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Wir nehmen an, dass es zu A eine inverse Matrix A^{-1} gibt. Dann ist $A^{-1} \cdot A = E$ und es sind nach Multiplikation des Gleichungssystems mit A^{-1} von links unter Verwendung der oben aufgeführten Rechenregeln folgende Umformungen möglich:

$$\begin{array}{ll} A \cdot \vec{x} = \vec{b} & | \cdot A^{-1} \\ A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{b} & \text{bzw.} \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} & \text{und damit} \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \end{array}$$

Wenn also A^{-1} zu A existiert, so ergibt sich aus der letzten Umformung, dass für *jeden* n -gliedrigen Spaltenvektor \vec{b} (der Absolutglieder) das Gleichungssystem stets eindeutig lösbar sein muss. Das heißt, die Äquivalenzumformungen nach dem GAUSSschen Algorithmus überführen A in eine Dreiecksform und weiter (nach rückläufiger Eliminierung) in die Diagonalform mit der Zahl 1 auf den Diagonalplätzen (sonst 0). Diese Eigenschaft ist unabhängig vom Vektor \vec{b} der Absolutglieder, sie ist also nur eine Eigenschaft von A :

Definition G 21:

Eine quadratische Matrix A heißt **regulär**, falls alle Gleichungssysteme mit A als Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar sind.

G 21

Nach Satz G 29 (G 5.3) genügt es, dass die in obiger Definition geforderte Eigenschaft für *ein* Gleichungssystem, etwa $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, zutrifft, da sie dann für *alle* Systeme erfüllt ist.

Eine nicht reguläre quadratische Matrix heißt **singulär**.

Es seien A und B reguläre n -reihige Matrizen. Für die Matrixgleichung $A \cdot X = B$ betrachten wir jeweils die n Spaltenvektoren \vec{x}_i bzw. \vec{b}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in der Matrix X bzw. B . Es gilt

$$\begin{aligned} A \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) &= (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n), \\ (A \cdot \vec{x}_1, A \cdot \vec{x}_2, \dots, A \cdot \vec{x}_n) &= (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n). \end{aligned}$$

Der Vergleich der n Spaltenvektoren aus der letzten Gleichung ergibt n Gleichungssysteme:

$$A \cdot \vec{x}_i = \vec{b}_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wegen der Regularität der Matrix A sind diese stets eindeutig lösbar und deshalb ist die Matrix X in $A \cdot X = B$ eindeutig bestimmt. Dies gilt analog für Y in $Y \cdot A = B$.

Wir kehren zum Fall $B = E$ (E Einheitsmatrix) zurück und betrachten $A \cdot X = E$ und $Y \cdot A = E$.

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ – auch nicht bei abgesicherter Ausführbarkeit bei n-reihigen (und deshalb verketteten) Matrizen. Im vorliegenden konkreten Fall

$A \cdot X = E$ (1) und $Y \cdot A = E$ (2) folgt jedoch stets $X = Y$. Wegen (1) und (2) sowie der reproduzierenden Eigenschaft von E (s. S. 305, (4)) gilt nämlich

$$X = E \cdot X = (Y \cdot A) \cdot X = Y \cdot (A \cdot X) = Y \cdot E = Y.$$

G 30

Satz G 30:

Ist A eine reguläre Matrix, so haben die Gleichungen $A \cdot X = E$ und $Y \cdot A = E$ dieselbe eindeutig bestimmte Lösung $X = Y$.

G 22

Definition G 22:

Ist A eine reguläre n-reihige Matrix, so heißt die eindeutig bestimmte Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ die **zu A inverse Matrix A^{-1}** .

Für die Bestimmung von A^{-1} zu einer gegebenen regulären Matrix A kann man die n Gleichungssysteme $(A \cdot \vec{x}_1, A \cdot \vec{x}_2, \dots, A \cdot \vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ in *ein und demselben* Schema lösen.

Völlig gleichberechtigt dazu wäre der Weg, den Vektor \vec{b} der Absolutglieder variabel zu halten, also überzugehen zu

$$\begin{array}{ll} A \cdot \vec{x} = \vec{y} & \text{bzw.} \quad A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{y}, \\ A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot E \cdot \vec{y} & \text{bzw.} \quad E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} \end{array}$$

und die beiden rechten Gleichungen zu Anhaltspunkten für die Berechnung von A^{-1} nach dem GAUSSschen Algorithmus zu nehmen (vgl. Beispiel G 60).

G 60

Beispiel G 60: Berechnung der inversen Matrix A^{-1} zu A mittels GAUSSschem Algorithmus

Zu einer gegebenen Matrix A notiert man sich ein im Vergleich zu Abschnitt G 3.1 erweitertes Schema, indem man zunächst die Koeffizientenmatrix A wie gewohnt aufschreibt und dann rechts vom senkrechten Strich die entsprechende Einheitsmatrix – bei der hier gegebenen 3-reihigen Matrix A gleichbedeutend mit den Einheitsvektoren \vec{e}_1 , \vec{e}_2 und \vec{e}_3 . Dann wendet man auf das gesamte Schema den GAUSSschen Algorithmus an:

$$\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 5 \\ \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 5 \end{array} \\ \text{Gesucht: } A^{-1} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{array} \\ \begin{array}{c|c} A & E \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot (-1) \end{array} \\ \begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{array} \\ \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{array} \quad \cdot 5 \\ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \end{array}$$

Der Einsatz eines GTA vereinfacht den Rechenaufwand beträchtlich. Man gibt dazu die Matrix ein und potenziert mit (-1) (Fig. G 118).

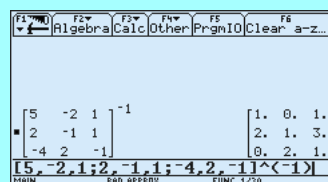


Fig. G 118

Am Beispiel der *singulären* 3-reihigen Matrix B kann man sich überzeugen, dass Äquivalenzumformungen diese Matrix in eine Trapezform überführen und mindestens ein Gleichungssystem $B \cdot \vec{x} = \vec{e}_i$, ($i = 1, 2, 3$) nicht lösbar ist. Das heißt: Zu B existiert keine inverse Matrix.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \dots$$

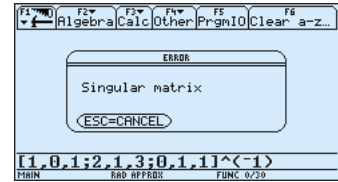


Fig. G 119

Auf dem GTA-Bildschirm würde die in Fig. G 119 wiedergegebene Anzeige erscheinen.

Zusammenfassend lässt sich damit feststellen: Zu einer Matrix A existiert genau dann eine inverse Matrix A^{-1} (d. h.: Matrix A ist genau dann *invertierbar*), wenn A regulär ist.

G 5.6 Lösen von Anwendungsproblemen

Beispiel G 61:

Das in Beispiel G 59 bearbeitete Problem der Materialverflechtung von Rohstoffen über Zwischenprodukte zu Endprodukten soll nun mithilfe eines (speziellen) linearen Gleichungssystems gelöst werden. Die dortigen Tabellen a) und b) werden dazu neu nach den Spalten interpretiert: Der Rohstoff R_1 geht mit $2 \cdot Z_1$ Mengeneinheiten in das erste Zwischenprodukt ein und mit $3 \cdot Z_2$ in das zweite: $R_1 = 2 \cdot Z_1 + 3 \cdot Z_2$; das Zwischenprodukt Z_1 geht mit $1 \cdot E_1$, $2 \cdot E_2$ und $3 \cdot E_3$ Mengeneinheiten in die drei Endprodukte ein usw. Es entsteht folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} \text{(I)} & R_1 & & = 2Z_1 + 3Z_2 \\ \text{(II)} & R_2 & & = 4Z_1 + Z_2 \\ \text{(III)} & R_3 & & = Z_1 + 4Z_2 \\ \text{(IV)} & & Z_1 & = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ \text{(V)} & & Z_2 & = 2E_1 + E_2 + E_3 \end{array} \quad (1)$$

Ordnet man so um, dass alle Variablen auf der linken Seite des Systems stehen, so ergibt sich die folgende Struktur (die auch mit der Schirmbilddarstellung des GTA übereinstimmt). Es handelt sich um ein Gleichungssystem aus 5 Gleichungen mit 8 Variablen, so dass (im Hinblick auf das praktische Problem sinnvollerweise) die Variablen E_1 , E_2 und E_3 als freie Parameter gewählt werden können.

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I)} & R_1 & -2Z_1 & -3Z_2 & & & & = 0 \\ \text{(II)} & R_2 & -4Z_1 & -Z_2 & & & & = 0 \\ \text{(III)} & R_3 & -Z_1 & -4Z_2 & & & & = 0 \\ \text{(IV)} & & Z_1 & & -E_1 & -2E_2 & -3E_3 & = 0 \\ \text{(V)} & & & Z_2 & -2E_1 & -E_2 & -E_3 & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c} .4 \\ .3 \end{array} \quad (2)$$

Nun werden nach dem GAUSSschen Algorithmus die Variablen Z_1 und Z_2 in den Gleichungen (I) bis (III) eliminiert (und so das Teilschema der Koeffizientenmatrix, welches aus den ersten fünf Spalten besteht, auf Diagonalform gebracht)

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I')} & R_1 & -2Z_1 & & -6E_1 & -3E_2 & -3E_3 & = 0 \\ \text{(II')} & R_2 & -4Z_1 & & -2E_1 & -E_2 & -E_3 & = 0 \\ \text{(III')} & R_3 & -Z_1 & & -8E_1 & -4E_2 & -4E_3 & = 0 \\ \text{(IV)} & & Z_1 & & -E_1 & -2E_2 & -3E_3 & = 0 \\ \text{(V)} & & & Z_2 & -2E_1 & -E_2 & -E_3 & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c} .4 \\ .2 \end{array} \quad (3)$$

Wie in Beispiel G 62, (5) und (6), sind schon in Beispiel G 61 Matrizen als Teilstrukturen des Gleichungssystems (1) aufgetreten, die durch Vertauschen der Zeilen und der Spalten aus gegebenen Tabellen hervorgingen. Diesen Vorgang nennt man *Transponieren*, bezeichnet durch ein hochgestelltes T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Aus einer $(m \times n)$ -Matrix A entsteht die zu A **transponierte Matrix A^T** , eine $(n \times m)$ -Matrix.

In (5)/(6) zeigt sich die allgemeine Regel, die ohne Beweis angeführt sei: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (8)
Ein Beispiel (vgl. die Matrizen aus G 59 und G 62) möge diese Regel verdeutlichen:

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 6 \\ 9 & 13 & 7 \end{pmatrix}^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 13 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Beispiel G 63:

In Fortsetzung der Beispiele G 61 und G 62 sind in der beschriebenen Produktion nun die Rohstoffmengen R_1 , R_2 und R_3 für die Erzeugung der Endprodukte mit 20, 70 bzw. 10 Einheiten und zusätzlich von 40 Einheiten Z_1 und 30 Einheiten Z_2 zu ermitteln.

Unter Nutzung der *Matrizenrechnung* – weniger steht in diesem Beispiel das schnell erreichte Ergebnis im Vordergrund – soll eine Verkürzung des Rechenweges verbunden mit der Erweiterung auf variable Anforderungen (Erzeugnisse) erreicht werden.

Der Rohstoffbedarf für die Endprodukte ergibt sich aus (5) in Beispiel G 62.

Weiterhin können wir die Tabelle a) aus Beispiel G 59 auch schreiben als

$$\begin{aligned} 2Z_1 + 3Z_2 &= R_1 \\ 4Z_1 + 1Z_2 &= R_2 \\ 1Z_1 + 4Z_2 &= R_3 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

so dass mit $Z_1 = 40$ und $Z_2 = 30$ der Rohstoffbedarf R_{zi} für die Zwischenprodukte folgt:

$$\begin{pmatrix} R_{Z1} \\ R_{Z2} \\ R_{Z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 190 \\ 160 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Mit (5) (vgl. auch (9), S. 303) und der Gleichung (11) ergibt sich der Rohstoffbedarf insgesamt:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} \right]$$

Durch Variation der beiden Spaltenvektoren in der letzten Gleichung könnten also viele Modellrechnungen durchgeführt werden (die Zusammenfassung von (5) und (11) ergibt hier das konkrete Ergebnis).

G 63

Beispiel G 64:

Im einem bestimmten Produktionsprozess werden Endprodukte sowohl aus Rohstoffen als auch aus Zwischenprodukten wie folgt hergestellt:

	R_1	R_2	R_3		R_1	R_3	Z_1	Z_2	Z_3
Z_1	3	2	4	E_1	10	0	3	1	5
Z_2	1	4	3	E_2	7	6	2	5	1
Z_3	2	1	1						

G 64

Die Tabellen geben die in Mengeneinheiten ausgedrückte Zusammensetzung der Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 bzw. R_3 sowie die der Endprodukte an, die – in *einem* Vorgang – aus 2 der 3 Rohstoffe und aus den 3 Zwischenprodukten gewonnen werden. Es soll ermittelt werden, wie viel Einheiten der einzelnen Rohstoffe nötig sind, um je eine Einheit der Endprodukte E_1 und E_2 herzustellen. Dafür nutzen wir die Darstellung der Zusammenhänge mithilfe von Matrizen, die den Zahlenschemata der Tabellen entsprechen. Ein *erster Teil* der Rohstoffmengen geht über die Zwischenprodukte in die Endprodukte ein:

$$\begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 20 \\ 13 & 25 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

Ein *zweiter Teil* wird jeweils direkt einfließen (man beachte dabei, dass für die Addition mit den schon berechneten Anteilen der Rohstoff R_2 berücksichtigt werden muss: R_2 geht *direkt* jeweils mit 0 Einheiten ein):

$$\begin{pmatrix} E_1'' \\ E_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}. \quad \text{Zusammen erhält man:}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1' \\ E_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1'' \\ E_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 20 \\ 13 & 25 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 20 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

Die zugeordnete Tabelle hat dann folgendes Aussehen:

	R_1	R_2	R_3
E_1	30	15	20
E_2	20	25	30

G 6 Skalarprodukt von Vektoren

G 6.1 Definition und Eigenschaften

Zwei Beispiele aus der Physik führen uns zu einer weiteren Rechenoperation in der Menge der Vektoren.

G 65

Beispiel G 65:

Hebt man einen Gegenstand mit der Gewichtskraft F_G z. B. vom Fußboden auf einen Tisch (Fig. G 124), so wird mechanische Arbeit verrichtet. Diese Arbeit berechnet sich nach der bekannten Formel $W = F_s \cdot s$, wobei F_s die Größe der Kraft ist, die in Richtung des Weges wirkt, und s die Länge dieses Weges angibt.¹⁾ Im Gegensatz zu den vektoriellen Größen Kraft und Weg lässt sich der mechanischen Arbeit keine Richtung zuordnen – es handelt sich hier um eine skalare Größe. In unserem Beispiel bemerken wir insbesondere, dass F_s und s dieselbe Richtung haben.

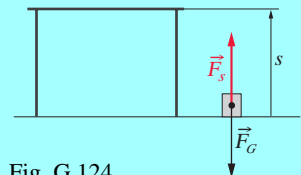


Fig. G 124

¹⁾ Wir fassen auch hier die physikalischen Größen Kraft und Weg als vektorielle Größen auf, rechnen aber nur mit ihren Beträgen $F_G = |\vec{F}_G|$, $F_s = |\vec{F}_s|$ usw.

Beispiel G 66:

Wird ein Eisenbahnwagen auf Schienen von einem Traktor gezogen, der nicht auf diesen Schienen fährt (Fig. G 125), so wirkt auf den Wagen eine Kraft F_T in Richtung des Seiles, also nicht in Wegrichtung. Dennoch wird die mechanische Arbeit nach der Formel $W = F_s \cdot s$ berechnet, wobei F_s die Größe der Kraft ist, die in Richtung des Weges wirkt. Ist α der Winkel zwischen den Kräften F_T und F_s , so gilt nach trigonometrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck ABC für die Größen dieser Kräfte $F_s = F_T \cos \alpha$. Für die mechanische Arbeit erhalten wir also insgesamt $W = F_T \cdot s \cdot \cos \alpha$. (Diese Formel gilt auch für das Beispiel G 65, da dort $\alpha = 0^\circ$ und damit $\cos \alpha = 1$ ist.)

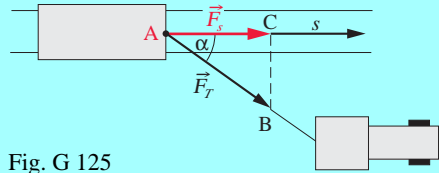


Fig. G 125

G 66

Bedenkt man nun, dass in obiger Formel Kraft F und Weg s vektorielle Größen darstellen, die in unserer Schreibweise mit \vec{F} und \vec{s} bezeichnet werden, so können wir auch $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$ schreiben. Dabei bezeichnet α den von \vec{F} und \vec{s} eingeschlossenen Winkel. Wir stellen fest: Auf der linken Seite der obigen Gleichung steht eine skalare, also nicht gerichtete Größe und auf der rechten Seite das Produkt aus den **Beträgen zweier gerichteter Größen** und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Ausgehend davon definieren wir nun ein Produkt zweier Vektoren. Weil das Resultat dieses Produktes ein Skalar, also eine reelle Zahl ist, heißt dieses Produkt **Skalarprodukt**¹⁾.

Definition G 23:

Sind \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren, so nennt man $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ das **Skalarprodukt** der Vektoren \vec{a} und \vec{b} , wobei α den von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

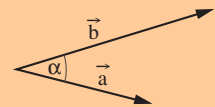


Fig. G 126

G 23

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist offensichtlich gleich 0, wenn einer der beiden Vektoren der Nullvektor $\vec{0}$ ist, da dieser den Betrag 0 hat. Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ folgt aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ nach der Definition des Skalarprodukts hingegen stets $\cos \alpha = 0$, also $\alpha = 90^\circ$. Das heißt: Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehen in diesem Falle senkrecht aufeinander. Da umgekehrt auch das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die senkrecht aufeinander stehen, wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0$ den Wert 0 hat und wir vereinbaren wollen, dass der Nullvektor senkrecht zu jedem Vektor ist, gilt:

Satz G 31: Orthogonalität von Vektoren

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

G 31

Bemerkung: Das Skalarprodukt ist eine Rechenoperation in der Menge der Vektoren, die zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet und damit aus dem Bereich der Vektoren herausführt. Speziell gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$. Nach Satz G 31 kann das Skalarprodukt zweier Vektoren aber auch den Wert 0 annehmen, wenn beide Vektoren vom Nullvektor verschieden sind.

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ gilt ferner:

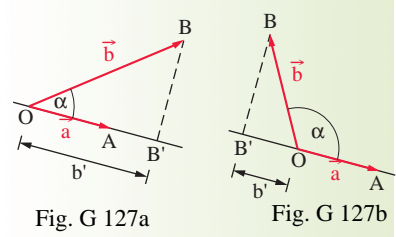
- $\alpha = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- $\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$
- $\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

¹⁾ Später werden wir ein weiteres Produkt zweier Vektoren, das sog. Vektorprodukt, definieren.

Für spätere Anwendungen betrachten wir nun zwei beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b} und denken uns diese durch die Pfeile \vec{OA} bzw. \vec{OB} repräsentiert. Dann gilt (Fig. G 127a/b):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos \alpha$$

Projiziert man nun den Pfeil \vec{OB} senkrecht auf die Gerade, die durch \vec{OA} bestimmt ist, so erhält man $b' = m(OB')$, die vorzeichenbehaftete Länge der Projektion von \vec{b} auf \vec{a} , deren Vorzeichen von der Lage der Projektion OB' bezüglich der Richtung von \vec{a} abhängt. Damit ergibt sich:



G 32

Satz G 32:

Sind \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren und bezeichnet b' die vorzeichenbehaftete Länge der Projektion von \vec{b} auf \vec{a} , so gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot b'$.

Um das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben sind, berechnen zu können, ohne zunächst Beträge und eingeschlossenen Winkel bestimmen zu müssen, sind die folgenden *Eigenschaften des Skalarprodukts* bedeutsam:

G 33

Satz G 33: **Eigenschaften des Skalarprodukts**

Für beliebige Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sowie für jede reelle Zahl t gilt:

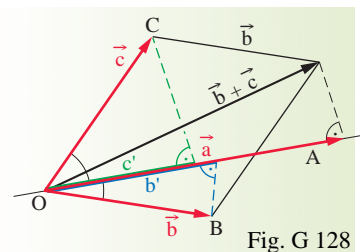
- | | |
|--|---|
| a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität), | b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Distributivität), |
| c) $(t \vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$, | d) $\vec{a}^2 \geq 0$, wobei $\vec{a}^2 = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} = \vec{0}$. |

Der Beweis für die Kommutativität des Skalarproduktes a) ergibt sich sofort aus Definition G 23.

Zum Beweis des Distributivgesetzes b) betrachten wir drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} , die im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen und durch die Pfeile \vec{OA} , \vec{OB} und \vec{OC} repräsentiert werden (Fig. G 128):

b' und c' sind die vorzeichenbehafteten Längen der Projektionen von \vec{b} und \vec{c} auf \vec{a} .

Nach Satz G 32 gilt dann $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| b'$ und $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| c'$, woraus $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| b' + |\vec{a}| c' = |\vec{a}| (b' + c')$ folgt. Nun ist aber $b' + c'$ die Länge der Projektion des Vektors von $\vec{b} + \vec{c}$ auf \vec{a} , es folgt also $|\vec{a}| (b' + c') = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ und damit insgesamt $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.



Die Beweise für c) und d) ergeben sich wieder unmittelbar aus der Definition G 23.

Um nun das Skalarprodukt zweier Vektoren aus ihren Koordinaten zu berechnen, gehen wir von der eindeutigen Zerlegbarkeit jedes Vektors in Komponenten bezüglich des Koordinatensystems aus (s. Abschnitte G 1.3 und G 1.4):

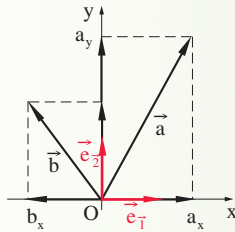


Fig. G 129

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2$

und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2$

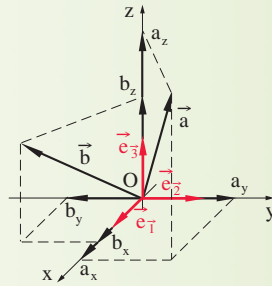


Fig. G 130

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3$

und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3$

gilt dann

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2) \cdot (b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3) \cdot (b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3)$$

Unter Verwendung des Distributivgesetzes der Skalarmultiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = & a_x b_x \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_x b_y \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ & + a_y b_x \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_y b_y \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = & a_x b_x \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_x b_y \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a_x b_z \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ & + a_y b_x \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_y b_y \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + a_y b_z \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ & + a_z b_x \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + a_z b_y \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + a_z b_z \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Weil $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1$

Weil $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1$,
 $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = |\vec{e}_3|^2 = 1$

und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$ ist, ergibt sich

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$ ist, ergibt sich

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Zusammengefasst lässt sich damit feststellen:

Satz G 34: Berechnung des Skalarprodukts aus den Koordinaten der Vektoren

a) Sind in der Ebene die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben, dann ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

b) Sind im Raum die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben, dann ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

G 34

Betrachtet man den Spezialfall $\vec{a} = \vec{b}$, so ergibt sich

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ (nach Definition G 23),
- in der Ebene $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2$, also $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ oder $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$ (nach Satz G 34),
- im Raum $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, also $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ oder $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$ (nach Satz G 34).

G 6.2 Anwendungen des Skalarprodukts

Unter Verwendung von Satz G 34 ist es möglich, die Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren (Satz G 31) mittels ihrer Koordinaten zu formulieren.

G 35

Satz G 35: Orthogonalitätsbedingung für Vektoren

Sind bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \text{ (in der Ebene)} \quad \Bigg| \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \text{ (im Raum)}$$

gegeben, dann gilt $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn

$$a_x b_x + a_y b_y = 0.$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

G 67

Beispiel G 67:

Gegeben seien in der Ebene die beiden Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad g_2: y = -x + 3,$$

die einander im Punkt $S(1; 2)$ schneiden. Aus Fig. G 131 ist zu entnehmen, dass diese beiden Geraden senkrecht zueinander sein könnten. Dies soll nun rechnerisch nachgeprüft werden.

Dazu bestimmen wir von g_1 und g_2 jeweils einen Richtungsvektor:

Aus der Gleichung von g_1 können wir sofort einen Richtungsvektor dieser Geraden ablesen, nämlich $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Da der Anstieg der Geraden g_2 den Wert -1 hat, kann man aus dem Anstiegsdreieck $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als einen Richtungsvektor von g_2 bestimmen. Bildet man nun das

Skalarprodukt dieser beiden Richtungsvektoren, so ergibt sich

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

\vec{a}_1 und \vec{a}_2 stehen also senkrecht aufeinander (Satz G 35). Da aber \vec{a}_1 und \vec{a}_2 die Richtungen von g_1 bzw. g_2 beschreiben, sind folglich auch g_1 und g_2 senkrecht zueinander und die Vermutung aus Fig. G 131 wurde bestätigt.

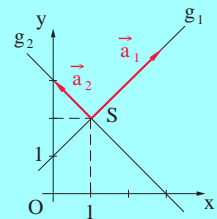


Fig. G 131

Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann man auch nutzen, um die Größe des von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels zu berechnen.

G 68

Beispiel G 68:

Gegeben seien im Raum die drei Punkte $A(2; -1; 2)$, $B(1; 1; 1)$ und $C(0; 3; 2)$. Es sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC zu bestimmen (Fig. G 132).

Zu den Punkten A, B und C gehören die eindeutig bestimmten Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

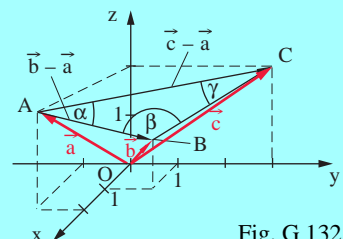


Fig. G 132

Wir berechnen zuerst den **Winkel α** . Durch die Vektoren $\vec{b} - \vec{a} = \vec{AB}$ und $\vec{c} - \vec{a} = \vec{AC}$ werden die Richtungen der Dreiecksseiten \overline{AB} bzw. \overline{AC} beschrieben. Folglich ist der Innenwinkel α gleich dem Winkel, der durch die beiden Vektoren \vec{AB} und \vec{AC} eingeschlossen wird. Diesen Winkel können wir mithilfe des Skalarprodukts berechnen.

Aus Definition G 23 folgt nämlich $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, für unser Beispiel also

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})}{|\vec{b} - \vec{a}| \cdot |\vec{c} - \vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{2 + 8 + 0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{20}} \approx 0,9129,$$

woraus sich $\alpha \approx 24,09^\circ$ ergibt. Auf analogem Wege erhält man $\beta \approx 131,81^\circ$ und $\gamma \approx 24,09^\circ$.

Will man zur Winkelberechnung den GTA verwenden, so ist es zweckmäßig, eine auf die drei Ausgangsvektoren bezogene Funktion zu definieren, etwa

■ Define winkel(v1,v2,v3)=approx{cos{ $\frac{\text{dotP}(v2-v1,v3-v1)}{|\text{dotP}(v2-v1,v2-v1) \cdot \text{dotP}(v3-v1,v3-v1)|}$ }}}, 1)

so dass dann nur noch die Koordinaten der drei Vektoren (hier $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) eingegeben werden müssen (Fig. G 133).

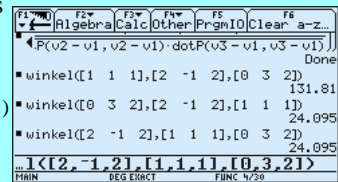


Fig. G 133

Als weiteres Beispiel sei ein physikalisches Problem gewählt:

Beispiel G 69:

Eine Kraft \vec{F} mit dem Betrag 4 400 N, die in Richtung der positiven z-Achse wirkt, bewegt einen Körper von A(2; 1; -4) nach B(2; 4; 0). Die Punktkoordinaten sind bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems angegeben, in dem auf jeder Achse eine Einheit 1 m entspricht. Es ist die bei dieser Bewegung verrichtete Arbeit zu berechnen.

In Fig. G 134 wird neben den Punkten A und B auch die Kraft \vec{F} veranschaulicht, und zwar so, dass eine Einheit auf der z-Achse gerade 1 kN entspricht.

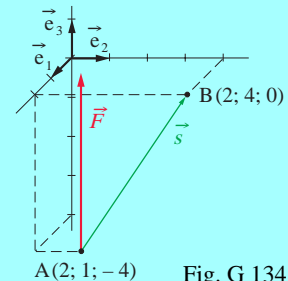


Fig. G 134

Für die mechanische Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \angle(\vec{F}, \vec{s})$, die die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,4 \end{pmatrix}$ längs des Weges $\vec{s} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ leistet, gilt

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4,4 \cdot 4 = 17,6.$$

Da die Einheiten in Kilonewton bzw. Meter festgelegt waren, beträgt die verrichtete Arbeit also 17,6 kNm.

¹⁾ Beim TI 92 erhält man mittels $\text{dotP}([\text{Koordinaten von } \vec{a}], [\text{Koordinaten von } \vec{b}])$ das Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

G 70

Beispiel G 70:

Man bestimme die Winkel α , β und γ , die ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ mit den drei Koordinatenachsen

einschließt und ermittle einen Zusammenhang zwischen den Kosinuswerten dieser Winkel. Zur Bestimmung des Winkels mit der x-Achse verwendet man einen Richtungsvektor dieser

Achse, z.B. $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{e}_x = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x| \cdot \cos \alpha$, also $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_x|} = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\vec{a}| \cdot 1} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$.

Analog erhält man mit $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$ und mit $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Dann gilt: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\vec{a}|^2} = 1$ (vgl. S. 313).

G 71

Beispiel G 71:

Gegeben sind in der Ebene oder im Raum die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Der Vektor \vec{b} soll so in zwei Komponenten \vec{b}_1 und \vec{b}_2 mit $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ zerlegt werden, dass $\vec{b}_1 \parallel \vec{a}$ und $\vec{b}_2 \perp \vec{a}$ ist.

Nach Satz G 32 gilt für den vorzeichenbehafteten Betrag der Projektion von \vec{b} auf \vec{a} : $b' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Damit ergibt sich aber für die zu \vec{a} parallele Komponente von \vec{b} : $\vec{b}_1 = b' \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \vec{a}$.

Für \vec{b}_2 erhält man $\vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1 = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \vec{a}$.

Mit dem Skalarprodukt kann man nun noch überprüfen, ob $\vec{b}_2 \perp \vec{a}$ ist:

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{a} = \left(\vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \vec{a} \right) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} a^2 = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Damit sind Parallel- und Normalkomponente von \vec{b} bezüglich \vec{a} bestimmt.

G 36

Satz G 36: **Normalenvektor einer Geraden**

Ist $ax + by + d = 0$ die allgemeine parameterfreie Gleichung einer Geraden g in der Ebene, so ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein **Normalenvektor** \vec{n} von g .

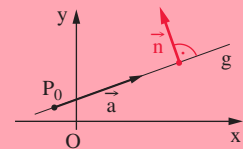


Fig. G 135

Beweis:

Für die Gerade $g: ax + by + d = 0$ ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ein **Richtungsvektor** (vgl. Satz G 16). Betrachtet man

nun den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, so gilt $\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -b \cdot a + a \cdot b = 0$, d. h. $\vec{n} \perp \vec{a}$. Folglich ist \vec{n} senk-

recht zur Geraden g und damit ein Normalenvektor von g . w.z.b.w.

Auch für eine Ebene ϵ im Raum kann man den Begriff des **Normalenvektors** erklären: Ein Vektor \vec{n} ist ein Normalenvektor von ϵ , wenn \vec{n} senkrecht zu ϵ steht. \vec{n} ist dann senkrecht zu den Spannvektoren \vec{u} und \vec{v} von ϵ sowie senkrecht zu jedem Vektor, der sich als Linearkombination aus \vec{u} und \vec{v} ergibt (Fig. G 136).

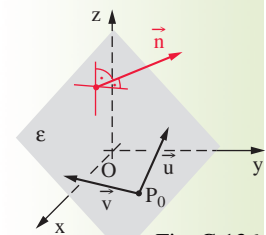


Fig. G 136

Beispiel G 72:

Es soll gezeigt werden, dass die Höhen eines Dreiecks ABC einander in einem Punkt H schneiden (Fig. G 137).

Es seien $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$ und $\vec{AB} = \vec{c}$ sowie H der Schnittpunkt der Lote von A auf BC und von B auf CA. Dann bezeichnen $\vec{u} = \vec{HA}$ und $\vec{v} = \vec{HB}$ zwei weitere Vektoren, für die $\vec{a} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{v} = 0$ gilt.

Betrachtet man nun zusätzlich den Vektor $\vec{w} = \vec{HC}$, so muss zum Beweis der Behauptung gezeigt werden, dass $\vec{c} \cdot \vec{w} = 0$ gilt.

Weil $\vec{u} = \vec{w} + \vec{b}$ und $\vec{v} = \vec{w} - \vec{a}$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{u} &= \vec{a} \cdot (\vec{w} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{w} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ und} \\ \vec{b} \cdot \vec{v} &= \vec{b} \cdot (\vec{w} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{w} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0.\end{aligned}$$

Addiert man die letzten beiden Gleichungen, so ergibt sich

$\vec{a} \cdot \vec{w} + \vec{b} \cdot \vec{w} = 0$, also $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{w} = 0$, woraus wegen $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ folgt:
 $-\vec{c} \cdot \vec{w} = 0$ bzw. $\vec{c} \cdot \vec{w} = 0$. w. z. b. w.

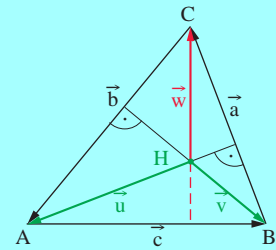


Fig. G 137

G 72

G 6.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. Ebene; HESSESche Normalformen

Es soll nun das Problem des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g in der Ebene sowie von einer Ebene ϵ im Raum erörtert werden. Dabei versteht man unter diesem Abstand die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen P und allen Punkten von g bzw. ϵ (Fig. G 138a, G 138b). Das Lot \vec{PL} ist jeweils die kürzeste dieser Strecken, weil in jedem der entstehenden Dreiecke PLP_i ($P_i \neq L$) die Beziehung $|\vec{PP}_i| > |\vec{PL}|$ gilt. In beiden Fällen existiert deshalb jeweils *genau eine* solche kürzeste Verbindungsstrecke.

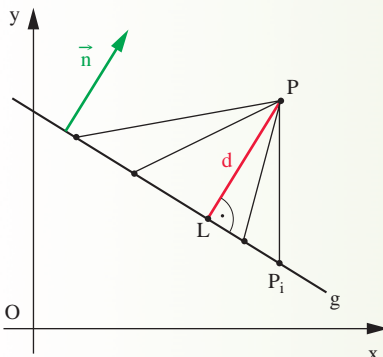


Fig. G 138a

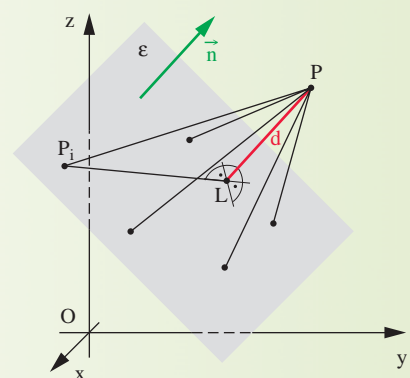


Fig. G 138b

Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, für die Abstandsbestimmung eines Punktes P von einer Geraden g in der Ebene bzw. von einer Ebene ϵ im Raum zunächst jeweils einen Normalenvektor \vec{n} zu g zu betrachten (vgl. Abschnitt G 6.2). Dabei empfiehlt es sich sogar, diesen Normalenvektor als Einheitsvektor zu wählen, der dann **Einheitsnormalenvektor** genannt und mit \vec{n}^0 bezeichnet wird.

Zur Vorbereitung auf das Lösen obigen Problems werden zunächst Gleichungen von Geraden bzw. Ebenen entwickelt, wenn diese durch einen Punkt P_0 und einen Normalenvektor \vec{n} bestimmt sind.

Es gilt

in der Ebene	im Raum
--------------	---------

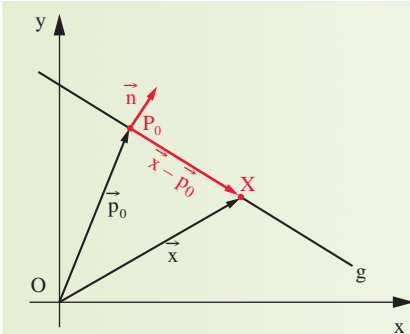


Fig. G 139a

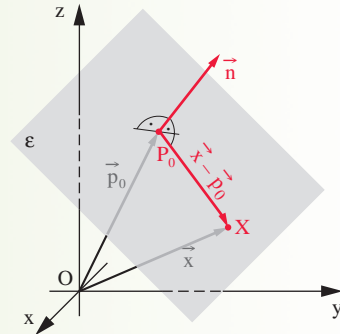


Fig. G 139b

$$g: \vec{p}_0 \vec{X} \cdot \vec{n} = 0, \text{ also } (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\epsilon: \vec{p}_0 \vec{X} \cdot \vec{n} = 0, \text{ also } (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

Verwendet man in beiden Fällen anstelle eines beliebigen Normalenvektors einen Einheitsnormalenvektor, so ergibt sich die

HESSEsche Normalform der Gleichung einer Geraden in der Ebene

$$g: (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0. \quad (1a)$$

HESSEsche Normalform der Gleichung einer Ebene im Raum

$$\epsilon: (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0. \quad (1b)$$

In Koordinatenschreibweise notiert erhält man

in der Ebene

$$\text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(|\vec{n}| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$$

die Gleichung

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0.$$

im Raum

$$\text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$(|\vec{n}| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2})$$

die Gleichung

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt sich

$$\frac{x_n \cdot x + y_n \cdot y - (x_n \cdot x_0 + y_n \cdot y_0)}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = 0.$$

$$\frac{x_n \cdot x + y_n \cdot y + z_n \cdot z - (x_n \cdot x_0 + y_n \cdot y_0 + z_n \cdot z_0)}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}} = 0.$$

Setzt man

$$x_n = a, y_n = b, x_n \cdot x_0 + y_n \cdot y_0 = -d, \quad \left| \quad x_n = a, y_n = b, z_n = c, x_n \cdot x_0 + y_n \cdot y_0 + z_n \cdot z_0 = -d, \right.$$

so erhält man die **HESSEsche Normalform** der Gleichung einer Geraden in der Ebene
bzw. einer Ebene im Raum in **Koordinatenschreibweise**

$$g: \frac{ax + by + d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0. \quad (2a) \quad \left| \quad \epsilon: \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0. \quad (2b)$$

Ist umgekehrt die Gleichung einer Geraden in der Ebene
bzw. einer Ebene im Raum in Koordinatenschreibweise

$$ax + by + d = 0 \quad (3a) \quad \left| \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (3b)$$

gegeben, so lässt sich daraus durch Division durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ bzw. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
die HESSEsche Normalform (2a) bzw. (2b) der Gleichung dieser Objekte bestimmen.

Außerdem ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ein **Normalenvektor** der Geraden mit der
Gleichung (3a) in der Ebene (vgl. Satz G 36).

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ein **Normalenvektor** der Ebene mit der
Gleichung (3b) im Raum.

Es soll nun in der Ebene der Abstand eines Punktes von einer Geraden und im Raum der Abstand eines Punktes von einer Ebene bestimmt werden, wobei die Gerade und die Ebene durch die Gleichungen (1a) bzw. (1b) bestimmt seien. Wir betrachten dazu das Skalarprodukt $(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, in dem \vec{p}_0 der Ortsvektor eines Punktes P_0 und \vec{n} ein Normalenvektor der Geraden bzw. der Ebene ist. Setzt man in dieser Gleichung für \vec{x} den Ortsvektor \vec{p}_1 eines Punktes P_1 der gegebenen Geraden bzw. eines Punktes P_1 der gegebenen Ebene ein, so ist der Wert dieses Skalarproduktes wegen der Orthogonalität von $(\vec{p}_1 - \vec{p}_0)$ und \vec{n} gleich 0. Wird aber für \vec{x} der Ortsvektor \vec{p}_1 eines Punktes P_1 eingesetzt, der *nicht* auf der betrachteten Geraden bzw. Ebene liegt, so muss dieses Skalarprodukt einen Wert $h \neq 0$ annehmen. Es soll nun gezeigt werden, dass dieser Wert h gerade dem Abstand des Punktes P_1 von der Geraden bzw. der Ebene entspricht.

In der Ebene sei die Gerade g durch

$$g: (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$$

gegeben (Fig. G 140a). $P_1(x_1; y_1)$ ist ein Punkt der Ebene, der nicht auf g liegt; \vec{p}_1 ist der zugehörige Ortsvektor.

Im Raum sei die Ebene ϵ durch

$$\epsilon: (\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$$

gegeben (Fig. G 140b). $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ist ein Punkt des Raumes, der nicht auf ϵ liegt; \vec{p}_1 ist der zugehörige Ortsvektor.

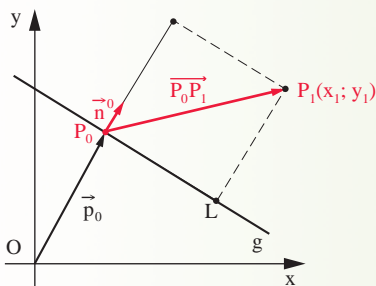


Fig. G 140a

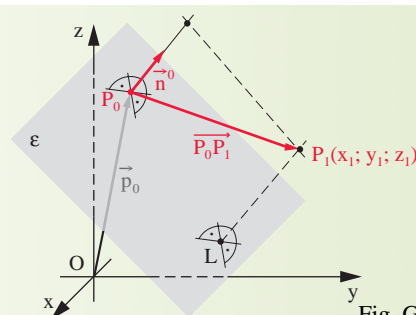


Fig. G 140b

Wir betrachten nun das **Skalarprodukt** $h = (\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, das nach Satz G 32 gleich dem Produkt aus dem **Betrag** von $\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ und der Länge der senkrechten Projektion von $\vec{p}_0\vec{p}_1$ auf \vec{n}^0 ist. Die Länge dieser senkrechten Projektion entspricht aber gerade dem Abstand des Punktes P_1 von der Geraden g (Fig. G 140a) bzw. von der Ebene ε (Fig. G 140b). Wegen $|\vec{n}^0| = 1$ gibt $h = (\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ also den Abstand von P_1 zu g bzw. zu ε an. Der Fall, dass P_1 auf g bzw. ε liegt, ordnet sich mit in die Betrachtungen ein: Es gilt dann jeweils $h = (\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$. Wir fassen zusammen:

G 37 Satz G 37: **Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. einer Ebene**
Ist $(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0$ die Gleichung einer Geraden g in der Ebene bzw. die Gleichung einer Ebene ε im Raum und P_1 ein Punkt der Ebene bzw. des Raumes, so gibt $h = (\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ den Abstand des Punktes P_1 von g bzw. von ε an.

G 73 Beispiel G 73:
In einem kartesischen Koordinatensystem seien eine Gerade g durch ihre Gleichung $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ gegeben (Fig. G 141). Es sind die **Abstände** der drei Punkte $P(4; 6)$, $Q(6; -3)$ und $R(2; 1,5)$ von **der Geraden** g zu bestimmen.

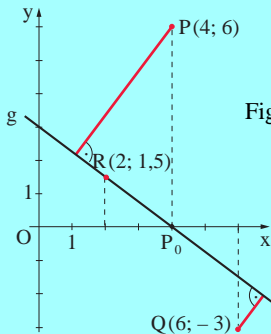


Fig. G 141

a) Wir berechnen zuerst den Abstand des Punktes P von g .
Durch Umformung der Geradengleichung in $3x + 4y = 12$ erhalten wir einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Geraden g und ermitteln beispielsweise $P_0(4; 0)$ als einen zu g gehörenden Punkt. Nach Satz G 37 gilt dann für den Abstand des Punktes P von g :

$$h = (\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{25}} = \frac{0 + 24}{5} = \frac{24}{5} = 4,80$$

Beträgt die Koordinateneinheit 1 cm, so ist P von der Geraden 4,8 cm entfernt.

b) Für den Abstand des Punktes Q von der Geraden g ergibt sich:

$$h = (\vec{q} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{25}} = \frac{6 - 12}{5} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

Q ist von der Geraden 1,2 cm entfernt.

c) Nun bestimmen wir noch den Abstand des Punktes R von der Geraden g . Wir erhalten:

$$h = (\vec{r} - \vec{p}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{25}} = \frac{-6 + 6}{5} = 0$$

Der Punkt R liegt *auf* der Geraden g , da sein Abstand zu ihr den Wert 0 hat.

Da die Gleichungen (1a) und (2a) für Geraden in der Ebene und die Gleichungen (1b) und (2b) (s. S. 318f.) für Ebenen im Raum äquivalent zueinander sind, gilt in Analogie zu Satz G 37 auch die folgende Aussage:

Satz G 38: Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. einer Ebene

- a) Ist $ax + by + d = 0$ die Gleichung einer Geraden g in der Ebene und $P_1(x_1; y_1)$ ein Punkt dieser Ebene, so gibt $h = \frac{ax_1 + by_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ den Abstand des Punktes P_1 von der Geraden g an.
- b) Ist $ax + by + cz + d = 0$ die Gleichung einer Ebene ϵ im Raum und $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ein Punkt, so gibt $h = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ den Abstand des Punktes P_1 von der Ebene ϵ an.

Beispiel G 74:

Gegeben sei im Raum eine Ebene ϵ mit der Gleichung $\epsilon: 3x - 2y + z - 9 = 0$. Es sind die Abstände der Punkte $P(1; 2; 3)$, $Q(3; 1; 2)$ und $R(2; -4; 1)$ von ϵ zu bestimmen.

- a) Der Punkt P hat von ϵ den Abstand $h = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 - 9}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14}} \approx -1,87$.

Beträgt die Koordinateneinheit 1 cm, so hat P von ϵ also einen Abstand von rund 1,87 cm.

- b) Der Punkt Q hat von ϵ den Abstand $h = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 2 - 9}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}} = 0$. Q liegt folglich in ϵ .

- c) Der Punkt R hat von ϵ den Abstand $h = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 - 9}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} \approx 2,41$.

Wie in den Beispielen G 73 und G 74 zu sehen war, kann der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g bzw. einer Ebene ϵ auch negativ sein. Um dies geometrisch zu interpretieren, erinnern wir uns, dass zur Bestimmung dieses Abstandes der Vektor $\vec{P_0P_1}$ auf \vec{n} senkrecht projiziert wurde. Liegt nun P_1 auf der Seite der Geraden bzw. Ebene, in die \vec{n} zeigt (vgl. Fig. G 140a/b), so ist die Größe des Winkels zwischen $\vec{P_0P_1}$ und \vec{n} kleiner als 90° .

Folglich ist das **Skalarprodukt** $\vec{n} \cdot \vec{P_0P_1}$ positiv und daher auch der entsprechende Abstand. Liegt aber P_1 auf der Seite der Geraden bzw. Ebene, in die \vec{n} nicht zeigt (vgl. Fig. G 142 für die Situation in der Ebene), so ist der Winkel zwischen $\vec{P_0P_1}$ und \vec{n} größer als 90° und das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{P_0P_1}$ sowie folglich dann auch der entsprechende Abstand negativ.

Mittels des Vorzeichens des betrachteten Abstandes kann man also entscheiden, auf welcher Seite der Geraden bzw. der Ebene der Punkt P_1 in Bezug auf die Richtung des Normalenvektors \vec{n} liegt.

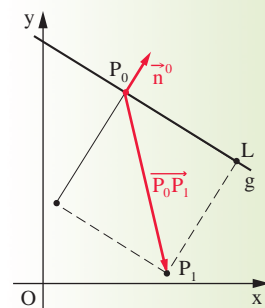


Fig. G 142

Mit den in Satz G 38 angegebenen Formeln lässt sich allerdings nicht der *Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum* bestimmen. Beispiel G 75 zeigt, wie man in einem solchen Fall vorgeht.

Beispiel G 75:

Es soll der Abstand des Punktes $Q(2; 1; -3)$ von der Geraden g

mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnet werden.

Man bestimmt dazu einen Punkt F auf g , für den $\vec{FQ} \perp g$ ist (Fig. G 143).

Da $F \in g$, muss es eine reelle Zahl t^* geben, so dass für den Ortsvektor \vec{f} von F gilt: $\vec{f} = \vec{p}_0 + t^* \vec{a}$ (1)

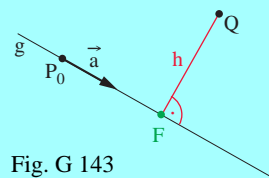


Fig. G 143

Dabei ist \vec{p}_0 der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P_0 von g (z.B. $P_0(-1; 2; 2)$) und \vec{a} der Richtungsvektor von g . Weil $\vec{FQ} = \vec{q} - \vec{f}$ senkrecht zu g ist, muss $(\vec{q} - \vec{f}) \cdot \vec{a} = 0$ (2) gelten. Setzt man in (2) den entsprechenden Ausdruck für \vec{f} aus (1) ein, so ergibt sich

$$[\vec{q} - (\vec{p}_0 + t^* \vec{a})] \cdot \vec{a} = 0, \text{ also } (\vec{q} - \vec{p}_0) \cdot \vec{a} - t^* \vec{a}^2 = 0, \text{ woraus } t^* = \frac{(\vec{q} - \vec{p}_0) \cdot \vec{a}}{\vec{a}^2} \text{ folgt.}$$

Mit diesem Wert erhält man aus (1) den Ortsvektor zu F :

$$\vec{f} = \vec{p}_0 + \frac{(\vec{q} - \vec{p}_0) \cdot \vec{a}}{\vec{a}^2} \vec{a}.$$

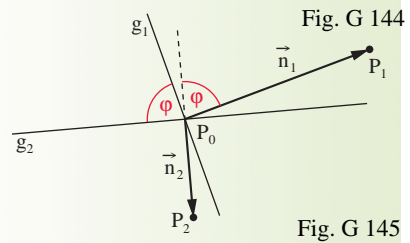
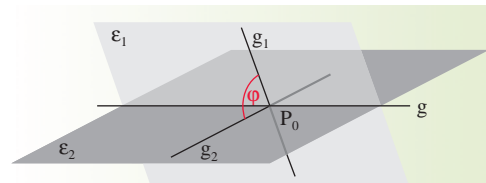
Bei Einsetzen der gegebenen Werte für \vec{p}_0 , \vec{q} und \vec{a} ergibt sich dann

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ also } F(-\frac{19}{9}; \frac{13}{9}; \frac{8}{9})$$

$$\text{und damit } h = |\vec{FQ}| = \sqrt{(\vec{q} - \vec{f})^2} = \frac{1}{3} \sqrt{290} \approx 5,676 \text{ (LE).}$$

G 6.4 Schnittwinkel zweier Ebenen

Wie in Abschnitt G 4.5 erörtert, können zwei Ebenen ε_1 und ε_2 im Raum zueinander parallel sein oder sich in einer Geraden g schneiden. Schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden, so bestimmen sie einen Schnittwinkel (Fig. G 144). Wir wählen nun einen beliebigen Punkt P_0 der Schnittgeraden g und betrachten diejenige Gerade g_1 aus ε_1 und diejenige Gerade g_2 aus ε_2 , die jeweils durch P_0 verläuft und senkrecht zu g ist. Da diese beiden Geraden durch den Punkt P_0 gehen, liegen sie auch in einer Ebene und bestimmen einen Schnittwinkel (vgl. Definition G 16). Dieser (spitze) Winkel ist der Schnittwinkel von ε_1 und ε_2 .



Zur rechnerischen Bestimmung dieses Schnittwinkels betrachten wir zwei **Normalenvektoren** \vec{n}_1 und \vec{n}_2 der beiden Ebenen ε_1 bzw. ε_2 . Da \vec{n}_1 senkrecht zu ε_1 und \vec{n}_2 senkrecht zu ε_2 verläuft, ist der von \vec{n}_1 und \vec{n}_2 gebildete Winkel gleich dem Schnittwinkel φ oder $180^\circ - \varphi$. Fig. G 145 zeigt die (ebene) Situation in der durch g_1 und g_2 bestimmten Ebene, die auch die beiden Repräsentanten $\vec{P_0P_1}$ und $\vec{P_0P_2}$ von \vec{n}_1 und \vec{n}_2 enthält. Der Schnittwinkel φ von ε_1 und ε_2 kann folglich über das **Skalarprodukt** zweier zugehöriger Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 bestimmt werden.

G 76

Beispiel G 76:

Es sei der Schnittwinkel der Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders zu bestimmen.

Wir wählen dazu das bereits in Beispiel G 47 betrachtete regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge 2, das entsprechend Fig. G 98 in ein Koordinatensystem gestellt wird. Da dort schon die Gleichung der Ebene durch B, C, D aufgestellt wurde, ermitteln wir den Schnittwinkel zwischen dieser Ebene und der xy -Ebene.

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** der xy-Ebene. Nun ist noch ein Normalenvektor \vec{n}_2 der Ebene

mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ (s. Beispiel G 48) zu bestimmen.

Da $\sqrt{3} \cdot x + 3 \cdot y + \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot z - 6 = 0$ die parameterfreie Form dieser Ebenengleichung ist, lässt

sich daraus $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ (vgl. S. 319) ablesen.

Nun ist $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{2} \sqrt{6}$, woraus mit $|\vec{n}_1| = 1$ und $|\vec{n}_2| = \frac{1}{2} \sqrt{54}$ folgt: $\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sqrt{\frac{3}{27}}$ bzw. $\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 71,22^\circ$.

Da dieser Winkel spitz ist, hat der gesuchte Schnittwinkel eine Größe von ca. $71,2^\circ$.

Bemerkung: Weil der ermittelte Schnittwinkel kein Teiler von 360° ist, kann man mit regelmäßigen Tetraedern den Raum nicht schlicht und lückenlos ausfüllen.

G 7 Kreise und Kugeln

G 7.1 Gleichungen von Kreis und Kugel

Im Folgenden werden parallel zueinander jeweils ein Kreis in der Ebene (Fig. G 146) bzw. eine Kugel im Raum (Fig. G 147) betrachtet.

M bezeichnet den Mittelpunkt, r den Radius und P einen Punkt des Kreises bzw. der Kugel. Dabei liegen die folgenden Definitionen zu Grunde.

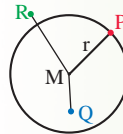


Fig. G 146

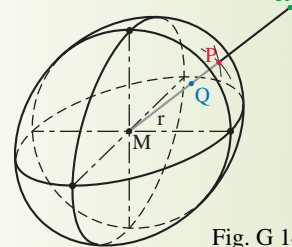


Fig. G 147

Definition G 24:

Die Menge aller Punkte P der Ebene, die von einem gegebenen Punkt M denselben Abstand r haben, heißt **Kreis** mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* r.

G 24

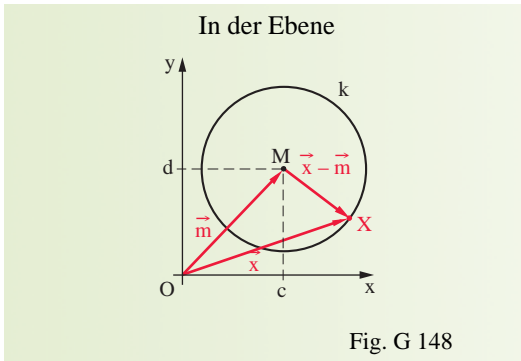
Definition G 25:

Die Menge aller Punkte des Raumes, die von einem gegebenen Punkt M denselben Abstand r haben, heißt **Kugel** mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* r.

G 25

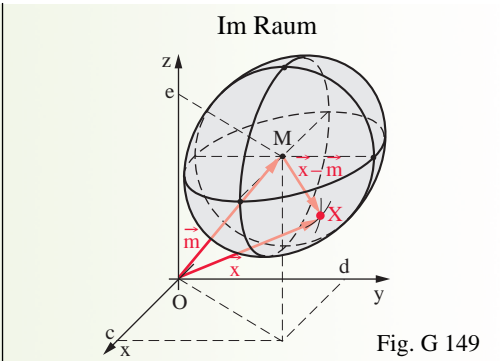
Man nennt einen Punkt R *äußeren Punkt* des Kreises bzw. der Kugel, wenn $|\overline{MR}| > r$ gilt. Entsprechend heißt ein Punkt Q *innerer Punkt* des Kreises bzw. der Kugel, wenn $|\overline{MQ}| < r$ gilt.

Zur analytischen Beschreibung von Kreis bzw. Kugel werden beide Punktmengen bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems betrachtet. Mithilfe von **Vektoraddition** und **Skalarproduktbildung** lassen sich die zugehörigen Gleichungen herleiten:



M(c; d)

X(x; y)



Mittelpunkt: M

Radius: r

beliebiger Punkt: X

M(c; d; e)

X(x; y; z)

Betrachtet man den Vektor \overrightarrow{MX} , so gilt

$$|\overrightarrow{MX}| = r \text{ bzw. } \overrightarrow{MX}^2 = r^2.$$

Wegen $\overrightarrow{MX} = \vec{x} - \vec{m}$ folgt $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$. Damit ist

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$$

die vektorielle Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

die vektorielle Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

G 39

Satz G 39: **Vektorielle Kreis- und Kugelgleichung**

Es seien \vec{m} der Ortsvektor des Mittelpunktes M und \vec{x} der Ortsvektor zu einem Punkt X eines Kreises in der Ebene bzw. einer Kugel im Raum mit dem Radius r. Dann ist

$$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$$

eine **vektorielle Gleichung dieses Kreises bzw. dieser Kugel**.

Analog zum Vorgehen bei Geraden und Ebenen wird nun die vektorielle Gleichung von Kreis bzw. Kugel in Koordinatenschreibweise umgeformt. Man erhält:

Kreis

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$$

$$\begin{pmatrix} x - c \\ y - d \end{pmatrix}^2 = r^2$$

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$

Kugel

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$$

$$\begin{pmatrix} x - c \\ y - d \\ z - e \end{pmatrix}^2 = r^2$$

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 + (z - e)^2 = r^2$$

G 40

Satz G 40: **Koordinatengleichung des Kreises**

In einem ebenen kartesischen Koordinatensystem wird der **Kreis k** mit dem Mittelpunkt M(c; d) und dem Radius r durch die Gleichung $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ beschrieben.

Satz G 41: Koordinatengleichung der Kugel

In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem wird die **Kugel k** mit dem Mittelpunkt $M(c; d; e)$ und dem Radius r durch die Gleichung $(x - c)^2 + (y - d)^2 + (z - e)^2 = r^2$ beschrieben.

G 41

Beispiel G 77:

Gegeben seien drei Kreise k_1 , k_2 und k_3 durch ihre Mittelpunkte und Radien:

$$k_1: M_1(0; -3), r_1 = 1; \quad k_2: M_2(\sqrt{2}; 2), r_2 = \sqrt{3}; \quad k_3: M_3(0; 0), r_3 = 2.$$

Dann lauten die zugehörigen Gleichungen

$$k_1: x^2 + (y + 3)^2 = 1; \quad k_2: (x - \sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 = 3; \quad k_3: x^2 + y^2 = 4.$$

In Fig. G 150 sind diese drei Kreise in einem Koordinatensystem dargestellt. Es ist die **Lage des Punktes** $A(0; 1)$ bezüglich der drei gegebenen Kreise zu untersuchen.

Wir setzen dazu die Koordinaten von $A(0; 1)$ in die „linken“ Seiten der zugehörigen Kreisgleichungen ein und vergleichen mit den „rechten“ Seiten dieser Gleichungen. Es ergibt sich

$$\text{für } k_1: 0^2 + (1 + 3)^2 = 0 + 16 = 16; \quad 16 > 1,$$

$$\text{für } k_2: (0 - \sqrt{2})^2 + (1 - 2)^2 = 2 + 1 = 3; \quad 3 = 3,$$

$$\text{für } k_3: 0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1; \quad 1 < 4.$$

Bedenkt man, dass die „linke Seite“ der Kreisgleichung (Satz G 40) das Quadrat des Abstandes des Punktes A vom Kreismittelpunkt M und die „rechte Seite“ das Quadrat des Kreisradius darstellt, so lässt sich folgern:

A ist ein äußerer Punkt von k_1 , denn sein Abstand von M_1 ist größer als r_1 ;

A ist ein Punkt von k_2 , denn sein Abstand von M_2 ist gleich r_2 ;

A ist ein innerer Punkt von k_3 , denn sein Abstand von M_3 ist kleiner als r_3 .

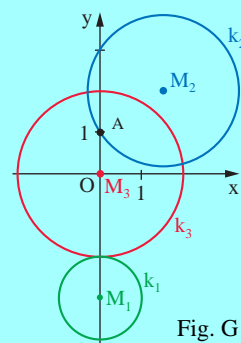


Fig. G 150

G 77

Wir können also feststellen:

Satz G 42: Lage eines Punktes bezüglich eines Kreises in der Ebene

Ein Punkt $P(x_1; y_1)$ gehört genau dann zu dem Kreis k mit der Gleichung $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$, wenn die Koordinaten des Punktes P die Kreisgleichung erfüllen, d. h., wenn

$$(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 = r^2 \text{ ist.}$$

Gilt dagegen $(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 < r^2$ oder $(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 > r^2$, so liegt $P(x_1; y_1)$ innerhalb bzw. außerhalb des betrachteten Kreises.

G 42

In Analogie gilt für die Kugel

Satz G 43: Lage eines Punktes bezüglich einer Kugel

Ein Punkt $P(x_1; y_1; z_1)$ gehört genau dann zur Kugel k mit der Gleichung

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 + (z - e)^2 = r^2, \text{ wenn die Koordinaten des Punktes die Kugelgleichung erfüllen, d. h., wenn } (x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 + (z_1 - e)^2 = r^2 \text{ ist.}$$

Gilt dagegen $(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 + (z_1 - e)^2 < r^2$ oder $(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 + (z_1 - e)^2 > r^2$, so liegt $P(x_1; y_1; z_1)$ innerhalb bzw. außerhalb der betrachteten Kugel.

G 43

Aus der allgemeinen Kreisgleichung ergibt sich

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2dy + d^2 = r^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + c^2 + d^2 - r^2 = 0.$$

Damit haben wir eine quadratische Gleichung mit den Variablen x und y erhalten, die ebenfalls einen Kreis beschreibt. Diese Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren der allgemeinen Kugelgleichung (Satz G 41) erhält man analog:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cx - 2dy - 2ez + c^2 + d^2 + e^2 - r^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeinen quadratischen Gleichung im Raum:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

G 78

Beispiel G 78:

Es ist zu **untersuchen, ob die quadratische Gleichung**

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ **einen Kreis in der Ebene,**

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 14 = 0$ **eine Kugel im Raum**

beschreibt.

Um diese Aufgabe lösen zu können, versuchen wir die gegebenen Gleichungen in die Gestalt der allgemeinen Kreisgleichung (Satz G 40) bzw. Kugelgleichung (Satz G 41) umzuformen.

Zu a):

Aus der gegebenen Gleichung erhält man $(x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = 20$.

Die quadratische Ergänzung liefert

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 20 + 4 + 1, \text{ also } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Das heißt: Die Gleichung in a) beschreibt den Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2; 1)$ und dem Radius 5 in der Ebene.

Zu b):

Auf demselben Wege wie bei a) erhält man

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + z^2 = -14, \text{ woraus sich } (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + z^2 = -14 + 4 + 9 \text{ bzw. } (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = -1 \text{ ergibt. Da } r^2 \text{ keine negative Zahl sein kann, wird durch die gegebene Gleichung keine Kugel im Raum beschrieben.}$$

Für die Erarbeitung von *Parametergleichungen* als einer weiteren analytischen Beschreibung werden nun Kreis und Kugel getrennt betrachtet.

Gegeben sei in einem kartesischen Koordinatensystem ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(c; d)$ und dem Radius r . Durch den Mittelpunkt wird eine zur x -Achse parallele Gerade gelegt. Rotiert nun ein von M ausgehender Strahl um M , so beschreibt ein Punkt X dieses Strahls, für den $|\overline{MX}| = r$ gilt, den Kreis k . Der Winkel φ , den dieser Strahl mit der Parallelen zur x -Achse durch M einschließt, wird als Parameter benutzt. Fig. G 151a und Fig. G 151b zeigen für zwei verschiedene Werte von φ die zugehörige Lage des Punktes X auf k .

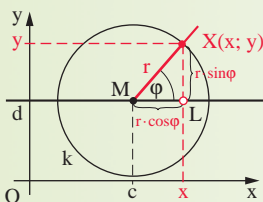


Fig. G 151a

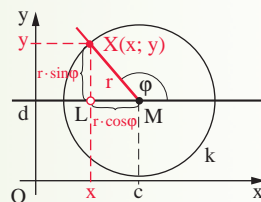


Fig. G 151b

Bezeichnet L den Fußpunkt des Lotes von X auf die Parallele durch M zur x-Achse, so können die vorzeichenbehafteten Abstände von X zu L und von L zu M berechnet werden. Es gilt für $X(x; y)$:
 $x = c + r \cos \varphi$, $y = d + r \sin \varphi$ (Fig. G 151a, G 151b)

Der Winkel φ ist Parameter. Für $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ wird der ganze Kreis beschrieben.

Betrachtet man nun umgekehrt einen Punkt $P(x; y)$ der Ebene, für dessen Koordinaten $x = c + r \cos \varphi$ und $y = d + r \sin \varphi$ für ein φ gilt, dann folgt aus diesen Beziehungen $x - c = r \cos \varphi$ und $y - d = r \sin \varphi$. Durch Quadrieren und anschließendes Addieren erhält man
 $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$. Damit ist aber P ein Punkt des Kreises k und es gilt:

Satz G 44: Parametergleichung eines Kreises

In einem kartesischen Koordinatensystem wird der Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(c; d)$ und dem Radius r durch die Parametergleichungen

$x = c + r \cdot \cos \varphi$, $y = d + r \cdot \sin \varphi$, $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$,
 beschrieben.

G 44

Auch für eine Kugel lässt sich eine Parametergleichung herleiten. Mit analogen Überlegungen wie beim Kreis müssen hier zwei Parameter φ und λ eingeführt werden. λ wird gegenüber der positiven x-Achse gemessen und φ gegenüber der Äquatorebene (Fig. G 152). Es gilt:

Satz G 45: Parametergleichung einer Kugel

In einem kartesischen Koordinatensystem wird eine Kugel k mit dem Mittelpunkt $M(c; d; e)$ und dem Radius r durch die Parametergleichungen

$x = c + r \cos \varphi \cos \lambda$, $y = d + r \cos \varphi \sin \lambda$, $z = e + r \sin \varphi$, $0^\circ \leq \varphi, \lambda < 360^\circ$,
 beschrieben.

G 45

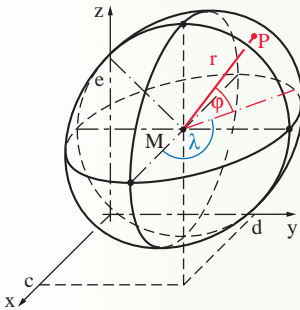


Fig. G 152

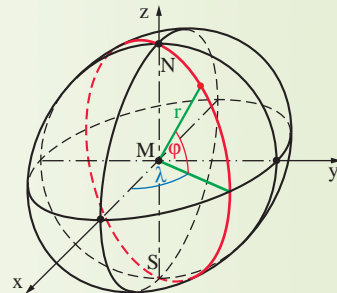


Fig. G 153

Auch auf unserer Erde, die angenähert als Kugel ($r_E = 6371$ km) aufgefasst werden kann, lassen sich Punkte mit diesem Koordinatensystem beschreiben. Der Winkel φ gibt dabei die *geographische Breite* an und bezieht sich auf die Äquatorebene.

Der Winkel λ kennzeichnet die *geographische Länge* und bezieht sich auf den Nullmeridian, der durch die Lage der Sternwarte in Greenwich festgelegt ist. Die Stadt Erfurt hat z.B. die geographischen Koordinaten $\varphi \approx 51^\circ \text{N}$ und $\lambda \approx 11^\circ \text{O}$, Berlin $\varphi \approx 53^\circ \text{N}$ und $\lambda \approx 13^\circ \text{O}$.

G 7.2 Kreis und Gerade

Ein Kreis und eine Gerade können *keinen* gemeinsamen Punkt, *genau einen* gemeinsamen Punkt oder *genau zwei* gemeinsame Punkte haben (Fig. G 154).

G 26

Definition G 26:

Wenn eine Gerade t und ein Kreis k genau einen Punkt P gemeinsam haben, dann heißt die Gerade t die **Tangente an k im Punkt P** .

Eine Gerade g , die mit k genau zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat, nennt man **Sekante** von k ; eine Gerade h , die mit k keinen Punkt gemeinsam hat, heißt **Passante**.

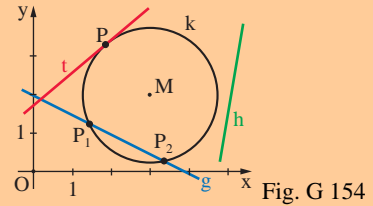


Fig. G 154

Die Koordinaten der gemeinsamen Punkte einer Geraden g und eines Kreises k berechnet man, indem man die zugehörigen Gleichungen als ein (hier freilich nicht lineares) Gleichungssystem mit zwei Unbekannten auffasst und dies löst.

G 79

Beispiel G 79:

Es sind die gemeinsamen Punkte der Geraden $g: y = -\frac{1}{2}x + 1$ und des Kreises $k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 6,25$ zu bestimmen.

Wir bezeichnen dazu mit $P_s(x_s; y_s)$ einen eventuell vorhandenen gemeinsamen Punkt von g und k . Das zugehörige Gleichungssystem lautet dann:

$$(I) \quad y_s = -\frac{1}{2}x_s + 1$$

$$(II) \quad (x_s - 3)^2 + (y_s - 2)^2 = 6,25.$$

Setzen wir den Ausdruck für y_s aus (I) in (II) ein, so ergibt sich

$$(x_s - 3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x_s - 1\right)^2 = 6,25 \quad \text{bzw.} \quad x_s^2 - 4x_s + 3 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei voneinander verschiedene Lösungen, nämlich

$x_{s1} = 1$ und $x_{s2} = 3$. Durch Einsetzen dieser Werte in (I) erhalten wir $y_{s1} = \frac{1}{2}$ und $y_{s2} = -\frac{1}{2}$.

Eine Probe zeigt, dass die beiden Punkte $P_{s1}(1; \frac{1}{2})$ und $P_{s2}(3; -\frac{1}{2})$ die Schnittpunkte der Geraden g mit dem Kreis k sind.

Es soll nun die Gleichung der **Tangente t an einen Kreis k im Kreispunkt P_0** bestimmt werden, wobei auch hier eine vektorielle Betrachtungsweise schnell zum Ziel führt. Hat nämlich der Kreis k den Mittelpunkt M und den Radius r (Fig. G 155), dann gilt für jeden Punkt X der Tangente t die Gleichung $\overrightarrow{P_0X} \cdot \overrightarrow{MP_0} = 0$, da diese beiden Vektoren senkrecht zueinander sind. Notiert man die Gleichung mithilfe der zugehörigen Ortsvektoren, so ergibt sich mit $(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m}) = 0$ eine Gleichung für die Tangente in einem Kreispunkt an einen Kreis.

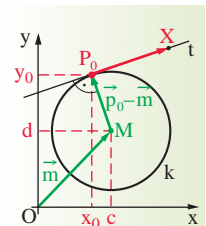


Fig. G 155

Aus dieser Gleichung erhält man eine Gleichung in Koordinatenschreibweise, wenn man die entsprechenden Vektoren mit ihren Koordinaten einsetzt.

$$\text{Aus } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad \text{folgt} \quad \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 - c \\ y_0 - d \end{bmatrix} = 0,$$

$$\text{also } (x - x_0) \cdot (x_0 - c) + (y - y_0) \cdot (y_0 - d) = 0.$$

Dies ist bereits eine Gleichung der Tangente an k im Kreispunkt P_0 in Koordinatenschreibweise. Addiert man jedoch auf beiden Seiten dieser Gleichung noch $r^2 = (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2$ (denn $P_0(x_0; y_0)$ ist ja Kreispunkt), so ergibt sich

$$(x - x_0)(x - c) + (y - y_0)(y - d) + (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 = r^2, \quad \text{woraus weiter folgt:}$$

$$(x_0 - c)[(x - x_0) + (x_0 - c)] + (y_0 - d)[(y - y_0) + (y_0 - d)] = r^2, \quad \text{also}$$

$$(x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) = r^2 \quad (\text{vgl. Satz G 40}).$$

Satz G 46: Gleichungen der Kreistangente

Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(c; d)$ und dem Radius r sowie $P_0(x_0; y_0)$ ein Punkt von k , dann ist

$$(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m}) = 0 \quad \text{die vektorielle Gleichung und}$$

$$(x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) = r^2 \quad \text{die Koordinatengleichung}$$

der **Tangente** an k im Punkt P_0 .

G 46

Beispiel G 80:

Im Einleitungsbeispiel zu Kapitel G (S. 229) war die Berechnung des Radius einer kreisförmigen Straße verlangt. Fig. G 156 zeigt eine stark vereinfachte Darstellung dieser Situation, wobei die Höhenunterschiede unberücksichtigt bleiben. Insbesondere kommt es darauf an, dass die geradlinigen Straßen in die kreisförmige „glatt“ übergehen, also tangential verlaufen.

Zur Bestimmung des gesuchten Radius legen wir die Geraden g_1 und g_2 so in ein Koordinatensystem, wie es in Fig. G 157 gezeigt ist. T_1 und T_2 sind die Punkte, in denen der gesuchte Kreis die beiden Geraden g_1 und g_2 berühren soll. M ist der zugehörige Mittelpunkt.

g_2 besitzt unter den angegebenen Bedingungen dann die Gleichung $g_2: y = \tan 105^\circ \cdot x$.

Nun ist auf g_2 der Punkt $T_2(x_2; y_2)$ so zu bestimmen, dass T_2 von S den Abstand 80 (m) hat.

Dazu berechnen wir x_2 aus der Gleichung $80^2 = x_2^2 + y_2^2$, also $80^2 = x_2^2 + \tan^2 105^\circ \cdot x_2^2$.

Man erhält (jeweils nach Rundung) $x_2 = -20,706$ und damit $y_2 = 77,274$, womit sich

$T_2(-20,706; 77,274)$ ergibt.

Nun können wir die Gleichung der Senkrechten l_2 zu g_2 durch T_2 bestimmen. Diese **Senkrechte** hat die Gleichung $y = \frac{-1}{\tan 105^\circ} \cdot x + n$. Weil T_2 diese Gleichung erfüllen muss, folgt $n = 82,822$, also $l_2: y = 0,2679x + 82,822$. Für $x = 80$ erhält man die y -Koordinate von M : $y_M = 104,254$, die mit dem gesuchten Radius übereinstimmt. Die kreisförmige Straße hat damit einen Radius von ca. 104 m.

G 80

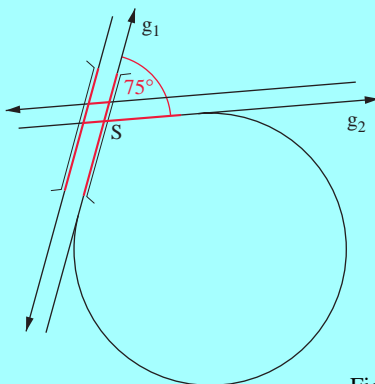


Fig. G 156

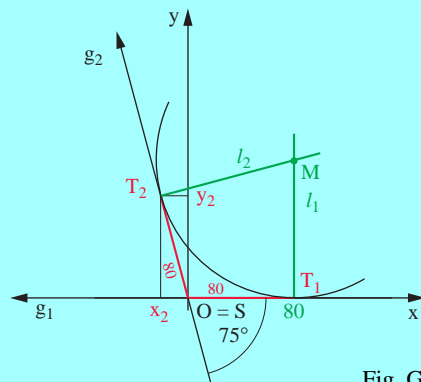


Fig. G 157

G 7.3 Zwei Kreise

Zwei voneinander verschiedene Kreise können *keinen* gemeinsamen Punkt, *genau einen* gemeinsamen Punkt oder *genau zwei* gemeinsame Punkte haben.

Wie beim Schnitt einer Geraden und eines Kreises erhalten wir auch hier die Koordinaten von solchen gemeinsamen Punkten zweier Kreise durch die Lösung eines Gleichungssystems aus zwei Gleichungen und mit zwei Unbekannten.

G 81

Beispiel G 81:

- a) Wir betrachten die **beiden Kreise** k_1 und k_2 (Fig. G 158) mit den Gleichungen $k_1: x^2 + (y - 3)^2 = 1$ bzw. $k_2: x^2 + y^2 = 4$.

Haben diese beiden Kreise einen Punkt $P(x_s; y_s)$ gemeinsam, so müssen die Koordinaten dieses Punktes die beiden Kreisgleichungen erfüllen. Wir erhalten damit ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen und mit zwei Unbekannten.

$$(I) \quad x_s^2 + (y_s - 3)^2 = 1$$

$$(II) \quad x_s^2 + y_s^2 = 4.$$

Aus (I) folgt $x_s^2 = 1 - (y_s - 3)^2$. Setzt man in (II) ein, so ergibt sich $1 - (y_s - 3)^2 + y_s^2 = 4$, also $1 - y_s^2 + 6y_s - 9 + y_s^2 = 4$ und damit $6y_s = 12$ bzw. $y_s = 2$. Einsetzen von $y_s = 2$ in Gleichung (I) liefert $x_s = 0$.

Das Gleichungssystem hat also genau eine Lösung $x_s = 0, y_s = 2$. Folglich haben die beiden Kreise k_1 und k_2 genau einen Punkt P gemeinsam; k_1 und k_2 berühren einander in $P(0; 2)$.

- b) Wir betrachten nun die Kreise k_2 und k_3 (Fig. G 158) mit den Gleichungen $k_2: x^2 + y^2 = 4$ bzw. $k_3: (x - 3)^2 + y^2 = 7$.

Zur Bestimmung der gemeinsamen Punkte lösen wir das Gleichungssystem

$$(I) \quad x_s^2 + y_s^2 = 4$$

$$(II) \quad (x_s - 3)^2 + y_s^2 = 7.$$

Dazu stellen wir (I) nach y_s^2 um und setzen die umgestellte Gleichung an der entsprechenden Stelle in (II) ein. Wir erhalten $(x_s - 3)^2 + 4 - x_s^2 = 7$ bzw. $x_s = 1$ und durch Einsetzen in (I) dann $1^2 - y_s^2 = 4$ oder $y_s^2 = 3$.

Hieraus ergeben sich für y_s zwei Werte $y_{s1} = +\sqrt{3}$ und $y_{s2} = -\sqrt{3}$. Da sowohl $P_{s1}(1; \sqrt{3})$ als auch $P_{s2}(1; -\sqrt{3})$ mit ihren Koordinaten beide Kreisgleichungen erfüllen, sind dies die gesuchten gemeinsamen Punkte der beiden Kreise k_2 und k_3 .

- c) Untersuchen wir abschließend die beiden Kreise mit den Gleichungen $k_1: x^2 + (y - 3)^2 = 1$ bzw. $k_3: (x - 3)^2 + y^2 = 7$.

Auch hier werden die eventuell vorhandenen gemeinsamen Punkte der beiden Kreise k_1 und k_3 über die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems bestimmt:

$$(I) \quad x_s^2 + (y_s - 3)^2 = 1$$

$$(II) \quad (x_s - 3)^2 + y_s^2 = 7.$$

Für die Lösung verwenden wir in diesem Fall ein allgemein nutzbares Verfahren. Dazu lösen wir zuerst die Klammern in den beiden Gleichungen auf und erhalten

$$(I) \quad x_s^2 + y_s^2 - 6y_s + 9 = 1$$

$$(II) \quad x_s^2 + y_s^2 - 6x_s + 9 = 7.$$

Die Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung ergibt

$$x_s - y_s = -1 \quad \text{bzw.} \quad y_s = x_s + 1.$$

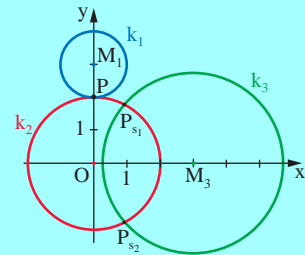


Fig. G 158

Setzt man diesen Ausdruck in (I) ein, so ergibt sich für x_s eine quadratische Gleichung in Normalform $x_s^2 - 2x_s + \frac{3}{2} = 0$, die die Diskriminante $D = (1)^2 - \frac{3}{2} < 0$ hat. Folglich besitzt die gegebene Gleichung keine reelle Lösung – die beiden Kreise k_1 und k_3 haben also keinen gemeinsamen Punkt.

Jetzt lassen sich auch die **Gleichungen der Tangenten** von einem Punkt P_0 außerhalb eines Kreises k an k bestimmen. Dazu kann man die in Fig. G 159 angedeutete Konstruktion analytisch nachvollziehen. Bei dieser Konstruktion spielt der THALESkreis k' über der Strecke $\overline{MP_0}$ eine wichtige Rolle.

Beispiel G 82:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(4; 3)$ und dem Radius $r = 2$. Es sollen die Gleichungen der vom Punkt $P_0(-1; 2)$ an k gelegten Tangenten bestimmt werden.

Wir bestimmen hierfür analog zur Konstruktion:

(1) Mittelpunkt M' von $\overline{MP_0}$: $M'(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$

(2) Gleichung des THALESkreises k' um M' mit $r = |\overline{MM'}|$:
 $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{13}{2}$

(3) Schnittpunkte T_1 und T_2 von k und k' :

$$T_1(\frac{42}{13} - \frac{1}{13}\sqrt{22}; \frac{37}{13} + \frac{5}{13}\sqrt{22}) \approx T_1(2,89; 4,65);$$

$$T_2(\frac{42}{13} + \frac{1}{13}\sqrt{22}; \frac{37}{13} - \frac{5}{13}\sqrt{22}) \approx T_2(3,59; 1,04).$$

(4) Nach Satz G 46 erhält man nun als Gleichungen der beiden Tangenten:

$$t_1: (-\frac{11}{13} - \frac{5}{13}\sqrt{22})x + (\frac{55}{13} - \frac{1}{13}\sqrt{22})y = \frac{121}{13} + \frac{3}{13}\sqrt{22};$$

$$t_2: (-\frac{11}{13} + \frac{5}{13}\sqrt{22})x + (\frac{55}{13} + \frac{1}{13}\sqrt{22})y = \frac{121}{13} - \frac{3}{13}\sqrt{22}.$$

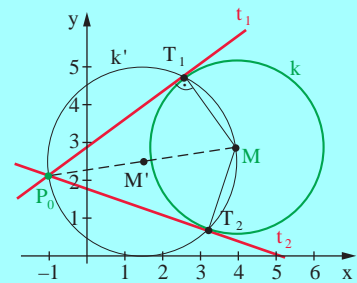


Fig. G 159

G 82

G 7.4 Kugel und Gerade

Eine Kugel und eine Gerade können *keinen* gemeinsamen Punkt, *genau einen* gemeinsamen Punkt oder *genau zwei* gemeinsame Punkte haben (Fig. G 160).

Definition G 27:

Wenn eine Gerade t und eine Kugel k genau einen Punkt P gemeinsam haben, denn heißt die Gerade t eine **Tangente** an k in P .

Eine Gerade g , die mit k genau zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat, nennt man **Sekante** von k ; eine Gerade h , die mit k keinen Punkt gemeinsam hat, heißt **Passante**.

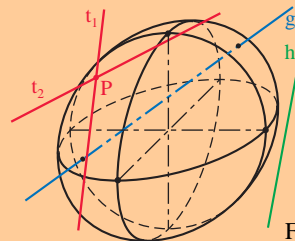


Fig. G 160

G 27

Im Unterschied zum Kreis in der Ebene (vgl. Abschnitt G 7.2) gibt es im Raum in jedem Kugelpunkt unendlich viele Tangenten an die Kugel. Diese Tangenten in einem Kugelpunkt P bilden die **Tangentialebene** an k in P (s. Abschnitt G 7.5).

G 83

Beispiel G 83:

Gegeben sei eine Kugel k mit dem Mittelpunkt $M(1; 2; 2)$ und dem Radius $r = 3$ sowie eineGerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Es sollen die Lagebeziehung von g bezüglichlich k untersucht und gegebenenfalls Schnittpunkte bestimmt werden.Nach Satz G 41 ist $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ die Gleichung von k und $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 1t$, $z = 1 + 2t$ die Koordinatendarstellung von g . Durch Einsetzen der Koordinaten von g in die Gleichung von k erhält man: $((1+2t)-1)^2 + ((1+1t)-2)^2 + ((1+2t)-2)^2 = 9$, also $4t^2 + (t-1)^2 + (2t-1)^2 - 9 = 0$, woraus $9t^2 - 6t - 7 = 0$ folgt. Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen $t_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}$.Folglich hat g mit k genau zwei Punkte S_1 und S_2 gemeinsam, ist also eine Sekante von k : $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $S_1(3,55; 2,28; 3,55), S_2(-0,22; 0,39; -0,22)$.

Betrachtet man nun eine Kugel k und einen Punkt P_0 außerhalb von k , so gibt es unendlich viele Tangenten durch P_0 an k . Die Menge dieser Tangenten bildet einen (doppelten) Kreiskegel (Tangentenkegel von P_0 an k).

G 7.5 Kugel und Ebene

Eine *Kugel und eine Ebene können keinen Punkt, genau einen Punkt oder einen Kreis* gemeinsam haben (Fig. G 161a, G 161b).

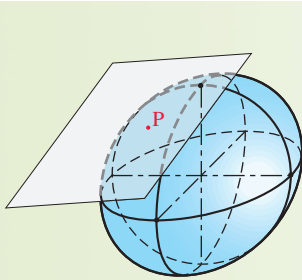


Fig. G 161a

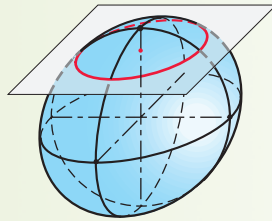


Fig. G 161b

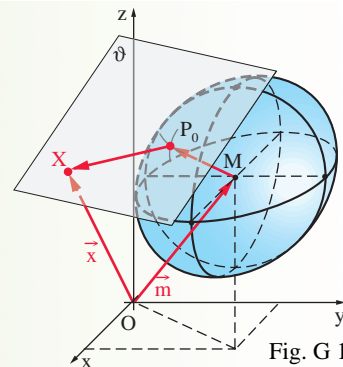


Fig. G 162

G 28

Definition G 28:

Haben eine Ebene ϑ und eine Kugel k genau einen Punkt P gemeinsam, dann heißt die Ebene ϑ **Tangentialebene** an die Kugel k in P .

Die Tangentialebene in jedem Punkt einer Kugel ist eindeutig bestimmt. Im Folgenden soll die Gleichung der Tangentialebene an eine Kugel k in einem Kugelpunkt P_0 hergeleitet werden. Wie bei der Tangente an einen Kreis in der Ebene (vgl. G 7.2) geht man auch hier vektoriell vor.

P_0 sei ein Punkt der Kugel k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Wenn ϑ die Tangentialebene in P_0 an k ist, dann verläuft $\overrightarrow{MP_0}$ senkrecht zu ϑ (Fig. G 162). Folglich gilt $\overrightarrow{P_0X} \cdot \overrightarrow{MP_0} = 0$, wobei

X ein beliebiger Punkt von ϑ ist. Unter Verwendung der zugehörigen Ortsvektoren erhält man $(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m}) = 0$ als **vektorielle Gleichung der Tangentialebene** von k in P_0 .

Verwendet man in dieser Gleichung die Vektoren mit ihren Koordinaten, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = 0, \quad \text{also} \quad \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 - c \\ y_0 - d \\ z_0 - e \end{bmatrix} = 0, \quad \text{woraus}$$

$$(x - x_0)(x_0 - c) + (y - y_0)(y_0 - d) + (z - z_0)(z_0 - e) = 0 \text{ folgt.}$$

Addiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung $r^2 = (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 + (z_0 - e)^2$ (P_0 ist Punkt von k), so erhält man

$$(x - x_0)(x_0 - c) + (y - y_0)(y_0 - d) + (z - z_0)(z_0 - e) + (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 + (z_0 - e)^2 = r^2, \text{ was zu} \\ (x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) + (z_0 - e)(z - e) = r^2 \text{ führt.}$$

Satz G 47: Gleichungen der Tangentialebene

Ist k eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(c; d; e)$ und dem Radius r sowie $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ein Punkt von k , dann ist

$$(\vec{x} - \vec{p}_0) \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m}) = 0$$

die vektorielle Gleichung und

$$(x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) + (z_0 - e)(z - e) = r^2$$

die Koordinatengleichung

der **Tangentialebene** an k im Kugelpunkt P_0 .

G 47

Beispiel G 84:

Gegeben seien eine Ebene $\varepsilon: x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Kugel k mit dem Mittelpunkt

$M(2; 1; 3)$ und dem Radius $r = 3$. Gesucht sind die beiden Tangentialebenen ϑ_1 und ϑ_2 an k , die parallel zu ε sind.

Zur Lösung dieser Aufgabe wandeln wir die Gleichung von ε in eine parameterfreie Form um und lesen daraus einen Normalvektor von ε ab. Wir erhalten $-x + 2y - 2z + 6 = 0$,

woraus sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ als **Normaleneinheitsvektor** von ε ergibt.

$$\text{Mit } \vec{t}_1 = \vec{m} + r \vec{n}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{t}_2 = \vec{m} - r \vec{n}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{erhält man die Ortsvektoren zu den Berührungspunkten}$$

der beiden Tangentialebenen ϑ_1 und ϑ_2 mit der Kugel k . Folglich sind

$$\vartheta_1: (\vec{x} - \vec{t}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_2: (\vec{x} - \vec{t}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{die gesuchten Gleichungen.}$$

In parameterfreier Form lauten diese

$$\vartheta_1: -x + 2y - 2z - 3 = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_2: -x + 2y - 2z + 15 = 0.$$

G 84

Beispiel G 85:

Gegeben sind die drei Punkte $P_1(2; 2; 3,5)$, $P_2(3; 3; -1,5)$ und $P_3(-0,5; 2; 4)$, die wegen

$$|\overline{OP_1}| = |\overline{OP_2}| = |\overline{OP_3}| = \frac{9}{2} \quad \text{auf einer Kugel } k_1 \text{ um den Koordinatenursprung mit dem}$$

Radius $r_1 = \frac{9}{2}$ liegen.

G 85

Es ist

- a) der Schnittpunkt P_0 der drei Tangentialebenen an k_1 in den Punkten P_1 , P_2 und P_3 sowie der Abstand dieser drei Punkte von P_0 zu bestimmen;
 b) zu zeigen, dass P_1 , P_2 und P_3 auf der Kugel k_2 um den Mittelpunkt von $\overline{OP_0}$ durch P_0 liegen.

Zu a):

Nach Satz G 47 hat die Tangentialebene ϑ_1 an k_1 im Punkt P_1 die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-3,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 2-0 \\ 3,5-0 \end{pmatrix} = 0, \text{ woraus}$$

$$2(x-2) + 2(y-2) + 3,5(z-3,5) = 0, \text{ also } \vartheta_1: 8x + 8y + 14z - 81 = 0 \text{ folgt.}$$

Analog erhalten wir:

$$\vartheta_2: \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z+1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1,5 \end{pmatrix} = 0; \quad \vartheta_3: \begin{pmatrix} x+0,5 \\ y-2 \\ z-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\vartheta_2: 12x + 12y - 6z - 81 = 0; \quad \vartheta_3: -2x + 8y + 16z - 81 = 0$$

Für die Schnittpunktbestimmung erhalten wir aus den drei Gleichungen für die Tangentialebenen ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$(I) \quad 8x + 8y + 14z = 81$$

$$(II) \quad 12x + 12y - 6z = 81$$

$$(III) \quad -2x + 8y + 16z = 81$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich $x = \frac{3}{10}$,

$y = \frac{36}{5}$ und $z = \frac{3}{2}$ (Fig. G 163). Damit ist $P_0(\frac{3}{10}; \frac{36}{5}; \frac{3}{2})$ der

gesuchte Schnittpunkt. Für die zu ermittelnden Abstände gilt:

$$|\overline{P_0P_1}| = \sqrt{(2 - \frac{3}{10})^2 + (2 - \frac{36}{5})^2 + (3,5 - \frac{3}{2})^2} = \frac{3}{10} \sqrt{377},$$

$$|\overline{P_0P_2}| = \sqrt{(3 - \frac{3}{10})^2 + (3 - \frac{36}{5})^2 + (-1,5 - \frac{3}{2})^2} = \frac{3}{10} \sqrt{377} \quad \text{und}$$

$$|\overline{P_0P_3}| = \sqrt{(-0,5 - \frac{3}{10})^2 + (2 - \frac{36}{5})^2 + (4 - \frac{3}{2})^2} = \frac{3}{10} \sqrt{377}.$$

Diese drei Strecken haben also dieselbe Länge – es ist die Länge aller Tangentenabschnitte von P_0 an die Kugel k_1 .

Zu b):

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OP_0}$ ist $M(\frac{3}{20}; \frac{18}{5}; \frac{3}{4})$. Die gesuchte Kugel besitzt den Radius

$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{3}{10})^2 + (\frac{36}{5})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{20} \sqrt{602}$, womit sich als **Gleichung der Kugel** k_2 um M durch

P_0 ergibt: $(x - \frac{3}{20})^2 + (y - \frac{18}{5})^2 + (z - \frac{3}{4})^2 = \frac{2709}{200}$. Eine Probe zeigt, dass die Koordinaten von P_1 ,

P_2 und P_3 diese Gleichung erfüllen. Die Kugel k_2 kann man als Verallgemeinerung des THALESkreises bei der Konstruktion der Tangenten von einem Punkt außerhalb eines Kreises an einen Kreis auffassen. Auf dem Schnittkreis der Kugel k_1 mit der THALESKugel k_2 liegen alle Tangentenberührungspunkte der Tangenten von P_0 an k_1 .

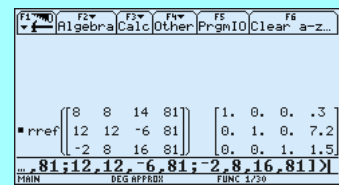


Fig. G 163

Die analytische Beschreibung des Schnittkreises einer Ebene mit einer Kugel (falls ein solcher Kreis existiert) ist in diesem Rahmen nicht möglich, da dann eine ebene Kurve im Raum beschrieben werden müsste. Man kann jedoch den Mittelpunkt und den Radius eines solchen Schnittkreises ermitteln.

Beispiel G 86:

Gegeben seien eine Kugel $k(M; r)$ mit $M(1; 1; 2)$ und $r = 2$ sowie eine Ebene $\varepsilon: 4x - 2y + 2z - 2 = 0$. Wir untersuchen, in welcher Lagebeziehung sich k und ε befinden. Zunächst wird der Abstand von M zu ε bestimmt (vgl. Abschnitt G 6.3):

$$d = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{6} \approx 0,82.$$

Weil $\frac{1}{3} \sqrt{6} < 2$ (Kugelradius) ist, schneidet ε die Kugel k in einem Kreis. Den Radius r_S dieses Schnittkreises kann man mithilfe des Satzes des PYTHAGORAS bestimmen (vgl. Fig. G 164). Es gilt:

$$r_S = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{30} \approx 1,83.$$

Für die Bestimmung des Mittelpunktes M_S des Schnittkreises ist zu beachten, dass wegen $d > 0$ der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von ε in die Richtung von M zeigt (vgl. Abschnitt G 6.3). Folglich erhalten wir

$$\vec{m}_S = \vec{m} - d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad M_S\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

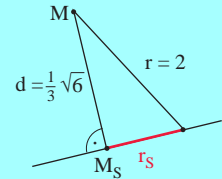


Fig. G 164

G 7.6 Zwei Kugeln

Zwei Kugeln können *keinen gemeinsamen Punkt*, *genau einen gemeinsamen Punkt* oder *einen Kreis* gemeinsam haben (Fig. G 165).

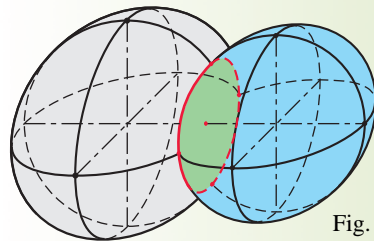


Fig. G 165

Beispiel G 87:

Zu untersuchen ist die Lagebeziehung der beiden Kugeln

$$k_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9 \quad \text{und} \quad k_2: (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 25.$$

$M_1(2; 3; 2)$, $r_1 = 3$ und $M_2(3; 5; -1)$, $r_2 = 5$ sind die **Mittelpunkte bzw. Radien dieser Kugeln**.

$$\text{Wegen } |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(2-3)^2 + (3-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{14} = 3,7416 < r_1 + r_2$$

und $|\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{14} > |r_1 - r_2|$ besitzen die beiden Kugeln einen Schnittkreis.

Um dessen Durchmesser zu bestimmen, werden die beiden Kugeln mit einer Ebene geschnitten, die die beiden Kugelmittelpunkte enthält (Fig. G 166). Die Strecke \overline{AB} ist der gesuchte Durchmesser (vgl. auch Fig. G 165).

Zur Berechnung von $|\overline{AB}|$ bezeichnen wir den Schnittpunkt von \overline{AB} mit der Geraden durch M_1 und M_2 mit S und den Schnittkreisradius $|\overline{BS}|$ mit r . Dann gilt

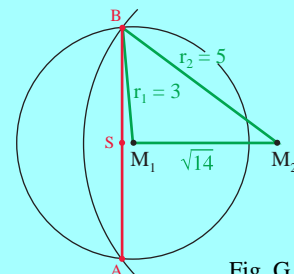


Fig. G 166

- im Dreieck SM_1B $3^2 = r^2 + |\overline{SM_1}|^2$, (1)
- im Dreieck SM_2B $5^2 = r^2 + (\sqrt{14} + |\overline{SM_1}|)^2$. (2)

(1) in (2) eingesetzt liefert:

$5^2 = r^2 + (\sqrt{14} + \sqrt{3^2 - r^2})^2$, also $25 = r^2 + 14 + 2\sqrt{14} \cdot \sqrt{9 - r^2} + 9 - r^2$ und damit
 $1 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{9 - r^2}$ bzw. $1 = 14 \cdot (9 - r^2)$. Daraus folgt $r^2 = \frac{125}{14}$, also $r = 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{14}} \approx 2,9881$.
 Der Radius des Schnittkreises hat also eine Länge von rund 2,99 (LE).

Die Bestimmung des Schnittes zweier Kugeln spielt beim Satelliten-Navigationssystem GPS eine wichtige Rolle. Dieses System besteht aus 24 Satelliten, die die Erde in einer Höhe von 20 200 km über der Erdoberfläche umkreisen. Dabei sind die Positionen der Satelliten so eingerichtet, dass von jedem Punkt der Erdoberfläche immer mindestens drei dieser Satelliten zu „sehen“ sind. Jeder dieser Satelliten sendet Informationen über seine Position und die aktuelle Zeit. Geht man davon aus, dass sich die Funkwellen kugelförmig vom Satelliten mit einer Geschwindigkeit von $2,9972458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ausbreiten, so kann man mit einem GPS-Empfänger über die Laufzeit des Funksignals den Radius dieser „Funk-Kugel“ und weiter dann den Schnittkreis mit der Erdoberfläche berechnen. Aus den Signalen von drei Satelliten (Fig. G 167) lässt sich schließlich die Position des GPS-Empfängers auf der Erdoberfläche bestimmen.

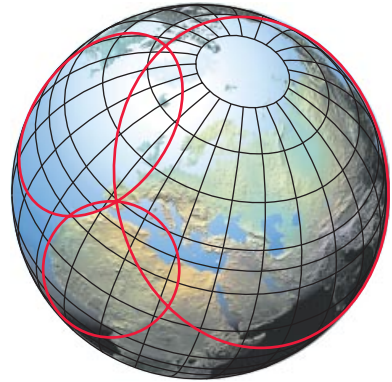


Fig. G 167

G 8 Das Vektorprodukt

G 8.1 Definition und Eigenschaften

Im Unterschied zu der multiplikativen Verknüpfung reeller Zahlen werden für Vektoren \vec{a} und \vec{b} im Raum zwei Arten der Produktbildung definiert: Neben dem **Skalarprodukt** (Abschnitt G 6), bei dem $\vec{a} \cdot \vec{b}$ eine reelle Zahl ist, gibt es das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ¹⁾, dessen Resultat – wie der Name sagt – ein Vektor \vec{v} ist. Denkt man sich die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{v} durch \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} bzw. \overrightarrow{OV} repräsentiert, so soll für den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ gelten:

- \overrightarrow{OV} verläuft senkrecht zu der durch \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} bestimmten Ebene.
- Das Vektorsystem $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV}\}$ bildet ein Rechtssystem. Das bedeutet: Dreht man \overrightarrow{OA} um O auf kürzestem Weg in \overrightarrow{OB} , so muss sich eine entsprechend gedrehte Rechtsschraube in Richtung \overrightarrow{OV} bewegen (Fig. G 168; siehe auch Def. G 13).

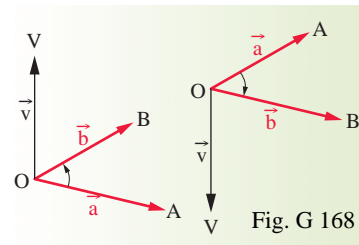


Fig. G 168

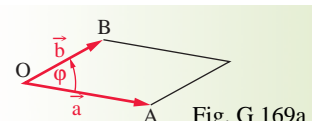


Fig. G 169a

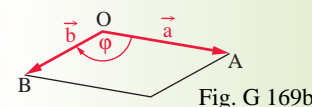


Fig. G 169b

¹⁾ gesprochen: „(Vektor) a Kreuz (Vektor) b“

- Der **Betrag** des Vektors \vec{OV} ist gleich der Inhaltsmaßzahl des von \vec{OA} und \vec{OB} gebildeten Parallelogramms. Es gilt also:
 $|\vec{v}| = |\vec{OV}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi|$ (Fig. G 169a/b)

Ausgehend von dieser Beschreibung wird definiert:

Definition G 29:

Unter dem **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man den im Raum durch die folgenden drei Bedingungen charakterisierten Vektor \vec{v} :

- $|\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \angle(\vec{a}, \vec{b})|$
- $\vec{v} \perp \vec{a}$ und $\vec{v} \perp \vec{b}$.
- Sind \vec{a} und \vec{b} linear unabhängig, so bildet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v})$ ein Rechtssystem.

Aufgrund obiger Definition gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn \vec{a} und \vec{b} linear abhängig sind. Ferner gelten für das Vektorprodukt folgende Rechengesetze:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ bzw. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ Alternativgesetz
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ Distributivgesetz
- $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ Multiplikation mit einer reellen Zahl

Das Assoziativgesetz trifft im Allgemeinen nicht zu.

Nun soll das Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{b} für den Fall bestimmt werden, dass die beiden Vektoren durch ihre Koordinaten bezüglich eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems gegeben sind (Fig. G 170).

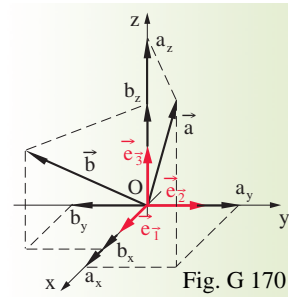


Fig. G 170

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3$ gilt dann:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3) \times (b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3)$$

Unter Verwendung des Distributivgesetzes des Vektorprodukts erhält man

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & a_x b_x \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_x b_y \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_x b_z \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ & + a_y b_x \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_y b_y \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_y b_z \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ & + a_z b_x \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_z b_y \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + a_z b_z \vec{e}_3 \times \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Wegen $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0};$
 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2;$
 $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

folgt daraus: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_1 + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_2 + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_3$

Unter Verwendung von Matrizen- und Determinantenschreibweise¹⁾ lässt sich dieses Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen und übersichtlich notieren:

¹⁾ Natürlich ist die im nachfolgenden Satz G 48 verwendete Schreibweise im Sinne der Einführung von Determinanten (vgl. Abschnitt G 3.3) keine Determinante, da $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ keine reellen Zahlen sind. Diese Schreibweise eignet sich aber hier zu einer übersichtlichen Darstellung.

G 48

Satz G 48: **Vektorprodukt**

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in Raum, so gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_1 + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_2 + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

G 88

Beispiel G 88:

Es ist der **Einheitsnormalenvektor** der Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu ermitteln.

Wir bilden dazu das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ von ε und dividieren den so erhaltenen Vektor (der senkrecht zu ε steht) durch seinen Betrag:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 \vec{e}_1 - 8 \vec{e}_2 + 8 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{384}} \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \sqrt{6} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verwendet man zur Berechnung von \vec{n}^0 den GTA, so erhält man mit den Funktionen **crossP** (für Vektorprodukt) und **norm** (für Betrag) das in Fig. G 171 wiedergegebene Bild. Dabei könnte noch auf das Ausweisen des Zwischenschritts in Zeile1 verzichtet werden.

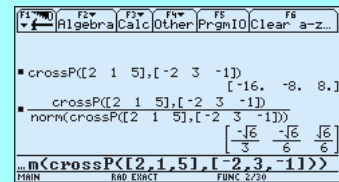


Fig. G 171

G 89

Beispiel G 89:

Man ermittle den **Schnittwinkel** zwischen der Ebene ε und der Geraden g mit den Gleichungen

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Fig. G 172 ist zu entnehmen, wie der Schnittwinkel φ mit dem Winkel zwischen einem Normalenvektor \vec{n} von ε und einem Richtungsvektor \vec{a} von g zusammenhängt. Es gilt: $\varphi = 90^\circ - \alpha$.

Wir bestimmen deshalb zunächst nach Satz G 48 einen **Normalenvektor** von ε und dann mithilfe von Definition G 23 den gesuchten Schnittwinkel:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \text{damit } \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}{14 \cdot 3},$$

woraus $\alpha \approx 25,2^\circ$ und schließlich $\varphi \approx 64,8^\circ$ folgt.

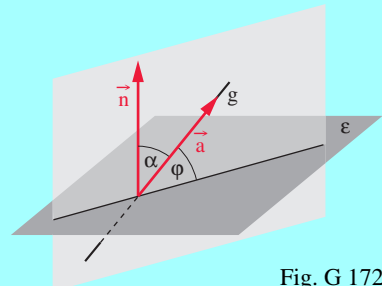


Fig. G 172

Beispiel G 90:

Es soll der **Schnittwinkel** φ der beiden Ebenen

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

berechnet werden.

Entsprechend Abschnitt G 6.4 bestimmen wir dazu mit dem **Vektorprodukt** einen **Normalenvektor** \vec{n}_1 von ε und einen Normalenvektor \vec{n}_2 von η und nutzen dann (z.B.)

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (\text{bei GTA-Einsatz unter Verwendung von } \text{dotP} \text{ f\"ur das Skalarprodukt}).$$

Der (spitze) Winkel zwischen den Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 ist der gesuchte Schnittwinkel der Ebenen ε und η .

Es gilt also: $\varphi = 180^\circ - 96,9144^\circ \approx 83,09^\circ$

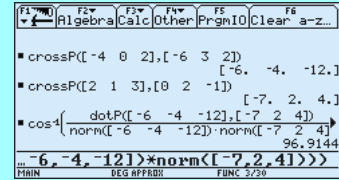


Fig. G 173

Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} im Raum bestimmen im Allgemeinen ein Parallelepiped (Spat) (Fig. G 174). Für dessen Volumen gilt $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = F_G \cdot h_c$. Dabei ist F_G die Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms, also $F_G = |\vec{a} \times \vec{b}|$, und h_c die Höhe von C über dieser Grundfläche, also $h_c = |\vec{c}| \cos \varphi$. Demzufolge gilt $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi$ und damit (da φ der Winkel zwischen $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ und \vec{c} ist) nach der Definition des Skalarprodukts: $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (vgl. auch Satz G 32).

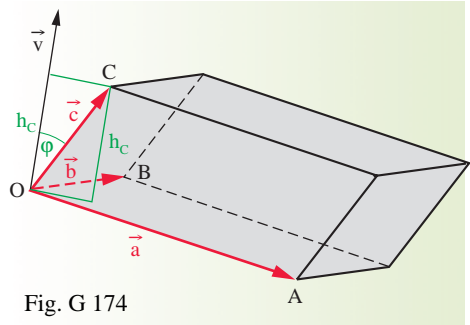


Fig. G 174

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ erhält man nach Satz G 48 hierfür

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = c_x \cdot (a_y b_z - a_z b_y) + c_y \cdot (a_z b_x - a_x b_z) + c_z \cdot (a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Satz G 49: Volumen eines Parallelepipeds; Spatprodukt

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ drei Vektoren, die ein Parallelepiped bestimmen, so

$$\text{gilt für das Volumen dieses Körpers } V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.^{1)}$$

¹⁾ Das Produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ wird auch als **Spatprodukt** bezeichnet. In Abhängigkeit davon, ob \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein Rechtssystem bilden (oder nicht), ist das Spatprodukt positiv (oder negativ). Als Volumenformel wird deshalb auch manchmal $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ geschrieben.

Satz G 49 lässt sich auch als ein Komplanaritätskriterium für vier Punkte verwenden. Es gilt

G 50

Satz G 50: Komplanarität von vier Punkten im Raum

Sind A, B, C und D vier Punkte im Raum, so liegen diese vier Punkte genau dann in einer Ebene, wenn $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$ ist.

Das Vektorprodukt hat auch eine physikalische Bedeutung, wie die Darstellung des Drehmoments zeigt: $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$.

Greifen z.B. an zwei konzentrischen Rädern zwei Kräfte an (Fig. G 175), so wirkt in der Achse ein Drehmoment. Sind $\vec{M}_1 = \vec{F}_1 \times \vec{r}_1$ und $\vec{M}_2 = \vec{F}_2 \times \vec{r}_2$ die einzelnen Drehmomente, die durch die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 erzeugt werden, so ergibt sich das resultierende Drehmoment als (vektorielle) Summe der beiden Teildrehmomente: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$.

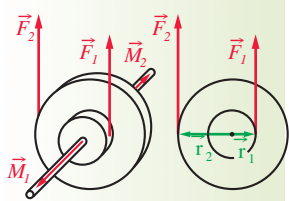


Fig. G 175

G 8.2 Abstand zweier Geraden

Bei der Bestimmung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g bzw. von einer Ebene ϵ wurde stets von der kürzesten Verbindungsstrecke unter allen Strecken ausgegangen, die P mit einem Punkt von g bzw. ϵ verbinden (vgl. Abschnitt G 6.3, Fig. G 138a, b). In beiden Fällen ließ sich feststellen, dass diese kürzeste Verbindungsstrecke auch senkrecht zu g bzw. ϵ ist.

In Analogie zu den bisherigen Abstandsbegriffen definieren wir den *Abstand zweier Geraden* g_1 und g_2 im Raum als kürzeste Verbindungsstrecke $\overline{L_1 L_2}$ unter allen Strecken, die einen beliebigen Punkt $P_1 \in g_1$ mit einem beliebigen Punkt $P_2 \in g_2$ verbinden (Fig. G 176).

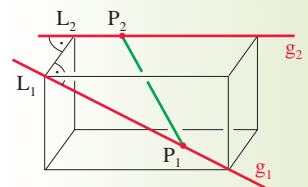


Fig. G 176

Für zwei Geraden g_1 und g_2 im Raum sind drei Lagebeziehungen (vgl. Abschnitt G 3.3) möglich:

- (1) g_1 und g_2 schneiden einander in genau einem Punkt S (Fig. G 177a).
- (2) g_1 und g_2 sind parallel zueinander (Fig. G 177b).
- (3) g_1 und g_2 sind windschief zueinander (Fig. G 177c).

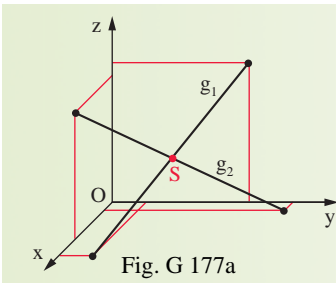


Fig. G 177a

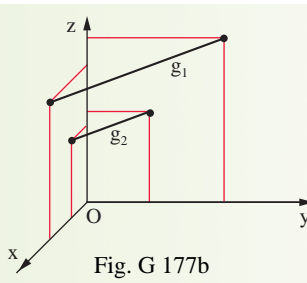


Fig. G 177b

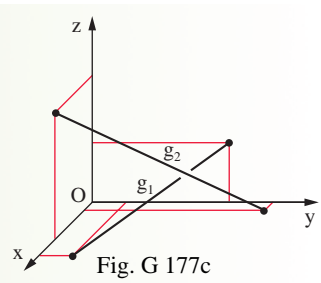


Fig. G 177c

Im Fall (1) gilt für $P_1 \in g_1$ und $P_2 \in g_2$ stets $|\overline{P_1 P_2}| \geq 0$. Gleichheit trifft genau dann zu, wenn $P_1 = P_2 = S$ gilt, wenn also der Abstand von g_1 und g_2 gleich 0 ist (s. Beispiel G 93).

Im Fall (2) der Parallelität von g_1 und g_2 liegen diese beiden Geraden in ein und derselben Ebene ϵ (Fig. G 178). Ist P_1 ein beliebiger Punkt von g_1 und P_2 ein beliebiger Punkt von g_2 , so ist $\overline{P_1 P_2}$ am kürzesten, wenn P_2 der Fußpunkt L_2 des Lotes von P_1 auf g_2 ist. Dies folgt aus dem Satz, dass in jedem Dreieck dem größten Winkel auch die größte Seite gegenüberliegt. Da $|\overline{P_1 L_2}|$ nicht von der

Wahl des Punktes P_1 abhängt, ist $d = |\overrightarrow{P_1 L_2}|$ der Abstand von g_1 und g_2 gemäß der Abstandsdefinition. Fallen g_1 und g_2 zusammen, so ist ihr Abstand 0.

Falls die beiden Geraden nicht zusammenfallen, bestimmen der Richtungsvektor \vec{a}_1 von g_1 und $\overrightarrow{P_1 P_2}$ ein Parallelogramm in der Ebene ϵ mit der Höhe $d = |\overrightarrow{P_1 L_2}|$. Für seinen Flächeninhalt gilt demnach $A = |\vec{a}_1| \cdot d$. Nach Definition G 29 gibt aber auch $|\vec{a}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2}|$ diesen Flächeninhalt an, womit $|\vec{a}_1| \cdot d = |\vec{a}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2}|$ folgt. Somit ist $d = \frac{|\vec{a}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\vec{a}_1|}$ der Abstand der beiden parallelen Geraden g_1 und g_2 .

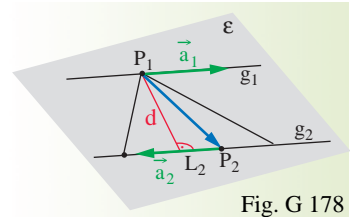


Fig. G 178

Satz G 51: Abstand zweier paralleler Geraden im Raum

Sind zwei parallele Geraden g_1 und g_2 im Raum durch ihre Gleichungen $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + r \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \vec{a}_2$ gegeben, so ist $d = \frac{|\vec{a}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\vec{a}_1|}$ der Abstand dieser beiden Geraden.

G 51

Die Formel aus Satz G 51 ist auch zur Berechnung des Abstands eines Punktes P_2 von einer Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + t \vec{a}_1$ im Raum gültig.

Beispiel G 91:

Man ermittle den Abstand der beiden Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind g_1 und g_2 parallel zueinander. Nach Satz G 51 gilt für den Abstand

$$\text{der beiden Geraden} \quad d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}.$$

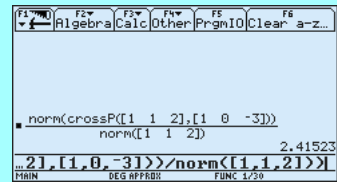


Fig. G 179

Der GTA gibt als Lösung an: $d = 2,41523$ (Fig. G 179)

Ist die Einheit auf den Achsen des Koordinatensystems 1 cm, so haben g_1 und g_2 einen Abstand von rund 2,42 cm.

G 91

Für Fall (3) – g_1 und g_2 sind windschief zueinander – wird zuerst gezeigt, dass es auf g_1 genau einen Punkt L_1 und auf g_2 genau einen Punkt L_2 so gibt, dass $\overrightarrow{L_1 L_2}$ sowohl auf g_1 als auch auf g_2 senkrecht ist. Dazu wählt man auf g_1 einen beliebigen Punkt A_1 und betrachtet die Gerade g_2' , die durch A_1 und parallel zur Geraden g_2 verläuft (Fig. G 180).

Weil g_1 und g_2 windschief zueinander sind, bestimmen g_1 und g_2' genau eine Ebene ϵ_1 . ϵ_2 ist die eindeutig bestimmte Ebene, die g_2 enthält und parallel zu ϵ_1 ist. Nun betrachten wir die Gerade l , die durch A_1 geht und senkrecht zu ϵ_1 ist. Insbesondere verläuft l dann auch senkrecht zu g_1 und g_2' .

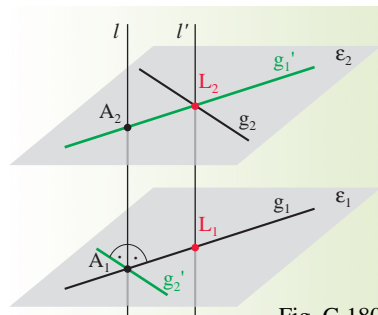


Fig. G 180

Weil ε_1 und ε_2 parallel zueinander sind, ist l auch senkrecht auf ε_2 . A_2 sei der Schnittpunkt von l und ε_2 . Mit g_1' bezeichnen wir nun die eindeutig bestimmte Gerade durch A_2 , die parallel zu g_1 ist (und in ε_2 liegt). g_1' schneidet g_2 in genau einem Punkt L_2 . Weil die parallelen Geraden g_1 und g_1' in einer Ebene liegen, schneidet die Parallele l' zu l durch L_2 die Gerade g_1 in genau einem Punkt L_1 .

$\overline{L_1 L_2}$ ist damit senkrecht zu g_1 und zu g_2 und auch eindeutig bestimmt.

Mit Hilfsmitteln der analytischen Geometrie ließe sich zudem zeigen, dass $\overline{L_1 L_2}$ die kürzeste Strecke unter allen Strecken ist, die einen Punkt $P_1 \in g_1$ mit einem Punkt $P_2 \in g_2$ verbinden. Damit gilt:

G 52

Satz G 52: Abstand zweier windschiefer Geraden

Sind g_1 und g_2 zwei windschiefe Geraden, so gibt es genau einen Punkt $L_1 \in g_1$ und genau einen Punkt $L_2 \in g_2$ mit der Eigenschaft, dass $\overline{L_1 L_2}$ sowohl senkrecht zu g_1 als auch zu g_2 ist. $|\overline{L_1 L_2}|$ ist dann der Abstand von g_1 und g_2 .

Für die rechnerische Bestimmung des Abstandes zweier windschiefer Geraden betrachten wir die beiden Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + r \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \vec{a}_2$, wobei \vec{a}_1 und \vec{a}_2 linear unabhängig sind. Durch P_1, \vec{a}_1 und \vec{a}_2 wird folglich genau eine Ebene ε_1 (Fig. G 181) und durch \vec{a}_1, \vec{a}_2 und $\overrightarrow{P_1 P_2}$ genau ein Parallelepiped bestimmt. Für das Volumen $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{P_1 P_2})$ dieses Parallelepipeds gilt nach Satz G 49 einerseits $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{P_1 P_2}) = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}$. Andererseits

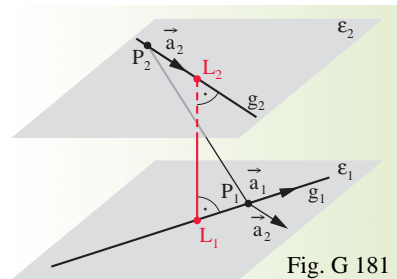


Fig. G 181

ist dieses Volumen gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche und der Höhe des Körpers über dieser Grundfläche. Diese Höhe stimmt mit $|\overline{L_1 L_2}|$ überein, womit

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \cdot |\overline{L_1 L_2}|, \text{ also } |\overline{L_1 L_2}| = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \text{ folgt.}$$

G 53

Satz G 53: Abstand zweier windschiefer Geraden

Sind zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 durch ihre Gleichungen $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + r \vec{a}_1$ und

$g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \vec{a}_2$ gegeben, so ist $d = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$ der Abstand von g_1 und g_2 .

Satz G 53 setzt voraus, dass g_1 und g_2 zueinander windschief sind. Insbesondere sind dann die Richtungsvektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 linear unabhängig. Für den Abstand von g_1 und g_2 gilt stets $d \neq 0$.

Sind jedoch g_1 und g_2 zwei einander in genau einem Punkt schneidende Geraden, so erhält man bei der Berechnung von $d = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$ für d den Wert 0. In diesem Fall ist nämlich das Volumen des Parallelepipeds 0. Auf diese Weise lässt sich für zwei Geraden g_1 und g_2 mit linear unabhängigen

Richtungsvektoren entscheiden, ob sie einander schneiden oder windschief zueinander sind.

G 92

Beispiel G 92:

Es ist die **gegenseitige Lage der beiden Geraden**

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{zu untersuchen.}$$

Weil $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, verlaufen g_1 und g_2 nicht parallel zueinander. Wir berechnen den Abstand beider Geraden:

$$\text{Mit } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ also } \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ und } \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = 5, \text{ ergibt sich nach Satz G 53 } d = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 8 & 1 & -6 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

g_1 und g_2 sind folglich windschief zueinander. Ihr Abstand beträgt 10 cm.

G 93

Beispiel G 93:

Es ist die **gegenseitige Lage der beiden Geraden**

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{zu untersuchen.}$$

Weil die Richtungsvektoren der beiden Geraden linear unabhängig sind, verlaufen g_1 und g_2 nicht parallel zueinander. Wir können daher den Abstand beider Geraden mit

$$d = \frac{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \quad \text{berechnen: } d = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -11 & 10 & 11 \end{vmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} \right|} = 0$$

Folglich schneiden die Geraden g_1 und g_2 einander in einem Punkt S. (Dieser gemeinsame Punkt besitzt die Koordinaten (3; 5; 6).)

G 9 Vektorräume

G 9.1 Der Begriff Vektorraum

Beim Arbeiten mit Vektoren stellen die **Addition zweier Vektoren** und die **Vervielfachung eines Vektors mit einer reellen Zahl** grundlegende Verknüpfungen dar. Sowohl in der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes als auch bei den Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems wurden diese Verknüpfungen verwendet (vgl. G 5.1). So kann man sich z.B. ausgehend von der in Abschnitt G 1.1 vorgenommenen Einführung des Begriffs *Vektor* in der Ebene durch die Vorstellung

- von *Verschiebungsvektoren*,
- von *Mengen von Pfeilen*, die jeweils gleich lang, zueinander parallel und gleich orientiert sind,
- von *geordneten Paaren* reeller Zahlen (Koordinatenpaare, Beschreibung bezüglich eines Koordinatensystems)

unterschiedliche Seiten des Begriffs zu Nutze machen.

Für Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind die Verknüpfungen $\vec{a} + \vec{b}$ und $r \vec{a}$ über Pfeile geometrisch (etwa als Kräfteparallelogramm bzw. als Nacheinanderausführung oder Vervielfachung) realisierbar. Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Spaltenvektoren und damit beschrieben bezüglich eines Koordinatensystems, so gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad r \vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r a_1 \\ r a_2 \end{pmatrix}.$$

Geht man nun allein vom Bereich \mathbb{R} der reellen Zahlen aus, so lassen sich die *Menge aller Paare* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ reeller Zahlen und die *Menge aller Tripel* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ reeller Zahlen (jeweils mit einer koordinatenweisen Addition und Vervielfachung von reellen Zahlen als Verknüpfungen) als *neue Mengen* von Vektoren ansehen.

Betrachtet man weiterhin die im Umfeld des Satzes G 27 (Abschnitt G 5.1) über die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen aufgeschriebenen Terme und Formeln, so kann man feststellen:

- Die Lösungen sind jeweils n -Tupel $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ reeller Zahlen.
- In der Lösungsmenge (eines nichttrivial lösaren Gleichungssystems) kann koordinatenweise addiert sowie eine Lösung koordinatenweise mit einer Zahl vervielfacht werden, ohne dass man die Lösungsmenge verlässt.

Man sagt deshalb: *Die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems ist **gegenüber der Addition und der Vervielfachung** mit reellen Zahlen **abgeschlossen**.*

Diese Eigenschaft war bei Kräften, Geschwindigkeiten, Verschiebungen in Ebene bzw. Raum und Paaren bzw. Tripeln reeller Zahlen selbstverständlich und nicht bemerkenswert. Interessanter ist nunmehr, dass mit diesen sehr unterschiedlichen Objekten in der gleichen Art und Weise gerechnet werden kann. Die Gültigkeit von gleichen Rechengesetzen (vgl. die Sätze G 1 bis G 3) bezüglich einer in der jeweiligen Menge definierten Addition und einer Vervielfachung von Elementen dieser Menge mit reellen Zahlen bringt eine Strukturgleichheit der betrachteten Mengen zum Ausdruck. Dies führt zu folgender Definition:

G 30

Definition G 30:

Eine nichtleere Menge V , für deren Elemente eine Addition $+$ und eine Vervielfachung \cdot mit reellen Zahlen definiert sind (Symbol: $(V, +, \cdot)$), nennt man **Vektorraum** und ihre Elemente **Vektoren** genau dann, wenn für alle \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aus V sowie für alle reellen Zahlen r und s gilt:

- | | |
|---|---|
| (1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | (Kommutativgesetz) |
| (2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | (Assoziativgesetz) |
| (3) Es gibt ein solches Element $\vec{0}$ in V ,
dass für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. | (Existenz eines Nullelements) |
| (4) Zu jedem Element $\vec{a} \in V$ gibt es in V
ein Element $-\vec{a}$ mit $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. | (Existenz eines entgegengesetzten Elements) |
| (5) $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ | (Rechenregeln für die Vervielfachenbildung) |
| (6) $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$ | |
| (7) $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ | (Rechenregeln für die Vervielfachenbildung) |
| (8) $1\vec{a} = \vec{a}$ | |

Die allgemeine Festlegung des Vektorbegriffs nach obiger Definition rechtfertigt auch die Benutzung dieses Begriffs im Sinne der Definition G 1, da die Menge aller Pfeile bez. ihrer Einteilung in gleich

lange, zueinander parallele und gleich orientierte einen Vektorraum bildet. Ebenso wie dort

- sagt man zu $\vec{0}$ allgemein auch *Nullvektor*,
- hat man mit der Existenz des¹⁾ zu einem Vektor *entgegengesetzten Vektors* neben der *Summe* auch die *Differenz* zweier Vektoren zur Verfügung,
- nennt man die Vervielfachung mit reellen Zahlen auch *Multiplikation mit reellen Zahlen*, *S-Multiplikation* oder *skalare Multiplikation* (wobei *skalar* hier zum Ausdruck bringen soll, dass mit einer reellen Zahl „multipliziert“ wird).

Die zunächst etwas sonderbar erscheinende Bedingung (8) in Definition G 30 sichert beispielsweise gemeinsam mit (6) ab, dass man das mehrfache Addieren eines Vektors zu sich selbst (in beliebigen Vektorräumen) als Vervielfachung ansehen kann: $\vec{a} + \vec{a} = 1\vec{a} + 1\vec{a} = (1 + 1)\vec{a} = 2\vec{a}$.

Erste **Beispiele für Vektorräume** haben wir mit verschiedenen Mengen, in denen eine Addition erklärt ist und bei denen mit jedem Element auch alle Vielfachen enthalten sind, bereits kennen gelernt. Wir können in diesem Sinne jetzt etwa sprechen von

- den Vektorräumen V_2 und V_3 der Verschiebungen der Ebene bzw. des Raumes,
- den Vektorräumen \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 der Paare bzw. Tripel reeller Zahlen,
- dem Vektorraum L der Lösungen (kurz: Lösungsraum) eines homogenen linearen Gleichungssystems.

Auch in der Zusammenstellung von Rechenregeln für die Addition von Matrizen gleichen Typs und für die Vervielfachung einer Matrix mit einer reellen Zahl (Abschnitt G 5.5) findet man genau die acht Eigenschaften wieder, welche oben als die definierenden Eigenschaften (1) – (8) eines Vektorraumes genannt wurden. Das heißt: Bezeichnet man mit $M_{(m, n)}$ die Menge *aller* $(m \times n)$ -Matrizen, so bildet diese Menge verbunden mit der Matrizenaddition und der Matrizenvervielfachung einen Vektorraum. $(M_{(m, n)}, +, \cdot)$ ist der *Vektorraum der Matrizen gleichen Typs*.

G 9.2 Beispiele für Vektorräume

Beispiel G 94: Der Vektorraum F der auf ganz \mathbb{R} stetigen Funktionen

Die stetigen Funktionen mit dem Definitionsbereich \mathbb{R} bilden einen Vektorraum $(F, +, \cdot)$, wenn die Addition und die Vervielfachung von solchen Funktionen wie üblich definiert ist:

$$s = f + g \quad \text{mit} \quad s(x) = f(x) + g(x) \qquad p = r \cdot g \quad \text{mit} \quad p(x) = r \cdot g(x)^{2)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle auf ganz \mathbb{R} stetigen Funktionen f und g sowie $r \in \mathbb{R}$.

Die Eigenschaften eines Vektorraumes nach Definition G 30 lassen sich für $(F, +, \cdot)$ mit Sätzen über stetige Funktionen und mit Rechengesetzen für reelle Zahlen bestätigen:

- Die Summe zweier stetiger Funktionen auf \mathbb{R} ist wieder eine stetige Funktion auf \mathbb{R} (vgl. Satz C 4), d. h., F ist bezüglich $+$ abgeschlossen. Da die Addition zweier Funktionen durch die Addition der Funktionswerte auf das Rechnen mit reellen Zahlen zurückgeführt wird, ergibt sich die Gültigkeit der Kommutativität (1) und der Assoziativität (2) aus den entsprechenden Gesetzen in \mathbb{R} . Nullelement (3) ist hier die (auf \mathbb{R} stetige) konstante Funktion $f(x) = 0$; zur auf \mathbb{R} stetigen Funktion f ist $(-1) \cdot f^{2)}$ das entgegengesetzte Element (4) in F .

G 94

¹⁾ Die Eindeutigkeit eines Nullvektors und die Eindeutigkeit eines entgegengesetzten Vektors kann als Ergänzung zu (3) bzw. (4) allgemein bewiesen werden.

²⁾ Diese Vervielfachung ist durch die Definition A 7 auch festgelegt: Man muss lediglich den Faktor r als die konstante Funktion f mit $f(x) = r$ interpretieren (f ist stetig auf \mathbb{R}). Analoges gilt für $r = -1$.

- Die Menge F der auf ganz \mathbb{R} stetigen Funktionen ist ebenfalls wegen Satz C 4 gegenüber Vervielfachung mit reellen Zahlen abgeschlossen. Die Rechenregeln für die Vervielfachung gelten wie bei $+$ aufgrund entsprechender Regeln für die reellen Zahlen.

Betrachtet man *alle Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{R}* , so bilden sie bezüglich $+$ und \cdot offensichtlich einen Vektorraum.

Analog zum obigen Beispiel G 94 lässt sich feststellen, dass auch *alle auf dem Intervall $[a; b]$ stetigen Funktionen* bezüglich $+$ und \cdot einen Vektorraum bilden.

Schließlich gilt: Die *auf ganz \mathbb{R} bzw. auf dem Intervall $[a; b]$ differenzierbaren Funktionen* bilden bezüglich $+$ und \cdot jeweils einen Vektorraum. Denn:

- Sind f und g überall auf \mathbb{R} (auf $[a; b]$) differenzierbar, so gilt dies auch für $f + g$ (Satz D 4, Summenregel).
- Ist g überall auf \mathbb{R} (auf $[a; b]$) differenzierbar, so gilt dies auch für $r \cdot g$ mit $r \in \mathbb{R}$ (Satz D 2, Faktorregel).

Die Eigenschaften (1) bis (8) aus der Definition eines Vektorraumes ergeben sich, wie bei stetigen Funktionen oben schon bemerkt, aus den Rechenregeln für reelle Zahlen.

G 95

Beispiel G 95: Der Vektorraum P_3 der Polynome höchstens dritten Grades

Es sei P_3 die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten, deren Grad höchstens 3 ist:

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}).$$

In natürlicher Weise ist für $p(x)$ mit den Koeffizienten a_i und $q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ sowie $r \in \mathbb{R}$ die Addition bzw. die Vervielfachung erklärt durch

$$p(x) + q(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \quad \text{bzw.}$$

$$r \cdot p(x) = ra_3x^3 + ra_2x^2 + ra_1x + ra_0$$

(Polynome sind **stetige Funktionen** auf \mathbb{R} ; die erklärten Verknüpfungen stehen in Einklang mit den Definitionen $f + g$ und $r \cdot g$ (hier $p + q$, $r \cdot p$) für das Beispiel G 94).

Die Vektoreigenschaften (1), (2) und (5) bis (8) sind wegen entsprechender Rechenregeln für reelle Zahlen erfüllt. Das Nullelement ist hier das Nullpolynom $o(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$; das entgegengesetzte Element zu $p(x)$ ist $-p(x) = (-a_3)x^3 + (-a_2)x^2 + (-a_1)x + (-a_0)$.

Ein Polynom ist durch seine Koeffizienten eindeutig bestimmt, so dass man die Polynome höchstens 3. Grades durch die 4-Tupel $(a_3; a_2; a_1; a_0)$ beschreiben kann. Dies zeigt, dass die Vektorräume $(P_3, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ in einem gewissen Sinne gleichartig sind.

Die analoge Verwandtschaft besteht zwischen dem Vektorraum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ der Tripel reeller Zahlen und dem Vektorraum $(P_2, +, \cdot)$ der Polynome höchstens zweiten Grades.

G 96

Beispiel G 96: Der Vektorraum \mathbb{R}^n der n -Tupel reeller Zahlen

Analog zu den Paaren und Tripeln reeller Zahlen in \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 (oder genauso wie man n -Tupel $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ als Lösungen von homogenen Gleichungssystemen mit n Variablen addiert und vervielfacht) definieren wir wie in Abschnitt G 5.1 für n -Tupel reeller Zahlen die Addition und Vervielfachung koordinatenweise:

$$(a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n)$$

$$r(a_1; a_2; \dots; a_n) = (ra_1; ra_2; \dots; ra_n)^{1)}$$

¹⁾ Ob man diese Vektoren als Zeilen- oder Spaltenvektoren notiert, ist hier unwesentlich.

Die in der Menge aller n -Tupel erklärte Addition und Vervielfachung mit reellen Zahlen erfüllen die Vektorraumeigenschaften (1) bis (8) aus der Definition G 30, d. h.:

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum; er wird auch kurz mit \mathbb{R}^n bezeichnet. Die Vektorräume \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 ergeben sich für $n = 2$ bzw. $n = 3$; sogar für $n = 1$ ist zu bemerken, dass die Menge $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit $+$ und \cdot einen Vektorraum bildet.¹⁾

Indem man den letzten Gedanken aus Beispiel G 95 aufgreift, kommt man zu folgender Verallgemeinerung: Der Vektorraum P_n der Polynome höchstens n -ten Grades ist von gleichartiger Struktur wie der Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} der $(n+1)$ -Tupel reeller Zahlen.

Als einfaches *Gegenbeispiel* bez. des Begriffs *Vektorraum* sei die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen betrachtet. Die übliche Addition in \mathbb{Z} ist kommutativ und assoziativ, 0 ist das Nullelement in \mathbb{Z} sowie $-g$ das zu g entgegengesetzte Element in \mathbb{Z} . $(\mathbb{Z}, +)$ erfüllt die Bedingungen (1) bis (4) der Vektorraumdefinition. Allerdings ist \mathbb{Z} bezüglich der Vervielfachung mit reellen Zahlen *nicht* abgeschlossen: Die Vervielfachung mit reellen Zahlen führt aus dem Bereich der ganzen Zahlen heraus.

G 9.3 Unterräume und Erzeugendensysteme

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ eines Vektorraumes V . Für die Menge M *aller Linearkombinationen* dieser Vektoren stellt man zunächst fest, dass sie bezüglich der Addition und der Vervielfachung *abgeschlossen* ist:

Sind $\vec{a}, \vec{b} \in M$, so gilt

$$\vec{a} + \vec{b} = (r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_m \vec{a}_m) + (s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + \dots + s_m \vec{a}_m) = (r_1 + s_1) \vec{a}_1 + \dots + (r_m + s_m) \vec{a}_m,$$

d.h., $\vec{a} + \vec{b}$ ist wieder eine Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, also $\vec{a} + \vec{b} \in M$.

Sind $\vec{a} \in M$ und $r \in \mathbb{R}$, so gilt

$$r \vec{a} = r(r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_m \vec{a}_m) = (rr_1) \vec{a}_1 + \dots + (rr_m) \vec{a}_m \text{ und damit auch } r \vec{a} \in M.$$

Die Umformungen zu einer Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ für $\vec{a} + \vec{b}$ und $r \vec{a}$ sind durch die Eigenschaften (1), (2) und (5) bis (8) der Vektorraumdefinition gerechtfertigt, die ja für alle Vektoren aus V gelten.

Diese sechs Eigenschaften gelten insbesondere für die Teilmenge M von V . Außerdem gehört

- wegen $0\vec{a}_1 + \dots + 0\vec{a}_m = \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0}$ der Nullvektor aus V zu M und
- mit jedem Vektor $\vec{a} = r_1 \vec{a}_1 + \dots + r_m \vec{a}_m$ aus M ebenso der entgegengesetzte Vektor $-\vec{a}$ zu M , da $-\vec{a} = (-1)(r_1 \vec{a}_1 + \dots + r_m \vec{a}_m) = (-r_1) \vec{a}_1 + \dots + (-r_m) \vec{a}_m$ ist.

Damit erhalten wir als eine Folgerung aus der Definition G 30:

Satz G 54: Menge aller Linearkombinationen von Vektoren als Vektorraum

Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ Vektoren eines Vektorraumes V , so ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren bezüglich Addition und Vervielfachung in V wieder ein Vektorraum.

G 54

¹⁾ Die Vervielfachung in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ erweist sich in der Menge \mathbb{R}^* der von 0 verschiedenen reellen Zahlen sogar als eine Operation mit den strukturell gleichen Eigenschaften wie $+$ (kommutativ, assoziativ, Einselement 1, zu a inverses Element a^{-1}). Als Zahlenbereich mit zwei Operationen ist \mathbb{R} ein „kommutativer Körper“.

G 97

Beispiel G 97:

Es seien $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Vektoren des Raumes.

Die Menge $M = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$ ist eine echte Teilmenge des Vektorraumes V_3 (gleichartig strukturiert wie \mathbb{R}^3) und M ist wieder ein Vektorraum, da M bezüglich $+$ und \cdot abgeschlossen ist.

Nach Eliminierung von t_1 und t_2 aus den Koordinatengleichungen zu $\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2$

erhält man $M = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 12x - 4y + z = 0 \right\}$,

d.h., M ist der Vektorraum aller Ortsvektoren der Ebene $\varepsilon: 12x - 4y + z = 0$.

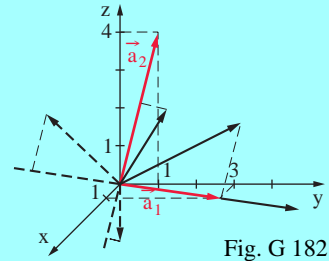


Fig. G 182

Für einen beliebigen Vektorraum V führt dies als Verallgemeinerung zu folgender Begriffsbildung:

G 31

Definition G 31:

Eine Teilmenge U eines Vektorraumes V , die selbst bezüglich der Addition und der Vervielfachung in V ein Vektorraum ist, heißt **Unterraum U des Vektorraumes V** .

Um festzustellen, ob eine Teilmenge M eines Vektorraumes V ein Unterraum von V ist, hat man nur zu prüfen, ob M bezüglich $+$ und \cdot abgeschlossen ist: Dies ist schon gewährleistet, wenn man für beliebige $\vec{a}, \vec{b} \in M$ und $r \in \mathbb{R}$ zeigt, dass $\vec{a} + \vec{b} \in M$ und $r \vec{a} \in M$ gilt (hinreichende Bedingungen). Speziell gilt dann $\vec{0} \in M$, da $0\vec{a} = \vec{0}$, und mit $\vec{a} \in M$ ist auch $-\vec{a} \in M$, da $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

Die beiden Bedingungen sind auch notwendig, so dass sich das folgende Kriterium ergibt.

G 55

Satz G 55: **Unterraumkriterium**

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V ist genau dann ein Unterraum von V , wenn für alle Vektoren \vec{a}, \vec{b} aus U und für alle reellen Zahlen r gilt:

- $\vec{a}, \vec{b} \in U \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$,
- $\vec{a} \in U, r \in \mathbb{R} \Rightarrow r \vec{a} \in U$

Beispielsweise bildet $M_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$ wegen Satz G 27 (G 5.1) einen Unterraum des Vektorraumes \mathbb{R}^2 . Dagegen ist $M_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 6\}$ kein Unterraum in \mathbb{R}^2 : Es gilt nämlich z.B. $(0; -2) \in M_2$, aber $2 \cdot (0; -2) = (0; -4) \notin M_2$. Ebenso gehört der Nullvektor $\vec{0}$ von \mathbb{R}^2 nicht zu M_2 .

Für das homogene lineare Gleichungssystem mit 4 Variablen in Beispiel G 56 (Abschnitt G 5.1) besteht die Lösungsmenge aus allen 4-Tupeln der Form

$(x_1; x_2; x_3; x_4) = r(2; 3; 1; 0) + s(4; -1; 0; 1)$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Mit den Lösungsvektoren $\vec{a}_1 = (2; 3; 1; 0)$ und $\vec{a}_2 = (4; -1; 0; 1)$ aus dem Vektorraum \mathbb{R}^4 sind auch alle Linearkombinationen von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 Lösungen des Gleichungssystems.

Nach dem Unterraumkriterium (Satz G 55) erhält man nun als Ergänzung zu Satz G 27 (Abschnitt G 5.1) die folgende Strukturaussage:

Satz G 56: Ergänzung zu Satz G 27 (Abschnitt G 5.1)

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mit n Variablen ist ein Unterraum des Vektorraumes \mathbb{R}^n aller n -Tupel reeller Zahlen.

G 56

Wegen Satz G 56 spricht man bei einem homogenen linearen Gleichungssystem vom Lösungsraum des Gleichungssystems.

Zu den in Beispiel G 94 betrachteten Funktionenräumen kann jetzt für ein Intervall $[a; b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ergänzt werden: Der Vektorraum der auf $[a; b]$ differenzierbaren Funktionen ist ein Unterraum des Vektorraumes der auf $[a; b]$ stetigen Funktionen (und beide sind Unterräume des Vektorraumes aller auf $[a; b]$ definierten Funktionen) (vgl. Abschnitt D 1.2).

Für Unterräume, die über alle **Linearkombinationen** von gegebenen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ eines Vektorraumes beschrieben werden, sind folgende Benennungen üblich:

Definition G 32:

Der durch alle Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ gebildete Unterraum U heißt

- die **lineare Hülle U der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$** bzw.
- der **von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ erzeugte Unterraum U** bzw.
- der **von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ aufgespannte Unterraum U** .

Die Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ wird ein **Erzeugendensystem des Unterraumes U** genannt.

G 32

G 9.4 Basen und Dimension von Unterräumen eines Vektorraumes

Beispiel G 98: Der Vektorraum \mathbb{R}^3 der Tripel reeller Zahlen und seine Unterräume

Eine geometrische Deutung erfährt der Vektorraum \mathbb{R}^3 durch den Vektorraum der Verschiebungen des Anschauungsraumes. Man kann diese Vektoren auch durch alle Ortsvektoren des Raumes bezüglich eines festen Punktes O (Koordinatenursprung) veranschaulichen.

Unterräume des \mathbb{R}^3 (und zwar *alle* möglichen) sind

- der Vektorraum, der nur aus dem *Nullvektor* $\vec{0}$ besteht;
- alle Ortsvektoren, die Punkte einer *festen* Geraden g durch O beschreiben;
- alle Ortsvektoren, die Punkte in einer *festen* Ebene ε durch O beschreiben;
- der ganze Vektorraum \mathbb{R}^3 .

G 98

Für die Vektoren in der Ebene (V_2, \mathbb{R}^2) gilt nach Abschnitt G 1.3, dass je zwei nicht parallele Vektoren (also zwei linear unabhängige Vektoren) eine *Basis* des Vektorraumes V_2 (\mathbb{R}^2) bilden. Im Vektorraum V_3 , dessen Vektoren durch Tripel reeller Zahlen beschrieben werden (\mathbb{R}^3), stellen je drei nicht komplanare, d.h. je drei linear unabhängige Vektoren, eine Basis dar. Da über diese konkreten Beispiele hinaus alle Basen eines Vektorraumes gleich viele Vektoren enthalten (was hier ohne Beweis mitgeteilt sei), wird die Anzahl der Vektoren einer Basis – als eine *Invariante* eines Vektorraumes – die *Dimension des Vektorraumes* genannt.

G 33

Definition G 33:

Es sei U ein vom Nullraum $\{\vec{0}\}$ verschiedener Unterraum des Vektorraumes V .

Ein Erzeugendensystem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ von U (vgl. Definition G 32) heißt genau dann eine **Basis von U** , wenn die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ linear unabhängig sind. Die Anzahl der Vektoren einer Basis von U nennt man die **Dimension von U** .

(Da V Unterraum von sich selbst ist, sind durch obige Formulierung auch die Begriffe *Basis von V* und *Dimension von V* mit erfasst.)

Die folgende Übersicht zum Begriff *Basis* B von U enthält neben den definierenden Eigenschaften für eine Teilmenge B von U weitere kennzeichnende Bedingungen (ohne Beweise):

$B \subseteq U$ ist genau dann eine *Basis von U* , wenn eines der folgenden drei Bedingungspaare gilt:

- | | | |
|--|--|---|
| <p>(1) B ist ein <i>Erzeugendensystem</i> von U (d.h., die lineare Hülle von B ist U; B spannt U auf; jeder Vektor von U ist eine Linearkombination von Vektoren aus B).</p> <p>(2) B ist <i>linear unabhängig</i>.</p> | <p>(1) B ist ein <i>Erzeugendensystem</i> von U.</p> <p>(2') <i>Keine echte Teilmenge</i> von B <i>spannt U auf</i>. (Mit anderen Worten: Eine Basis von U ist ein <i>minimales Erzeugendensystem</i> in U.)</p> | <p>(2) B ist <i>linear unabhängig</i>.</p> <p>(2'') <i>Jede echte Obermenge</i> von B ist <i>linear abhängig</i>. (Mit anderen Worten: Eine Basis von U ist eine <i>maximale linear unabhängige Menge</i> (System) in U.)</p> |
|--|--|---|

G 99

Beispiel G 99: Basen im Vektorraum \mathbb{R}^n

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ heißt die *natürliche Basis* des n -

dimensionalen Vektorraumes \mathbb{R}^n . Je n linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n bilden eine Basis von \mathbb{R}^n . Somit stellen die Spaltenvektoren einer regulären $(n \times n)$ -Matrix A (und ebenso ihre Zeilenvektoren) eine Basis von \mathbb{R}^n dar.

Als Standardmodell \mathbb{R}^n für einen n -dimensionalen reellen Vektorraum (reell bezieht sich dabei auf den Skalarbereich) finden sich auch die Vektorräume V_2 und V_3 mit ihrer *natürlichen* Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bzw. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ wieder.

G 100

Beispiel G 100: Die natürliche Basis des Vektorraumes P_n

Im Beispiel G 95/G 96 wurde gezeigt, dass der Vektorraum P_n der Polynome höchstens n -ten Grades und der Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} gleichartig strukturiert sind; ein Polynom höchstens n -ten Grades ist nämlich durch das $(n+1)$ -Tupel $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ seiner Koeffizienten beschrieben und die Verknüpfungen $+$ und \cdot werden auch hier „koordinatenweise“ ausgeführt.

Mit Blick auf ein Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ und auf die natürliche Basis des Vektorraumes \mathbb{R}^{n+1} (vgl. Beispiel G 99) ist offenbar die Menge $\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$ von einfachen Polynomen aus P_n eine Basis von P_n , und zwar die natürliche Basis.

Zusätzlich sei darauf verweisen, dass aus $r_1 x^n + r_2 x^{n-1} + \dots + r_n x + r_{n+1} \cdot 1 = 0$ (Nullpolynom) stets $r_1 = r_2 = \dots = r_{n+1} = 0$ folgt, dass also diese $n+1$ Polynome linear unabhängig sind.