

D Differentialrechnung und ihre Anwendung zur Untersuchung von Funktionseigenschaften

Bund, Länder, Städte und Gemeinden benötigen zur Wahrnehmung ihrer Aufgaben einen eigenen Haushalt. Eine wichtige Einnahmequelle für diesen Haushalt sind Steuern. Einen besonderen Platz unter den verschiedenen Steuerarten nehmen die Einkommensteuern ein, die (fast) jede Bürgerin und jeder Bürger zahlen muss. Die **Einkommensteuer** wird folgendermaßen ermittelt: Zunächst wird das zu *versteuernde Einkommen* festgestellt. Dieses erhält man, indem man von den gesamten Jahreseinkünften einen gewissen Betrag, der aus Freibeträgen, Werbungskosten, Sonderausgaben usw. besteht, abzieht. Nach dem gültigen Einkommensteuertarif lässt sich dann die Jahressteuer berechnen. Im Einkommensteuergesetz heißt es in § 32a, der durch Gesetz vom 22.12.1999 neu gefasst wurde, für den Veranlagungszeitraum 2000 für ledige Personen (für Ehepaare gelten Sonderregelungen):

- (1) Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt ... jeweils in Deutsche Mark für zu versteuernde Einkommen
 1. bis 13 499 Deutsche Mark (Grundfreibetrag): 0;
 2. von 13 500 Deutsche Mark bis 17 495 Deutsche Mark:
 $(262,76 \cdot y + 2\,290) \cdot y$;
 3. von 17 496 Deutsche Mark bis 114 695 Deutsche Mark:
 $(133,74 \cdot z + 25\,00) \cdot z + 957$;
 4. von 114 696 Deutsche Mark an:
 $0,51 \cdot x - 20\,575$.

y ist ein Zehntausendstel des 13 446 Deutsche Mark übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens. z ist ein Zehntausendstel des 17 442 Deutsche Mark übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens. x ist das abgerundete zu versteuernde Einkommen.

Bei der im Gesetzestext definierten Steuerfunktion $S(x)$ handelt es sich um eine abschnittsweise definierte Funktion:

- (1) $[0; 13\,499[\quad : \quad S(x) = 0$
- (2) $[13\,500; 17\,495[\quad : \quad S(x) = (262,76 \cdot y + 2\,290) \cdot y \quad \text{mit } y = \frac{1}{10^4} \cdot (x - 13\,446)$
- (3) $[17\,496; 114\,695[\quad : \quad S(x) = (133,74 \cdot z + 25\,000) \cdot z + 957 \quad \text{mit } z = \frac{1}{10^4} \cdot (x - 17\,442)$
- (4) $\{x \mid x \geq 114\,696\} \quad : \quad S(x) = 0,51 \cdot x - 20\,575$

Damit ist man in der Lage, die **zu zahlende Einkommensteuer** zu ermitteln, den **Einkommensteuersatz** $\frac{S(x)}{x}$ anzugeben (also den Bruchteil des Einkommens x, der als Steuer zu zahlen ist) und den **durchschnittlichen Steuersatz in einem Einkommensintervall** $[a, b]$ zu berechnen (s. Beispiel D 26). Aber schon bei einfachen Fragen der Steuergerechtigkeit, z.B. der Frage, welcher Bruchteil von einem relativ kleinen Hinzuverdienst versteuert werden muss, reichen die bisherigen mathematischen Mittel nicht aus. Zur Bestimmung der so genannten **Grenzsteuer** (d.h. des Bruchteils, mit dem die letzte hinzuverdiente Mark steuerlich belastet wird) benötigt man Mittel der **Differentialrechnung**.

D 1 Anliegen und Grundbegriffe der Differentialrechnung

D 1.1 Der Begriff Ableitung einer Funktion

Eine Holzkugel möge von einer 80 m hohen Brücke in die Tiefe fallen. Die Kugel fällt in der ersten Sekunde 5 m herunter, in der zweiten – aufgrund der Erdanziehung schon schneller geworden – 15 m, in der dritten 25 m und in der vierten 35 m. Damit hat die Kugel 80 m zurückgelegt und trifft z.B. auf eine Wasseroberfläche auf.

Wir betrachten die Geschwindigkeit, mit der sich die Kugel bewegt: Am Anfang ruht sie, nach einer Sekunde fällt sie mit etwa 10 Meter pro Sekunde (das sind $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$), nach zwei Sekunden mit 20 Meter pro Sekunde, nach drei Sekunden mit 30 Meter pro Sekunde und nach vier Sekunden prallt sie mit einer Geschwindigkeit von 40 Meter pro Sekunde auf der Oberfläche auf. Physikalisch gesehen erfährt die Kugel eine konstante Beschleunigung von $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (der genauere Wert der Erdbeschleunigung ist $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

Der Fall der Kugel wird demnach durch drei Größen beschrieben: die **Höhe** der Kugel über der Wasseroberfläche, die Änderungsrate dieser Höhe, also die **Geschwindigkeit**, und die Änderungsrate der Geschwindigkeit, die **Beschleunigung**.

Die funktionalen Zusammenhänge in Abhängigkeit von der Zeit zeigen Fig. D 1, Fig. D 2 und Fig. D 3, wobei erkennbar

ist, dass die Größe der Änderungsrate pro Zeiteinheit sich in der „Steilheit“ des Graphen, in seiner „Steigung“ ausdrückt.

Es soll nun untersucht werden, wie man eine solche **Änderungsrate** bestimmen könnte.

Wäre der Graph einer bestimmten Funktion eine Gerade, dann ist die Lösung einfach: Man nimmt zwei beliebige Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ und bildet den Quotienten aus den Differenzen ihrer Ordinaten- und ihrer Abszissenwerte. Die Geschwindigkeit der fallenden Kugel lässt sich durch die Funktionsgleichung $v(t) = 10t$ beschreiben. Der „Differenzenquotient“ für zwei beliebige Punkte $P_1(t_1; v(t_1))$ und $P_2(t_2; v(t_2))$ ist dann stets

$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{10t_2 - 10t_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 \cdot (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 10.$$

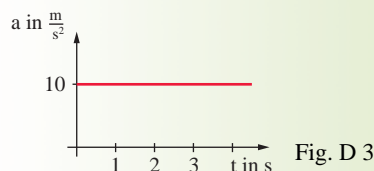
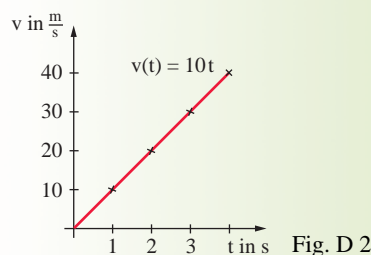
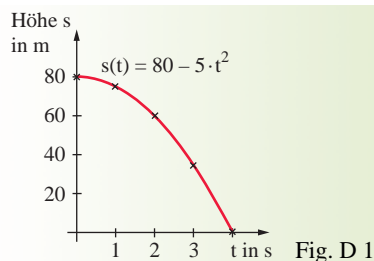
Bildet der Graph einer Funktion aber eine gekrümmte Kurve, dann ist der Differenzenquotient nicht unabhängig von der Wahl der Punkte. Die Höhen bzw. die Wege der Kugel werden so in obigem Beispiel durch die Funktion $s(t) = 80 - 5t^2$ beschrieben, deren Graph eine Parabel ist. Um die Änderungsrate bzw. Steigung an der Stelle $t_0 = 1$ zu bestimmen, wählen wir Punkte links und rechts von t_0 und nähern uns von beiden Seiten dieser Stelle. Es ergeben sich folgende Differenzenquotienten:

Für die Zeitpunkte 1 s vor und 1 s nach $t_0 = 1$

$$\frac{s(1) - s(1-1)}{1} = -5 \quad \frac{s(1+1) - s(1)}{1} = -15;$$

für die Zeitpunkte 0,5 s vor und 0,5 s nach $t_0 = 1$

$$\frac{s(1) - s(1-0,5)}{0,5} = -7,5 \quad \frac{s(1+0,5) - s(1)}{1} = -12,5;$$



für die Zeitpunkte 0,1 s vor und 0,1 s nach $t_0 = 1$

$$\frac{s(1) - s(1 - 0,1)}{0,1} = -9,5 \quad \frac{s(1 + 0,1) - s(1)}{0,1} = -10,5; \quad \frac{s(1) - s(1 - 0,01)}{0,01} = -9,95 \quad \frac{s(1 + 0,01) - s(1)}{0,01} = -10,05;$$

für 0,001 s vor bzw. nach $t_0 = 1$

$$\frac{s(1) - s(1 - 0,001)}{0,001} = -9,995 \quad \frac{s(1 + 0,001) - s(1)}{0,001} = -10,005.$$

Physikalisch gesehen stellen diese Differenzenquotienten $\frac{s(1) - s(1 - h)}{h}$ bzw. $\frac{s(1 + h) - s(1)}{h}$, $h > 0$ ein Maß für die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Intervallen $[1 - h; 1]$ bzw. $[1; 1 + h]$ dar. Allgemein erhält man wegen $s(t) = 80 - 5t^2$:

$$\frac{s(1) - s(1 - h)}{h} = \frac{80 - 5 \cdot 1^2 - (80 - 5(1 - h)^2)}{h} = -10 + 5h \quad \text{und}$$

$$\frac{s(1 + h) - s(1)}{h} = \frac{80 - 5(1 + h)^2 - (80 - 5 \cdot 1^2)}{h} = -10 - 5h$$

Setzt man für h immer kleinere positive Zahlen ein, lässt h also die Glieder einer Nullfolge durchlaufen (s. Abschnitt B 2), dann beträgt der Differenzenquotient an der Stelle $t_0 = 1$ im Grenzfalle -10 . Diese Zahl wird als Änderungsrate, Steigung oder auch Ableitung der Funktion $s(t) = 80 - 5t^2$ an der Stelle $t_0 = 1$ bezeichnet. Ihr Betrag ist ein Maß für die **Momentangeschwindigkeit** der fallenden Kugel zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ (s). Lässt man für h sowohl positive als auch negative Werte zu, so ist es ausreichend, einen der beiden Differenzenquotienten zu betrachten. In der Regel beschränkt man sich auf den Differenzenquotienten $\frac{s(1 + h) - s(1)}{h}$. Diejenige Funktion, die jeder reellen Zahl $h \neq 0$ genau einen Differenzenquotienten zuordnet, wird *Differenzenquotientenfunktion* (oder auch kurz Differenzenquotient) von $s(t)$ an der Stelle 0,5 genannt.

Ausgehend von obigen Beispielen führen wir folgende Begriffe ein:

Definition D 1:

Es sei $y = f(x)$ eine auf D_f definierte Funktion¹⁾ und $x_0, x_0 + h \in D_f$.²⁾ Die Funktion

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{mit } h \neq 0) \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{mit } x \neq x_0)$$

heißt **Differenzenquotient** von $f(x)$ an der Stelle x_0 .

D 1

Definition D 2:

Es sei $y = f(x)$ eine auf D_f definierte Funktion und $x_0, x_0 + h \in D_f$. Wir nennen $y = f(x)$ an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in \mathbb{R} existiert. Dieser Grenzwert heißt **Ableitung oder Differentialquotient** der Funktion f mit $y = f(x)$ an der Stelle x_0 .

Man schreibt: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ – gesprochen „f Strich von x_0 “.

D 2

¹⁾ Bezüglich der Sprech- und Schreibweise sei hier noch einmal auf die in Abschnitt A 1 getroffene Vereinbarung verwiesen.

²⁾ Die Schreibweise „ $x_0, x_0 + h \in D_f$ “ soll bedeuten, dass x_0 und $x_0 + h$ zu D_f gehören.

Andere Schreib- und entsprechende Sprechweisen für die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 sind

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} && \text{„}df(x) \text{ nach } dx \text{ an der Stelle } x_0\text{“,} \\ &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} && \text{„}dy \text{ nach } dx \text{ an der Stelle } x_0\text{“,} \\ &= y' \big|_{x_0} && \text{„}y \text{ Strich an der Stelle } x_0\text{“.} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Eine wichtige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 besteht darin, dass f an der Stelle x_0 und in einer Umgebung von x_0 definiert ist. Das heißt also z. B. für $f(x) = \frac{1}{x}$, dass diese Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht differenzierbar* ist, weil f nur für alle $x \neq 0$ definiert ist. In der Regel betrachtet man als Definitionsbereiche D_f offene oder abgeschlossene Intervalle.
- Von entscheidender Bedeutung für die Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle x_0 ist, dass der **Grenzwert** des Differenzenquotienten unabhängig von der Wahl der Nullfolge (h_n) existiert. Diese Voraussetzung ist in der Regel bei Funktionen, die links bzw. rechts von der betrachteten Stelle x_0 durch unterschiedliche Funktionsterme definiert sind, nicht erfüllt, z. B.

$$f: f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases} \quad (\text{Fig. D 4}).$$

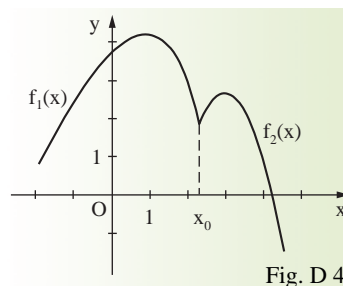


Fig. D 4

- In der historischen Entwicklung der Differentialrechnung spielte innermathematisch das so genannte „Tangentenproblem“ eine große Rolle. Gemeint ist damit die Frage, ob für einen beliebigen Funktionsgraphen in einem vorgegebenen Punkt die Tangente an den Graphen existiert und wie man ihre Steigung bzw. ihre Gleichung ermitteln kann. Jetzt wissen wir: Da der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ geometrisch die Steigung der Sekante durch die Punkte $P_0(x_0; f(x_0))$ und $P(x; f(x))$ bedeutet, gibt die Ableitung $f'(x_0)$ den Anstieg der Tangente t an den Graphen der Funktion im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ an:

$$m_t = \tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Als **Gleichung der Tangente** erhält man $y = f_t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Mit dem Tangentenbegriff verbunden ist die inhaltliche Vorstellung, dass die Tangente den Graphen der Funktion im Punkt P_0 berührt bzw. sich in diesem Punkt besonders gut an die Kurve „anschmiegt“. Deshalb liegt die Annahme nahe, dass die Tangenfunktion $f_t(x)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 gute Näherungswerte für $f(x)$ liefert.

In der Tat folgt aus der Definition der Ableitung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ und den Kenntnissen über die Grenzwert-}$$

bildung, dass für Zahlen x , die hinreichend nahe bei x_0 liegen, gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0), \text{ also } f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

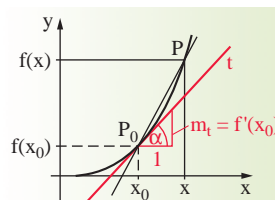


Fig. D 5

Damit ist eine lineare Näherung von Funktionswerten der Ausgangsfunktion f für x -Werte in der Nähe von x_0 möglich, wenn man $f'(x_0)$ kennt. Oder anschaulich gesprochen: Man kann den Graphen der Funktion näherungsweise durch Tangentenabschnitte ersetzen.

Beispiel D 1:

Für die Funktion $f(x) = 0,5x^2$ sind die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ und die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(1; f(1))$ an den Graphen von f zu bestimmen.

Der Differenzenquotient von f an der Stelle $x_0 = 1$ ist

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{0,5(1+h)^2 - 0,5 \cdot 1^2}{h} \quad (\text{mit } h \neq 0) \\ &= \frac{0,5 + 0,5 \cdot 2 \cdot h + 0,5h^2 - 0,5}{h} = \frac{h + 0,5h^2}{h} = 1 + 0,5h. \end{aligned}$$

Damit erhält man $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 0,5h) = 1$.

Das heißt: Die Tangente an den Graphen von $f(x) = 0,5x^2$ in $P(1; 0,5)$ hat den Anstieg 1 und wegen $m = \tan \alpha = 1$ den Anstiegswinkel $\alpha = 45^\circ$ (Fig. D 6).

Für die Tangente in $P_0(1; 0,5)$ erhält man wegen $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, also $y = 1 \cdot (x - 1) + 0,5$, somit die Gleichung $y = x - 0,5$.

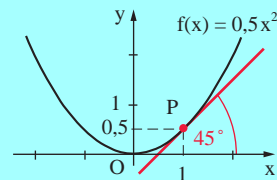


Fig. D 6

D 1

Beispiel D 2:

Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ an einer beliebigen Stelle x_0 zu bilden. Der Differenzenquotient ist

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot h + 3x_0 \cdot h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot h + h^2$$

und damit $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \cdot h + h^2) = 3x_0^2$.

Speziell gilt: $f'(0) = 0$; $f'(1) = 3$; $f'(2) = 12$; $f'(-1) = 3$.

An welcher Stelle x_0 hat die Tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$ den Anstieg 75?

Aus $3x_0^2 = 75$ erhält man $|x_0| = \sqrt{25}$ und damit $x_{01} = 5$ und $x_{02} = -5$.

D 2

Beispiel D 3:

Die Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ ist auf Differenzierbarkeit an einer beliebigen Stelle x_0 zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{(x_0 + h)^3 + (x_0 + h)^2 - (x_0^3 + x_0^2)}{h} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^3 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + 2x_0h + h^2}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 2x_0 + h, \quad (h \neq 0). \end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2 + 2x_0 + h) = 3x_0^2 + 2x_0.$$

Das heißt: Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert. Da man für x_0 jede reelle Zahl einsetzen kann, ist die Funktion f an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar.

D 3

D 4

Beispiel D 4:

Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) an einer beliebigen Stelle x_0 ($x_0 \neq 0$) zu bestimmen.

Wir bilden zunächst wieder den Differenzenquotienten:

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)h} = \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} \quad (\text{für } h \neq 0; x_0 + h \neq 0)$$

Als Grenzwert für $h \rightarrow 0$ ergibt sich dann $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}$.

Das bedeutet: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) ist an jeder Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs differenzierbar und besitzt dort die Ableitung

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}, \quad x_0 \neq 0.$$

Für den Anstieg der Tangente im Punkt $P_1(\frac{1}{2}; 2)$ erhält man $f'(\frac{1}{2}) = -4$ und damit die Gleichung der Tangente in P_1

$$\begin{aligned} y &= f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \\ &= -4(x - \frac{1}{2}) + 2 = -4x + 4. \end{aligned}$$

Der Anstiegswinkel der Tangente beträgt (wegen $\tan \alpha = -4$) $\alpha \approx 104^\circ$ (Fig. D 7).

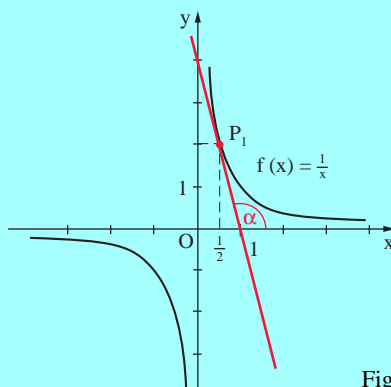


Fig. D 7

D 5

Beispiel D 5:

Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ zu ermitteln. Wegen $x \geq 0$ kann der Differenzenquotient auch nur für $x_0 \geq 0$ untersucht werden. Es gilt

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad (h \neq 0; x_0 + h \geq 0).$$

Erweitern mit $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$ ergibt

$$d(h) = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{x_0 + h - x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

Wir bilden zunächst den Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$. Für $h > 0$

$$\text{gilt: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{0 + h} + \sqrt{0}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Mit anderen Worten: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht differenzierbar*. Betrachtet man dagegen nur Stellen $x_0 > 0$, dann erhält man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}.$$

Das heißt: Die Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist für beliebige $x_0 > 0$ stets differenzierbar.

Ihre Ableitung ist $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Damit können wiederum Anstiege von Tangenten in bestimmten Punkten berechnet und die Tangentengleichungen aufgestellt werden.

Beispiel D 6:

Wir untersuchen die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$. Der Differenzenquotient dieser Funktion ist

$$d(h) = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \quad (\text{für } h \neq 0).$$

Das heißt, für $h > 0$ ist $d(h) = 1$ und für $h < 0$ ist $d(h) = -1$. Fig. D 8 zeigt den Graphen der Differenzenquotientenfunktion.

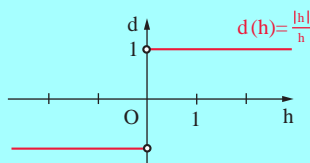


Fig. D 8

Bei der Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten sind wiederum zwei Fälle zu untersuchen.

1. Fall: $h > 0$, d.h., man nähert sich der Stelle $x_0 = 0$ nur mit Nullfolgen (h_n) mit $h_n > 0$, also von rechts. Dann gilt $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = 1$ (rechtsseitiger Grenzwert).

2. Fall: $h < 0$, d.h., man nähert sich der Stelle $x_0 = 0$ nur mit Nullfolgen (h_n) mit $h_n < 0$, also von links. Dann gilt $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = -1$ (linksseitiger Grenzwert).

Da der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert nicht übereinstimmen, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ nicht. Mit anderen Worten: Die Betragsfunktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht differenzierbar*.

Das Vorhandensein des rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwertes des Differenzenquotienten lässt sich für eine weitere Begriffsbildung nutzen: Man sagt, die Betragsfunktion besitzt an der Stelle $x_0 = 0$

- die **rechtsseitige Ableitung** $f'_r(0) = 1$ bzw.
- die **linksseitige Ableitung** $f'_l(0) = -1$.

Die Beispiele D 5 und D 6 zeigen insbesondere, dass nicht in jedem Falle eine Ableitung existiert.

Ordnet man allen Stellen x_0 , an denen eine Funktion f differenzierbar ist, ihre Ableitung $f'(x_0)$ zu, so stellt diese Zuordnung selbst wieder eine Funktion dar. Sie wird mit f' bezeichnet und heißt **Ableitungsfunktion** der Funktion f . Es gilt: $f': x \rightarrow f'(x)$ mit $D_{f'} = D_f$, wenn f überall in D_f differenzierbar ist, ansonsten ist $D_{f'} \subsetneq D_f$. Im Unterschied zu $f'(x)$ ist die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0 eine Zahl.

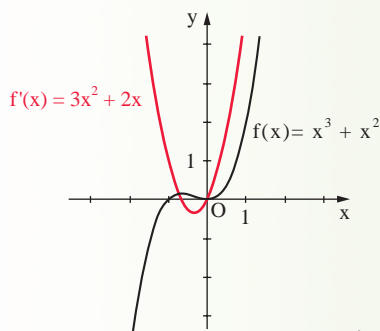


Fig. D 9a

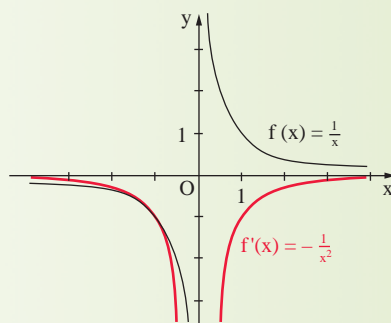


Fig. D 9b

Die Fig. D 9a, b zeigen die Graphen der in den Beispielen D 3 und D 4 betrachteten Funktionen und die ihrer Ableitungsfunktionen.

D 7

Beispiel D 7:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$. Man ermittle die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Wir bilden zunächst den Differenzenquotienten von f für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0 \cdot h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{2x_0 \cdot h + h^2}{h} = 2x_0 + h \quad (h \neq 0) \end{aligned}$$

und erhalten für den Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$.

Da diese Überlegungen für jedes beliebige x_0 gelten, folgt für die Ableitungsfunktion f' : $f'(x) = 2x$.

Fig. D 10 zeigt die Graphen beider Funktionen.

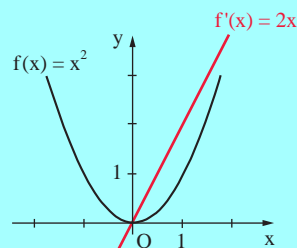


Fig. D 10

D 1.2 Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Mit **Stetigkeit** und **Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0** haben wir zwei wichtige lokale Eigenschaften von Funktionen kennen gelernt. Die in der Definition der Ableitung (s. Definition D 2) formulierte Voraussetzung, dass die Funktion f in x_0 definiert sein muss, d.h., dass auch der Funktionswert an dieser Stelle existiert, stellt eine Verbindung zum Stetigkeitsbegriff her (s. Abschnitt C 3). Das gibt Veranlassung, nach einem möglichen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu fragen.

Den Beispielen D 1 bis D 4 kann man entnehmen, dass die Stetigkeit einerseits wohl eine Voraussetzung für die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 ist. Anschaulich macht man sich schnell klar, dass eine in x_0 nicht stetige Funktion (die z.B. in x_0 einen endlichen Sprung aufweist) an dieser Stelle auch nicht differenzierbar ist. Aber andererseits gibt es in x_0 stetige Funktionen, die an dieser Stelle nicht differenzierbar sind (s. Beispiel D 5 und D 6). Man sagt: Stetigkeit ist eine *notwendige*, aber *keine hinreichende* Bedingung für die Differenzierbarkeit.

Aus Definition D 2 folgt umgekehrt jedoch einmal, dass eine an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion f dort auch definiert ist. Darüber hinaus ergibt sich aus der Existenz des Grenzwertes des

Differenzenquotienten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ das Zutreffen der Stetigkeitsbedingung

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Zum Nachweis dieses Zusammenhangs gehen wir von einer Funktion f mit dem

Funktionsterm $f(x)$ aus und führen zunächst folgende Umformungen durch:

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Die anschließende Grenzwertbildung ergibt mithilfe der Grenzwertsätze

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0),$$

$$\text{also } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Damit wissen wir: Eine an der Stelle x_0 nicht differenzierbare Funktion kann dort trotzdem stetig sein. Aus der Differenzierbarkeit in x_0 folgt jedoch zwingend die Stetigkeit der Funktion an dieser

Stelle. Also: Differenzierbarkeit ist *keine notwendige*, wohl aber eine *hinreichende* Bedingung für die Stetigkeit.

„Differenzierbar“ stellt demnach eine *stärkere* Eigenschaft als „stetig“ dar. Dieser Sachverhalt lässt sich für die Untersuchung lokaler Eigenschaften von Funktionen ausnutzen: Gilt die Feststellung, dass eine Funktion an einer Stelle x_0 bzw. über ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist, so ist sie dort auch stetig.

D 2 Regeln zur Ableitung von Funktionen

Die einführenden Beispiele haben gezeigt, dass es mithilfe der Differentialrechnung möglich ist, lokale Eigenschaften von Funktionen zu ermitteln.

Neben der Steigung des Graphen einer Funktion an einer Stelle x_0 sowie der Differenzierbarkeit und Stetigkeit werden wir noch eine Reihe weiterer Möglichkeiten zur Charakterisierung von Funktionen kennen lernen (Abschnitt D 5). Dabei muss man sehr häufig Ableitungen gegebener Funktionen bilden. Die im Abschnitt D 1 betrachteten Beispiele und Aufgaben zeigten nun aber, dass der Aufwand zur Berechnung der Ableitung von Funktionen über den Grenzwert des Differenzenquotienten ziemlich hoch ist. Da der Ableitungsbegriff mithilfe des Grenzwertbegriffs definiert wurde, liegt es nahe zu fragen, ob sich aus den Kenntnissen über das Rechnen mit Grenzwerten (Grenzwertsätze) Folgerungen hinsichtlich der Berechnung von Ableitungen zusammengesetzter Funktionen ergeben – zum Beispiel für die Summe, das Produkt und den Quotienten differenzierbarer Funktionen. Solche Differentiationsregeln würden zu wesentlichen Vereinfachungen führen.

D 2.1 Konstantenregel, Faktorregel und Potenzregel

Wir betrachten die konstante Funktion $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Fig. D 11 zeigt den Graphen dieser Funktion. Man erkennt: Der Graph weist überall die Steigung 0 auf – er verläuft offenbar parallel zur x-Achse. Demzufolge wäre die Ableitungsfunktion 0.

Zum Nachweis dieser Vermutung bilden wir den **Differenzenquotienten** für eine beliebige Stelle $x_0 \in D_f$:

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \quad (\text{für } h \neq 0),$$

$$\text{also auch } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Damit gilt der Satz:

Satz D 1: Konstantenregel

Eine konstante Funktion $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$, aber fest) besitzt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x) = 0$.

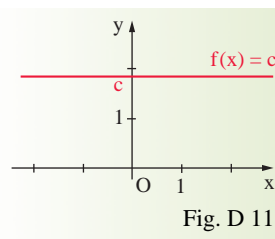


Fig. D 11

Für den Fall, dass eine differenzierbare Funktion mit einem konstanten Faktor multipliziert wird, kann man eine entsprechende Regel herleiten:

Es sei g eine über ihrem Definitionsbereich differenzierbare Funktion. Multipliziert man diese Funktion mit einem konstanten Faktor k , $k \in \mathbb{R}$, so erhält man die Funktion $f(x) = k \cdot g(x)$.

Für deren Differenzenquotienten folgt

$$d(h) = \frac{k \cdot g(x_0 + h) - k \cdot g(x_0)}{h} = k \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \quad \text{mit } h \neq 0, x_0 \in D_g$$

und damit für die Ableitung $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$.

Da der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkt der Grenzwerte seiner Faktoren ist, folgt

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = k \cdot g'(x_0) \text{ und wegen der beliebigen Wahl von } x_0 \\ f'(x) = k \cdot g'(x).$$

D 2**Satz D 2: Faktorregel**

Ist g eine differenzierbare Funktion, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$ ($k \in \mathbb{R}$) differenzierbar und es gilt $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

Kurz: Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Im Vorgriff auf die Differentiation einiger elementarer Funktionen (Abschnitt D 3) wollen wir bereits an dieser Stelle eine Regel zur Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, entwickeln.

Durch Aufstellen des Differenzenquotienten und anschließender Grenzwertbildung erhält man folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} f(x) = x^1 & \quad f'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1} \\ f(x) = x^2 & \quad f'(x) = 2 \cdot x = 2 \cdot x^{2-1} \\ f(x) = x^3 & \quad f'(x) = 3 \cdot x^2 = 3 \cdot x^{3-1} \\ f(x) = x^4 & \quad f'(x) = 4 \cdot x^3 = 4 \cdot x^{4-1} \end{aligned}$$

Für den Fall $f(x) = x^3$ haben wir die entsprechende Ableitung im Beispiel D 2 gebildet.

Damit liegt die Vermutung nahe, dass allgemein gilt:

D 3**Satz D 3: Potenzregel**

Die Funktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis:

Schreibt man den Differenzenquotienten in der Form $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, so ergibt sich für $f(x) = x^n$

$$d(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}, \quad x \neq x_0.$$

Wegen $x \neq x_0$ ist die Polynomdivision ausführbar und ergibt:

$$(x^n - x_0^n) : (x - x_0) = x^{n-1} + x_0 \cdot x^{n-2} + x_0^2 \cdot x^{n-3} + \dots + x_0^{n-2} \cdot x + x_0^{n-1}$$

Daraus erhalten wir die Ableitung, indem wir den Grenzwert für $x \rightarrow x_0$ bilden:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x_0 \cdot x^{n-2} + x_0^2 \cdot x^{n-3} + \dots + x_0^{n-2} \cdot x + x_0^{n-1}) \\ &= x_0^{n-1} + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^2 \cdot x_0^{n-3} + \dots + x_0^{n-2} \cdot x_0 + x_0^{n-1} \\ &= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Damit ist eine Regel zur Ableitung der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) gefunden.

D 8**Beispiel D 8:**

- Für die Ableitung von $f(x) = x^6$ ergibt sich nach der Potenzregel: $f'(x) = 6 \cdot x^{6-1} = 6 \cdot x^5$
- Als Ableitung von $f(x) = 8 \cdot x^5$ erhalten wir nach der Faktor- und der Potenzregel:
 $f'(x) = 8 \cdot (5 \cdot x^4) = 40 \cdot x^4$

- c) Es ist der Anstieg des Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ zu bestimmen. Die Ableitung von $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$ (Potenzregel). Für $x_0 = 2$ erhält man $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.
Der Anstieg des Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $P_0(2; 8)$ ist $m = \tan \alpha = 12$.

D 2.2 Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Nach Beispiel D 3 hat die Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2 + 2x$. Hätte man in $f(x) = x^3 + x^2$ jeden Summanden nach der Potenzregel abgeleitet, so wäre man zum gleichen Resultat gelangt. Allgemein gilt:

Satz D 4: Summenregel

Sind zwei Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist an dieser Stelle auch die Summenfunktion s mit $s(x) = u(x) + v(x)$ differenzierbar. Es gilt:

$$s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

D 4

Da diese Aussage für ein beliebiges x_0 aus dem Bereich gilt, in dem sowohl u als auch v differenzierbar sind, können wir vereinfacht schreiben: $s = u + v \Rightarrow s' = u' + v'$. Kurz: Eine Summenfunktion kann summandenweise differenziert werden.

Beweis:

Es seien u und v zwei in x_0 differenzierbare Funktionen und es sei s die Summe der Funktionen u und v mit $s(x) = u(x) + v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir berechnen den **Differenzenquotienten** von s an der Stelle x_0 :

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{[u(x) + v(x)] - [u(x_0) + v(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x) - u(x_0) + v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{jeweils } x \neq x_0) \end{aligned}$$

Mithilfe der bekannten Grenzwertsätze ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \quad \text{und damit } s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0). \quad \text{w. z. b. w.}$$

Diese Regel gilt für endlich viele Summanden, also auch für mehr als zwei Summanden.

Aus Potenz- und Summenregel ergibt sich eine wichtige Schlussfolgerung:

Jede ganzrationale Funktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ist differenzierbar und besitzt die Ableitungsfunktion $f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Die Ableitungsfunktion f' ist also wieder eine ganzrationale Funktion mit einem gegenüber f um 1 niedrigeren Grad.

Differentiationsregeln für das Produkt und den Quotienten zweier Funktionen seien hier ohne Beweis angegeben:

Satz D 5: Produktregel

Sind zwei Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion p mit $p(x) = u(x) \cdot v(x)$ an dieser Stelle differenzierbar. Es gilt:

$$p'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)$$

D 5

Da diese Aussage für ein beliebiges x_0 aus dem Bereich gilt, in dem sowohl u als auch v differenzierbar sind, können wir wieder vereinfacht schreiben: $p = u \cdot v \Rightarrow p' = u' \cdot v + v' \cdot u$. Die Produktregel lässt sich ähnlich wie die Summenregel auf endlich viele Faktoren erweitern.

D 6

Satz D 6: Quotientenregel

Sind zwei Funktionen u und v in x_0 differenzierbar und ist $v(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion q mit $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Es gilt:

$$q'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x) - v'(x_0) \cdot u(x_0)}{(v(x_0))^2}$$

In Kurzform: $q = \frac{u}{v} \Rightarrow q' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Bei der Anwendung der Quotientenregel muss man beachten, dass $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ nur dort differenzierbar ist, wo $v(x) \neq 0$ gilt.

D 9

Beispiel D 9:

- a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 8x^3 + 50x^2$.

Setzt man $u(x) = 8x^3$ und $v(x) = 50x^2$, so ergibt sich $u'(x) = 24x^2$; $v'(x) = 100x$ und damit nach der Summenregel $f'(x) = 24x^2 + 100x$.

- b) An welchen Stellen verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion

$$f(x) = 0,2x^3 - 0,3x^2 - 3,6x + 1$$

parallel zur x -Achse?

Wir ermitteln die Stellen, an denen der Anstieg der Tangente $m = \tan \alpha = 0$ ist.

Wegen $f'(x_0) = \tan \alpha$ und $f'(x) = 0,6x^2 - 0,6x - 3,6$ müssen wir dazu die Gleichung $0 = 0,6x_0^2 - 0,6x_0 - 3,6$ bzw. $0 = x_0^2 - x_0 - 6$ lösen.

Wir erhalten

$$x_{01/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}, \text{ also } x_{01} = 3 \text{ und } x_{02} = -2.$$

Die Tangente an den Graphen der Funktion verläuft an den Stellen $x_{01} = 3$ und $x_{02} = -2$ parallel zur x -Achse (Fig. D 12).

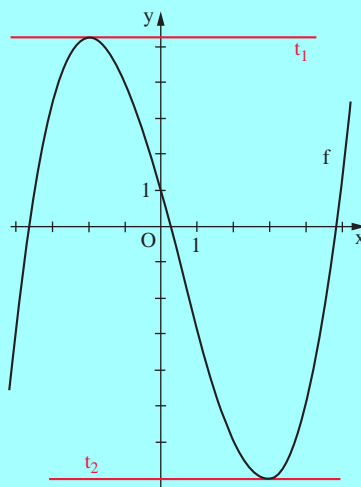


Fig. D 12

Als Folgerung aus Faktor- und Summenregel wurde bereits jede ganzrationale Funktion als differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$ erkannt. Da sich jede rationale Funktion (s. Abschnitt A 2.1) mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und konstanten Funktionen zusammensetzen lässt, folgt aus den nunmehr vorliegenden Differentiationsregeln sogar:

Jede rationale Funktion ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar und die Ableitung ist wieder eine rationale Funktion.

Entsprechend den Aussagen in D 1.2 ist dann natürlich jede rationale Funktion auch in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Beispiel D 10:

- a) Zu ermitteln ist die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - x + 10)$.

Wir wenden die **Produktregel** an (es wäre hier natürlich auch möglich, das Produkt auszumultiplizieren und dann die **Summenregel** zu nutzen):

$$u(x) = x^3, \text{ also } u'(x) = 3x^2 \qquad v(x) = x^2 - x + 10, \text{ also } v'(x) = 2x - 1$$

Wir setzen in die Formel $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ ein und erhalten:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - x + 10) + (2x - 1) \cdot x^3 = 3x^4 - 3x^3 + 30x^2 + 2x^4 - x^3 = 5x^4 - 4x^3 + 30x^2$$

- b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$ ($x \neq -1, x \neq 3$).

Wir wenden die **Quotientenregel** an und setzen dafür

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 1, & \text{also} & & u'(x) &= 2x, \\ v(x) &= x^2 - 2x - 3, & \text{also} & & v'(x) &= 2x - 2. \end{aligned}$$

Für $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$ ergibt sich damit:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2) \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x - (2x^3 - 2x - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

An den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ ist die Funktion f wegen $v(-1) = 0$ und $v(3) = 0$ nicht differenzierbar.

D 2.3 Kettenregel

Mit den bislang betrachteten Ableitungsregeln lassen sich einige bekannte Funktionen noch nicht differenzieren. So gelingt die Ableitung von $f(x) = (2x + 1)^2$ nicht durch bloße Anwendung der Potenzregel. Es ist entweder zunächst das Quadrat zu bilden oder nach der Produktregel zu verfahren. Bei Funktionen wie $f(x) = (x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)^{25}$ entsteht allerdings durch Ausmultiplizieren und Anwenden der Summenregel ein sehr großer Rechenaufwand. Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ließe sich mit den bisherigen Mitteln überhaupt keine Ableitung finden.¹⁾

Die drei genannten Beispiele weisen jedoch eine Gemeinsamkeit auf: Es handelt sich um Funktionen, die durch **Verkettung** entstanden sind (s. Abschnitt A 5). Die Funktion $f(x) = (x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)^{25}$ ist so die Verkettung f mit $f(x) = v(u(x))$ aus der inneren Funktion u mit $u(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$ und der äußeren Funktion v mit $v(z) = z^{25}$, kurz: $f = v \circ u$ (gesprochen: *v nach u*). Da solche Funktionen häufig auftreten, ist es zweckmäßig, für sie eine entsprechende Differentiationsregel bereitzustellen. Wir betrachten dazu die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Die innere Funktion von f ist u mit $u(x) = x^2 - 1$, die äußere Funktion ist v mit $v(z) = z^2$. Ihre Ableitungen sind $u'(x) = 2x$ und $v'(z) = 2 \cdot z = 2 \cdot (x^2 - 1)$.

Ermittelt man nun die Ableitung von $f(x) = (x^2 - 1)^2$ nach der **Produktregel**, so ergibt sich

$$f'(x) = 2x \cdot (x^2 - 1) + (x^2 - 1) \cdot 2x = 2(x^2 - 1) \cdot 2x.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den Ableitungen der Funktionen v und u , so liegt die Vermutung nahe, dass man zur Ableitung der Verkettung gelangt, indem man die Ableitung der äußeren Funktion mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert.

¹⁾ Das liegt auch daran, dass die Potenzregel noch auf Exponenten aus \mathbb{N} eingeschränkt ist. Doch selbst mit der in D 3.1 erfolgenden Erweiterung auf beliebige reelle Exponenten kommt man an dieser Stelle nicht weiter.

D 7

Satz D 7: Kettenregel

Es sei die Funktion u (Definitionsbereich D_u) an der Stelle x_0 und die Funktion v (Definitionsbereich D_v mit $W_u \subseteq D_v$) an der Stelle $u(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $f = v \circ u$ in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = v'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$.

Beweis:

Wir bilden zunächst den **Differenzenquotienten** von f und erweitern diesen mit $u(x) - u(x_0) \neq 0$:

$$d(x) = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

Mit $u(x) = t$ und $u(x_0) = t_0$ erhält man für den **Grenzwert** des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $u(x)$ in x_0 differenzierbar ist, gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0)$. Nach Abschnitt D 1.2 ist $u(x)$ dann

auch stetig in x_0 , d.h., es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - u(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (t - t_0) = 0$.

Mit anderen Worten: Bei der Grenzwertbildung zu $v'(t_0)$ kann $x \rightarrow x_0$ durch $t \rightarrow t_0$ ersetzt werden. Da nach Voraussetzung v an der Stelle $t_0 = u(x_0)$ differenzierbar ist, gilt also

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = v'(u(x_0)).$$

Damit ist aber $f'(x_0) = v'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$. w. z. b. w.

Die Kettenregel besagt also: Die Ableitung einer verketteten (mittelbaren) Funktion ist gleich dem Produkt der Ableitungen von äußerer und innerer Funktion.

Für die Anwendung der Kettenregel ist eine auf der Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ anstelle von $f'(x)$ beruhende Notation sehr einprägsam:

Ist $y = f(x) = v(z)$ und $z = u(x)$, dann gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, wobei $\frac{dz}{dx} = u'(x)$ die Ableitung der inneren Funktion und $\frac{dy}{dz} = v'(z)$ die Ableitung der äußeren Funktion ist.

D 11

Beispiel D 11:

Wir greifen noch einmal die eingangs genannte Funktion $y = f(x) = (x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)^{25}$ auf und bilden die Ableitung nach der Kettenregel.

Hier ist $z = u(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$, $v(z) = z^{25}$ und demzufolge

$$u'(x) = \frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + 4x \quad \text{sowie} \quad v'(z) = \frac{dy}{dz} = 25 \cdot z^{24}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= 25 \cdot z^{24} \cdot (4x^3 - 3x^2 + 4x) = 25(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)^{24} \cdot (4x^3 - 3x^2 + 4x). \end{aligned}$$

D 12

Beispiel D 12:

Bei komplizierteren Termstrukturen kann es sich als günstig erweisen, erforderliche Differenzierungen unter Verwendung des CAS eines GTA durchzuführen.

Man bestimme die Ableitung der Funktionen

$$\text{a) } f(x) = 2(3 - x^2) \cdot (2 - x) + \frac{1}{2}(4 - x) \cdot (x^2 + 2x - 7)$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 2)^2} (2x - 7)$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 + 2x}{(x + 3)^2}$$

Der hieraus vermutbare Zusammenhang gilt tatsächlich für die Ableitungen beliebiger zueinander inverser Funktionen.

D 8**Satz D 8: Umkehrregel**

Es sei f eine in ihrem Definitionsintervall $]a; b[$ umkehrbare und differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) \neq 0$ ($x_0 \in]a; b[$). Dann ist die zu f inverse Funktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{oder (anders geschrieben)} \quad \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=y_0} = \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}}.$$

Beweis:

Wir betrachten die Funktion f mit $y = f(x)$. Nach Voraussetzung existiert deren Umkehrfunktion f^{-1} mit $x = f^{-1}(y)$. Es gilt also (Fig. D 18):

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 & f^{-1}(y_0) &= x_0 \\ f(x_0 + h) &= y_0 + k & f^{-1}(y_0 + k) &= x_0 + h \end{aligned}$$

Der **Differenzenquotient** für die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle y_0 lautet dann:

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} &= \frac{x_0 + h - x_0}{k} = \frac{h}{k} = \frac{1}{\frac{k}{h}} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \end{aligned}$$

Da $k \rightarrow 0$ gleichbedeutend ist mit $h \rightarrow 0$, erhält man für den Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} &= \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \\ (f^{-1}(y_0))' &= \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

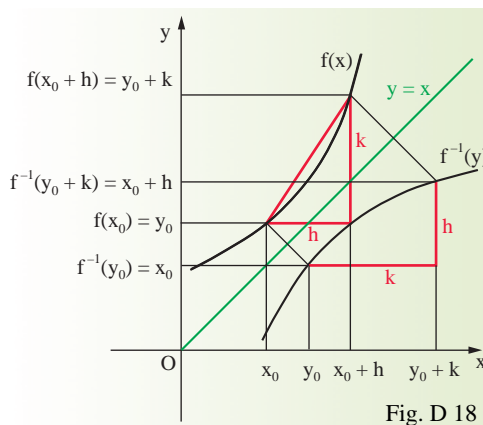


Fig. D 18

Bemerkung:

- Bei der Anwendung der Umkehrregel ist es nicht notwendig, die so genannte explizite Form der Funktionsgleichung von f^{-1} herzustellen.
- Wenn sich die Ableitung von f^{-1} einfacher bilden lässt als die von f selbst, bietet es sich an, die Umkehrregel in der nach $f'(x_0)$ aufgelösten Form zu verwenden: $f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1}(y_0))'}$.

D 14

Beispiel D 14:

Die Funktion f mit $y = f(x) = x^2$ ($x \geq 0$), hat die Ableitung $f'(x) = 2x$. Diese ist für $x > 0$ ungleich 0. Für die Umkehrfunktion f^{-1} mit $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ($y \geq 0$) ergibt sich somit nach der Umkehrregel die Ableitung

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} \quad (x > 0), \quad \text{woraus wegen } x = \sqrt{y} \text{ folgt: } (f^{-1}(y))' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Vertauscht man die Variablen, so erhält man die bereits aus Beispiel D 5 bekannte Ableitung der Quadratwurzelfunktion $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Beispiel D 15:

Es sei die Ableitung der Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ($x \geq 0$) zu ermitteln. Die Umkehrfunktion f^{-1} von f mit $x = f^{-1}(y) = y^3$ ist für $y \geq 0$ differenzierbar. Es gilt $(f^{-1}(y))' = 3y^2$, und für $y > 0$ ist $(f^{-1}(y))' \neq 0$. Dann ist auch f differenzierbar und es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \cdot (\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad (x > 0).$$

D 15**Beispiel D 16:**

Alle Wurzelfunktionen vom Typ $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$) sind in ihrem gesamten Definitionsbereich umkehrbar und lassen sich dort nach der Umkehrregel differenzieren. Die entsprechenden Umkehrfunktionen sind Potenzfunktionen vom Typ $x = f^{-1}(y) = y^n$ mit $y \geq 0$. Dann gilt $(f^{-1}(y))' = n \cdot y^{n-1}$; für $y > 0$ ist $(f^{-1}(y))' \neq 0$ und man erhält damit

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (x > 0).$$

Wegen $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ($x > 0$) und $\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ ergibt sich somit auch

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}. \text{ Setzt man } \frac{1}{n} = m, \text{ so folgt } (x^m)' = mx^{m-1}.$$

Das heißt aber: Mithilfe der Umkehrregel lässt sich die Ableitung von Wurzelfunktionen auf die Ableitung von Potenzfunktionen zurückführen.

D 16**Beispiel D 17:**

Es ist der Anstiegswinkel der Tangente im Punkt $P_0(0; 1)$ an den Graphen von $x + y - y^2 = 0$ zu berechnen.

Aus $x = f^{-1}(y) = y^2 - y$ folgt $(f^{-1}(y))' = 2y - 1$. Nach der Umkehrregel erhält man

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{2y-1}, \text{ woraus für } P_0(0; 1) \text{ folgt: } \tan \alpha = f'(0) = \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

D 17

D 3 Ableitungen elementarer Funktionen

D 3.1 Ableitung von Potenzfunktionen

Nachdem bereits Regeln für die Ableitung von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten $n \geq 1$ (Satz D 3) und mit gebrochenen Exponenten (Wurzelfunktionen) (Beispiel D 16) gefunden wurden, soll nun die Ableitung von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten ermittelt werden.

Wir betrachten also Funktionen $f(x) = x^g$ mit $g < 0$, $g \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$.

Wegen $g < 0$ lässt sich der Funktionsterm x^g nach den Potenzgesetzen in $\frac{1}{x^{-g}} = \frac{1}{x^n}$ ($n = -g$, $n \in \mathbb{N}^*$)

umformen. Wenden wir auf $f(x) = \frac{1}{x^n}$ die Quotientenregel (Satz D 6) an, so ergibt sich

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - n \cdot x^{n-1} \cdot 1}{(x^n)^2} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1} \cdot x^{-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

bzw. (in der Form der Ausgangsfunktion geschrieben) $f'(x) = g \cdot x^{g-1}$. Das heißt:

D 9

Satz D 9: Erweiterte Potenzregel

Die Funktion $f(x) = x^g$ ist für jedes $g \in \mathbb{Z}$ sowie alle $x \in D_f$ differenzierbar und besitzt die Ableitung $f'(x) = g \cdot x^{g-1}$.

Die Potenzregel lässt sich darüber hinaus für $x > 0$ auch auf rationale Exponenten bzw. sogar auf beliebige reelle Exponenten r erweitern. Auf den Beweis dieser Aussage verzichten wir.

D 18

Beispiel D 18:

Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{2}{3 \cdot x^2}$ ($x \neq 0$) zu ermitteln.

Anwendung der Potenzregel auf $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-2}$ ergibt: $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} = -\frac{4}{3} \cdot x^{-3} = \frac{-4}{3 \cdot x^3}$

D 19

Beispiel D 19:

Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ zu bestimmen.

f ist eine **Verkettung** der Funktionen u und v mit $z = u(x) = x^2 + 5$ und $v(z) = \sqrt{z}$.

Zur Ableitung von u und v wenden wir Potenz- und Summenregel an und erhalten

$$u'(x) = 2x \quad \text{bzw.} \quad v'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Die Ableitung von f ergibt sich nun nach der Kettenregel (Satz D 7):

$$f'(x) = v'(z) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

D 3.2 Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Unter den Exponential- und Logarithmusfunktionen nehmen die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ eine besondere Stellung ein. Die **EULERSche Zahl** $e = 2,718281828459\dots$ tritt bei beiden Funktionen als Basis auf. Man erhält diese Zahl als Grenzwert. Es gilt – wie hier nicht bewiesen werden kann –

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Um die **Ableitung der Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ ($a > 0, x \in \mathbb{R}$) zu gewinnen, gehen wir wieder vom Differenzenquotienten von f an einer beliebigen Stelle x_0 aus:

$$d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} \quad (x \neq x_0)$$

Damit ist $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0}$, woraus sich durch Ausklammern des konstanten Faktors a^{x_0} ergibt:

$$f'(x_0) = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

Wir setzen in diesen Ausdruck nun der Übersichtlichkeit halber $a^{x-x_0} - 1 = k$ und formen in $a^{x-x_0} = 1 + k$ um. Logarithmiert man beide Seiten dieser Gleichung zur Basis a , so ergibt sich

$$x - x_0 = \log_a(1 + k).$$

Für den Grenzübergang bedeutet diese Ersetzung, dass $k \rightarrow 0$, wenn $x \rightarrow x_0$. Insgesamt kann man für $f'(x_0)$ schreiben: $f'(x_0) = a^{x_0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_a(1+k)}$

Durch Umformungen und Anwendung der Logarithmengesetze sowie der Grenzwertsätze folgt:

$$f'(x_0) = a^{x_0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k}(\log_a(1+k))} = a^{x_0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}} = a^{x_0} \frac{1}{\log_a(\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}})}$$

Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$ ist nach der Eingangsbezeichnung zu diesem Abschnitt die EULERSche Zahl e . Das heißt also: $f'(x_0) = a^{x_0} \frac{1}{\log_a e}$.

Nach Definition des Logarithmus gilt: $\log_a e = c \Leftrightarrow a^c = e$

Logarithmiert man beide Seiten der rechten Gleichung zur Basis e , so ergibt sich $c \cdot \ln a = \ln e$, woraus wegen $\ln e = 1$ folgt $c \cdot \ln a = 1$ bzw. $c = \frac{1}{\ln a}$. Also gilt $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ und damit

$$f'(x_0) = a^{x_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = a^{x_0} \cdot \ln a.$$

Da diese Beziehung für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ gilt, folgt:

Satz D 10: Ableitung der Exponentialfunktion

Die **Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ ($a > 0$) ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar. Für ihre Ableitung gilt $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

Ist insbesondere $a = e$, so stimmt die Funktion $f(x) = e^x$ mit ihrer Ableitungsfunktion $f'(x) = e^x$ überein: $(e^x)' = e^x$.

D 10

Beispiel D 20:

Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 3^x \cdot x^4$ zu bestimmen.

Wir wenden die **Produktregel** an mit

$$u(x) = 3^x, \text{ also } u'(x) = 3^x \cdot \ln 3, \text{ und } v(x) = x^4, \text{ also } v'(x) = 4 \cdot x^3.$$

Damit ergibt sich für $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ wegen $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot x^4 + 3^x \cdot 4 \cdot x^3 = 3^x \cdot x^3 (x \cdot \ln 3 + 4).$$

D 20

Zur Bildung der **Ableitung der Logarithmusfunktion** $f(x) = \log_a x$ kann man aufgrund der zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion bestehenden Zusammenhänge die Umkehrregel anwenden. Die Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) hat die Ableitung $f'(x) = a^x \cdot \ln a$. Diese ist für alle x ungleich 0. Für die Umkehrfunktion f^{-1} mit $x = f^{-1}(y) = \log_a y$ ($y > 0$) ergibt sich somit nach der **Umkehrregel** die Ableitung

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{1}{y \cdot \ln a}.$$

Vertauscht man die Variablen, so erhält man $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Satz D 11: Ableitung der Logarithmusfunktion

Die **Logarithmusfunktion** $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar. Für ihre Ableitung gilt $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$. Ist insbesondere $a = e$, so ergibt sich für die Funktion $f(x) = \log_e x = \ln x$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$.

D 11

Die Einfachheit dieser Regel und das bemerkenswerte Resultat, dass die Ableitung von $f(x) = e^x$ gleich der Funktion selbst ist, tragen zu der besonderen Bedeutung der Zahl e bei.

D 21

Beispiel D 21:

a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \log_{10} \sqrt{x^5}$, ($x > 0$).

Aus der gegebenen Funktionsgleichung erhält man $f(x) = \log_{10} x^{\frac{5}{2}}$ und daraus durch Anwenden der Logarithmengesetze $f(x) = \frac{5}{2} \cdot \log_{10} x$. Die Ableitungsregel für die Logarithmusfunktion liefert schließlich

$$f'(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{5}{2 \cdot \ln 10 \cdot x}.$$

b) Es ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$) zu bestimmen.

Wir wenden die Quotientenregel und die Regel zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion an: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

c) Für die Ableitung der Funktion $f(x) = x^4 \cdot \log_5 x^2$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) nutzen wir die **Produktregel** sowie Satz D 11.

Mit $u(x) = x^4$ und $v(x) = \log_5 x^2$ ist $u'(x) = 4x^3$ und $v'(x) = \frac{2}{x \ln 5}$. Damit gilt:

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \log_5 x^2 + x^4 \cdot \frac{2}{x \cdot \ln 5} = x^3 (8 \cdot \log_5 x + \frac{2}{\ln 5})$$

D 3.3 Ableitung trigonometrischer Funktionen

Um die *Ableitung der Sinusfunktion* $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) zu erhalten, stellen wir wieder den **Differenzenquotienten** an einer beliebigen Stelle x_0 auf:

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

Wegen $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ („Formeln und Tabellen“, S. 35) ist $\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cdot \cosh + \cos x_0 \cdot \sinh$ und damit

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{\sin x_0 \cdot \cosh + \cos x_0 \cdot \sinh - \sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cdot \cosh - \sin x_0}{h} + \frac{\cos x_0 \cdot \sinh}{h} \\ &= \sin x_0 \cdot \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sinh}{h}. \end{aligned}$$

Wir bilden den **Grenzwert des Differenzenquotienten** für $h \rightarrow 0$ und erhalten nach den Grenzwertsätzen:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} d(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \cdot \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sinh}{h} \right) \\ &= \sin x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \quad (*) \end{aligned}$$

Das heißt also: Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \rightarrow 0$ existiert, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \text{ existieren.}$$

Im Beispiel C 12 (s. Abschnitt C 2) wurde der Grenzwert von $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x \neq 0$) für $x \rightarrow 0$ bereits bestimmt. Aufgrund des dort gefundenen Ergebnisses gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$.

Um $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h}$ ermitteln zu können, wird folgende Umformungen durchgeführt:

$$\frac{\cosh - 1}{h} = \frac{(\cosh - 1) \cdot (\cosh + 1) \cdot h}{h \cdot (\cosh + 1) \cdot h} = \frac{(\cos^2 h - 1) \cdot h}{h^2 \cdot (\cosh + 1)}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ („Formeln und Tabellen“, S. 35) gilt $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$. Damit ist

$$\frac{\cosh - 1}{h} = \frac{-\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cosh + 1} = -\left(\frac{\sinh}{h} \cdot \frac{\sinh}{h}\right) \cdot \frac{h}{\cosh + 1}.$$

Für $h \rightarrow 0$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} &= -\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\cosh + 1} \\ &= -(1 \cdot 1) \cdot \frac{\lim_{h \rightarrow 0} h}{\lim_{h \rightarrow 0} \cosh + \lim_{h \rightarrow 0} 1} = -1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Setzen wir die ermittelten Grenzwerte $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = 0$ in Gleichung (*) ein, so ergibt sich: Der Grenzwert des Differenzenquotienten von $f(x) = \sin x$ an einer beliebigen Stelle x_0 existiert und es ist $f'(x_0) = \cos x_0$. Also gilt:

Satz D 12: Ableitung der Sinusfunktion

Die **Sinusfunktion** $f(x) = \sin x$ ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und besitzt die Ableitungsfunktion $f'(x) = \cos x$.

D 12

Um die *Ableitung der Kosinusfunktion* $f(x) = \cos x$ zu gewinnen, gehen wir von der Beziehung $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ aus („Formeln und Tabellen“, S. 35), d. h., wir betrachten anstelle von $f(x) = \cos x$ die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und wenden darauf die Kettenregel an:

Wir setzen $v(z) = \sin z$ mit $z = u(x) = \frac{\pi}{2} - x$. Daraus folgt $v'(z) = \cos z$ bzw. $u'(x) = -1$ und damit $f'(x) = \cos z \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

Satz D 13: Ableitung der Kosinusfunktion

Die **Kosinusfunktion** $f(x) = \cos x$ ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und besitzt die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\sin x$.

D 13

Um die *Ableitung der Tangensfunktion* zu erhalten, greifen wir auf die Definitionsgleichung $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}$) zurück und wenden die **Quotientenregel** (Satz D 6) an.

Es gilt dann

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \quad \text{also } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{bzw. } f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

Beispiel D 22:

Zu den nachfolgenden beiden Funktionen ist jeweils die Ableitung zu bestimmen.

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ $f'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$ (**Produktregel**).

b) $g(x) = \sin 2x$

Wir bilden die Ableitung nach der **Kettenregel**:

$v(z) = \sin z$ $v'(z) = \cos z$ $z = u(x) = 2x$ $u'(x) = 2$

und damit $g'(x) = 2 \cdot \cos z = 2 \cdot \cos 2x$.

D 22

D 23

Beispiel D 23:

Es ist der Anstieg der Tangente an die Sinuskurve an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ zu ermitteln.

Die Ableitung von $f(x) = \sin x$ ist $f'(x) = \cos x$. Da für den Anstieg der Tangente $m = \tan \alpha = f'(x_0)$ gilt, ist der gesuchte Anstieg $m = \tan \alpha = f'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Das heißt: Die Tangente an die Sinuskurve an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ist eine Parallele zur x-Achse – wovon man sich anhand des Graphen der Funktion schnell überzeugen kann.

D 24

Beispiel D 24:

Die Arkusfunktionen (oder auch **zyklometrische Funktionen**) als **Umkehrfunktionen** trigonometrischer Funktionen lassen sich unter Verwendung der **Umkehrregel** differenzieren. So kann man z. B. über die bekannte Ableitung der Sinusfunktion die Ableitung ihrer Umkehrfunktion f mit $y = f(x) = \arcsin x$ gewinnen.

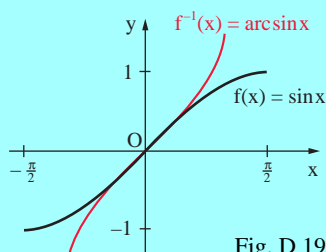


Fig. D 19

Wegen $f^{-1}(y) = x = \sin y$ gilt nämlich:

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}, \text{ also } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in [-1; 1]).$$

Die Ableitung der Arkuskosinusfunktion erhält man auf dem gleichen Weg. Eine einfachere Lösungsvariante ergibt sich aus der Beziehung $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Nach obiger Formel für die Ableitung der Arkussinusfunktion gilt damit:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in [-1; 1])$$

D 25

Beispiel D 25:

Bei der Differentiation der im Abschnitt D 3 betrachteten Funktionsarten kann der Einsatz eines GTA sehr hilfreich sein.

Es ist die Ableitung folgender Funktionen zu ermitteln:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 3}{5x - 3}}$

b) $g(u) = \frac{2\sin(u) - 3\cos(u)}{e^u}$

c) $h(x) = \frac{\ln(3x - 2)}{x^2}$

Lösung:

Fig. D 20

Fig. D 21

Fig. D 22

Die Bildschirmwiedergaben zeigen, dass der GTA die Lösungen nicht immer in der günstigsten Form anbietet und für die weitere Arbeit u. U. noch weitere Umformungen „per Hand“ empfehlenswert sind.

Beispiel D 26:

Der Graph der im Eingangsbeispiel zum Kapitel D beschriebenen Steuerfunktion hat für den Veranlagungszeitraum 2000 das in Fig. D 23 dargestellte Aussehen. Ein Arbeitnehmer möge nun ein Einkommen von a DM haben und in einem bestimmten Monat noch h DM hinzu verdienen.

- Wie viel Steuern muss er für den Mehrverdienst h zahlen?
- Welchen Bruchteil von h muss er als Steuer entrichten bzw. wie groß ist der durchschnittliche Steuersatz?
- Wenn der Mehrverdienst h immer geringer wird und gegen null strebt, strebt dann auch der durchschnittliche Steuersatz für diesen Mehrverdienst gegen null?

zu a)

Nach der Steuerfunktion S betragen die Steuern für das Einkommen einschließlich Mehrverdienst $S(a + h)$, für das Einkommen a ohne Mehrverdienst $S(a)$. Für den Mehrverdienst h entsteht demnach eine Steuerschuld, die durch die Differenz $S(a + h) - S(a)$ angegeben lässt.

zu b)

Der durchschnittliche Steuersatz im Intervall $[a; a + h]$

beträgt $\frac{S(a + h) - S(a)}{h}$ bzw. $\frac{S(a + h) - S(a)}{h} \cdot 100 \%$.

zu c)

Zur Beantwortung dieser Frage ist der Grenzwert des durchschnittlichen Steuersatzes für h gegen null zu bilden. Unter der Annahme, dass die Steuerfunktion $S(x)$

an der Stelle a differenzierbar ist, erhält man:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(a + h) - S(a)}{h} = S'(a)$$

Da aber $S'(a)$ für $a \geq 13\,500$ stets größer null ist (s. Graph der Steuerfunktion, Fig. D 23), strebt der durchschnittliche Steuersatz für diesen Mehrverdienst nicht gegen null. Die Ableitung der Steuerfunktion $S(x)$ an der Stelle a heißt *Grenzsteuer* (oder *Grenzsteuersatz*) beim Einkommen a . Fig. D 24 zeigt den Verlauf der Grenzsteuerfunktion für den betrachteten Veranlagungszeitraum. Die Grenzsteuer gibt an, welcher Bruchteil von einem relativ kleinen Hinzuverdienst h als Steuer abzuführen ist. Wirtschaftswissenschaftlich interpretiert ist die Grenzsteuer also der Bruchteil, mit dem die letzte hinzuverdiente Mark steuerlich belastet wird. Die höchste Grenzsteuer heißt *Spitzensteuersatz*; er beträgt in unserem Beispiel 51 %.

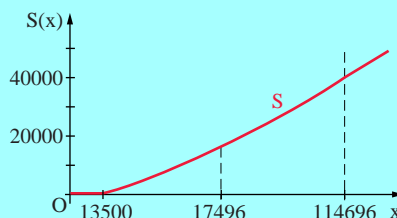


Fig. D 23

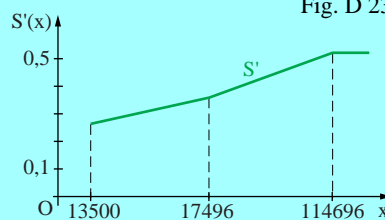


Fig. D 24

D 3.4 Ableitungen höherer Ordnung

Ist die Ableitungsfunktion f' mit $y' = f'(x)$ einer Funktion f wiederum differenzierbar, so sagt man, dass die Funktion f (an einer Stelle x_0 oder im gesamten Definitionsbereich) *zweimal differenzierbar* ist. Man nennt deshalb f' mit $y' = f'(x)$ auch die *1. Ableitung* der Funktion f . Die *2. Ableitung* wird $y'' = f''(x)$ (lies: y zwei Strich gleich f zwei Strich von x) oder $\frac{d^2y}{dx^2}$ (lies: d zwei y nach dx Quadrat) geschrieben. Mit $y''' = f'''(x)$ wird die *3. Ableitung* bezeichnet.

Von der *4. Ableitung* an schreibt man $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$, $y^{(5)} = f^{(5)}(x)$, ..., $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Die 1. Ableitung nennt man, wie wir es bisher auch getan haben, schlechthin *Ableitung* (der jeweiligen Funktion). Die 2. Ableitung und alle weiteren Ableitungen einer Funktion werden als **höhere Ableitungen** bezeichnet.

D 27

Beispiel D 27:

Es sei $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - \sqrt{3}x + 0,3$.

Gesucht ist die 5. Ableitung der Funktion f . Wir gehen schrittweise vor:

$$y' = f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x - \sqrt{3}$$

$$y'' = f''(x) = 12x^2 - 30x + 4$$

$$y''' = f'''(x) = 24x - 30$$

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = 24$$

$$y^{(5)} = f^{(5)}(x) = 0$$

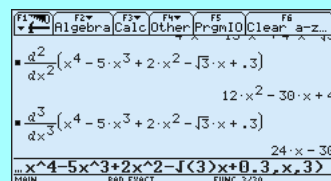


Fig. D 25

D 4 Sätze über differenzierbare Funktionen

Die Kenntnis der Ableitung f' einer Funktion f ermöglicht oft Schlussfolgerungen über das Verhalten der Funktion f selbst. Um diese Untersuchungen in Abschnitt D 5 durchführen zu können, stellen wir nachfolgend zwei Sätze bereit, die für die Anwendung der Differentialrechnung insgesamt große Bedeutung besitzen.

D 14

Satz D 14: **Satz von ROLLE**

Ist eine Funktion f

- im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig,
- im offenen Intervall $]a; b[$ differenzierbar und gilt
- $f(a) = f(b)$,

dann existiert mindestens eine Stelle c zwischen a und b (also $c \in]a; b[$), so dass $f'(c) = 0$ ist.

Auf den Beweis dieser Aussage, die von dem französischen Mathematiker M. ROLLE (1652–1719) formuliert wurde, soll verzichtet werden. Geometrisch besagt der Satz von ROLLE Folgendes: Wenn die Randpunkte A, B des abgeschlossenen Intervalls $[a; b]$ gleiche y -Werte besitzen, dann gibt es zwischen A und B mindestens einen Punkt C des Graphen der Funktion f , in dem die Tangente parallel zur x -Achse verläuft (Fig. D 26).

Eine Erweiterung des Satzes von ROLLE stellt der folgende Satz dar.

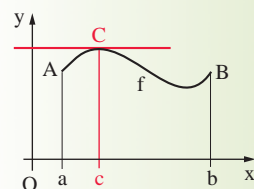


Fig. D 26

D 15

Satz D 15: **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Ist eine Funktion f

- im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig und
- im offenen Intervall $]a; b[$ differenzierbar,

dann existiert mindestens eine Stelle c zwischen a und b , so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (c \in]a; b[).$$

Der Mittelwertsatz besagt also (s. Fig. D 27), dass es unter den angegebenen Voraussetzungen zwischen den beiden Intervallenden a und b mindestens eine solche Stelle c geben muss, dass die Tangente im Punkt $C(c; f(c))$ parallel zur Sekante durch die Punkte A und B verläuft.

Auf den Beweis wollen wir wiederum verzichten, jedoch zwei Bemerkungen anfügen.

- Für den Fall $f(a) = f(b)$ folgt der Satz von ROLLE aus dem Mittelwertsatz. Der Satz von ROLLE ist also ein Spezialfall des Mittelwertsatzes.
- Der Mittelwertsatz und der Satz von ROLLE stellen jeweils *nur* fest, dass wenigstens eine solche Stelle c mit der angeführten Eigenschaft *existiert*. Aber bereits die Kenntnis der Existenz einer solchen Stelle allein leistet nützliche Dienste, wie wir im Weiteren sehen werden.

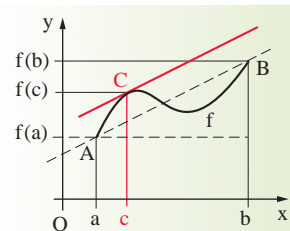


Fig. D 27

Beispiel D 28:

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0; 4]$ (Fig. D 28). Die Funktion $y = \sqrt{x}$ erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes – sie ist in $[0; 4]$ stetig und in $]0; 4[$ differenzierbar. Bestimmt werden soll nun eine Stelle c zwischen 0 und 4, so dass die Tangente in $(c; f(c))$ an den Graphen von f parallel zur Sekante durch $(0; 0)$ und $(4; 2)$ verläuft. Dazu ermitteln wir zunächst den Anstieg der Sekante: $m_s = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$

Der Anstieg der Tangente an einer bestimmten Stelle $x_0 = c$ ist durch die 1. Ableitung der Funktion an dieser Stelle gegeben und dieser Anstieg soll gleich dem der o. g. Sekante sein.

Wegen $f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$ muss also gelten: $f'(c) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{c}} = \frac{1}{2}$

Daraus folgt $\sqrt{c} = 1$ und damit $c = 1$.

Das heißt: Im Punkt $(1; 1)$ des Graphen der Funktion

$f(x) = \sqrt{x}$ ist die Tangente parallel zur Sekante durch die Punkte $(0; 0)$ und $(4; 2)$.

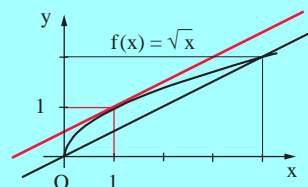


Fig. D 28

D 28

Für Funktionen wie $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$ (Beispiel C 10) oder $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (Beispiel C 12) würde das Bilden der Grenzwerte $x \rightarrow 3$ bzw. $x \rightarrow 0$ Schwierigkeiten bereiten. Für beide Beispiele ist nämlich charakteristisch, dass sowohl die Zählerfunktion als auch die Nennerfunktion für 3 bzw. 0 den Wert 0 annimmt und dass die formale Anwendung der Grenzwertsätze ebenso auf den *unbestimmten Ausdruck* $\frac{0}{0}$ führt. Die Differentialrechnung gibt uns für derartige Fälle eine Hilfe:

Satz D 16: 1. Regel von DE L'HOSPITAL¹⁾

Es seien die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und ihre Ableitungsfunktionen in x_0 stetig. Ist nun $u(x_0) = v(x_0) = 0$ sowie $v'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} \text{ existiert.}$$

D 16

¹⁾ Entdeckt wurde dieser Zusammenhang von J. BERNOULLI (1667–1748), benannt wird er nach G. F. A. MARQUIS DE L'HOSPITAL (1661–1704), der ihn als Erster veröffentlichte.

Beweis:

$\frac{u(x)}{v(x)}$ kann wegen $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) = 0$ umgeformt werden zu $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0)}$.

Bei Erweitern mit $\frac{1}{x - x_0}$ erhält man $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}}{\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}}$. Da $v'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 ,

kann der Grenzwertsatz für den Quotienten zweier Funktionen angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}}{\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungsfunktionen in x_0 gilt:

$$u'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} u'(x), \quad v'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} v'(x) \text{ und demnach } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} \quad \text{w.z.b.w.}$$

Bemerkung:

Die 1. Regel von DE L'HOSPITAL kommt auch ohne die Voraussetzung bezüglich der Stetigkeit der Ableitungsfunktionen aus. Die dann erforderlichen Beweismittel stehen hier aber nicht zur Verfügung. Die Regel gilt auch für einseitige Grenzwerte.

D 29

Beispiel D 29:

a) Zur Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (Beispiel C 12) wenden wir die 1. Regel von

$$\text{DE L'HOSPITAL an: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

b) Um den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ zu bestimmen, kann wegen $u(1) = 0$ und $v(1) = 0$

$$\text{Satz D 16 angewandt werden: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

c) Der Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ lässt sich wegen $u(0) = 0$ und $v(0) = 0$ ebenfalls nach

$$\text{der 1. Regel von DE L'HOSPITAL bestimmen. Es gilt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Die Regel von DE L'HOSPITAL lässt sich auch auf Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) übertragen. Ohne Beweis sei mitgeteilt:

D 17

Satz D 17: **2. Regel von DE L'HOSPITAL**

Es seien die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ für alle $x > a$ ($a \in \mathbb{R}^+$) differenzierbar. Ist nun

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0 \text{ sowie } v'(x) \neq 0, \text{ so gilt } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u'(x)}{v'(x)}, \text{ falls}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} \text{ existiert.}$$

Führt der Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)}$ bei formaler Anwendung des Grenzwertsatzes für den Quotienten zweier Funktionen auf den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, so sind unter

Beachtung der in den Sätzen D 16 und D 17 formulierten Voraussetzungen die Regeln von DE L'HOSPITAL ebenfalls anwendbar.

Beispiel D 30:

Es ist der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ zu bestimmen. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ist die Regel von DE L'HOSPITAL anwendbar. Es gilt

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \infty$ ist die Regel von DE L'HOSPITAL anwendbar. Es gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

D 30

Weitere Untersuchungen für $x \rightarrow \pm \infty$ werden in D 5.4 betrachtet.

Ergibt sich beim Anwenden der Regeln von DE L'HOSPITAL erneut ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$, so kann man diese Regeln mehrfach nutzen, falls man schließlich einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert erhält. Außer den bislang betrachteten Fällen $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ gibt es noch andere unbestimmte Ausdrücke, z.B. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ oder ∞^0 . Derartige unbestimmte Ausdrücke lassen sich häufig so umformen, dass man die Regeln von DE L'HOSPITAL anwenden kann.

Beispiel D 31:

- a) Bei der Bestimmung von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ ergibt sich nach der ersten Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL mit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}$ erneut ein unbestimmter Ausdruck. Erst die zweite Anwendung der Regel ergibt den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = 2$$

- b) Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ führt auf den unbestimmten Ausdruck $\infty - \infty$. Die nachfolgende Umformung macht die mehrmalige Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL für den bekannten Fall $\frac{0}{0}$ möglich:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x + x \cdot \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

- c) Wendet man Regel von DE L'HOSPITAL zur Berechnung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$, so ergibt sich $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} = \pm \infty$, also kein unbestimmter Ausdruck. Deshalb ist die Regel nicht noch einmal anwendbar. Ein GTA liefert dementsprechend zwar bei a) und b) die Grenzwerte 2 bzw. 0, bei c) aber die Aussage „undefiniert“ (Fig. D 29).

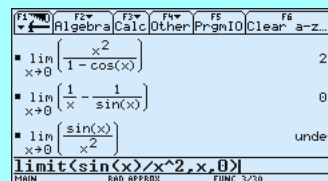


Fig. D 29

D 31

D 5 Anwenden der Differentialrechnung zur Untersuchung von Funktionseigenschaften

Gelingt es in den Natur- bzw. Technikwissenschaften oder auch in Teilbereichen der Gesellschaftswissenschaften bestehende Zusammenhänge mithilfe von Funktionen zu modellieren, so bietet die Differentialrechnung Untersuchungsmethoden für eine schnelle, mathematisch exakte und umfassende Analyse dieser Funktionen. Neben wichtigen Eigenschaften von Funktionen (wie z.B. den Nullstellen, das Monotonieverhalten, die Extrema, das Krümmungsverhalten, die Symmetrieeigenschaften und die Definitionslücken) wird dabei oftmals auch der Verlauf des Funktionsgraphen untersucht.

Die Wurfbahn eines Basketballs lässt sich mithilfe einer Funktion untersuchen. Im folgenden Modell soll der Luftwiderstand vernachlässigt und der Ball als punktförmiges Objekt betrachtet werden. Betrachtet man die Standardversion Freiwurf, bei der der Ball mit ausgestreckter Hand aus einer Höhe h_0 von 2,10 m mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel von beispielsweise $\alpha = 45^\circ$ zur x-Achse abgeworfen wird, so lautet die Gleichung der Wurfbahn

$$y = f(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + h_0 \quad (\text{„Formeln und Tabellen“, S. 73})$$

Dabei ist g die Fallbeschleunigung (wir rechnen vereinfacht mit $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

Das Ziel eines Freiwurftrainings könnte darin bestehen, genau die Korbmitte in einer Entfernung von 4,20 m und einer Höhe von 3,05 m zu treffen. Durch geeignetes Umstellen der angeführten Gleichung ermittelt man, dass dem Ball unter den geschilderten Randbedingungen eine Anfangsgeschwindigkeit von $7,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erhalten muss.

Fig. D 30a und Fig. D 30b zeigen die Veränderungen der Wurfparabel bei der Variation eines der Parameter Anfangsgeschwindigkeit bzw. Abwurfwinkel.

Eine genaue Kenntnis der Einflüsse beider Parameter kann helfen, entsprechende Trainingsprogramme zu optimieren.

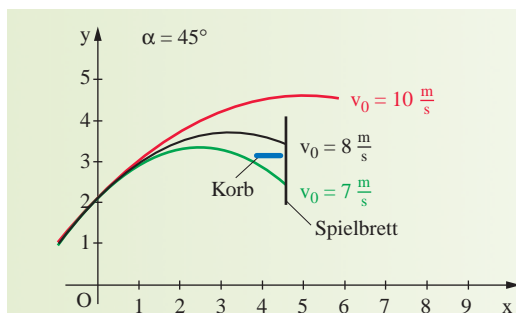


Fig. D 30a

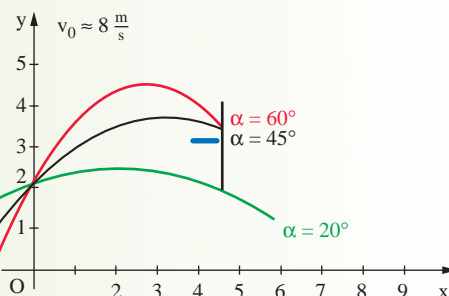


Fig. D 30b

D 5.1 Monotonieverhalten

Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen ist ihr Monotonieverhalten. Der Nachweis des Monotonieverhaltens mithilfe von Definition C 1 kann u. U. recht aufwändig sein. Leistungsfähigere Methoden bietet die Differentialrechnung. Zur Vorbereitung seien zunächst drei spezielle Fälle untersucht:

Für die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ (Fig. D 31) lässt sich mithilfe von Definition C 1 leicht nachweisen, dass f_1 für alle $x < 0$ **monoton fallend** und für alle $x > 0$ **monoton wachsend** ist. Wie man den eingezeichneten Tangenten entnehmen kann, haben diese nun einen positiven Anstieg ($f_1'(x) > 0$), wenn der Graph monoton wachsend ist, und einen negativen Anstieg ($f_1'(x) < 0$), falls der Graph monoton fallend ist. An der Stelle $x_0 = 0$ besitzt die Tangente den Anstieg 0 ($f_1'(x_0) = 0$), hier ändert der Graph der Funktion f_1 offensichtlich sein Monotonieverhalten.

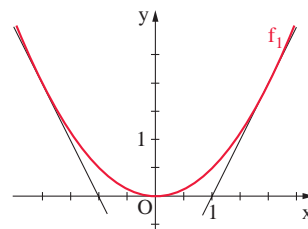


Fig. D 31

Der Graph der Funktion $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3$ (Fig. D 32) ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend. Obwohl die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ den Anstieg 0 hat, ändert sich das Monotonieverhalten hier nicht. Für die Tangentenanstiege gilt $f_2'(x) = \frac{3}{2}x^2$ und somit $f_2'(x) > 0$ für $x \neq 0$ und $f_2'(x_0) = 0$ für $x_0 = 0$. Eine Funktion kann also auch dann monoton wachsend sein, wenn es eine Stelle x_0 gibt, für die $f'(x_0) = 0$ gilt.

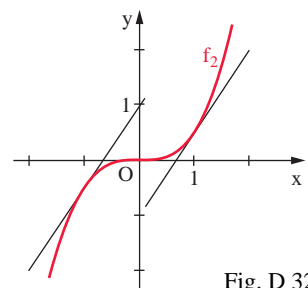


Fig. D 32

Analog ist für das monotone Fallen einer Funktion unbedeutend, ob es im Definitionsbereich Stellen mit $f'(x_0) = 0$ gibt, solange

$f'(x_0) \leq 0$ für alle $x_0 \in D_f$ gilt. Als Beispiel sei der Graph der Funktion $f_3(x) = -\frac{1}{2}x^3$ angeführt. Für die Tangentenanstiege gilt $f_3'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ und somit $f_3'(x_0) < 0$ für $x_0 \neq 0$ und $f_3'(x_0) = 0$ für $x_0 = 0$.

Fig. D 33 zeigt den Graphen der Funktion $f_4(x) = \frac{1}{x^3}$ ($x \in \mathbb{R}, x \neq 0$).

Ihre Ableitungsfunktion $f_4'(x) = -\frac{3}{x^4}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert, also ist f_4 an der Stelle $x_0 = 0$ auch nicht differenzierbar. Dies verlangt, das Monotonieverhalten abschnittsweise zu untersuchen:

Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die 1. Ableitung von f_4 negativ ist, gilt: Der Graph der Funktion f_4 ist sowohl im Intervall $-\infty < x < 0$ als auch im Intervall $0 < x < \infty$ monoton fallend.¹⁾

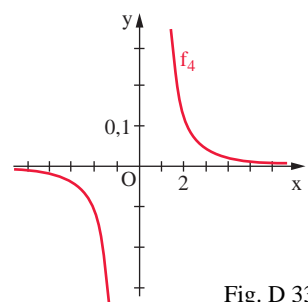


Fig. D 33

Verallgemeinert man die obigen Überlegungen, so lässt sich bez. des Monotonieverhaltens einer differenzierbaren Funktion f an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches feststellen:

Satz D 18: Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung an einer Stelle

Wenn eine Funktion f in x_0 monoton wachsend (bzw. fallend) und differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) \geq 0$ (bzw. $f'(x_0) \leq 0$).

D 18

¹⁾ Auch Def. C 1 verlangt ein Intervall des Definitionsbereichs, d.h., für beliebige $x \in I$ muss $x \in D_f$ gelten.

Wir führen den Beweis für den Fall *monoton wachsend*:

Voraussetzung:

f ist in x_0 differenzierbar, d.h. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert und f ist in x_0 monoton wachsend.

Behauptung: $f'(x_0) \geq 0$

Beweis:

Da f in x_0 monoton wachsend ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ die Beziehung $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ gilt, weil Zähler und Nenner des Terms in rechts- bzw. linksseitiger Umgebung von x_0 jeweils gleiches Vorzeichen haben. Der nach Voraussetzung existierende Grenzwert ist also nicht negativ. Es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$. w. z. b. w.

Beschränkt man die Monotonieuntersuchung von Funktionen auf offene Intervalle, in denen die gegebene Funktion differenzierbar ist, so kann folgender Zusammenhang zwischen der 1. Ableitung der Funktion und der Monotonie angegeben werden:

D 19

Satz D 19: Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung

Eine im offenen Intervall I differenzierbare Funktion f ist in diesem Intervall genau dann

monoton wachsend

monoton fallend,

wenn für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) \geq 0.$$

$$f'(x) \leq 0.$$

Wir führen den Beweis dieses Satzes wegen der „genau dann, wenn“-Aussage (also einer Äquivalenzaussage) „in beiden Richtungen“, beschränken uns aber auf den Fall des monotonen Wachstums.

Voraussetzung:

f ist eine im offenen Intervall I differenzierbare Funktion und für alle $x \in I$ gilt $f'(x) \geq 0$.

Behauptung:

f ist im Intervall I monoton wachsend
(also: Für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Beweis:

- $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 > x_1$ seien beliebige Zahlen aus I . Dann gibt es zwischen ihnen nach Satz D 15 ein x_0 mit $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
- Wegen $x_2 - x_1 > 0$ und $f'(x_0) \geq 0$ gilt $f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, d. h., es ist $f(x_2) \geq f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in I$.

Voraussetzung:

f ist im Intervall differenzierbar und monoton wachsend (also: Für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Behauptung:

Für alle $x \in I$ gilt $f'(x) \geq 0$.

Beweis:

- $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ seien beliebige Zahlen aus I . Dann gilt nach Voraussetzung $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Wegen $x_2 - x_1 > 0$ und $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ist der Quotient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ und folglich auch sein Grenzwert für $x_2 \rightarrow x_1$. Da aber x_1, x_2 beliebige Zahlen aus I waren, gilt für alle $x \in I$ die Beziehung $f'(x) \geq 0$.

Für monoton fallende Funktionen wäre der Beweis der entsprechenden Beziehung analog zu führen.

Bemerkungen:

- Satz D 19 gibt eine Bedingung für die Monotonie einer Funktion an, die notwendig *und* hinreichend ist.
- Wenn man im Teil I (linke Spalte) des Beweises $f'(x) > 0$ voraussetzt, so folgt stets $f(x_2) > f(x_1)$. Der Beweis gilt also auch für strenge Monotonie. Der Teil II (rechte Spalte) ist hingegen für strenge Monotonie nicht allgemeingültig:

Wenn eine Funktion $f(x)$ streng monoton wachsend ist, dann müsste stets $f'(x) > 0$ gelten. Ein Gegenbeispiel dazu stellt die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3$ dar, die zwar streng monoton wachsend ist, für die aber $f'(0) = 0$ gilt (Fig. D 32).

Satz D 19 ist für strenge Monotonie folglich nur hinreichend.

Beispiel D 32:

Zu untersuchen ist das Monotonieverhalten der nachfolgenden Funktionen f:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Wegen $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ gilt

- $f'(x) > 0$ für $x+1 > 0$ und $x-2 > 0$, also $x > 2$,
oder $x+1 < 0$ und $x-2 < 0$, also $x < -1$;
- $f'(x) < 0$ für $x+1 > 0$ und $x-2 < 0$, also $x \in]-1; 2[$,
oder $x+1 < 0$ und $x-2 > 0$, was für kein $x \in \mathbb{R}$ möglich ist.

$f(x)$ ist also streng monoton wachsend für $x < -1$ oder $x > 2$ sowie streng monoton fallend für $x \in]-1; 2[$ (Fig. D 34).

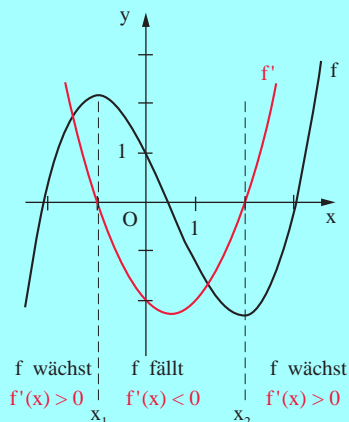


Fig. D 34

b) $f_a(x) = a\sqrt{x} + x$ ($a \in \mathbb{R}, x \geq 0$)

$$f'_a(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + 1 = \frac{a + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

- $a > 0$ $a + 2\sqrt{x} > 0$, deshalb $f'_a(x) > 0$, d.h.: $f_a(x)$ ist streng monoton wachsend.
- $a = 0$ $f_0(x) = x$, deshalb $f'_0(x) = 1 > 0$, d.h.: $f_0(x)$ ist streng monoton wachsend.
- $a < 0$ $a + 2\sqrt{x} > 0$ für $x > \frac{a^2}{4}$, d.h.: $f_a(x)$ ist streng monoton wachsend für $x > \frac{a^2}{4}$.

$a + 2\sqrt{x} < 0$ für $x < \frac{a^2}{4}$, d.h.: $f_a(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in]0; \frac{a^2}{4}[$ (Fig. D 35).

c) $f(x) = \ln(1+x) - x; \quad x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in]-1; 0[\\ < 0 & \text{für } x \in]0; \infty[\end{cases}$$

f ist in $]-1; 0[$ streng monoton wachsend und in $]0; \infty[$ streng monoton fallend (Fig. D 36).

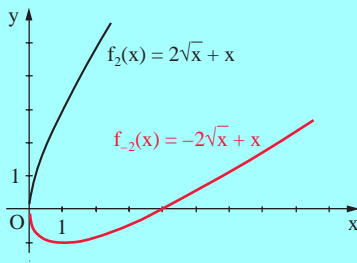


Fig. D 35

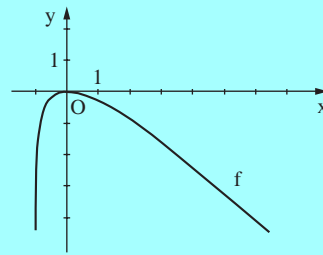


Fig. D 36

d) $f(x) = 0,25x^4 - 3,35667x^3 + 10,2353x^2 - 3,864x + 2$

Da die grafische Darstellung dieser Funktion mit dem GTA nur sehr ungenaue Aussagen zur Monotonie zulässt, wird zusätzlich die Ableitungsfunktion f' gebildet. Um zu entscheiden, in welchem Intervall die 1. Ableitung positiv oder negativ ist, können die Nullstellen der Ableitungsfunktion über **TRACE** oder **Zeros** ermittelt werden (Fig. D 37/Fig. D 38):

- Für $x < 0,21$ und $2,5 < x < 7,36$ ist $f'(x) \leq 0$ und somit f monoton fallend und
- für $0,21 < x < 2,5$ und $x > 7,36$ ist $f'(x) \geq 0$ und somit f monoton wachsend.

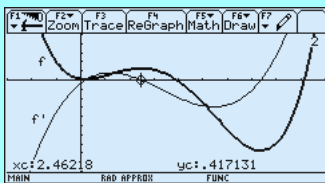


Fig. D 37

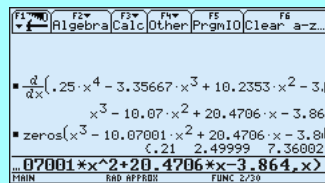


Fig. D 38

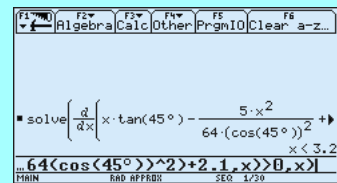


Fig. D 39

- e) Für die am Anfang des Abschnitt D 5 aufgeführte Flugbahn eines Basketballs mit $\alpha = 45^\circ$ und $v_0 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ soll untersucht werden, für welche x -Werte der Ball steigt. Mit dem GTA (Fig. D 39) kann man den Bereich, in dem die 1. Ableitung der Flugbahnfunktion positiv ist, ermitteln: Die Funktion ist für $x < 3,2$ monoton wachsend. Ein Vergleich mit der Flugbahn in Fig. D 30a zeigt Übereinstimmung.

Rechnerbefehl: $\text{solve} (d(x \cdot \tan(45^\circ) - 5x^2 / (64(\cos(45^\circ))^2) + 2,1, x) > 0, x)$

D 5.2 Extrema

Mit Bezug auf den Anfang von Abschnitt D 5.1 beschriebenen Wurf eines Basketballs (Fig. D 40), so soll die Frage beantwortet werden, an welcher Stelle der Ball seine maximale Höhe erreicht. Diese Stelle nennt man in der Mathematik **Maximumstelle** und die zugehörige Höhe das **Maximum** der Funktion. Im Beispiel D 32e) wurde gezeigt, dass die Wurfparabel für alle $x < 3,2$ monoton wächst (und für alle $x > 3,2$ monoton fällt). Wenn der Funktionsgraph an der Stelle $x = 3,2$ sein Monotonieverhalten von „monoton wachsend“ in „monoton fallend“ ändert, ist der Ball an dieser Stelle offensichtlich am höchsten, $x = 3,2$ ist also eine Maximumstelle. Der höchste Punkt des Funktionsgraphen heißt **Maximumpunkt** oder auch **Hochpunkt**.

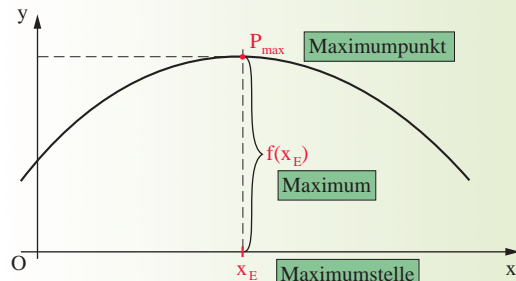


Fig. D 40

Für den Graphen einer Funktion sind darüber hinaus auch die Stellen wichtig, deren Funktionswerte im Vergleich mit denen in der *Umgebung* dieser Stelle (also *lokal* und nicht *global* betrachtet) am größten bzw. kleinsten sind.

Definition D 3:

Ist eine Funktion in einem offenen Intervall I definiert und x_E ein innerer Punkt von I , dann heißt $f(x_E)$ ein

lokales Maximum

der Funktion f , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für jedes $x \in I$ gilt:

$$x_E - \varepsilon < x < x_E + \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_E)$$

lokales Minimum

$$x_E - \varepsilon < x < x_E + \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(x_E)$$

x_E nennt man **lokale Extremstelle** (Maximum- bzw. Minimumstelle) von f , den Punkt $E(x_E; f(x_E))$ **lokaler Extrempunkt** (Maximum- bzw. Minimumpunkt oder Hoch- bzw. Tiefpunkt) des Graphen von f .

D 3

Anders formuliert: $f(x) < f(x_E)$ bzw. $f(x) > f(x_E)$ muss für jedes $x \in U_\varepsilon(x_E)$ gelten. Häufig wird bei dieser Definition nur $f(x) \leq f(x_E)$ bzw. $f(x) \geq f(x_E)$ gefordert, manchmal auch zwischen lokalen Extrema im engeren Sinne (ohne Gleichheitszeichen) und weiteren Sinne (mit Gleichheitszeichen) unterschieden.

In Fig. D 41 a ist $T(x_E; f_1(x_E))$ ein lokaler Minimumpunkt und $f_1(x_E)$ ein lokales Minimum, in Fig. D 41 b ist $H(x_E; f_2(x_E))$ ein lokaler Maximumpunkt, $f_2(x_E)$ ein lokales Maximum.

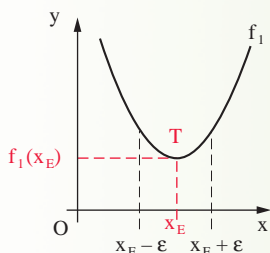


Fig. D 41a

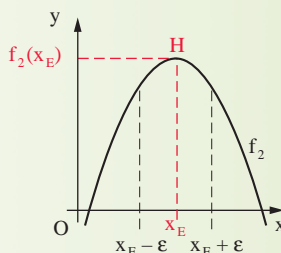


Fig. D 41b

Die in Fig. D 42 im Intervall $[a; b]$ dargestellte Funktion zeigt neben den lokalen Extrempunkten auch Stellen, an denen sie absolut größte Funktionswerte annimmt. Im vorgegebenen Intervall $[a; b]$ hat f bei x_1 und x_3 lokale Maxima, die jedoch nicht global sind. Das *globale Maximum* wird am rechten Intervallrand bei b angenommen, weil $f(b)$ der absolut größte Funktionswert in $[a; b]$ ist. Betrachtet man den Verlauf des Graphens über die Stelle b hinaus,

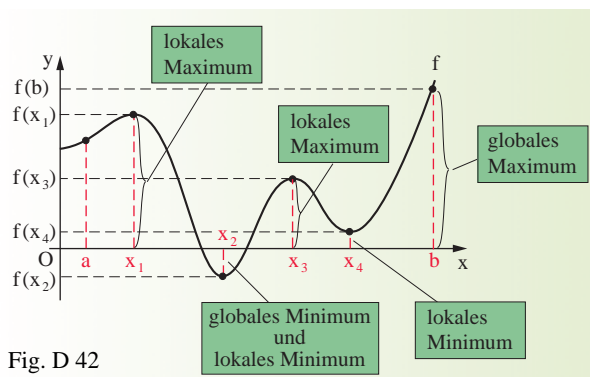


Fig. D 42

so wird deutlich, dass der Funktionsgraph in der unmittelbaren Umgebung von b stets monoton steigend ist, bei b also kein lokales Maximum vorliegt. An den Stellen x_2 und x_4 hat f lokale Minima, wobei in x_2 der absolut kleinste Funktionswert – das *globale Minimum* – angenommen wird. Man

sieht, dass sich an jeder *lokalen* Extremstelle das Monotonieverhalten der Funktion ändert, dies jedoch nicht unbedingt für eine *globale* Extremstelle zutrifft.

Um die lokalen Extremstellen einer Funktion zu finden, kann also das Monotonieverhalten bzw. der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion an diesen Stellen herangezogen werden:

Bei einer lokalen
Maximumstelle x_{E1}

Bei einer lokalen
Minimumstelle x_{E2}

sind die Tangentenanstiege

für alle $x < x_{E1}$ positiv
und
für alle $x > x_{E1}$ negativ.

für alle $x < x_{E2}$ negativ
und
für alle $x > x_{E2}$ positiv.

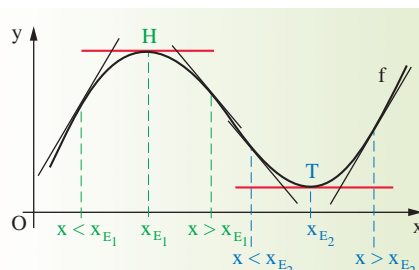


Fig. D 43

An den lokalen Extremstellen selbst verlaufen die Tangenten offensichtlich parallel zur x-Achse, der Tangentenanstieg ist also gleich 0.

D 20

Satz D 20: Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen

Ist die Funktion f in ihrem Definitionsbereich D_f differenzierbar und $x_E \in D_f$ eine lokale Extremstelle von f , so gilt $f'(x_E) = 0$.

Wir führen den Beweis für den Fall des Vorliegens eines lokalen Maximums (s. Fig. D 44).

Voraussetzung:

- a) f hat in x_E ein lokales Maximum;
- b) f ist in D_f differenzierbar; $x_E \in D_f$.

Behauptung:

$f'(x_E) = 0$.

Beweis:

- Aus a) folgt, dass in einer ε -Umgebung von x_E für alle x die Ungleichung $f(x) < f(x_E)$ gilt, also $f(x) - f(x_E) < 0$. Ist außerdem $x < x_E$, also $x - x_E < 0$, so gilt $\frac{f(x) - f(x_E)}{x - x_E} > 0$.
- Da wegen b) der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, gilt bei Annäherung der Argumente an x_E von links $f'_l(x_E) = \lim_{x \rightarrow x_E} \frac{f(x) - f(x_E)}{x - x_E} \geq 0$ (*), weil jede Folge von positiven Gliedern nur einen positiven Grenzwert oder den Grenzwert 0 haben kann.
- Ist nun $x > x_E$, so folgt $x - x_E > 0$. Das bedeutet $\frac{f(x) - f(x_E)}{x - x_E} < 0$.
- Für den Fall der Annäherung der Argumente von rechts an x_E gilt $f'_r(x_E) = \lim_{x \rightarrow x_E} \frac{f(x) - f(x_E)}{x - x_E} \leq 0$ (**), weil jede Folge von negativen Gliedern nur einen negativen Grenzwert oder den Grenzwert 0 haben kann.
- Da nach (b) der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und eindeutig bestimmt ist, folgt wegen (*) und (**) $f'_l(x_E) = f'_r(x_E) = f'(x_E) = 0$. w.z.b.w.

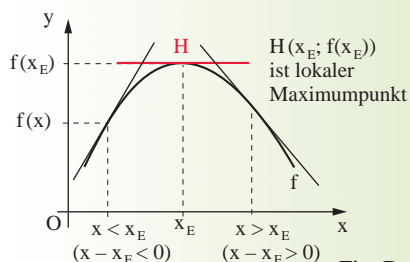


Fig. D 44

Beispiel D 33:

Man untersuche die Funktionen f_1 , f_2 und f_3 auf mögliche lokale Extremstellen.

a) $f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{17}{6}$

- Wir bilden die **erste Ableitung** $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und ermitteln die Werte von x , für die $f'(x)$ gleich 0 ist. Also: $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ bzw. $x^2 - 2x - 3 = 0$ und damit $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ und $f(3) = -\frac{5}{3}$, $f(-1) = \frac{11}{3}$.

- Die Punkte $P_1(3; -\frac{5}{3})$ und $P_2(-1; \frac{11}{3})$ können also Extrempunkte sein.

b) $f_2(x) = \frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{100}{27}x^2 - \frac{200}{27}x + 7$

Bei Einsatz eines GTA erhält man relativ schnell $x_E = 8,07466$ als Minimumstelle (Fig. D 45a, und Fig. D 45b, erste Zeile). Wie der Graph zeigt, nimmt f_2 dort den absolut kleinsten Funktionswert – ihr globales Minimum – an. Nach Def. D 3 liegt aber gleichzeitig ein lokales Minimum vor. Betrachtet man ein geeignet eingeschränktes Intervall, z.B. $x < 4$, so erhält man als weitere lokale Minimumstelle $x_E = 1,63268$ (Fig. D 45b, zweite Zeile). Analog erhält man bei Eingabe von z.B. $x > 3$ and $x < 4$ die lokale Maximumstelle $x_E = 3,79266$ (Fig. D 45b, dritte Zeile).

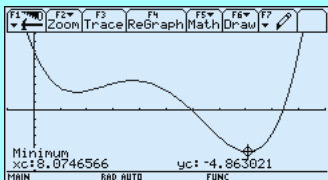


Fig. D 45a

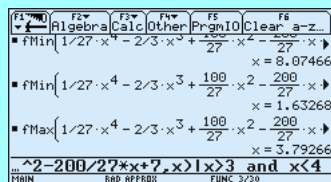


Fig. D 45b

Sollen von einer Funktion alle lokalen Minimum- bzw. Maximumstellen mit einem GTA ermittelt werden, so muss der prinzipielle Verlauf des Funktionsgraphens bereits bekannt sein. Nur dann kann bei der Ermittlung lokaler Extremstellen eine Umgebung so hinreichend klein vorgegeben werden, dass eine im Intervall existierende Extremstelle bestimmt wird.

c) $f_3(x) = -x^4 - 12x^3 - 54x^2 - 108x - 76$

Während der GTA numerisch sofort $x_E = -3$

als Maximumstelle bestimmt, lässt seine grafische Darstellung falsche Interpretationen zu (Fig. D 46): Die Funktion scheint in einer gewissen Umgebung von $x_E = -3$ konstant zu sein, so dass sie (bei strenger Def. gemäß D 3) bei $x_E = -3$ zwar ein globales, aber kein lokales Maximum hätte. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass z.B. $f_3(-3) = 5$, aber $f_3(-2,995) = 4,99999999938$ gilt. Da die Funktion also nicht konstant ist, handelt es sich an der Stelle x_E um sich ein lokales Maximum.

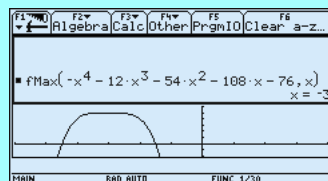


Fig. D 46

Die Bedingung $f'(x_E) = 0^{(1)}$ ist *notwendig*, d.h., für differenzierbare Funktionen kann es *nur* an diesen Stellen x_E lokale Extrema geben. Die Bedingung ist aber *nicht hinreichend* – sie kann an einer Stelle x_E erfüllt sein, *ohne* dass dort ein Extremum vorliegt. Als Beispiel sei die Funktion $f(x) = x^3$ genannt. Für sie gilt zwar $f'(0) = 0$, die Funktion besitzt aber bekanntlich an der Stelle 0 *kein* lokales Extremum.

¹⁾ Wir verwenden x_E für Extremstelle, auch wenn der entsprechende Nachweis noch nicht geführt ist.

Für die Entscheidung, ob an den „extremwertverdächtigen“ Stellen tatsächlich Extrema vorliegen und wenn ja, welcher Art dieses Extremum ist, wird das Verhalten der 1. Ableitung näher untersucht. In Fig. D 47 und Fig. D 48 ist deshalb die Funktion aus Beispiel D 33a und ihre 1. Ableitung dargestellt. Man erkennt, dass die 1. Ableitung an den lokalen Extremstellen ihr Vorzeichen ändert, beim lokalen Maximum von „+“ zu „-“ und bei Minimum von „-“ zu „+“. Dieses oftmals sehr nützliche Kenntnis wird auch als **Vorzeichenwechselkriterium** bezeichnet.

Betrachtet man die Veränderung der Tangentenanstiege mit wachsenden x -Werten als einen Prozess, so wird deutlich, dass die Tangentenanstiege bei einer lokalen Minimumstelle monoton wachsend sind. Das bedeutet nach Satz D 19, dass $f''(x) \geq 0$ sein muss. Bei einer lokalen Maximumstelle sind die Tangentenanstiege hingegen monoton fallend, weshalb in diesem Falle $f''(x) \leq 0$ sein muss.

In Fig. D 49 ist der Verlauf der 2. Ableitung zur Veranschaulichung angegeben. Die zweite Ableitung hat an einer lokalen Maximumstelle einen negativen Wert und an einer lokalen Minimumstelle einen positiven Wert.

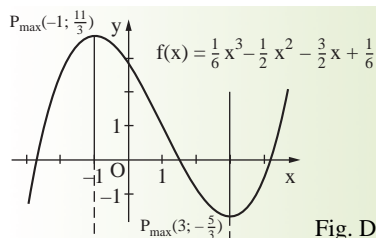


Fig. D 47

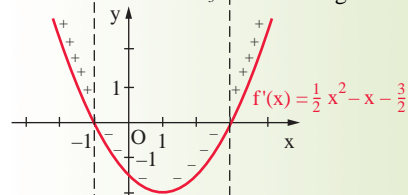


Fig. D 48

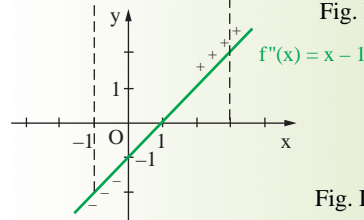


Fig. D 49

D 34

Beispiel D 34:

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ sollen die Graphen von f , f' und f'' in einem Koordinatensystem dargestellt und bezüglich lokaler Extremstellen diskutiert werden.

- Das lokale Maximum von f liegt bei $x_{E1} = -1$.
Es gilt $f'(-1) = 0$; die 1. Ableitung ändert mit wachsendem x bei x_{E1} ihr Vorzeichen von + nach -. Die 2. Ableitung ist an der Stelle $x_{E1} = -1$ kleiner als 0 ($f''(-1) = -4$)
- Das lokale Minimum von f liegt bei $x_{E2} = 3$.
Es gilt $f'(3) = 0$; die 1. Ableitung ändert mit wachsendem x an der Stelle $x_{E2} = 3$ ihr Vorzeichen von - nach +.
Die 2. Ableitung ist an der Stelle $x_{E2} = 3$ größer als 0 ($f''(3) = +4$).
- Die rechnerische Überprüfung mit dem GTA zeigt, dass keine weiteren lokalen Extremstellen existieren. Die einzelnen Werte können hier genau abgelesen werden. Fig. D 51.

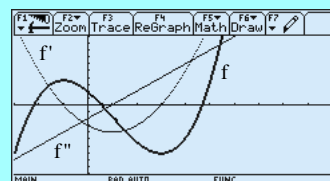


Fig. D 50

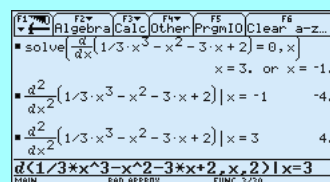


Fig. D 51

D 21

Satz D 21: **Hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen**

Die Funktion f sei in D_f zweimal differenzierbar. Gilt für $x_E \in D_f$

$$f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) < 0,$$

$$f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) > 0,$$

so hat die Funktion f an der Stelle x_E ein

lokales Maximum

lokales Minimum.

Wir beweisen den Satz für den Fall des lokalen Maximums.

Voraussetzung:

- a) f ist in D_f zweimal differenzierbar und $x_E \in D_f$.
 b) $f'(x_E) = 0$ c) $f''(x_E) < 0$

Behauptung:

f hat an der Stelle x_E ein lokales Maximum.

Beweis (vgl. Fig. D 52):

- Da wegen a) und c) $f''(x_E)$ existiert sowie $f''(x_E) < 0$ gilt, gibt es immer eine ε -Umgebung von x_E (kurz: $U_\varepsilon(x_E)$), in der f'' nur negative Werte annimmt. Das bedeutet nach Satz D 19, dass in $U_\varepsilon(x_E)$ die Funktion f' monoton fällt.
- Nun gilt nach b) aber auch $f'(x_E) = 0$. Das bedeutet: Für alle $x \in]x_E - \varepsilon; x_E[$ steigt f monoton und für alle $x \in]x_E; x_E + \varepsilon[$ fällt f monoton (Satz D 19). Daraus folgt:
- Für alle $x \in U_\varepsilon(x_E)$ gilt $f(x) < f(x_E)$. Nach Definition D 3 hat f an der Stelle x_E also ein lokales Maximum.

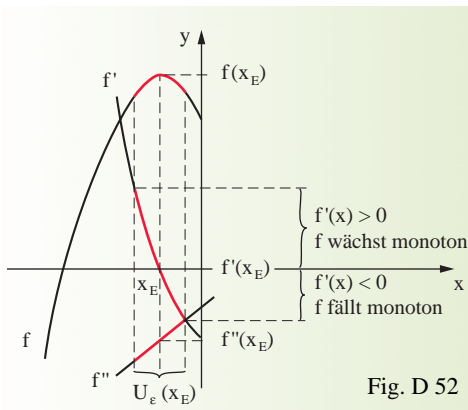


Fig. D 52

Satz D 21 liefert ebenfalls hinreichende Bedingungen für lokale Extrema. Dass sie aber nicht notwendig sind, belegt das Beispiel der Funktion $f(x) = x^4$. Diese Potenzfunktion besitzt an der Stelle $x_E = 0$ ein lokales Minimum, aber für sie gilt:

$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3; \quad f'(0) = 0 \quad f''(x) = 12x^2; \quad f''(0) = 0$$

Das Beispiel zeigt, dass sich mittels Satz D 21 allein die lokalen Extrema einer Funktion nicht immer ermitteln lassen – die Bedingung ist zwar *hinreichend, aber nicht notwendig*. Man nutzt deshalb eine Erweiterung dieser hinreichenden Bedingung.

Satz D 21a: Notwendige und hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen

Die Funktion f sei in D_f n -mal differenzierbar. Gilt für $x_E \in D_f$ und n gerade, $n \geq 2$, $f'(x_E) = f''(x_E) = f'''(x_E) = \dots = f^{(n-1)}(x_E) = 0$ und $f^{(n)}(x_E) \neq 0$, so hat die Funktion an der Stelle x_E ein lokales Extremum, und zwar für $f^{(n)}(x_E) > 0$ ein lokales Minimum, für $f^{(n)}(x_E) < 0$ ein lokales Maximum.

D 21a

Auf den Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet. Angewandt auf die Funktion $f(x) = x^4$ ergibt sich:
 $f'''(x) = 24x$; $f'''(0) = 0$ $f^{(4)}(x) = 24 > 0 \Rightarrow$ lokale Minimumstelle bei $x_E = 0$

Bei den meisten Funktionen, die im Unterricht untersucht wurden, ist für die Ermittlung lokaler Extremstellen Satz D 21 anwendbar.

Beispiel D 35:

Man untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ auf lokale Extremstellen und ermittle die Extrempunkte ihres Graphen.

- Wir bilden die Ableitungen (f ist zweimal differenzierbar):

$$f'(x) = x^2 + x - 2 \quad f''(x) = 2x + 1$$

D 35

- Wir ermitteln die Stellen, für die $f'(x) = 0$ als *notwendige* Bedingung für die Existenz einer Extremstelle der Funktion f erfüllt ist (Satz D 20): Die sich so ergebende quadratische Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$. An diesen Stellen *kann* also eine Extremstelle vorliegen.
- Wir überprüfen, ob die ermittelten Stellen tatsächlich Extremstellen sind, ob dort also die *hinreichende* Bedingung für die Existenz einer Extremstelle erfüllt ist (Satz D 21). Unter Verwendung von $f''(x) = 2x + 1$ erhalten wir
 $f''(1) = 3 > 0$, d. h.: $x_1 = 1$
 ist eine Minimumstelle von f ;
 $f''(-2) = -3 < 0$, d. h.: $x_2 = -2$
 ist eine Maximumstelle von f .
- Wir ermitteln die Funktionswerte der Extremstellen:
 $f(1) = -\frac{7}{6}$, $f(-2) = \frac{10}{3}$
 Demnach gilt:
 $\text{Min}(1; -\frac{7}{6})$, $\text{Max}(-2; \frac{10}{3})$

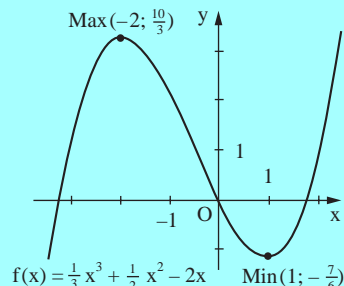


Fig. D 53

D 36

Beispiel D 36:

Es ist zu untersuchen, wie die Koeffizienten a und b die Lage und die Art der lokalen Extrema der Funktionen $f_{a,b}(x) = ax \cdot e^{bx}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$) beeinflussen.

Wir gehen wie im Beispiel D 35 vor:

- $f_{a,b}'(x) = ae^{bx} + abxe^{bx} = ae^{bx}(1 + bx)$; $f_{a,b}''(x) = abe^{bx}(1 + bx) + ae^{bx} \cdot b = abe^{bx}(2 + bx)$
- Wegen $a \neq 0$ und $e^{bx} \neq 0$ folgt aus $f_{a,b}'(x_E) = 0$: $1 + bx_E = 0$ ($b \neq 0$), also $x_E = -\frac{1}{b}$
- $f_{a,b}''(x_E) = f_{a,b}''(-\frac{1}{b}) = \frac{ab}{e} \neq 0$; $f_{a,b}(-\frac{1}{b}) = -\frac{a}{be}$
- Die einzige Extremstelle der Funktionen $f_{a,b}$ liegt bei $x_E = -\frac{1}{b}$. Der Koeffizient a hat also keinen Einfluss auf die x -Koordinate des Extrempunkts, er beeinflusst nur die y -Koordinate: $P(-\frac{1}{b}; -\frac{a}{be})$

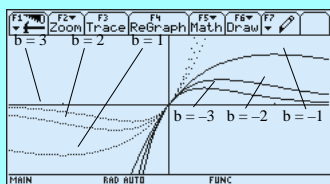
für $a = 1$

Fig. D 54a

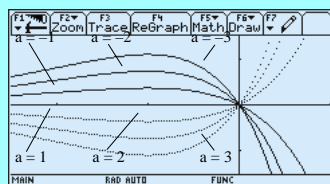
für $b = 1$

Fig. D 54b

Da $f_{a,b}''(-\frac{1}{b}) = \frac{ab}{e}$ gilt und $e > 0$, wird die Art des Extremums von a und b beeinflusst. Haben beide Parameter gleiches Vorzeichen, gilt also $a \cdot b > 0$, besitzt $f_{a,b}$ ein lokales Minimum. Bei verschiedenen Vorzeichen, also bei $a \cdot b < 0$, hat $f_{a,b}$ ein lokales Maximum (Fig. D 54a und Fig. D 54b), z. B.:

$a = 1; b = 1:$	$f_1(x) = x \cdot e^x$	$\text{Min}(-1; -\frac{1}{e})$
$a = -3; b = 1:$	$f_2(x) = -3x \cdot e^x$	$\text{Max}(-1; \frac{3}{e})$

Eine Funktion kann auch an Stellen x_E lokale Extrema besitzen, an denen sie *nicht* differenzierbar ist. Die Entscheidung über das Vorhandensein lokaler Extrema muss dann mithilfe der Definition D 3 geschehen (s. Beispiel D 37).

D 37

Beispiel D 37:

Man ermittle die lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion $f(x) = |x^3 - 4x|$ mit $D_f = \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

Wir zerlegen den Funktionsterm:

$$f(x) = |x^3 - 4x| = |x(x^2 - 4)| = \begin{cases} x^3 - 4x & \text{für } x \geq 2 \text{ (da } x^3 - 4x \geq 0) \\ -x^3 + 4x & \text{für } x < 2 \text{ (da } x^3 - 4x < 0) \end{cases}$$

In der Umgebung von $x_1 = 2$ ändert sich die Funktionsgleichung.

Deshalb ist diese Stelle bei den Untersuchungen besonders zu beachten.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & \text{für } x > 2 \\ -3x^2 + 4 & \text{für } x < 2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 3 \cdot 4 - 4 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -3 \cdot 4 + 4 = -8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Die Funktion ist an} \\ \text{der Stelle } x_1 = 2 \text{ nicht} \\ \text{differenzierbar.} \end{array}$$

Da f eine Betragsfunktion ist, gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in D_f$. Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ ($-2 \notin D_f$), die Schnittpunkte mit der x -Achse sind also $P_{x_1}(0; 0)$ und $P_{x_2}(2; 0)$. Für alle Funktionswerte in der Umgebung von $x_2 = 2$, wo f nicht differenzierbar ist, gilt also $f(x) > 0$, d.h., $P_{x_2}(2; 0)$ ist lokaler Minimumpunkt. $P_{x_1}(0; 0)$ ist als Randpunkt kein lokaler Minimumpunkt.

Untersuchung der differenzierbaren Abschnitte der Funktion f :

$$f'(x) = 0: \begin{cases} 3x_3^2 - 4 = 0, \text{ also } x_3^2 = \frac{4}{3} \quad (\text{gilt nicht für } x > 2) \\ -3x_3^2 + 4 = 0, \text{ also } x_3^2 = \frac{4}{3} \quad \text{und damit } x_3 = \frac{2}{3}\sqrt{3} < 2 \quad (-\frac{2}{3}\sqrt{3} \notin D_f) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{für } x > 2 \\ -6x & \text{für } x < 2; \end{cases} \quad \begin{array}{l} f''(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -6 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = -4\sqrt{3} < 0, \\ \text{also lokale Maximumstelle.} \\ f(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -(\frac{2}{3}\sqrt{3})^3 + 4 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{16}{9}\sqrt{3} \end{array}$$

Der Graph der Funktion $f(x) = |x^3 - 4x|$ mit $x \geq 0$ besitzt also einen (lokalen) Maximumpunkt $\text{Max}(\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{16}{9}\sqrt{3})$ und einen (lokalen) Minimumpunkt $\text{Min}(2; 0)$ (Fig. D 55).

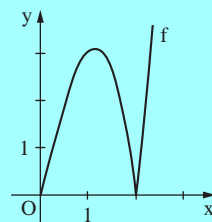


Fig. D 55

Wie im Beispiel D 37 gezeigt wurde, ist die Untersuchung nicht differenzierbarer Funktionen sehr aufwändig. Mit dem GTA kann man den Graphen einer Funktion nicht nur veranschaulichen, sondern durch das „Verfolgen“ der Kurve auch die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten ermitteln.

D 38

Beispiel D 38:

Die Funktion $f(x) = \frac{|x^2 - 5| - 8}{2}$ soll mit dem GTA auf Extrempunkte untersucht werden:

- Grafische Darstellung über die Eingabe $y(x) = (\text{abs}(x^2 - 5) - 8) / 2$
- Mittels $F5(\text{Math})\text{Minimum}$ erhält man nach Eingabe der oberen und unteren Grenze des Untersuchungsintervalls näherungsweise die Koordinaten des ersten Minimumpunktes: $P_{\text{min}1} (\approx -2,236; -4)$
- Wegen der Symmetrie des Graphens hat der 2. Minimumpunkt die Koordinaten $(P_{\text{min}2} (\approx 2,236; -4))$
- In analoger Weise erhält man über $F5(\text{Math})\text{Maximum}$ die Koordinaten des Maximumpunktes: $P_{\text{max}} (\approx 0; -1,5)$ (Fig. D 56)

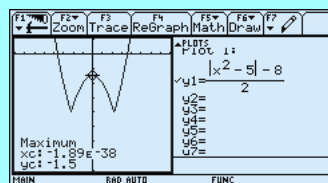


Fig. D 56

D 39

Beispiel D 39:

Gesucht ist eine allgemeine Formel für die Wurfhöhe beim schrägen Wurf eines Basketballs, wenn die Wurfparabel mithilfe der Gleichung $y = f(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2(\cos \alpha)^2} x^2 + h_0$ (vgl. Einführung Kapitel D 5) beschrieben wird:

Die Lösung des Problems erfolgt hier in 3 Schritten. Dabei wird die Fähigkeit des GTA ausgenutzt, neben numerischen Rechnungen auch symbolische auszuführen.

$$\frac{d}{dx} \left(x \cdot \tan \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + h_0 \right) = 0$$

$$x = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha \cdot v_0^2}{g}$$

Fig. D 57

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x \cdot \tan \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + h_0 \right) = -\frac{g}{\cos^2 \alpha \cdot v_0^2}$$

Fig. D 58

$$y_{\max} = \frac{(\cos \alpha)^2 \cdot (\tan \alpha)^2 \cdot v_0^2}{2g} + h_0$$

$$y_{\max} = \frac{(\sin \alpha)^2 \cdot v_0^2}{2g} + h_0$$

Fig. D 59

- Über *solve* / *d(differentiate)* wird die Nullstelle der 1. Ableitung der Funktion gebildet. Dadurch erhält man die Extremstelle $x_E = \frac{(\cos \alpha)^2 \tan \alpha \cdot v^2}{g}$ (Fig. D 57).
- Fig. D 58 zeigt, dass die 2. Ableitung stets negativ ist und somit ein lokales Maximum vorliegt.
- Die Formel für die Wurfhöhe erhält man durch Einsetzen der Extremstelle in die Ausgangsgleichung (Fig. D 59). Demnach kann die Wurfhöhe des Balls nach der Formel

$$y_{\max} = \frac{(\cos \alpha)^2 \cdot (\tan \alpha)^2 \cdot v_0^2}{2g} + h_0 \quad \text{bzw. nach der Ersetzung } (\tan \alpha)^2 = \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} \text{ mit}$$

$$y_{\max} = \frac{(\sin \alpha)^2 \cdot v_0^2}{2g} + h_0 \quad \text{berechnet werden.}$$

D 5.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen

Betrachtet man monotone Funktionen¹⁾, so lässt sich feststellen, dass bei gleichem Monotonieverhalten die Funktionsgraphen unterschiedlich gekrümmt sein können (Fig. D 60).

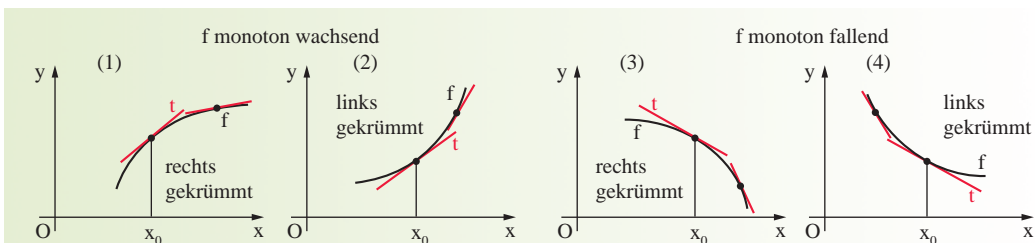


Fig. D 60

Für die Beschreibung des Krümmungsverhaltens vereinbaren wir, dass man den Graphen wie bei der Monotoniebetrachtung immer von links nach rechts, das heißt in Richtung steigender x-Werte, gedanklich „durchfährt“. Auf diese Weise durchfährt man bei den Bildern (1) und (3) eine **Rechtskurve** und bei den Bildern (2) und (4) eine **Linkskurve**.

¹⁾ Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Funktionen, die mindestens zweimal differenzierbar sind.

Als Entscheidungskriterium, welches Krümmungsverhalten bei einer Funktion vorliegt, bietet sich wieder die Analyse der Tangentenanstiege bzw. der 1. Ableitung an. Anhand der eingezeichneten Tangenten in Fig. D 60 erkennt man, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung der zu untersuchenden Stelle x_0 alle Tangenten an das Kurvenstück

bei **rechtsgekrümmten** Graphen
oberhalb des Graphens liegen

und

bei **linksgekrümmten** Graphen
unterhalb des Graphens liegen.

Betrachtet man die Veränderung der Tangentenanstiege (der 1. Ableitung) mit wachsenden x -Werten als einen Prozess, so werden

bei **rechtsgekrümmten** Graphen die
Tangentenanstiege immer kleiner

und

bei **linksgekrümmten** Graphen die
Tangentenanstiege immer größer.

Diese Tatsache nutzt man zur Definition des Krümmungsverhaltens in einem Intervall I:

Definition D 4:

Ist f eine im Intervall I differenzierbare Funktion und ist f' in I	
streng monoton fallend,	streng monoton wachsend,
dann bezeichnet man den Graphen von f in I als	
rechtsgekrümmt.	linksgekrümmt.

D 4

Rechtsgekrümmte Kurven nennt man auch „konkav“ und linksgekrümmte Kurven „konvex“ (analog zur Charakterisierung der Wölbung von Linsen in der Physik). Um in der Mathematik die „Wölbung“ einer Kurve zu beschreiben, hat man vereinbart, den Graphen einer Funktion immer von „unten“ (also in Richtung steigender y -Werte) zu betrachten. Eine Funktion heißt dann an einer Stelle x_0 *lokal konkav*, wenn sie nach *innen* gewölbt ist bzw. *lokal konvex*, wenn sie nach *außen* gewölbt ist.

Für die Angabe des Krümmungsverhaltens einer Funktion benötigt man nach der Definition D 4 Informationen über die Monotonie der 1. Ableitung. Für die Analyse der 1. Ableitung in einem vorgegeben Intervall I nutzt man den Satz D 19 zum Monotonieverhalten wie folgt:

- $f''(x) < 0$ ist hinreichend dafür, dass $f'(x)$ streng monoton fällt und f deshalb rechtsgekrümmt ist.
- $f''(x) > 0$ ist hinreichend dafür, dass $f'(x)$ streng monoton wächst und f deshalb linksgekrümmt ist.

In Fig. D 61, Fig. D 62 und Fig. D 63 sind der Graph einer Funktion f und die zugehörige 1. und 2. Ableitung dargestellt.

Die Stellen an denen der Graph sein Krümmungsverhalten

ändert, nennt man **Wendestellen** x_W und die dazugehörigen Punkte **Wendepunkte** $W(x_W; f(x_W))$.

Man erkennt in Fig. D 62, dass die 1. Ableitung an den Wendestellen x_W ihr Monotonieverhalten ändert, das heißt, dass die 1. Ableitung dort ein **lokales Extremum** besitzt. Diese Erkenntnis nutzt man zur Definition von Wendepunkten:

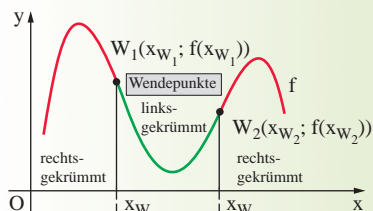


Fig. D 61

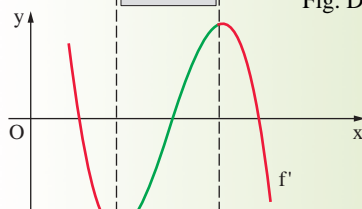


Fig. D 62

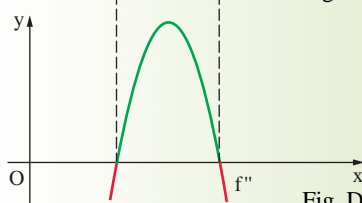


Fig. D 63

D 5

Definition D 5:

Ist die Funktion f in D_f differenzierbar und besitzt f' an der Stelle $x_W \in D_f$ ein lokales Extremum, so nennt man x_W **Wendestelle** von f und $W(x_W; f(x_W))$ **Wendepunkt** des Graphen von f .

Aus Fig. D 61 und Fig. D 62 lässt sich ableiten, wie das Krümmungsverhalten rechnerisch ermittelt werden kann:

- (1) Hat die 1. Ableitung f' in x_W ein lokales Minimum, so erfolgt beim Graphen von f der Wechsel von rechtsgekrümmt nach linksgekrümmt; tritt beim Graphen von f ein Wechsel von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt ein, so hat die 1. Ableitung f' in x_W ein lokales Maximum.
- (2) Ändert der Graph von f an einer Stelle x_W sein Krümmungsverhalten, so wechselt die 2. Ableitung an dieser Stelle ihr Vorzeichen (Fig. D 63).

Die Definition D 5 gestattet, die bereits bewiesenen Sätze über Extremstellen (Satz D 20 und D 21) nun auch für die Bestimmung oder die Identifikation von Wendestellen zu verwenden. Es ist lediglich notwendig, die Ordnung der jeweils genannten Ableitung um 1 zu erhöhen. Auf die Beweise der nachfolgenden Sätze kann deshalb verzichtet werden.

D 22

Satz D 22: Notwendige Bedingung für eine Wendestelle

Ist die Funktion f in ihrem Definitionsbereich D_f zweimal differenzierbar und $x_W \in D_f$ eine Wendestelle von f , so gilt $f''(x_W) = 0$.

Dieser Satz stellt nur eine notwendige Bedingung für den Nachweis einer Wendestelle dar. Hinreichend ist aber der folgende Satz, der unter Anwendung der Sätze D 20 und D 21 formuliert wird.

D 23

Satz D 23: Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle

Die Funktion f sei in D_f dreimal differenzierbar. Gilt für $x_W \in D_f$
 $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$,
 so hat die Funktion f an der Stelle x_W eine Wendestelle.

Es gibt Wendestellen x_W , für die außerdem $f'(x_W) = 0$ gilt, wo also die Tangente an den Graphen von f parallel zur x -Achse verläuft. Man nennt solche Wendepunkte *Sattelpunkte*, *Terrassenpunkte* oder *Horizontalwendepunkte*.

D 40

Beispiel D 40:

Die Funktion $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1$ ist auf Wendepunkte zu untersuchen. Falls Wendepunkte existieren, sind auch die Gleichungen der Tangenten in den Wendepunkten zu ermitteln. Diese **Wendetangenten** durchsetzen (schneiden) die Kurve im Wendepunkt und trennen somit die Kurventeile mit unterschiedlichem Krümmungssinn.

- $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$; $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$; $f'''(x) = 24x - 36$.
- $12x^2 - 36x + 24 = 0$, also $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$.
- $f'''(2) = 12 \neq 0, f'''(1) = -12 \neq 0 \Rightarrow W_1(2; 1)$ und $W_2(1; 0)$ sind Wendepunkte.
- Wir ermitteln nun den Anstieg der Wendetangenten t_1 und t_2 an den Wendestellen x_W . Wegen $m = f'(x_W)$ gilt $m_1 = f'(2) = 32 - 72 + 48 - 8 = 0 \Rightarrow t_1$ hat den Anstieg 0,

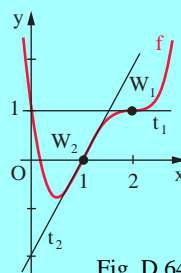


Fig. D 64

$\Rightarrow W_1$ ist Horizontalwendepunkt;

$m_2 = f'(1) = 4 - 18 + 24 - 8 = 2 \Rightarrow t_2$ hat den Anstieg 2.

- Mithilfe von $y = mx + n$ erhalten wir die Tangentengleichungen:

$t_1: y = g(x) = 1$

$t_2:$ Nach Einsetzen der Koordinaten des Wendepunktes W_2 in $y = 2x + n$ erhält man letztlich $y = h(x) = 2x - 2$

Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz D 23 nur eine hinreichende Bedingungen für Wendestellen liefert und dass für die Bestimmung der Wendestellen bestimmter Funktionen eine Erweiterung von Satz D 23 vorgenommen werden muss:

Die Potenzfunktion $f(x) = x^5$ hat an der Stelle $x_w = 0$ eine Wendestelle, aber für sie gilt:

$$f(x) = x^5; \quad f'(x) = 5x^4; \quad f''(x) = 20x^3; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(x) = 60x^2; \quad f'''(0) = 0$$

Satz D 23a: Notwendige und hinreichende Bedingung für eine Wendestelle

Die Funktion f sei in D_f n -mal differenzierbar. Gilt für $x_w \in D_f$, n ungerade und $n \geq 3$, $f''(x_w) = f'''(x_w) = \dots = f^{(n-1)}(x_w) = 0$ und $f^{(n)}(x_w) \neq 0$, so hat die Funktion an der Stelle x_w einen Wendepunkt. Gilt $f^{(n)}(x_w) > 0$, ist also $f'(x_w)$ lokales Minimum der 1. Ableitung, so wechselt f an der Wendestelle von rechtsgekrümmt zu linksgekrümmt. Gilt $f^{(n)}(x_w) < 0$, ist also $f'(x_w)$ ein lokales Maximum, so wechselt f an der Wendestelle von linksgekrümmt zu rechtsgekrümmt.

D 23a

Auf die Funktion $f(x) = x^5$ angewendet, ergibt sich:

$$f^{(4)}(x) = 120x; \quad f^{(4)}(0) = 0; \quad f^{(5)}(x) = 120 \neq 0 \Rightarrow f \text{ hat in } x_w = 0 \text{ eine Wendestelle.}$$

Beispiel D 41:

Es ist die Anzahl der Wendepunkte der Funktion $f(x) = ax^4 - bx^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) in Abhängigkeit von a und b zu diskutieren und zu untersuchen, ob Sattelpunkte vorliegen.

$a = 0; \quad b = 0$ nicht sinnvoll;

$a = 0; \quad b \neq 0 \quad f(x) = -bx^2$ Graph ist quadratische Parabel ohne Wendepunkt;

$a \neq 0; \quad b = 0 \quad f(x) = ax^4$ Graph ist Parabel vierten Grades ohne Wendepunkt;

$a \neq 0; \quad b \neq 0 \quad f'(x) = 4ax^3 - 2bx; \quad f''(x) = 12ax^2 - 2b; \quad f'''(x) = 24ax$

$f''(x_w) = 0$, also $12ax_w^2 - 2b = 0$, damit $x_w^2 = \frac{b}{6a}$. Für $a \cdot b > 0$ folgt $x_{w1} = +\sqrt{\frac{b}{6a}}; \quad x_{w2} = -\sqrt{\frac{b}{6a}}$.

Wegen $f'''(\pm\sqrt{\frac{b}{6a}}) = \pm 24a \cdot \sqrt{\frac{b}{6a}} \neq 0$ sind x_{w1} und x_{w2} Wendestellen, aber keine Abszissen von Sattelpunkten, denn $f'(\pm\sqrt{\frac{b}{6a}}) = \pm \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{b}{6a}} \mp 2b \sqrt{\frac{b}{6a}} = \mp \frac{4}{3} b \sqrt{\frac{b}{6a}} \neq 0$.

Also: Die Funktion f hat für $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a \cdot b < 0$ keine Wendepunkte, im Fall $a \cdot b > 0$ liegen zwei Wendepunkte vor, die aber keine Sattelpunkte sind.

D 41

D 5.4 Verhalten im Unendlichen

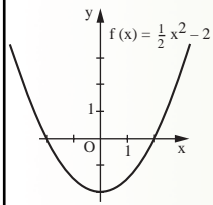
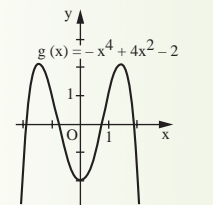
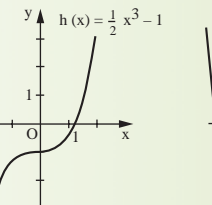
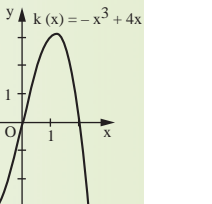
Bei der Untersuchung des Graphen einer Funktion ist auch die Frage von Interesse, wie sich die Funktionswerte bei unbeschränkt wachsenden bzw. fallenden Argumenten verhalten, vorausgesetzt, der Definitionsbereich ist wenigstens nach einer Seite unbeschränkt. Man spricht vom **Verhalten der Kurve im Unendlichen**.

Bei rationalen Funktionen ist das Verhalten im Unendlichen mithilfe von Grenzwertbetrachtungen (vgl. Kap C 1) leicht zu ermitteln:

- (1) Bei ganzrationalen Funktionen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$) gilt nach Ausklammern von x^n

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n,$$

denn mit Ausnahme des ersten Gliedes besitzen alle anderen Summanden in der Klammer den Grenzwert 0. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n$ spielt also unter Berücksichtigung des Vorzeichens von a_n bei der Untersuchung des Verhaltens einer ganzrationalen Funktion im Unendlichen die entscheidende Rolle. Die folgende Tabelle gibt einen systematischen Überblick über dieses Verhalten in Abhängigkeit von n und a_n :

$n \in \mathbb{N}$	gerade	gerade	ungerade	ungerade
$a_n \in \mathbb{R}$	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Beispiel	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$	$g(x) = -1x^4 + 4x^2 - 2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$	$k(x) = -1x^3 + 4x$
Fig. D 65				

- (2) Bei **gebrochenrationalen Funktionen** stellt man fest, dass sich der Graph der Funktion immer mehr einer bestimmten Geraden oder Kurve annähert, ohne sie jedoch zu erreichen (vgl. Abschnitt C 2).

Man nennt eine Funktion g **Asymptote**¹⁾ von f , falls gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - g(x)| = 0$ bzw.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - g(x)| = 0$. $g(x)$ kann dabei eine lineare Funktion sein, als Spezialfall eine Parallele zur x -Achse ($y = c$) oder auch die x -Achse selbst ($y = 0$). Auch Kurven, z.B. Parabeln, kommen als Asymptoten in Frage.

Ist f eine gebrochenrationale Funktion, besitzt sie also eine Gleichung der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \quad (a_n \neq 0; b_m \neq 0),$$

so formt man die Gleichung zur Untersuchung des Verhaltens von f im Unendlichen durch Ausklammern der höchsten Potenz von x im Nenner (x^m) und anschließendes Kürzen um in

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^m \left(\frac{a_n}{x^{m-n}} + \frac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m} \right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right)} = \frac{\frac{a_n}{x^{m-n}} + \frac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}} + \dots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}}.$$

¹⁾ asymptotein (gr.) – nicht zusammenfallen

Bei der Grenzwertbetrachtung müssen folgende 3 Fälle unterschieden werden:

1. Fall: Grad n des Zählerpolynoms $<$ Grad m des Nennerpolynoms

Für $n < m$ konvergieren alle Summanden im Zähler für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0, der Nenner gegen b_m . Es gilt also für den Fall einer echt gebrochenrationalen Funktion $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$.

Der Graph der Funktion nähert sich der Geraden $y = 0$, die x -Achse ist also Asymptote.

2. Fall: Grad n des Zählerpolynoms $=$ Grad m des Nennerpolynoms

Für $n = m$ ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$. In diesem Fall stellt die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{a_n}{b_m}$ eine Asymptote des Graphen von f dar.

3. Fall: Grad n des Zählerpolynoms $>$ Grad m des Nennerpolynoms

Ist $n > m$, handelt es sich bei f also um eine unecht gebrochenrationale Funktion, so kann die zugehörige Funktionsgleichung durch Ausführen der Division in einen ganzrationalen Anteil $g(x)$ und in einen echt gebrochenrationalen Anteil $e(x)$ zerlegt werden. In diesem Fall gilt also

$f(x) = g(x) + e(x)$, wobei, wie zuvor diskutiert, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - g(x)| = 0$ ist und $y = g(x)$ die Grenzkurve darstellt.

Im folgenden Beispiel werden die drei möglichen Fälle noch einmal zusammengestellt und an konkreten Funktionen veranschaulicht.

Beispiel D 42:

Fall 1: $n < m$, z.B. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Also ist $y = 0$ die Gleichung der Asymptote (Fig. D 66).

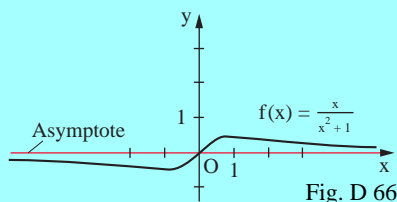


Fig. D 66

Fall 2: $n = m$, z.B. $h(x) = \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2$$

Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ (also eine Parallele zur x -Achse im Abstand 2) ist Asymptote des Graphen von h (Fig. D 67).

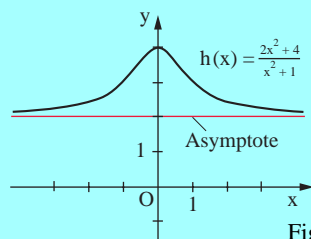


Fig. D 67

Fall 3: $n > m$, z.B. $k(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(x + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \pm\infty$$

Die Division $(x^3 + 1) : (x^2 + 1)$ liefert $x + \frac{1-x}{x^2 + 1}$, also ist

die Gerade mit der Gleichung $y = x$ Asymptote des Graphen von k (Fig. D 68).

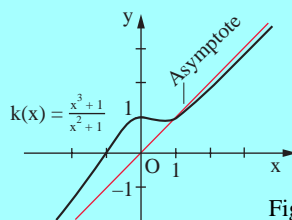


Fig. D 68

Grenzwertbetrachtungen zum Verhalten im Unendlichen bei **nichtrationalen Funktionen** sind wesentlich schwieriger. Es lässt sich keine einheitliche Vorgehensweise angeben. Wir helfen uns mit inhaltlichen Überlegungen, mit Umformen des Funktionsterms und der Regel von DE L'HOSPITAL (vgl. Satz D 16 und D 17).

D 43

Beispiel D 43:

Für folgende Funktionen ist das Verhalten im Unendlichen zu ermitteln:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{x-2}}$; $D_f: x \in \mathbb{R}, x > 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3}{1-\frac{2}{x}}} = \sqrt{3}, \quad \text{also Asymptote } g = \sqrt{3} \quad (\text{Fig. D 69}).$$

b) $f(x) = \frac{x}{e^x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$

Bei der Untersuchung für $x \rightarrow +\infty$ müssen wir die **Regel von DE L'HOSPITAL** anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (\text{Fig. D 70})$$

c) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Für $x \rightarrow +\infty$ müssen wir die Regel von DE L'HOSPITAL zweimal anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Sehr bequem erhält man Grenzwerte und Kurvenverlauf mit dem GTA:

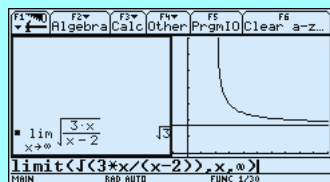


Fig. D 69

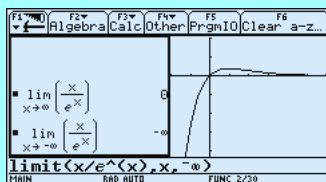


Fig. D 70

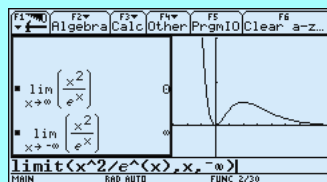


Fig. D 71

D 5.5 Unstetigkeitsstellen

Für den Verlauf des Graphen einer Funktion ist es von Bedeutung, ob die Funktion im betrachteten Intervall **stetig** ist und ihr Graph folglich „in einem Zug“ gezeichnet werden kann. Ganzrationale Funktionen sind über ganz \mathbb{R} stetig, während gebrochenrationale und nichtrationale Funktionen sowie bestimmte abschnittsweise definierte Funktionen häufig **Unstetigkeitsstellen** aufweisen. Wie in Abschnitt C 3 ausgeführt, unterscheidet man dabei zwischen

- * Polstellen (auch „Unendlichkeitsstellen“ oder „unendliche Sprungstellen“) (s. Beispiel C 19);
- * endlichen Sprungstellen (kurz: „Sprünge“) (s. Beispiel C 18) sowie
- * solchen Stellen, wo der Funktionsterm ein unbestimmter Ausdruck (z.B. $\frac{0}{0}$) ist und der Graph deshalb ein „Loch“ (oder auch eine „Lücke“) aufweist (s. Beispiel C 17).

• Polstellen

Gebrochenrationale Funktionen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ sind an den Stellen x_0 nicht definiert (und folglich dort auch unstetig), wo die Nennerfunktion v den Wert 0 annimmt. An diesen Stellen besitzt f eine **Definitionslücke** (s. auch Abschnitt A 2.2). Ist zusätzlich $u(x_0) \neq 0$, so nennt man x_0 eine **Polstelle** von f (s. Definition A 4). Es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$. Die Gerade $x = x_0$ (Parallele zur y-Achse), an die sich der Graph der Funktion f in unmittelbarer Umgebung von x_0 „anschmiegt“, heißt **Polasymptote**.

Das Verhalten einer Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung ihrer Polstellen kann mithilfe des links- und rechtsseitigen Grenzwerts von f für $x \rightarrow x_0$ ermittelt werden:

Beispiel D 44:

Es ist das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2}$ in der Umgebung ihrer Polstelle zu untersuchen. Polstelle: $x_0 = 2$ Gleichung der Polasymptoten: $x = 2$ (vgl. Beispiel C 16)

Nähert man sich von links an die Polstelle $x_0 = 2$, so kann man folgender Wertetabelle eine Vermutung über das Verhalten der Funktionswerte entnehmen:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	... $\rightarrow 2$
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{-0,1} = -10$	$\frac{1}{-0,01} = -100$	$\frac{1}{-0,001} = -1000$	$\frac{1}{-0,0001} = -10000$... $\rightarrow -\infty$

Zum Beweis dieser Vermutung definiert man eine von links gegen 2 konvergierende Folge und berechnet den zugehörigen Grenzwert der Funktionswerte:

$$(x_n) = (2 - h_n) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \text{ und } h_n > 0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-h_n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-h_n} = -\infty$$

Nähert man sich von rechts an die Polstelle $x_0 = 2$, so kann man der Wertetabelle wieder eine Vermutung über das Verhalten der Funktionswerte entnehmen:

x	2,1	2,01	2,001	2,0001	... $\rightarrow 2$
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{0,1} = 10$	$\frac{1}{0,01} = 100$	$\frac{1}{0,001} = 1000$	$\frac{1}{0,0001} = 10\,000$... $\rightarrow \infty$

Zum Beweis definiert man eine von rechts gegen 2 konvergierende Folge und berechnet wieder den zugehörigen Grenzwert der Funktionswerte:

$$(x_n) = (2 + h_n) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \text{ und } h_n > 0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+h_n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} = \infty$$

Mithilfe der in obigem Beispiel gewonnenen Resultate kann man den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x-2}$ skizzieren (Fig. D 72a). Die Fig. D 72b – d geben die weiteren drei typischen Möglichkeiten für die Annäherung des Graphen einer gebrochenrationalen Funktion an eine Polstelle wieder.

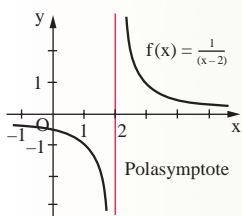


Fig. D 72a

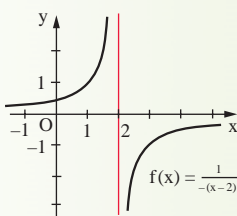


Fig. D 72b

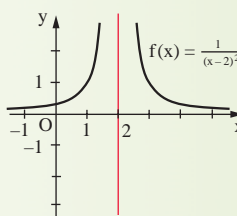


Fig. D 72c

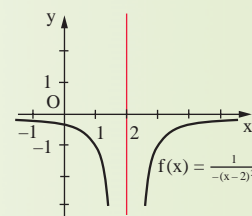


Fig. D 72d

• Sprünge

Eine Funktion hat an einer Stelle x_0 eine „endliche Sprungstelle“, wenn bei der Annäherung an x_0 die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte der Funktionswerte endliche Werte annehmen, aber nicht übereinstimmen:

D 45

Beispiel D 45:

Man untersuche das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x}{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Für $x_0 = 0$ gilt $u(x_0) = v(x_0) = 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{-x} = -1 \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$$

An der Stelle $x_0 = 0$ befindet sich eine endliche Sprungstelle.

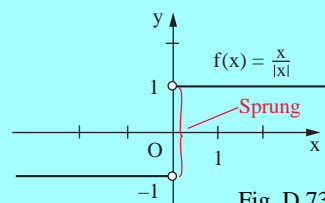


Fig. D 73

• Lücken

Sind bei einer gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ an einer Stelle x_0 sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion gleich 0, so liegt ebenfalls eine **Definitionslücke** vor. Der Funktionsgraph mündet in diesem Fall an der Stelle x_0 von links und von rechts in ein „Loch“ (vgl. Beispiel A 11). In einem solchen Fall können nach Satz A 1 die Zähler- und die Nennerfunktion jeweils in ein Produkt aus dem Faktor $(x - x_0)^n$ (wenn x_0 eine genau n-fache Nullstelle von u und v ist) und einer Restfunktion $u_1(x)$ bzw. $v_1(x)$ zerlegt werden. Es gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(x - x_0)^n \cdot u_1(x)}{(x - x_0)^n \cdot v_1(x)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1), \text{ woraus man für } x \neq x_0 \text{ durch Kürzen eine neue Funktion}$$

$$f^*(x) = \frac{u_1(x)}{v_1(x)} \text{ mit } v_1(x_0) \neq 0 \text{ erhält. Der Graph von } f \text{ ist mit dem von } f^* \text{ identisch – mit Ausnahme der}$$

Stelle x_0 , wo der Graph von f eine Lücke, ein „Loch“ aufweist. Die Stelle x_0 wird in diesem Falle **hebbare Definitionslücke** oder **hebbare Unstetigkeitsstelle** von f genannt. Definiert man $f(x_0)$ als $f^*(x_0)$, so wird die Lücke gleichsam „geschlossen“, die Funktion f wird **stetig ergänzt**. Im Gegensatz zu obigem Fall gehören Polstellen und Sprünge zu den nicht hebbaren Unstetigkeitsstellen.

D 46

Beispiel D 46:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x-2)(x+2)^2}{(x+2)^2} \Rightarrow \text{für } x \neq -2: f^*(x) = x - 2$$

Die Definitionslücke ist $x_0 = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

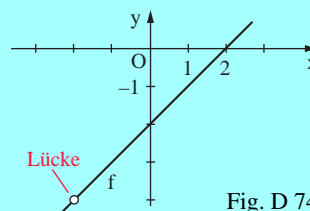


Fig. D 74

$$\text{Für } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(x - x_0)^m \cdot u_1(x)}{(x - x_0)^n \cdot v_1(x)} \quad (u_1(x_0), v_1(x_0) \neq 0) \text{ und } m > n \text{ hat } f \text{ an der Stelle } x_0 \text{ eine Nullstelle,}$$

für $m < n$ eine Polstelle.

D 5.6 Kurvendiskussionen an Beispielen

Unter einer Kurvendiskussion versteht man das Ermitteln der charakteristischen Stellen (bzw. der entsprechenden Punkte) und das Auffinden der typischen Eigenschaften einer durch eine Gleichung gegebenen Funktion, woran sich meist die Darstellung des Graphen der Funktion mithilfe der gefundenen Merkmale anschließt. In der Regel sollte die Diskussion einer Funktion bzw. ihres Graphen (oder ihrer Kurve) in folgender Weise vorgenommen werden:

- (1) Bestimmen des (größtmöglichen) Definitionsbereiches,
- (2) Untersuchen auf Symmetrieeigenschaften,
- (3) Untersuchen des Verhaltens im Unendlichen (Ermitteln der Asymptoten),
- (4) Untersuchen auf Stetigkeit/Unstetigkeit,
- (5) Bestimmen der Nullstellen,
- (6) Ermitteln der Schnittpunkte mit der y-Achse,
- (7) Berechnen der lokalen Extrempunkte,
- (8) Ermitteln der Wendepunkte, ggf. auch der Wendetangenten
- (9) Zeichnen des Graphen.

Ein lückenloses Abarbeiten aller 9 Kriterien ist nicht immer notwendig.

• **Vollständige Diskussion einer ganzrationalen Funktion**

Allgemeiner Fall:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Ableitungen:

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \text{ usw.}$$

Spezielles Beispiel:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x; \quad f''(x) = 12x^2 - 4; \quad f'''(x) = 24x$$

(1) Definitionsbereich:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

(2) Symmetrieeigenschaften:

Gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D_f$, so ist f achsensymmetrisch zur y-Achse.

Gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$, so ist f punktsymmetrisch zu $P(0; 0)$.

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$$

f ist eine gerade Funktion. Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.

(3) Verhalten im Unendlichen:

Wir untersuchen $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^4 - 2x^2 + 1) = +\infty.$$

(4) Stetigkeit/Unstetigkeit:

Ganzrationale Funktionen sind in $D_f = \mathbb{R}$ stetig.

(5) Nullstellen:

Wir ermitteln die Lösungen x_0 der Gleichung $f(x_0) = 0$.

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind dann $P_x(x_0; 0)$.

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad \text{Substitution } u = x^2 \text{ liefert } u^2 - 2u + 1 = 0 \text{ mit der Lösung } u_{1/2} = 1.$$

$$\text{Also: } x^2 = 1 \text{ und damit } x_1 = 1, x_2 = -1.$$

f hat die Nullstellen $x_1 = 1, x_2 = -1$. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $P_1(1; 0)$ und $P_2(-1; 0)$.

(6) Schnittpunkte mit der y-Achse:

Wir bestimmen $y_s = f(0)$. Dann ist $P_y(0; y_s)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $P_3(0; 1)$.

(7) Lokale Extremstellen:

a) Es ist die Gleichung $f'(x) = 0$ zu lösen.

b) Ist x_E Lösung, dann berechnet man $f''(x_E)$.

c) Entscheidung:

$f''(x_E) < 0$: x_E ist Maximumstelle.

$f''(x_E) > 0$: x_E ist Minimumstelle.

$f''(x_E) = 0$: Entscheidung über VZW-Kriterium oder höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f .

$$\begin{aligned} \text{a) } 4x^3 - 4x &= 0, \text{ also } x \cdot (4x^2 - 4) = 0 \\ &\text{und damit } x_4 = 0 \text{ sowie wegen } 4x^2 - 4 = 0 \\ x^2 &= 1, \text{ also } x_5 = 1, x_6 = -1. \end{aligned}$$

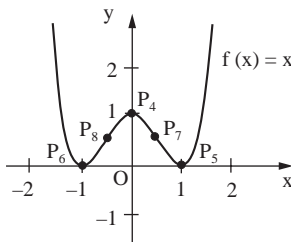
b), c)

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x_4 = 0 \text{ ist Maximumstelle.}$$

$$f''(1) = 8 > 0$$

$\Rightarrow x_5 = 1$ ist Minimumstelle, wegen Symmetrie auch x_6 .

$P_3(0; 1) = P_4(0; 1)$ ist Maximumpunkt.

	Da P_5 und P_1 bzw. P_6 und P_2 übereinstimmen, liegen die Minimumpunkte $P_5(1; 0)$ und $P_6(-1; 0)$ auf der x-Achse.
<p>(8) Wendepunkte:</p> <p>a) Es ist die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen.</p> <p>b) Ist x_w Lösung, dann Berechnung von $f'''(x_w)$.</p> <p>c) Entscheidung: $f'''(x_w) \neq 0$: x_w ist Wendestelle. $f'''(x_w) = 0$: Entscheidung über VZW-Kriterium oder höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f'</p> <p>Wendetangenten:</p> <p>a) Anstieg der Wendetangente: $m = f'(x_w)$</p> <p>b) Gleichung der Wendetangente: $m = \frac{y - y_w}{x - x_w}$</p>	<p>a) $12x^2 - 4 = 0$, also $x^2 - \frac{1}{3} = 0$ und damit $x_7 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $x_8 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.</p> <p>b), c) $f'''(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 8\sqrt{3} \neq 0$, d.h. $x_7 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist Wendestelle und wegen Symmetrie auch x_8. $P_7(\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{4}{9})$ und $P_8(-\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{4}{9})$ sind Wendepunkte.</p> <p>a) $m_7 = f'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 4 \cdot (\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 - 4 \cdot (\frac{1}{3}\sqrt{3})$ $= -\frac{8}{9}\sqrt{3}$ $m_8 = f'(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 4 \cdot (-\frac{1}{3}\sqrt{3})^3 - 4 \cdot (-\frac{1}{3}\sqrt{3})$ $= \frac{8}{9}\sqrt{3}$</p> <p>b) $t_7: -\frac{8}{9}\sqrt{3} = \frac{y - \frac{4}{9}}{x - \frac{1}{3}\sqrt{3}}$; $t_8: \frac{8}{9}\sqrt{3} = \frac{y - \frac{4}{9}}{x + \frac{1}{3}\sqrt{3}}$ $y = -\frac{8}{9}\sqrt{3}x + \frac{4}{3}$ und $y = \frac{8}{9}\sqrt{3}x + \frac{4}{3}$ sind die Gleichungen der Wendetangenten.</p>
(9) Graph:	 <p style="text-align: right;">Fig. D 75</p>
<p>• Vollständige Diskussion einer gebrochenrationalen Funktion</p>	
<p>Allgemeiner Fall:</p> $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ <p>Ableitungen nach Quotientenregel (Satz D 6)</p>	<p>Spezielles Beispiel:</p> $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ <p>Ableitungen:</p> $f'(x) = \frac{2-2x}{x^3}; f''(x) = \frac{4x-6}{x^4}; f'''(x) = \frac{24-12x}{x^5}$
(1) Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid v(x) = 0\}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

<p>(2) Symmetrieeigenschaften: Gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D_f$, so ist f achsensymmetrisch zur y-Achse. Gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$, so ist f punktsymmetrisch zu $P(0; 0)$.</p>	$f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x)^2} = \frac{-2x-1}{x^2} \neq f(x); \quad f(-x) \neq -f(x)$ <p>Es liegt keine Symmetrie vor.</p>
<p>(3) Verhalten im Unendlichen: Zu untersuchen ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Für $n < m$ ist $y = 0$ die Gleichung der Asymptote. Für $n = m$ ist $y = \frac{a_n}{b_n}$ die Gleichung der Asymptote. Für $n > m$ ist $f(x) = g(x) + e(x)$, und der Graph von g ist Asymptote.</p>	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = 0$ <p>Da $n < m$, ist $y = 0$ Asymptote.</p>
<p>(4) Stetigkeit/Unstetigkeit: $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine Polstelle, wenn $v(x_0) = 0$ und $u(x_0) \neq 0$.</p>	<p>Nur für $x_1 = 0$ ist $v(x_1) = 0$ und $u(x_1) \neq 0$.</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2h_n-1}{h_n^2} \quad \text{mit } h_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} (2h_n - 1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n^2} = -1 \cdot \infty = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2h_n-1}{h_n^2} \quad \text{mit } h_n < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ $= -\infty$ <p>$x_1 = 0$ ist Polstelle.</p>
<p>(5) Nullstellen: Lösungen x_0 der Gleichung $u(x) = 0$, wenn $v(x_0) \neq 0$.</p>	$\frac{2x-1}{x^2} = 0, \text{ also } 2x-1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{1}{2};$ <p>x_2 ist Nullstelle, weil $v(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq 0$. $P_2(\frac{1}{2}; 0)$ ist Schnittpunkt mit der x-Achse.</p>
<p>(6) Schnittpunkte mit der y-Achse: $y_s = f(0)$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $P_y(0; y_s)$</p>	<p>$x = 0$ gehört nicht zum Definitionsbereich von f. Das bedeutet: Der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.</p>
<p>(7) Lokale Extremstellen:</p> <p>a) Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$, d.h., Zähler von f' muss 0 und Nenner von f' muss ungleich 0 sein.</p> <p>b) Ist x_E Lösung, dann berechnet man $f''(x_E)$.</p> <p>c) Entscheidung: $f''(x_E) < 0$: x_E ist Maximumstelle. $f''(x_E) > 0$: x_E ist Minimumstelle. $f''(x_E) = 0$: Entscheidung über VZW-Kriterium, Monotonieverhalten von f oder höhere Ableitungen.</p>	<p>a) $\frac{2-2x}{x^3} = 0$, also $2x = 2$ und $x_3 = 1$.</p> <p>b) $f''(1) = -2$</p> <p>c) $f''(1) = -2 < 0$ $\Rightarrow x_3 = 1$ ist Maximumstelle und $P_3(1; 1)$ Maximumpunkt.</p>

(8) Wendepunkte:

- a) Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$
(Zähler = 0, Nenner $\neq 0$).
- b) Ist x_w Lösung, dann Berechnung von $f'''(x_w)$.
- c) Entscheidung:
 $f'''(x_w) \neq 0$: x_w ist Wendestelle.
 $f'''(x_w) = 0$: Entscheidung über VZW-Kriterium, höhere Ableitungen oder Monotonieverhalten von f' .

Wendetangenten:

- a) Anstieg: $m = f'(x_w)$

b) Gleichung: $m = \frac{y - y_w}{x - x_w}$

a) $\frac{4x-6}{x^4} = 0$, also $4x = 6$ und $x_4 = \frac{3}{2}$.

b) $f'''(\frac{3}{2}) = \frac{(24-18)}{3^5} \cdot 25 = \frac{6 \cdot 2^5}{3^5}$

c) $f'''(\frac{3}{2}) \neq 0$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{3}{2} \text{ ist Wendestelle}$$

$$\text{und } P_4(\frac{3}{2}; \frac{8}{9}) \text{ ist Wendepunkt.}$$

a) $m = f'(\frac{3}{2}) = \frac{2 - \frac{6}{2}}{\frac{27}{8}} = \frac{-1}{\frac{27}{8}} = -\frac{8}{27}$

b) $-\frac{8}{27} = \frac{y - \frac{8}{9}}{x - \frac{3}{2}}$, also $-\frac{8}{27}x + \frac{4}{9} = y - \frac{8}{9}$.

$$y = -\frac{8}{27}x + \frac{4}{3} \text{ ist die Gleichung der Wendetangente.}$$

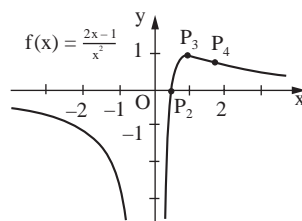
(9) Graph:

Fig. D 76

• Diskussion einer nichtrationalen Funktion

Bemerkung: Wir verzichten auf die Angabe eines allgemeinen Falles.

$$f(x) = \frac{x-1}{e^x}$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = \frac{2-x}{e^x}, f''(x) = \frac{x-3}{e^x}, f'''(x) = \frac{4-x}{e^x}$$

(1) Definitionsbereich:

Wegen $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $D_f = \mathbb{R}$.

(2) Symmetrieeigenschaften:

$$f(-x) = \frac{-x-1}{e^{-x}} \neq f(x);$$

$$f(-x) \neq -f(x);$$

Es liegt keine Symmetrie vor.

(3) Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{e^x} = 0, \text{ (Regel von DE L'HOSPITAL). } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^x} = -\infty, \text{ denn für negative } x \text{ ist } x-1 < 0, \text{ jedoch } e^x > 0.$$

(4) Stetigkeit/Unstetigkeit:

Wegen $e^x \neq 0$ gibt es keine Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen.

(5) Nullstellen:

Da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $x - 1 = 0$ für $x_1 = 1$, ist x_1 eine Nullstelle von f und $P_1(1; 0)$ der Schnittpunkt mit der x -Achse.

(6) Schnittpunkte mit der y-Achse:

$f(0) = \frac{-1}{e^0} = -1$; $P_2(0; -1)$ ist Schnittpunkt mit der y -Achse.

(7) Lokale Extremstellen:

$\frac{2-x}{e^x} = 0$, also $x_3 = 2$; $f''(2) \frac{2-3}{e^2} < 0 = \frac{-1}{e^2} < 0 \Rightarrow x_3 = 2$ ist Maximumstelle und

$P_3(2; \frac{1}{e^2} \approx 0,14)$ Maximumpunkt.

(8) Wendepunkte:

a) $\frac{x-3}{e^x} = 0$, also $x_4 = 3$.

b) $f'''(3) = \frac{4-3}{e^3} = \frac{1}{e^3} \neq 0 \Rightarrow x_4 = 3$ ist Wendestelle und $P_4(3; \frac{2}{e^3} \approx 0,1)$ Wendepunkt.

Wendetangenten:

a) $f'(3) = \frac{2-3}{e^2} = \frac{-1}{e^2} \approx -0,05$ b) $-0,05 = \frac{y-0,1}{x-3} \Rightarrow -0,05x + 0,15 = y - 0,1$

$y = -0,05x + 0,25$ ist die Gleichung der Wendetangente.

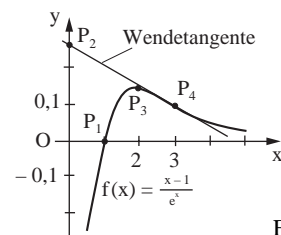
(9) Graph: (Darstellung im Intervall $0,5 \leq x \leq 5$)

Fig. D 77

Häufig betrachtet man bei Kurvendiskussionen Funktionen, die außer der unabhängigen Variablen x noch eine weitere Variable, einen Parameter enthalten. Diskutiert werden soll also nicht eine ganz bestimmte Funktion, sondern eine *Funktionenschar* (Fig. D 78).

Die Aufgabenstellung wird dabei gewöhnlich erweitert, z. B. um die Frage nach der Kurve (dem geometrischen Ort), auf der alle Extrempunkte bzw. Wendepunkte der Kurvenschar liegen, oder danach, für welchen Wert des Parameters der Anstieg der Kurve in der Nullstelle am größten ist.

Beispiel D 47:

Gegeben ist die Funktionenschar mit der Funktionsgleichung $f_t(x) = x^3 - 6t^2x$ ($t \in \mathbb{R}, t \geq 0$).

- Die Funktionen sind auf **Nullstellen**, lokale **Extrema** und **Wendepunkte** zu untersuchen.
- Es ist die **Gleichung der Kurve** zu ermitteln, auf der die lokalen Extrempunkte der Graphen aller Funktionen der Schar liegen.

c) Es ist der Wert t_1 für den Scharparameter t zu ermitteln, so dass der Graph der Funktion

- mit $t = t_1$ durch den Punkt $A(2; 2)$ verläuft;
- mit $t = t_2$ eine Wendetangente mit der Gleichung $y = -x$ besitzt;
- mit $t = t_3$ die positive Abszissenachse unter einem Winkel von 45° schneidet.

Zu a)

- Berechnung der Nullstellen:

$$f_t(x) = x^3 - 6t^2x = x(x^2 - 6t^2) = 0,$$

$$\text{also } x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{6}t, \quad x_3 = +\sqrt{6}t$$

- Berechnung der lokalen Extrempunkte:

$$f_t'(x) = 3x^2 - 6t^2; \quad f_t''(x) = 6x; \quad f_t'''(x) = 6 \neq 0$$

$$f_t'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6t^2 = 0, \quad \text{also } x_4 = \sqrt{2}t, \quad x_5 = -\sqrt{2}t$$

$$f_t''(\sqrt{2}t) = 6 \cdot \sqrt{2}t > 0 \text{ für } t \neq 0; \quad f_t(\sqrt{2}t) = -4\sqrt{2}t^3,$$

$$\text{also } \text{Min}(\sqrt{2}t; -4\sqrt{2}t^3)$$

$$f_t''(-\sqrt{2}t) = -6\sqrt{2}t < 0 \text{ für } t \neq 0; \quad f_t(-\sqrt{2}t) = 4\sqrt{2}t^3,$$

$$\text{also } \text{Max}(-\sqrt{2}t; +4\sqrt{2}t^3)$$

Für $t = 0$ ergibt sich $f_0(x) = x^3$. Diese Funktion hat keine lokalen Extrema.

- Berechnung der Wendepunkte:

$$f_t''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x_6 = x_1 = 0; \quad f_t'''(x_6) \neq 0 \Rightarrow W(0; 0) \text{ ist Wendepunkt für alle Scharcurven.}$$

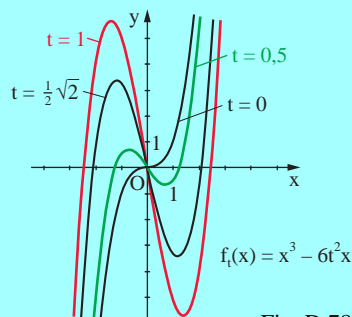


Fig. D 78

Zu b)

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten $\text{Max}(-\sqrt{2}t; 4\sqrt{2}t^3)$, $\text{Min}(\sqrt{2}t; -4\sqrt{2}t^3)$.

Um die Gleichung der Kurve zu erhalten, muss der Parameter t eliminiert werden. Die x -Koordinate $x = -\sqrt{2}t$ der Maxima nach t aufgelöst ergibt $t = -\frac{x}{\sqrt{2}}$. Setzt man diesen

Wert in die Beziehung $y = 4\sqrt{2}t^3$ für die y -Koordinate ein, so ergibt sich

$$y = 4\sqrt{2} \left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3 = -2x^3.$$

Zum gleichen Resultat gelangt man, wenn man die Koordinaten der lokalen Minimumpunkte verwendet. Das heißt: Die lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionenschar liegen auf dem Graphen der Funktion $f(x) = -2x^3$.

Zu c)

- t_1 : Einsetzen von $A(2; 2)$ in die Funktionsgleichung führt zu $2 = 2^3 - 6t_1^2 \cdot 2$, also $12t_1^2 = 6$ und damit $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, da $t \geq 0$.
- t_2 : Für alle t haben die Graphen der Funktionen den Wendepunkt $(0; 0)$. Da für die Tangente die Gleichung $y = -x$ gelten soll, beträgt der Anstieg der Wendetangente -1 .

$$f_t'(0) = -6t_2^2 = -1, \quad \text{also } t_2 = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \text{da } t \geq 0$$

- t_3 : Die positive Abszissenachse wird im Punkt $P_x(\sqrt{6}t; 0)$ geschnitten. Der Schnittwinkel soll 45° betragen, d. h., es gilt $m = \tan 45^\circ = 1$.

$$\text{Aus } f_{t_3}'(\sqrt{6}t_3) = 3(\sqrt{6}t_3)^2 - 6t_3^2 = 12t_3^2 = 1 \text{ erhält man } t_3 = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \text{da } t \geq 0.$$