В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний

Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2004

УДК 517.95:517.958:512.816

Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И.
Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 392 с.

Монография посвящена групповой классификации и построению точных решений линейных и нелинейных уравнений эволюционного типа. Книга предназначена для научных сотрудников — математиков и физиков, аспирантов и студентов старших курсов университетов и институтов соответствующих специальностей, которые интересуются применением теоретико-групповых методов к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными.

The book considers group classification and construction of exact solutions of linear and nonlinear evolution equations. The book is targeted at researchers – mathematicians and physicists, post-graduate and graduate students that are interested in application of group-theoretical methods to investigation of partial differential equations.

Рецензенты: *академик НАН Украины, д-р физ.-мат. наук О. С. Парасюк, д-р физ.-мат. наук, профессор В. Г. Самойленко*

ISBN 5-93972-338-1

http://rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие

Решение многих фундаментальных проблем требует построения и решения математических моделей процессов, которые исследуются. Во многих случаях понятию математическая модель процесса соответствуют некоторые определенные дифференциальные уравнения, решения которых позволяют с некоторой точностью описать этот процесс. Как правило, дифференциальные уравнения и дополнительные условия следуют как из общих законов, так и из специфических законов, которые присущи каждому конкретному процессу. Наиболее простые и, в то же время, наименее точные формулировки законов приводят, естественно, к линейным задачам математической физики.

В то же время достаточно часто описание процессов в терминах линейных уравнений является неудовлетворительным. Соответствующие математические модели "не чувствуют" более точных (нелинейных) эффектов, которые присущи исследуемому процессу. Итак, следующему (более тонкому) приближению реального процесса соответствует нелинейная математическая модель, для решения которой исследователи имеют довольно ограниченный математический аппарат.

Эта ситуация существенно изменяется, если нелинейное дифференциальное уравнение, соответствующее некоторой модели, имеет нетривиальные симметрийные свойства. В этом случае для исследования и построения решений уравнения можно использовать методы теоретико-группового анализа жизнедеятельных уравнений (см., например, монографии [30, 46, 49, 55, 100, 102], учебники [52, 53] и брошюры [26, 32]).

Истоки группового анализа дифференциальных уравнений находятся в фундаментальных работах Софуса Ли и его учеников [149–153]. Именно Ли создал и первым использовал механизмы теоретико-групповой редукции, когда решение исследуемого уравнения ищется в виде специальной подстановки (анзаца), которая сводит данное уравнение к дифференциальному уравнению с меньшим количеством независимых переменных.

Дальнейшее развитие теоретико-групповых методов дифференциальных уравнений, прежде всего, связано с работами таких математиков, как Г. Биркгоф [13], Л.И. Седов [63], А. Морган [157],

В.Г. Костенко [35], Л.В. Овсянников [47–51, 53, 54], Н.Х. Ибрагимов [28, 29] и ряда других. Итогом этого периода стала известная фундаментальная монография Л.В. Овсянникова [46], после выхода в свет которой в математической науке окончательно сформировалось важное направление, которое получило название "Групповой анализ дифференциальных уравнений". Следует отметить, что существенный вклад в развитие как классических, так и неклассических групповых методов исследования дифференциальных уравнений был осуществлен Киевской школой математиков, которую в середине семидесятых годов прошлого века создал В.И. Фущич (см., напр., монографии [74, 78, 84, 85, 89, 116, 117, 124, 127]).

Как правило, при построении математических моделей реальных процессов получают дифференциальные уравнения, симметрийные свойства которых неизвестны. Поэтому принципиально важной является чисто техническая задача нахождения наиболее широкой (максимальной) группы симметрии, которую допускает данное дифференциальное уравнение (или система уравнений).

На сегодняшний день изучены симметрийные свойства многих известных уравнений механики, газовой динамики, квантовой физики. Нужно отметить, что существенный вклад в решение этой проблемы внесли математики России (А.А. Бучнев [15], В.О. Бытев [16], Н.Х. Ибрагимов [27,31], В.Л. Катков [33], Э.В. Ленский [38], Л.В. Овсянников [47–50,54] и многие другие), а также Украины (В.И. Фущич и его ученики [73, 79, 81–83, 86, 88, 90, 94, 121, 123]). Подробный обзор результатов исследований симметрийных свойств ряда линейных и нелинейных дифференциальных уравнений можно найти в монографиях [46, 49, 55, 78, 84, 85, 116, 117, 127].

Оказалось, что многие дифференциальные уравнения, которые описывают реальные процессы, имеют нетривиальные симметрийные свойства. Следовательно, явно или неявно, во время отбора дифференциального уравнения в качестве математической модели некоторого процесса определенную роль играет симметрия. Это дает возможность эффективно использовать метод симметрийной редукции для построения решений таких уравнений. В частности, с использованием этого метода были получены широкие классы точных решений таких нелинейных уравнений: уравнений эйконала, д'Аламбера, Лиувилля [8–10, 136, 137], теплопроводности и Шредингера [7, 120, 129], Борна–Инфельда [87, 110], Буссинеска (из теории движения грунтовых вод) [68, 96], Монжа–Ампера [88, 110], полигармонических уравнений [62] и многих других нелинейных скалярных уравнений. Отметим, что именно проблеме симметрийной редукции и построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений посвящены монографии [74, 89, 124]. Использование метода симметрийной редукции позволило также получить и новые решения нелинейных систем дифференциальных уравнений, например уравнений газовой динамики [40,70], Навье–Стокса [59,118,119], Дирака [78,125,127,128], $SU(2)$ уравнений Янга–Миллса [122, 147, 190].

Прежде всего, в связи с эффективностью использования метода симметрийной редукции, актуальной является задача выделения из заданного класса дифференциальных уравнений тех, которые имеют высшие симметрийные свойства (задача групповой классификации дифференциальных уравнений). Решение этой задачи является важным не только с математической точки зрения, но и мотивируется возможностью использования результатов в разных прикладных проблемах. Дело в том, что дифференциальные уравнения, встречающиеся в разных прикладных задачах, содержат параметры и функции, которые не являются строго фиксированными (говорят: произвольные элементы в уравнении). В то же время уравнения, которые описывают некоторый процесс, должны быть достаточно простыми. В качестве критерия простоты можно выбрать требование, чтобы произвольный элемент имел такой вид, при котором уравнение допускает наиболее широкую группу инвариантности. Полное описание таких спецификаций произвольного элемента данного дифференциального уравнения и составляет смысл задачи групповой классификации дифференциальных уравнений (см., напр., [46]).

Именно этой задаче и посвящена настоящая монография. Основным объектом исследования являются линейные и нелинейные однородные уравнения эволюционного типа, которые имеют широкие применения в разных проблемах физики, техники, биологии, экономики.

Собственно говоря, оригинальную часть книги составляют второй и третий разделы. Первый раздел имеет вспомогательный характер и содержит ряд положений классического группового анализа дифференциальных уравнений. Фактически он содержит материал специального курса для студентов старших курсов, который в течение нескольких лет читает первый из авторов. Нам кажется, что он будет полезным для читателя, который впервые знакомится с положениями группового анализа. Здесь не ставится целью подробное и систематическое изложение основ группового анализа. При подборе материала были использованы монографии [46, 49, 55] и курсы лекций [52, 53], к которым мы и отсылаем читателя для более глубокого изучения данной теории.

Авторы искренне благодарны Р.З. Жданову за долголетнее сотрудничество в науке и согласие на публикацию ряда результатов, полученных совместно с ним. Также авторы благодарят Г. Лагно и В. Бойко за помощь в подготовке рукописи к публикации.

Глава 1

Основные понятия группового анализа дифференциальных уравнений

Как отмечалось в предисловии, первая глава имеет ознакомительный характер и содержит ряд основных понятий группового анализа дифференциальных уравнений, как-то: однопараметрическая группа преобразований, инфинитезимальный оператор группы, инварианты группы. Здесь мы также рассматриваем инфинитезимальный метод Ли–Овсянникова нахождения группы инвариантности данного дифференциального уравнения и проблему симметрийной редукции уравнений в частных производных, которые допускают нетривиальные группы (или, что то же самое, алгебры) инвариантности.

Кроме того, мы здесь останавливаемся и на некоторых сведениях из теории абстрактных групп и алгебр Ли, которые будем использовать во втором и третьем разделах.

1.1. Однопараметрические группы преобразований

Одним из основных понятий группового анализа дифференциальных уравнений являются понятия однопараметрической группы преобразований, инфинитезимального оператора группы и инварианта группы. Из рассмотрения этих понятий мы и начинаем изложение основных положений группового анализа дифференциальных уравнений.

1.1.1. Понятие однопараметрической группы преобразований

Пусть M — множество элементов произвольной природы. *Преобразованием множества M* называется взаимно-однозначное отображение M на M.

Совокупность $T = T(M)$ всех преобразований множества M составляет *группу*, в которой роль групповой операции (“умножения”)

играет композиция отображений, а роль “единицы” — тождественное преобразование I. Группа $T(M)$ называется группой преобразований множества M.

Пусть G — группа. *Представлением группы G в $T(M)$ называется групповой гомоморфизм $\pi : G \to T(M)$*. Это означает, что для каждого элемента $g \in G$ образ $\pi(g)$ является преобразованием множества M и для любых $g_1, g_2 \in G$ имеет место равенство

$$\pi(g_1) \circ \pi(g_2) = \pi(g_1 g_2).$$

Образ $\pi(G)$ группы G есть подгруппа группы $T(M)$, которую также называют представлением группы G в виде группы преобразований множества M.

Отображение $(x, g) \to \pi(g)(x)$ произведения $M \times G$ в множество M называется *действием группы G на множестве M*. Задание действия определяет на множестве M групповую структуру.

Представление $\pi : G \to T(M)$ называется *точным* (или *изоморфным*), если отображение π есть изоморфизм. Представление π является точным тогда и только тогда, когда равенство $\pi(g) = I$ имеет место лишь для единичного элемента e группы G. Представление (или действие) π называется *тривиальным*, если $\pi(g) = I$ для любого элемента $g \in G$.

В дальнейшем роль множества M будет играть евклидовое (псевдоевклидовое) пространство $\mathbb{R}^N$ и будут рассматриваться представления группы $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с групповой операцией сложения (то есть аддитивной группы $\mathbb{R}$) в группе $T = T\left(\mathbb{R}^N\right)$ преобразований пространства $\mathbb{R}^N$.

При этом произвольное представление $f : \mathbb{R} \to T\left(\mathbb{R}^N\right)$ будет называться локально точным, если найдется такой симметричный относительно нуля интервал $\triangle \subset \mathbb{R}$, что для $a \in \triangle$ равенство $f(a) = I$ возможно, когда $a = 0$.

Локально точное представление $f : \mathbb{R} \to T\left(\mathbb{R}^N\right)$ называется *однопараметрической группой преобразований* пространства $\mathbb{R}^N$.

В дальнейшем образ точки $a \in \mathbb{R}$ при преобразовании $f : \mathbb{R} \to T\left(\mathbb{R}^N\right)$ будем обозначать символом f_a. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ этот образ является преобразованием f_a пространства $\mathbb{R}^N$.

Соответствующее этому представлению действие f группы $\mathbb{R}$ на пространства $\mathbb{R}^N$ определяется формулой

$$f(x, a) = f_a(x).$$

Следовательно, в соответствии с данным определением, действие f определяет однопараметрическую группу $f(\mathbb{R})$ преобразований f_a пространства $\mathbb{R}^N$. При этом групповые свойства представления $f(\mathbb{R})$ равносильны таким свойствам отображения f:

1°) *$f(x,0)=x$ для всех $x\in\mathbb{R}^N$;*

2°) *$f(f(x,a),b)=f(x,a+b)$ для любых $a,b\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^N$;*

3°) *существует такой симметричный относительно нуля интервал $\triangle\subset\mathbb{R}$, что если $a\in\triangle$ и $f(x,a)=x$ для всех $x\in\mathbb{R}^N$, то $a=0$.*

Каждое отображение $f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ со свойствами 1°–3° задает однопараметрическую группу $f(\mathbb{R})$ преобразований пространства $\mathbb{R}^N$. Группа $f(\mathbb{R})$ называется *непрерывной группой*, если отображение $f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ является k раз непрерывно дифференцируемым (то есть принадлежит классу $C_k\left(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\right)$, где $0\leqslant k\leqslant\infty$).

В дальнейшем однопараметрическая непрерывная группа преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ будет обозначаться символом G^1. Если есть необходимость подчеркнуть, что рассматриваемая группа G^1 порождена отображением $f:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, будем пользоваться обозначением $G^1(f)$. Отображение f будем записывать формулой вида

$$\overline{x}=f(x,a).$$

Примеры однопараметрических групп

1. Группа сдвигов. Пусть $x_0\in\mathbb{R}^N$ — фиксированный ненулевой вектор. Задаваемое формулой

$$\overline{x}=x+ax_0\quad\left(x\in\mathbb{R}^N,\;\; a\in\mathbb{R}\right)$$

отображение f порождает однопараметрическую непрерывную группу преобразований пространства $\mathbb{R}^N$, которую называют группой сдвигов пространства $\mathbb{R}^N$ (говорят также: группой *трансляций*) в направлении вектора x_0.

Здесь выполнение свойств 1°–3° проверяется элементарно.

2. Группы линейных гомеоморфизмов. Линейные непрерывные обратимые преобразования пространства $\mathbb{R}^N$ образуют группу $GL\left(\mathbb{R}^N\right)$ линейных гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим задачу: найти все непрерывные группы $G^1\subset GL\left(\mathbb{R}^N\right)$ класса C_1.

Каждая такая группа определяется заданием представления $l:\mathbb{R}\to GL(\mathbb{R}^N)$ и порождается отображением

$$\overline{x}=l(a)\langle x\rangle\quad\left(x\in\mathbb{R}^N,\;\; a\in\mathbb{R}\right).$$

Для выполнения свойств 1°–3° необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$l(0)=I,\quad l(b)\circ l(a)=l(b+a).$$

Кроме этого, отображение l должно быть дифференцируемым. В частности, существует производная $\partial l(0)=u$, которая является фиксированным линейным отображением $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$. В результате дифференцирования равенства $l(b+a)=l(b)l(a)$ по параметру b в точке $b=0$ получаем соотношение

$$\partial l(a)=u\circ l(a). \tag{1.1}$$

Теперь задача сводится к построению решения l уравнения (1.1) с начальным условием $l(0)=I$. Это задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой хорошо известно:

$$l(a)=\exp(au)\quad(a\in\mathbb{R}).$$

Полученная формула и решает сформулированную задачу: однопараметрические группы $G^1\subset GL\left(\mathbb{R}^N\right)$ получаются, когда линейное отображение u пробегает пространство $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N\right)$ (здесь и дальше $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N\right)$ — пространство непрерывных линейных отображений $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$).

Заметим, что в каждой декартовой системе координат, в которой $x==\left(x^1,\ldots,x^N\right)$, линейному отображению $u\subset\mathcal{L}\left(R^N\right)$ соответствует квадратная $N\times N$-матрица (u). Пусть $(u)^*$ — транспонированная матрица относительно (u). Отображение u называется *симметричным*, если матрица (u) симметрична: $(u)^*=(u)$; отображение u называется *антисимметричным*, если матрица (u) антисимметрична: $(u)^*=-(u)$.

3. Группа растяжений. Пусть линейное отображение u является симметричным. Тогда существует такая система координат $x=\left(x^1,\ldots,\; x^N\right)$, в которой матрица (u) будет *диагональной*: $(u)=\operatorname{diag}\left(\lambda^1,\ldots,\lambda^N\right)$. Соответствующая матрица $l(a)=\exp(ua)$ также диагональная, а именно:

$$(l(a))=\operatorname{diag}\left(\exp\left(\lambda^1a\right),\ldots,\exp\left(\lambda^Na\right)\right).$$

Поэтому отображение, которое порождает группу G^1, будет иметь вид

$$\overline{x}^i=x^i\exp\left(\lambda^ia\right)\quad(i=1,\ldots,N).$$

Для каждого $a\in\mathbb{R}$ соответствующее преобразование пространства $\mathbb{R}^N$ называется *растяжением*. Следовательно, каждое симметричное отображение $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N\right)$ определяет некоторую группу растяжений G^1 пространства $\mathbb{R}^N$.

4. Группа вращений. Пусть теперь отображение u является антисимметричным. Тогда линейное преобразование $l(a)$ имеет такое свойство:

$$l(a)^*=\exp(au^*)=\exp(-au)=l(a)^{-1},$$

то есть $l(a)^*\circ l(a)=I$. Такие преобразования называют *ортогональными*.

В случае $N = 3$ ортогональные преобразования называют также *вращениями*. Здесь антисимметричное преобразование u заведомо имеет собственный вектор $x \in \mathbb{R}^3$, для которого $u\langle x\rangle = 0$. Тогда $l(a)\langle x\rangle = \exp(au)\langle x\rangle = x$ для любого $a \in \mathbb{R}$ и существует система координат, в которой $x = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, такая, что $x = (0, 0, 1)$. В этой системе координат матрица $(l(a))$ имеет вид:

$$(l(a)) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует группа G^1 вращений вокруг оси $\left(x^3\right)$, которая определяется вектором x, задаваемым формулами

$$\overline{x}^1 = x^1 \cos a - x^2 \sin a, \quad \overline{x}^2 = x^1 \sin a + x^2 \cos a, \quad \overline{x}^3 = x^3.$$

Пример 4 показывает, что введение интервала $\triangle$ в условие 3° нетривиальности представления является существенным. В частности, в данном случае можно положить $\triangle = (-\pi; \pi)$.

Для задач группового (симметрийного) анализа класс однопараметрических групп оказывается узким. Дело в том, что групповой анализ связан с решением нелинейных задач, вследствие чего возникают порождающие отображения f, которые, вообще говоря, не определены на всем пространстве $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Расширение класса однопараметрических групп достигается за счет сужения множества, на котором рассматривается порождающее отображение. В качестве такого множества обычно берут $V \times \triangle$, где V — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^N$, а $\triangle$ — некоторый симметричный (относительно нуля) интервал из $\mathbb{R}$. В соответствии с этим выполнение свойств 2° и 3° для отображения $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ класса $C_\infty(V \times \triangle)$ требуется лишь для $x \in V$ и $a, b, a + b \in \triangle$. Полученное таким образом расширение класса однопараметрических групп дает возможность не интересоваться свойствами преобразований, которые составляют группу, вне множества V и для значений параметра a, которые выходят за пределы интервала $\triangle$. *Теория, которая основывается на таком расширении класса однопараметрических групп, называется локальной теорией*, которая имеет дело с *локальными преобразованиями* пространства $\mathbb{R}^N$. Этим термином называют преобразования открытых множеств $V \subset \mathbb{R}^N$, то есть такие отображения $v : V \to \mathbb{R}^N$, для которых $v(V)$ является открытым в $\mathbb{R}^N$ и отображение $v : V \to v(V)$ является взаимно-однозначным. Пусть $\triangle$ — интервал в $\mathbb{R}$, симметричный относительно нуля. Отображение $f : V \times \triangle \to \mathbb{R}^N$ называется однопараметрическим семейством локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$, если для каждого $a \in \triangle$ частичное отображение $f : V \to \mathbb{R}^N$ является преобразованием открытого множества V.

Основу группового анализа дифференциальных уравнений составляет объект, суть которого зафиксирована в следующем **определении**.

Локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ называется такое однопараметрическое семейство локальных преобразований $f : V \times \triangle \to \mathbb{R}^N$, которое имеет следующие свойства:

1°) $f(x, 0) = x$ *для всех* $x \in V$;

2°) $f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$ *для всех* $a, b, a + b \in \triangle$, $x \in \mathbb{R}^N$;

3°) *Если* $a \in \triangle$ *и* $f(x, a) = x$ *для всех* $x \in V$, *то* $a = 0$;

4°) $f \in C_\infty(V \times \triangle)$.

Сравнение со сформулированным выше определением однопараметрической группы преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ показывает, что каждая такая группа является локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$. Поэтому, в дальнейшем, локальную однопараметрическую группу Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ будем также обозначать символом G^1 и, для компактности изложения, называть просто группой G^1.

Данное определение показывает, что отображение $f : V \times \triangle \to \mathbb{R}^N$, которое порождает группу G^1, можно называть *локальным действием* аддитивной группы $\mathbb{R}$ на пространстве $\mathbb{R}^N$. При этом группа G^1 может рассматриваться как представление $f(\triangle) \subset T\left(\mathbb{R}^N\right)$, элементами которого являются локальные преобразования $f_a : V \to \mathbb{R}^N$ пространства $\mathbb{R}^N$. Эту терминологию мы будем употреблять в дальнейшем изложении.

Далее остановимся на понятии подобия групп. Пусть $\pi : M \times G \to M$ — действие группы G на множестве M и $p : M \to M$ — некоторое преобразование множества M. Нетрудно проверить, что отображение $\pi_1 : M \times G \to M$, которое определяется формулой

$$\pi_1(g) = p \circ \pi(g) \circ p^{-1}, \tag{1.2}$$

также задает действие группы G на M. Очевидно, что заданное формулой (1.2) отношение $\pi_1 \sim \pi$ является теоретико-множественным признаком эквивалентности.

Если действия π_1 и π группы G на множестве M эквивалентны ($\pi_1 \sim \pi$), то соответствующие им представления $\pi_1(G)$ и $\pi_2(G)$ в группе $T(M)$ называются *подобными*.

Эта терминология переносится и на группы G^1, поскольку их можно рассматривать как локальные представления аддитивной группы R в $T\left(\mathbb{R}^N\right)$. Поскольку элементами группы G^1 являются локальные преобразования пространства $\mathbb{R}^N$, то для точного определения подобия таких групп нужно учитывать те открытые множества, на которых определены соответствующие отображения.

Пусть отображение $f_i : V_i \times \triangle_i \to \mathbb{R}^N$ порождает группу G_i^1 $(i = 1, 2)$. Рассматривается совокупность $H(V_1, V_2)$ всевозможных преобразований класса C_∞ множества V_1 на множество V_2, то есть таких взаимно-однозначных отображений $p : V_1 \to V_2$, для которых $p \in C_\infty(V_1)$, $p^{-1} \in C_\infty(V_2)$. Пусть, наконец, f_{ia} — элементы группы G_i^1, как реализации $f_i(\triangle_i)$ $(i = 1, 2)$.

Группы G_1^1 и G_2^1 *называются подобными, если существуют преобразование* $p \in H(V_1, V_2)$ *и интервал* $\triangle \subset \triangle_1 \cap \triangle_2$ *такие, что для всех* $a \in \triangle$ *имеет место равенство*

$$f_{2a} = p \circ f_{1a} \circ p^{-1}. \tag{1.3}$$

Как **пример** рассмотрим группу растяжений G_1^1, которая, как представление $f_1(\mathbb{R})$ в $T\left(\mathbb{R}^N\right)$, действует в системе координат $x = \left(x^1, \ldots, x^N\right)$ в соответствии с формулой

$$f_{1a}^i(x) = x^i \exp\left(a\lambda^i\right) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

и рассматривается на множестве $V = \{x \mid x^i > 0,\ i = 1, \ldots, N\}$.

В этой же системе координат задано следующее преобразование $p\colon V \to X$:

$$p^i(x) = \ln x^i, \quad p^{-1}(x) = \exp x^i \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Тогда с помощью преобразования p, в соответствии с формулой (1.3), получаем подобную группу G_2^1 как представление $f_2(\mathbb{R})$, элементы которого определяются равенством

$$\overline{x} = f_{2a}(x) = p \circ f_{1a} \circ p^{-1}(x).$$

Непосредственными вычислениями получаем, что

$$\overline{x}^i = \ln\left(\left(f_{1a} \circ p^{-1}\right)^i (x)\right) = \ln\left(f_{1a}^i\left(p^{-1}(x)\right)\right) =$$
$$= \ln\left(p^{-1i}(x) \exp\left(a\lambda^i\right)\right) = \ln\left(\left(\exp x^i\right)\left(\exp a\lambda^i\right)\right) = x^i + a\lambda^i,$$

то есть в векторной записи $\overline{x} = x + a\lambda$, где $\lambda = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^N\right)$ — фиксированный вектор пространства $\mathbb{R}^N$. Следовательно, группа G_2^1 является группой сдвигов пространства $\mathbb{R}^N$. Тем самым показано, что группа растяжений пространства $\mathbb{R}^N$ подобна группе сдвигов пространства $\mathbb{R}^N$.

1.1.2. Касательное векторное поле. Уравнения Ли

Пусть группу G^1 порождает отображение

$$f = f(x, a). \tag{1.4}$$

Разложим функцию $f(x, a)$ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности $a = 0$. Согласно свойству 1° $f(x, 0) = x$, поэтому, введя обозначение

$$\xi(x) = \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\Big|_{a=0}, \tag{1.5}$$

можем записать

$$\overline{x} = x + \xi(x)a + o(a). \tag{1.6}$$

Следующая теорема (теорема Ли) утверждает, что первыми двумя членами разложения однозначно определяется функция $f(x, a)$, которая удовлетворяет групповому свойству 2°. Также говорят, что группа G^1 определяется своим касательным векторным полем ξ, поскольку формула (1.5) задает касательный вектор в точке x к кривой, которую описывают точки $\overline{x}$ в результате группового преобразования (1.4).

Теорема 1.1. *Пусть функция $f(x, a)$ удовлетворяет групповому свойству 2° и имеет место разложение* (1.6). *Тогда она является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (которое называют уравнением Ли) с начальным условием:*

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad f|_{a=0} = x. \tag{1.7}$$

Наоборот, для любого гладкого векторного поля $\xi(x)$ решение задачи Коши (1.7) *удовлетворяет групповому свойству* 2°.

Доказательство. Пусть выполняется групповое свойство 2°. Придавая параметру a приращение $\triangle a$, запишем равенство 2° в виде

$$f(x, a + \triangle a) = f(f(x, a), \triangle a).$$

Далее, выделив главную линейную часть по $\triangle a$, имеем:

$$f(x, a + \triangle a) = f(x, a) + \frac{\partial f}{\partial a} \triangle a + o(\triangle a),$$

$$f(f(x, a), \triangle a) = f(x, a) + \frac{\partial f}{\partial \triangle a}\Big|_{\triangle a=0} \cdot \triangle a + o(\triangle a).$$

Записав

$$\frac{\partial f(f(x,a),\triangle a)}{\partial \triangle a}\Big|_{\triangle a=0} = \xi(f(x,a)),$$

в соответствии с (1.5) приходим к уравнению Ли

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = \xi(f(x,a)).$$

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $f(x,a)$ — решение задачи (1.7). Учитывая локальный характер решения, зафиксируем значение параметра a и рассмотрим две функции:

$$u(b) = f(\overline{x},b) \equiv f(f(x,a),b),$$
$$v(b) = f(x,a+b).$$

Для них, в соответствии с уравнением Ли, имеем равенства:

$$\frac{du}{db} = \frac{df(\overline{x},b)}{db} = \xi(u), \quad u\big|_{b=0} = f(x,a),$$
$$\frac{dv}{db} = \frac{df(x,a+b)}{db} = \xi(v), \quad v\big|_{b=0} = f(x,a).$$

Отсюда следует, что функции $u(b)$, $v(b)$ удовлетворяют одну и ту же задачу Коши, вследствие единственности решения которой $u(b) = v(b)$, то есть имеет место равенство 2°. ■

При определении однопараметрической группы мы исходили из того, что групповая операция есть сложение (имеет место свойство 2°). Предположим, что группу G порождает отображение (1.4), для которого групповая операция определяется равенством

$$f(\overline{x},b) = f(f(x,a),b) = f(x,\varphi(a,b)), \tag{1.8}$$

где $\varphi(a,b)$ — достаточное количество раз дифференцируемая функция. При этом полагаем, что тождественное преобразование имеет место для $a = 0$, то есть выполняются условия

$$\varphi(a,0) = a, \quad \varphi(0,b) = b. \tag{1.9}$$

Дифференцирование по b левой и правой частей (1.8) дает

$$\frac{\partial f(\overline{x},b)}{\partial b} = \frac{\partial f(x,c)}{\partial c}\cdot\frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b},$$

где $c = \varphi(a,b)$. Положив теперь $b = 0$ и учитывая, что вследствие (1.9) $c = a$, получаем такое равенство:

$$\frac{\partial f(\overline{x},b)}{\partial b}\Big|_{b=0} = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\cdot\left[\frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b}\right]\Big|_{b=0}.$$

Здесь второй множитель справа равняется 1 для $a = 0$, а следовательно, он отличен от нуля для малых значений a вследствие непрерывности. Поэтому положим

$$\frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b}\Big|_{b=0} = \frac{1}{A(a)} \tag{1.10}$$

и, обозначив $\xi(x) = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\Big|_{a=0}$, запишем полученное равенство в виде

$$\xi(\overline{x}) = \frac{1}{A(a)}\cdot\frac{d\overline{x}}{da}$$

или

$$\frac{d\overline{x}}{d\overline{a}} = \xi(\overline{x}),$$

где новый параметр $\overline{a}$ определяется формулой

$$\overline{a} = \int\limits_0^a A(a)da. \tag{1.11}$$

Следовательно, для параметра $\overline{a}$ (его называют *каноническим параметром*) мы пришли к уравнению Ли (1.7). Поэтому, в соответствии с теоремой 1.1, отсюда следует, что в этой параметризации закон групповой операции совпадает со сложением.

Из проведенных выше соображений следует, что описав однопараметрические группы с групповой операцией сложения, мы тем самым опишем все однопараметрические группы.

Например, для преобразований растяжения

$$\overline{x} = x + ax$$

закон групповой операции имеет вид

$$\varphi(a,b) = a + b + ab.$$

Из формулы (1.10) получаем, что

$$A = \frac{1}{a+1},$$

а по формуле (1.11) — канонический параметр принимает вид

$$\overline{a} = \int\limits_0^a \frac{da}{1+a} = \ln(1+a).$$

Учитывая локальный характер преобразований, убеждаемся, что проведенные выше вычисление имеют смысл.

1.1.3. Инфинитезимальный оператор группы. Инварианты группы

Одним из применений теоремы Ли является ее использование для построения группы G^1 по заданному векторному полю. В конечномерном случае это построение связано с интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7), что может оказаться непростой задачей. Но во многих случаях, важных для практики, такое интегрирование удается провести.

Рассмотрим простой **пример**, когда векторное поле в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \langle t, x, u\rangle$ задано формулой

$$\xi = (0, t, 1).$$

Соответствующая система уравнений (1.7) имеет вид

$$\frac{d\overline{t}}{da} = 0, \quad \overline{t}(0) = t,$$

$$\frac{d\overline{x}}{da} = \overline{t}, \quad \overline{x}(0) = x,$$

$$\frac{d\overline{u}}{da} = 1, \quad \overline{u}(0) = u$$

и легко интегрируется. Решением задачи Коши будут функции

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x + at, \quad \overline{u} = u + a.$$

В механике, где t — время, x — пространственная координата, а u — скорость, полученная группа G^1 называется группой галилеевских сдвигов вдоль оси Ox.

Теорема Ли устанавливает определенное соответствие между группами G^1 и векторными полями ξ. Возникает вопрос: является ли такое соответствие взаимно однозначным? Очевидно, что данному векторному полю ξ отвечает одна определенная группа G^1. Это вытекает из теоремы Ли. Но обратное неверно. В самом деле, нетрудно убедиться, что векторным полям ξ и $\lambda\xi$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) соответствует одна и та же группа G^1.

Можно показать, что этим и исчерпывается неоднозначность соответствия групп G^1 и векторных полей ξ. Действительно, в соответствии с определением, эта неоднозначность определяется возможностью введения разных *аддитивных структур* на $\mathbb{R}$. Но если преобразование $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вводит новую аддитивную структуру на $\mathbb{R}$, то для любых $a, b \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b).$$

Хорошо известно, что каждое непрерывное в нуле решение этого функционального уравнения имеет вид $\mu(a) = \lambda a$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Это и есть тот набор аддитивных структур на $\mathbb{R}$, который был рассмотрен выше.

Проведенные рассуждения показывают, что *существует взаимно однозначное соответствие между группами G^1 и векторными полями ξ, которые рассматриваются с точностью до произвольного ненулевого числового множителя.* Это соответствие в дальнейшем мы будем обозначать $G^1(\xi)$.

Остановимся теперь более подробно на определении *касательного векторного поля* группы G^1.

Пусть задана группа G^1, которая порождается отображением f: $V \times \triangle \to \mathbb{R}^N$. Для каждого фиксированного $x \in V$ частичное отображение $f_x : \triangle \to \mathbb{R}^N$ определяет некоторую кривую в пространстве $\mathbb{R}^N$, которая проходит через точку x, то есть одномерное многообразие $f_x(\triangle)$, которое задано параметрически уравнением

$$\overline{x} = f_x(a) = f(x, a).$$

Кривая $f_x(\triangle)$ называется *орбитой точки x.*

Вектор $\xi = \partial f_x(0)$ является касательным к орбите $f_x(\triangle)$ в точке x.

Тем самым на V определено векторное поле $\xi : V \to \mathbb{R}^N$, которое действует по формуле

$$\xi_a(x) = \partial_a f(x, 0). \tag{1.12}$$

Это векторное поле называют касательным векторным полем группы G^1.

При переходе от группы $G^1_1(f_1)$ к подобной ей группе $G^1_2(f_2)$, с помощью преобразования p, касательное векторное поле ξ_1 группы G^1_1 превращается в касательное векторное поле ξ_2 группы G^1_2. Для вывода соответствующей формулы перехода $\xi_1 \to \xi_2$ надо продифференцировать равенство

$$f_{2a} = p \circ f_{1a} \circ p^{-1}$$

по параметру a в точке $a = 0$. Вследствие определения (1.12), с учетом равенства $f(x, 0) = x$, это дает

$$\xi_2(x) = \partial p \left(p^{-1}(x)\right) \langle \xi_1 \left(p^{-1}(x)\right)\rangle$$

или, в более простой форме записи,

$$\xi_2(\overline{x}) = \partial p(x)\langle \xi_1(x)\rangle, \quad \overline{x} = p(x). \tag{1.13}$$

Формула (1.13) называется *формулой подобия векторных полей.*

Например, при переходе от группы растяжений G^1_1

$$f^i_{1a}(x) = x^i \exp\left(a\lambda^i\right) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

к подобной ей группе с помощью преобразования $p : V \to \mathbb{R}^N$

$$p^i(x) = \ln\left(x^i\right) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

производная $\partial p(x)$ в матричной записи имеет вид

$$(\partial p(x)) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x^1}, \ldots, \frac{1}{x^N}\right).$$

Поэтому формула (1.13) дает

$$\xi_2(\overline{x}) = \partial p(x)\langle\left(\lambda^1 x^1, \ldots, \lambda^N x^N\right)\rangle = \langle\lambda^1, \ldots, \lambda^N\rangle = \lambda$$

— постоянное касательное векторное поле группы сдвигов.

Пусть, теперь, $f : V \times \triangle \to \mathbb{R}^N$ — отображение, которое порождает группу $G^1(\xi)$, и пусть $\tilde{\mathbb{R}}^M$ — M-мерное евклидово пространство. Будем рассматривать значения дифференцируемого отображения $F : \mathbb{R}^N \to \tilde{\mathbb{R}}^M$ на орбите точки $x \in V$, которые равны $F \circ f(x, a)$.

Вследствие определения (1.12) "скорость" изменения этих значений в точке $a = 0$ определяется формулой

$$\partial_a(F \circ f(x, a))\big|_{a=0} = \partial F(x)\langle\xi(x)\rangle.$$

В случае когда $\tilde{\mathbb{R}}^M = \mathbb{R}$ (то есть $F(x)$ — скаляр), правую часть равенства можно записать в виде $\xi \cdot \partial F(x)$ (точкой обозначено скалярное произведение векторов ξ и $\partial F(x)$), то есть как результат действия на отображение F линейного дифференциального оператора $\xi \cdot \partial$. Это обозначение удобно перенести и на общий случай, руководствуясь таким определением.

Линейный дифференциальный оператор $\xi \cdot \partial$, который действует на отображение $F : \mathbb{R}^N \to \tilde{\mathbb{R}}^M$ по формуле

$$(\xi \cdot \partial)F(x) = \partial F(x)\langle\xi(x)\rangle, \tag{1.14}$$

называется инфинитезимальным оператором группы $G^1(\xi)$.

Слово "инфинитезимальный" означает "бесконечно малый". Его употребление является определенной данью старой классической теории, которая свободно оперировала бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

С помощью инфинитезимального оператора записывается главная линейная часть отображения F вдоль орбиты точки x:

$$F \circ f(x, a) = F(x) + a(\xi \cdot \partial)F(x) + O\left(a^2\right).$$

В случае N-мерного пространства $\mathbb{R}^N$ в системе координат, где $x = \left(x^1, \ldots, x^N\right)$, $\xi = \left(\xi^1, \ldots, \xi^N\right)$, нужно положить $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_N)$ (здесь и далее $\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial x_a}$). Тогда инфинитезимальный оператор запишется в виде (1.14)

$$\xi \cdot \partial = \xi^i \partial_i = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.15}$$

Отметим, что в (1.15) и далее, где это специально не оговорено, по повторяющимся индексам понимается суммирование в пределах их изменения, то есть

$$\xi^i \partial_i = \sum_{i=1}^{N} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В этом случае формула действия инфинитезимального оператора на отображение $F : \mathbb{R}^N \to \tilde{\mathbb{R}}^M$ приобретает обычный вид:

$$(\xi \cdot \partial)F = \xi^i \partial_i F = \xi^i \frac{\partial F}{\partial x^i}. \tag{1.16}$$

В конечномерном случае координатного представления векторов координаты касательного векторного поля ξ^i будут называться также координатами инфинитезимального оператора $\xi \cdot \partial$.

В дальнейшем изложении, как правило, прилагательное "инфинитезимальный" мы употреблять не будем, а будем использовать термин *оператор группы* или просто *оператор*. Обычно оператору группы дают то же название, которое каким то образом характеризует саму группу. Например:

оператор сдвигов: $\xi \cdot \partial = x_0 \cdot \partial = x_0^i \partial_i$;

оператор линейного преобразования: $\xi \cdot \partial = u\langle x \rangle \cdot \partial = u^i_j x^j \partial_i$;

оператор растяжения: $\xi \cdot \partial = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda^i x^i \partial_i$;

оператор вращения вокруг оси $\left(x^3\right)$: $\xi \cdot \partial = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2$.

Остановимся далее на понятии инвариантов группы G^1. При этом мы будем для упрощения формулировок "забывать", что вся рассматриваемая теория есть локальная.

Например, отображение f, которое порождает группу G^1, будет записываться как отображение

$$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N.$$

Также не всегда будет уточняться область определения векторного поля ξ и т.п.

Рассматриваются отображения $F : \mathbb{R}^N \to \tilde{\mathbb{R}}^M$, и предполагается, что группа $\mathbb{R}$ действует на $\tilde{\mathbb{R}}^M$ тривиально.

Отображение F называется инвариантом группы G^1, которая порождена отображением f, если для любых $(x, a) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$F(f(x, a)) = F(x). \tag{1.17}$$

Изучение инвариантов группы основывается на лемме, в которой предполагается, что $\xi \cdot \partial$ — инфинитезимальный оператор группы $G^1(\xi)$, и используется обозначение $\overline{x} = f(x, a)$.

Лемма 1.1. *Для любого отображения $F : \mathbb{R}^N \to \tilde{\mathbb{R}}^M$ класса $C_1\left(\mathbb{R}^N\right)$ и для любых $(x, a) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$\partial_a F(\overline{x}) = (\xi \cdot \partial) F(\overline{x}). \tag{1.18}$$

Доказательство. Равенство (1.18) вытекает из уравнения Ли (1.7) и определения инфинитезимального оператора (1.14), в соответствии с которыми

$$\partial_a F(\overline{x}) = \partial F(\overline{x})\langle \partial_a \overline{x} \rangle = \partial F(\overline{x})\langle \xi(\overline{x}) \rangle = (\xi \cdot \partial) F(\overline{x}).$$ ■

В следующей теореме сформулированы необходимые и достаточные условия того, что некоторое отображение $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ является инвариантом группы $G^1(\xi)$.

Теорема 1.2. *Отображение $F : \mathbb{R}^N \to \tilde{\mathbb{R}}^M$ класса $C_1\left(\mathbb{R}^N\right)$ является инвариантом группы $G^1(\xi)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathbb{R}^N$ выполняется равенство*

$$(\xi \cdot \partial) F(x) = 0. \tag{1.19}$$

Доказательство. Если F — инвариант, то имеет место равенство (1.17), дифференцирование которого по параметру a дает в правой части ноль, а в левой, вследствие (1.18), — левую часть равенства (1.19).

Наоборот, если выполняется равенство (1.19), то, вследствие (1.18), будет справедливым равенство $\partial_a F(\overline{x}) = 0$. Это означает, что вектор $F(\overline{x}) = F(f(x, a) \in \tilde{\mathbb{R}}^M$ не зависит от параметра a и равен своему значению при $a = 0$, то есть $F(\overline{x}) = F(x)$. Поэтому F — инвариант группы $G^1(\xi)$ вследствие определения (1.17). ■

Критерий инвариантности (1.19) совпадает с некоторым линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка. Поэтому любая группа G^1 в $\mathbb{R}^N$ имеет $N-1$ функционально независимых инвариантов [20, 36]. При этом любой другой инвариант этой группы является функцией этих $N - 1$ "базисных" инвариантов.

Набор функционально независимых скалярных инвариантов группы G^1, при помощи которых можно определить любой ее инвариант, называется функциональным базисом инвариантов группы G^1.

Заметим, что о функциональном базисе инвариантов есть смысл говорить лишь в случае конечномерного пространства $\mathbb{R}^N$. Если $\mathcal{J}_1, \ldots,\ \mathcal{J}_{N-1}$ составляют базис функциональных инвариантов группы G^1, то будем употреблять обозначение $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{N-1})$.

Как отмечалось выше, отыскание скалярных инвариантов группы $G^1(\xi)$ в случае $\mathbb{R}^N$, когда $\xi = \left(\xi^1, \ldots, \xi^N\right)$, сводится к построению решений уравнения

$$\xi^i \partial_i F = 0 \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{1.20}$$

Как известно [20], эта же задача может быть решена путем построения первых интегралов сопряженной с уравнением (1.20) (или еще говорят: характеристической для (1.20)) системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \cdots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}. \tag{1.21}$$

Если равенства

$$\mathcal{J}_1(x) = C_1, \ldots, \mathcal{J}_{N-1}(x) = C_{N-1} \quad (C_i = \text{const})$$

определяют первые интегралы системы (1.21), то в качестве базиса скалярных инвариантов группы $G^1(\xi)$ берут функции $\mathcal{J}_i(x)$ $(i = 1, \ldots, N-1)$.

Примеры инвариантов. Осуществим построение базиса скалярных инвариантов для некоторых из рассмотренных выше однопараметрических групп.

Группа сдвигов в $\mathbb{R}^N$. Здесь оператор — $x_0^i \partial_i$, поэтому система (1.21) имеет вид:

$$\frac{dx^1}{x_0^1} = \frac{dx^2}{x_0^2} = \cdots = \frac{dx^N}{x_0^N}.$$

Если предположить, что $x_0^N \not\equiv 0$, то первые интегралы этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют вид

$$x_0^N x^j - x_0^j x^N = C_j \quad (j = 1, \ldots, N-1)$$

и базис инвариантов составляют функции

$$\mathcal{J}_j = x_0^N x^j - x_0^j x^N \quad (j = 1, \ldots, N-1),$$

то есть

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(x_0^N x^1 - x_0^1 x^N, \ldots, x_0^N x^{N-1} - x_0^{N-1} x^N\right).$$

Группа линейных преобразований в $\mathbb{R}^N$. Здесь оператор — $u_j^i x^j \partial_i$. Если в соответствующую систему (1.21) ввести параметр t, то она перепишется в виде

однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx^i}{dt} = u_j^i x^j \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Процедура решения такой системы хорошо известна [39, 57, 61]. Пусть

$$x_k(t) = \left(x_k^1(t), \ldots, x_k^N(t)\right) \quad (k = 1, \ldots, N)$$

— фундаментальная система ее решений и пусть $\varphi_j^i(t)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $\left(x_k^i(t)\right)$. Если предположить, что уравнение $x^j \varphi_j^N(t) = 1$ разрешимо относительно t и его решением является $t = \alpha(x)$, то базис инвариантов будет иметь вид

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(x^i \left(\varphi_i^1 \circ \alpha\right)(x), \ldots, x^i \left(\varphi_i^{N-1} \circ \alpha\right)(x)\right).$$

Группа растяжений в $\mathbb{R}^N$. Оператор — $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda^i x^i \partial_i$, а поэтому система (1.21) имеет вид:

$$\frac{dx^1}{\lambda^1 x_0^1} = \cdots = \frac{dx^N}{\lambda^N x_0^N}.$$

Не уменьшая общности, можем положить $\lambda^N = 1$, и тогда получаем такой базис инвариантов:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(x^1 \left(x^N\right)^{-\lambda^1}, \ldots, x^{N-1} \left(x^N\right)^{-\lambda^{N-1}}\right).$$

Группа вращений в $\mathbb{R}^3$. Оператором вращения вокруг оси $\left(x^3\right)$ является оператор $-x^2\partial_1 + x^1\partial_2$, а поэтому система (1.21) имеет вид:

$$\frac{dx^1}{-x^2} = \frac{dx^2}{x^1} = \frac{dx^3}{0}.$$

Один первый интеграл очевиден: $x^3 = C_1$. Второй находим интегрированием уравнения $x^1 dx^1 + x^2 dx^2 = 0$:

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = C_2.$$

Поэтому базис инвариантов такой:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(x^3, \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right).$$

В дальнейшем изложении нам понадобится следующая простая, но полезная теорема.

Теорема 1.3. *Всякая группа G^1 преобразований $\overline{x} = F(x,a)$ в $\mathbb{R}^N$ некоторой невырожденной заменой переменных*

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x) \tag{1.22}$$

сводится к группе сдвигов вдоль оси $\overline{x}^N$.

Доказательство. Пусть группа G^1 имеет оператор

$$\mathrm{v} = \xi^i(x)\partial_i. \tag{1.23}$$

Из очевидного равенства

$$\xi^i(x)\partial_i = \xi^i \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j}$$

следует, что в результате замены переменных (1.22) оператор (1.23) приобретает вид

$$\overline{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\left(\overline{x}^i\right) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}.$$

Выберем любой набор $N-1$ функционально независимых инвариантов $J_1(x), \ldots, J_{N-1}(x)$ группы G^1 в качестве первых $N-1$ новых переменных $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^{N-1}$, а переменную $\overline{x}^N$ найдем из уравнения

$$\mathrm{v}\left(\overline{x}^N\right) = 1. \tag{1.24}$$

Полученная система функций

$$\overline{x}^1 = J_1(x), \quad \ldots, \quad \overline{x}^{N-1} = J_{N-1}(x), \quad \overline{x}^N = \overline{x}^N(x)$$

является функционально независимой и определяет искомую замену переменных (1.22). Действительно, в этих переменных оператор (1.23) имеет вид

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^N}$$

и определяет группу сдвигов вдоль оси $\overline{x}^N$. ■

Рассмотрим **пример** приведения группы вращений в $\mathbb{R}^3$ относительно оси $\left(x^3\right)$ к группе сдвигов. Здесь оператор (1.23) имеет вид

$$\mathrm{v} = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2.$$

В соответствии с теоремой 1.3 в качестве первых двух новых переменных нужно взять инварианты

$$\overline{x} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \overline{x}^3 = x^3,$$

а третью переменную (обозначим ее $\overline{x}^2$) — найти из уравнения (1.24):

$$-x^2 \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} = 1.$$

Записав характеристическую систему для этого неоднородного линейного уравнения

$$-\frac{dx^1}{x^2} = \frac{dx^2}{x^1} = \frac{d\overline{x}^2}{1},$$

нетрудно найти ее частное решение $\overline{x}^2 = \arctan \dfrac{x^2}{x^1}$. Следовательно, в переменных

$$\overline{x}^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \overline{x}^2 = \arctan \frac{x^2}{x^1}, \quad \overline{x}^3 = x^3$$

имеем

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2},$$

и преобразования группы вращений записываются в виде

$$\left(\overline{\overline{x}^1}\right) = \overline{x}^1, \quad \left(\overline{\overline{x}^2}\right) = \overline{x}^2 + a, \quad \left(\overline{\overline{x}^3}\right) = \overline{x}^3.$$

Остановимся далее на понятии инвариантности уравнений (пока что не дифференциальных).

Рассматривается $(N-s)$-мерная поверхность $M \subset \mathbb{R}^N$, задаваемая системой уравнений

$$F_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, s, \quad s \leqslant N. \tag{1.25}$$

Будем читать, что такое задание поверхности является регулярным, то есть $F_i(x)$ — гладкие действительные функции, а ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial F_k}{\partial x^i} \right\|_M \quad (k = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, N)$$

равен s.

Поверхность M называется *инвариантной* относительно группы G^1 преобразований

$$\overline{x} = f(x, a) = x + a\xi(x) + o(a), \tag{1.26}$$

если каждая точка x поверхности M преобразованием (1.26) перемещается по этой поверхности. Другими словами, если x — решение системы (1.25), то $\overline{x}$ — также ее решение:

$$F_i(\overline{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{1.27}$$

В соответствии с этим также говорят, что *система уравнений* (1.25) *инвариантна относительно группы* G^1 или что эта *система допускает* группу G^1.

Пусть, далее, оператор

$$\mathrm{v} = \xi^i(x)\partial_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

является инфинитезимальным оператором группы G^1.

Теорема 1.4. *Система уравнений* (1.25) *инвариантна относительно группы* G^1 *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{v}F_i\big|_M = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{1.28}$$

Доказательство. Пусть система (1.25) инвариантна относительно группы G^1. Тогда для каждой точки $x \in M$ и всех допустимых значений параметра a преобразований (1.26) выполняются равенства (1.27). Подставляя в эти равенства разложение

$$F_i(\overline{x}) = F_i(x) + a\xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} + o(a)$$

и учитывая, что

$$F_i(x) = 0,$$

получаем (1.28).

Пусть теперь, наоборот, выполнены равенства (1.28). Надо показать, что из этого следует выполнение равенств (1.27) для всех $x \in M$. Заметим сначала, что (1.27) есть не что иное, как условие касания вектора $\xi(x)$ к поверхности M в точке x. Из этой геометрической интерпретации следует, что вся конструкция сохраняется при любой невырожденной замене переменных (1.22). Поэтому мы можем сначала "выпрямить" поверхность M (взяв в замене (1.22) в качестве первых s функций $\overline{x}^i(x)$ левые части уравнений (1.25)) и задать ее уравнениями

$$x^k = 0; \quad k = 1, \ldots, s. \tag{1.29}$$

Тогда условие (1.28) упрощается и принимает вид

$$\xi^k\left(0, \ldots, 0, x^{s+1}, \ldots, x^N\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{1.30}$$

Мы хотим показать, что уравнения (1.29) сохранятся и после преобразования (1.26), то есть что

$$\overline{x}^k = 0, \quad k = 1, \ldots, s, \tag{1.31}$$

для всех точек $x = \left(0, \ldots, 0, x^{s+1}, \ldots, x^N\right)$. Для этого запишем уравнения Ли в виде

$$\frac{d\overline{x}^k}{da} = \xi^k\left(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^s, \overline{x}^{s+1}, \ldots, \overline{x}^N\right), \quad k = 1, \ldots, s, \tag{1.32}$$

$$\frac{d\overline{x}^{s+l}}{da} = \xi^{s+l}\left(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^N\right), \quad l = 1, \ldots, N - s, \tag{1.33}$$

а в качестве начального значения $\overline{x}|_{a=0} = x$ возьмем произвольную точку x из M, то есть $x = \left(0, \ldots, 0, x^{s+1}, \ldots, x^N\right)$. Тогда из условия (1.30) видно, что функции $\overline{x}^k \equiv 0$ ($k = 1, \ldots, s$) удовлетворяют уравнения (1.32) и начальные условия. Остальные функции $\overline{x}^{s+l}$ находятся из (1.33) после подстановки в него $\overline{x}^k = 0$. Вследствие единственности решения задачи Коши это означает выполнение (1.31) для всех $x \in M$, то есть инвариантность поверхности M. ■

Используя эту теорему следует помнить, что при доказательстве (а именно, при приведении уравнений (1.25) к виду (1.29)) существенно используется условие регулярности задания поверхности M уравнениями (1.25).

Остановимся далее на **примерах**, которые иллюстрируют разные особенности понятия инвариантной поверхности и критерия инвариантности. В них мы рассматриваем группы G^1 преобразований плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(x, y)$, которые заданы своими операторами

$$\mathrm{v} = \xi \cdot \partial = \xi^1(x, y)\partial_x + \xi^2(x, y)\partial_y,$$

и поверхности (кривые), которые заданы уравнениями вида

$$\psi(x, y) = 0.$$

1. Пусть $\mathrm{v} = \partial_x - \partial_y$ — оператор сдвига и $\psi = x + y$. Здесь $\mathrm{v}\psi = 0$ и кривая $\psi = 0$ инвариантна вследствие того, что ψ — инвариант группы $G^1(\xi)$.

2. Пусть $\mathrm{v} = x\partial_x + 2y\partial_y$ — оператор растяжения и $\psi = y - x^2$. Здесь $\mathrm{v}\psi = 2\left(y - x^2\right)$ и условие (1.28) выполнены, хотя ψ и не является инвариантом группы $G^1(\xi)$. Инвариантом этой группы является $\mathcal{J} = yx^{-2}$. С его помощью кривая $\psi = 0$ определяется уравнением $\mathcal{J} = 1$ везде, кроме особой точки $x = y = 0$.

3. Пусть $\mathrm{v} = \partial_y$ — оператор сдвига и $\psi = y^2$. Тогда $\mathrm{v}\psi\big|_{y=0} = 0$ и условие (1.28) выполнены. Но кривая $y^2 = 0$ не является инвариантной относительно преобразований группы $G^1(\xi)$:

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = y + a.$$

Здесь противоречия с теоремой 1.4 нет, поскольку уравнением $y^2 = 0$ кривая $y = 0$ задана не регулярно.

Рассматривая примеры, мы показали возможность задания инвариантной поверхности с помощью инварианта группы G^1. Оказывается, что это имеет общий характер. Основываясь на сформулированной ниже теореме, можно дать полное описание всех инвариантных поверхностей (то есть всех инвариантных систем уравнений (1.25)) данной группы G^1 с помощью ее базисных инвариантов.

Теорема 1.5. *Поверхность M, инвариантная относительно группы G^1, может быть задана системой уравнений вида*

$$\Phi(\mathcal{J}_1(x), \ldots, \mathcal{J}_{N-1}(x)) = 0, \quad k = 1, \ldots, s,$$

где функции $\mathcal{J}_1(x), \ldots, \mathcal{J}_{N-1}(x)$ составляют базис инвариантов группы G^1, если инфинитезимальный оператор группы G^1 не превращается в нуль на поверхности M.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [26, 46].

Мы же, завершая этот параграф, остановимся на рассмотрении еще нескольких примеров и сформулируем несколько задач, решение которых будет способствовать лучшему пониманию изложенного выше материала.

1.1.4. Практикум

Пример 1.1. Для преобразований $f : V \times \triangle \to \mathbb{R}^2$, где V — полоса $\{(x, y)||x| < 1, y \in \mathbb{R}\}$ и $\triangle = (-1, 1)$, которые порождены отображениями

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - ax}, \quad \overline{y} = \frac{y}{1 - ax}, \tag{1.34}$$

показать, что они составляют группу G^1, найти инфинитезимальный оператор v и построить базис инвариантов.

Для того чтобы убедиться в том, что отображения составляют группу G^1, нужно убедиться в выполнении всех условий 1°–4° из определения группы G^1.

Поскольку $\overline{x}\big|_{a=0} = x$, $\overline{y}\big|_{a=0} = y$, то условие 1° выполняется.

Далее,

$$f(\overline{x}, b) = \frac{\overline{x}}{1 - b\overline{x}} = \frac{\dfrac{x}{1 - ax}}{1 - b\dfrac{x}{1 - ax}} = \frac{x}{1 - (a + b)x} = f(x, a + b),$$

$$f(\overline{y}, b) = \frac{\overline{y}}{1 - b\overline{x}} = \frac{\dfrac{y}{1 - ax}}{1 - b\dfrac{x}{1 - ax}} = \frac{y}{1 - (a + b)x} = f(y, a + b),$$

а значит, и условие 2° имеет место.

Выполнение условия 3° вытекает из того, что выполнение равенств

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = y$$

для произвольных точек $(x, y) \in V$ требует выполнение равенства $a = 0$.

Наконец, для всех $(x, y) \in V$ и $a \in \triangle$, где $\triangle = (-1, 1)$, функции

$$\frac{x}{1 - ax}, \quad \frac{y}{1 - ax}$$

являются функциями класса C_∞.

Следовательно, преобразования (1.34) составляют группу G^1. Заметим, что эту группу еще называют *проективной группой преобразований плоскости*.

Для построения оператора

$$\mathrm{v} = \xi \cdot \partial = \xi^1(x, y)\partial_x + \xi^2(x, y)\partial_y$$

нужно определить компоненты вектора $\xi\left(\xi^1, \xi^2\right)$ из соотношений (1.5), в соответствии с которыми имеем

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial a}\bigg|_{a=0} = \xi^1, \quad \frac{\partial\overline{y}}{\partial a}\bigg|_{a=0} = \xi^2$$

или (в нашем случае)

$$\frac{x^2}{(1 - ax)^2}\bigg|_{a=0} = \xi^1, \quad \frac{xy}{(1 - ax)^2}\bigg|_{a=0} = \xi^2.$$

Отсюда следует, что $\xi = (x^2, xy)$, а поэтому

$$\mathrm{v} = x^2\partial_x + xy\partial_y.$$

Нахождение инвариантов группы G^1, в соответствии с теоремой 1.2, сводится к построению фундаментальной системы решений уравнения (1.19), которое в нашем случае имеет вид

$$x^2\frac{\partial F}{\partial x} + xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F = F(x, y). \tag{1.35}$$

Характеристическая система для уравнения (1.35) имеет вид

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy}$$

и является обыкновенным дифференциальным уравнением, первый интеграл которого определяется равенством

$$\frac{x}{y} = C, \quad C = \text{const}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Пример 1.2. Для группы $G^1(\xi)$, где $\xi = \big(x^2, xy\big)$, записать порождающие ее преобразования.

Решение примера 1.2, в соответствии с теоремой 1.1, сводится к построению решения задачи Коши (1.7), которая в нашем случае имеет такой вид:

$$\frac{d\overline{x}}{da} = (\overline{x})^2, \quad \overline{x}(0) = x;$$

$$\frac{d\overline{y}}{da} = \overline{xy}, \quad \overline{y}(0) = y.$$

Проинтегрировав первое уравнение, получаем, что

$$\overline{x} = \frac{1}{C_1 - a},$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Поскольку $\overline{x}(0) = x$, то $C_1 = \dfrac{1}{x}$ и

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - ax}.$$

С учетом этого получаем, что общее решение второго уравнения системы имеет вид

$$\overline{y} = \frac{C_2 x}{1 - ax},$$

и, следовательно,

$$C_2 = \frac{y}{x}.$$

Следовательно, группу $G^1(\xi)$ порождают преобразования

$$\overline{x} = \frac{x}{1 - ax}, \qquad \overline{y} = \frac{y}{1 - ax}.$$

Кроме проективной группы преобразований есть еще ряд однопараметрических групп преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, которые часто встречаются в различных задачах. В таблице 1.1 представлены преобразования, которые порождают эти группы, соответствующие им операторы и типичный вид инвариантов.

Задание 1.1. Для преобразований из таблицы 1.1 показать, что они составляют группу G^1, найти соответствующие операторы v и построить инварианты.

Таблица 1.1

Однопараметрические группы преобразований плоскости

	Преобразования	Оператор	Инвариант
Сдвиг вдоль оси x	$\overline{x} = x + a, \quad \overline{y} = y$	$\mathrm{v} = \partial_x$	$\mathcal{J} = y$
Сдвиг вдоль оси y	$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = y + a$	$\mathrm{v} = \partial_y$	$\mathcal{J} = x$
Сдвиг параллельный прямой $kx + ly = 0$	$\overline{x} = x + la,$ $\overline{y} = y - ka$	$\mathrm{v} = l\partial_x - k\partial_y$	$\mathcal{J} = kx + ly$
Вращение	$\overline{x} = x\cos a + y\sin a,$ $\overline{y} = y\cos a - x\sin a$	$\mathrm{v} = y\partial_x - x\partial_y$	$\mathcal{J} = x^2 + y^2$
Преобразование Лоренца	$\overline{x} = x\,\mathrm{ch}\,a + y\,\mathrm{sh}\,a,$ $\overline{y} = y\,\mathrm{ch}\,a + x\,\mathrm{sh}\,a$	$\mathrm{v} = y\partial_x + x\partial_y$	$\mathcal{J} = x^2 - y^2$
Преобразование Галилея	$\overline{x} = x + ay, \quad \overline{y} = y$	$\mathrm{v} = y\partial_x$	$\mathcal{J} = y$
Однородное растяжение	$\overline{x} = xe^a, \quad \overline{y} = ye^a$	$\mathrm{v} = x\partial_x + y\partial_y$	$\mathcal{J} = \dfrac{x}{y}$
Неоднородное растяжение	$\overline{x} = xe^a, \quad \overline{y} = ye^{ka}$	$\mathrm{v} = x\partial_x + ky\partial_y$	$\mathcal{J} = \dfrac{x^k}{y}$

Задание 1.2. Для заданных в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3(x, y, z)$ операторов найти преобразования, которые генерируют соответствующие группы G^1:

a) $\mathrm{v} = kx\partial_x + z\partial_y - y\partial_z, \quad k \geqslant 0;$

b) $\mathrm{v} = x\partial_x - \dfrac{1}{2}y^2\partial_z;$

c) $\mathrm{v} = x\partial_x + (x + z)\partial_z;$

d) $\mathrm{v} = 4x^2\partial_x + 4xy\partial_y - (2x + y^2 - 4x^2)z\partial_z.$

Пример 1.3. Найти преобразования, которые порождают группу $G^1(\xi)$, где $\xi = (x, x+y, y+z)$, и свести ее к группе сдвигов в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3(x,y,z)$.

Для построения преобразований, которые порождают группу $G^1(\xi)$, ищем решение задачи Коши (1.7), которая в нашем случае имеет вид

$$\frac{d\overline{x}}{da} = \overline{x}, \quad \overline{x}\big|_{a=0} = x,$$

$$\frac{d\overline{y}}{da} = \overline{x} + \overline{y}, \quad \overline{y}\big|_{a=0} = y,$$

$$\frac{d\overline{z}}{da} = \overline{y} + \overline{z}, \quad \overline{z}\big|_{a=0} = z,$$

и легко решается:

$$\overline{x} = xe^a, \quad \overline{y} = (y+ax)e^a, \quad \overline{z} = \left(z + ay + \frac{1}{2}a^2 x\right)e^a,$$

где $a \in \mathbb{R}$ — параметр.

Для сведения полученной группы $G^1(\xi)$ к группе сдвигов воспользуемся теоремой 1.3. Согласно условию группа $G^1(\xi)$ имеет оператор

$$\mathrm{v} = x\partial_x + (x+y)\partial_y + (z+y)\partial_z.$$

Построим инварианты этой группы, решив для этого уравнения в частных производных

$$\mathrm{v}F(x,y,z) = x\frac{\partial F}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial F}{\partial y} + (z+y)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

или, что то же самое, построив набор первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z+y}.$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что первые интегралы системы имеют вид

$$\frac{y}{x} - \ln|x| = C_1, \quad \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln^2|x| = C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Следовательно,

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(\frac{y}{x} - \ln|x|, \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln^2|x|\right).$$

Далее, в качестве переменных $\overline{y}$ и $\overline{z}$ возьмем инварианты

$$\overline{y} = \frac{y}{x} - \ln|x|, \quad \overline{z} = \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln^2|x|,$$

а третью переменную $\overline{x}$ найдем из уравнения

$$x\frac{\partial\overline{x}}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial\overline{x}}{\partial y} + (z+y)\frac{\partial\overline{x}}{\partial z} = 1.$$

Положив $\overline{x} = \overline{x}(x)$, приходим к уравнению

$$x\frac{\partial\overline{x}}{\partial x} = 1,$$

частное решение которого

$$\overline{x} = \ln|x|$$

и есть искомое.

Итак, в переменных

$$\overline{x} = \ln|x|, \quad \overline{y} = \frac{y}{x} - \ln|x|, \quad \overline{z} = \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln^2|x|$$

оператор группы G^1 сводится к оператору

$$\overline{\mathrm{v}} = \partial_{\overline{x}},$$

а преобразования группы $G^1(\xi)$ записываются в виде

$$(\overline{\overline{x}}) = \overline{x} + a, \quad (\overline{\overline{y}}) = \overline{y}, \quad (\overline{\overline{z}}) = \overline{z}.$$

Задание 1.3. Для заданных ниже операторов найти преобразования, которые порождают соответствующие группы G^1, и свести эти группы к группам сдвигов в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3(x,y,z)$.

a) $\mathrm{v} = x\partial_x + (2y+z)\partial_y + (2z-y)\partial_z$;

b) $\mathrm{v} = x\partial_x + (x+y)\partial_y + 2z\partial_z$;

c) $\mathrm{v} = -(1+x^2)\partial_x + (1-x)y\partial_y + \left(2z - \frac{1}{2}y^2\right)\partial_z$.

1.2. Группы, которые допускают дифференциальные уравнения в частных производных

Во втором параграфе мы переходим к рассмотрению метода Ли–Овсянникова вычисления групп инвариантности дифференциальных уравнений. Поскольку дальнейшему исследованию подлежат уравнения эволюционного типа, которые являются уравнениями в частных производных, то здесь внимание уделено применению метода Ли–Овсянникова к дифференциальным уравнениям в частных производных. Для обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичное изложение можно найти в [26, 32, 55].

Изложение начинаем с предварительного обсуждения на примере одного нелинейного уравнения теплопроводности.

1.2.1. Предварительное обсуждение на примере нелинейного уравнения теплопроводности

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = \lambda t u_{xx} + u_x \ln|tu_x|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0. \tag{1.36}$$

В (1.36) и далее $u = u(t,x)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Очевидным является то, что уравнение (1.36) не изменяется в результате сдвигов пространственной координаты

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x + a, \quad \overline{u} = u,$$

сдвигов функции

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = u + a$$

и однородных растяжений временной и пространственной координат

$$\overline{t} = te^a, \quad \overline{x} = xe^a, \quad \overline{u} = u, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В самом деле, например, в последнем случае в обеих частях уравнения (1.36) возникает отличный от нуля множитель e^a, а потому это уравнение переходит в равносильное уравнение того же вида

$$\overline{u}_{\overline{t}} = \lambda \overline{t}\,\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} + \overline{u}_{\overline{x}} \ln|\overline{t}\,\overline{u}_{\overline{x}}|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0. \tag{1.37}$$

О всяком преобразовании, которое переводит данное дифференциальное уравнения в равносильное уравнение того же вида, говорят, что оно *допускается* рассматриваемым дифференциальным уравнением. Следовательно, приведенные выше три однопараметрических группы преобразований допускаются нелинейным уравнением теплопроводности (1.36). Менее очевидным является то, что это уравнение допускает также такое однопараметрическое семейство преобразований:

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x + at, \quad \overline{u} = ue^{-a}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.38}$$

Заметим, что преобразования (1.38) порождают группу, которая является представлением в пространстве переменных t, x, u группы Галилея (см. табл. 1.1).

Убедимся в инвариантности уравнения (1.36) относительно преобразований (1.38). В соответствии с обычным правилом замены переменных из (1.38) получаем:

$$u_t = e^a \overline{u}_{\overline{t}} + ae^a \overline{u}_{\overline{x}}, \quad u_x = e^a \overline{u}_{\overline{x}}, \quad u_{xx} = e^a \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}.$$

Подстановка полученных значений производных в (1.36) приводит к равенству

$$e^a \overline{u}_{\overline{t}} + ae^a \overline{u}_{\overline{x}} = \lambda \overline{t} e^a \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} + e^a \overline{u}_{\overline{x}} \ln|\overline{t} e^a \overline{u}_{\overline{x}}|,$$

которое, после упрощений, приобретает вид

$$e^a \overline{u}_{\overline{t}} = e^a (\lambda \overline{t}\,\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} + \overline{u}_{\overline{x}} \ln|\overline{t}\,\overline{u}_{\overline{x}}|).$$

В обеих частях преобразованного уравнения (1.36) возникает отличный от нуля множитель e^a, поэтому данное уравнение переходит в уравнение (1.37).

Одно из возможных применений преобразований, которые допускает данное уравнение, основывается на том, что они переводят любое решение рассматриваемого уравнения снова в его же решение. Проиллюстрируем это для случая преобразований (1.38).

Пусть функция

$$u = \varphi(t,x) \tag{1.39}$$

является решением нелинейного уравнения теплопроводности (1.36):

$$\dot{\varphi} = \lambda t \varphi'' + \varphi' \ln|t\varphi'|, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{1.40}$$

Поскольку в переменных (1.38) уравнение (1.36) приобретает вид (1.37), запишем решение (1.39) в переменных $\overline{u}$, $\overline{t}$, $\overline{x}$ и подставим в последнее выражения для $\overline{t}$, $\overline{x}$, $\overline{u}$ из (1.38). Решив полученное равенство относительно u, получаем

$$u = e^a \varphi(t, x + at) = e^a \varphi(t, \xi), \quad \xi = x + at. \tag{1.41}$$

Подстановка функции (1.41) в (1.36) приводит к равенству (1.40), где $\varphi' = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\varphi'' = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}$. Следовательно, формула (1.41) определяет однопараметрическое семейство решений уравнения (1.36).

Нам известны четыре разных однопараметрических группы преобразований, которые допускает уравнение (1.36). Возникают вопросы: исчерпываются ли этими группами все группы, которые допускает уравнение (1.36)? Если это не так, то как найти остальные и доказать, что найдены все группы, которые допускает это уравнение?

Конструктивный подход (*метод Ли*), который позволяет решать указанные проблемы для произвольных дифференциальных уравнений в частных производных, основывается на критерии инвариантности (теорема 1.4) и на геометрическом трактовании дифференциальных уравнений как поверхностей *в продолженном* на производные функций пространстве.

Рассматривая преобразования (1.38), мы получили формулы

$$\overline{u}_{\overline{t}} = e^{-a}(u_t - au_x), \quad \overline{u}_{\overline{x}} = e^{-a}u_x, \quad \overline{u}_{\overline{x}\overline{x}} = e^{-a}u_{xx}. \tag{1.42}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (1.38), (1.42) являются представлением однопараметрической группы G^1 в шестимерном пространстве $\mathbb{R}^6 = \langle t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}\rangle$. Инфинитезимальный оператор этой группы G^1 имеет вид

$$\tilde{\mathrm{v}} = t\partial_x - u\partial_u - (u_t + u_x)\partial_{u_t} - u_x\partial_{u_x} - u_{xx}\partial_{u_{xx}}. \tag{1.43}$$

Оператор $\tilde{\mathrm{v}}$ действует на функции переменных t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, которые рассматриваются как независимые переменные.

Переписав уравнение (1.36) в виде

$$u_t - \lambda t u_{xx} - u_x \ln|tu_x| = 0, \tag{1.44}$$

мы видим, что оно определяет некоторую пятимерную поверхность $M \subset \mathbb{R}^6$. Отсюда вытекает, что инвариантность уравнения (1.36) относительно преобразований (1.38) означает инвариантность поверхности M относительно преобразований (1.42) или, поскольку эти преобразования порождают группу G^1 с инфинитезимальным оператором $\tilde{\mathrm{v}}$ (1.43), выполнение равенства

$$\tilde{\mathrm{v}} \cdot F\big|_M = 0, \tag{1.45}$$

где $F = u_t - \lambda t u_{xx} - u_x \ln|tu_x|$.

Поскольку

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{v}} \cdot F = &-(u_t + u_x)\frac{\partial}{\partial u_t}[u_t - \lambda t u_{xx} - u_x\ln|tu_x|] - \\ &- u_x\frac{\partial}{\partial u_x}[u_t - \lambda t u_{xx} - u_x\ln|tu_x|] - \\ &- u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}[u_t - \lambda t u_{xx} - u_x\ln|tu_x|] = \\ &= -(u_t + u_x) - u_x(-\ln|tu_x| - 1) - u_{xx}(-\lambda t) = \\ &= -(u_t - \lambda t u_{xx} - u_x\ln|tu_x|),\end{aligned}$$

то отсюда и вытекает выполнение равенства (1.45).

Эта процедура, выполненная в обратном порядке, позволяет найти все однопараметрические группы, которые допускает данное дифференциальное уравнение.

1.2.2. Операция продолжения

Прежде чем перейти к описанию алгоритма Ли отыскания симметрий дифференциальных уравнений, который основывается на инфинитезимальном критерии инвариантности, нам нужно заменить понятие системы дифференциальных уравнений конкретным геометрическим объектом, который определяется преобразованием в нуль некоторых функций.

Для этого, прежде всего, нам нужно *продолжить* основное пространство независимых и зависимых переменных в пространство, которое будет содержать еще и частные производные, встречающиеся в данной системе дифференциальных уравнений.

Как и раньше, мы работаем исключительно в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, но здесь $\mathbb{R}^N = V = X \times U$, где $X = \mathbb{R}^n = \langle x\rangle = \langle x^1, \ldots, x^n\rangle$, $U = \mathbb{R}^m = \langle u\rangle = \langle u^1, \ldots, u^m\rangle$, $n + m = N$.

Переменные $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ будем называть *независимыми переменными*, а переменные $u = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$ — *зависимыми (дифференциальными) переменными*.

Тогда преобразования, которые определяют однопараметрическую группу G^1, можем записать в виде

$$\begin{aligned}&\overline{x} = f(x, u, a), \quad f\big|_{a=0} = x, \\ &\overline{u} = g(x, u, a), \quad g\big|_{a=0} = u.\end{aligned} \tag{1.46}$$

Введем в рассмотрение еще и дополнительные переменные

$$\underset{1}{u} = \{u_i^\alpha | \alpha = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n\}, \quad u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$$

и зададим их преобразование

$$\overline{u}_i^\alpha = h_i^\alpha(x, u, \underset{1}{u}, a), \quad h_i^\alpha\big|_{a=0} = u_i^\alpha \tag{1.47}$$

так, чтобы формулы (1.47) и преобразования производных $\dfrac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}$, в результате замены переменных (1.46), были согласованы с равенствами

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i} \tag{1.48}$$

для произвольной функции $u^\alpha = u^\alpha(x)$.

Этим условием преобразования (1.47) однозначно определяются для каждой группы G^1, и в результате мы приходим к однопараметрической группе $\underset{1}{G}^1$ преобразований (1.46), (1.47) в пространстве $\mathbb{R}^{N+nm} = \underset{1}{V} = V \times \underset{1}{U}$, где $\underset{1}{U} = \langle \underset{1}{u} \rangle$, то есть в пространстве $\underset{1}{V} = \langle x, u, \underset{1}{u} \rangle$.

Преобразования (1.46) называют *точечными (локальными) преобразованиями*, (1.47) — *продолжением* (первым) этих локальных преобразований, группу $\underset{1}{G}^1$ — *первым продолжением* группы G^1, а пространство $\underset{1}{V}$ — *первым продолжением* пространства V.

Продолжения более высокого порядка осуществляются путем определения действия группы G^1 на переменные $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots$, где

$$\underset{s}{u} = \left\{ u^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_s} \middle| \alpha = 1,\ldots,m;\ i_1,\ldots,i_s = 1,\ldots,n \right\}.$$

Переменные $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$ считаются алгебраически независимыми, но связанными дифференциальными соотношениями

$$u^{\alpha}_{i} = D_i(u^{\alpha}), \quad u^{\alpha}_{ij} = D_j(u^{\alpha}_{i}) = D_j D_i(u^{\alpha}),\ \ldots, \tag{1.49}$$

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^{\alpha}_{i}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + u^{\alpha}_{ij}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{j}} + \cdots \tag{1.50}$$

— оператор полного дифференцирования по переменной x^i. Отметим, что для производной (1.50) термин "полная" производная употребляется для того, чтобы отличать $D_i u^{\alpha}$ от "частной" производной $u^{\alpha}_{i} = \dfrac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i}$.

Из формул (1.49), (1.50) вытекает выполнение условия симметричности $u^{\alpha}_{ij} = u^{\alpha}_{ji}$ и т.д.

Действие оператора D_i "обрывается", если действовать им на функцию конечного набора переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$, а поэтому корректно определено на множестве всех гладких функций произвольного конечного набора указанных переменных. Будем считать эти функции аналитическими.

Хорошо известно, что данная гладкая функция $f(x) = f\left(x^1,\ldots,x^n\right)$ n независимых переменных имеет

$$n_k = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k!}$$

разных частных производных k-го порядка.

Пусть пространство $\underset{p}{V} = V \times \underset{1}{U} \times \cdots \times \underset{p}{U}$, где $\underset{s}{U} = \langle \underset{s}{u} \rangle$ $(s = 1,\ldots,p)$. Тогда $\underset{p}{V}$ — евклидово пространство размерности

$$n + m(1 + n_1 + \ldots + n_p) = n + mn^{(p)}, \quad n^{(p)} = C_p^{n+p}. \tag{1.51}$$

Построенное таким образом пространство $\underset{p}{V}$ называется *p-м продолжением* пространства V.

Как **пример** рассмотрим случай, когда $n = 3$, $m = 1$, $p = 2$. Тогда, в соответствии с (1.51), $\dim \underset{2}{V} = 13$. В самом деле, здесь $X = \mathbb{R}^3$ имеет координаты $\left(x^1, x^2, x^3\right) = (x, y, z)$, а $U = \mathbb{R}^1$ — одну координату u. Поэтому пространство $\underset{1}{U}$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^3$ с координатами (u_x, u_y, u_z), а пространство $\underset{2}{U}$ — пространству $\mathbb{R}^6$ с координатами $(u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zz})$. Отсюда следует, что вторым продолжением пространства V является тринадцатимерное евклидово пространство $\underset{2}{V}$ с координатами

$$(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zz}).$$

Для определения *p-го* $(p > 1)$ *продолжения* группы G^1 нужно задать преобразование переменных $\underset{p}{u}$

$$\overline{u}^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p} = h^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}, a), \quad h^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p}\big|_{a=0} = u^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p}, \tag{1.52}$$

так, чтобы формулы (1.52) и преобразования производных

$$\frac{\partial^p u^{\alpha}(x)}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p}},$$

в результате замены переменных (1.46), были согласованными с равенствами

$$u^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p} = \frac{\partial^p u^{\alpha}(x)}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p}}, \quad \alpha = 1,\ldots,m, \quad i_1,\ldots,i_p = 1,\ldots,n$$

для произвольной функции $u^{\alpha} = u^{\alpha}(x)$. Этим условием преобразования (1.52) однозначно определяются для каждой группы G^1, и в результате мы приходим к однопараметрической группе $\underset{p}{G}^1$ преобразований (1.46), (1.47), (1.52) в пространстве $\underset{p}{V} = \langle x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u} \rangle$.

В дальнейшем нам потребуются продолжения не самих преобразований (1.46), а инфинитезимального оператора группы G^1, которую порождают преобразования (1.46).

Запишем инфинитезимальный оператор группы G^1 в виде

$$v = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{1.53}$$

где $i = 1,\dots,n$; $\alpha = 1,\dots,m$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование в пределах их изменения, и, в соответствии с формулой (1.7),

$$\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a}\Big|_{a=0}, \quad \eta^\alpha = \frac{\partial g^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0}. \tag{1.54}$$

Обычные формулы замены переменных сохраняют дифференциальные соотношения (1.49). Эти формулы можно получить так. Во время перехода от "старых" независимых переменных x^i к "новым" переменным $\overline{x}^i$ по формулам (1.46) дифференцирования по "старым" и "новым" переменным связаны равенствами

$$D_i = D_i(f^j)D_{\overline{j}}. \tag{1.55}$$

При этом удовлетворяются соотношения (1.49) в "новых" переменных:

$$\overline{u}^\alpha_{\overline{i}} = D_{\overline{i}}(\overline{u}^\alpha), \quad \overline{u}^\alpha_{\overline{ij}} = D_{\overline{j}}(\overline{u}^\alpha_{\overline{i}}) = D_{\overline{j}}D_{\overline{i}}(\overline{u}^\alpha), \ \dots . \tag{1.56}$$

В (1.55), (1.56) и далее мы используем обозначение

$$f = (f^1,\dots,f^n), \quad g = (g^1,\dots,g^m), \quad \partial_{\overline{i}} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i},$$

$$D_{\overline{i}} = \frac{\partial}{\partial \overline{x^i}} + \overline{u}^\alpha_{\overline{i}}\frac{\partial}{\partial \overline{u}^\alpha} + \overline{u}^\alpha_{\overline{ij}}\frac{\partial}{\partial \overline{u}^\alpha_{\overline{i}}} + \cdots .$$

Теперь продифференцируем обе части второго равенства (1.46), используя соотношения (1.55) и (1.56):

$$D_i(g^\alpha) = D_i(f^j)D_{\overline{j}}(\overline{u}^\alpha) = \overline{u}^\alpha_{\overline{j}}D_i(f^j).$$

Отсюда следует, что в результате локальных преобразований (1.46) замена первых производных определяется формулой

$$\overline{u}^\alpha_{\overline{j}}D_i(f^j) = D_i(g^\alpha), \tag{1.57}$$

или, более подробно,

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^i} + u^\beta_i\frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\right)\overline{u}^\alpha_{\overline{j}} = \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^i} + u^\beta_i\frac{\partial g^\alpha}{\partial u^\beta}.$$

Заметим, что из (1.57), в частности, находятся значения $\overline{u}^\alpha_{\overline{j}}$ как функции переменных x, u, $\underset{1}{u}$ и параметра a для достаточно малых значений a.

Здесь же мы, поскольку для дальнейшей работы нам необходимы инфинитезимальные операторы продолженных групп $\underset{1}{G}^1$ (*продолженные операторы групп* G^1), запишем продолжение оператора v (1.53) на первые производные в виде

$$\underset{1}{\mathrm{v}} = \mathrm{v} + \varphi^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i} \tag{1.58}$$

и найдем формулу для определения дополнительных координат

$$\varphi^\alpha_i = \frac{\partial \overline{u}^\alpha_{\overline{i}}}{\partial a}\Big|_{a=0}.$$

Для этого продифференцируем обе части равенства (1.57) по параметру a в точке $a = 0$. Учитывая далее перестановочность дифференцирований D_i и $\dfrac{\partial}{\partial a}$, равенства (1.54) и начальные условия (1.46), имеем

$$D_i(\eta^\alpha) = \varphi^\alpha_j D_i(x^j) + u^\alpha_j D_i(\xi^j) = \varphi^\alpha_j\delta^j_i + u^\alpha_j D_i(\xi^i),$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j,\\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

— символ Кронекера.

Отсюда и следует искомая формула

$$\varphi^\alpha_i = D_i(\eta^\alpha) - u^\alpha_j D_i(\xi^j). \tag{1.59}$$

Формула (1.59) показывает, что для построения продолженного оператора (1.58) нужно знать лишь координаты ξ^i и η^α начального оператора v.

Пусть теперь

$$\underset{2}{\mathrm{v}} = \underset{1}{\mathrm{v}} + \varphi^{\alpha}_{ij} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{ij}}. \tag{1.60}$$

Найдем формулу для определения дополнительных координат

$$\varphi^{\alpha}_{ij} = \frac{\partial \overline{u}^{\alpha}_{\overline{ij}}}{\partial a}\bigg|_{a=0}$$

во втором продолжении оператора v.

Учитывая, что имеет место равенство (1.55), то есть

$$D_k = D_k(f^l) D_{\overline{l}},$$

и вследствие этого

$$D_k[\overline{u}^{\alpha}_{\overline{j}} D_i(f^j)] = \overline{u}^{\alpha}_{\overline{jl}} D_k(f^l) D_i(f^j) + \overline{u}^{\alpha}_{\overline{j}} D_k D_i(f^j),$$

продифференцируем равенство (1.57):

$$D_k D_i(g^{\alpha}) = \overline{u}^{\alpha}_{\overline{jl}} D_k(f^l) D_i(f^j) + \overline{u}^{\alpha}_{\overline{j}} D_k D_i(f^j). \tag{1.61}$$

Далее, дифференцируем полученное равенство (1.61) по параметру a в точке $a = 0$. Учитывая перестановочность дифференцирований D_i и $\dfrac{\partial}{\partial a}$, равенства (1.54) и начальные условия (1.46), имеем

$$D_k(\eta^{\alpha}) = \varphi^{\alpha}_{jl} D_k(x^l) D_i(x^j) + u^{\alpha}_{jl}[D_k(\xi^l) D_i(x^j) + D_i(\xi^j) D_k(x^l)] + \\ + \varphi^{\alpha}_{j} D_k D_i(x^j) + u^{\alpha}_{j} D_k D_i(\xi^j).$$

Отсюда, поскольку $D_i(x^j) = \delta^j_i$ и имеет место равенство (1.59), следует искомая формула

$$\varphi^{\alpha}_{jl} = D_l(\varphi^{\alpha}_{j}) - u^{\alpha}_{jk} D_l(\xi^k),$$

или, в соответствии с обозначениями индексов в равенстве (1.60),

$$\varphi^{\alpha}_{ij} = D_j(\varphi^{\alpha}_{i}) - u^{\alpha}_{ik} D_j(\xi^k). \tag{1.62}$$

Построение продолжения оператора v произвольного порядка осуществляется аналогично. Поскольку эта процедура требует довольно

объемного изложения, здесь мы приводим конечную формулу, которая определяет произвольное p-е продолжение оператора v:

$$\underset{p}{\mathrm{v}} = \underset{p-1}{\mathrm{v}} + \varphi^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p}}, \tag{1.63}$$

где

$$\varphi^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_p} = D_{i_p}(\varphi^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}) - u^{\alpha}_{j,i_1,\ldots,i_{p-1}} D_{i_p}(\xi^j). \tag{1.64}$$

Формулы (1.63), (1.64) показывают, что для построения p-го продолжения оператора v необходимо знать его $(p-1)$-е продолжение.

Завершая рассмотрение операции продолжения, остановимся на **примере** построения второго продолжения оператора v, определенного в пространстве V, где $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^1$.

Положим $X = \langle t, x\rangle$, $U = \langle u\rangle$, тогда

$$\mathrm{v} = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u,$$

и второе продолжение оператора v ищем в виде

$$\underset{2}{\mathrm{v}} = \mathrm{v} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \tag{1.65}$$

В наших обозначениях оператор полного дифференцирования (1.50) совпадает с одним из таких двух операторов:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \cdots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \cdots.$$

Поэтому формулы (1.59), (1.62) для определения дополнительных координат в операторе $\underset{2}{\mathrm{v}}$ (1.65) приобретают такой вид:

$$\begin{aligned}
\varphi^t &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \\
\varphi^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi), \\
\varphi^{tt} &= D_t(\varphi^t) - u_{tt} D_t(\tau) - u_{tx} D_t(\xi), \\
\varphi^{tx} &= D_x(\varphi^t) - u_{tt} D_x(\tau) - u_{tx} D_x(\xi), \\
\varphi^{xx} &= D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi).
\end{aligned}$$

Поскольку для произвольной функции $f = f(t,x,u)$

$$D_t(f) = f_t + u_t f_u, \quad D_x(f) = f_x + u_x f_u,$$

то

$$\varphi^t = \eta_t + u_t(\eta_u - \tau_t) - u_x \xi_t - u_t^2 \tau_u - u_t u_x \xi_u, \tag{1.66}$$

$$\varphi^x = \eta_x - u_t \tau_x + u_x(\eta_u - \xi_x) - u_t u_x \tau_u - u_x^2 \xi_u. \tag{1.67}$$

Найдем далее $D_t(\varphi^t)$:

$$\begin{aligned}
D_t(\varphi^t) &= D_t(\eta_t) + D_t[u_t(\eta_u - \tau_t)] - D_t[u_x\xi_t] - D_t[u_t^2\tau_u] - D_t[u_t u_x \xi_u] = \\
&= \eta_{tt} + u_t\eta_{tu} + u_{tt}(\eta_u - \tau_t) + u_t(\eta_{tu} + u_t\eta_{uu} - \tau_{tt} - u_t\tau_{tu}) - u_{tx}\xi_t - \\
&- u_x(\xi_{tt} + u_t\xi_{tu}) - 2u_t u_{tt}\tau_u - u_t^2(\tau_{tu} + u_t\tau_{uu}) - u_x u_{tt}\xi_u - \\
&- u_t u_{tx}\xi_u - u_t u_x(\xi_{tu} + u_t\xi_{uu}).
\end{aligned}$$

В соответствии с последним получаем, что

$$\begin{aligned}
\varphi^{tt} &= \eta_{tt} + u_t[2\eta_{tu} - \tau_{tt}] - u_x\xi_{tt} + u_t^2[\eta_{uu} - 2\tau_{tu}] - 2u_t u_x \xi_{tu} - \\
&- u_t^2 u_x \xi_{uu} - u_t^3\tau_{uu} + u_{tt}[\eta_u - 2\tau_t] - 2u_{tx}\xi_t - \\
&- 3u_t u_{tt}\tau_u - u_x u_{tt}\xi_u - 2u_t u_{tx}\xi_u. \qquad (1.68)
\end{aligned}$$

Аналогично находим и значения φ^{tx}, φ^{xx}:

$$\begin{aligned}
\varphi^{tx} &= \eta_{tx} + u_t[\eta_{xu} - \tau_{tx}] + u_x[\eta_{tu} - \xi_{tx}] - u_t^2\tau_{xu} + \\
&+ u_t u_x[\eta_{uu} - \tau_{tu} - \xi_{xu}] - u_x^2\xi_{tu} - u_t^2 u_x\tau_{uu} - u_t u_x^2\xi_{uu} - \\
&- u_{tt}\tau_x + u_{tx}[\eta_u - \tau_t - \xi_x] - u_{xx}\xi_t - u_t u_{xx}\xi_u - \\
&- 2u_t u_{tx}\tau_u - u_x u_{tt}\tau_u - 2u_x u_{tx}\xi_u, \qquad (1.69) \\
\varphi^{xx} &= \eta_{xx} - u_t\tau_{xx} + u_x[2\eta_{xu} - \xi_{xx}] - 2u_t u_x\tau_{xu} + u_x^2[\eta_{uu} - 2\xi_{xu}] - \\
&- u_t u_x^2\tau_{uu} - u_x^3\xi_{uu} - 2u_{tx}\tau_x + u_{xx}[\eta_u - 2\xi_x] - \\
&- u_t u_{xx}\tau_u - 2u_x u_{tx}\tau_u - 3u_x u_{xx}\xi_u. \qquad (1.70)
\end{aligned}$$

Следовательно, второе продолжение оператора v имеет вид (1.65), где дополнительные координаты вычисляются по формулам (1.66)–(1.70).

1.2.3. Определяющие уравнения. Примеры вычисления симметрии уравнений

Перейдем теперь к рассмотрению задачи отыскания группы точечных преобразований, которую допускает данная система дифференциальных уравнений в частных производных (или задачи вычисления симметрии системы уравнений).

Пусть F — аналитическая функция конечного набора переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$. Такие функции называют *дифференциальными функциями*. Максимальный порядок p производной, которая входит в дифференциальную функцию

$$F = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}),$$

называют *порядком* этой функции.

Пусть, далее, F — дифференциальная функция порядка p. Уравнение

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}) = 0 \qquad (1.71)$$

определяет некоторую поверхность в пространстве $\underset{p}{V}$.

Например, переписав уравнение (1.36) в виде

$$u_t - \lambda t u_{xx} - u_x \ln|tu_x| = 0, \quad \lambda \neq 0, \qquad (1.72)$$

мы видим, что левая часть уравнения (1.72) является дифференциальной функцией порядка 2, а именно: уравнение (1.72) (а значит, и уравнение (1.36)) задает в пространстве $\underset{2}{V}$ некоторую поверхность.

Отметим, что в виде (1.71) можно рассматривать и произвольную систему дифференциальных уравнений, считая, что F — вектор с компонентами $F^1, \ldots, F^s$, где

$$\begin{aligned}
&F^1(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p_1}{u}) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F^s(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p_s}{u}) = 0, \qquad (1.73)
\end{aligned}$$

и $\max\{p_1, p_2, \ldots, p_s\} = p$.

Далее будем рассматривать уравнение (1.71) (а значит, и систему (1.73)) вместе со всеми его дифференциальными следствиями

$$D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \ldots,$$

которые определяют поверхности в пространстве $\underset{p}{V}$, и говорить, что уравнение (1.71) задает *многообразие* $[F]$ в пространстве $\underset{p}{V}$, или просто: *многообразие* $[F]$.

Так, **например**, уравнение

$$F = u_t - u u_{xx} = 0, \quad u = u(t, x),$$

само определяет многообразие в пространстве $\underset{2}{V} = \langle t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}\rangle$, поскольку рассмотрение уже первых его дифференциальных следствий

$$\begin{aligned}
&D_t F = u_{tt} - u u_{txx} - u_t u_{xx} = 0, \\
&D_x F = u_{tx} - u u_{xxx} - u_x u_{xx} = 0
\end{aligned}$$

выводит нас за пределы пространства $\underset{2}{V}$.

С другой стороны, система

$$F_1 = u_{tt} - u_x u_{xx} + u = 0,$$
$$F_2 = u_t - u_x = 0$$

в этом же пространстве $\underset{2}{V}$ определяет многообразие

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad D_t F_2 = 0, \quad D_x F_2 = 0,$$

поскольку дифференциальные следствия второго уравнения

$$D_t F_2 = u_{tt} - u_{tx} = 0,$$
$$D_x F_2 = u_{tx} - u_{xx} = 0$$

также определяют некоторые поверхности (вследствие линейности уравнений, гиперплоскости) в пространстве $\underset{2}{V}$.

Для того чтобы перейти от дифференциального многообразия к понятию дифференциального уравнения, нужно определиться, что мы понимаем под решением уравнения. Например, классическим решением уравнения (1.71) называют достаточно гладкую функцию $u = \varphi(x)$ такую, что в результате подстановки функций $\varphi^\alpha(x)$, $\dfrac{\partial \varphi^\alpha(x)}{\partial x^i}$, $\ldots$, вместо величин $u^\alpha, u_i^\alpha, \ldots$, соответственно, равенство (1.71) выполняется тождественно по x. Вместо классических решений можно рассматривать и обобщенные решения. Во всяком случае, понятие дифференциального уравнения содержит как составные элементы дифференциальное многообразие и определение решения. Когда мы проводим построение групп, которые допускают данные уравнения, то как бы забываем про их решения и воспринимаем эти уравнения как дифференциальные многообразия. Вследствие этого мы можем рассматривать (1.71) или (1.73) как обычные (не дифференциальные) системы уравнений, определенные в пространстве $\underset{p}{V}$, и использовать инфинитезимальный критерий инвариантности (теорема 1.2).

Следовательно, в пространстве $\underset{p}{V}$ рассматриваем локальное многообразие $[F]$, которое задано системой дифференциальных уравнений в частных производных порядка p:

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}) = 0, \tag{1.74}$$

где $F = (F^1, \ldots, F^s)$. Говорят, что система (1.74) *инвариантна* относительно группы G^1 преобразований (1.46), или *допускает* эту группу, если многообразие, заданное уравнением (1.74), инвариантно относительно p-го продолжения $\underset{p}{G^1}$ (1.52) группы G^1.

Инфинитезимальным оператором группы $\underset{p}{G^1}$ будет оператор $\underset{p}{\mathrm{v}}$ (1.63), (1.64), полученный p-кратным продолжением оператора v (1.53). С помощью теоремы 1.2 устанавливается критерий инвариантности уравнений (1.74) относительно группы G^1, удобный для построения группы, которую допускает данная система уравнений.

Теорема 1.6 ([46]). *Система дифференциальных уравнений* (1.74) *допускает группу* G^1 *с инфинитезимальным оператором* v *тогда и только тогда, когда выполняется условие инвариантности*

$$\underset{p}{\mathrm{v}} F \big|_{[F]} = 0. \tag{1.75}$$

Как следует из проведенных рассуждений, процесс формирования условия инвариантности состоит из трех шагов:

- построение продолженного оператора $\underset{p}{\mathrm{v}}$;
- действие полученным оператором на функции $F = (F^1, \ldots, F^s)$;
- переход на многообразие $[F]$.

На первом шаге определяется общий вид оператора v, то есть вид компонент вектора (ξ, η). Здесь важным является то, что функции ξ, η являются отображениями $V \to V$, то есть компоненты ξ, η являются функциями лишь переменных $(x, u) \in V$. После этого, в соответствии с формулами продолжения (1.64), находятся координаты $\varphi^\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ продолженного оператора $\underset{p}{\mathrm{v}}$.

На втором шаге выполняется действие полученным оператором $\underset{p}{\mathrm{v}}$ на функции F^l $(1 \leqslant l \leqslant s)$. Поскольку оператор $\underset{p}{\mathrm{v}}$ является скалярным дифференциальным оператором, то им можно действовать на каждую из функций F^l в отдельности. В результате находятся новые функции $\underset{p}{\mathrm{v}} F^l$.

На третьем шаге, для перехода на многообразие $[F]$, проводится выбор таких s разных координат $\theta^1, \ldots, \theta^s$ вектора $\underset{p}{\overline{u}} = (\underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u})$, что относительно их уравнения, которые определяют многообразие $[F]$, могут быть "алгебраически" разрешимыми. В результате решения "зависимые" координаты $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^s)$ определяются через остальные. "Свободные" координаты вектора $\underset{p}{\overline{u}}$ составляют набор скаляров $\rho = (\rho^1, \ldots, \rho^k)$, количество которых k зависит от $[F]$. После этого полученные выражения $\theta = \theta(\rho)$ нужно подставить в найденные на предыдущем шаге функции $\underset{p}{\mathrm{v}}F^l$ и результат приравнять нулю.

Следующим шагом в формировании условий инвариантности является *расщепление* уравнения (1.75) относительно "свободных" координат ρ вектора $\underset{p}{\overline{u}}$, которые были введены на третьем шаге. Для этого учитывают, что левая часть (Φ) уравнения (1.75) выступает как функция независимых переменных x, u, ρ и производных координат вектора (ξ, η), которые зависят от x, u, но не зависят от ρ. Поэтому условие (1.75), записанное в виде

$$\Phi(\xi, \eta, x, u, \rho) = 0,$$

расщепляется и порождает множество уравнений (например, при помощи разложения функции Φ за формулой Тейлора в какой-нибудь точке ρ_0). Как правило, для этого выбирают точку $\rho = 0$ и в результате расщепления получают множество уравнений

$$\begin{aligned} &\Phi(\xi, \eta, x, u, 0) = 0, \\ &\Phi_\rho(\xi, \eta, x, u, 0) = 0, \\ &\Phi_{\rho\rho}(\xi, \eta, x, u, 0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{1.76}$$

Уравнения (1.76) называют *определяющими уравнениями.* Они рассматриваются как уравнения относительно искомого векторного поля (ξ, η) или оператора v.

Основное свойство определяющих уравнений следует из критерия инвариантности (теорема 1.2): *какой бы ни была группа $G^1(\xi, \eta)$, которую допускает уравнение* (1.74)*, ее касательное векторное поле (ξ, η) удовлетворяет уравнениям* (1.76)*. И наоборот, каждое решение (ξ, η) из класса $C_\infty(V)$ уравнений* (1.76) *является таким векторным полем, что соответствующая ему группа $G^1(\xi, \eta)$ допускается уравнением* (1.74).

Определяющая система (1.76) имеет еще ряд свойств. Так, важным свойством этой системы является то, что все его уравнения являются *линейными и однородными* дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно координат искомого вектора (ξ, η). Это свойство вытекает из того, что его имеет оператор $\underset{p}{\mathrm{v}}$. Поэтому множество решений определяющих уравнений составляет некоторое векторное пространство. Для обозначения этого пространства будем употреблять символ L.

Пусть Ω является совокупностью таких преобразований (f, g) пространства V, что каждое из них принадлежит некоторой группе $G^1(\xi, \eta)$, касательное векторное поле (ξ, η) которой является решением из класса C_∞ уравнений (1.76). Вследствие предыдущих предположений все преобразования из Ω допускаются системой (1.74). Известно (см., например, [46, § 5]), что когда система (1.74) инвариантна относительно преобразований (f, g) и $(\overline{f}, \overline{g})$, то она инвариантна и относительно их композиции $(f, g) \circ (\overline{f}, \overline{g})$. Поэтому для любых двух преобразований $(f, g), (\overline{f}, \overline{g}) \in \Omega$ их композиция $(f, g) \circ (\overline{f}, \overline{g})$ также допускается системой (1.74).

В общем случае нет оснований утверждать, что композиция $(f, g) \circ (\overline{f}, \overline{g})$ принадлежит некоторой группе G^1, которую допускает система (1.74), а поэтому неизвестно, будет ли $(f, g) \circ (\overline{f}, \overline{g}) \in \Omega$. Тем не менее всегда можно считать множество Ω таким, что порождает (с помощью композиции) группу преобразований, которую допускает система (1.74). Следовательно, возникает группа, которая рассматривается как конечно-порожденная множеством Ω (то есть каждый ее элемент является композицией конечного количества элементов из Ω).

Основной группой системы дифференциальных уравнений (1.74) *называют группу локальных преобразований пространства V, которая является конечно-порожденным множеством Ω преобразований, принадлежащих однопараметрическим группам G^1, допускаемых системой* (1.74).

В дальнейшем эту группу будем обозначать символом G.

Оказывается, что в важных для различных приложений случаях, когда пространство L конечномерно, имеет место совпадение $\Omega = G$.

Рассмотрим далее ряд **примеров** вычисления групп симметрий дифференциальных уравнений. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением уравнений эволюционного типа.

Пример 1.4. Рассмотрим уравнение теплопроводности для одномерного стержня

$$u_t = u_{xx}, \tag{1.77}$$

где коэффициент диффузии положен равным единице.

Переписав уравнение (1.77) в виде

$$F = u_t - u_{xx} = 0,$$

видим, что оно определяет поверхность (гиперплоскость) в пространстве $\underset{2}{V}$, где $V = \langle t, x, u\rangle$. Поэтому здесь оператор v имеет вид

$$\mathrm{v} = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u. \tag{1.78}$$

В соответствии с теоремой 1.6 нам необходимо знать второе продолжение $\underset{2}{\mathrm{v}}$ оператора v (1.78), которое совпадает с оператором (1.65).

Далее находим:

$$\underset{2}{\mathrm{v}}F = \varphi^t - \varphi^{xx}.$$

Поскольку уже первые дифференцирования

$$D_tF = u_{tt} - u_{txx}, \quad D_xF = u_{tx} - u_{xxx}$$

выводят нас за пределы пространства $\underset{2}{V}$, то условие инвариантности (1.75) приобретает вид

$$\varphi^t - \varphi^{xx}\big|_{u_t = u_{xx}} = 0. \tag{1.79}$$

Следовательно, для построения определяющей системы нам нужно в правых частях равенств (1.66), (1.70) заменить u_t на u_{xx} и полученные выражения подставить в левую часть равенства (1.79). Приходим к равенству:

$$\begin{aligned}\eta_t - \eta_{xx} &+ u_x[\xi_{xx} - \xi_t - 2\eta_{xu}] + u_x^2[2\xi_{xu} - \eta_{uu}] + u_x^3\xi_{uu} + \\ &+ u_{xx}[\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x] + u_{tx}[2\tau_x] + u_xu_{tx}[2\tau_u] + \\ &+ u_xu_{xx}[2\xi_u + 2\tau_{xu}] + u_x^2u_{xx}[\tau_{uu}] = 0.\end{aligned} \tag{1.80}$$

Коэффициенты, которые стоят возле различных одночленов частных производных первого и второго порядка функции u, являются функциями переменных t, x, u и не зависят от производных. Поэтому равенство (1.80) будет выполняться тогда и только тогда, когда эти коэффициенты равняются нулю:

$$\begin{aligned} u_x^2u_{xx}:&\quad \tau_{uu} = 0,\\ u_xu_{xx}:&\quad 2\xi_u + 2\tau_{xu} = 0,\\ u_xu_{tx}:&\quad 2\tau_u = 0,\\ u_{tx}:&\quad 2\tau_x = 0,\\ u_{xx}:&\quad \tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0,\\ u_x^3:&\quad \xi_{uu} = 0,\\ u_x^2:&\quad 2\xi_{xu} - \eta_{uu} = 0,\\ u_x:&\quad \xi_{xx} - \xi_t - 2\eta_{xu} = 0,\\ 1:&\quad \eta_t - \eta_{xx} = 0.\end{aligned} \tag{1.81}$$

Процедура решения определяющих уравнений (1.81) элементарна. В самом деле, из третьего и четвертого уравнений следует, что $\tau = \tau(t)$, а поэтому второе уравнение приобретает вид:

$$\xi_u = 0,$$

то есть $\xi = \xi(t, x)$. Далее, первое и шестое уравнения системы (1.81) для найденных значений функций τ и ξ удовлетворяются, а остальные уравнения приобретают такой вид:

$$\tau_t = 2\xi_x, \quad \eta_{uu} = 0, \quad \xi_{xx} - \xi_t = 2\eta_{xu}, \quad \eta_t - \eta_{xx} = 0. \tag{1.82}$$

Из второго уравнения системы (1.82) следует, что функция η является линейной функцией относительно переменной u

$$\eta = \alpha(t, x)u + \beta(t, x),$$

а из первого уравнения получаем, что

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \gamma(t).$$

Подстановка полученных значений η и ξ в третье и четвертое уравнение (1.82) приводит к таким равенствам:

$$-\frac{1}{2}\tau_{tt}x - \gamma_t = 2\alpha_x, \tag{1.83}$$

$$(\alpha_t - \alpha_{xx})u + \beta_t - \beta_{xx} = 0. \tag{1.84}$$

Поскольку $\tau = \tau(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, то из равенства (1.83) следует, что α — функция не более чем второго порядка по x:

$$\alpha = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\gamma_t x + \theta(t).$$

Поскольку в (1.84) α и β не зависят от переменной u, то равенство (1.84) эквивалентно таким двум:

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \tag{1.85}$$

$$\beta_t - \beta_{xx} = 0. \tag{1.86}$$

Подставляя найденное значение α в (1.85) и учитывая, что $\tau = \tau(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\theta = \theta(t)$, приходим к уравнениям

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \gamma_{tt} = 0, \quad \theta_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt},$$

откуда следует, что

$$\tau = C_1t^2 + C_2t + C_3, \quad \gamma = C_4t + C_5, \quad \theta = -\frac{1}{2}C_1t + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные интегрирования.

В соответствии с этим получаем, что решениями системы (1.81) являются функции

$$\tau = C_1t^2 + C_2t + C_3,$$

$$\xi = C_1tx + \frac{1}{2}C_2x + C_4t + C_5,$$

$$\eta = -\frac{1}{2}C_1\left(x^2 + 2t\right)u - \frac{1}{2}C_4xu + C_6u + \beta(t, x),$$

где β — произвольное решение уравнения теплопроводности (1.86).

Отсюда следует, что пространство L составляют такие векторные поля (или, что то же самое, инфинитезимальные операторы):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - \left(x^2 + 2t\right)u\partial_u,\\
&\mathrm{v}_2 = 2t\partial_t + x\partial_x,\\
&\mathrm{v}_3 = \partial_t,\\
&\mathrm{v}_4 = 2t\partial_x - xu\partial_u,\\
&\mathrm{v}_5 = \partial_x,\\
&\mathrm{v}_6 = u\partial_u,\\
&\mathrm{v}_\infty = \beta(t,x)\partial_u, \quad \beta_t = \beta_{xx}.
\end{aligned}$$

Обозначения v_∞ употребляют для того, чтобы подчеркнуть наличие бесконечного множества операторов симметрии. В таком случае еще говорят: оператор порождает *бесконечнопараметрическую группу инвариантности*, или *бесконечномерную алгебру симметрии* уравнения (1.77).

Пример 1.5. Возвратимся к уравнению (1.36) и дадим ответ на первый из поставленных в конце пункта 1.2.1 вопросов.

Здесь, как и в примере 1.4, уравнение (1.36) определяет поверхность в пространстве $\underset{2}{V}$, где $V = \langle t, x, u\rangle$. Поэтому оператор v имеет вид (1.78), а условие инвариантности совпадает с таким равенством:

$$\varphi^t - \lambda t\varphi^{xx} - \lambda\tau u_{xx} - \varphi^x[\ln|tu_x| + 1] - t^{-1}u_x\tau\Big|_{[F]} = 0,$$

где условие перехода на многообразие $[F]$ означает замену в выражениях (1.66), (1.67), (1.70) u_t на $\lambda tu_{xx} + u_x\ln|tu_x|$.

Выполнив довольно громоздкие преобразования и проведя “расщепление” полученного равенства, приходим к определяющим уравнениям, которые здесь даны уже в приведенном виде:

(a) $\tau_x = \tau_u = 2\lambda t\xi_u = \xi_{uu} = \eta_x = \eta_t = 0;$

(b) $\lambda t\eta_{uu} = 0, \quad \xi_x = \tau_t;$

(c) $\xi_t + t^{-1}\tau - \lambda t\xi_{xx} + \eta_u - \xi_x = 0;$

(d) $\lambda[2t\xi_x - \tau - t\tau_t] = 0.$

Заметим, что, говоря о приведенном виде уравнений (a)–(d), мы предполагаем некоторые предварительные упрощения полученных уравнений, как-то: исключение из уравнений дифференциальных следствий уравнений (a).

Поскольку $\lambda \neq 0$, то из уравнений (a) следует, что

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(t,x), \quad \eta = \eta(u),$$

из уравнений (b) — что функция η является линейной относительно переменной u, а функция ξ — линейной функцией относительно переменной x:

$$\eta = C_1u + C_2, \tag{1.87}$$

$$\xi = \tau_t x + \alpha(t), \tag{1.88}$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, α — произвольная гладкая функция переменной t.

Подстановка значения ξ (1.88) в уравнение (d) приводит к уравнению

$$t\tau_t - \tau = 0,$$

откуда следует, что

$$\tau = C_3t, \quad C_3 \in \mathbb{R}. \tag{1.89}$$

Наконец, подставляя значения η и ξ (1.87), (1.88) в (c) и учитывая (1.89), приходим к уравнению

$$\alpha_t = -C_1,$$

откуда следует, что

$$\alpha = -C_1t + C_4, \quad C_4 \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с полученными значениями τ и α, видим, что решениями уравнений (a)–(d) являются функции

$$\begin{aligned}
&\tau = C_3t,\\
&\xi = C_3x - C_1t + C_4,\\
&\eta = C_1u + C_2,
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные действительные постоянные.

Отсюда следует, что пространство L является четырехмерным пространством и его базис составляют такие четыре оператора:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 = t\partial_x - u\partial_u,\\
&\mathrm{v}_2 = \partial_u,\\
&\mathrm{v}_3 = t\partial_t + x\partial_x,\\
&\mathrm{v}_4 = \partial_x.
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться (решив для каждого оператора v_i $(i = 1, \ldots, 4)$ уравнение Ли (1.7)), что оператор v_1 является оператором группы G^1 преобразований (1.38), операторы v_4 и v_2 — операторами группы сдвигов пространственной координаты и функции, а оператор v_3 — оператором группы однородных растяжений временной и пространственной координат, которые были приведены в пункте 1.2.1.

Следовательно, группа G, которую допускает уравнение (1.36), содержит только эти преобразования. Отметим, что в таких случаях говорят: уравнение (1.36) *допускает четырехпараметрическую группу инвариантности.*

Пример 1.6. Найдем симметрию известного в различных приложениях уравнения

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \tag{1.90}$$

Уравнение (1.90) еще называют *уравнением Бюргерса.*

Здесь, как и в предыдущих примерах, уравнение (1.90) определяет поверхность в пространстве $\underset{2}{V}$, где $V = \langle t, x, u\rangle$, поэтому оператор v имеет вид (1.78) и условие инвариантности совпадает с равенством

$$\varphi^t - \varphi^{xx} - \eta u_x - u\varphi^x \big|_{[F]} = 0,$$

где условие перехода на многообразие означает замену u_t в выражениях (1.66), (1.67), (1.70) на $u_{xx} + uu_x$.

Осуществив необходимые преобразования, приходим к таким определяющим уравнениям (здесь мы, как и во время рассмотрения примера 1.4, проводим полное исследование):

$$\begin{aligned}
1:&\quad \eta_t - \eta_{xx} - u\eta_x = 0;\\
u_x:&\quad u(\eta_u - \tau_t) - \xi_t - \eta - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} + u\tau_{xx} - u(\eta_u - \xi_x - u\tau_x) = 0;\\
u_x^2:&\quad -u^2\tau_u - u\xi_u - \eta_{uu} + 2\xi_{xu} + 2u\tau_{xu} + u(u\tau_u + \xi_u) = 0;\\
u_x^3:&\quad u\tau_{uu} + \xi_{uu} = 0;\\
u_{tx}:&\quad 2\tau_x = 0;\\
u_{xx}:&\quad \eta_u - \tau_t - \eta_u + 2\xi_x + \tau_{xx} + u\tau_x = 0;\\
u_x u_{tx}:&\quad 2\tau_u = 0;\\
u_x u_{xx}:&\quad -2\tau_u - \xi_u + 2\tau_{xu} + u\tau_u + 3\xi_u + u\tau_u = 0;\\
u_x^2 u_{xx}:&\quad \tau_{uu} = 0;\\
u_{xx}^2:&\quad -\tau_u + \tau_u = 0.
\end{aligned}$$

Уже предварительный анализ этой системы показывает, что $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t,x)$. Учитывая это и проведя возможные упрощения, далее рассматриваем такую систему:

(a) $\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(t,x);$

(b) $\eta_t - \eta_{xx} - u\eta_x = 0;$

(c) $u\tau_t + \xi_t + \eta + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} - u\xi_x = 0;$

(d) $\eta_{uu} = 0;$

(e) $\tau_t = 2\xi_x.$

Поскольку имеют место соотношения (a), то из (e) получаем, что

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \alpha(t). \tag{1.91}$$

Из уравнения (d) следует, что функция η — линейная по переменной u:

$$\eta = \beta(t,x)u + \gamma(t,x). \tag{1.92}$$

Подставив значение ξ (1.91) и η (1.92) в уравнение (c), приходим к равенству

$$u\left(\beta + \frac{1}{2}\tau_t\right) + \gamma + \frac{1}{2}\tau_{tt}x + \alpha_t + 2\beta_x = 0,$$

которое распадается на два уравнения

$$\beta + \frac{1}{2}\tau_t = 0, \quad \gamma + \frac{1}{2}\tau_{tt}x + \alpha_t + 2\beta_x = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\beta = -\frac{1}{2}\tau_t, \quad \gamma = -\frac{1}{2}\tau_{tt}x - \alpha_t. \tag{1.93}$$

Наконец, подставив значение η (1.92), где β и γ имеют вид (1.93), в уравнение (b), приходим к равенству

$$-\frac{1}{2}\tau_{ttt}x - \alpha_{tt} = 0,$$

которое распадается на уравнения

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \alpha_{tt} = 0.$$

Следовательно,

$$\tau = C_1t^2 + C_2t + C_3, \quad \alpha = C_4t + C_5,$$

и, в соответствии с этим, решениями определяющих уравнений являются такие функции:

$$\begin{aligned}
&\tau = C_1t^2 + C_2t + C_3,\\
&\xi = C_1tx + \frac{1}{2}C_2x + C_4t + C_5,\\
&\eta = -C_1tu - \frac{1}{2}C_2u - C_1x - C_4,
\end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_5$ — произвольные действительные постоянные.

Отсюда следует, что пространство L для уравнения Бюргерса (1.90) составляют операторы

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}_1 = t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u,\\
&\mathrm{v}_2 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\
&\mathrm{v}_3 = \partial_t,\\
&\mathrm{v}_4 = t\partial_x - \partial_u,\\
&\mathrm{v}_5 = \partial_x.
\end{aligned}$$

Значит, группа G для уравнения (1.90) является пятипараметрической группой локальных преобразований.

Завершая параграф, мы предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть несколько задач.

1.2.4. Практикум

Задание 1.4. Используя инфинитезимальный критерий инвариантности (1.75) и формулы (1.65)–(1.70), построить группы преобразований, которые допускают такие уравнения:

1) $u_t = u^{-4}u_{xx} - 2u^{-5}u_x^2$;

2) $u_t = u_{xx} + u_x^2$;

3) $u_t = u_x^{-2}u_{xx} + u_x^{-1}$;

4) $u_t = uu_{xx} + u_x^2$.

Заметим, что второе уравнение из списка, как и уравнение из примера 1.6, называют *уравнением Бюргерса (модифицированным уравнением Бюргерса)*. Если продифференцировать его по x и положить $v = u_x$, то полученное уравнение будет иметь вид

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x.$$

Коэффициент 2 возле второго слагаемого в правой части полученного равенства легко сделать равным 1 (например, положить $v \to \frac{1}{2}v$).

Последнее уравнение из списка — также известное в приложениях уравнение. Оно возникает в различных задачах теории нелинейной фильтрации, и его называют *уравнением Буссинеска* [56].

Задание 1.5. Пусть пространство $V = X \times U$ такое, что $X = \mathbb{R}^3 = \langle t, x, y\rangle$, $U = \mathbb{R}^1 = \langle u\rangle$. Для оператора v, определенного в пространстве V:

$$\mathrm{v} = \tau(t,x,y,u)\partial_t + \xi^1(t,x,y,u)\partial_x + \xi^2(t,x,y,u)\partial_y + \eta(t,x,y,u)\partial_u,$$

второе продолжение имеет вид

$$\underset{2}{\mathrm{v}} = \mathrm{v} + \varphi^t\partial_{u_t} + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^y\partial_{u_y} + \varphi^{tt}\partial_{u_{tt}} + \varphi^{tx}\partial_{u_{tx}} + \varphi^{ty}\partial_{u_{ty}} + \\ + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \varphi^{xy}\partial_{u_{xy}} + \varphi^{yy}\partial_{u_{yy}}.$$

Найти значение координат φ^{tt}, φ^{xx}, φ^{yy} в операторе $\underset{2}{\mathrm{v}}$.

Заметим, что

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_tD_t(\tau) - u_xD_t(\xi^1) - u_yD_t(\xi^2),$$
$$\varphi^{tt} = D_t(\varphi^t) - u_{tt}D_t(\tau) - u_{tx}D_t(\xi^1) - u_{ty}D_t(\xi^2),$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ty}\frac{\partial}{\partial u_y} + \cdots .$$

Задание 1.6. Используя найденные в задании 1.5 формулы продолжений, построить группы преобразований, которые допускают такие уравнения (здесь $u = u(t,x,y)$):

1) $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = e^u$;

2) $u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 = 1$;

3) $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = \sin u$;

4) $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

Заметим, что первое и третье уравнения из этого списка называют двухмерными уравнениями Лиувилля и Даламбера соответственно, второе уравнение — релятивистским двухмерным аналогом уравнения Гамильтона, а последнее уравнение — это линейное уравнение теплопроводности.

Задание 1.7. Построить группы преобразований, которые допускает *уравнение Кортевега–де Фриза*

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0.$$

При рассмотрении этой задачи необходимо осуществить построение

$$\varphi^{xxx} = D_x(\varphi^{xx}) - u_{xxt}D_x(\tau) - u_{xxx}D_x(\xi)$$

для оператора v (1.78), использовав уже известную формулу (1.70).

1.3. Алгебры Ли операторов симметрии дифференциальных уравнений

В предыдущем параграфе был рассмотрен метод Ли–Овсянникова (инфинитезимальный метод) исследования симметрийных свойств уравнений в частных производных. Оказалось, что симметрийные свойства рассмотренных уравнений полностью определяются некоторым набором инфинитезимальных операторов, которые допускают данные уравнения. Также было отмечено, что такие операторы составляют базис линейных пространств. В этом параграфе мы будем изучать структуру таких пространств (алгебр Ли операторов симметрии), а также остановимся на необходимых в дальнейших исследованиях сведениях из теории абстрактных групп и алгебр Ли.

Изложение начинаем из рассмотрения примера уравнения Бюргерса.

1.3.1. Предварительное обсуждение на примере уравнения Бюргерса

Рассматривая пример 1.6, мы получили, что базис пространства L для уравнения Бюргерса (1.90) составляют операторы (для удобства изложения они размещены в несколько ином порядке):

$$\begin{aligned} &\mathrm{v}_1 = \partial_t, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_x, \quad \mathrm{v}_3 = t\partial_x - \partial_u, \\ &\mathrm{v}_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \\ &\mathrm{v}_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u, \end{aligned} \tag{1.94}$$

определенные в пространстве $V = \langle t, x, u\rangle$.

Для построения соответствующих полученным операторам однопараметрических групп нужно найти решения задач Коши (1.7) для каждого из операторов (1.94), или, как еще говорят, найти *образы точки* $(t, x, u) \in V$ *в результате преобразования* $\exp(a_i \mathrm{v}_i)$*, где* a_i $(i = 1, \ldots, 5)$ — *произвольные постоянные (параметры)*.

Проведя соответствующие вычисления, получаем, что

$$\begin{aligned} &G_1^1: \quad (t + a_1,\ x,\ u); \\ &G_2^1: \quad (t,\ x + a_2,\ u); \\ &G_3^1: \quad (t,\ x + a_3 t,\ u - a_3); \\ &G_4^1: \quad \left(te^{2a_4},\ xe^{a_4},\ ue^{-a_4}\right); \\ &G_5^1: \quad \left(\frac{t}{1 - a_5 t},\ \frac{x}{1 - a_5 t},\ u - a_5(ut + x)\right). \end{aligned}$$

Возникает естественный вопрос: нельзя ли объединить эти пять однопараметрических групп G_i^1 $(i = 1, \ldots, 5)$, которые допускает уравнение Бюргерса и которые порождаются операторами (1.94), в общую многопараметрическую (в данном случае пятипараметрическую) группу?

В дальнейшем преобразования, которые порождают группу G_i^1, будем обозначать T_{a_i}. Так, например,

$$T_{a_1}: \quad \bar{t} = t + a_1, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = u.$$

Возьмем два преобразования T_{a_2} и T_{a_3}. В результате последовательного выполнения T_{a_3} и T_{a_2} получим преобразование

$$T_{a_2}T_{a_3}: \quad \bar{t} = t, \quad \overline{x} = x + a_3 t + a_2, \quad \overline{u} = u - a_3,$$

которое уже зависит от двух параметров a_2, a_3. Обозначим через $a = (a_3, a_2)$ вектор-параметр с двумя компонентами и запишем двухпараметрическое семейство преобразований $T_{a_2}T_{a_3}$ как $\{T_a\}$.

Выполнив последовательно два преобразования из этого семейства, которые отвечают значениям $a = (a_3, a_2)$ и $b = (b_3, b_2)$, получим преобразование

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + (a_3 + b_3)t + a_2 + b_2, \quad \tilde{u} = u - a_3 - b_3,$$

которое снова принадлежит этому же семейству $\{T_a\}$ и которое получается для значений параметра $c = (c_3, c_2)$ с компонентами $c_3 = a_3 + b_3$, $c_2 = a_2 + b_2$. Следовательно, здесь имеет место групповая операция

$$T_b T_a = T_{\varphi(a,b)}, \tag{1.95}$$

которая определяется векторной функцией

$$\varphi(a, b) = a + b. \tag{1.96}$$

Можно сделать вывод, что семейство $\{T_a\}$ порождает *двухпараметрическую группу* $G = G^2$. Поскольку функция φ, которая определяет групповое свойство, является симметричной ($\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$), то эта группа G^2 *коммутативна*:

$$T_b T_a = T_a T_b.$$

В первом параграфе (п. 1.1.2) было показано, что в однопараметрической группе произвольный закон умножения (1.95) можно привести к виду (1.96). Следовательно, любая однопараметрическая группа есть коммутативная (или, еще говорят, *абелевая*). Для случая многопараметрических групп это не выполняется.

Пример некоммутативной двухпараметрической группы мы получим, повторив проведенное построение для преобразований T_{a_2}, T_{a_4}. Композиция преобразований T_{a_4} и T_{a_2}

$$T_{a_2}T_{a_4}: \quad \bar{t} = te^{2a_4}, \quad \overline{x} = xe^{a_4} + a_2, \quad \overline{u} = ue^{-a_4}$$

является двухпараметрическим семейством $\{T_a\}$ из $a = (a_4, a_2)$. Здесь результат последовательного выполнения двух преобразований T_a и T_b из семейства $\{T_a\}$ определяется формулами

$$\tilde{t} = te^{2(a_4+b_4)}, \quad \tilde{x} = xe^{a_4+b_4} + a_2e^{b_4} + b_2, \quad \tilde{u} = ue^{-a_4-b_4}$$

и является тождественным выполнению третьего преобразования T_c из этого семейства со значением параметра $c = (c_4, c_2)$:

$$\tilde{t} = te^{2c_4}, \quad \tilde{x} = xe^{c_4} + c_2, \quad \tilde{u} = ue^{-c_4}.$$

Следовательно, $c_4 = a_4 + b_4$, $c_2 = a_2e^{b_4} + b_2$, и семейство $\{T_a\}$ образует двухпараметрическую группу G^2. Эта группа некоммутативна, поскольку определенное выше выражение для $c = \varphi(a,b)$ несимметрично:

$$\varphi(a,b) \neq \varphi(b,a).$$

Возьмем далее преобразования T_{a_1} и T_{a_3}. Их композиция

$$T_{a_3}T_{a_1}: \quad \bar{t} = t + a_1, \quad \bar{x} = x + a_3t + a_1a_3, \quad \bar{u} = u - a_3$$

является двухпараметрическим семейством $\{T_a\}$ из $a = (a_1, a_3)$. Результат последовательного выполнения двух преобразований T_a и T_b из семейства $\{T_a\}$ определяется формулами

$$\tilde{t} = t + a_1 + b_1, \quad \tilde{x} = x + (a_3 + b_3)t + a_1a_3 + a_1b_3 + b_1b_3,$$
$$\tilde{u} = u - a_3 - b_3.$$

Для того чтобы выполнение третьего преобразования T_c из данного семейства $\{T_a\}$ привело к тому же результату

$$\tilde{t} = t + c_1, \quad \tilde{x} = x + c_3t + c_1c_3, \quad \tilde{u} = u - c_3,$$

параметр $c = (c_1, c_3)$ должен удовлетворять равенству

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_3 = a_3 + b_3, \quad c_1c_3 = a_1a_3 + a_1b_3 + b_1b_3.$$

Эта переопределенная система уравнений относительно c_1, c_3 является несовместной, когда a и b произвольные. Действительно, подстановка в последнее уравнение значений c_1, c_3 из первых двух уравнений приводит к равенству

$$a_3b_1 = 0.$$

Следовательно, преобразования T_{a_1}, T_{a_3} не порождают группу. Но их можно включить в трехпараметрическое семейство преобразований, которое порождают преобразования T_{a_1}, T_{a_2}, T_{a_3}. Нетрудно убедиться, что эти преобразования порождают группу G^3. В самом деле,

$$T_{a_2}T_{a_3}T_{a_1}: \quad \bar{t} = t + a_1, \quad \bar{x} = x + a_3t + a_1a_3 + a_2, \quad \bar{u} = u - a_3.$$

Это трехпараметрическое семейство $\{T_a\}$, где $a = (a_1, a_3, a_2)$, содержит преобразование $T_{a_3}T_{a_1}$ как частный случай ($a_2 = 0$) и, кроме этого, порождает группу G^3, поскольку для произведения преобразований T_bT_a из этого семейства

$$T_bT_a: \quad \tilde{t} + a_1 + b_1,$$
$$\tilde{x} = x + (a_3 + b_3)t + a_1a_3 + a_1b_3 + b_1b_3 + a_2 + b_2,$$
$$\tilde{u} = u - a_3 - b_3$$

существует преобразование $T_c = T_bT_a$

$$T_c: \quad \tilde{t} = t + c_1, \quad \tilde{x} = x + c_3t + c_1c_3 + c_2, \quad \tilde{u} = u - c_3,$$

где c — вектор с компонентами

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2 - a_3b_1, \quad c_3 = a_3 + b_3.$$

Очевидным является то, что здесь $\varphi(a,b) \neq \varphi(b,a)$. Следовательно, группа G^3, порожденная операторами v_1, v_2, v_3, является некоммутативной.

Естественно, наконец, выяснить, порождает ли группу пятипараметрическое семейство преобразований, которое составляют преобразования $T_{a_1}, \ldots, T_{a_5}$, и более подробно остановиться на понятии многопараметрической группы локальных преобразований, которую мы уже фактически ввели в рассмотрение.

Вообще, *локальной группой* называют топологическое пространство G, если в нем существует элемент (единица) $e \in G$ и такие окрестности U, V (где $V \subset U$) элемента e, что на $U \times U$ определено отображение (локальная групповая операция на U) $\circ$: $U \times U \to U$, которое удовлетворяет таким условиям:

1) $V \circ V \subset U$;

2) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для всех $a, b, c \in V$;

3) $e \circ a = a \circ e = a$ для всех $a \in U$;

4) для любого $a \in V$ существует (обратный) элемент $a^{-1} \subset U$ такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$;

5) отображения $(a, b) \mapsto a \circ b^{-1}$ непрерывно на $U \times V$.

Окрестности U и V, которые фигурируют в определении, не определяются однозначно: вместо U и V можно взять соответствующим образом выбранные меньшие окрестности $U' \subset U$, $V' \subset V$. Эта произвольность в определении локальной группы обеспечивает необходимую в локальных проблемах всеобщность вводимого понятия и расширяет область применений теоретико-групповых методов.

Замкнутое подмножество H локальной группы G, которое содержит единицу $e \in G$, называется *подгруппой* локальной группы G, если оно является локальной группой относительно локальной групповой операции в G. Если при этом обнаружится такая открытая окрестность $U \subset G$ единицы, что $a^{-1}ba \in H$ для всех элементов $a \in U$ и $b \in U \cap H$, то H называется *инвариантной подгруппой* группы G.

На множестве локальных групп вводится отношение эквивалентности при помощи понятия локального изоморфизма, который определяется таким образом. Пусть G и G' — две локальных группы, e и e' — их единицы, а окрестности U, V и U', V' элементов e и e', соответственно, выбраны так, чтобы для них выполнялись аксиомы 1)–5). Пусть, далее, $\theta : U \to U'$ — такой гомеоморфизм, что $\theta(V) \subset V'$, и для всех $a, b \in V$ выполняется условие $\theta(a, b) = \theta(a)\theta(b)$. Тогда отображение θ называется *локальным изоморфизмом*, а сами группы G и G' — *локально изоморфными*. Обратное отображение θ^{-1} (или, возможно, его сужение на некоторую окрестность элемента e') также является локальным изоморфизмом. Локальный изоморфизм удовлетворяет обычным свойствам изоморфизма групп: $\theta(e) = e'$, $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$ для любого $a \in V$.

Локальная группа G, в которой введены аналитические координаты, называется *локальной группой Ли*. Если при этом размерность системы локальных координат равна r, то G называют *r-мерной (r-параметрической) локальной группой Ли* и обозначают G^r.

Локальная группа Ли G^r называется *разрешимой*, если существует ряд

$$G^r \supset G^{r-1} \supset \cdots \supset G^1$$

подгрупп размерностей $r, r-1, \ldots, 1$, такой, что каждая подгруппа G^{i-1} $(i = 2, \ldots, r)$ является инвариантной подгруппой в локальной группе Ли G^i. Группа G^r называется *простой*, если она не содержит инвариантных подгрупп, отличных от G^r и $\{e\}$, и *полупростой*, если она не содержит разрешимых инвариантных подгрупп, отличных от $\{e\}$.

Изучение структуры локальных групп Ли и их применения (в частности, для исследования дифференциальных уравнений) основывается на возможности описания локальной группы Ли в терминах ее алгебры Ли, которая является более простым для изучения алгебраическим объектом.

В частности, простой и ясный ответ о том, порождает ли группу пятипараметрическое семейство преобразований, которое составляют преобразования $T_{a_1}, \ldots, T_{a_5}$, мы получим после рассмотрения ряда понятий и фактов из теории конечномерных алгебр Ли.

1.3.2. Алгебры Ли. Необходимые понятия и сведения

Пусть P — поле действительных (или комплексных) чисел, L — векторное пространство (здесь — конечной размерности) над полем P. Векторное пространство L называется *алгеброй Ли над полем P*, если в L задано правило композиции $(x, y) \to [x, y]$ для любых $x, y \in L$, которое удовлетворяет таким аксиомам:

(a) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ для $x, y, z \in L$ и $\alpha, \beta \in P$ (линейность);

(b) $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in L$ (антисимметричность);

(c) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ для всех $x, y, z \in L$ (тождество Якоби).

Операцию [,] называют *умножением Ли* или *операцией коммутирования*.

Из аксиомы (c) следует, что, вообще говоря, умножение Ли является неассоциативной операцией. Если P — поле действительных (комплексных) чисел, то L называют *действительной (комплексной) алгеброй Ли*. Алгебру Ли называют *абелевой* или *коммутативной*, если $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in L$.

Рассмотрим два подмножества M и N векторов из алгебры Ли L и обозначим через $[M, N]$ линейную оболочку всех векторов вида $[x, y]$, $x \in M$, $y \in N$. Если M и N — линейные подпространства алгебры Ли, то имеют место такие соотношения:

$$[M_1 + M_2, N] \subset [M_1 N] + [M_2, N];$$
$$[M, N] = [N, M],$$
$$[L, [M, N]] \subset [M, [N, L]] + [N, [L, M]]. \tag{1.97}$$

Соотношения (1.97) легко проверяются с помощью аксиом (a)–(c). Подпространство N алгебры L называется *подалгеброй* алгебры L, если $[N, N] \subset N$. Если же имеет место соотношение $[L, N] \subset N$, то N *называется* идеалом алгебры L. Понятно, что идеал алгебры Ли автоматически является ее подалгеброй. *Максимальный идеал* N, который удовлетворяет условию $[L, N] = 0$, называется *центром* алгебры L. Поскольку $[N, N] = 0$, то центр алгебры Ли всегда абелев.

Пусть базис векторного пространства L составляют векторы $e_1, \ldots, e_n$, то есть размерность пространства L равна n (будем обозначать L_n). Тогда, вследствие линейности, коммутатор $z = [x, y]$, выраженный через координаты ($x = x^i e_i,\ y = y^i e_i, \ldots$), приобретает вид

$$z^i = [x, y]^i = c^i_{jk} x^j y^k, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.98}$$

где $[e_j, e_k] = c^i_{jk} e_i$ (напоминаем, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в пределах их изменения). Числа c^i_{jk} называются *структурными константами* алгебры Ли L. Из аксиом (b), (c) следует, что структурные константы c^i_{jk} удовлетворяют таким условиям:

$$c^i_{jk} = -c^i_{kj},$$
$$c^p_{is} c^s_{jk} + c^p_{js} c^s_{ki} + c^p_{ks} c^s_{ij} = 0.$$

Отметим, что тип алгебры Ли полностью определяется ее структурными константами. Существование подалгебр и идеалов алгебры Ли L также выражается в некоторых, совершенно определенных, ограничениях на структурные константы. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базисные элементы подалгебры, то структурные константы должны удовлетворять соотношениям

$$c^s_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad i, j \leqslant k, \quad s > k,$$

а если они являются базисными элементами идеала, то

$$c^s_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad i \leqslant k, \quad s > k \quad \text{и любого} \quad j.$$

Несмотря на название, вообще говоря, структурные константы не являются постоянными величинами в обычном понимании этого термина. Действительно, из определения (1.98) следует, что в результате замены базиса L величины c^k_{ij} преобразуются как тензор третьего ранга с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами.

Рассмотрим **примеры** некоторых известных алгебр Ли.

1. Пусть L — множество всех косоэрмитовых 2×2-матриц с нулевым следом. Очевидно, что L имеет (действительную) размерность три. Выберем в L базис

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

и определим в L коммутатор $[x, y]$ таким образом:

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in L. \tag{1.99}$$

Нетрудно убедиться, что этот коммутатор удовлетворяет аксиомам (a)–(c) для умножения Ли. Используя (1.99), находим, что e_i удовлетворяют такие коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1$$

или

$$[e_i, e_k] = \varepsilon_{ikl} e_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3,$$

где ε_{ikl} — полностью антисимметричный тензор в $\mathbb{R}^3$. Элементами в L являются линейные комбинации e_i с действительными коэффициентами.

Следовательно, L — трехмерная действительная алгебра Ли со структурными константами вида $c^l_{ik} = \varepsilon_{ikl}$.

Определенную так алгебру L обозначают символом $su(2)$ (или $so(3)$) в соответствии с классификацией алгебр Ли, которая будет приведена ниже. Отметим, что алгебра $so(3)$ изоморфна алгебре Ли группы поворотов трехмерного пространства. Заметим также, что матрицы $\sigma_k = 2ie_k$ называются *матрицами Паули* и удовлетворяют соотношению $[\sigma_i, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l$.

2. Пусть L — векторное пространство всех действительных $n \times n$-матриц (s_{ik}), $i, k = 1, 2, \ldots, n$, над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Это векторное пространство L с умножением Ли (1.99) также является действительной алгеброй Ли, которую называют *полной линейной действительной* алгеброй Ли и обозначают символом $gl(n, \mathbb{R})$. Аналогично вводится в рассмотрение *полная линейная алгебра Ли* над полем $\mathbb{P}$, которую обозначают $gl(n, \mathbb{P})$, как ассоциативная алгебра всех $n \times n$-матриц над полем $\mathbb{P}$.

3. Важную роль в теории алгебр Ли играет такой идеал алгебры $gl(n, \mathbb{P})$:

$$sl(n, \mathbb{P}) = \{S \in gl(n, \mathbb{P}) : \ \operatorname{tr} S = 0\},$$

где $\operatorname{tr} S$ — след матрицы $S = (s_{ij})$, то есть $\operatorname{tr} S = \operatorname{tr}(s_{ij}) = s_{11} + s_{22} + \cdots + s_{nn}$. Алгебра $sl(n, \mathbb{P})$ называется *специальной линейной алгеброй Ли*.

4. Нетрудно убедиться, что подмножество M, которое состоит из всех кососимметрических матриц S ($S^T = -S$), также замкнуто относительно

умножения Ли (1.99). Поэтому M является подалгеброй алгебры $gl(n,\mathbb{P})$, которую обозначают $o(n,\mathbb{P})$ (в случае когда $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ — это $o(n)$):

$$o(n,\mathbb{P}) = \{S \in gl(n,\mathbb{P}):\ S + S^T = 0\}.$$

Здесь S^T означает матрицу, транспонированную к S.

Алгебру $o(n,\mathbb{P})$ называют *ортогональной алгеброй Ли.*

5. Пусть i_m — единичная $m\times m$-матрица и

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & i_m \\ -i_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебру

$$sp(m,\mathbb{P}) = \{S \in gl(2m,\mathbb{P}):\ S^T\mathcal{J} + \mathcal{J}S = 0\}$$

называют *симплектической алгеброй Ли.*

В $gl(n,\mathbb{R})$ можно ввести так называемый *базис Вейля*, выбрав в качестве базисных элементов e_{ij} $(i,j=1,\ldots,n)$, $n\times n$-матрицы вида

$$(e_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}, \tag{1.100}$$

которые удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}, \quad i,j,k,l = 1,\ldots,n. \tag{1.101}$$

Из (1.100) и (1.101) получаем структурные константы

$$c^{ij}_{sm,kr} = \delta^i_s\delta_{mk}\delta^j_r - \delta^i_k\delta_{rs}\delta^j_m.$$

Заметим, что базисные векторы $\tilde{e}_{ik}$ ортогональной алгебры Ли $o(n)$ могут быть выбранными в виде

$$\tilde{e}_{ik} = e_{ik} - e_{ki}, \quad i,k = 1,2,\ldots,n.$$

Комплексным расширением V_c действительного векторного пространства V является комплексное векторное пространство, которое состоит из всех элементов z вида $z = x+iy$, $x,y\in V$. Умножение элемента $z\in V_c$ на комплексное число $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ определяется по формуле

$$\gamma z = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x).$$

Комплексное расширение L^c действительной алгебры Ли L — это комплексная алгебра Ли, которая удовлетворяет таким условиям:

1) L^c — комплексное расширение действительного векторного пространства L;
2) умножение Ли в L^c определяется равенством

$$z = [z_1, z_2] = [x_1 + iy_1, x_2 + iy_2] = \\ = [x_1,x_2] - [y_1,y_2] + i[x_1,y_2] + i[y_1,x_2] \equiv x + iy.$$

Комплексную алгебру Ли L размерности n с базисом $\{e_i\}_1^n$ можно также рассматривать как действительную алгебру Ли размерности $2n$ с базисными векторами $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$. Определенную таким образом действительную алгебру Ли будем обозначать L^R (наоборот, действительная форма L^R комплексной алгебры Ли L^c — это действительная алгебра Ли, комплексным расширением которой является L^c).

Введем в рассмотрение четыре важных класса комплексных алгебр Ли. Комплексным расширением алгебры $gl(n,\mathbb{R})$ является множество всех комплексных $n\times n$-матриц с умножением Ли (1.99). Это расширение называют *полной комплексной линейной алгеброй Ли* и обозначают $gl(n,\mathbb{C})$. Подмножество всех комплексных $n\times n$-матриц с нулевым следом, которое является подалгеброй алгебры $gl(n,\mathbb{C})$, называют *специальной комплексной линейной алгеброй Ли* и обозначают $sl(n,\mathbb{C})$ или A_{n-1}.

Другие последовательности комплексных алгебр связаны с разными билинейными формами. Пусть $\Phi(\xi,\eta)$ — билинейная форма, определенная в m-мерном комплексном векторном пространстве V^m. Линейные преобразования x, которые действуют в V^m и удовлетворяют условию

$$\Phi(x\xi,\eta) + \Phi(\xi,x\eta) = 0, \quad \xi,\eta,\in V^m,$$

генерируют линейную алгебру Ли L. Действительно, если условие имеет место для x и y, то

$$\Phi([x,y]\xi,\eta) = \Phi(xy\xi,\eta) - \Phi(yx\xi,\eta) = -\Phi(\xi,[x,y]\eta),$$

где умножение Ли для x и y определено в виде (1.99).

Если билинейная форма $\Phi(\xi,\eta)$ невырождена и симметрическая (например, $\Phi = \xi_i\eta_i$), то L называется *ортогональной алгеброй Ли.* Для $m = 2n+1$, $n = 1,2,\ldots$, последовательность соответствующих алгебр обозначается $o(2n+1,\mathbb{C})$ или B_n, а для $m = 2n$ — $o(2n,\mathbb{C})$ или D_n.

Алгебры, связанные с невырожденными кососимметрическими билинейными формами, называются *симплектическими алгебрами Ли*. В алгебре известен факт, что кососимметрические формы в пространствах с нечетной размерностью всегда вырождены. Поэтому симплектические алгебры могут быть реализованы только в комплексных пространствах V^{2n}. Эти алгебры обозначают $sp(n, \mathbb{C})$ или C_n.

Алгебры A_n, B_n, C_n и D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ составляют совокупность *классических комплексных алгебр Ли*.

В дальнейшем мы встретимся с понятиями прямых сумм алгебр Ли и фактор-алгебр.

Пусть V_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — подпространства векторного пространства V и пусть

$$D = \sum_{i=1}^{k} V_i$$

является совокупностью всех векторов вида

$$d = \sum_{i=1}^{k} v_i, \quad v_i \in V_i, \quad i = 1, 2, \ldots k. \tag{1.102}$$

Если каждый вектор $d \in D$ единственным образом может быть представлен в виде (1.102), то говорят, что D является *прямой суммой* подпространств V_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и записывают

$$D = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k = \sum_{i=1}^{k} \oplus V_i. \tag{1.103}$$

Если алгебру Ли, как векторное пространство, можно записать в виде (1.103), то есть $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, и, кроме того, если

$$[L_i, L_i] \subset L_i, \quad [L_i, L_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

то об L говорят, что оно *раскладывается* в прямую сумму алгебр Ли $L_1, L_2, \ldots, L_k$, и тогда используют обозначение $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$.

Очевидно, что подалгебры L_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ являются идеалами алгебры L, поскольку

$$[L, L_i] = [L_i, L_i] \subset L_i.$$

Более того, если N — идеал подалгебры L_i, то N — также идеал алгебры L.

Пусть, далее, N — подалгебра некоторой алгебры Ли L. Введем в пространстве L отношение

$$x \simeq y \ (\mathrm{mod}\, N),$$

если $x - y \in N$ (то есть вектор x является суммой вектора y и некоторого вектора из N). Это отношение удовлетворяет таким свойствам:

- $x \simeq x$;
- если $x \simeq y$, то $y \simeq x$;
- если $x \simeq y$, $y \simeq z$, то $x \simeq z$.

Следовательно, введенное отношение является отношением эквивалентности. Вся алгебра L раскладывается на классы $K_x = x + N$ эквивалентных элементов, которые не пересекаются. Множество $\{K_x\}$ всех классов в общем случае не образовывает алгебру Ли: в самом деле, если

$$x_1 \simeq y_1 \ (\mathrm{mod}\, N), \quad \text{то есть} \quad x_1 = y_1 + n_1, \quad n_1 \in N;$$
$$x_2 \simeq y_2 \ (\mathrm{mod}\, N), \quad \text{то есть} \quad x_2 = y_2 + n_2, \quad n_2 \in N;$$

то

$$[x_1, x_2] = [y_1, y_2] + [y_1, n_2] + [n_1, y_2] + [n_1, n_2]. \tag{1.104}$$

Поэтому в общем случае соотношение

$$[x_1, x_2] \simeq [y_1, y_2] \ (\mathrm{mod}\, N) \tag{1.105}$$

не выполняется.

Но если подалгебра N является идеалом, то три последних члена в правой части (1.104) принадлежат N и тогда условие (1.105) выполняется. Полученная алгебра Ли называется *фактор-алгеброй Ли* алгебры L относительно N и обозначается L/N.

Рассмотрим **пример** алгебры Пуанкаре $p(1,3)$ с базисными элементами $J_{\alpha\beta}$, P_α $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, которая определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha},\\
&[J_{\mu\nu}, P_\alpha] = g_{\mu\alpha} P_\nu - g_{\nu\alpha} P_\mu,\\
&[P_\mu, P_\nu] = 0.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

В (1.106) $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$; $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$; $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3} = \langle x^0, x^1, x^2, x^3 \rangle$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0; \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3; \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что множество t^4 операторов P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) (их еще называют генераторами или операторами трансляций) есть идеал (коммутативный) алгебры $p(1, 3)$. Введем в рассмотрение отношение эквивалентности

$$x \simeq y \ (\mathrm{mod}\ t^4), \quad x, y \in p(1, 3).$$

Тогда множество классов $K_x = x + t^4$ ($x \in p(1, 3)$) эквивалентных элементов составляет шестимерную (фактор-) алгебру Ли, которая изоморфна известной алгебре Лоренца $so(1, 3)$ с генераторами $J_{\mu\nu}$, удовлетворяющими первую группу коммутационных соотношений (1.106).

С другой стороны, отношение эквивалентности

$$x \simeq y \ (\mathrm{mod}\ so(1, 3)), \quad x, y \in p(1, 3),$$

определяет четырехмерное векторное фактор-пространство (но не фактор-алгебру Ли).

Заметим, что алгебры инвариантности ряда известных дифференциальных уравнений релятивистской физики изоморфны алгебре Пуанкаре или содержат ее как подалгебру [78, 84, 89].

Во время рассмотрения примера алгебры Пуанкаре возникло понятие изоморфности алгебр Ли. Остановимся на этой и других операциях над алгебрами Ли более подробно. Пусть L и $\overline{L}$ — две произвольные алгебры Ли над полем $\mathbb{P}$, φ — отображение L в $\overline{L}$.

Отображение φ называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \quad x, y \in L, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{P};$$
$$\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad x, y \in L.$$

Множество

$$N = \{x \in L : \varphi(x) = 0\}$$

называется *ядром* гомоморфизма φ. Ядро гомоморфизма является идеалом в L. Действительно, если $x \in L$, $y \in N$, то

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), 0] = 0,$$

то есть $[x, y] \in N$. Нетрудно убедиться, что пространство L/N изоморфно $\varphi(L)$. Пусть N — идеал в алгебре Ли L. Отображение

$$\varphi: \ x \to x + N$$

называется *естественным гомоморфизмом* L на L/N. Взаимно однозначный гомоморфизм одной алгебры на другую называется *изоморфизмом*, а соответствующие алгебры L и $\overline{L}$ — *изоморфными* (в таких случаях пишут $L \sim \overline{L}$). Изоморфное отображение L на себя называется *автоморфизмом*. Автоморфизм φ алгебры Ли L называется *инволюционным*, если $\varphi^2 = I$.

Дифференцированием D алгебры Ли L называют отображение L в себя, если выполняется условие

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \quad x, y \in L. \tag{1.107}$$

Очевидно, если D_1 и D_2 — два дифференцирования в L, то $\alpha D_1 + \beta D_2$ также дифференцирование. Более того, если D_1 и D_2 — два дифференцирования, то

$$D_1 D_2([x, y]) = D_1\{[D_2(x), y] + [x, D_2(y)]\} =$$
$$= [D_1 D_2(x), y] + [D_2(x), D_1(y)] + [D_1(x), D_2(y)] + [x, D_1 D_2(y)].$$

Поменяв местами индексы 1 и 2 и найдя разность, получаем

$$[D_1, D_2]([x, y]) = [[D_1, D_2]x, y] + [x, [D_1, D_2]y], \tag{1.108}$$

то есть коммутатор двух дифференцирований также является дифференцированием. Следовательно, множество L_A всех дифференцирований само является алгеброй Ли, которую называют *алгеброй дифференцирований* L_A. Интересно отметить, что алгебра L_A есть алгеброй Ли группы всех автоморфизмов G_A начальной алгебры L. В самом деле, если $\varphi_t = \exp(iAt)$ — однопараметрическая группа автоморфизмов L:

$$\varphi_t([x, y]) = [\varphi_t(x), \varphi_t(y)] \in L, \quad x, y \in L, \tag{1.109}$$

то дифференцирование по параметру t имеет при ($t = 0$) вид

$$A([x, y]) = [Ax, y] + [x, Ay],$$

то есть генератор A однопараметрической подгруппы φ_t автоморфизмов является дифференцированием. Наоборот, можно также показать, что если A удовлетворяет равенству (1.107), то соответствующая однопараметрическая подгруппа удовлетворяет (1.109).

Пусть L — алгебра Ли над полем P. Рассмотрим линейное отображение $\operatorname{ad} x$ алгебры L в себя, которое определено при помощи соотношения

$$\operatorname{ad} x(y) \equiv [x, y], \quad x, y \in L. \tag{1.110}$$

Воспользовавшись тождеством Якоби, получаем

$$\operatorname{ad} x([y, z]) = [\operatorname{ad} x(y), z] + [y, \operatorname{ad} x(z)],$$

то есть отображение $\operatorname{ad} x$ является дифференцированием L. Более того, использовав (1.110) и тождество Якоби, получаем

$$\operatorname{ad}[x, y](z) = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z).$$

Следовательно, множество $L_a = \{\operatorname{ad} x,\ x \in L\}$ является линейной алгеброй Ли, подалгеброй алгебры Ли L_A всех дифференцирований и называется *присоединенной алгеброй*. Отображение $\psi : x \to \operatorname{ad} x$ является гомоморфизмом алгебры L на L_a.

Нетрудно убедиться, что L_a является идеалом алгебры Ли L_A. В самом деле, если $D \in L_A$ и $y \in L$, то

$$[D, \operatorname{ad} x](y) = D[x, y] - [x, Dy] = [Dx, y] = \operatorname{ad} Dx(y),$$

то есть

$$[D, \operatorname{ad} x] \in L_a.$$

Отметим, наконец, что когда φ — произвольный автоморфизм L, то

$$\operatorname{ad} \varphi(x)(y) = [\varphi(x), y] = \varphi([x, \varphi^{-1} y]) = \varphi\{\operatorname{ad} x(\varphi^{-1}(y))\},$$

и значит,

$$\operatorname{ad} \varphi(x) = \varphi \operatorname{ad} x \varphi^{-1}.$$

С группой G_a внутренних автоморфизмов L и ее алгеброй Ли мы встретимся в четвертом параграфе этой главы, рассматривая задачу классификации подалгебр данной алгебры Ли.

Рассмотрим **пример**. Пусть L — алгебра $so(3)$ с базисными элементами

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

с которой мы встречались раньше и коммутационные соотношения для которой известны. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad} e_1(e_1) = 0, \quad \operatorname{ad} e_1(e_2) = e_3, \quad \operatorname{ad} e_1(e_3) = -e_2,\\
&\operatorname{ad} e_2(e_1) = -e_3, \quad \operatorname{ad} e_2(e_2) = 0, \quad \operatorname{ad} e_2(e_3) = e_1,\\
&\operatorname{ad} e_3(e_1) = e_2, \quad \operatorname{ad} e_3(e_2) = -e_1, \quad \operatorname{ad} e_3(e_3) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, алгебра L_a снова является трехмерной алгеброй Ли и может быть задана в базисе $\{e_i\}$ с помощью матриц

$$\operatorname{ad} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что алгебра L_a является множеством трехмерных кососимметрических матриц.

Аналогично можно получить, что присоединенная алгебра для $gl(n, \mathbb{R})$ определяется соотношениями $\operatorname{ad} e_{ij}(e_{kl}) = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$ (размерность n^2), а для $o(n)$ — множеством $\dfrac{n(n-1)}{2}$-мерных кососимметрических матриц.

Остановимся, далее, на понятии *полупрямой суммы* двух алгебр Ли. Пусть N и M — две алгебры Ли, и пусть D — гомоморфизм M в множество линейных операторов в векторном пространстве N таких, что каждый оператор $D(x)$, $x \in M$, является дифференцированием алгебры N. Дополним прямую сумму векторных пространств $N \oplus M$ структурой алгебры Ли, используя известные скобки Ли алгебр N и M в каждом подпространстве, а в качестве скобок Ли между двумя подпространствами положим

$$[x, y] = (D(x))(y) \quad \text{для} \quad x \in M,\ y \in N. \tag{1.111}$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы (a)–(c) алгебры Ли удовлетворяются; в частности, вследствие (1.111), для $x \in M$, $y_i \in N$ имеем равенство

$$\begin{aligned}
&[x, [y_1, y_2]] + [y_2, [x, y_1]] + [y_1, [y_2, x]] =\\
&\quad = D(x)[y_1, y_2] - [D(x)y_1, y_2] - [y_1, D(x)y_2],
\end{aligned}$$

которое равно нулю, поскольку $D(x)$ является дифференцированием.

Полученная так алгебра Ли называется *полупрямой суммой* алгебр N и M. Вследствие (1.111) подалгебра N является идеалом полупрямой суммы. Другими словами, алгебра Ли L является *полупрямой суммой подалгебр N и M*, если $L = N \oplus M$ и

$$[N, N] \subset N, \quad [M, M] \subset M, \quad [M, N] \subset N. \tag{1.112}$$

Для обозначения полупрямой суммы будем использовать символ $M \Subset N$.

Отметим, что если положить $t^4 = N$, $so(1,3) = M$, то очевидно соответствие коммутационных соотношений (1.106) и (1.112), а поэтому $p(1,3) = so(1,3) \Subset t^4$.

Одной из центральных проблем в теории алгебр Ли является нахождение и классификация всех неизоморфных алгебр Ли. Выше мы видели, что матричные алгебры A_n, B_n, C_n, D_n содержат широкие классы алгебр Ли. Естественно было бы надеяться, что матричные алгебры исчерпывают все возможные алгебры Ли. Это в самом деле имеет место вследствие такого фундаментального результата.

Теорема 1.7 (Теорема Адо). *Любая алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ изоморфна некоторой матричной алгебре.*

Доказательство этой теоремы, как и ряда других, мы здесь не рассматриваем. Его можно найти в [3] (см. также [58]).

Отметим только, что теорема Адо имеет место и для произвольного поля $\mathbb{P}$ характеристики 0. Так, в частности, если L — действительная алгебра Ли, то по теореме 1.7 ее комплексное расширение L^c является матричной алгеброй Ли. Следовательно, действительное сужение L^c к L также является матричной алгеброй Ли.

Фактически теорема Адо утверждает, что всякую абстрактную алгебру Ли можно рассматривать как подалгебру полной линейной алгебры Ли $gl(n, \mathbb{C})$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому задача классификации всех неизоморфных абстрактных алгебр Ли может быть сведена к более простой задаче описания всех неизоморфных линейных подалгебр Ли алгебры $gl(n, \mathbb{C})$.

Остановимся далее на наиболее важных классах алгебр Ли.

Предложение 1.1. *Пусть L — алгебра Ли, A, B — идеалы алгебры L. Тогда $[A, B]$ — также идеал в L.*

Доказательство. Любой элемент из $[A, B]$ можно записать в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$, где $x_i \in A$, $y_i \in B$. Если z — произвольный элемент из L, то, вследствие тождества Якоби,

$$[z, (\sum [x_i, y_i])] = \sum [[z, x_i], y_i] + \sum [x_i, [z, y_i]].$$

Поскольку A и B — идеалы, то $[z, x_i] \in A$ i $[z, y_i] \in B$. Следовательно, правая часть равенства является элементом из $[A, B]$. ■

Используя утверждение 1.1, определим по индукции последовательность $L^{(k)}$ идеалов в L :

$$L^{\circ} = L, \quad L^{(1)} = [L^{\circ}, L], \quad \ldots, \quad L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L].$$

Эту последовательность $L^{\circ} \supset L^{(1)} \supset \cdots$ называют *нисходящей центральной последовательностью* алгебры Ли L. Если $L^{(n)} = 0$ для некоторого n, то алгебру L называют *нильпотентной*. В том частном случае, когда $L^{(1)} = 0$, алгебру L называют *абелевой (коммутативной)*.

Среди алгебр Ли абелевы алгебры занимают наиболее низкую ступеньку в их иерархии. Нильпотентные алгебры Ли являются следующей по сложности ступенькой.

Теперь определим по индукции последовательность идеалов $L_{(n)}$, полагая

$$L_{\circ} = L, \ \ L_{(1)} = [L_{\circ}, L_{\circ}], \ \ldots, \ L_{(n+1)} = [L_{(n)}, L_{(n)}], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Идеал $L_{(n)}$ называют n-й *производной алгеброй* алгебры L. Первую производную алгебру $L_{(1)}$ называют также *коммутаторной алгеброй* алгебры L. Последовательность идеалов

$$L \supset L_{(1)} \supset \cdots \supset L_{(n)} \supset \cdots$$

называют *производной последовательностью*. Алгебру Ли L называют *разрешимой*, если $L_{(n)} = 0$ для некоторого n.

При помощи индукции легко убедиться, что $L_{(n)} \subset L^{(n)}$. В самом деле, если $L_{\circ} = L^{\circ}$ и $L_{(n)} \subset L^{(n)}$, то

$$L_{(n+1)} = [L_{(n)}, L_{(n)}] \subset [L^{(n)}, L] \subset L^{(n+1)}.$$

Следовательно, нильпотентная алгебра является разрешимой. Обратное утверждение не имеет места. Например, двухмерная алгебра Ли $L^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$, которая определяется коммутационным соотношением

$$[e_1, e_2] = e_1,$$

разрешима, но не является нильпотентной алгеброй Ли.

В соответствии с теоремой 1.7 произвольная алгебра Ли изоморфна некоторой линейной подалгебре полной линейной алгебры $gl(n, \mathbb{C})$.

Пусть $T^{(m)}$ означает векторное пространство всех верхних треугольных $m \times m$-матриц, а $S^{(m)}$ — векторное пространство всех верхних треугольных $m \times m$-матриц с равными диагональными элементами. Пусть, далее, $S^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ означает множество всех линейных преобразований A, которые действуют в пространстве

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

так, что

1) $A \subset S^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ оставляет подпространства V_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ инвариантными;

2) в каждом подпространстве V_i с базисом $\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_{m_i}^{(i)}$ $A \in S^{(m_i)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & a_{jk}^{(i)} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы треугольных матриц являются также треугольными матрицами. Поэтому векторные пространства $T^{(m)}$ и $S^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)}$ являются алгебрами Ли. Более того, имеет место теорема, доказательство которой можно найти, например, в [24].

Теорема 1.8. *Произвольная разрешимая алгебра Ли линейных преобразований изоморфна подалгебре некоторой алгебры Ли $T^{(m)}$. Произвольная нильпотентная линейная алгебра Ли изоморфна подалгебре некоторой алгебры Ли $S^{(m_1, \ldots, m_k)}$.*

Выше мы ввели в рассмотрение гомоморфизм $x \to \operatorname{ad} x$ при помощи соотношения

$$\operatorname{ad} x(y) = [x, y].$$

В координатной записи имеем

$$(\operatorname{ad} x(y))^i = [x, y]^i = c_{lk}^i x^l y^k,$$

то есть

$$(\operatorname{ad} x)_k^i = c_{lk}^i x^l. \tag{1.113}$$

Определим теперь “скалярное произведение” в алгебре Ли, положив

$$(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y). \tag{1.114}$$

Скалярное произведение (1.114) имеет такие свойства:

1) симметричность $(x, y) = (y, x)$;

2) билинейность $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для всех $x, y, z \in L$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$;

3) $(\operatorname{ad} x(y), z) + (y, \operatorname{ad} x(z)) = 0$ или $([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0$.

Эти свойства непосредственно следуют из свойств следов. Например, пусть

$$\begin{aligned} a = (\operatorname{ad} x(y), z) &= \operatorname{Tr}\{\operatorname{ad}([x, y]) \operatorname{ad} z\} = \\ &= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y \operatorname{ad} z) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y \operatorname{ad} x \operatorname{ad} z), \\ b = (y, \operatorname{ad} x(z)) &= \operatorname{Tr}\{\operatorname{ad} y(\operatorname{ad}[x, z])\} = \\ &= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y \operatorname{ad} x \operatorname{ad} z) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y \operatorname{ad} z \operatorname{ad} x). \end{aligned}$$

Тогда из равенства $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(CAB)$ имеем $a + b = 0$ или третье свойство.

Симметрическая билинейная форма (1.114) на $L \times L$ называется *формой Киллинга*. Учитывая (1.113), получаем

$$(x, y) = \operatorname{Tr}((\operatorname{ad} x)_k^i (\operatorname{ad} y)_i^s) = c_{lk}^i x^l c_{si}^k y^s = g_{ls} x^l y^s,$$

где симметрический тензор второго ранга

$$g_{ls} = c_{lk}^i c_{si}^k \tag{1.115}$$

называется *метрическим тензором Картана* алгебры Ли L.

Заметим, что для некоторых алгебр (например, коммутативных) форма Киллинга (1.114), а значит, и метрический тензор (1.115) могут быть вырожденными.

Для произвольного автоморфизма ψ данной алгебры Ли L, вследствие

$$\operatorname{ad} \psi(x) = \psi \operatorname{ad} x \psi^{-1},$$

имеем

$$(\psi(x), \psi(y)) = (x, y),$$

то есть форма Киллинга инвариантна относительно действия группы G_A всех автоморфизмов алгебры L. Форма Киллинга (1.114) и ассоциированный с нею тензор Картана будут играть фундаментальную роль в теории алгебр Ли и их представлений.

Например, простой критерий разрешимости алгебр Ли через форму Киллинга дает следующая теорема, доказательство которой можно найти в [24].

Теорема 1.9. *Если $(x,x)=0$ для любого $x \in L$, то L — разрешимая алгебра Ли. Если алгебра L нильпотентна, то $(x,x)=0$ для всех $x \in L$.*

Из множества всех алгебр Ли мы выделили класс разрешимых и нильпотентных алгебр. Определим теперь класс простых и полупростых алгебр Ли, которые будут играть существенную роль в изучении структуры и классификации алгебр Ли.

Алгебра Ли L называется *полупростой*, если она не имеет ненулевых коммутативных идеалов.

Критерий полупростоты дает теорема Картана (доказательство которой можно найти, например, в [12]).

Теорема 1.10 (Картана). *Алгебра Ли L является полупростой тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.*

Алгебра Ли L называется *простой*, если она не имеет идеалов, отличных от $\{0\}$ и L, и если $L^{(0)}=[L,L]\neq 0$.

Хорошо известно [12], что классы алгебр A_n, B_n, C_n и D_n являются простыми алгебрами (*классическими*). Кроме них существуют еще лишь пять (*исключительных*) простых алгебр. Условие $L^{(0)}\neq 0$ исключает алгебры Ли размерности 1, которые были бы простыми, но не полупростыми.

Говорят, что алгебра Ли L *компактная*, если в L существует положительно определенная квадратичная форма $(\bullet,\bullet)$, которая удовлетворяет условию
$$([x,y],z)+(y,[x,z])=0. \tag{1.116}$$
Остальные алгебры Ли называют *некомпактными*. Форма Киллинга (1.114) удовлетворяет условию (1.116). Поэтому если метрический тензор Картана полупростой алгебры Ли L положительно (или отрицательно) определен, то L — компактна.

Класс разрешимых алгебр Ли в некотором смысле дополняет класс полупростых алгебр: действительно, всякая разрешимая алгебра Ли содержит коммутативный идеал, тогда как, с другой стороны, полупростая алгебра Ли не имеет коммутативного идеала.

Следующие две фундаментальные теоремы показывают, что в определенном смысле классификация всех алгебр Ли сводится к классификации разрешимых и полупростых алгебр Ли.

Сначала введем в рассмотрение понятие радикала алгебры Ли и рассмотрим одно вспомогательное утверждение.

Максимальный разрешимый идеал N, который содержит любой другой разрешимый идеал алгебры Ли L, называется *радикалом* алгебры Ли.

Для полупростой алгебры Ли L радикал N должен быть равен нулю. В самом деле, если $N\neq 0$, то $N_{(k)}=[N_{(k-1)},N_{(k-1)}]$, $N_0=N$ — также идеалы в L. Поэтому если бы $N_{(n-1)}\neq 0$ и $N_{(n)}=0$, то $N_{(n-1)}$ был бы ненулевым коммутативным идеалом в L. Следовательно, если L полупростая, то $N=0$.

Можно предположить, что если выделить радикал из заданной алгебры Ли L, то полученная алгебра Ли будет полупростой.

Предложение 1.2. *Пусть L — алгебра Ли над $\mathbb{P}$. Если N — радикал алгебры L, то фактор-алгебра L/N полупроста.*

Доказательство. Пусть φ — естественный гомоморфизм L на L/N. Предположим, что S — разрешимый ненулевой идеал в L/N, и пусть $\tilde{S}=\varphi^{-1}(S)$. Очевидно, что поскольку $\varphi(N)=0$, то идеал $\tilde{S}$ более широкий, чем N, и содержит N. Алгебры $\tilde{S}/N$ и N разрешимы. Поэтому $\tilde{S}$ — также разрешимый идеал и содержит N. Однако это противоречит максимальности радикала N. Следовательно, $S=\{0\}$. Поэтому L/N не содержит коммутативный идеал, а значит, L/N — полупростая алгебра Ли. ■

Утверждение 1.2 устанавливает тот факт, что произвольная алгебра Ли состоит из двух частей: радикала N и полупростой алгебры L/N.

Первая теорема (доказательство см., например, в [93]) дает полное описание этого разложения.

Теорема 1.11 (Леви–Мальцева). *Пусть L — произвольная алгебра Ли над $\mathbb{P}$ с радикалом N. Тогда существует такая полупростая алгебра S алгебры L, что*
$$L=S \Subset N. \tag{1.117}$$
Любые два разложения L вида (1.117) *связаны при помощи автоморфизма алгебры L.*

Равенство (1.117) называется *разложением Леви* алгебры L, а подалгебра S называется *фактором Леви*. Также из теоремы 1.11 следует, что
$$[N,N]\subset N,\quad [S,S]\subset S,\quad [N,S]\subset N.$$

В соответствии с теоремой Леви–Мальцева задача классификации всех алгебр Ли сводится к таким задачам:

1) классификация всех полупростых алгебр Ли;
2) классификация всех разрешимых алгебр Ли;

3) классификация всех дифференцирований (1.107) разрешимых алгебр Ли в соответствии с классификацией полупростых алгебр Ли.

Первая задача эквивалентна задаче классификации простых алгебр Ли, поскольку имеет место вторая классификационная теорема.

Теорема 1.12 (Картана). *Полупростая комплексная или действительная алгебра Ли может быть разложена в прямую сумму попарно ортогональных простых алгебр. Это разложение единственно.*

Доказательство теоремы можно найти в [12].

Поскольку классификация всех простых действительных алгебр Ли известна (например, [12], и мы ее приводим ниже), то первая из сформулированных задач решена полностью.

Две другие задачи решены только частично.

Здесь мы приводим перечень действительных простых алгебр Ли как действительных форм четырех бесконечных последовательностей классических алгебр Ли A_n $(n \geqslant 1)$, B_n $(n \geqslant 2)$, C_n $(n \geqslant 3)$, D_n $(n \geqslant 4)$ и пяти исключительных алгебр Ли G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, которые составляют множество всех неизоморфных простых комплексных алгебр Ли. Заметим, что последовательность D_n не содержит алгебру D_2, поскольку она не является простой ($D_2 \sim D_1 \oplus D_2$). Также имеют место изоморфизмы: $A_1 \sim B_1 \sim C_1$, $B_2 \sim C_2$, $A_3 \sim D_3$.

Размерности классических комплексных алгебр Ли A_n, B_n, C_n и D_n такие:

	A_n	B_n	C_n	D_n
Размерность	$n(n+2)$	$n(2n+1)$	$n(2n+1)$	$n(2n-1)$

Размерности исключительных алгебр Ли: G_2 — 14, F_4 — 52, E_6 — 78, E_7 — 133, E_8 — 248.

Для описания действительных простых алгебр Ли используют тот факт, что любая простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ является или простой алгеброй Ли над $\mathbb{C}$ (рассматриваемой как алгебра Ли над $\mathbb{R}$), или действительной формой простой алгебры Ли над $\mathbb{C}$.

В групповом анализе дифференциальных уравнений ведущую роль играют классические действительные простые алгебры Ли. Ниже мы приводим их подробное описание. Символом L_k обозначаем простые алгебры Ли, которые являются компактными.

i. Действительные формы алгебры $sl(n,\mathbb{C})$ $(\sim A_{n-1}, n>1)$

1) $L_k = su(n)$ — алгебра Ли всех косоэрмитовых матриц Z порядка n со следом $\operatorname{Tr} Z = 0$;

2) $sl(n,\mathbb{R})$ — алгебра Ли всех действительных матриц X порядка n со следом $\operatorname{Tr} X = 0$;

3) $su(p,q)$, $p+q=n$, $p \geqslant q$ — алгебра Ли всех матриц вида
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^* & Z_3 \end{pmatrix},$$
где Z_1, Z_3 — косоэрмитовые матрицы порядка p и q соответственно, $\operatorname{Tr} Z_1 + \operatorname{Tr} Z_3 = 0$, Z_2 — произвольная;

4) $su^*(2n)$ — алгебра Ли всех комплексных матриц порядка $2n$ вида
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 \end{pmatrix},$$
где Z_1, Z_2 — комплексные матрицы порядка n, $\operatorname{Tr} Z_1 + \operatorname{Tr} \overline{Z}_1 = 0$.

ii. Действительные формы алгебры $so(2n,\mathbb{C})$ $(\sim D_n,\ n \geqslant 1)$

1) $L_k = so(2n)$ — алгебра Ли всех действительных кососимметрических матриц порядка $2n$;

2) $so(p,q)$, $p+q=2n$, $p \geqslant q$ — алгебра Ли всех действительных матриц порядка $2n$ вида
$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix},$$
где все X_i действительные, X_1, X_3 — кососимметрические матрицы порядка p и q соответственно, X_2 — произвольная;

3) $so^*(2n)$ — алгебра Ли всех комплексных матриц порядка $2n$ вида
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 \end{pmatrix},$$
где Z_1, Z_2 — комплексные матрицы порядка n, при этом Z_1 — кососимметрическая, а Z_2 — эрмитова.

iii. Действительные формы алгебры $so(2n+1,\mathbb{C})$ ($\sim B_n$, $n \geqslant 1$)

1) $L_k = so(2n+1)$ — алгебра Ли всех действительных кососимметрических матриц порядка $2n+1$;

2) $so(p,q)$, $p+q = 2n+1$, $p \geqslant q$ — алгебра Ли всех действительных матриц порядка $2n+1$ вида

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix},$$

где все X_i действительные, X_1, X_3 — кососимметрические матрицы порядка p и q соответственно, X_2 — произвольная.

iv. Действительные формы алгебры $sp(n,\mathbb{C})$ ($\sim C_n$, $n \geqslant 1$)

1) $L_k = sp(n)$ — алгебра Ли всех косоэрмитовых матриц (без следов) порядка $2n$ вида

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^T \end{pmatrix},$$

где все Z_i — комплексные матрицы порядка n, Z_2 и Z_3 — симметрические (то есть $sp(n) = sp(n,\mathbb{C}) \cap su(2n)$);

2) $sp(n,\mathbb{R})$ — алгебра Ли всех действительных матриц порядка $2n$ вида

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^T \end{pmatrix},$$

где X_1, X_2, X_3 — действительные матрицы порядка n, X_2, X_3 — симметрические;

3) $sp(p,q)$, $p+q = n$, $p \geqslant q$ — алгебра Ли всех комплексных матриц порядка $2n$ вида

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{12}^* & Z_{22} & Z_{14}^T & Z_{24} \\ -\overline{Z}_{13} & \overline{Z}_{14} & \overline{Z}_{11} & -\overline{Z}_{12} \\ Z_{14}^* & -\overline{Z}_{24} & -\overline{Z}_{12}^T & \overline{Z}_{22} \end{pmatrix},$$

где Z_{ij} — комплексные матрицы, Z_{11} и Z_{13} — порядка p, Z_{12} и Z_{14} — с p строками и q столбцами, Z_{11} и Z_{22} — косоэрмитовые, Z_{13} и Z_{24} — симметрические.

Важными являются такие известные изоморфизмы, которые существуют для низших классических алгебр Ли:

$$\begin{aligned}
&su(2) \sim so(3) \sim sp(1);\\
&sl(2,\mathbb{R}) \sim su(1,1) \sim so(2,1) \sim sp(1,\mathbb{R});\\
&so(5) \sim sp(2);\\
&so(3,2) \sim sp(2,\mathbb{R});\\
&so(4,1) \sim sp(1,1);\\
&so(4) \sim so(3) \oplus so(3) \sim sp(1) \oplus sp(1);\\
&so(2,2) \sim sl(2,\mathbb{R}) \oplus sl(2,\mathbb{R});\\
&sl(2,\mathbb{C}) \sim so(3,1);\\
&su(4) \sim so(6);\\
&sl(4,\mathbb{R}) \sim so(3,3);\\
&su(2,2) \sim so(4,2);\\
&su(3,1) \sim so^*(6);\\
&su^*(4) \sim so(5,1);\\
&so^*(8) \sim so(6,2);\\
&so^*(4) \sim su(2) \oplus sl(2,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Исключительные алгебры Ли, вследствие их высокой размерности, не играют столь важной роли в групповом анализе дифференциальных уравнений, как классические простые алгебры Ли. Поэтому здесь мы лишь коротко останавливаемся на действительных формах алгебр типов G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Более подробную информацию об этих алгебрах можно найти, например, в [91].

Алгебра Ли типа G_2 имеет компактную действительную форму g_2 и одну некомпактную действительную форму g_2'. При этом $g_2 \cap g_2' \sim su(2) \oplus su(2)$.

Алгебра Ли типа F_4 имеет компактную действительную форму f_4 и две некомпактные действительные формы f_4', f_4''. При этом $f_4' \cap f_4 \sim sp(3) \oplus su(2)$, $f_4'' \cap f_4 \sim so(9)$.

Алгебра Ли типа E_6 имеет компактную действительную форму e_6 и четыре некомпактные действительные формы e_6', e_6'', e_6''', e_6^{iv}. При этом $e_6' \cap e_6 \sim sp(4)$, $e_6'' \cap e_6 \sim su(6) \oplus su(2)$, $e_6''' \cap e_6 \sim so(10) \oplus \mathbb{R}$, $e_6^{\mathrm{iv}} \cap e_6 \sim f_4$.

Алгебра Ли типа E_7 имеет компактную действительную форму e_7 и три некомпактные действительные формы e_7', e_7'', e_7'''. При этом $e_7' \cap e_7 \sim su(8)$, $e_7'' \cap e_7 \sim so(12) \oplus su(2)$, $e_7''' \cap e_7 \sim e_6 \oplus \mathbb{R}$.

Наконец, алгебра Ли типа E_8 имеет компактную действительную форму e_8 и две некомпактные действительные формы e_8', e_8''. При этом $e_8' \cap e_8 \sim e_7 \oplus su(2)$, $e_8'' \cap e_8 \sim so(16)$.

Как отмечалась выше, задача классификации неизоморфных разрешимых алгебр Ли, насколько нам известно, полностью решена лишь для действительных алгебр Ли до шестого порядка включительно (см., например, [42–45, 180]). Здесь мы приводим структуру разрешимых алгебр Ли над полем $\mathbb{R}$, размерность которых не превышает пяти.

Далее будем употреблять такие обозначения:$A_{k.i} = \langle e_1, \dots e_k\rangle$ — алгебра Ли размерности k, e_j $(j = 1, \dots k)$ — ее базисные элементы, индекс i обозначает номер класса, к которому принадлежит данная алгебра Ли. Указывая тип алгебры A_{ki}, будем приводить лишь значение **ненулевых** коммутаторов базисных элементов.

Среди *наиболее низких* разрешимых алгебр Ли над полем $\mathbb{R}$ выделяют одну одномерную алгебру Ли $A_1 = \langle e_1\rangle$ и две двухмерные:

$$A_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle = A_1 \oplus A_1 = 2A_1;$$
$$A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle, \quad [e_1, e_2] = e_2.$$

Далее, разрешимые алгебры, которые раскладываются в прямую сумму разрешимых алгебр низшей размерности, будем называть *разложимыми* алгебрами Ли.

Трехмерные разрешимые алгебры Ли ($L = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$) над $\mathbb{R}$

Трехмерные разрешимые алгебры Ли исчерпываются двумя разложимыми алгебрами:

$$A_{3.1} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 = 3A_1;$$
$$A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1, \quad [e_1, e_2] = e_2,$$

и семью неразложимыми алгебрами Ли:

$$A_{3.3}: \quad [e_2, e_3] = e_1;$$
$$A_{3.4}: \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2;$$
$$A_{3.5}: \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2;$$
$$A_{3.6}: \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2;$$
$$A_{3.7}: \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = qe_2 \quad (0 < |q| < 1);$$
$$A_{3.8}: \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1;$$
$$A_{3.9}: \quad [e_1, e_3] = qe_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + qe_2 \quad (q > 0).$$

Отметим, что алгебра $A_{3.3}$ является нильпотентной. Также отметим, что для алгебр $A_{3.i}$ $(i = 3, 4, \dots, 9)$ $\langle e_1, e_2\rangle = A_{2.1} = 2A_1$.

Четырехмерные разрешимые алгебры Ли ($L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$) над $\mathbb{R}$

Среди четырехмерных разрешимых алгебр Ли различают 10 разложимых алгебр: $4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1$, $A_{2.2} \oplus 2A_1 = A_{2.2} \oplus A_{2.1}$, $A_{2.2} \oplus A_{2.2} = 2A_{2.2}$, $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = 3, 4, \dots, 9)$; и десять неразложимых разрешимых алгебр Ли:

$$A_{4.1}: \quad [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2;$$
$$A_{4.2}: \quad [e_1, e_4] = qe_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad q \neq 0;$$
$$A_{4.3}: \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2;$$
$$A_{4.4}: \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3;$$
$$A_{4.5}: \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = qe_2, \quad [e_3, e_4] = pe_3,$$
$$-1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 1, \quad p \cdot q \neq 0;$$
$$A_{4.6}: \quad [e_1, e_4] = qe_1, \quad [e_2, e_4] = pe_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + pe_3,$$
$$q \neq 0, \quad p \geqslant 0;$$
$$A_{4.7}: \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_3, e_4] = e_2 + e_3;$$
$$A_{4.8}: \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1 + q)e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_3, e_4] = qe_3, \quad |q| \leqslant 1;$$
$$A_{4.9}: \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2qe_1, \quad [e_2, e_4] = qe_2 - e_3,$$
$$[e_3, e_4] = e_2 + qe_3, \quad q \geqslant 0;$$
$$A_{4.10}: \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = -e_2,$$
$$[e_2, e_4] = e_1.$$

Пятимерные разрешимые алгебры Ли ($L = \langle e_1, e_2, \dots, e_5\rangle$) над $\mathbb{R}$

Множество неизоморфных пятимерных разрешимых алгебр Ли исчерпывается 27 типами разложимых алгебр: $5A_1$, $A_{2.2} \oplus 3A_1$, $2A_{2.2} \oplus A_1$, $A_{3.i} \oplus 2A_1$ $(i = 3, 4, \dots, 8)$, $A_{3.i} \oplus A_{2.2}$ $(i = 3, 4, \dots 8)$, $A_{4.i} \oplus A_1$ $(i = 1, \dots, 10)$; и 39 неразложимыми разрешимыми алгебрами:

$$A_{5.1}: \quad [e_3, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_2;$$
$$A_{5.2}: \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_5] = e_2, \quad [e_4, e_5] = e_3;$$
$$A_{5.3}: \quad [e_2, e_4] = e_3, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_2;$$
$$A_{5.4}: \quad [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_5] = e_1;$$
$$A_{5.5}: \quad [e_3, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_5] = e_2;$$

$A_{5.6}:$ $[e_3,e_4]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_1,\quad [e_3,e_5]=e_2,\quad [e_4,e_5]=e_3;$

$A_{5.7}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=pe_2,\quad [e_3,e_5]=qe_3,$
$[e_4,e_5]=re_4,\quad -1\leqslant r\leqslant q\leqslant p\leqslant 1,\quad rpq\neq 0;$

$A_{5.8}:$ $[e_2,e_5]=e_1,\quad [e_3,e_5]=e_3,\quad [e_4,e_5]=pe_4,\quad 0<|p|\leqslant 1;$

$A_{5.9}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_1+e_2,\quad [e_3,e_5]=pe_3,$
$[e_4,e_5]=qe_4,\quad 0\neq q\leqslant p;$

$A_{5.10}:$ $[e_2,e_5]=e_1,\quad [e_3,e_5]=e_2,\quad [e_4,e_5]=e_4;$

$A_{5.11}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_1+e_2,\quad [e_3,e_5]=e_2+e_3,$
$[e_4,e_5]=pe_4,\quad p\neq 0;$

$A_{5.12}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_1+e_2,\quad [e_3,e_5]=e_2+e_3,$
$[e_4,e_5]=e_3+e_4;$

$A_{5.13}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=pe_2,\quad [e_3,e_5]=qe_3-re_4,$
$[e_4,e_5]=qe_4+re_3,\quad |p|\leqslant 1,\quad p\cdot r\neq 0,\quad q\in\mathbb{R};$

$A_{5.14}:$ $[e_2,e_5]=e_1,\quad [e_3,e_5]=pe_3-e_4,$
$[e_4,e_5]=e_3+pe_4,\quad p\in\mathbb{R};$

$A_{5.15}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_1+e_2,\quad [e_3,e_5]=pe_3,$
$[e_4,e_5]=e_3+pe_4,\quad -1\leqslant p\leqslant 1;$

$A_{5.16}:$ $[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_1+e_2,\quad [e_3,e_5]=pe_3-qe_4,$
$[e_4,e_5]=qe_3+pe_4,\quad p\in\mathbb{R},\quad q\neq 0;$

$A_{5.17}:$ $[e_1,e_5]=pe_1-e_2,\quad [e_2,e_5]=e_1+pe_2,$
$[e_3,e_5]=qe_3-re_4,\quad [e_4,e_5]=re_3+qe_4,\ r\neq 0,\ p,q\in\mathbb{R};$

$A_{5.18}:$ $[e_1,e_5]=pe_1-e_2,\quad [e_2,e_5]=e_1+pe_2,$
$[e_3,e_5]=e_1+pe_3-e_4,\quad [e_4,e_5]=e_2+e_3-pe_4,\quad p\geqslant 0;$

$A_{5.19}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=(1+p)e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2,$
$[e_3,e_5]=pe_3,\quad [e_4,e_5]=qe_4,\quad p\in\mathbb{R},\quad q\neq 0;$

$A_{5.20}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=(1+p)e_2,\quad [e_2,e_5]=e_2,$
$[e_3,e_5]=pe_3,\quad [e_4,e_5]=e_1+(1+p)e_4,\quad p\in\mathbb{R};$

$A_{5.21}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=2e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2+e_3,$
$[e_3,e_5]=e_3+e_4,\quad [e_4,e_5]=e_4;$

$A_{5.22}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_3,\quad [e_4,e_5]=e_4;$

$A_{5.23}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=2e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2+e_3,$
$[e_3,e_5]=e_3,\quad [e_4,e_5]=pe_4,\quad p\neq 0;$

$A_{5.24}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=2e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2+e_3,$
$[e_3,e_5]=e_3,\quad [e_4,e_5]=\epsilon e_1+2e_4,\quad \epsilon=\pm 1;$

$A_{5.25}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=2pe_1,\quad [e_2,e_5]=pe_2+e_3,$
$[e_3,e_5]=-e_2+pe_3,\quad [e_4,e_5]=qe_4,\quad p\in\mathbb{R},\quad q\neq 0;$

$A_{5.26}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=2pe_1,\quad [e_2,e_5]=pe_2+e_3,$
$[e_3,e_5]=-e_2+pe_3,\quad [e_4,e_5]=\epsilon e_1+2pe_4,$
$\epsilon=\pm 1,\quad p\in\mathbb{R};$

$A_{5.27}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=e_1,\quad [e_3,e_5]=e_3+e_4,$
$[e_4,e_5]=e_1+e_4;$

$A_{5.28}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=(1+p)e_1,\quad [e_2,e_5]=pe_2,$
$[e_3,e_5]=e_3+e_4,\quad [e_4,e_5]=e_4,\quad p\in\mathbb{R};$

$A_{5.29}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2,\quad [e_3,e_5]=e_4;$

$A_{5.30}:$ $[e_2,e_4]=e_1,\quad [e_3,e_4]=e_2,\quad [e_1,e_5]=(2+p)e_1,$
$[e_2,e_5]=(1+p)e_2,\quad [e_3,e_5]=pe_3,\quad [e_4,e_5]=e_4,\ p\in\mathbb{R};$

$A_{5.31}:$ $[e_2,e_4]=e_1,\quad [e_3,e_4]=e_2,\quad [e_1,e_5]=3e_1,$
$[e_2,e_5]=2e_2,\quad [e_3,e_5]=e_3,\quad [e_4,e_5]=e_3+e_4;$

$A_{5.32}:$ $[e_2,e_4]=e_1,\quad [e_3,e_4]=e_2,\quad [e_1,e_5]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2,$
$[e_3,e_5]=pe_1+e_3,\quad p\in\mathbb{R};$

$A_{5.33}:$ $[e_1,e_4]=e_1,\quad [e_3,e_4]=pe_3,\quad [e_2,e_5]=e_2,$
$[e_3,e_5]=qe_3,\quad p,q\in\mathbb{R},\quad p^2+q^2\neq 0;$

$A_{5.34}:$ $[e_1,e_4]=pe_1,\quad [e_2,e_4]=e_2,\quad [e_3,e_4]=e_3,$
$[e_1,e_5]=e_1,\quad [e_3,e_5]=e_2,\quad p\in\mathbb{R};$

$A_{5.35}:$ $[e_1,e_4]=pe_1,\quad [e_2,e_4]=e_2,\quad [e_3,e_4]=e_3,$
$[e_1,e_5]=qe_1,\quad [e_2,e_5]=-e_3,\quad [e_3,e_5]=e_2,$
$p,q\in\mathbb{R},\quad p^2+q^2\neq 0;$

$A_{5.36}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_4]=e_1,\quad [e_2,e_4]=e_2,$
$[e_2,e_5]=-e_2,\quad [e_3,e_5]=e_3;$

$A_{5.37}:$ $[e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_4]=2e_1,\quad [e_2,e_4]=e_2,$
$[e_3,e_4]=e_3,\quad [e_2,e_5]=-e_3,\quad [e_3,e_5]=e_2;$

$A_{5.38}:$ $[e_1,e_4]=e_1,\quad [e_2,e_5]=e_2,\quad [e_4,e_5]=e_3;$

$A_{5.39}:$ $[e_1,e_4]=e_1,\quad [e_2,e_4]=e_2,\quad [e_1,e_5]=-e_2,$
$[e_2,e_5]=e_1,\quad [e_4,e_5]=e_3.$

В завершение остановимся еще и на известной классификации алгебр, которые являются собственно полупрямыми суммами полупростой и разрешимой алгебр Ли.

Алгебры Ли, которые являются полупрямыми суммами полупростой и разрешимой алгебр Ли, условно можно разбить на два класса:

1) алгебры, которые являются прямой суммой полупростой и разрешимой алгебр Ли (разложимые алгебры);

2) алгебры, которые не раскладываются в прямую сумму полупростой и разрешимой алгебр Ли (неразложимые алгебры).

Поскольку структура разложимых алгебр имеет вид:

$$L = N \oplus S,$$

где S — фактор Леви (полупростая алгебра Ли), N — радикал (разрешимая алгебра Ли), то полное описание этих алгебр легко получить, комбинируя известные полупростые и разрешимые алгебры. Поскольку структура разрешимых алгебр изучена частично, то отсутствует и полная классификация разложимых алгебр Ли. Классификация же неразложимых алгебр Ли, насколько нам известно, полностью проведена лишь для алгебр, размерности которых не превышают восьми [179]. А именно, алгебр Ли, фактор Леви которых совпадает с алгебрами $sl(2,\mathbb{R})$ и $so(3)$.

Далее мы приводим полный список этих алгебр, употребляя обозначения:

$$\begin{aligned} sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle : \quad & [e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \\ & [e_2, e_3] = e_1; \\ so(3) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle : \quad & [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \\ & [e_2, e_3] = e_1. \end{aligned}$$

При обозначении радикалов $N = \langle e_4, e_5, \ldots, e_m \rangle$ $(m = \dim N + 3)$ мы сохраняем те же обозначения для разрешимых алгебр Ли, которые использовались выше. При этом соответствующие коммутационные соотношения для базисных операторов N легко получить из известных посредством замены в базисных операторах индексов i на индексы $i+3$. Поэтому в перечне алгебр, которые являются полупрямыми суммами полупростой и разрешимой алгебр Ли, мы приводим только значения ненулевых коммутаторов $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, где $i = 1, 2, 3$; $j, k = 4, 5, \ldots, m$.

1. Алгебры Ли размерности 5 и 6

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{2.1}:$ $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = -e_5$;

$so(3) \inplus A_{3.1}:$ $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_2, e_4] = -e_6$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_6] = -e_5$, $[e_2, e_6] = e_4$, $[e_3, e_5] = -e_4$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{3.3}:$ $A_{3.3} = \langle e_6, e_4, e_5 \rangle$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = -e_5$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{3.5}:$ $A_{3.5} = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = -e_5$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{3.1}:$ $[e_1, e_4] = 2e_4$, $[e_2, e_5] = 2e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_6] = -2e_6$, $[e_2, e_6] = e_5$, $[e_3, e_5] = 2e_6$.

2. Алгебры Ли размерности 7

$so(3) \inplus A_{4.5}(p = q = 1):$ $[e_1, e_5] = e_6$, $[e_2, e_4] = -e_6$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_6] = -e_5$, $[e_2, e_6] = e_4$, $[e_3, e_5] = -e_4$;

$so(3) \inplus 4A_1:$ $[e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_7$, $[e_2, e_4] = \frac{1}{2}e_5$, $[e_3, e_4] = \frac{1}{2}e_6$, $[e_1, e_5] = \frac{1}{2}e_6$, $[e_2, e_5] = -\frac{1}{2}e_4$, $[e_3, e_5] = -\frac{1}{2}e_7$, $[e_1, e_6] = -\frac{1}{2}e_5$, $[e_2, e_6] = \frac{1}{2}e_7$, $[e_3, e_6] = -\frac{1}{2}e_4$, $[e_1, e_7] = -\frac{1}{2}e_4$, $[e_2, e_7] = -\frac{1}{2}e_6$, $[e_3, e_7] = \frac{1}{2}e_5$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{4.5}(q = 1):$ $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = -e_5$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{4.8}(q = 1):$ $A_{4.8} = \langle e_6, e_4, e_5, e_7 \rangle$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = -e_5$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{4.5}(p = q = 1):$ $[e_1, e_4] = 2e_4$, $[e_2, e_5] = 2e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_6] = -2e_6$, $[e_2, e_6] = e_5$, $[e_3, e_5] = 2e_6$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus 4A_1:$ $[e_1, e_4] = 3e_4$, $[e_2, e_5] = 3e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = e_5$, $[e_2, e_6] = 2e_5$, $[e_3, e_5] = 2e_6$, $[e_1, e_6] = -e_6$, $[e_2, e_7] = e_6$, $[e_3, e_6] = 3e_7$, $[e_1, e_7] = -3e_7$;

$sl(2,\mathbb{R}) \inplus 4A_1:$ $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_5] = e_4$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_1, e_5] = -e_5$, $[e_1, e_6] = e_6$, $[e_2, e_7] = e_6$, $[e_3, e_6] = e_7$, $[e_1, e_7] = -e_7$.

3. Алгебры Ли размерности 8

$so(3) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.7}(p = q = 1): \quad [e_1, e_5] = e_6, \quad [e_2, e_4] = -e_6,$
$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_6] = -e_5, \quad [e_2, e_6] = e_4, \quad [e_3, e_5] = -e_4;$

$so(3) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.4}: \quad A_{5.4} = \langle e_8, e_4, e_7, e_5, e_6\rangle, \quad [e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_7,$
$[e_2, e_4] = \frac{1}{2}e_5, \quad [e_3, e_4] = \frac{1}{2}e_6, \quad [e_1, e_5] = \frac{1}{2}e_6,$
$[e_2, e_5] = -\frac{1}{2}e_4, \quad [e_3, e_5] = -\frac{1}{2}e_7, \quad [e_1, e_6] = -\frac{1}{2}e_5,$
$[e_2, e_6] = \frac{1}{2}e_7, \quad [e_3, e_6] = -\frac{1}{2}e_4, \quad [e_1, e_7] = -\frac{1}{2}e_4,$
$[e_2, e_7] = -\frac{1}{2}e_6, \quad [e_3, e_7] = \frac{1}{2}e_5;$

$so(3) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.7}(p = q = r = 1): \quad [e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_7, \quad [e_2, e_4] = \frac{1}{2}e_5,$
$[e_3, e_4] = \frac{1}{2}e_6, \quad [e_1, e_5] = \frac{1}{2}e_6, \quad [e_2, e_5] = -\frac{1}{2}e_4,$
$[e_3, e_5] = -\frac{1}{2}e_7, \quad [e_1, e_6] = -\frac{1}{2}e_5, \quad [e_2, e_6] = \frac{1}{2}e_7,$
$[e_3, e_6] = -\frac{1}{2}e_4, \quad [e_1, e_7] = -\frac{1}{2}e_4, \quad [e_2, e_7] = -\frac{1}{2}e_6,$
$[e_3, e_7] = \frac{1}{2}e_5;$

$so(3) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.17}(p = q,\ r = 1): \quad A_{5.17} = \langle e_4, e_6, e_5, e_7, e_8\rangle,$
$[e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_7, \quad [e_2, e_4] = \frac{1}{2}e_5, \quad [e_3, e_4] = \frac{1}{2}e_6,$
$[e_1, e_5] = \frac{1}{2}e_6, \quad [e_2, e_5] = -\frac{1}{2}e_4, \quad [e_3, e_5] = -\frac{1}{2}e_7,$
$[e_1, e_6] = -\frac{1}{2}e_5, \quad [e_2, e_6] = \frac{1}{2}e_7, \quad [e_3, e_6] = -\frac{1}{2}e_4,$
$[e_1, e_7] = -\frac{1}{2}e_4, \quad [e_2, e_7] = -\frac{1}{2}e_6, \quad [e_3, e_7] = \frac{1}{2}e_5;$

$so(3) \mathbin{\in\!\!\!\!+} 5A_1: \quad [e_1, e_4] = \frac{1}{2}e_7, \quad [e_1, e_5] = -\frac{1}{2}e_6,$
$[e_1, e_6] = 2e_5 - e_8, \quad [e_1, e_7] = -2e_4, \quad [e_1, e_8] = 3e_6,$
$[e_2, e_4] = \frac{1}{2}e_6, \quad [e_2, e_5] = \frac{1}{2}e_7, \quad [e_2, e_6] = -2e_4,$

$[e_2, e_7] = -2e_5 - e_8, \quad [e_2, e_8] = 3e_7, \quad [e_3, e_4] = 2e_5,$
$[e_3, e_5] = -2e_4, \quad [e_3, e_6] = e_7, \quad [e_3, e_7] = -e_6;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.4}: \quad A_{5.4} = \langle e_8, e_4, e_6, e_5, e_7\rangle, \quad [e_1, e_4] = e_4,$
$[e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.7}(p = 1): \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4,$
$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.8}(p = 1): \quad A_{5.8} = \langle e_6, e_7, e_4, e_5, e_8\rangle, \quad [e_1, e_4] = e_4,$
$[e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_5: \quad A_5 \sim A_{5.9}, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4,$
$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.13}(p = 1): \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4,$
$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.19}(p = 1): \quad A_{5.19} = \langle e_6, e_4, e_5, e_7, e_8\rangle, \quad [e_1, e_4] = e_4,$
$[e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.20}(p = 1): \quad A_{5.20} = \langle e_6, e_4, e_5, e_7, e_8\rangle, \quad [e_1, e_4] = e_4,$
$[e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.7}: \quad [e_1, e_4] = 2e_4, \quad [e_2, e_5] = 2e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5,$
$[e_1, e_5] = -2e_6, \quad [e_2, e_6] = e_5, \quad [e_3, e_5] = 2e_6;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A^{\epsilon}_{5.4}: \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5,$
$[e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_1, e_6] = e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6, \quad [e_3, e_6] = e_7,$
$[e_1, e_7] = -e_7;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.1}: \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5,$
$[e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_1, e_6] = e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6, \quad [e_3, e_6] = e_7,$
$[e_1, e_7] = -e_7;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_5: \quad A_5 \sim A_{5.3}, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4,$
$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_1, e_6] = e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6,$
$[e_3, e_6] = e_7, \quad [e_1, e_7] = -e_7;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.15}(p = 1): \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4,$
$[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_1, e_6] = e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6,$
$[e_3, e_6] = e_7, \quad [e_1, e_7] = -e_7;$

$sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} A_{5.7}(p = q = 1,\ -1 \leqslant r \leqslant 1): \quad A_{5.7} = \langle e_4, e_6, e_5, e_7, e_8\rangle,$
$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5,$

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_6] = e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6, \quad [e_3, e_6] = e_7, \quad [e_1, e_7] = -e_7;\\
sl(2,\mathbb{R}) &\in\!\!\!\!+ A_{5.17}(p = q,\ r = 1,\ p \geqslant 0): \quad A_{5.17} = \langle e_4, e_6, e_5, e_7, e_8\rangle,\\
&[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_5,\\
&[e_1, e_6] = e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6, \quad [e_3, e_6] = e_7, \quad [e_1, e_7] = -e_7;\\
sl(2,\mathbb{R}) &\in\!\!\!\!+ A_5: \quad A_5 \sim A_{5.4}, \quad [e_1, e_4] = 3e_4, \quad [e_2, e_5] = 3e_4,\\
&[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_5, \quad [e_2, e_6] = 2e_5, \quad [e_3, e_5] = 2e_6,\\
&[e_1, e_6] = -e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6, \quad [e_3, e_6] = 3e_7, \quad [e_1, e_7] = -3e_7;\\
sl(2,\mathbb{R}) &\in\!\!\!\!+ A_{5.7}(p = q = r = 1): \quad [e_1, e_4] = 3e_4, \quad [e_2, e_5] = 3e_4,\\
&[e_3, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_5] = e_5, \quad [e_2, e_6] = 2e_5, \quad [e_3, e_5] = 2e_6,\\
&[e_1, e_6] = -e_6, \quad [e_2, e_7] = e_6, \quad [e_3, e_6] = 3e_7, \quad [e_1, e_7] = -3e_7;\\
sl(2,\mathbb{R}) &\in\!\!\!\!+ 5A_1: \ [e_1, e_4] = 4e_4, \quad [e_2, e_5] = 4e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5,\\
&[e_1, e_5] = 2e_5, \quad [e_2, e_6] = 3e_5, \quad [e_3, e_5] = 2e_6,\\
&[e_1, e_7] = -2e_7, \quad [e_2, e_7] = 2e_6, \quad [e_3, e_6] = 3e_7,\\
&[e_1, e_8] = -4e_8, \quad [e_2, e_8] = e_7, \quad [e_3, e_7] = 4e_8;\\
sl(2,\mathbb{R}) &\in\!\!\!\!+ 5A_1: \quad [e_1, e_4] = 2e_4, \quad [e_2, e_5] = 2e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5,\\
&[e_1, e_6] = -2e_6, \quad [e_2, e_6] = e_5, \quad [e_3, e_5] = 2e_6, \quad [e_1, e_7] = e_7,\\
&[e_2, e_8] = e_7, \quad [e_3, e_7] = e_8, \quad [e_1, e_8] = -e_8.
\end{aligned}
$$

Здесь, указывая тип радикала, мы, где это специально не оговорено, считаем, что базис радикала составляют операторы $e_4, e_5, \ldots, e_m$, которые размещены в порядке возрастания индексов. Если дополнительно указан базис, то базисные операторы расположены так, как они стояли бы в соответствующей разрешимой алгебре. Например, в алгебре $sl(2,\mathbb{R}) \in\!\!\!\!+ A_{5.17}$ указано, что $A_{5.17} = \langle e_4, e_6, e_5, e_7, e_8\rangle$. Это означает, что базисные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям, которые определяют тип алгебры $A_{5.17}$, приведенной в перечне разрешимых алгебр. Чтобы получить явный вид коммутационных соотношений для данной алгебры, нужно в коммутационных соотношениях алгебры $A_{5.17}$ сделать следующие переобозначения операторов e_4, e_5, e_6, e_7, e_8:

$$
e_4 \to e_1, \quad e_6 \to e_2, \quad e_5 \to e_3, \quad e_7 \to e_4, \quad e_8 \to e_5.
$$

Также для ряда пятимерных радикалов $N = \langle e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\rangle$ мы взяли такие обозначения:

$$
\begin{aligned}
\sim A_{5.9}: &\quad [e_4, e_8] = e_4, \quad [e_5, e_8] = e_5, \quad [e_6, e_8] = pe_6,\\
&[e_7, e_8] = e_6 + pe_7, \quad p \neq 0;\\
A^{\epsilon}_{5.4}: &\quad [e_4, e_8] = e_8, \quad [e_6, e_7] = \epsilon e_8, \quad \epsilon = \pm 1;\\
\sim A_{5.3}: &\quad [e_6, e_8] = e_4, \quad [e_7, e_8] = e_5, \quad [e_6, e_7] = e_8;\\
\sim A_{5.4}: &\quad [e_4, e_7] = e_8, \quad [e_5, e_6] = -3e_8.
\end{aligned}
$$

Теперь введем в рассмотрение алгебры Ли инфинитезимальных операторов и дадим, наконец, ответ на вопрос, образовывают ли преобразования, которые допускает уравнение Бюргерса, многопараметрическую группу локальных преобразований.

1.3.3. Алгебра Ли инфинитезимальных операторов. Окончание рассмотрения примера

Пусть $V = \mathbb{R}^N = \langle x\rangle = \langle x^1, \ldots, x^N\rangle$. Рассмотрим векторные поля $\xi : V \to V$ класса $C_\infty(V)$. Поскольку операции сложения и умножения на действительные числа векторных полей дают снова векторные поля, то множество всех векторных полей в пространстве V само образовывает векторное пространство (над полем $\mathbb{R}$). Это пространство будем обозначать символом L^ξ и называть *пространством векторных полей* (*в пространстве* V). В локальной теории рассматривают векторные поля на открытом множестве $W \subset V$ класса $C_\infty(W)$, в соответствии с чем получается пространство векторных полей $L^\xi(W)$ на множестве W.

Коммутатором векторных полей $\xi_1, \xi_2 \in L^\xi$ называют векторное поле, которое обозначают символом $[\xi_1, \xi_2]$ и которое определяется формулой

$$
[\xi_1, \xi_2] = \partial\xi_2\langle\xi_1\rangle - \partial\xi_1\langle\xi_2\rangle. \tag{1.118}
$$

Используя понятие инфинитезимального оператора $\xi \cdot \partial$, это определение можно записать в виде

$$
[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1 \cdot \partial)\xi_2 - (\xi_2 \cdot \partial)\xi_1. \tag{1.119}
$$

Понятие коммутатора векторных полей естественно переносится и на соответствующие этим полям операторы. А именно, оператор $[\xi_1, \xi_2] \cdot \partial$ называется *коммутатором операторов* $\mathrm{v}_1 = \xi_1 \cdot \partial$, $\mathrm{v}_2 = \xi_2 \cdot \partial$ и определяется формулой

$$
[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = [\xi_1 \cdot \partial, \xi_2 \cdot \partial] = [\xi_1, \xi_2] \cdot \partial. \tag{1.120}
$$

Формула (1.120) означает, что символ коммутатора [,] векторных полей переставной со скалярным умножением векторного поля на оператор дифференцирования, вследствие чего все равно, говорить ли о коммутаторе операторов или о коммутаторе векторных полей.

Понятие коммутатора операторов возникло из определения действия операторов на отображение (некоторую функцию), когда такое действие необходимо выполнить несколько раз последовательно, но с разными операторами. При этом имеет место формула

$$(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial) - (\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial) = [\xi_1, \xi_2] \cdot \partial, \tag{1.121}$$

которая показывает, что результаты действия правой и левой частей равенства на любое отображение равны между собой.

Определение (1.118) вводит в пространстве векторных полей L^ξ бинарную операцию, которая ставит в соответствие упорядоченной паре (ξ_1, ξ_2) векторное поле $[\xi_1, \xi_2] \in L^\xi$. Эту операцию и называют *операцией коммутирования.*

Введенная операция коммутирования наделяет пространство L^ξ определенной алгебраической структурой. В частности, вследствие конструктивного определения операции коммутирования на пространстве векторных полей, нетрудно установить такие ее алгебраические свойства:

1°) *Операция коммутирования билинейна.* То есть для любых векторных полей ξ_1, ξ_2, ξ_3 и любых чисел a, b имеют место тождества

$$[a\xi_1 + b\xi_2, \xi_3] = a[\xi_1, \xi_3] + b[\xi_2, \xi_3],$$
$$[\xi_1, a\xi_2 + b\xi_3] = a[\xi_1, \xi_2] + b[\xi_1, \xi_3].$$

2°) *Операция коммутирования антисимметрична.* То есть для любых векторных полей ξ_1, ξ_2 имеет место равенство

$$[\xi_1, \xi_2] = -[\xi_2, \xi_1].$$

3°) *Операция коммутирования удовлетворяет тождеству Якоби.* То есть для любых векторных полей ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет место равенство

$$[[\xi_1, \xi_2], \xi_3] + [[\xi_2, \xi_3], \xi_1] + [[\xi_3, \xi_1]\xi_2] = 0.$$

Проверка этих свойств выполняется непосредственно при помощи любого из определений коммутатора (1.118), (1.119) и (1.120).

Например, для проверки третьего свойства достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
[[\xi_1, \xi_2], \xi_3] \cdot \partial &= ([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial)(\xi_3 \cdot \partial) - (\xi_3 \cdot \partial)([\xi_1, \xi_2] \cdot \partial) = \\
&= (\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial)(\xi_3 \cdot \partial) - (\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_3 \cdot \partial) - \\
&- (\xi_3 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial) + (\xi_3 \cdot \partial)(\xi_2 \cdot \partial)(\xi_1 \cdot \partial),
\end{aligned}$$

и сделать циклическую перестановку индексов $1 \to 2 \to 3 \to 1$. После сложения трех полученных равенств все слагаемые в правой части взаимно сократятся. Из вышесказанных соображений вытекает, что для пространства L^ξ выполняются аксиомы (a)–(c) из определения алгебры Ли. Следовательно, пространство L^ξ является алгеброй Ли (действительной алгеброй Ли).

При рассмотрении алгоритма Ли вычисления группы инвариантности дифференциального уравнения (1.74) было подчеркнуто, что множество решений определяющей системы уравнений составляет некоторое векторное пространство L, которое, очевидно, является подпространством пространства L^ξ. В групповом анализе известна следующая теорема (см., например, [46, § 7]).

Теорема 1.13. *Если дифференциальное уравнение допускает операторы* $\mathrm{v}_1 = \xi_1\partial$ *и* $\mathrm{v}_2 = \xi_2\partial$, *то оно допускает и их коммутатор* $[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = [\xi_1, \xi_2] \cdot \partial$.

Из этой теоремы вытекает факт, который имеет фундаментальное значение: *множество всех операторов, которые допускает данное дифференциальное уравнение, образовывает алгебру Ли.*

Если есть некоторая алгебра Ли L операторов, которую допускает данное дифференциальное уравнение, то говорят, что это уравнение допускает алгебру Ли L. Саму алгебру Ли L, в таких случаях, называют *алгеброй инвариантности* или *алгеброй симметрии* данного уравнения.

Наиболее широкая алгебра Ли, которую допускает данное дифференциальное уравнение, называется *максимальной алгеброй инвариантности* данного уравнения.

Теперь понятно, что в рассмотренных в п. 1.2.3 примерах, вычисляя основные группы, которые допускают дифференциальные уравнения, мы, фактически, нашли некоторые алгебры Ли инвариантности данных уравнений.

Следовательно, утвердительный ответ на вопрос, составляют ли преобразования, которые допускает уравнение Бюргерса, многопараметрическую группу, мы получим тогда, когда убедимся, что операторы (1.94) образовывают базис некоторой алгебры Ли.

Для этого нужно найти коммутаторы всех пар операторов и убедиться, что в результате выполнения операции коммутирования будут получены операторы, которые принадлежат пространству L^5 с базисными операторами v_i $(i = 1, \ldots, 5)$ вида (1.94).

Для вычисления будем использовать формулу (1.120), которая в покомпонентной записи ($\mathrm{v}_1 = \xi_1^i \partial_{x^i}$, $\mathrm{v}_2 = \xi_2^i \partial_{x^i}$, $i = 1, \ldots, N$) имеет вид

$$[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = ((\mathrm{v}_1\xi_2^i) - (\mathrm{v}_2\xi_1^i))\frac{\partial}{\partial_{x^i}}. \qquad (1.122)$$

Так, например, для операторов v_3, v_4 вида (1.94), в соответствии с (1.122), имеем

$$\begin{aligned}[\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4] = [((t\partial_x - \partial_u)2t - (2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u)\cdot 0)\partial_t +\\ + ((t\partial_x - \partial_u)x - (2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u)\cdot t)\partial_x +\\ + ((t\partial_x - \partial_u)(-u) - (2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u)\cdot(-1))\partial_x =\\ = (t - 2t)\partial_x + \partial_u = -t\partial_x + \partial_u = -\mathrm{v}_3 \in L^5.\end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в следующей таблице, где коммутаторы операторов $[\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j]$ содержатся на пересечении i-й строки и j-го столбца.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	v_2	$2\mathrm{v}_1$	v_4
v_2	0	0	0	v_2	v_3
v_3	$-\mathrm{v}_2$	0	0	$-\mathrm{v}_3$	0
v_4	$-2\mathrm{v}_1$	$-\mathrm{v}_2$	v_3	0	$2\mathrm{v}_5$
v_5	$-\mathrm{v}_4$	$-\mathrm{v}_3$	0	$-2\mathrm{v}_5$	0

Пусть $S = \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5\rangle$, $T = \langle \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\rangle$. Нетрудно убедиться, что

$$[S, S] \subset S, \quad [T, T] \subset T, \quad [T, S] \subset T,$$

следовательно, $L^5 = S \Subset T$. Далее, $T_{(1)} = [T, T] = 0$, то есть T — разрешимая алгебра Ли (более того — абелева алгебра Ли).

Для алгебры S

$$S_{(1)} = [S, S] = S,$$

и, в соответствии с определением, алгебра S является простой алгеброй Ли.

Согласно обозначениям приведенной в п. 1.3.2 классификации разрешимых алгебр Ли $T \sim A_{2.1}$.

Определим тип алгебры S. Поскольку $\dim S = 3$, то, в соответствии с приведенной в п. 1.3.2 классификацией простых алгебр Ли, она может быть изоморфной или алгебре $sl(2, \mathbb{R})$, или алгебре $so(3)$.

Пусть $sl(2, \mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, где

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Нетрудно убедиться, что отображение φ

$$\varphi: \quad \mathrm{v}_1 \to -e_2, \quad \mathrm{v}_4 \to -e_1, \quad \mathrm{v}_5 \to e_3$$

определяет изоморфизм между алгебрами S и $sl(2, \mathbb{R})$, то есть $S \sim sl(2, \mathbb{R})$.

Следовательно, максимальная алгебра инвариантности уравнения Бюргерса изоморфна полупрямой сумме простой алгебры $sl(2, \mathbb{R})$ и коммутативного радикала T:

$$L^5 \sim sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{2.1}.$$

Отметим, что изоморфной алгебре $sl(2, \mathbb{R}) \Subset A_{2.1}$ является так называемая *полная алгебра Галилея*.

В завершение параграфа мы останавливаемся еще на трех примерах и предлагаем для самостоятельного решения несколько заданий.

1.3.4. Практикум

Пример 1.7. В соответствии с результатами примера 1.4 уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

допускает бесконечномерную алгебру симметрии, которая порождена операторами

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}_1 = \partial_x, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_t, \quad \mathrm{v}_3 = u\partial_u, \quad \mathrm{v}_4 = 2t\partial_t + x\partial_x,\\ &\mathrm{v}_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u, \quad \mathrm{v}_6 = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u,\\ &\mathrm{v}_\infty = \alpha(t, x)\partial_u, \ \alpha_t = \alpha_{xx}.\end{aligned}$$

Определим теперь тип шестимерной алгебры L^6, состоящей из операторов $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_6$, и найдем преобразования, которые составляют основную группу симметрии.

Результаты коммутационных соотношений, полученные в соответствии с формулой (1.122), приведены в следующей таблице.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_∞
v_1	0	0	0	v_1	$-\mathrm{v}_3$	$2\mathrm{v}_5$	$\mathrm{v}_\infty(\alpha_x)$
v_2	0	0	0	$2\mathrm{v}_2$	$2\mathrm{v}_1$	$4\mathrm{v}_4 - 2\mathrm{v}_3$	$\mathrm{v}_\infty(\alpha_t)$
v_3	0	0	0	0	0	0	$-\mathrm{v}_\infty$
v_4	$-\mathrm{v}_1$	$-2\mathrm{v}_2$	0	0	v_5	$2\mathrm{v}_6$	$\mathrm{v}_\infty(\alpha')$
v_5	v_3	$-2\mathrm{v}_1$	0	$-\mathrm{v}_5$	0	0	$\mathrm{v}_\infty(\alpha'')$
v_6	$-2\mathrm{v}_5$	$2\mathrm{v}_3 - 4\mathrm{v}_4$	0	$-2\mathrm{v}_6$	0	0	$\mathrm{v}_\infty(\alpha''')$
v_∞	$-\mathrm{v}_\infty(\alpha_x)$	$-\mathrm{v}_\infty(\alpha_t)$	v_∞	$-\mathrm{v}_\infty(\alpha')$	$-\mathrm{v}_\infty(\alpha'')$	$-\mathrm{v}_\infty(\alpha''')$	0

Здесь $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$, $\alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha$, $\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha$.

Поскольку все инфинитезимальные операторы должны составлять алгебру Ли, то мы можем сделать такой вывод: если $\alpha(t,x)$ — решение уравнения теплопроводности, то и α_x, α_t, α', α'', α''' — также решения уравнения теплопроводности, и общая структура бесконечномерной алгебры симметрии L^∞ уравнения теплопроводности такова:

$$L^\infty = L^6 \Subset \langle \mathrm{v}_\infty \rangle.$$

Определим теперь тип алгебры $L^6 = \langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_6 \rangle$. Пусть $S = \langle \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_6 \rangle$, $T = \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_5 \rangle$. Очевидными являются соотношения $[S,S] \subset S$, $[S,T] \subset T$, $[T,T] \subset T$. Следовательно, $L^6 = S \Subset T$.

Рассмотрим алгебру $A_{3.3} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, где $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$ (см. список трехмерных разрешимых алгебр Ли). Нетрудно убедиться, что алгебра $A_{3.3}$ является нильпотентной алгеброй (ее еще называют *алгеброй Вейля*).

С другой стороны, мы видим, что для идеала T выполняются равенства

$$T^{(1)} = [T,T] = \langle e_1 \rangle, \quad T^{(2)} = [T^{(1)}, T^{(1)}] = 0,$$

то есть T — также нильпотентная алгебра Ли. Поскольку есть только одна трехмерная нильпотентная алгебра Ли, то остается построить изоморфизм $\varphi : T \to A_{3.3}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\varphi : \mathrm{v}_3 \to e_1, \quad \mathrm{v}_5 \to e_2, \quad \mathrm{v}_1 \to e_3.$$

Следовательно, $T \sim A_{3.3}$.

Для алгебры S имеет место равенство $[S,S] = S$, поэтому S — полупростая алгебра Ли и, как нетрудно убедиться, $S \sim sl(2,\mathbb{R})$.

Следовательно, алгебра L^6 разлагается в полупрямую сумму полупростой алгебры Ли, изоморфной $sl(2,\mathbb{R})$, и трехмерного нильпотентного радикала:

$$L^6 \sim sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3.3}.$$

Заметим, что алгебра $sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3.3}$ является изоморфной так называемой *полной расширенной алгебре Галилея* (или, еще говорят: *алгебре Шредингера*).

Для построения в явном виде преобразований, которые допускает уравнение теплопроводности, необходимо для каждого из операторов v_i $(i = 1, \ldots, 6)$ и v_∞ найти решение задачи Коши (1.7). Ниже мы приводим результаты вычислений:

$$G_1^1: \quad (t, x + a_1, u),$$
$$G_2^1: \quad (t + a_2, x, u),$$
$$G_3^1: \quad (t, x, e^{a_3} u),$$
$$G_4^1: \quad \left(e^{2a_4} t, e^{a_4} x, u\right),$$
$$G_5^1: \quad \left(t, 2a_5 t + x, u \exp\left(-a_5 x - a_5^2 t\right)\right),$$

$$G_6^1: \quad \left(\frac{t}{1 - 4a_6 t}, \frac{x}{1 - 4a_6 t}, u\sqrt{1 - 4a_6 t}\, \exp\left\{\frac{-a_6 x^2}{1 - 4a_6 t}\right\}\right),$$
$$G_\infty^1: \quad (t, x, u + a\alpha(t,x)),$$

где $a, a_1, \ldots, a_6$ — действительные параметры.

Заметим, что значения α', α'', α''' можно использовать для построения новых решений уравнения теплопроводности по уже известным.

Например, из решения $\alpha = 2t + x^2$ получаем еще одно решение

$$\alpha''' = 8t\left(t + x^2\right) + \left(2t + x^2\right)^2$$

уравнения $\alpha_t = \alpha_{xx}$.

Пример 1.8. Найти коммутационные соотношения, которые определяют алгебру $so(2,2)$.

В соответствии с перечнем простых алгебр Ли алгебра $so(2,2)$ — это алгебра Ли всех действительных матриц порядка 6 вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha & 0 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & 0 & \beta \\ \alpha_2 & \alpha_4 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta \in \mathbb{R}$.

Отсюда следует, что для алгебры $so(2,2)$ можно взять базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$[e_1, e_2] = -e_4, \quad [e_1, e_3] = -e_5, \quad [e_1, e_4] = e_2, \quad [e_1, e_5] = e_3,$$
$$[e_1, e_6] = 0, \quad [e_2, e_3] = -e_6, \quad [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_5] = 0,$$
$$[e_2, e_6] = -e_3, \quad [e_3, e_4] = 0, \quad [e_3, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_6] = e_2,$$
$$[e_4, e_5] = -e_6, \quad [e_4, e_6] = -e_5, \quad [e_5, e_6] = e_4.$$

Заметим, что более привычными в разных применениях есть такие обозначения базисных элементов алгебры $so(2,2)$:

$$J_{12}(e_1), \quad J_{13}(e_2), \quad J_{14}(e_3), \quad J_{23}(e_4), \quad J_{24}(e_5), \quad J_{34}(e_6).$$

Коммутационные соотношения в этих обозначениях записываются более компактно:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac},$$

где $a, b, c, d = 1, 2, 3, 4$, g_{ab} — метрический тензор обобщенного пространства Минковского $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$g_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b = 1, 2; \\ -1, & a = b = 3, 4; \\ 0, & a \neq b. \end{cases}$$

Пример 1.9. Показать, что имеет место изоморфизм

$$so(2, 2) \sim sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R}).$$

Возьмем базис алгебры $so(2, 2) = \{J_{ab} | a, b = 1, 2, 3, 4, a < b\}$ в таком виде:

$$A_1 = J_{12} + J_{34}, \quad A_2 = J_{23} - J_{14}, \quad A_3 = J_{13} + J_{24},$$
$$B_1 = J_{12} - J_{34}, \quad B_2 = J_{23} + J_{14}, \quad B_3 = J_{13} - J_{24}.$$

Нетрудно убедиться, что выполняются такие коммутационные соотношения:

$$[A_1, A_2] = 2A_3, \quad [A_1, A_3] = -2A_2, \quad [A_2, A_3] = -2A_1;$$
$$[B_1, B_2] = 2B_3, \quad [B_1, B_3] = -2B_2, \quad [B_2, B_3] = -2B_1;$$
$$[A_i, B_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

То есть если $S_1 = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, $S_2 = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$, то

$$[S_1, S_1] \subset S_1, \quad [S_2, S_2] \subset S_2, \quad [S_1, S_2] = 0,$$

откуда и следует, что

$$so(2, 2) = S_1 \oplus S_2.$$

Алгебра $sl(2, \mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ с точностью до изоморфизма определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_3] = -2e_2, \quad [e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3.$$

Нетрудно увидеть, что отображение φ

$$e_1 \to \frac{1}{2}(A_3 + A_1), \quad e_2 \to \frac{1}{2}A_2, \quad e_3 \to \frac{1}{2}(A_3 - A_1)$$

является изоморфизмом для алгебр $sl(2, \mathbb{R})$ и S_1, $sl(2, \mathbb{R})$ и S_2 (если $A_i \to B_i$, $i = 1, 2, 3$).

Следовательно, $so(2, 2) \sim sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$.

Задание 1.8. Определить типы алгебр инвариантности уравнений из задания 1.4 и построить явный вид преобразований группы, которые допускают эти уравнения.

Задание 1.9. Найти все разрешимые подалгебры алгебр Лоренца и Пуанкаре.

Задание 1.10. Провести классификацию всех десятимерных алгебр Ли, которые содержат четырехмерный абелевый радикал.

Указание: воспользоваться теоремами Леви–Мальцева и Картана и перечнем простых алгебр Ли.

Задание 1.11. Показать, что алгебра $L^8 = \langle e_1, \ldots, e_8 \rangle$, ненулевые коммутационные соотношения которой имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_1, e_3] = e_6, \quad [e_1, e_4] = e_7, \quad [e_1, e_5] = -e_8,$$
$$[e_2, e_3] = e_8, \quad [e_2, e_4] = e_6, \quad [e_2, e_6] = -e_7, \quad [e_3, e_4] = -e_5,$$
$$[e_3, e_5] = -e_7, \quad [e_4, e_6] = -e_8,$$

является нильпотентной.

Задание 1.12. Определить тип алгебры инвариантности уравнения Кортевега–де Фриза.

Заметим, что эта алгебра изоморфна так называемой *специальной алгебре Галилея.*

Задание 1.13. Показать, что имеют место изоморфизмы:

$$so(4) \sim so(3) \oplus so(3),$$
$$so^*(4) \sim su(2) \oplus (2, \mathbb{R}),$$
$$sl(2, \mathbb{C}) \sim so(3, 1).$$

Задание 1.14. Показать, что максимальная алгебра инвариантности первого уравнения из задания 1.4 изоморфна алгебре (ее называют расширенной алгеброй Пуанкаре)

$$\tilde{p}(1, 2) = (so(1, 2) \oplus \langle D \rangle) \subset\!\!\!\!+\, t^3,$$

где $so(1, 2) = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle$, $t^3 = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ и имеют место такие коммутационные соотношения:

$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta,$$
$$[J_{\alpha\beta}, J_{\delta\gamma}] = g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta},$$
$$[P_\alpha, D] = P_\alpha, \quad [J_{\alpha\beta}, D] = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2$ и

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta = 0; \\ -1, & \alpha = \beta = 1, 2; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

1.4. Симметрийная редукция и инвариантные решения уравнений в частных производных

Четвертый, последний, параграф первого раздела посвящен рассмотрению одного из важных применений нетривиальных симметрийных свойств дифференциальных уравнений в частных производных, а именно: симметрийной редукции и построению точных (инвариантных) решений таких уравнений. Здесь мы ограничиваемся лишь формулированием ряда теорем. Их доказательство можно найти, например, в [46].

1.4.1. Инвариантные решения системы уравнений в частных производных

В разных задачах математической физики свойства инвариантности дифференциальных уравнений используются для построения их частных решений, которые известны как инвариантные и частично инвариантные решения. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением лишь инвариантных решений, примерами которых являются известные в механике стационарные, одномерные, автомодельные решения. Условия существования частично инвариантных решений можно найти в [46].

Рассматриваем систему дифференциальных уравнений

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}) = 0, \quad F = (F^1, \ldots, F^s) \tag{1.123}$$

порядка p, которая определена в некоторой открытой области пространства $V = X \times U$ n независимых $X = \langle x \rangle = \langle x^1, \ldots, x^n \rangle$ и m зависимых $U = \langle u(x) \rangle = \langle u^1, \ldots, u^m \rangle$ переменных.

В дальнейшем систему (1.123) мы обозначаем символом S.

Предположим, что уравнение допускает r-параметрическую группу G^r преобразований f_a пространства V. Эта группа может совпадать с основной группой уравнения S (ее мы будем обозначать GS), а может быть только ее подгруппой. Пусть, далее, $L = L^r$ — алгебра Ли группы G^r, элементами которой являются векторные поля $(\xi_a(x, u), \eta_a(x, u))$, которые принадлежат классу $C_\infty(V)$ и могут быть записаны в виде операторов

$$\mathrm{v}_a = \xi_a^i(x, u)\partial_{x^i} + \eta_a^\alpha(x, u)\partial_{u^\alpha}, \tag{1.124}$$

где $a = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$.

Каждое решение u уравнения S является отображением $X \to U$, которое действует по формуле $u = u(x)$.

Множество всех решений класса $C_\infty(W)$ на открытом множестве $W \subset X$ будем обозначать символом Su.

Решению u соответствует некоторая поверхность (будем говорить *многообразие*) $[u] \subset V$, которое определяется уравнением

$$u - u(x) = 0. \tag{1.125}$$

Фундаментальное значение выражения “уравнение S допускает группу G^r” состоит в том, что группа G^r действует на множестве решений Su. Это означает, что в результате действия произвольного преобразования $F_a \in G^r$ каждое решение $u \in Su$ трансформируется в решение того же уравнения S.

Прежде чем перейти к рассмотрению понятия инвариантных решений и условий их существования, остановимся на некоторых вспомогательных, необходимых для дальнейшего изложения, фактах и понятиях группового анализа.

Пусть $N = m + n$ и $k \leqslant N$. Для произвольного непрерывного дифференцируемого отображения $\psi : V \to \mathbb{R}^k$ введем понятие ранга этого отображения на открытом множестве $W \subset V$. Для этого рассмотрим производную $\partial\psi(x, u)$, которая является линейным отображением $V \to \mathbb{R}^k$. Ранг матрицы $(\partial\psi(x, u))$ этого линейного отображения называется *рангом отображения ψ в точке* (x, u). Говорят, что отображение ψ имеет ранг на множестве W, если его ранг один и тот же во всех точках $(x, u) \in W$. Если отображение ψ имеет ранг на W, равный q, то число q называется *рангом отображения ψ на множестве W*.

Как известно из дифференциальной геометрии, любое отображение $\psi : W \to \mathbb{R}^k$ класса $C_1(W)$ задает (локально в окрестности точки (x_0, u_0)) некоторое многообразие $[\psi] \subset V$ как множество тех точек $(x, u) \in W$, для которых выполнено равенство

$$\psi(x, u) = 0. \tag{1.126}$$

Это равенство называют *уравнением многообразия* $[\psi]$. Задание многообразия при помощи уравнения еще называют его неявным заданием.

Уравнение (1.126) называется *регулярным*, а многообразие $[\psi]$, которое оно задает, — *регулярно заданным многообразием*, если ранг отображения ψ на W равен k. В этом случае размерность многообразия $[\psi]$ равняется $N - k$.

В системе координат, в которой $(x,u) = (x^1,\ldots,x^n,u^1,\ldots,u^m)$, уравнение (1.126) имеет вид системы из k уравнений

$$\psi^j(x^1,\ldots,x^n,u^1,\ldots,u^m) = 0, \quad j = 1,\ldots,k,$$

а условие регулярности сводится к тому, чтобы матрица Якоби $(\partial\psi) = (\partial_i\psi^j)$ имела ранг k везде в окрестности точки (x_0,u_0).

Обобщим, далее, понятие инвариантности однопараметрической группы на случай r-параметрической группы. Через

$$(\overline{x},\overline{u}) = f(x,u,a)$$

будем обозначать образ точки $(x,u) \in V$ в результате действия некоторого отображения f_a из группы G^r как отображения

$$f_a : V \times \mathbb{R}^r \to V.$$

Пусть $F : V \to \tilde{V}$ и группа $\mathbb{R}^r$ действует на $\tilde{V}$ тривиально.

Отображение $F \neq \text{const}$ называется *инвариантом* группы G^r, если для любых $(x,u,a) \in V \times \mathbb{R}^r$ выполняется равенство

$$F(\overline{x},\overline{u}) = F(x,u). \tag{1.127}$$

По внешнему виду определение (1.127) совпадает с определением (1.17). Отличие состоит в том, что в (1.127) “параметр” a уже не действительное число, а r-мерный вектор $a \in \mathbb{R}^r$.

Следующая теорема, которая является аналогом теоремы 1.2, дает инфинитезимальный критерий инвариантности отображения F.

Теорема 1.14. *Отображение $F : V \to \tilde{V}$, $F \neq \text{const}$, класса $C_1(V)$ является инвариантом группы G^r с векторными полями* (1.124) *тогда и только тогда, когда для любой точки $(x,u) \in V$ имеет место равенство*

$$\mathrm{v}_a F(x,u) = 0 \quad \forall\, a \quad (a = 1,\ldots,r). \tag{1.128}$$

Введем далее в рассмотрение понятие ранга группы G^r.

Рангом группы G^r в точке (x_0,u_0) открытого множества $W \subset V$ называется число, которое равно рангу $r \times N$-матрицы $\|\xi_a^i(x_0,u_0), \eta_a^\alpha(x_0,u_0)\|$, где ξ_a^i, η_a^α — компоненты векторных полей (ξ_a,η_a), $i = 1,\ldots,n$, $\alpha = 1,\ldots,m$, $a = 1,\ldots,r$.

Рангом (общим рангом) группы G^r на открытом множестве $W \subset V$ называется число

$$r_* = r_*(\xi_a,\eta_a) = \max_{(x,u)\in W} \operatorname{rank}\|\xi_a^i(x,u),\eta_a^\alpha(x,u)\|. \tag{1.129}$$

Система (1.128) — это система линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Учитывая, что операторы v_a составляют базис некоторой алгебры Ли, видно [20], что эта система полная. Поэтому, в соответствии с (1.129), группа G^r будет иметь инварианты тогда, когда $r_* < N$. В этом случае для группы G^r существует *полный набор* из $N - r_*$ скалярных функционально независимых инвариантов

$$\mathcal{J}^l :\ V \to \mathbb{R}^k \quad (l = 1,\ldots,N - r_*), \tag{1.130}$$

который имеет то свойство, что любой инвариант этой группы может быть представлен в виде функции инвариантов (1.130).

Следовательно, группа G^r преобразований пространства V $(\dim V = n + m = N)$ имеет три целочисленные характеристики (r,N,r_*), между которыми существуют обязательные соотношения:

$$r_* \leqslant r, \quad r_* \leqslant N. \tag{1.131}$$

Группа, для которой $r < N$, всегда имеет инварианты. Но и группа, для которой $r > N$, также может иметь инварианты, если $r_* < N$.

Возвратимся теперь к многообразию $[\psi]$, которое задано уравнением (1.126).

Многообразие $[\psi] \subset V$ называется *инвариантным многообразием* группы G^r, если для каждой точки $(x,u) \in [\psi]$ существует такая окрестность нуля $o \subset \mathbb{R}^r$, что для произвольного $a \in o$ точка $(\overline{x},\overline{u})$ также принадлежит $[\psi]$.

Далее считаем, что уравнением (1.126) многообразие $[\psi]$ задано регулярно, и при этих условиях $\dim[\psi] = N - k$.

Инфинитезимальный критерий инвариантности многообразия формулируется при помощи инфинитезимальных операторов (1.124).

Теорема 1.15. *Многообразие $[\psi]$, которое регулярно задано уравнением* (1.126)*, инвариантно относительно группы G^r тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{v}_a\psi\big|_{[\psi]} = 0. \tag{1.132}$$

Существует простой способ формирования инвариантных многообразий для заданной группы G^r. Берется любой ее инвариант $F\colon V \to \mathbb{R}^k$ и составляется уравнение $F(x,u) = 0$. Заданное этим уравнением многообразие V является инвариантным относительно группы G^r. Этот факт очевиден вследствие определения (или критерия (1.132)). Пусть $r_* = r_*(\xi_a,\eta_a)$ является общим рангом касательного отображения группы G^r на множестве W. При этом мы не предполагаем, что в разных точках $(x, u) \in W$ $\operatorname{rank}(\xi_a^i(x,u), \eta_a^\alpha(x,u))$ равен r_*. При помощи числа r_* все точки $(x, u) \in W$ подразделяются на особые и неособые.

Точка (x, u) называется *особой* точкой (группы G^r), если

$$\operatorname{rank}\|\xi_a(x,u), \eta_a(x,u)\| < r_*,$$

и *неособой* точкой, если

$$\operatorname{rank}\|\xi_a(x,u), \eta_a(x,u)\| = r_*.$$

Многообразие $[\psi] \subset W$ называется *особым многообразием* группы G^r, если все его точки являются особыми и если касательное отображение имеет такой ранг на $[\psi]$:

$$\operatorname{rank}(\xi_a, \eta_a) = r_*((\xi_a, \eta_a)\big|[\psi]) < r_*.$$

Многообразие $[\psi] \subset W$ называется *неособым многообразием* группы G^r, если все его точки есть неособые:

$$r_*((\xi_a, \eta_a)\big|[\psi]) = r_*.$$

Теорема 1.16. *Неособые инвариантные многообразия группы G^r существуют тогда и только тогда, когда $N > r_*$. Если неособое инвариантное многообразие группы G^r задано регулярно уравнением* (1.126)*, то существует такой инвариант этой группы $F : V \to \mathbb{R}^k$, что это многообразие задается уравнением $F(x) = 0$.*

Очевидно, что размерность любого неособого инвариантного многообразия группы G^r не меньше числа r_*. Каждое неособое инвариантное многообразие имеет важную числовую характеристику — ранг. *Рангом* неособого инвариантного многообразия $[\psi]$ размерности $N-k$ группы G^r называется число

$$\rho = \rho([\psi]) = N - k - r_*. \tag{1.133}$$

Геометрическое содержание ранга выясняется путем рассмотрения пространства $\mathbb{R}^{N-r_*}(\omega)$, которое называют *пространством инвариантов*. Точками (векторами) пространства инвариантов являются значения инвариантов $\omega^i = \mathcal{J}^i(x,u)$ $(i = 1, \ldots, N - r_*)$, которые получаются, когда точка (x, u) пробегает открытое множество $W \subset V$. Тогда, согласно теореме 1.16, неособое инвариантное многообразие $[\psi]$ задается системой k независимых уравнений в пространстве инвариантов:

$$\Phi^\sigma\left(\omega^1, \ldots, \omega^{N-r_*}\right) = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, s). \tag{1.134}$$

Уравнения (1.134) независимы в том смысле, что $r_*(\partial_\omega \Phi^\sigma) = s$, а значит, размерность многообразия равна $N - r_* - s$, то есть числу (1.133).

Уравнения этого многообразия в пространстве V получаются, если положить $\omega^\nu = \mathcal{J}^\nu(x,u)$ $(\nu = 1, \ldots, N - r_*)$, и имеют вид

$$\Phi^\sigma\left(\mathcal{J}^1(x,u), \mathcal{J}^2(x,u), \ldots, \mathcal{J}^{N-r_*}(x,u)\right) = 0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению понятия *инвариантного решения* уравнения S (1.123).

Если дифференциальное уравнение S допускает группу G^r, то оно допускает и любую ее подгруппу H. В соответствии с этим понятие инвариантного решения определяется так, чтобы оно охватывало все подгруппы $H \subset G^r$.

Решение $u \in Su$ называется *инвариантным* H-решением уравнения S, если соответствующее ему многообразие $[u]$ является инвариантным многообразием группы H.

Понятно, что многообразие-решение $[u]$ имеет размерность $\dim[u] = n = \dim X$. С другой стороны, очевидно, что $r_*(\partial(u - u(x)) = m$. Следовательно, поскольку $\dim V = N = n + m$, многообразие $[u]$ задано уравнением (1.125) регулярно. Пусть $(\overline{\xi}_a, \overline{\eta}_a)$ — касательное отображение группы H и имеет место представление (1.124). Применение к $[u]$ критерия инвариантности регулярно заданного многообразия (1.132) дает следующий критерий инвариантности решения $u \in Su$ для любой точки $(x, u) \in W$:

$$\overline{\eta}_a(x, u(x)) - \partial u(x)\langle\overline{\xi}_a(x, u(x))\rangle = 0. \tag{1.135}$$

Инвариантное H-решение u называется *особым* или *неособым* в зависимости от того, является ли соответствующее многообразие $[u]$ особым или неособым многообразием группы H.

Пусть $r_* = r_*(\overline{\xi}_a, \overline{\eta}_a)$ — общий ранг группы H. Для того чтобы выяснить, будет ли данное инвариантное H-решение (или H-инвариантное решение) u особым или неособым, нужно найти число $r_*(\overline{\xi}_a, \overline{\eta}_a\big|[u])$ и сравнить его с r_*. Но, вследствие условия инвариантности (1.135),

$$\begin{aligned} r_*(\overline{\xi}_a, \overline{\eta}_a\big|[u]) &= r_*(\overline{\xi}_a(x, u(x)), \overline{\eta}_a(x, u(x))) = \\ &= r_*(\xi_a(x, u(x)) = r_*(\overline{\xi}_a\big|[u]). \end{aligned}$$

Поэтому решение u является особым, если $r_*(\overline{\xi}_a\big|[u]) < r_*$, и является неособым, если $r_*(\overline{\xi}_a\big|[u]) = r_*$.

Итак, *решение u является неособым* тогда и только тогда, когда

$$r_*(\overline{\xi}_a \big| [u]) = r_*.$$

Если u — неособое H-инвариантное решение, то соответствующее инвариантное многообразие $[u]$ имеет определенный ранг, который равен его размерности в пространстве инвариантов. Но размерность $[u]$ равна $N - m = (n+m) - m = n$, поэтому формула (1.133) дает такое значение ранга неособого H-инвариантного решения:

$$\rho = \rho(H) = n - r_*.$$

Кроме этого, вследствие теоремы 1.16, неособое инвариантное многообразие $[u]$, регулярно заданное уравнением (1.126), может быть регулярно задано уравнением вида

$$\Phi(\mathcal{J}^1(x,u), \ldots, \mathcal{J}^{N-r_*}(x,u)) = 0$$

с некоторым отображением $\Phi : \mathbb{R}^{N-r_*} \to \mathbb{R}^m$ класса C_∞, и при этом $r_*(\partial\Phi) = m$.

Необходимое условие существования неособого H-инвариантного решения уравнения S дает следующая терема.

Теорема 1.17. *Для существования неособых H-инвариантных решений необходимым является выполнение соотношений*

$$r_* \leqslant n, \quad r_*(\overline{\xi}_a) = r_*. \tag{1.136}$$

Пусть $\overline{V} = \mathbb{R}^{m+s}(\overline{x}, \overline{u})$ — пространство инвариантов. Вследствие теоремы 1.16 для произвольного неособого инвариантного многообразия $[\psi] \subset V$ группы H определена его проекция $[\overline{\psi}]$ в пространстве инвариантов $\overline{V}$. Соответствие между неособыми инвариантными многообразиями и их проекциями является взаимно-однозначным, в соответствии с таким утверждением: *неособое инвариантное многообразие $[\psi]$ однозначно определяется своей проекцией $[\overline{\psi}]$ в пространстве инвариантов.* Отсюда следует, что для произвольного заданного многообразия $[\overline{\psi}] \subset \overline{V}$ существует одно и только одно неособое многообразие $[\psi] \subset V$, проекцией которого является $[\overline{\psi}]$. В дальнейшем пространство инвариантов $\overline{V}$ будем рассматривать как произведение $\overline{V} = \overline{X} \times \overline{U}$, где $\overline{X} = \mathbb{R}^\rho(\overline{x})$, $\overline{U} = \mathbb{R}^m(\overline{u})$. В соответствии с этим полное множество инвариантов состоит из двух наборов инвариантов $\omega = \{\omega^1, \ldots, \omega^\rho\}$, $\mathrm{w} = \{\mathrm{w}^1, \ldots, \mathrm{w}^m\}$, и при этом предполагается, что $\omega : V \to \overline{X}$, $\mathrm{w} : V \to \overline{U}$ и

$$r_*(\partial_x \omega) = \rho, \quad r_*(\partial_u \mathrm{w}) = m. \tag{1.137}$$

В этих обозначениях неособое многообразие $[u]$ с уравнением (1.126) может быть задано в пространстве инвариантов уравнением вида

$$\overline{u} - \overline{u}(\overline{x}) = 0$$

с некоторым отображением $\overline{u} : \overline{X} \to \overline{U}$. Это уравнение задает проекцию $[\overline{u}]$ многообразия $[u]$ в $\overline{V}$. Отображение $\overline{u}$ будет называться *проекцией отображения u* в пространстве инвариантов.

Пусть инвариантное многообразие $[u]$ группы G^r задано уравнением $\Phi(x,u) = 0$ при помощи отображения $\Phi : V \to \mathbb{R}^m$, которое удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{v}_a \Phi = \lambda \cdot \Phi$$

с некоторым коэффициентом $\lambda : V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, где $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных линейных отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, и условию

$$r_*(\partial_u \Phi) = m.$$

Для определенного $p \geqslant 1$ строится продолженное многообразие $[\underset{p}{u}] \subset \underset{p}{V}$, которое задано уравнениями

$$\Phi = 0, \quad D\Phi = 0, \quad D^2\Phi = 0, \quad \ldots, \quad D^p\Phi = 0, \tag{1.138}$$

где D — оператор полного дифференцирования. Тогда уравнения (1.138) могут быть разрешимы относительно величин $\underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}$, так что система (1.138) равносильна системе вида

$$\underset{1}{u} = \underset{1}{v}(x,u), \quad \underset{2}{u} = \underset{2}{v}(x,u), \quad \ldots, \quad \underset{p}{u} = \underset{p}{v}(x,u). \tag{1.139}$$

Имеет место утверждение.

Многообразие $[\underset{p}{u}]$ является дифференциальным инвариантным многообразием группы G^r.

Пусть задан *дифференциальный* инвариант $F : \underset{k}{V} \to P$, то есть инвариант продолженной группы $\underset{p}{G^r}$ и его сужения $F \big| [\underset{p}{u}]$. Вследствие заданности многообразия $[\underset{p}{u}]$ системой уравнений (1.139) это сужение можно рассматривать как отображение $F \big| [\underset{k}{u}] : V \to P$. Можно показать, что отображение $F \big| [\underset{p}{u}]$ является *инвариантом группы G^r*. Этот факт, в частности, можно применить к неособому многообразию $[u]$ в случае группы H, которая удовлетворяет условиям теоремы 1.17. Здесь система уравнений вида (1.139), которая задает продолженное многообразие $[\underset{k}{u}]$, такая:

$$\underset{1}{u} = \partial u(x), \quad \underset{2}{u} = \partial^2 u(x), \quad \ldots, \quad \underset{p}{u} = \partial^p u(x). \tag{1.140}$$

С другой стороны, то же многообразие может быть задано системой уравнений вида (1.138) при помощи инварианта Φ, который действует в соответствии с формулой $\Phi(x, y) = w(x, y) - \overline{u}(\omega(x, y))$, где $\overline{u}$ — проекция отображения u. При этом равенство $\Phi(x, u) = 0$, то есть $\overline{u} = \overline{u}(\overline{x})$, равносильно равенству $u = u(x)$. Поэтому многообразие (1.140) является дифференциальным инвариантным многообразием группы H. Более того, каждое уравнение $D^k\Phi_p = 0$ $(k = 1, \ldots, p)$ разрешимо относительно величин $\underset{s}{\overline{u}} = \partial^s \overline{u}(\overline{x})$. Это означает, что система (1.140) равносильна такой системе уравнений в продолженном пространстве инвариантов $\underset{p}{\overline{V}}$, которое строится продолжением пространства $\overline{U}$ при помощи $\overline{X}$:

$$\underset{1}{\overline{u}} = \partial \overline{u}(\overline{x}), \quad \underset{2}{\overline{u}} = \partial^2 \overline{u}(\overline{x}), \quad \ldots, \quad \underset{p}{\overline{u}} = \partial^p \overline{u}(\overline{x}), \tag{1.141}$$

где $\underset{k}{\overline{u}}$ — элемент пространства $\underset{p}{\overline{V}}$. Но система (1.141) связывает только инвариантные продолжения группы $\underset{k}{\overline{H}}$. Поэтому эта система является проекцией системы (1.140) и тем самым определяет проекцию $[\underset{p}{\overline{u}}]$ продолженного многообразия $[\underset{p}{u}]$ в пространстве инвариантов продолженной группы $\underset{k}{H}$. Можем подвести такой итог:

Если $u = u(x)$ является неособым H-инвариантным многообразием $[u]$ и $\overline{u}$ — проекция отображения u в пространстве инвариантов группы H, то продолженное многообразие $[\underset{p}{u}]$ является инвариантным многообразием продолженной группы $\underset{k}{H}$. При этом его проекция $[\underset{p}{\overline{u}}]$ в пространстве инвариантов группы $\underset{k}{H}$ является продолжением проекции $\overline{u}$.

Основным результатом теории инвариантных решений является следующая теорема — теорема об условном существовании инвариантных решений.

Теорема 1.18. *Пусть система дифференциальных уравнений S допускает группу H, для которой выполнены необходимые условия* (1.136). *Тогда существует фактор-система S/H, которая имеет следующее свойство: проекция $\overline{u}$ любого неособого H-инвариантного решения является решением фактор-системы S/H, и наоборот, каждое восстанавливаемое решение $\overline{u}$ фактор-системы S/H является проекцией некоторого H-инвариантного решения системы S.*

Эту теорему называют *теоремой об условном существование H-инвариантных решений*, поскольку существование хотя бы одного решения фактор-системы S/H ею не гарантируется.

В соответствии с теоремой 1.18 для произвольной группы H, которую допускает система S и которая удовлетворяет условиям

$$r_* \leqslant n, \quad r_*(\partial_u \mathcal{J}) = m,$$

где $\mathcal{J} = (\mathcal{J}^1, \ldots, \mathcal{J}^{N-r_*})$ — вектор из пространства инвариантов, определим трансформацию системы S в фактор-систему S/H, которая может рассматриваться как отображение $(S, H) \to S/H$. Выполнение такой трансформации еще называют *симметрийной редукцией* системы S. Подводя итоги, приходим к такому алгоритму выполнения симметрийной редукции:

1°) Проверяем необходимые условия (1.136) для группы H, которую допускает уравнение S.

2°) Строим множество инвариантов группы H.

3°) Представляем пространство инвариантов в виде произведения $\overline{V} = \overline{X} \times \overline{U}$, а множество инвариантов разбиваем на классы ω и w так, чтобы имели место условия (1.137).

4°) Вводим новые переменные по формулам $\overline{x} = \omega(x, u)$, $\overline{u} = \mathrm{w}(x, u)$.

5°) Осуществляем обратный переход от проекции $\overline{u}$ к u путем решения относительно u уравнения

$$\mathrm{w}(x, u) = \overline{u}(\omega(x, u)). \tag{1.142}$$

6°) Продолжаем отображение u путем вычисления производных $\underset{1}{u}, \ldots, \underset{p}{u}$ из уравнений, которые получаются дифференцированием уравнения (1.142), и выражаем их через x, u и производные $\underset{1}{\overline{u}}, \ldots, \underset{p}{\overline{u}}$.

7°) Подставляем полученные выражения для производных в систему S и осуществляем заключительное приведение полученной системы к виду проекции $\overline{S} = S/H$.

Из проведенных выше рассуждений следует, что когда начальная система S имеет тип $S(n, m, p, s)$, то фактор-система S/H является системой типа $\overline{S} = (\rho, m, p, s)$, где $0 \leqslant \rho < n$. Следовательно, *фактор-система (редуцированная система) имеет принципиально важное свойство: ее “искомые функции” $\overline{u} \in \overline{U}$ зависят от меньшего, чем в начальной системе, количества “независимых переменных”* $\overline{x} \in \overline{X}$. Количество последних равняется рангу $\rho < n$ искомых H-инвариантных решений, который определяется формулой

$$\rho = \rho(H) = n - r_*, \tag{1.143}$$

и определяется только самой группой H.

Используя указанный алгоритм, за счет выбора подгрупп $H \subset G^r$, можно, вообще говоря, получить H-инвариантные уравнения разных рангов: нуль, один и т. д. Следует отметить, что в случае решений ранга нуль фактор-система S/H является системой конечных (но не дифференциальных) уравнений, а в случае решений ранга один — системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Реализация перехода $(S, H) \to S/H$ значительно упрощается, если инварианты группы H имеют такое свойство: существует такой базис множества инвариантов ω, w, в котором компоненты ω зависят лишь от x, то есть ω есть отображение $\omega : X \to \overline{X}$, так что $\overline{x} = \omega(x)$.

В частности, это имеет место тогда, когда действие группы H в пространстве V является *проективным*, то есть выполняется условие

$$\overline{\xi}_a = \overline{\xi}_a(x) \quad \forall\, a.$$

В этом случае, если уравнение $\overline{u} = \mathrm{w}(x, u)$ разрешимо относительно u в виде $u = \overline{\mathrm{w}}(x, \overline{u})$, общий вид H-инвариантного решения такой:

$$u = \overline{\mathrm{w}}(x, \overline{u}(\overline{x})), \quad \overline{x} = \omega(x). \tag{1.144}$$

Выше было отмечено, что терема 1.18 является теоремой условного существования инвариантных решений, поскольку не гарантирует существование решений редуцированной системы. Простой **пример** этого дает уравнение S, для которого $X = \mathbb{R}^2 = \langle t, x\rangle$, $U = \mathbb{R}^1 = \langle u\rangle$:

$$t^2 u_t^2 - x^2 u_x^2 = 1. \tag{1.145}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1.145) инвариантно относительно однопараметрической группы H с инфинитезимальным оператором

$$\mathrm{v} = t\partial_t - x\partial_x.$$

Очевидно, что в области $\{(t, x) \mid t > 0, x > 0\}$ $r_* = 1 < n = 2$. Множество инвариантов составляют преобразования

$$\omega = tx, \quad \mathrm{w} = u,$$

и, как нетрудно увидеть,

$$r_*(\partial_u \mathrm{w}) = 1 = m.$$

Поэтому необходимые условия (1.143), а также (1.136) выполнены.

Здесь имеет место случай проективного действия группы H, поэтому общий вид H-инвариантного решения, в соответствии с (1.144), такой:

$$u = \mathrm{w}(tx) = \mathrm{w}(\omega).$$

Но для этого выражения

$$t^2 u_t^2 - x^2 u_x^2 = t^2 x^2 \frac{d\mathrm{w}}{d\omega} - t^2 x^2 \frac{d\mathrm{w}}{d\omega} = 0,$$

и поэтому его подстановка в (1.145) дает, как фактор-уравнение S/H, ошибочное равенство $0 = 1$. Поэтому H-инвариантных решений уравнение (1.145) не имеет.

В соответствии с приведенным выше алгоритмом можно осуществить поиск частных решений системы S как некоторых H-инвариантных решений с любой подгруппой $H \subset G^r$, которая удовлетворяет необходимым условиям (1.136).

Важной числовой характеристикой H-инвариантного решения является его ранг ρ, который равен количеству независимых переменных в фактор-системе S/H. Поэтому основная классификация H-инвариантных решений ведется по их рангам, которые определяются формулой $\rho = n - r_*$, где $r_* > 0$, и вследствие этого ранг H-инвариантного решения может приобретать значения $\rho = 0, 1, \ldots, n-1$.

Если ρ фиксированное, то разные H-решения должны получаться при помощи разных подгрупп, которые имеют одно и то же значение r_*. Естественно возникает задача о перечислении подгрупп $H \subset G^r$ с данным значением r_*. При этом есть определенное неудобство, которое связано с тем, что число r_* является, вообще говоря, характеристикой группы H как представления некоторой абстрактной группы Ли, а не ее структурной характеристикой. Поэтому, с групповой точки зрения, удобнее вместо числа r_* оперировать числом r — порядком (размерностью) группы H. При этом разность $r-r_*$ равна числу независимых линейных связей между операторами базиса алгебры Ли группы H, вследствие чего знание всех подгрупп данного порядка r, без больших затруднений, дает возможность проклассифицировать их по значениям r_*.

Следовательно, задача классификации H-инвариантных решений по их рангам сводится к задаче перечисления всех подгрупп данного порядка группы G^r и последующей сортировке полученных подгрупп.

На практике для решения задачи описания всех неподобных подгрупп данной группы (задача построения *оптимальной системы* подгрупп данной группы Ли) используют соответствие между подгруппами группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли, вследствие чего указанная выше задача сводится к описанию подалгебр данной алгебры Ли с точностью до преобразований из некоторой группы автоморфизмов алгебры Ли.

Поэтому, прежде чем перейти к рассмотрению примеров симметрийной редукции и построения инвариантных решений дифференциальных уравнений, остановимся на рассмотрении именно этой задачи.

1.4.2. Классификация подалгебр алгебры Ли

Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. В 1.3.2 было введено понятие присоединенной алгебры $L_a = \{\operatorname{ad} x,\ x \in L\}$. Если алгебра L является алгеброй Ли операторов $\xi\cdot\partial$, то алгебру L_a также можно рассматривать как алгебру Ли операторов этого же вида. В соответствии с теоремой 1.1 для каждого векторного поля $\xi \in L_a$ можно построить группу $G^1(\xi)$ преобразований некоторого заданного пространства как решение некоторой задачи Коши для определения параметра θ:

$$\partial_\theta \overline{x} = [\overline{x}, u], \quad \overline{x}(0) = x,$$

$x, u \in L$.

Поскольку уравнения из задачи Коши линейные, то ее решение находится в явном виде:

$$A_u(\theta) = \exp(\theta \operatorname{ad} u). \tag{1.146}$$

Формула (1.146) показывает, что полученные преобразования $A_u(\theta)$ пространства L определены и обратимы без какого бы то ни было ограничения на значения параметра θ и определяющего вектора $u \in L$.

Имеет место теорема.

Теорема 1.19. *Преобразования* (1.146) *пространства L являются автоморфизмами алгебры Ли L.*

Сами автоморфизмы $A_u(\theta)$, которые получаются в соответствии с описанным выше построением, называются *внутренними автоморфизмами* алгебры Ли L.

Группа преобразований пространства L, которую порождают преобразования $A_u(\theta)$, называется *группой внутренних автоморфизмов* алгебры Ли L. Эту группу будем обозначать G_a, а группу Ли, соответствующую алгебре Ли L, — G.

Как было подчеркнуто выше, для группового анализа дифференциальных уравнений важной является задача о перечислении всех подалгебр данной конечномерной алгебры L, При этом группу G_a внутренних автоморфизмов можно считать известной, поскольку ее несложно построить. Поскольку, в результате действия автоморфизма, каждая подалгебра переходит снова в некоторую подалгебру той же размерности, то эту задачу достаточно решить с точностью до действия преобразований, которые определяются внутренними автоморфизмами.

Пусть L — алгебра Ли, G — соответствующая ей группа Ли.

Подалгебры N и M алгебры Ли L называются *подобными* (будем говорить *сопряженными* или *G-сопряженными*), если существует такой внутренний автоморфизм $A \in G_a$, что $A(N) = M$.

Отношение сопряженности (подобия) является некоторым теоретико-множественным соотношением эквивалентности и разбивает подалгебры данной алгебры Ли на классы подобных подалгебр.

Совокупность представителей классов сопряженных подалгебр данной розмерности k (по одному из каждого класса) называют *оптимальной системой θ_k* (порядка k) подалгебр алгебры Ли L.

Следовательно, результатом решения поставленной задачи для данной конечномерной алгебры Ли L^r должны быть перечни оптимальных систем θ_k для каждого $k = 1, \ldots, r-1$.

Отыскание подалгебр данной размерности $s > 1$ сводится к некоторой алгебраической задаче. При этом если построение системы θ_1 легко осуществляется простым подбором подходящих преобразований из группы G_a, то при описании систем θ_k $(k > 1)$ возникают определенные сложности технического характера (в особенности в случаях, когда размерность алгебры L довольно высока). В этом случае существенно учитывается структура алгебры Ли. Так, в частности, если алгебра L_n ($\dim L_n = n$) является разрешимой алгеброй Ли над полем характеристики нуль, то известно [19], что существует последовательность таких подалгебр

$$L_n \supset L_{n-1} \supset \cdots \supset L_1 \supset L_0 = 0,$$

где каждая подалгебра L_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ является идеалом алгебры L_{i+1}. Эту последовательность еще называют *композиционным* рядом алгебры L_n.

Следовательно, алгебру L_n мы можем рассматривать в виде полупрямой суммы

$$L_n = \{e_n\} \Subset L_{n-1}, \tag{1.147}$$

где e_n — определенный элемент L_n, а L_{n-1} — $(n-1)$-мерный идеал алгебры L_n. Это позволяет проводить классификацию разрешимой алгебры Ли, используя такой алгоритм.

Шаг 1. Находим все подалгебры фактор-алгебры $L_n/L_{n-1} = \{e_n\}$. Этот шаг тривиальный, поскольку очевидными являются две подалгебры: $\{0\}$ и $\{e_n\}$.

Шаг 2. Находим все подалгебры L_{n-1} и классифицируем их относительно действия преобразований G_a^n. Для этого, как правило, используют формулу Кемпбелла–Хаусдорфа, в соответствии с которой

$$\exp(\theta X) Y \exp(-\theta X) = Y + \\ + \theta[X, Y] + \frac{\theta^2}{2!}[X, [XY]] + \frac{\theta^3}{3!}[X[X, [X, Y]]] + \cdots, \tag{1.148}$$

где $X, Y \in L_n$.

Шаг 3. Находим все *расщепляемые* расширения алгебры $\{e_n\}$. Для этого нужно просто найти все подалгебры N_a алгебры L_{n-1}, которые инвариантны относительно e_n:

$$[e_n, N_a] \subseteq N_a, \quad N_a \subseteq L_{n-1}. \tag{1.149}$$

Далее эти алгебры должны быть проклассифицированы с точностью до действия преобразований из группы G_a, которые сохраняют вид оператора e_n, то есть с точностью до преобразований, которые определяются алгеброй $\mathrm{Nor}_{L_n} e_n$.

Эту алгебру еще называют нормализатором алгебры $\{e_n\}$ в алгебре L_n. Остановимся на понятии нормализатора некоторой подалгебры N в алгебре L более подробно.

Множество операторов алгебры L называется *нормализатором* подалгебры N в алгебре L, если выполняются соотношения

$$[x, y] \subset N$$

для всех $x \in N$ и $y \in L$. Для нормализатора используем обозначение $\mathrm{Nor}_L N$. Заметим, что $\mathrm{Nor}_L N$ является подалгеброй алгебры L.

Шаг 4. Находим все подалгебры алгебры L_n, которые не принадлежат L_{n-1} и не являются сопряженными с e_n. Они имеют вид

$$\{e_n + \sum_i x_i e_i, N_a\}, \tag{1.150}$$

где N_a — подалгебра алгебры L_{n-1}, нормализатор в L_n которой не содержится в L_{n-1}, x_i — действительные числа, которые одновременно не равны нулю и такие, что элемент $\tilde{e}_n = e_n + \sum\limits_i x_i e_i$ не сопряжен с e_n относительно G^n-сопряженности. Алгебры (1.150) должны быть проклассифицированы относительно сопряженности, которую определяют преобразования, порожденные элементами $\mathrm{Nor}_{L_n} \tilde{e}_n$.

Рассмотрим как **пример** классификацию подалгебр алгебры $A_{4.8}$ $(q = -1)$ из перечня разрешимых алгебр, который приведен в п. 1.3.2.

Здесь ненулевые коммутационные соотношения имеют вид

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = -e_3. \tag{1.151}$$

Шаг 1. Алгебра $\{e_1, e_2, e_3\}$ является нильпотентным идеалом алгебры $A_{4.8}$ $(q = -1)$ и имеет тип $A_{3.3}$. Фактор-алгебра $\{e_4\}$ имеет две подалгебры: $\{0\}$ и $\{e_4\}$.

Шаг 2. Классифицируем подалгебры $A_{3.3}$ с точностью до сопряженности, которую определяет группа $G_{A_{4.8}}$. Положив

$$A = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{1.152}$$

и применив к (1.152) формулу Кемпбелла–Хаусдорфа (1.148), имеем

$$\exp(\alpha e_2 + \beta e_3) A \exp(-\alpha e_2 - \beta e_3) = \\ = (x_1 + \alpha x_3 - \beta x_2) e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{1.153}$$

и

$$\exp(\gamma e_4) A \exp(-\gamma e_4) = x_1 e_1 + x_2 e^{-\gamma} e_2 + x_3 e^{\gamma} e_3, \tag{1.154}$$

где α, β, γ — произвольные действительные параметры.

Если в A $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$, то оператор A сопряжен с x_1. Если же в A $|x_1| + |x_3| \neq 0$, то, положив α и β такими, чтобы выполнялось равенство

$$x_1 + \alpha x_3 - \beta x_2 = 0,$$

видим, что A сопряжен с

$$\tilde{A} = x_2e_2 + x_3e_3.$$

В соответствии с (1.154) $\tilde{A}$ сопряжен с оператором

$$\tilde{\tilde{A}} = x_2e^{-\gamma}e_2 + x_3e^{\gamma}e_3.$$

Поэтому, положив $\gamma = \ln|x_2|$, если $x_3 = 0$, и $\gamma = \ln|x_3|^{-1}$, если $x_2 = 0$, или $\gamma = \dfrac{1}{2}\ln|x_2||x_3|^{-1}$, если $x_2 \cdot x_3 \neq 0$, видим, что $\tilde{\tilde{A}}$ сопряжен или с e_2, или с e_3, или с $e_2 + \epsilon e_3$ ($\epsilon = \pm 1$).

В соответствии с этим делаем вывод, что с точностью до сопряженности одномерные подалгебры алгебры $A_{3.3}$ исчерпываются алгебрами

$$\{e_1\}, \quad \{e_2\}, \quad \{e_3\}, \quad \{e_2 + \epsilon e_3\}, \quad \epsilon = \pm 1. \tag{1.155}$$

Структура алгебры $A_{3.3}$ показывает, что все ее двухмерные подалгебры являются абелевыми. Пусть B пробегает все одномерные подалгебры (1.155), а A имеет вид (1.152). Требуем, чтобы $[A, B] = 0$. Пусть $B = e_1$, тогда, в соответствии с (1.151),

$$[A, B] = [A, e_1] = 0,$$

и можем считать (с точностью до выбора базиса двухмерной подалгебры), что $A = x_2e_2 + x_3e_3$. Поскольку e_1 коммутирует с e_2, e_3 и e_4 на нуль, мы можем воспользоваться выражениями (1.153) и (1.154) для A, откуда следует, что A сопряжен с e_2, e_3 или с $e_2 + \epsilon e_3$, $\epsilon = \pm 1$.

Если $B = e_2$, то можем положить $A = x_1e_1 + x_3e_3$, где $x_3 \neq 0$ (иначе придем к уже рассмотренному случаю). Но коммутатор

$$[A, B] = [A, e_2] = -x_3e_1$$

равен нулю только в случае, когда $x_3 = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, расширение $B = e_2$ до двухмерной абелевой алгебры возможно только при условии, что $A = e_1$. К аналогичному случаю приводит рассмотрение и остальных значений для оператора B.

Имеют место только три несопряженные двухмерные подалгебры алгебры $A_{3.3}$:

$$\{e_1, e_2\}, \quad \{e_1, e_3\}, \quad \{e_1, e_2 + \epsilon e_3\}, \quad \epsilon = \pm 1. \tag{1.156}$$

Трехмерная подалгебра алгебры $A_{3.3}$ только одна — сама алгебра $A_{3.3}$.

Шаг 3. Уравнение

$$[e_4, A] = \lambda A$$

имеет решения $A = e_1$, $A = e_2$ и $A = e_3$. Также легко получаем, что имеют место только две двухмерные, инвариантные относительно e_4 подалгебры $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1, e_3\}$. Следовательно, все подалгебры алгебры $A_{4.8}$ $(q = -1)$, которые содержат элемент e_4 и являются его расщепляемыми расширениями с точностью до $G_{A_{4.8}}(q = -1)$-сопряженности, исчерпываются алгебрами

$$\begin{gathered}\{e_4\}, \quad \{e_4, e_1\}, \quad \{e_4, e_2\}, \quad \{e_4, e_3\}, \\ \{e_4, e_1, e_2\}, \quad \{e_4, e_1, e_3\}, \quad \{e_4, e_1, e_2, e_3\}.\end{gathered} \tag{1.157}$$

Шаг 4. Положив $\tilde{e}_4 = e_4 + xe_1 + ye_2 + ze_3$ и воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned}&\exp(\alpha e_2 + \beta e_3)\tilde{e}_4\exp(-\alpha e_2 - \beta e_3) = \\ &\quad = e_4 + (x + \alpha z - \beta y)e_1 + (y + \alpha)e_2 + (z - \beta)e_3,\end{aligned}$$

где $\alpha = -y$, $\beta = z$, мы находим подалгебры

$$\{e_4 + xe_1\}, \quad \{e_4 + xe_1; e_2\}, \quad \{e_4 + xe_1, e_3\}, \qquad x \neq 0, \tag{1.158}$$

которые не принадлежат $A_{3.3}$ и не сопряжены с оператором e_4.

Следовательно, полный перечень подалгебр алгебры $A_{4.8}$ $(q = -1)$, с точностью до сопряженности, которую определяют преобразования из группы $G_{A_{4.8}}$ $(q = -1)$ внутренних автоморфизмов алгебры $A_{4.8}$ $(q = -1)$, составляют алгебры (1.155)–(1.158).

Отметим, что в [160] проведена классификация подалгебр всех действительных разрешимых алгебр размерностей 3 и 4. Ее результаты мы даем в следующих трех таблицах. Там мы сохраняем обозначения, которые использовались в п. 1.3.2.

Вообще говоря, в соответствии с теоремой Леви–Мальцева, произвольная алгебра L является полупрямой суммой $L = S \oplus N$ полупростого фактора Леви S и разрешимого (в частности, абелевого) радикала N. Отметим, что именно такую структуру имеют алгебры инвариантности ряда известных уравнений релятивистской и нерелятивистской физики [46, 78, 84, 89].

Эффективный метод для построения оптимальной системы подалгебр алгебры Ли с нетривиальным коммутативным идеалом был предложен Патерой, Винтернитцом и Цассенхаузом [161] (см. также [74]).

Основная идея этого метода основывается на том, что S можно рассматривать независимо от L и для классификации подалгебр алгебры S можно использовать только группу внутренних автоморфизмов S. Осуществление этого метода предусматривает выполнение следующих шагов.

Шаг 1. Для алгебры S находим все классы G-сопряженных подалгебр (очевидно, что здесь G-сопряженность совпадает с G_S-сопряженностью) и выбираем в каждом классе по одному представителю. Обозначим их через S_i $(i = 0, 1, \ldots, p)$, считая, что $S_0 = 0$.

Шаг 2. Для каждой из подалгебр алгебры S находим расщепляемые расширения в алгебре L. Расширение M подалгебры S_i называется расщепляемым расширением в L, если M G-сопряжена с подалгеброй $S_i \Subset N_{ia}$, где N_{ia} является S_i-инвариантным подпространством пространства $N : [S_i, N_{ia}] \subset N_{ia}$. Разбиваем все такие N_{ia} на классы сопряженных подпространств относительно $\mathrm{Nor}_L S_i$ и выбираем по одному представителю $\overline{N}_{ia}$ в каждом классе. Каждому такому представителю $\overline{N}_{ia}$ соответствует подалгебра $S_i \Subset \overline{N}_{ia}$ алгебры L, которая является расщепляемым расширением S_i.

Шаг 3. На третьем шаге находим все нерасщепляемые расширения подалгебр S_i, то есть подалгебры, базисные элементы которых имеют такой вид: $s_k + \lambda_k^j n_j$, $\mu_l^j n_j$, где $s_k \in S$, $n_j \in N$, а λ_k^j, μ_l^j — некоторые фиксированные числа, при этом λ_k^j не все равны нулю.

Множество всех несопряженных представителей расщепляемых и нерасщепляемых расширений алгебр S_i и будет составлять оптимальную систему подалгебр алгебры L.

Остановимся далее на **примере** алгебр инвариантности уравнений Бюргерса и теплопроводности. В п. 1.3.3 было показано, что алгебры инвариантности этих уравнений изоморфны алгебрам $sl(2,\mathbb{R}) \Subset 2A_1$ и $sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3.3}$ соответственно. Поэтому достаточно провести классификацию подалгебр этих алгебр Ли, а затем, используя известные изоморфизмы, нетрудно получить оптимальные системы подалгебр указанных алгебр инвариантности.

1. Классификация подалгебр алгебры $L = sl(2,\mathbb{R}) \Subset 2A_1$.

Шаг 1. Пусть $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, а $2A_1 = \langle e_4, e_5\rangle$.

Поскольку изоморфизм, который связывает базисные элементы v_i $(i = 1,\ldots,5)$ алгебры инвариантности уравнения Бюргерса и базисные элементы e_i $(i = 1,\ldots,5)$, например, такой:

$$\varphi : \mathrm{v}_1 \leftrightarrow e_3,\ \mathrm{v}_2 \leftrightarrow e_4,\ \mathrm{v}_3 \leftrightarrow e_5,\ \mathrm{v}_4 \leftrightarrow e_1,\ \mathrm{v}_5 \leftrightarrow -e_2,$$

то элементы e_i $(i = 1,\ldots,5)$ удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2] = 2e_2, \quad [e_1,e_3] = -2e_3, \quad [e_2,e_3] = e_1, \quad [e_4,e_5] = 0,\\
&[e_1,e_4] = -e_4, \quad [e_1,e_5] = e_5, \quad [e_2,e_4] = e_5, \quad [e_2,e_5] = 0,\\
&[e_3,e_4] = 0, \quad [e_3,e_5] = e_4.
\end{aligned} \tag{1.159}$$

В соответствии с приведенным алгоритмом сначала найдем оптимальную систему подалгебр алгебры

$$S = sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle.$$

Пусть

$$A = xe_1 + ye_2 + ze_3, \tag{1.160}$$

где $x, y, z \in \mathbb{R}$ i $|x| + |y| + |z| \neq 0$.

Таблица 1.1

Подалгебры разрешимых алгебр Ли размерностей 2 и 3 ($-\infty < x, y < \infty$, $0 \leqslant \varphi < \pi$, $\epsilon = \pm 1$)

Алгебра	Подалгебры		
	$A_{2.2}$	$2A_1$	A_1
$A_{2.1} = 2A_1$			$(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)$
$A_{2.2}$			$(e_1), (e_2)$
$A_{3.1} = 3A_1$		$(e_1 + xe_3, e_2 + ye_3)$, $(e_1 + xe_2, e_3), (e_2, e_3)$	$(e_1 + xe_2 + ye_3)$, $(e_2 + xe_3), (e_3)$
$A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1$	$(e_1 + xe_3; e_2)$	$(e_1, e_3), (e_2, e_3)$	$(e_1\cos\varphi + e_3\sin\varphi)$, $(e_2 + \epsilon e_3), (e_2)$
$A_{3.3}$		$(e_1, e_2\cos\varphi + e_3\sin\varphi)$	$(e_1), (e_2\cos\varphi + e_3\sin\varphi)$
$A_{3.4}$	$(e_3; e_1)$	(e_1, e_2)	$(e_1), (e_2), (e_3)$
$A_{3.5}$	$(e_3; e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi)$	(e_1, e_2)	$(e_1\cos\varphi + e_2\sin\varphi), (e_3)$
$A_{3.6}$	$(e_3; e_1), (e_3; e_2)$	(e_1, e_2)	$(e_1), (e_2), (e_3)$, $(e_1 + \epsilon e_2)$
$A_{3.7}$	$(e_3; e_1), (e_3; e_2)$	(e_1, e_2)	$(e_1), (e_2), (e_3)$, $(e_1 + \epsilon e_2)$
$A_{3.8}$		(e_1, e_2)	$(e_1), (e_3)$
$A_{3.9}$		(e_1, e_2)	$(e_1), (e_3)$

Таблица 1.2

Подалгебры разложимых разрешимых четырехмерных алгебр Ли
$(-\infty < x, y, z, v < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < \pi,\ \epsilon = \pm 1)$

Алгебра	Подалгебры		
	dim = 3	dim = 2	dim = 1
$4A_1$	$3A_1 : (e_1 + xe_4,$ $e_2 + ye_4, e_3 + ze_4),$ $(e_1 + xe_2, e_3, e_4),$ $(e_2, e_3, e_4),$ $(e_1 + xe_3, e_2 + ye_3, e_4)$	$2A_1 : (e_1 + xe_3 + ye_4,$ $e_2 + ze_3 + ve_4),$ $(e_1 + xe_2 + ye_4, e_3 + ze_4),$ $(e_2 + xe_4, e_3 + ye_4),$ $(e_1 + xe_2 + ye_3, e_4)$ $(e_2 + xe_3, e_4),\ (e_3, e_4)$	$(e_1 + xe_2 + ye_3 + ze_4),$ $(e_2 + xe_3 + ye_4),$ $(e_3 + xe_4),\ (e_4),$
$A_{2.2} \oplus 2A_1$	$3A_1 : (e_1, e_3, e_4),$ $(e_2, e_3, e_4),$ $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_1+$ $+x(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi),$ $e_3 \sin\varphi - e_4 \cos\varphi; e_2)$	$A_{2.2} : (e_1 + x(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi); e_2),$ $2A_1 : (e_1 + x(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi),$ $e_3 \sin\varphi - e_4 \cos\varphi), (e_3, e_4),$ $(e_2 + \epsilon(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi),$ $e_3 \sin\varphi - e_4 \cos\varphi),$ $(e_2, e_3 \sin\varphi - e_4 \cos\varphi)$	$(e_2),$ $(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi)$ $(e_1 + x(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi))$ $(e_2 + \epsilon(e_3 \cos\varphi + e_4 \sin\varphi))$
$2A_{2.2}$	$A_1 \oplus A_{2.2} : (e_1, e_3; e_2),$ $(e_1, e_4; e_2),\ (e_1, e_3; e_4),$ $(e_2, e_3; e_4),$ $A_{3.5} : (e_1 + e_3; e_2, e_4),$ $A_{3.6} : (e_1 - e_3; e_2, e_4),$ $A^q_{3.7} : (e_1 + xe_3; e_2, e_4),$ $q = \begin{cases} x, & 0 < \lvert x\rvert < 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < \lvert x\rvert < \infty \end{cases}$	$A_{2.2} : (e_1 + xe_3; e_2),\ (e_3 + xe_1; e_4),$ $(e_2 + \epsilon e_4; e_2),\ (e_3 + \epsilon e_2; e_4),$ $(e_1 + e_3; e_2 + \epsilon e_4),$ $2A_1 : (e_1, e_3), (e_1, e_4),$ $(e_2, e_3), (e_2, e_4)$	$(e_2),\ (e_3),\ (e_1 + xe_3),$ $(e_1 + \epsilon e_4),\ (e_2 + \epsilon e_4),$ $(e_2 + \epsilon e_3)$

Продолжение табл. 1.2

Алгебра	Подалгебры		
	dim = 3	dim = 2	dim = 1
$A_{3.3} \oplus A_1$	$3A_1 : (e_1, e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi, e_4),$ $A_{3.3} : (e_2 + xe_4, e_3 + ye_4; e_1),$	$2A_1 : (e_1, e_4+$ $+x(e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi)),$ $(e_4, e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi),$ $(e_1 + xe_4, e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi)$	$(e_1 + xe_4),\ (e_4),$ $(e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi + xe_4)$
$A_{3.4} \oplus A_1$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_4),$ $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_3, e_4; e_1),$ $A_{3.4} : (e_3 + xe_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1 + xe_4, e_2),$ $(e_1, e_2 + \epsilon e_4),\ (e_1, e_4),$ $(e_2, e_4),\ (e_3, e_4),$ $A_{2.2} : (e_3 + xe_4; e_1)$	$(e_1),\ (e_1 + \epsilon e_4),$ $(e_2 + xe_4),\ (e_3 + xe_4),\ (e_4)$
$A_{3.5} \oplus A_1$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_4),$ $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_3, e_4;$ $e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi),$ $A_{3.5} : (e_3 + xe_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_2),$ $(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi, e_4),$ $(e_3, e_4), (e_1, e_2 + \epsilon e_4),$ $(e_1 + \epsilon e_4, e_2 + xe_1),$ $A_{2.2} : (e_3 + xe_4;$ $e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi)$	$(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi),$ $(e_3 + xe_4), (e_4),$ $(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi + \epsilon e_4)$
$A_{3.6} \oplus A_1$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_4),$ $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_3, e_4; e_1),$ $(e_3, e_4; e_2),$ $A_{3.6} : (e_3 + xe_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_2),\ (e_1, e_4),$ $(e_2, e_4),\ (e_3, e_4),$ $(e_1 + \epsilon e_2, e_4),\ (e_1, e_2 + \epsilon e_4),$ $(e_1 + \epsilon e_4, e_2 + xe_1),$ $A_{2.2} : (e_3 + xe_4; e_1),$ $(e_3 + xe_4; e_2)$	$(e_1),\ (e_2),\ (e_4),$ $(e_3 + xe_4),\ (e_1 + \epsilon e_2 + xe_4),$ $(e_1 + \epsilon e_4),\ (e_2 + \epsilon e_4),$

Окончание табл. 1.2

Алгебра	Подалгебры		
	dim = 3	dim = 2	dim = 1
$A_{3.7} \oplus A_1$ $(0 < \lvert q\rvert < 1)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_4)$, $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_3, e_4; e_1)$, $(e_3, e_4; e_2)$, $A_{3.7} : (e_3 + xe_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_2)$, (e_1, e_4), (e_2, e_4), (e_3, e_4), $(e_1 + \epsilon e_2, e_4)$, $(e_1, e_2 + \epsilon e_4)$, $(e_1 + \epsilon e_4, e_2 + xe_4)$, $A_{2.2} : (e_3 + xe_4; e_1)$, $(e_3 + xe_4; e_2)$	(e_1), (e_2), (e_4), $(e_1 + \epsilon e_4)$, $(e_2 + \epsilon e_4)$, $(e_3 + xe_4)$, $(e_1 + \epsilon e_2 + xe_4)$
$A_{3.8} \oplus A_1$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_4)$, $A_{3.8} : (e_3 + xe_4; e_1, e_2)$,	$2A_1 : (e_1 + xe_4, e_2)$, (e_1, e_4), (e_3, e_4) $(x \geqslant 0)$	(e_4), $(e_1 + xe_4)$, $(e_3 + ye_4)$ $(x \geqslant 0)$
$A_{3.9} \oplus A_1$ $(q > 0)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_4)$, $A_{3.9} : (e_3 + xe_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_4)$, (e_3, e_4), $(e_1 + xe_4, e_2)$ $(x \geqslant 0)$	(e_4), $(e_1 + xe_4)$, $(e_3 + ye_4)$ $(x \geqslant 0)$

Таблица 1.3

Подалгебры неразложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли
$(-\infty < x, y < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < \pi,\ \epsilon = \pm 1)$

Алгебра	Подалгебры		
	dim = 3	dim = 2	dim = 1
$A_{4.1}$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3)$, $A_{3.3} : (e_4 + xe_3, e_2; e_1)$	$2A_1 : (e_1, e_2)$, (e_1, e_3), $(e_2, e_3 + xe_1)$, $(e_1, e_4 + xe_3)$	(e_1), (e_2), $(e_4 + xe_3)$, $(e_3 + xe_1)$
$A_{4.2}$ $(q \neq 0, 1)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3)$, $A_{3.4} : (e_4; e_2, e_3)$, $A_{3.6} : (e_4; e_1, e_2)$ $(q = -1)$, $A^p_{3.7} : (e_4; e_1, e_2)$, $p = \begin{cases} q, & \lvert q\rvert < 1 \\ \dfrac{1}{q}, & \lvert q\rvert > 1 \end{cases}$	$2A_1 : (e_1, e_2)$, $(e_1 + xe_2, e_3)$, (e_2, e_3), $(e_1 + \epsilon e_3, e_2)$, $A_{2.2} : (e_4; e_1)$, $(e_4; e_2)$	(e_1), (e_2), (e_4), $(e_1 + \epsilon e_2)$, $(e_3 + xe_1)$
$A_{4.2}$ $(q = 1)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3)$, $A_{3.4} : (e_4; e_2, e_3 + xe_1)$, $A_{3.5} : (e_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_2)$, $(e_1 + xe_2, e_3)$, $(e_2, e_3 + xe_1)$, $A_{2.2} : (e_4; e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi)$	$(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi)$, $(e_3 + xe_1)$, (e_4)
$A_{4.3}$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3)$, $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_4 + xe_3, e_2; e_1)$, $A_{3.3} : (e_3, e_4; e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_2)$, $(e_1 + xe_2, e_3)$, (e_2, e_3), $(e_2, e_3 + \epsilon e_1)$, $(e_2, e_4 + xe_3)$, $A_{2.2} : (e_4 + xe_3; e_1)$	$(e_1,)$, (e_2), $(e_1 + \epsilon e_2)$, $(e_3 + xe_1)$, $(e_4 + xe_3)$
$A_{4.4}$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3)$, $A_{3.4} : (e_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1 + xe_3, e_2)$, (e_1, e_3), (e_2, e_3), $A_{2.2} : (e_4; e_1)$	$(e_1 + xe_3)$, (e_2), (e_3), (e_4)

Продолжение табл. 1.3

Алгебра	Подалгебры		
	dim = 3	dim = 2	dim = 1
$A_{4.5}$ $(-1 \leqslant p < q < 1,$ $p \cdot q \neq 0)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3),$ $A^p_{3.7} : (e_4; e_1, e_2),$ $A^q_{3.7} : (e_4; e_1, e_3),$ $A^s_{3.7} : (e_4; e_2, e_3),$ $s = \begin{cases} \frac{p}{q}, & \lvert\frac{p}{q}\rvert < 1 \\ \frac{q}{p}, & \lvert\frac{p}{q}\rvert > 1 \end{cases}$	$2A_1 : (e_1, e_2),\ (e_1, e_3),$ $(e_2, e_3),\ (e_1, e_2 + \epsilon e_3),$ $(e_2, e_1 + \epsilon e_3),\ (e_3, e_1 + \epsilon e_2),$ $(e_1 + \epsilon e_3, e_2 + x e_3)\ (x \neq 0),$ $A_{2.2} : (e_4; e_1),\ (e_4; e_2),\ (e_4; e_3)$	$(e_1),\ (e_2),\ (e_3),\ (e_4),$ $(e_1 + \epsilon e_3),\ (e_2 + \epsilon e_3),$ $(e_1 + \epsilon e_2 + x e_3)\ (x \neq 0)$
$A_{4.5}$ $(p = q \neq 0,$ $-1 \leqslant p < 1$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3),$ $A_{3.5} : (e_4; e_2, e_3),$ $A^p_{3.7} : (e_4; e_1, e_2 \cos\varphi +$ $+ e_3 \sin\varphi)$	$2A_1 : (e_1, e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi),$ $(e_2, e_3),\ (e_3, e_1 + \epsilon e_2),$ $(e_1 + \epsilon e_3, e_2 + x e_3)$ $A_{2.2} : (e_4; e_1),$ $(e_4; e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi)$	$(e_1),\ (e_2 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi),$ $(e_4),\ (e_1 + \epsilon e_3),$ $(e_1 + \epsilon e_2 + x e_3)$
$A_{4.5}$ $(-1 \leqslant p < 1,$ $p \neq 0, q = 1)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3),$ $A_{3.5} : (e_4; e_1, e_3),$ $A^p_{3.7} : (e_4; e_1 \cos\varphi +$ $+ e_3 \sin\varphi, e_2)$	$2A_1 : (e_1 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi, e_2),$ $(e_1, e_3),\ (e_3, e_1 + \epsilon e_2),$ $(e_1 + x e_3, e_2 + \epsilon e_3),$ $A_{2.2} : (e_4; e_2),$ $(e_4; e_1 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi)$	$(e_2),\ (e_1 \cos\varphi + e_3 \sin\varphi),$ $(e_4),\ (e_2 + \epsilon e_3),$ $(e_1 + \epsilon e_2 + x e_3)$
$A_{4.5}$ $(p = q = 1)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3),$ $A_{3.5} : (e_4; e_1 + x e_3,$ $e_2 + y e_3),$ $(e_4; e_1 + x e_2, e_3),$ $(e_4; e_2, e_3)$	$2A_1 : (e_1 + x e_3, e_2 + y e_3),$ $(e_1 + x e_2, e_3), (e_2, e_3),$ $A_{2.2} : (e_4; e_1 + x e_2 + y e_3),$ $(e_4; e_2 + x e_3),\ (e_4; e_3)$	$(e_1 + x e_2 + y e_3),$ $(e_2 + x e_3),\ (e_3),\ (e_4),$

Продолжение табл. 1.3

Алгебра	Подалгебры		
	dim = 3	dim = 2	dim = 1
$A_{4.6}$ $(q \neq 0,\ p \geqslant 0)$	$3A_1 : (e_1, e_2, e_3),$ $A^p_{3.9} : (e_4; e_2, e_3)$	$2A_1 : (e_1 + x e_3, e_2),$ $(e_2, e_3)\ (x \geqslant 0),$ $A_{2.2} : (e_4; e_1)$	$(e_1 + x e_3),$ $(e_3),\ (e_4)\ (x \geqslant 0)$
$A_{4.7}$	$A_{3.3}(e_2, e_3; e_1),$ $A^{q=\frac{1}{2}}_{3.7} : (e_4; e_1, e_2)$	$2A_1 : (e_1, e_2),\ (e_1, e_3),$ $A_{2.2} : (e_4; e_1),\ (e_4; e_2)$	$(e_1),\ (e_2),\ (e_3),\ (e_4)$
$A_{4.8}$ $(q = -1)$	$A_{3.3} : (e_2, e_3; e_1),$ $A_{2.2} \oplus A_1 : (e_4, e_1; e_2),$ $(e_4, e_1; e_3)$	$2A_1 : (e_1, e_2),\ (e_1; e_3)$ $(e_1, e_2 + \epsilon e_3),\ (e_4, e_1),$ $A_{2.2} : (e_4 + x e_1; e_2),$ $(e_4 + x e_1; e_3)$	$(e_1),\ (e_2),\ (e_2 + \epsilon e_3),$ $(e_3),\ (e_4 + x e_1)$
$A_{4.8}$ $(0 < \lvert q\rvert < 1)$	$A_{3.3} : (e_2, e_3; e_1),$ $A^p_{3.7} : (e_4; e_1, e_2),$ $p = \begin{cases} 1 + q, & \lvert 1 + q\rvert < 1, \\ \frac{1}{1+q}, & \lvert 1 + q\rvert > 1, \end{cases}$ $A_{3.6} : (e_4; e_1, e_3),\ q = -\frac{1}{2},$ $A^s_{3.7} : (e_4; e_1, e_3),$ $s = \begin{cases} \frac{q}{1+q}, & \left\lvert\frac{q}{1+q}\right\rvert < 1, \\ \frac{1+q}{q}, & \left\lvert\frac{q}{1+q}\right\rvert > 1. \end{cases}$	$2A_1 : (e_1, e_2),\ (e_1, e_3),$ $(e_1, e_2 + \epsilon e_3),$ $A_{2.2} : (e_4; e_1),\ (e_4; e_2),\ (e_4; e_3)$	$(e_1),\ (e_2),\ (e_3),\ (e_4),$ $(e_2 + \epsilon e_3)$

Окончание табл. 1.3

Алгебра	Подалгебры: $\dim = 3$	Подалгебры: $\dim = 2$	Подалгебры: $\dim = 1$
$A_{4.8}$ $(q=1)$	$A_{3.3}:(e_2,e_3;e_1)$, $A_{3.7}^{q=\frac{1}{2}}:(e_4;e_1,e_2\cos\varphi+e_3\sin\varphi)$	$2A_1:(e_1,e_2\cos\varphi+e_3\sin\varphi)$, $A_{2.2}:(e_4;e_1)$, $(e_4;e_2\cos\varphi+e_3\sin\varphi)$	(e_1), $(e_2\cos\varphi+e_3\sin\varphi)$, (e_4)
$A_{4.8}$ $(q=0)$	$A_{3.3}:(e_2,e_3;e_1)$, $A_{2.2}\oplus A_1:(e_3,e_4;e_1)$, $A_{3.4}:(e_4+xe_3;e_1,e_2)$ $(x\neq 0)$, $A_{3.5}:(e_4;e_1,e_2)$	$2A_1:(e_1,e_2)$, (e_1,e_3), $(e_1,e_2+\epsilon e_3)$, (e_3,e_4), $A_{2.2}:(e_4+xe_3;e_1)$, $(e_4;e_2)$	(e_1), (e_2), (e_3), $(e_2+\epsilon e_3)$, (e_4+xe_3)
$A_{4.9}$ $(q=0)$	$A_{3.3}:(e_2,e_3;e_1)$	$2A_1:(e_1,e_2)$, (e_1,e_4)	(e_1), (e_2), (e_4+xe_1)
$A_{4.9}$ $(q>0)$	$A_{3.3}:(e_2,e_3;e_1)$	$2A_1:(e_1,e_2)$, $A_{2.2}:(e_4;e_1)$	(e_1), (e_2), (e_4)
$A_{4.10}$	$A_{3.5}:(e_3;e_1,e_2)$, $A_{3.8}:(e_4;e_1,e_2)$, $A_{3.9}^{\lvert x\rvert}:(e_4+xe_3;e_1,e_2)$ $(x\neq 0)$	$2A_1:(e_1,e_2)$, (e_3,e_4), $A_{2.2}:(e_3;e_1)$	(e_1), (e_3), (e_4+xe_3)

Согласно с (1.159) имеем

$$\exp(\alpha e_1)A\exp(-\alpha e_1) = xe_1 + ye^{2\alpha}e_2 + ze^{-2\alpha}e_3, \tag{1.161}$$

$$\exp(\beta e_2)A\exp(-\beta e_2) = (x+\beta z)e_1 + (y - 2\beta x - \beta^2 z)e_2 + ze_3, \tag{1.162}$$

$$\exp(\gamma e_3)A\exp(-\gamma e_3) = (x-\gamma y)e_1 + ye_2 + (z + 2x\gamma - \gamma^2 y)e_3. \tag{1.163}$$

Если $x\neq 0$, $y=z=0$, то $A\sim e_1$.

Пусть $|y|+|z|\neq 0$. Тогда, используя (1.162) и (1.163), всегда можем считать, что $x=0$.

Если $|y|\neq 0$, $z=0$, то $A\sim e_2$, а если $y=0$, $|z|\neq 0$, то $A\sim e_3$. Наконец, если $y\cdot z\neq 0$, то, воспользовавшись соотношением (1.161), где $\alpha=\dfrac{1}{4}\ln|zy^{-1}|$, видим, что $A\sim e_2\pm e_3$.

Пусть $e_2+e_3=A$. Тогда из (1.162) следует, что

$$A\sim \beta e_1 + (1-\beta^2)e_2 + e_3,$$

а из (1.163) — что

$$A\sim [\beta-\gamma(1-\beta^2)]e_1 + (1-\beta^2)e_2 + [1+\beta\gamma-\gamma^2(1-\beta^2)]e_3.$$

Поэтому, положив $\beta=1$, $\gamma=-\dfrac{1}{2}$, видим, что $e_1\sim e_2+e_3$.

Пусть теперь $A=e_3$.

Тогда из (1.162) следует, что

$$A\sim \beta e_1 - \beta^2 e_2 + e_3,$$

а из (1.163) — что

$$A\sim \beta(1+\gamma\beta)e_1 - \beta^2 e_2 + (1+\gamma\beta)^2 e_3.$$

Поэтому, положив $1+\gamma\beta=0$, видим, что $e_3\sim e_2$.

Следовательно, есть три возможности:

$$A\sim e_1,\quad A\sim e_2,\quad A\sim e_2-e_3.$$

Остается убедиться, что не существуют внутренние автоморфизмы, которые переводят эти операторы один в другой.

Пусть $A=e_1$. Тогда из (1.162) следует, что

$$A\sim e_1 - 2\beta e_2,$$

из (1.163) — что

$$A\sim (1+2\gamma\beta)e_1 - 2\beta e_2 + 2\gamma(1+\gamma\beta)e_2,$$

а из (1.161) — что

$$A \sim (1 + 2\gamma\beta)e_1 - 2\beta e^{2\alpha}e_2 + 2\gamma(1 + \gamma\beta)e^{-2\alpha}e_3.$$

Если $1 + 2\gamma\beta = 0$, то $\gamma \cdot \beta \neq 0$ и

$$A \sim 2\beta e^{2\alpha}e_2 + \frac{1}{2}\beta^{-1}e^{2\alpha}e_3,$$

то есть $A \sim e_2 + e_3$.

Следовательно, e_1 не сопряжен ни с e_2, ни с $e_2 - e_3$.

Пусть теперь $A = e_2$. Аналогично получаем, что

$$A \sim -\gamma(1 + \beta\gamma)e_1 + (1 + \beta\gamma)^2e^{2\alpha}e_2 - \gamma^2e^{-2\alpha}e_3.$$

Если $1 + \beta\gamma = 0$, то $\beta \cdot \gamma \neq 0$ и $A \sim e_3$, что уже известно.

Требование $A \sim e_1$ приводит к несовместной системе уравнений

$$1 + \beta\gamma = 0, \quad \gamma = 0.$$

Наконец, требование $A \sim e_2 - e_3$ также приводит к несовместной системе уравнений

$$\gamma(1 + \beta\gamma) = 0, \quad (1 + \beta\gamma)^2e^{2\alpha} = \gamma^2e^{-2\alpha}.$$

Следовательно, оператор e_2 также не сопряжен с операторами e_1 и $e_2 - e_3$.

Из проведенных выше рассуждений следует, что имеют место три несопряженные одномерные подалгебры алгебры $sl(2, \mathbb{R})$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_2 - e_3\rangle$.

Перейдем теперь к описанию двухмерных подалгебр алгебры $sl(2, \mathbb{R})$.

Пусть B пробегает множество операторов $\{e_1, e_2, e_2 - e_3\}$, а A имеет вид (1.160).

Проверка коммутационных соотношений для алгебры $M = \langle B, A\rangle$ должна быть подчинена условию $[B, A] \in M$ для любых $B, A \in M$.

Если $B = e_1$, то, в соответствии с (1.159),

$$[B, A] = [e_1, A] = 2(ye_2 - ze_3), \quad [e_1, [e_1, A]] = 4(ye_2 + ze_3).$$

Поскольку $\dim M = 2$, то должно выполняться равенство

$$\begin{vmatrix} y & -z \\ y & z \end{vmatrix} = 2yz = 0.$$

Следовательно, в случае $B = e_1$ мы приходим к двум двухмерным подалгебрам алгебры M: $\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_1, e_3\rangle$.

Если $B = e_2$, то, не уменьшая общности рассуждений, можем положить $A = xe_1 + ze_3$. Далее, $[e_2, A] = -2xe_2 + ze_1$, $[e_2, [e_2, A]] = -2ze_2$, откуда следует, что $z = 0$. Приходим к полученной выше алгебре $\langle e_1, e_2\rangle$.

Если же $B = e_2 - e_3$, то можем положить $A = xe_1 + y(e_2 + e_3)$. Поскольку $[B, A] = -2x(e_2 + e_3) + 2ye_1$ и $\dim M = 2$, то должно выполняться равенство

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = -(x^2 + y^2) = 0,$$

которое имеет место только при условии, что $x = y = 0$. Следовательно, оператор $e_2 - e_3$ не допускает расширения до двухмерной подалгебры алгебры $sl(2, \mathbb{R})$.

Рассмотрим далее двухмерную алгебру $\langle e_1, e_3\rangle$. Выберем ее базис в виде

$$e_1' = e_1 + e_3, \quad e_2' = e_1 - e_3.$$

Тогда из равенств (1.162), (1.163) следует, что

$$\begin{aligned} e_1' &\sim [1 + \beta + \gamma\beta(2 + \beta)]e_1 - \beta(2 + \beta)e_2 + \\ &\quad + [1 + 2\gamma(1 + \beta) + \beta(2 + \beta)\gamma^2]e_3, \\ e_2' &\sim [1 - \beta + \gamma\beta(2 - \beta)]e_1 - \beta(2 - \beta)e_2 + \\ &\quad + [-1 - 2\gamma(1 - \beta) + \beta(2 - \beta)\gamma^2]e_3. \end{aligned}$$

Положив $\gamma = -\beta^{-1}$, видим, что

$$e_1' \sim -e_1 - \beta(2 + \beta), \quad e_2' \sim -e_1 - \beta(2 - \beta)e_2,$$

и если, например, $\beta = -2$, то

$$e_1' \sim -e_1, \quad e_2' \sim -e_1 + 8e_2.$$

Следовательно, с точностью до выбора базиса, $\langle e_1, e_3\rangle \sim \langle e_1, e_2\rangle$.

Подводя итог, видим, что с точностью до сопряженности имеет место только одна двухмерная подалгебра алгебры $sl(2, \mathbb{R})$, а именно: $\langle e_1, e_2\rangle$.

Поскольку алгебра $sl(2, \mathbb{R})$ является трехмерной алгеброй Ли, то оптимальную систему подалгебр алгебры $sl(2, \mathbb{R})$ образовывают алгебры:

$$\begin{aligned} &S_0 = 0, \quad S_{1.1} = \langle e_1\rangle, \quad S_{1.2} = \langle e_2\rangle, \quad S_{1.3} = \langle e_2 - e_3\rangle, \\ &S_2 = \langle e_1, e_2\rangle, \quad S_3 = sl(2, \mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle. \end{aligned} \tag{1.164}$$

Прежде чем переходить к выполнению второго шага алгоритма, найдем нормализаторы полученных ненулевых подалгебр в алгебре L.

Пусть

$$C = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 + re_5,$$

где x, y, z, t, r — произвольные действительные постоянные. Рассмотрим случай алгебры $S_{1.1}$. В соответствии с определением нормализатора должно выполняться условие $[x, y] \subset S_{1.1}$, где $x = e_1$, $y \in L$.

Поскольку $[e_1, C] = 2ye_2 - 2ze_3 - te_4 + re_5$, то указанное условие выполняется тогда, когда $y = z = t = r = 0$. Поэтому $\mathrm{Nor}_L S_{1.1} = \langle e_1 \rangle$.

Аналогично для остальных подалгебр алгебры S получаем такой перечень нормализаторов:

$$\mathrm{Nor}_L S_0 = L, \quad \mathrm{Nor}_L S_{1.1} = \langle e_1 \rangle, \quad \mathrm{Nor}_L S_{1.2} = \langle e_1, e_2, e_5 \rangle,$$

$$\mathrm{Nor}_L S_{1.3} = \langle e_2 - e_3 \rangle, \quad \mathrm{Nor}_L S_2 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad \mathrm{Nor}_L S_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

Шаг 2. На втором шаге осуществим построение расщепляемых расширений подалгебр алгебры $S = sl(2, \mathbb{R})$ в алгебре L. Для упрощения операторов будем использовать преобразования, которые генерируются нормализаторами этих подалгебр.

Для алгебры S_0 мы должны описать все подпространства пространства $2A_1$ с точностью до G_L-сопряженности.

Пусть $D = ae_4 + be_5$, $a, b \in \mathbb{R}$ и $|a| + |b| \neq 0$.

Пусть также $a \neq 0$. Тогда, в соответствии с (1.159),

$$\exp(\alpha e_2) D \exp(-\alpha e_2) = ae_4 + (\alpha a + b)e_5,$$

и, положив $\alpha = -ba^{-1}$, видим, что $D \sim e_4$.

Пусть теперь $a = 0$, тогда $b \neq 0$ и $D = be_5$.

Но в этом случае

$$\exp(\beta e_3) D \exp(-\beta e_3) = be_5 + \beta be_4,$$

и мы приходим к виду оператора D, который был рассмотрен выше.

Поскольку алгебра $2A_1$ — двухмерная алгебра Ли, то можем сделать вывод, что алгебре S_0 соответствуют такие расщепляемые расширения: $\langle e_4 \rangle$, $\langle e_4, e_5 \rangle$.

Пусть теперь имеет место случай алгебры $S_{1.1}$. Тогда

$$[e_1, D] = -ae_4 + be_5,$$

и поскольку

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -a & b \end{vmatrix} = 2ab,$$

то алгебра $S_{1.1}$ имеет два инвариантных одномерных подпространства в $2A_1$, а именно: $\langle e_4 \rangle, \langle e_5 \rangle$. Преобразования, которые генерируются элементами $\mathrm{Nor}_L S_{1.1}$, оставляют вид этих пространств неизменным.

Следовательно, для алгебры $S_{1.1}$ существуют три расщепляемые расширения:

$$\langle e_1, e_4 \rangle, \quad \langle e_1, e_5 \rangle, \quad \langle e_1, e_4, e_5 \rangle.$$

Случаи остальных подалгебр алгебры $sl(2, \mathbb{R})$ рассматриваются аналогично. Ниже мы приводим полный список несопряженных расщепляемых расширений для этих алгебр:

$$\begin{aligned} &\langle e_4 \rangle, \quad \langle e_4, e_5 \rangle, \quad \langle e_1, e_4 \rangle, \quad \langle e_1, e_5 \rangle, \quad \langle e_1, e_4, e_5 \rangle, \quad \langle e_2, e_5 \rangle, \\ &\langle e_2, e_4, e_5 \rangle, \quad \langle e_2 - e_3, e_4, e_5 \rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_5 \rangle, \\ &\langle e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle. \end{aligned} \tag{1.165}$$

Шаг 3. Во время построения нерасщепляемых расширений подалгебр алгебры $sl(2, \mathbb{R})$ мы, для упрощения вида базисных элементов, будем использовать автоморфизмы, которые генерируются базисными элементами идеала $2A_1$.

Так, например, рассмотрим расширение алгебры $S_{1.1}$. Пусть

$$A = e_1 + ae_4 + be_5.$$

Тогда, поскольку

$$\exp(\alpha e_4 + \beta e_5) A \exp(-\alpha e_4 - \beta e_5) = e_1 + (a + \alpha)e_4 + (b - \beta)e_5,$$

то положив $\alpha = -a$, $\beta = b$, убеждаемся, что $A \sim e_1$, а значит, алгебра $S_{1.1}$ не имеет в алгебре L нерасщепляемых расширений.

Пусть теперь $A = e_2 + ae_4 + be_5$. Тогда, поскольку

$$\exp(\alpha e_4 + \beta e_5) A \exp(-\alpha e_4 - \beta e_5) = e_2 + ae_4 + (b - \alpha)e_5,$$

то, положив $\alpha = b$, видим, что $A \sim e_2 + ae_4$, $a \neq 0$. Далее, поскольку $e_1 \in \mathrm{Nor}_L S_{1.2}$ и

$$\exp(\alpha e_1)(e_2 + ae_4) \exp(\alpha e_1) = e^{2\alpha} e_2 + ae^{-\alpha} e_4,$$

то, положив $\alpha = \dfrac{1}{3} \ln |a|$, убеждаемся, что $A \sim e_1 \pm e_4$.

Далее рассматриваем наличие инвариантных подпространств у оператора $e_2 \pm e_4$ в пространстве $2A_1$ и видим, что есть только нулевое и одномерное $\langle e_5 \rangle$ пространства, которые сохраняют нерасщепляемое расширение алгебры $S_{2.2}$.

Итог: для алгебры $S_{2.2}$ имеют место такие нерасщепляемые расширения:

$$\langle e_2 \pm e_4 \rangle, \quad \langle e_2 \pm e_4, e_5 \rangle. \tag{1.166}$$

Анализ остальных подалгебр $sl(2, \mathbb{R})$ показал, что для них не существуют нерасщепляемые расширения в алгебре L.

Подводя итоги, видим, что, в соответствии с (1.164)–(1.166), для алгебры $sl(2, \mathbb{R}) \Subset 2A_1$ оптимальная система подалгебр такая:

Подалгебры размерности 1:

$$\langle e_1 \rangle, \quad \langle e_2 \rangle, \quad \langle e_2 - e_3 \rangle, \quad \langle e_4 \rangle, \quad \langle e_2 + e_4 \rangle, \quad \langle e_2 - e_4 \rangle.$$

Подалгебры размерности 2:

$$\langle e_1, e_2\rangle, \quad \langle e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_1, e_4\rangle, \quad \langle e_1, e_5\rangle, \quad \langle e_2, e_5\rangle,$$
$$\langle e_2 + e_4, e_5\rangle \quad \langle e_2 - e_4, e_5\rangle.$$

Подалгебры размерности 3:

$$sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle, \quad \langle e_1, e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_2, e_4, e_5\rangle,$$
$$\langle e_2 - e_3, e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_5\rangle.$$

Подалгебры размерности 4:

$$\langle e_1, e_2, e_4, e_5\rangle.$$

Подалгебры размерности 5:

$$L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle.$$

2. Классификация подалгебр алгебры $L = sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3.3}$.
Пусть $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $A_{3.3} = \langle e_4, e_5, e_6\rangle$.

Поскольку изоморфизм, который связывает базисные элементы v_i $(i = 1,\ldots,6)$ алгебры инвариантности уравнения теплопроводности и базисные элементы e_i $(i = 1,\ldots,6)$, такой:

$$\varphi: \quad \mathrm{v}_1 \leftrightarrow e_6, \quad \mathrm{v}_2 \leftrightarrow e_3, \quad \mathrm{v}_3 \leftrightarrow e_4,$$
$$\mathrm{v}_4 - \frac{1}{2}\mathrm{v}_3 \leftrightarrow e_1, \quad \mathrm{v}_5 \leftrightarrow e_5, \quad -\frac{1}{4}\mathrm{v}_6 \leftrightarrow e_2,$$

то элементы e_i $(i = 1,\ldots,5)$ удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 0,$$
$$[e_1, e_5] = e_5, \quad [e_1, e_6] = -e_6, \quad [e_2, e_4] = 0, \quad [e_2, e_5] = 0,$$
$$[e_2, e_6] = \frac{1}{2}e_5, \quad [e_3, e_5] = 0, \quad [e_3, e_5] = 2e_6, \quad [e_3, e_6] = 0,$$
$$[e_4, e_5] = 0, \quad [e_4, e_6] = 0, \quad [e_5, e_6] = e_4.$$

Шаг 1. Этот шаг осуществлен при классификации подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R}) \Subset 2A_1$. Имеют место такие подалгебры алгебры $sl(2,\mathbb{R})$:

$$S_0 = 0, \quad S_{1.1} = \langle e_1\rangle, \quad S_{1.2} = \langle e_2\rangle, \quad S_{1.3} = \langle e_2 - e_3\rangle,$$
$$S_2 = \langle e_1, e_2\rangle, \quad S_3 = sl(2,\mathbb{R}). \tag{1.167}$$

Шаг 2. Изучение расщепляемых расширений проводится аналогично тому, как мы осуществили классификацию подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R})$. Здесь только нужно учесть, что нормализаторы подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ в данной алгебре L могут иметь другое значение.

Так, $\mathrm{Nor}_L S_{1.1} = \langle e_1, e_4\rangle$, $\mathrm{Nor}_L S_{1.2} = \langle e_1, e_3, e_4, e_5\rangle$ и т.д., а также, что алгебра $A_{3.3}$ является нильпотентной, а не абелевой алгеброй Ли.

В результате вычислений мы получили такие расщепляемые расширения подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ в алгебре L:

$$\langle e_5\rangle, \quad \langle e_4\rangle, \quad \langle e_5, e_4\rangle, \quad \langle e_4, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_1, e_4\rangle, \quad \langle e_1, e_5\rangle, \quad \langle e_1, e_6\rangle,$$
$$\langle e_4, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_1, e_4, e_6\rangle, \quad \langle e_1, e_4, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_2, e_4\rangle, \quad \langle e_2, e_5\rangle,$$
$$\langle e_2, e_4 \pm e_5\rangle, \quad \langle e_2, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_2, e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_2, e_4, e_5, e_6\rangle,$$
$$\langle e_2 - e_3, e_4\rangle, \quad \langle e_2 - e_3, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_2 - e_3, e_4, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_4\rangle,$$
$$\langle e_1, e_2, e_5\rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle,$$
$$\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle, \quad \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle.$$

Шаг 3. В алгебре $sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3.3}$ есть элемент e_4, который коммутирует с остальными базисными элементами на ноль. Поэтому в этой алгебре имеется значительно больше нерасщепляемых расширений подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R})$.

Ниже мы приводим их перечень:

$$\langle e_1 + \alpha e_4\rangle, \quad \langle e_1 + \alpha e_4, e_6\rangle, \quad \langle e_2 \pm e_6\rangle, \quad \langle e_2 \pm e_6, e_4\rangle,$$
$$\langle e_2 \pm e_6, e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_2 \pm e_4\rangle, \quad \langle e_2 \pm e_4, e_5\rangle,$$
$$\langle e_2 - e_3 + \alpha e_4\rangle, \quad \langle e_1 + \alpha e_4, e_2\rangle, \quad \langle e_1 + \alpha e_4, e_2, e_5\rangle. \tag{1.168}$$

В выражениях (1.168) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Следовательно, оптимальную систему подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R}) \Subset A_{3.3}$ составляют алгебры (1.167)–(1.168).

Перейдем теперь к непосредственному проведению процедуры симметрийной редукции и, где это возможно, к построению инвариантных решений дифференциальных уравнений в частных производных.

1.4.3. Симметрийная редукция и построение инвариантных решений уравнения Бюргерса

Ограничимся подробным рассмотрением уравнения Бюргерса, для которого нами проведена вся предварительная работа для того, чтобы провести его симметрийную редукцию. Выше мы показали, что уравнение

$$u_t = u_{xx} + uu_x$$

инвариантно относительно пятимерной алгебры инвариантности с базисными операторами

$$\mathrm{v}_1 = \partial_t, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_x, \quad \mathrm{v}_3 = t\partial_x - \partial_u,$$
$$\mathrm{v}_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \quad \mathrm{v}_5 = t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u.$$

Поскольку здесь $n = 2$, то необходимое условие для существования неособых инвариантных решений имеет вид

$$r_* \leqslant 2, \quad r_*(\overline{\xi}_a) = r_*.$$

Отсюда следует, что можно строить решения рангов ($\rho = 2 - r_*$) $\rho = 0$ и $\rho = 1$.

Рассматриваем случай $\rho = 1$. Оптимальная система подалгебр алгебры $sl(2, \mathbb{R}) \mathbin{\in\!\!\!\!+} 2A_1$, которая изоморфна алгебре инвариантности уравнения Бюргерса, известна, при этом имеет место такой изоморфизм между базисными элементами этих алгебр:

$$\varphi: \ \mathrm{v}_1 \leftrightarrow e_3, \quad \mathrm{v}_2 \leftrightarrow e_4, \quad \mathrm{v}_3 \leftrightarrow e_5, \quad \mathrm{v}_4 \leftrightarrow e_1, \quad \mathrm{v}_5 \leftrightarrow -e_2.$$

Рассмотрим список одномерных подалгебр

$$\langle e_1 \rangle, \quad \langle e_2 \rangle, \quad \langle e_2 - e_3 \rangle, \quad \langle e_4 \rangle, \quad \langle e_2 + e_4 \rangle, \quad \langle e_2 - e_4 \rangle,$$

или, в терминах v_i $(i = 1, \ldots, 5)$,

$$\langle \mathrm{v}_4 \rangle, \quad \langle \mathrm{v}_5 \rangle, \quad \langle \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_5 \rangle, \quad \langle \mathrm{v}_2 \rangle, \quad \langle \mathrm{v}_5 - \mathrm{v}_2 \rangle, \quad \langle \mathrm{v}_5 + \mathrm{v}_2 \rangle.$$

Для оператора $\mathrm{v}_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$ $\ r_* = 1$, $r_*(\overline{\xi}_a) = r_* = 1$, поэтому оператор v_4 удовлетворяет необходимым условиям существования неособых инвариантных решений ранга $\rho = 1$. Аналогично убеждаемся в том, что этим условиям удовлетворяют все одномерные подалгебры из приведенного выше списка.

Далее, отметим, что уравнение Бюргерса инвариантно относительно преобразования

$$\psi: \quad t \to t, \quad x \to -x, \quad u \to -u,$$

которое не входит в группу внутренних автоморфизмов алгебры инвариантности уравнения Бюргерса, и $\psi(\mathrm{v}_5 + \mathrm{v}_2) = \mathrm{v}_5 - \mathrm{v}_2$. Следовательно, $\mathrm{v}_5 + \mathrm{v}_2 \sim \mathrm{v}_5 - \mathrm{v}_2$. Это несколько сокращает перечень одномерных подалгебр.

Рассмотрим подробно случай алгебры v_4. На первом шаге осуществляем построение базиса инвариантов этой алгебры. Для этого решаем уравнение

$$\mathrm{v}_4(F(t, x, u)) = 0,$$

или, что то же самое, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = -\frac{du}{u},$$

которая имеет такие первые интегралы:

$$x^2 t^{-1} = C_1, \quad ux = C_2.$$

Следовательно, базис инвариантов алгебры v_4 составляют функции

$$\omega = x^2 t^{-1}, \quad \mathrm{w} = xu.$$

Поэтому полагаем

$$\mathrm{w} = \varphi(\omega),$$

откуда получаем

$$u = x^{-1}\varphi(\omega), \quad \omega = x^2 t^{-1}.$$

Подстановка полученного значения функции u (его еще называют *анзацем*) в уравнение Бюргерса приводит к уравнению

$$4\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega\varphi\dot{\varphi} - \varphi^2 + \omega(\omega - 2)\dot{\varphi} + 2\varphi = 0,$$

где $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{d\omega}$, $\ddot{\varphi} = \dfrac{d^2\varphi}{d\omega^2}$. Это уравнение является уже обыкновенным дифференциальным уравнением.

Ниже, для каждой из одномерных подалгебр представлен соответствующий анзац и редуцированное уравнение:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{v}_4 \rangle: \quad & u = x^{-1}\varphi(\omega), \quad \omega = x^2 t^{-1}, \\
& 4\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega\varphi\dot{\varphi} - \varphi^2 + \omega(\omega - 2)\dot{\varphi} + 2\varphi = 0; \\
\langle \mathrm{v}_5 \rangle: \quad & u = x^{-1}\varphi(\omega) - xt^{-1}, \quad \omega = tx^{-1}, \\
& \omega^2\ddot{\varphi} - \omega\varphi\dot{\varphi} + 4\omega\dot{\varphi} + 2\varphi - \varphi^2 = 0; \\
\langle \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_5 \rangle: \quad & u = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi(\omega) - xt(t^2+1)^{-1}, \ \omega = x^2(t^2+1)^{-1}, \\
& 4\omega\ddot{\varphi} + 2\sqrt{\omega}\varphi\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi} + \sqrt{\omega} = 0; \\
\langle \mathrm{v}_2 \rangle: \quad & u = \varphi(t), \quad \dot{\varphi} = 0; \\
\langle \mathrm{v}_5 - \mathrm{v}_2 \rangle: \quad & u = t^{-1}\varphi(\omega) + t^{-2} - xt^{-1}, \quad \omega = 2xt^{-1} - t^{-2}, \\
& 4\ddot{\varphi} + 2\varphi\dot{\varphi} + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Перейдем далее к построению инвариантных решений уравнения Бюргерса. Для этого проведем анализ редуцированных уравнений.

Первое из этих уравнений

$$4\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega\varphi\dot{\varphi} + \omega(\omega - 2)\dot{\varphi} - \varphi^2 + 2\varphi$$

получено вследствие редукции, соответствующей оператору $\langle \mathrm{v}_4 \rangle$, который генерирует группу симметрий растяжений в пространстве $\mathrm{V} = \langle t, x, u \rangle$. Решения уравнений в частных производных, которые инвариантны относительно группы симметрий растяжений, называют *автомодельными* решениями [46, 55].

В общем случае нам не удалось проинтегрировать это уравнение. Но оно имеет такие частные решения:

$$\varphi = 2, \quad \varphi = -\omega, \quad \varphi = 2 - \omega.$$

В соответствии с этим получаем такие автомодельные решения уравнения Бюргерса:

$$u = 2x^{-1}, \quad u = -xt^{-1}, \quad u = 2x^{-1} - xt^{-1}.$$

Второе редуцированное уравнение

$$\omega^2\ddot{\varphi} - \omega\varphi\dot{\varphi} + 4\omega\dot{\varphi} + 2\varphi - \varphi^2 = 0$$

допускает двухпараметрическую группу преобразований, которая генерируется операторами

$$\overline{\mathrm{v}}_1 = \omega\partial_\omega, \quad \overline{\mathrm{v}}_2 = \omega^2\partial_\omega - \omega\varphi\partial_\varphi.$$

Это дает возможность, используя симметрийные методы, проинтегрировать данное уравнение в замкнутом виде (подробности о симметрийном анализе обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в [32, 55]).

Перейдем к новым переменным x и $y = y(x)$ таким образом:

$$x = \omega^{-1}\varphi^{-1}, \quad y = -\omega^{-1}.$$

Тогда, поскольку

$$\dot{\varphi} = \frac{y^2(y - xy')}{x^2y'},$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{y^5y''}{x^3y'^3} - \frac{2y^3(y - xy')^2}{x^3y'^2},$$

то данное уравнение сводится к уравнению

$$xy'' + 2y' + y'^2 = 0,$$

общее решение которого находится с помощью двух квадратур.

Первое интегрирование приводит к равенству

$$\frac{y'}{y' + 2} = Ax^{-2}, \quad A \neq 0,$$

откуда получаем, что

$$y' = \frac{2A}{x^2 - A}, \quad A \neq 0.$$

Отсюда следует, что общее решение сведенного редуцированного уравнения составляют функции

$$y = -\alpha \ln\left|\frac{\alpha + x}{\alpha - x}\right| + C, \quad A = \alpha^2 > 0, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y = -2\alpha \arctan\frac{x}{\alpha} + C, \quad A = -\alpha^2 < 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с этим общее решение второго редуцированного уравнения составляют функции

$$\varphi = \frac{1}{\alpha\omega}\mathrm{th}\left(C + \frac{1}{2\alpha\omega}\right), \quad C \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\varphi = \frac{1}{\alpha\omega}\mathrm{cth}\left(C + \frac{1}{2\alpha\omega}\right), \quad C \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\varphi = \frac{1}{\alpha\omega}\mathrm{ctg}\left(C + \frac{1}{2\alpha\omega}\right), \quad C \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

Далее, учитывая вид анзаца, получаем также инвариантные решения уравнения Бюргерса:

$$u = \frac{1}{\alpha t}\mathrm{th}\left(C + \frac{x}{2\alpha t}\right) - \frac{x}{t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$u = \frac{1}{\alpha t}\mathrm{cth}\left(C + \frac{x}{2\alpha t}\right) - \frac{x}{t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$u = \frac{1}{\alpha t}\mathrm{ctg}\left(C + \frac{x}{2\alpha t}\right) - \frac{x}{t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

Третье редуцированное уравнение

$$4\omega\ddot{\varphi}+2\sqrt{\omega}\varphi\dot{\varphi}+2\dot{\varphi}+\sqrt{\omega}=0$$

заменой

$$\varphi=\psi(\eta),\quad \eta=2\sqrt{\omega},\quad \omega>0,$$

сводится к уравнению

$$4\ddot{\psi}+2\psi\dot{\psi}+\frac{1}{2}\eta=0,$$

проинтегрировав которое один раз, приходим к специальному уравнению Риккати

$$4\dot{\psi}+\psi^2+\frac{1}{4}\eta^2=m,\quad m\in\mathbb{R}.$$

Четвертое из редуцированных уравнений приводит к тривиальному решению уравнения Бюргерса

$$u=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Но, как отмечалось выше, характерной особенностью групп преобразований, которые допускает заданное уравнение, является то, что они действуют на множестве решений этого уравнения и переводят одно его решение в другое. Поэтому одним из приложений таких преобразований является так называемое "размножение" решений (см., например, [78, 89]). Так, использовав преобразования, которые генерирует оператор v_5, из тривиального решения уравнения Бюргерса получаем такое:

$$u=\frac{C+C_1x}{1-C_1t},\quad C,C_1\in\mathbb{R}.$$

Последнее, пятое, из редуцированных уравнений

$$4\ddot{\varphi}+2\varphi\dot{\varphi}+1=0$$

легко интегрируется один раз:

$$4\dot{\varphi}+\varphi^2+\omega=m,\quad m\in\mathbb{R}.$$

Снова пришли к специальному уравнению Риккати.

Отметим, что решениями этого уравнения Риккати будут функции φ, которые удовлетворяют равенству

$$\dot{\psi}=\varphi\psi,$$

где

$$\psi=\frac{1}{2}\sqrt{\omega-m}Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{(\omega-m)^3}\right),$$

$Z_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ — цилиндрическая функция, которая выражается через функции Бесселя первого и второго рода.

В соответствии с этим и инвариантные решения уравнения Бюргерса определяются через цилиндрические функции.

В качестве задания для самостоятельной работы мы предлагаем читателю провести симметрийную редукцию уравнений, которые рассматривались в разделе 1.2 этой главы.

Глава 2

Групповая классификация нелинейных одномерных уравнений эволюционного типа

Вторая глава посвящена рассмотрению одной из центральных задач классического группового анализа дифференциальных уравнений, а именно — *задаче групповой классификации* дифференциальных уравнений заданного вида. Эта задача формулируется так: для класса дифференциальных уравнений заданного вида найти ядро основных групп инвариантности и указать все специализации произвольных элементов (как правило, это некоторые произвольные функции), которые дают расширения ядра основных групп. Другими словами: среди уравнений заданного вида выделить те, которые имеют наивысшие симметрийные свойства. Основу данного раздела составляют результаты, полученные в [1, 25, 37, 97, 142, 146, 187].

Прежде чем переходить к изложению результатов, заметим, что все наши исследования относятся к локальным областям, и мы предполагаем, что все функции, которые нам встречаются, являются непрерывными и имеют непрерывные производные по аргументам нужных порядков.

2.1. Задача групповой классификации дифференциальных уравнений и методы ее решения

В первом параграфе мы осуществляем постановку задачи, которую будем решать во втором разделе, проводим обзор известных результатов и останавливаемся на методах решения задачи групповой классификации.

2.1.1. Постановка задачи и обзор известных результатов

Если рассматривать множество дифференциальных уравнений и множество групп преобразований изолированно друг от друга, то во-

прос классификации принадлежащих им объектов рассматривается на основании введения различных признаков. Так, для дифференциальных уравнений классификационными признаками могут быть свойства линейности и квазилинейности. Для групп преобразований в качестве таких признаков берут изоморфизмы и гомоморфизмы, структурные свойства и многое другое. Однако в групповом анализе эти два множества изучаются вместе посредством установленного выше соответствия между системой дифференциальных уравнений и ее группой инвариантности.

Это свойство является отображением и приводит к расширению классификационных возможностей для каждого из этих множеств. Поскольку отображение “уравнение $\longrightarrow$ группа преобразований” не является взаимно однозначным, то влияние преобразований на классификационные возможности для дифференциальных уравнений должно быть, вообще говоря, более сильным, чем обратное влияние. Поэтому на первый план выдвигаются задачи групповой классификации дифференциальных уравнений.

Одним из сильных классификационных признаков является подобие групп преобразований. А именно, если основные группы какихлибо уравнений подобны, то групповые свойства этих уравнений, вообще говоря, одинаковы. В частности, если одну систему трансформировать посредством “замены переменных” в другую систему, то основные группы этих систем оказываются подобными. Поэтому групповой анализ одного уравнения оказывается групповым анализом сразу всего класса уравнений, которые получаются из данного уравнения заменами переменных.

В дальнейшем рассматривается задача о классификации дифференциальных уравнений фиксированной дифференциальной структуры, которые изменяются лишь за счет так называемого “произвольного элемента” (как правило, это некоторые произвольные функции независимых и зависимых переменных, которые входят в данные уравнения).

Объектом наших исследований являются нелинейные уравнения, принадлежащие классу уравнений эволюционного типа

$$u_t = f(t,x,u,u_x)u_{xx} + g(t,x,u,u_x), \tag{2.1}$$

где функции f и g — произвольные гладкие функции своих аргументов, $u = u(t,x)$.

Отметим, что уравнения вида (2.1) занимают важное место среди уравнений математической физики. К таким уравнениям, в частности, приводят задачи описания процессов тепло- и массообмена, механики сплошной среды, теории фильтрации, роста популяций, физики моря для описания распределения колебаний температуры и солености моря относительно глубины и т.п.

Для уравнения (2.1) задача групповой классификации звучит так: *описать все уравнения вида* (2.1)*, которые имеют нетривиальные симметрийные свойства*. Очевидно, в соответствии со сказанным выше, для этого нам достаточно указать по одному представителю из каждого класса уравнений, которые имеют подобные группы симметрии.

Групповая классификация линейных уравнений вида (2.1) известна (см., например, [46]). Оказывается, что линейное уравнение вида (2.1) допускает более чем двухпараметрическую группу симметрии (мы не учитываем тривиальную бесконечномерную симметрию) только в двух случаях:

1) когда оно равносильно линейному уравнению теплопроводности
$$u_t = u_{xx};$$
2) когда оно равносильно уравнению
$$u_t = u_{xx} + mx^{-2}u, \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

В первом случае основной группой симметрии является шестипараметрическая группа инвариантности (инфинитезимальные операторы, генерирующие эту группу, найдены при рассмотрении примера 1.4). Во втором же случае основной группой симметрии является четырехпараметрическая группа инвариантности, которую генерируют такие инфинитезимальные операторы:
$$\mathrm{v}_1 = \partial_t, \quad \mathrm{v}_2 = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad \mathrm{v}_3 = u\partial_u,$$
$$\mathrm{v}_4 = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u.$$

Учитывая это, мы рассматриваем задачу *групповой классификации нелинейных уравнений вида* (2.1). При этом те из уравнений, которые локальными заменами переменных сводятся к линейным, мы считаем "несущественно" нелинейными уравнениями и исключаем из рассмотрения. Примером такого "несущественно" нелинейного уравнения вида (2.1) является "модифицированное" уравнение Бюргерса
$$u_t = u_{xx} + u_x^2,$$
которое заменой переменных
$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad u = \ln|\omega|, \quad \omega = \omega(\overline{t}, \overline{x})$$

сводится к линейному уравнению теплопроводности
$$\omega_{\overline{t}} = \omega_{\overline{x}\overline{x}}.$$

История решения задачи групповой классификации дифференциальных уравнений ведет начало еще с работ С. Ли [148–150], где он, в частности, доказал теорему, которая утверждает, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными допускает не более чем трехпараметрическую группу нетривиальных преобразований.

Современную постановку задачи групповой классификации дифференциальных уравнений осуществил в 1959 году Л. В. Овсянников в классической роботе [47], где он предложил метод (метод Ли–Овсянникова) решения задачи групповой классификации и осуществил групповую классификацию нелинейного уравнения теплопроводности
$$u_t = [f(u)u_x]_x, \quad f(u) \neq \mathrm{const}. \tag{2.2}$$

Основной результат групповой классификации уравнения (2.2) такой.

Для произвольной функции f алгебра Ли группы симметрии является трехмерной и ее базис составляют операторы
$$\mathrm{v}_1 = \partial_t, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_x, \quad \mathrm{v}_3 = 2t\partial_t + x\partial_x.$$

Основная алгебра инвариантности допускает расширения в таких случаях:

1. $f = e^u: \quad \mathrm{v}_4 = x\partial_x + 2\partial_u;$
2. $f = u^n, \ \ n \neq 0, -\frac{4}{3}: \quad \mathrm{v}_4 = \frac{n}{2}x\partial_x + u\partial_u;$
3. $f = u^{-\frac{4}{3}}: \quad \mathrm{v}_4 = -\frac{2}{3}x\partial_x + u\partial_u, \quad \mathrm{v}_5 = -x^2\partial_x + 3xu\partial_u.$

Эта работа положила начало многочисленным циклам работ по групповой классификации дифференциальных уравнений. При этом, вместе с классическим подходом к решению задачи групповой классификации, для построения широких классов дифференциальных уравнений с высокими симметрийными свойствами используют и другие пути. Коротко остановимся на некоторых из них.

Иногда берут известное уравнение с высокими симметрийными свойствами, группа инвариантности которого является известной группой локальных преобразований, обобщают его определенным образом и ищут такие спецификации произвольных элементов, для которых новые уравнения имеют более высокие симметрийные свойства или же являются инвариантными относительно данной группы инвариантности. Именно при таком подходе были получены новые волновые и поливолновые уравнения, инвариантные относительно группы Пуанкаре и ее естественных расширений [65,88], нелинейные обобщения уравнений теплопроводности, инвариантные относительно групп Галилея [114,115], нелинейные уравнения классической электродинамики, инвариантные относительно групп Пуанкаре и Галилея [90].

Другой подход к описанию дифференциальных уравнений, инвариантных относительно некоторой заданной группы локальных преобразований, предусматривает построение полного множества дифференциальных инвариантов определенного порядка для данной группы преобразований. Наличие такого множества дифференциальных инвариантов дает возможность определить структуру всех дифференциальных уравнений в частных производных определенного порядка, которые допускают заданную группу преобразований в качества группы инвариантности. Полное множество дифференциальных инвариантов второго порядка для известных реализаций в классе векторных полей Ли групп Пуанкаре, Евклида и Галилея было найдено в роботах [76,77,126], базис дифференциальных инвариантов для однопараметрической группы преобразований в случае произвольного количества независимых и зависимых переменных был построен в [163].

В роботах [80,165,166], при изучении наиболее общего вида волновых и эволюционных уравнений в двухмерном пространстве-времени, инвариантных относительно групп Пуанкаре и Галилея, предварительно было проведено построение реализаций алгебр Ли этих групп в классе дифференциальных операторов первого порядка, что позволило получить новые классы таких уравнений.

Здесь же мы рассматриваем классическую постановку задачи групповой классификации дифференциальных уравнений. Поскольку история исследования групповых свойств дифференциальных уравнений состоянием на начало 90-х годов XX-го столетия довольно полно отображена в первом томе справочника [107] под редакцией Н.Х. Ибрагимова, здесь мы останавливаемся только на тех роботах, в которых были изучены групповые (локальные) свойства уравнений вида (2.1):

$$[4]: \quad u_t = f(u_x)u_{xx}, \quad f \neq \text{const};$$

$$\begin{aligned}
[21]: &\quad u_t = [f(u)u_x]_x + g(u), \quad g \neq 0;\\
[108,159]: &\quad u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x;\\
[64,105]: &\quad u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x + h(u);\\
[130]: &\quad u_t = (u^n)_{xx} + g(x)u^m + f(x)u^s u_x, \quad n \neq 0.
\end{aligned}$$

Из приведенного выше перечня видно, что групповая классификация осуществлена только для тех уравнений вида (2.1), которые содержат произвольные функции одного аргумента. Чтобы понять, чем это вызвано, рассмотрим подробно групповую классификацию первого из приведенных выше уравнений (нелинейного уравнения фильтрации) и познакомимся с алгоритмом метода Ли–Овсянникова.

2.1.2. Групповая классификация нелинейного уравнения фильтрации [4]

Следуя работе [4] (см. также [6]), осуществим групповую классификацию уравнений вида

$$u_t = f(u_x)u_{xx}, \tag{2.3}$$

где $f' \neq 0$. Для этого, в соответствии с алгоритмом метода Ли–Овсянникова, на первом этапе найдем основную группу симметрии (или, что то же самое, основную алгебру инвариантности) уравнения (2.3).

Оператор локальной группы, которую допускает уравнение (2.3), ищем в виде

$$\mathrm{v} = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \tag{2.4}$$

где τ, ξ, η — произвольные гладкие функции своих аргументов в некоторой области Ω пространства $\mathrm{V} = \langle t,x,u\rangle$. Значения функций τ, ξ, η ищем из определяющего уравнения

$$\varphi^t - \varphi^x f' u_{xx} - \varphi^{xx} f = 0, \tag{2.5}$$

где φ^t, φ^x, φ^{xx} вычисляются по формулам (1.66), (1.67), (1.70) из первого раздела, $f' = \dfrac{d\,f(u_x)}{d\,u_x}$. При решении уравнения (2.5) u_t заменяется на fu_{xx}, а u_x, u_{xx}, u_{tx} рассматриваются как свободные дифференциальные переменные. Расщепление (2.5) по свободным переменным u_{tx}, u_{xx} приводит к уравнениям

$$\tau_x = 0, \quad \tau_u = 0, \tag{2.6}$$

$$f[-\tau_t + 2\xi_x + 2\xi_u u_x] = f'[\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2], \tag{2.7}$$
$$\eta_t - \xi_t u_x = f[\eta_{xx} + 2(\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x + + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3]. \tag{2.8}$$

В случае произвольной функции $f = f(u_x)$ все коэффициенты в (2.7) и (2.8) должны быть равны нулю:

$$\tau_t - 2\xi_x = 0, \quad \xi_u = 0, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_u - \xi_x = 0,$$
$$\eta_t = 0, \quad \xi_t = 0, \quad 2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{uu} - 2\xi_{xu} = 0. \tag{2.9}$$

Из системы уравнений (2.6), (2.9) легко получить, что в случае произвольной функции $f = f(u_x)$ уравнение (2.3) допускает четырехмерную алгебру инвариантности с базисом

$$\mathrm{v}_1 = \partial_t, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_x, \quad \mathrm{v}_3 = 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u, \quad \mathrm{v}_4 = \partial_u. \tag{2.10}$$

Теперь перейдем к рассмотрению возможности расширения основной группы симметрии уравнения (2.3), которая генерируется инфинитезимальными операторами (2.10). Для этого покажем сначала, что равенство (2.7) равносильно равенству

$$f(a + 2bu_x) = f'(c + du_x - bu_x^2) \tag{2.11}$$

с постоянными коэффициентами a, b, c, d. Действительно, поскольку f зависит только от u_x, выполнение (2.7) возможно только тогда, когда все коэффициенты либо тождественно обращаются в нуль, либо пропорциональны (с постоянными множителями) некоторой функции $\lambda = \lambda(t, x, u) \not\equiv 0$:

$$-\tau_t + 2\xi_x = a\lambda, \quad \xi_u = b\lambda, \quad \eta_x = c\lambda, \quad \eta_u - \xi_x = d\lambda.$$

Легко убедиться в том, что если все коэффициенты в (2.7) одновременно равны нулю, то это соответствует случаю произвольной функции f. Следовательно, расширение основной группы инвариантности возможно только для тех значений функции f, которые удовлетворяют некоторому равенству вида (2.11) с постоянными коэффициентами a, b, c, d, такими, что многочлены $a + 2bu_x$, $c + du_x - bu_x^2$ не равны нулю. Поэтому (2.11) можно переписать в виде

$$\frac{f'}{f} = \frac{a + 2bu_x}{c + du_x - bu_x^2}. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) мы будем называть классифицирующим соотношением.

Прежде чем переходить к анализу классифицирующего соотношения (2.12), выполним следующий этап алгоритма метода Ли–Овсянникова, который предполагает построение группы преобразований эквивалентности $\mathcal{E}$. Для построения $\mathcal{E}$ можно использовать как прямой метод, так и инфинитезимальный, который дает возможность относительно легко вычислить непрерывную подгруппу $\mathcal{E}_c$, которая потом дополняется к группе $\mathcal{E}$.

Остановимся сначала на инфинитезимальном методе. Будем искать оператор

$$E = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \mu\partial_f$$

группы $\mathcal{E}_c$ из условия инвариантности уравнения (2.3), которое записано в виде системы

$$u_t = fu_{xx}, \quad f_t = 0, \quad f_x = 0, \quad f_u = 0, \quad f_{u_t} = 0. \tag{2.13}$$

Здесь u, f рассматриваются как дифференциальные переменные: u в пространстве $\langle t, x\rangle$, f — в расширенном пространстве $\langle t, x, u, u_t, u_x\rangle$. Координаты τ, ξ, η оператора E ищутся как функции переменных t, x, u, а координата μ — как функция переменных t, x, u, u_t, u_x, f. Если вместе с обычными операторами дифференцирования

$$D_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x} + \cdots,$$
$$D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \cdots$$

ввести дифференцирования

$$\tilde{D}_t = \partial_t + f_t\partial_f + f_{tt}\partial_{f_t} + f_{tx}\partial_{f_x} + f_{tu}\partial_{f_u} + f_{tu_t}\partial_{f_{u_t}} + \cdots,$$
$$\tilde{D}_x = \partial_x + f_x\partial_f + f_{tx}\partial_{f_t} + f_{xx}\partial_{f_x} + f_{xu}\partial_{f_u} + f_{xu_t}\partial_{f_{u_t}} + \cdots,$$
$$\tilde{D}_u = \partial_u + f_u\partial_f + f_{tu}\partial_{f_t} + f_{xu}\partial_{f_x} + f_{uu}\partial_{f_u} + f_{uu_t}\partial_{f_{u_t}} + \cdots,$$
$$\tilde{D}_{u_t} = \partial_{u_t} + f_{u_t}\partial_f + f_{tu_t}\partial_{f_t} + f_{xu_t}\partial_{f_x} + f_{uu_t}\partial_{f_u} + f_{u_tu_t}\partial_{f_{u_t}} + \cdots$$

в расширенном пространстве, то координаты продолженного оператора

$$\tilde{E} = E + \varphi^t\partial_{u_t} + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \mu^t\partial_{f_t} + + \mu^x\partial_{f_x} + \mu^u\partial_{f_u} + \mu^{u_t}\partial_{f_{u_t}} + \cdots$$

запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\
&\varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\
&\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi),\\
&\mu^t = \tilde{D}_t(\mu) - f_t \tilde{D}_t(\tau) - f_x \tilde{D}_t(\xi) - f_u \tilde{D}_t(\eta) -\\
&\qquad - f_{u_t} \tilde{D}_t(\varphi^t) - f_{u_x} \tilde{D}_t(\varphi^x),\\
&\mu^x = \tilde{D}_x(\mu) - f_t \tilde{D}_x(\tau) - f_x \tilde{D}_x(\xi) - f_u \tilde{D}_x(\eta) -\\
&\qquad - f_{u_t} \tilde{D}_x(\varphi^t) - f_{u_x} \tilde{D}_x(\varphi^x),\\
&\mu^u = \tilde{D}_u(\mu) - f_t \tilde{D}_u(\tau) - f_x \tilde{D}_u(\xi) - f_u \tilde{D}_u(\eta) -\\
&\qquad - f_{u_t} \tilde{D}_u(\varphi^t) - f_{u_x} \tilde{D}_u(\varphi^x),\\
&\mu^{u_t} = \tilde{D}_{u_t}(\mu) - f_t \tilde{D}_{u_t}(\tau) - f_x \tilde{D}_{u_t}(\xi) - f_u \tilde{D}_{u_t}(\eta) -\\
&\qquad - f_{u_t} \tilde{D}_{u_t}(\varphi^t) - f_{u_x} \tilde{D}_{u_t}(\varphi^x),
\end{aligned}
$$

а инфинитезимальный критерий инвариантности системы (2.13) — в виде

$$\varphi^t - f\varphi^{xx} - \mu u_{xx}\big|_{(2.13)} = 0, \tag{2.14}$$

$$\mu^t\big|_{(2.13)} = \mu^x\big|_{(2.13)} = \mu^u\big|_{(2.13)} = \mu^{u_t}\big|_{(2.13)} = 0. \tag{2.15}$$

Поскольку функции τ, ξ, η, φ^t, φ^x, φ^{xx} не зависят от f, уравнения (2.15) приобретают вид

$$
\begin{aligned}
&\mu_t - f_{u_x}\varphi^x_t = 0, \quad \mu_x - f_{u_x}\varphi^x_x = 0,\\
&\mu_u - f_{u_x}\varphi^x_u = 0, \quad \mu_{u_t} - f_{u_x}\varphi^x_{u_t} = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь f — дифференциальная переменная (так что f и f_{u_x} являются алгебраически независимыми), поэтому последние уравнения дают

$$\mu = \mu(u_x, f), \quad \varphi^x_t = \varphi^x_x = \varphi^x_u = \varphi^x_{u_t} = 0. \tag{2.16}$$

Учитывая, что

$$\varphi^x = \eta_x + u_x\eta_u - u_t\tau_x - u_t u_x \tau_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u,$$

из (2.16) получаем

$$
\begin{aligned}
&\tau = \tau(t), \quad \xi = A_1(t)x + C_1 u + A_2(t),\\
&\eta = A_3(t)u + C_2 x + A_4(t),
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования. После подстановки полученных выражений для τ, ξ, η, μ в (2.14) получаем общее решение определяющих уравнений (2.14), (2.15):

$$
\begin{aligned}
&\tau = C_1 t + C_2, \quad \xi = C_3 x + C_4 u + C_5,\\
&\eta = C_6 x + C_7 u + C_8, \quad \mu = (2C_4 u_x + 2C_3 - C_1)f.
\end{aligned}
$$

Полагая здесь поочередно одну из постоянных C_i $(i = 1, \ldots, 8)$ равной 1, а остальные равными 0, получаем операторы

$$
\begin{aligned}
&E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = \partial_u,\\
&E_4 = t\partial_t - f\partial_f, \quad E_5 = x\partial_x + 2f\partial_f,\\
&E_6 = u\partial_x + 2u_x f\partial_f, \quad E_7 = x\partial_u, \quad E_8 = u\partial_u,
\end{aligned}
$$

которые генерируют 8-параметрическую группу $\mathcal{E}_c$ преобразований эквивалентности

$$
\begin{aligned}
&\overline{t} = \alpha t + \gamma_1, \quad \overline{x} = \beta_1 x + \beta_2 u + \gamma_2,\\
&\overline{u} = \beta_3 x + \beta_4 u + \gamma_3, \quad \overline{f} = (\beta_1 + \beta_2 u_x)^2 f \cdot \frac{1}{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

с коэффициентами

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 = a_5, \quad \beta_2 = a_6, \quad \beta_3 = a_5 a_7 a_8, \quad \beta_4 = (1 + a_6 a_7)a_8,\\
&\alpha = a_4, \quad \gamma_1 = a_1 a_4, \quad \gamma_2 = a_2 a_5 + a_3 a_6,\\
&\gamma_3 = (a_3 + a_2 a_5 a_7 + a_3 a_6 a_7)a_8,
\end{aligned}
$$

где a_i — параметр подгруппы с оператором E_i (поэтому $a_4, a_5, a_8 > 0$), так что в (2.17) $\alpha > 0$, $\beta_i > 0$, $\alpha(\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3) > 0$.

Для дополнения построенной непрерывной группы $\mathcal{E}_c$ заметим, что отображения

$$t \to -t, \quad x \to -x$$

также содержатся в группе $\mathcal{E}$. Дополнив ими $\mathcal{E}_c$, получим преобразование (2.17) с произвольными коэффициентами α, β_i, γ_i, которые удовлетворяют только условию невырожденности $\alpha(\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3) \neq 0$.

Остановимся далее на прямом построении группы $\mathcal{E}$ и убедимся, что преобразования (2.17) действительно составляют группу $\mathcal{E}$.

Предположим, что уравнение (2.3) в результате невырожденной замены переменных

$$\overline{t} = \psi(t, x, u), \quad \overline{x} = \varphi(t, x, u), \quad \overline{u} = \Phi(t, x, u)$$

переходит в уравнение

$$\overline{u}_{\overline{t}} = \overline{f}(\overline{u}_{\overline{x}})\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}}. \tag{2.18}$$

При этом операторы дифференцирования D_t, D_x преобразуются по формулам

$$D_t = D_t(\psi)D_{\overline{t}} + D_t(\varphi)D_{\overline{x}}, \quad D_x = D_x(\psi)D_{\overline{t}} + D_x(\varphi)D_{\overline{x}},$$

использование которых приводит к такому выражению для $\overline{u}_{\overline{t}}$:

$$\overline{u}_{\overline{t}} = \frac{D_x(\Phi)D_t(\psi) - D_t(\Phi)D_x(\psi)}{D_x(\varphi)D_t(\psi) - D_t(\varphi)D_x(\psi)}.$$

Поскольку мы проводим построение преобразований эквивалентности, то правая часть последнего равенства должна зависеть только от u_t, поэтому ее производные по переменным t, x, u, u_x равны нулю. Это условие приводит к системе уравнений для функций φ, ψ, Φ, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi = A_1(t)(\beta_1 x + \beta_2 u) + A_2(t), \quad \psi = \psi(t),\\ &\Phi = A_1(t)(\beta_3 x + \beta_4 u) + A_3(t),\end{aligned}$$

где $\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 \neq 0$, $\psi'(t) \neq 0$, $A_1(t) \neq 0$.

Дальнейшая конкретизация вида функций $A_i(t)$, $\psi(t)$ осуществляется путем подстановки полученного решения в уравнение (2.18) и приводит к формулам (2.17).

Следующий этап групповой классификации уравнения (2.3) предусматривает проведение анализа классифицирующего соотношения (2.12). Для этого мы используем тот факт, что отношение эквивалентности уравнения (2.3) может быть перенесено на уравнение (2.12): после преобразования эквивалентности (2.17) уравнение (2.12) приобретет вид

$$\frac{\overline{f}'}{\overline{f}} = \frac{\overline{a} - 2\overline{b}\overline{u}_{\overline{x}}}{\overline{c} + \overline{d}\overline{u}_{\overline{x}} - \overline{b}\overline{u}_{\overline{x}}^2} \tag{2.19}$$

с коэффициентами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, которые связаны с a, b, c, d посредством формул

$$\begin{aligned}&a = B\overline{a} + 2\beta_3\beta_4\overline{b} - 2\beta_1\beta_2\overline{c} - 2\beta_2\beta_3\overline{d}, \quad B = \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3,\\ &b = \beta_4^2\overline{b} - \beta_2^2\overline{c} - \beta_2\beta_4\overline{d}, \quad c = -\beta_3^2\overline{b} + \beta_1^2\overline{c} + \beta_1\beta_3\overline{d},\\ &d = -2\beta_3\beta_4\overline{b} + 2\beta_1\beta_2\overline{c} + (\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3)\overline{d}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из (2.20) следует, что дискриминант $\Delta = d^2 + 4bc$ в результате действия преобразований (2.17) преобразуется так: $\overline{\Delta} = B^{-2}\Delta$.

Используя это обстоятельство, можно показать, что имеет место один из таких трех случаев:

- все уравнения (2.12) с $\Delta = 0$ эквивалентны уравнению
$$\frac{\overline{f}'}{\overline{f}} = 1; \tag{2.21}$$
- любое уравнение (2.12) с $\Delta > 0$ может быть приведено к виду
$$\frac{\overline{f}'}{\overline{f}} = \frac{\sigma - 1}{\overline{u}_{\overline{x}}}, \quad \sigma \geqslant 0; \tag{2.22}$$
- любое уравнение (2.12) с $\Delta < 0$ может быть приведено к виду
$$\frac{\overline{f}'}{\overline{f}} = \frac{\nu - 2\overline{u}_{\overline{x}}}{1 + \overline{u}_{\overline{x}}}, \quad \nu \geqslant 0. \tag{2.23}$$

Действительно, в случае (2.21) формулы (2.20), подставленные в (2.12), приводят к равенству

$$\frac{f'}{f} = \frac{(B - 2\beta_1\beta_2) - 2\beta_2^2 u_x}{(\beta_1 + \beta_2 u_x)^2},$$

откуда, вследствие произвольности параметров $\beta_1, \ldots, \beta_4$ в преобразованиях (2.17), и следует первое утверждение.

Аналогично, для уравнения (2.22) получаем

$$\frac{f'}{f} = \frac{[B\sigma - (\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3)] - 2\beta_2\beta_4 u_x}{(\beta_1 + \beta_2 u_x)(\beta_3 + \beta_4 u_x)}, \tag{2.24}$$

откуда, вследствие произвольности параметров в преобразованиях (2.17), следует второе из утверждений. Из (2.24) получаем такое выражение для вычисления σ по коэффициентам уравнения (2.12):

$$\sigma = \begin{cases} \left|\dfrac{a}{b} + k_1 + k_2\right| |k_1 - k_2|^{-1}, & b \neq 0,\\[2mm] \left|\dfrac{a}{d} + 1\right|, & b = 0,\end{cases}$$

где k_1 и k_2 — корни трехчлена $c + dk - bk^2$. Использование условия $\sigma \geqslant 0$ достигается преобразованием эквивалентности

$$x = u, \quad u = x,$$

которое переводит уравнение (2.22) с произвольным σ в уравнение

$$\frac{f'}{f} = -\frac{\sigma + 1}{u_x}.$$

Последнее третье утверждение доказывается аналогично. При этом получаем формулу

$$\nu = \frac{2|a + d|}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Следовательно, множество уравнений (2.12) разбивается на классы эквивалентности с представителями (2.21)–(2.23), которые после интегрирования дают такие значения функций (черту над u и f в дальнейшем мы будем упускать):

$$f = \exp(u_x), \tag{2.25}$$

$$f = u_x^{\sigma-1}, \quad \sigma \geqslant 0, \tag{2.26}$$

$$f = (1 + u_x^2)^{-1} \exp(\nu \arctan u_x), \quad \nu \geqslant 0. \tag{2.27}$$

От постоянных интегрирования мы избавляемся растяжением в уравнении (2.3).

Последний этап предусматривает решение определяющих уравнений (2.6)–(2.8) для каждого из полученных значений функций f (2.25)–(2.27).

Для значения f (2.25) уравнения (2.7), (2.8) после расщепления по u_x приводят к системе

$$-\tau_t + 2\xi_x = \eta_x, \quad \eta_u - \xi_x = 0, \quad \xi_u = 0,$$
$$\eta_t = 0, \quad \xi_t = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0,$$

откуда, учитывая (2.6), получаем

$$\tau = (2A_1 - A_2)t + A_3, \quad \xi = A_1 x + A_4,$$
$$\eta = A_2 x + A_1 u + A_5.$$

Следовательно, в данном случае к операторам (2.10) прибавляется оператор

$$\mathrm{v}_5 = -t\partial_t + x\partial_u.$$

Аналогично получаем дополнительные операторы

$$\mathrm{v}_5 = (1 - \sigma)t\partial_t + u\partial_u$$

для (2.26), где $\sigma \neq 1$, и

$$\mathrm{v}_5 = -\nu t\partial_t - u\partial_x + x\partial_u$$

для (2.27).

Заметим, что если в (2.26) $\sigma = 1$, то уравнение (2.3) эквивалентно линейному уравнению теплопроводности, которое мы здесь рассматривать не будем.

Подытоживая полученные результаты, приходим к такому утверждению.

Предложение 2.1 ([4, 6]). *В случае произвольного значения функции f в уравнении* (2.3) *его максимальной алгеброй инвариантности является четырехмерная алгебра Ли, базис которой составляют операторы* (2.10). *Основная алгебра инвариантности допускает расширение до пятимерной алгебры инвариантности в таких трех случаях:*

$$f = e^{u_x}: \quad \mathrm{v}_5 = -t\partial_t + x\partial_u;$$
$$f = u_x^{n-1}, \ \ n \geqslant 0, \ \ n \neq 1: \quad \mathrm{v}_5 = (1 - n)t\partial_t + u\partial_u;$$
$$f = \frac{e^{n \arctan u_x}}{1 + u_x^2}, \ \ n \geqslant 0: \quad \mathrm{v}_5 = -nt\partial_t - u\partial_x + x\partial_u.$$

Заметим, что наличие в уравнении (2.3) конечномерной группы преобразований $\mathcal{E}_c$ дает возможность использовать для построения спецификаций функции f инфинитезимальный критерий инвариантности. Поскольку $f = f(u_x)$, то речь идет об инвариантах группы $\mathcal{E}_c$ в пространстве $\langle u_x, f \rangle$. В связи с этим перепишем инфинитезимальные операторы, которые генерируют группу $\mathcal{E}_c$, так, чтобы было учтено и действие соответствующих преобразований на дифференциальную переменную u_x. Имеем операторы:

$$\tilde{E}_1 = \partial_t, \quad \tilde{E}_2 = \partial_x, \quad \tilde{E}_3 = \partial_u, \quad \tilde{E}_4 = t\partial_t - f\partial_f,$$
$$\tilde{E}_5 = x\partial_x + 2f\partial_f - u_x\partial_{u_x}, \quad \tilde{E}_6 = u\partial_x - u_x^2\partial_{u_x} + 2u_x f\partial_f,$$
$$\tilde{E}_7 = x\partial_u + \partial_{u_x}, \quad \tilde{E}_8 = u\partial_u + u_x\partial_{u_x}.$$

Далее, поскольку действие операторов

$$\mathrm{v}_1 = \tilde{E}_1, \quad \mathrm{v}_2 = \tilde{E}_2, \quad \mathrm{v}_3 = 2\tilde{E}_4 + \tilde{E}_5 + \tilde{E}_8, \quad \mathrm{v}_4 = \tilde{E}_3$$

является нулевым в пространстве $\langle u_x, f\rangle$ (они составляют базис основной алгебры инвариантности уравнения (2.3)), то дальнейшему анализу подлежат операторы $\tilde{E}_5$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$. Положив

$$e_1 = \tilde{E}_5 - \tilde{E}_8, \quad e_2 = \tilde{E}_7, \quad e_3 = \tilde{E}_6, \quad e_4 = \tilde{E}_5 + \tilde{E}_8,$$

видим, что имеют место такие коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3,$$
$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_i, e_4] = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

то есть операторы e_i $(i = 1, \ldots, 4)$ составляют базис алгебры $sl(2,\mathbb{R}) \oplus \langle e_4\rangle$, $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$.

Поскольку пространство $\langle u_x, f\rangle$ двухмерное, то для построения инвариантов нам достаточно взять перечень одномерных подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R}) \oplus \langle e_4\rangle$. Используя результаты классификации одномерных подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R})$, находим, что оптимальную систему одномерных подалгебр алгебры $sl(2,\mathbb{R}) \oplus \langle e_4\rangle$ составляют такие алгебры:

$$\langle e_4\rangle, \quad \langle e_1 + ke_4\rangle, \quad \langle e_2 + ke_4\rangle, \quad \langle e_2 - e_3 + ke_4\rangle \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Алгебра $\langle e_4\rangle$ не удовлетворяет необходимому условию (1.136), для остальных же алгебр получаем такие первые интегралы:

$$\langle e_1 + ke_4\rangle : \quad f|u_x|^{1+k} = C,$$
$$\langle e_2 + ke_4\rangle : \quad fe^{-2ku_x} = C,$$
$$\langle e_2 - e_3 + ke_4\rangle : \quad f(1 + u_x^2)\exp(-2k\arctan u_x) = C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Отсюда следует, что нужно рассматривать такие случаи значений функции f:

$$f = C|u_x|^{-(1+k)};$$
$$f = Ce^{2ku_x};$$
$$f = C\frac{\exp(-2k\arctan u_x)}{1 + u_x^2}, \quad C \neq 0,$$

которые с точностью до эквивалентности и обозначений постоянных совпадают с теми, которые были получены в результате анализа классифицирующего соотношения.

Подведем итог. Как видно из проведенных выше соображений, выполнение алгоритма метода Ли–Овсянникова групповой классификации дифференциальных уравнений заключается в осуществлении таких шагов:

- используя стандартный метод Ли, находим основную группу симметрии исследуемого уравнения, определяющую систему и классифицирующее соотношение;
- осуществляем построение группы преобразований эквивалентности $\mathcal{E}$ исследуемого уравнения;
- используя преобразования из группы $\mathcal{E}$, проводим анализ классифицирующего соотношения и находим возможные спецификации произвольного элемента, который входит в исследуемое уравнение;
- для каждого из полученных значений произвольного элемента решаем определяющую систему и исследуем возможности расширения основной группы симметрии данного уравнения.

Отметим, что, как было показано выше, вместо третьего шага алгоритма можно для построения спецификаций произвольного элемента применять и инфинитезимальный критерий инвариантности, используя оптимальную систему подгрупп группы $\mathcal{E}_c$.

Следовательно, метод Ли–Овсянникова групповой классификации дифференциальных уравнений является эффективным в тех случаях, когда удается осуществить полный анализ классифицирующего соотношения или построить оптимальную систему подгрупп группы преобразований $\mathcal{E}_c$.

Возвращаясь к приведенному выше перечню уравнений вида (2.1), для которых была полностью решена задача групповой классификации, отметим, что для всех них классифицирующие соотношения являются системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а группы $\mathcal{E}_c$ — конечнопараметрическими группами преобразований. Например, для уравнения

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u), \quad g \neq 0, \tag{2.28}$$

выполнение первого шага алгоритма метода Ли–Овсянникова показывает, что группа инвариантности этого уравнения генерируется инфинитезимальным оператором

$$\mathrm{v} = a(t)\partial_t + b(t,x)\partial_x + c(t,x,u)\partial_u,$$

где функции a, b, c, f, g удовлетворяют определяющей системе уравнений

$$(2b_x - \dot a)f = cf', \quad c_t + (c_u - \dot a)g - c_{xx}f = cg',$$
$$-b_t + fb_{xx} - 2(fc_x)_u = 0, \quad f'(c_u + 2b_x - \dot a) - (fc)_{uu} = 0,$$

которая является системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций f и g.

Покажем, что первое из приведенных уравнений системы приводит к классифицирующему соотношению для функции f. Продифференцируем его по u:

$$(2b_x - \dot a)f' = c_u f' + cf'',$$

тогда из четвертого уравнения системы следует равенство

$$fc_{uu} = 0.$$

Поскольку в исследуемом уравнении $f \neq 0$, то $c_{uu} = 0$.

Учитывая это и различая случаи $f' = 0$ ($f = \mathrm{const}$) и $f' \neq 0$, из первого уравнения системы получаем равенство

$$(2b_x - \dot a)(f(f')^{-1})_{uu} = 0,$$

поэтому классифицирующим условием для функции f является уравнение

$$(f(f')^{-1})_{uu} = 0,$$

из которого с точностью до эквивалентности получаем еще такие два значения функции f, которые следует рассмотреть в дальнейшем: $f = e^u$ и $f = |u|^k$ ($k \neq 0$).

С другой стороны, группа $\mathcal{E}_c$ уравнения (2.28) является шестипараметрической группой преобразований и среди операторов, которые ее генерируют, ненулевое действие в пространстве $\langle u, f\rangle$ имеют операторы

$$E_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u, \quad E_2 = \partial_u, \quad E_3 = \frac{1}{2}x\partial_x + f\partial_f,$$

составляющие базис алгебры Ли $A_{2.2}\oplus A_1$. Используя известную классификацию одномерных подалгебр этой алгебры, получаем, что к значениям, отличным от произвольного значения функции f, приводят такие подалгебры:

$$\langle E_2 + E_3\rangle: \quad f = Ce^u,$$
$$\langle E_1\rangle: \quad f = C,$$
$$\langle E_1 + kE_3\rangle: \quad f = C|u|^k \quad (k \neq 0),$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Очевидно, что с точностью до эквивалентности полученные значения функции f совпадают с приведенными выше. Анализ значений функции g проводится аналогично.

Иная ситуация возникает, когда задача групповой классификации рассматривается для дифференциального уравнения, которое содержит произвольные функции двух и больше аргументов. Рассмотрим, например, случай линейного уравнения второго порядка гиперболического типа:

$$u_{tx} + A(t,x)u_t + B(t,x)u_x + C(t,x)u = 0, \tag{2.29}$$

где $u = u(t,x)$. Выполнение первого шага алгоритма метода Ли–Овсянникова показывает, что группа инвариантности уравнения (2.29) генерируется инфинитезимальным оператором

$$\mathrm{v} = f(t)\partial_t + g(x)\partial_x + h(t,x)u\partial_u, \tag{2.30}$$

в котором функции f, g, h удовлетворяют равенствам

$$h_t + B\dot f + fB_t + gB_x = 0, \quad h_x + Ag' + gA_x + fA_t = 0,$$
$$h_{tx} + C\dot f + fC_t + Cg' + gC_x + Ah_t + Bh_x = 0, \tag{2.31}$$

где $\dot f = \dfrac{df(t)}{dt}$, $g' = \dfrac{dg(x)}{dx}$ (мы исключаем из рассмотрения тривиальную бесконечномерную симметрию с оператором $X = \omega(t,x)\partial_u$, где ω является произвольным решением уравнения (2.29)).

Очевидной является невозможность прямого анализа системы (2.31).

Далее, прямые вычисления показали, что группу эквивалентности $\mathcal{E}$ уравнения (2.29) формируют два следующих класса преобразований:

$$(a) \quad \tau = \alpha(t), \quad \xi = \beta(x), \quad v = \theta(t,x)u + \rho(t,x),$$
$$(b) \quad \tau = \alpha(x), \quad \xi = \beta(x), \quad v = \theta(t,x)u + \rho(t,x), \tag{2.32}$$

где α, β — произвольные гладкие функции своих аргументов, а функции θ, ρ удовлетворяют условию

$$\rho\theta_{tx} + \theta_t\rho_x + \theta_x\rho_t - 2\rho\theta^{-1}\theta_t\theta_x - \theta\rho_{tx} + \\ + A[\theta_t\rho - \theta\rho_t] + B[\theta_x\rho - \theta\rho_x] - C\theta\rho = 0.$$

Кроме того, вследствие невырожденности преобразований (2.32) $\theta \neq 0$, производные от функций α и β не равны нулю.

Мы видим, что для уравнения (2.29) группа эквивалентности $\mathcal{E}$ является бесконечнопараметрической и вопрос об описании ее подгрупп остается открытым.

Следовательно, прямое применение метода Ли–Овсянникова не дает возможности провести полную групповую классификацию уравнения (2.29). Необходимо ввести в рассмотрение некоторые дополнительные условия.

Действительно, Л.В. Овсянников осуществил групповую классификацию уравнения (2.29), используя инварианты Лапласа [48] (см. также [46]):

$$h = A_t + AB - C, \quad k = B_x + AB - C,$$

взяв в качестве классифицирующего соотношения их отношения. Основной полученный им классификационный результат такой.

Предложение 2.2 ([48]). *Уравнение* (2.29) *допускает алгебру инвариантности размерности высшей, чем* 2*, тогда и только тогда, когда функции*

$$p = \frac{k}{h}, \quad q = \frac{1}{h}(\ln h)_{xy}$$

являются постоянными величинами. В этом случае уравнение (2.29) *эквивалентно уравнению Эйлера–Пуассона*

$$u_{tx} - \frac{2u_t}{q(t+x)} - \frac{2pu_x}{q(t+x)} + \frac{4pu}{q^2(t+x)^2} = 0,$$

если $q \neq 0$*, или уравнению*

$$u_{tx} + tu_t + pxu_x + ptxu = 0,$$

если $q = 0$.

Нетривиальные алгебры инвариантности этих уравнений являются четырехмерными.

Заметим, что при групповой классификации уравнения (2.29) из рассмотрения были исключены случаи тех уравнений, которые имеют нетривиальные бесконечномерные симметрии и интегрируются в общем виде. Примером таких уравнений является уравнение

$$u_{tx} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u = \varphi(t) + \psi(x),$$

где φ и ψ — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Очевидно, что невозможность непосредственного использования метода Ли–Овсянникова для групповой классификации дифференциальных уравнений, которые содержат произвольные функции двух и больше переменных, существенно сужает классы уравнений, которые подлежат такому исследованию.

В работах [25, 187] нами был предложен новый подход к проведению групповой классификации дифференциальных уравнений, который позволил существенно расширить множество уравнений, для которых эту задачу удается решить полностью. На алгоритме нового метода и одном примере его применения мы и останавливаемся в следующем пункте параграфа.

2.1.3. Новый подход к решению задачи групповой классификации

Предложенный в [25, 187] новый подход к групповой классификации дифференциальных уравнений является, собственно говоря, синтезом метода Ли–Овсянникова, результатов классификации абстрактных конечномерных действительных алгебр Ли и техники использования преобразований эквивалентности. Он базируется на следующих известных положениях группового анализа дифференциальных уравнений и теории абстрактных алгебр Ли:

- Если дифференциальное уравнение имеет нетривиальную симметрию, то оно инвариантно относительно некоторой конечномерной алгебры Ли инфинитезимальных операторов, тип которой полностью определяется структурными константами.
- В результате действия преобразований из группы $\mathcal{E}$ данное уравнение переходит в эквивалентное ему уравнение, а его алгебра

инвариантности — в подобную ей (изоморфную) алгебру Ли операторов симметрии. При этом, вследствие сохранения общего вида эквивалентных уравнений, базисные операторы обеих алгебр инвариантности также принадлежат определенному классу инфинитезимальных операторов.

- Известной является классификация всех неизоморфных действительных алгебр Ли до размерности 6 включительно [12, 42–45, 91, 179, 180]. Это дает возможность в заданном классе операторов с точностью до эквивалентности, которую определяет некоторая группа преобразований, изучить все возможные реализации этих алгебр Ли, а потом проверить, могут ли они быть алгебрами инвариантности уравнений заданного класса.

Исходя из сказанного выше, для групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.1) мы будем использовать подход, который состоит в выполнении такого алгоритма:

I) На первом шаге, с использованием инфинитезимального метода Ли, находим систему определяющих уравнений для инфинитезимального оператора, генерирующего группу симметрии исследуемого уравнения. Определяющие уравнения, которые явным образом зависят от произвольных функций и их производных, мы называем классифицирующими. Интегрируя те из определяющих уравнений, которые не зависят от произвольных функций, получаем наиболее общий вид инфинитезимального оператора, который допускается исследуемым уравнением. Также, используя прямой или инфинитезимальный метод, строим группу эквивалентности $\mathcal{E}$ данного уравнения.

II) На втором шаге, продвигаясь поэтапно, мы проводим групповую классификацию исследуемых уравнений, которые допускают алгебры инвариантности невысоких размерностей (например, не выше чем 3). Для этого мы предварительно строим реализации одно-, двух- и трехмерных алгебр Ли в классе найденных на первом шаге инфинитезимальных операторов с точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы $\mathcal{E}$. Подставляя значения функций в полученных базисных операторах реализаций в классифицирующие уравнения, мы находим соответствующие значения произвольных функций в соответствующих инвариантных уравнениях. При этом мы исключаем те из реализаций, которые не могут быть алгебрами инвариантности уравнений исследуемого вида. Тем самым мы остаемся именно в пределах задачи групповой классификации дифференциальных уравнений заданного вида. Постепенное повышение размерности алгебр инвариантности приводит к уменьшению степени произвольности функций, которые входят в дифференциальные уравнения исследуемого вида.

III) Третий шаг предусматривает завершение групповой классификации данного уравнения. Для этого мы используем как классические методы (если произвольные функции в уравнениях уже являются функциями одного аргумента), так и дальнейшее расширение уже известных реализаций алгебр Ли до реализаций алгебр Ли высших размерностей, которые могут быть алгебрами инвариантности уравнений исследуемого вида.

Результатом групповой классификации должен быть перечень неэквивалентных уравнений исследуемого вида с приведенными максимальными алгебрами инвариантности этих уравнений.

Поэтому задача групповой классификации считается решенной полностью, если доказано, что:

1) построенные алгебры Ли операторов симметрии являются максимальными алгебрами инвариантности полученных уравнений;

2) в рамках сформулированной задачи полученный перечень уравнений содержит только неэквивалентные уравнения (то есть такие уравнения, которые не переводятся друг в друга преобразованиями из группы $\mathcal{E}$).

Для построения максимальной алгебры инвариантности достаточно использовать инфинитезимальный метод Ли. Проверке же на эквивалентность подлежат те из уравнений, максимальные алгебры инвариантности которых являются изоморфными. При этом, чтобы показать, что полученные уравнения являются неэквивалентными, достаточно убедиться, что не существуют преобразования из группы $\mathcal{E}$, которые переводят одну алгебру инвариантности в другую. Прежде чем перейти к групповой классификации уравнений вида (2.1), рассмотрим групповую классификацию уравнения (2.29) и убедимся, что использование предложенного метода приводит к уже известному результату.

Как было показано выше, группу инвариантности уравнения (2.29) генерируют инфинитезимальные операторы вида (2.30). Также, вследствие линейности, уравнение (2.29) допускает оператор $u\partial_u$

и при этом имеет место коммутационное соотношение

$$[\mathrm{v}, u\partial_u] = 0$$

для произвольного оператора v вида (2.30). Следовательно, операторы v (2.30) и $u\partial_u$ составляют базис двухмерной абелевой алгебры Ли $A_{2.1}$. Поэтому для уравнения (2.29) выполнение второго шага алгоритма начинаем с построения реализаций именно алгебры $A_{2.1}$.

Предложение 2.3. *Пусть алгеброй инвариантности уравнения* (2.29) *является алгебра Ли операторов симметрии, изоморфная алгебре* $A_{2.1}$. *Тогда с точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования* (2.32) *из группы* $\mathcal{E}$, *существуют две реализации алгебры* $A_{2.1}$, *которые являются максимальными алгебрами инвариантности уравнений вида* (2.29):

$$A^1_{2.1} = \langle u\partial_u, \partial_t \rangle,$$
$$A^2_{2.1} = \langle u\partial_u, \partial_t + \partial_x \rangle.$$

Соответствующие инвариантные уравнения имеют такой вид:

$$A^1_{2.1}: \quad u_{tx} + B(x)u_x + u = 0; \tag{2.33}$$
$$A^2_{2.1}: \quad u_{tx} + B(z)u_x + C(z)u = 0, \quad z = t - x, \quad |B| + |C| \neq 0. \tag{2.34}$$

Напомним, что здесь мы не учитываем тривиальную бесконечномерную симметрию уравнения (2.29) и исключаем из рассмотрения те уравнения, которые интегрируются в общем виде.

Доказательство. Прежде всего убедимся, что в операторе v вида (2.30) хотя бы одна из функций f или g является ненулевой. Действительно, если $f = g = 0$, то классифицирующая система (2.31) сводится к системе

$$h_t = h_x = h_{tx} = 0,$$

из которой следует, что $h = c = \mathrm{const}$, и оператор $\mathrm{v} = cu\partial_u$ является линейно зависимым с оператором $u\partial_u$.

Следовательно, хотя бы одна из функций (f или g) в операторе v является ненулевой. При этом, с точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы $\mathcal{E}$, можем всегда считать,

что $f \neq 0$. Действительно, если в (2.30) $f = 0$, то $g \neq 0$, и замена переменных $t \to x$, $x \to t$ показывает справедливость предположения.

Пусть теперь в операторе v $f \neq 0$, $g = 0$, то есть

$$\mathrm{v} = f(t)\partial_t + h(t,x)u\partial_u.$$

Замена переменных (2.32а), где функция α является решением уравнения $\dot\alpha = f^{-1}$, функция θ — ненулевым решением уравнения $f\theta_t + h\theta = 0$, $\rho = \rho(x)$, преобразует оператор v в оператор

$$\tilde{\mathrm{v}} = \partial_\tau.$$

Возвратившись к начальным обозначениям переменных, приходим к реализации $A^1_{2.1}$.

Пусть, далее, $f \cdot g \neq 0$. Тогда замена переменных (2.32а), где α является решением уравнения $\dot\alpha f = 1$, g — решением уравнения $\beta' g = 1$, θ — ненулевым решением уравнения

$$f\theta_t + g\theta_x + h\theta = 0,$$

а ρ — решением уравнения

$$f\rho_t + g\rho_x = 0,$$

преобразует оператор v в оператор $\tilde{\mathrm{v}} = \partial_\tau + \partial_\xi$.

Возвратившись к начальным обозначениям переменных, приходим к реализации $A^2_{3.1}$.

Неэквивалентность полученных реализаций следует из того, что преобразование оператора $\partial_t + \partial_x$ в оператор ∂_τ требует в (2.32а) $\dot\alpha = 0$. А это противоречит условию невырожденности замены переменных (2.32).

Переходим к построению соответствующих инвариантных уравнений. Для оператора ∂_t определяющая система (2.31) приобретает вид

$$A_t = 0, \quad B_t = 0, \quad C_t = 0,$$

то есть в инвариантном уравнении $A = A(x)$, $B = B(x)$, $C = C(x)$.

Далее, замена переменных (2.32а), где $\alpha = t$, $\theta = \exp(\int A(x)dx)$, β — произвольная функция такая, что $\beta' \neq 0$, если $C = AB$, или $\beta = \int (C - AB)dx$, если $C \neq AB$, сводит инвариантное уравнение к уравнению

$$v_{\tau\xi} + B(\xi)v_\xi + \epsilon v = 0, \quad \epsilon = 0, 1,$$

не меняя вид базисных операторов алгебры $A^1_{2.1}$.

Если $\epsilon = 0$, то уравнение

$$u_{tx} + B(x)u_x = 0$$

имеет общее решение

$$u = \int \varphi(x)e^{-tB(x)}dx + \psi(t),$$

где φ, ψ — произвольные гладкие функции своих аргументов. Это уравнение мы исключаем из рассмотрения.

Следовательно, с точностью до обозначений независимых и зависимой переменных получаем уравнение (2.33).

Аналогично, рассматривая реализацию $A^2_{2.1}$, приходим к уравнению (2.34).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что в случае произвольных значений функций в уравнениях (2.33), (2.34) реализации $A^1_{2.1}$, $A^2_{2.1}$ являются их максимальными алгебрами инвариантности. ■

Проведенная предварительная групповая классификация уравнения (2.29) позволяет, для дальнейшего анализа возможностей расширения симметрии исследуемого класса уравнений, использовать и стандартные методы.

Так, для уравнения (2.33) определяющая система (2.31) приобретает вид

$$h_t + B\dot{f} + gB_x = 0, \quad B = B(x), \quad h_x = 0, \quad \dot{f} + g' = 0.$$

Из двух последних уравнений системы следует, что $h = h(t)$, $f = \lambda t + \lambda_1$, $g = -\lambda x + \lambda_2$, где λ, λ_1, λ_2 — произвольные действительные постоянные.

Вследствие этого первое уравнение системы приобретает вид

$$\dot{h} = (\lambda x - \lambda_2)B_x - \lambda B.$$

Поскольку правая часть последнего равенства зависит только от x, а левая — только от t, то

$$h = \lambda_3 t + \lambda_4,$$

а функция $B = B(x)$ удовлетворяет равенству:

$$(\lambda x - \lambda_2)B_x - \lambda B = \lambda_3,$$

откуда следует, что

$$B = mx + m_1, \quad \lambda_3 = -m\lambda_2 - \lambda m_1, \quad m, m_1 \in \mathbb{R}.$$

Далее непосредственно убеждаемся, что замена переменных

$$t \to t, \quad x \to x, \quad u = e^{-m_1 t}v, \quad v = v(t, x),$$

позволяет положить в B и λ_3 $m_1 = 0$. Следовательно, получили уравнение

$$u_{tx} + mxu_x + u = 0, \quad m \in \mathbb{R},$$

максимальной алгеброй инвариантности которого является четырехмерная алгебра Ли операторов симметрии

$$\langle u\partial_u, \partial_t, t\partial_t - x\partial_x, \partial_x - mtu\partial_u\rangle.$$

Нетрудно убедиться, что полученная алгебра инвариантности изоморфна алгебре $A_{4.8}$ $(q = 0)$.

Для уравнения (2.34) определяющая система (2.31) приобретает вид

$$\begin{aligned} &h_t + B\dot{f} + B'(f - g) = 0, \quad C(\dot{f} + g') + C'(f - g) = 0, \\ &h = h(t), \quad B' = \frac{dB}{dz}, \quad C' = \frac{dC}{dz}, \quad z = t - x. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Поскольку ее непосредственный анализ вызывает значительные трудности, мы провели рассмотрение возможностей расширения реализации $A^2_{2.1}$ к реализациям разрешимых алгебр Ли размерности 3 в классе операторов (2.30).

Вследствие выполнения коммутационного соотношения

$$[u\partial_u, \mathrm{v}] = 0,$$

где v имеет вид (2.30), анализу подлежат случаи алгебр $A_{3.1}$, $A_{3.2}$, $A_{3.3}$.

Непосредственные вычисления показали, что для алгебры $A_{3.1}$ имеет место такая реализация:

$$\langle \partial_t + \partial_x, u\partial_u, \sigma(z)u\partial_u\rangle, \quad \sigma' \neq 0, \quad z = t - x.$$

Но в этом случае проверка классифицирующих уравнений (2.35) приводит к равенству $\sigma' = 0$, которое противоречит условию существования этой реализации.

Для алгебры $A_{3.2}$ мы получили только две реализации, рассмотрение которых привело к неизвестным еще случаям:

$$\langle \partial_t + \partial_x, -t\partial_t - x\partial_x, u\partial_u \rangle, \quad \langle \partial_t + \partial_x, e^t\varphi(z)u\partial_u, u\partial_u \rangle.$$

Непосредственная проверка показала, что вторая реализация не удовлетворяет условиям поставленной задачи.

Для первой же реализации анализ системы (2.35) приводит к уравнениям

$$zB' + B = 0, \quad zC' + 2C = 0,$$

откуда следует, что

$$B = \frac{m}{z}, \quad C = \frac{k}{z^2}, \quad z = t - x, \quad m, k \in \mathbb{R}, \quad |m| + |k| \neq 0.$$

Анализ реализаций алгебры $A_{3.3}$ к новым случаям не привел.

Следовательно, существует одна реализация разрешимой трехмерной алгебры Ли

$$\langle \partial_t + \partial_x, -t\partial_t - x\partial_x, u\partial_u \rangle,$$

которая удовлетворяет условиям сформулированной задачи и инвариантное уравнение для которой имеет вид

$$u_{tx} + \frac{m}{z}u_x + \frac{k}{z^2}u = 0, \quad m, k \in \mathbb{R}, \quad |m| + |k| \neq 0, \quad z = t - x.$$

Подставив значение функций B и C в определяющую систему (2.35), находим максимальную алгебру инвариантности полученного уравнения. Имеем систему:

$$\begin{aligned}
&z^2h_t + m[z\dot{f} - f + g] = 0, \quad h = h(t),\\
&k[z(\dot{f} + g') - 2f + 2g] = 0, \quad z = t - x,\\
&m, k \in \mathbb{R}, \quad |m| + |k| \neq 0.
\end{aligned}$$

Продифференцировав первое уравнение трижды, а второе — дважды по переменной x, приходим к равенствам

$$mg''' = 0, \quad kzg''' = 0,$$

откуда следует, что функция g является квадратным трехчленом переменной x:

$$g = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3.$$

Подставив полученное значение g в систему и проведя ее расщепление по степеням x, приходим к таким равенствам:

$$\begin{aligned}
&h_t + \lambda_1 m = 0, \quad -2th_t + m[\lambda_2 - \dot{f}] = 0,\\
&t^2h_t + m[t\dot{f} - f + \lambda_3] = 0, \quad k[2\lambda_1 t - \dot{f} + \lambda_2] = 0,\\
&k[t\dot{f} - 2f + \lambda_2 t + 2\lambda_3] = 0.
\end{aligned}$$

Проведя их анализ, получаем, что

$$\begin{aligned}
&f = \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t + \lambda_3, \quad g = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3,\\
&h = -\lambda_1 mt + \lambda_4,
\end{aligned}$$

то есть максимальной алгеброй инвариантности исследуемого уравнения является четырехмерная алгебра Ли с базисными операторами

$$\langle u\partial_u, \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x - mtu\partial_u \rangle.$$

Непосредственная проверка показала, что эта алгебра является изоморфной алгебре $sl(2, \mathbb{R}) \oplus \langle u\partial_u \rangle$.

Отсюда следует неэквивалентность полученных результатов.

Остается убедиться, что не существуют уравнения исследуемого вида, которые бы допускали алгебры инвариантности, изоморфные алгебрам Ли с нетривиальным фактором Леви.

Для этого нам достаточно провести рассмотрение реализаций алгебр $so(3)$ и $sl(2, \mathbb{R})$ в классе операторов (2.30). При этом один из базисных операторов можем сразу положить равным ∂_t или $\partial_t + \partial_x$.

Случай алгебры $so(3) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Алгебра $so(3)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Положив оператор e_1 равным ∂_t, а операторы

$$\begin{aligned}
&e_2 = a(t)\partial_t + b(x)\partial_x + c(t, x)u\partial_u,\\
&e_3 = k(t)\partial_t + m(x)\partial_x + r(t, x)u\partial_u,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

видим, что из выполнения первых двух коммутационных соотношений следуют равенства:

$$\dot a = k, \quad c_t = r, \quad m = 0, \quad \dot k = -a, \quad r_t = -c, \quad b = 0,$$

а из выполнения третьего коммутационного соотношения —

$$a\dot k - k\dot a = 1, \quad ar_t - kc_t = 0.$$

Но условие совместимости уравнений для определения функций a и k имеет вид $a^2+k^2 = -1$. Отсюда следует, что в этом случае реализации алгебры $so(3)$ не существует.

Пусть теперь $e_1 = \partial_t + \partial_x$, а операторы e_2, e_3 имеют вид (2.36). Тогда из выполнения коммутационных соотношений, которые определяют алгебру $so(3)$, получаем такие уравнения для определения функций a, b, k, m:

$$\dot a = k, \quad \dot k = -a, \quad a\dot k - k\dot a = 1,$$
$$b' = m, \quad m' = -b, \quad bm' - mb' = 1.$$

Но поскольку условием их совместимости являются равенства

$$-(a^2 + k^2) = 1, \quad -(m^2 + b^2) = 1,$$

то и в этом случае не существуют реализации алгебры $so(3)$.

Случай алгебры $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Алгебра $sl(2,\mathbb{R})$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Поэтому, положив $e_1 = \partial_t$, а операторы e_2, e_3 равными операторам (2.36), из выполнения первых двух коммутационных соотношений получаем, что

$$e_2 = me^{2t}\partial_t + \varphi(x)e^{2t}u\partial_u, \quad e_3 = ne^{-2t}\partial_t + \psi(x)e^{2t}u\partial_u,$$

где $m, n \in \mathbb{R}$.

Проверка третьего коммутационного соотношения приводит к равенствам

$$-4mn = 1, \quad m\psi + n\varphi = 0.$$

Не уменьшая общности рассуждений, можем положить $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$, $\varphi = \psi$:

$$e_2 = \frac{1}{2}e^{2t}\partial_t + e^{2t}\varphi(x)u\partial_u, \quad e_3 = -\frac{1}{2}e^{-2t}\partial_t + e^{2t}\varphi(x)u\partial_u.$$

Получили реализацию алгебры $sl(2,\mathbb{R})$. Проверим, может ли она быть алгеброй инвариантности исследуемого уравнения. Подстановка соответствующих значений функций f, g, h для каждого из полученных операторов в определяющую систему (2.31) приводит к условиям

$$B = B(x), \quad A = A(x), \quad C = C(x),$$
$$2\varphi + B = 0, \quad \varphi' = 0, \quad -2\varphi + B = 0,$$
$$2\varphi' + C + 2A\varphi + B\varphi' = 0, \quad -2\varphi' + C - 2A\varphi + B\varphi' = 0,$$

откуда следует, что $B = C = \varphi = 0$, а инвариантное уравнение имеет вид

$$u_{tx} + A(x)u_t = 0$$

и заменой переменных

$$t \to t, \quad x \to x, \quad v \to \varphi(x)u,$$

где $\varphi = e^{-\int A(x)dx}$, сводится к тривиальному уравнению

$$v_{tx} = 0,$$

которое легко интегрируется и поэтому здесь не рассматривается.

Пусть, наконец, $e_1 = \partial_t + \partial_x$, а операторы e_2, e_3 имеют вид (2.36). Тогда, проведя аналогичные рассуждения, приходим к единственной реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$, которая эквивалентна полученной выше.

Следовательно, кроме уже полученного, не существуют уравнения исследуемого вида, алгебры инвариантности которых были бы изоморфными алгебрам Ли с нетривиальным фактором Леви.

Также нетрудно убедиться в том, что не существуют и отличные от уже полученного уравнения, алгебры инвариантности которых были бы изоморфными разрешимым алгебрам Ли размерности выше трех. Это следует из наличия у разрешимой алгебры так называемого "композиционного ряда", что дает возможность изучать реализации разрешимых алгебр, двигаясь от размерности 1 к размерности 2, от размерности 2 к размерности 3 и т.д. И если оказывается, что для разрешимых алгебр Ли определенной размерности не существуют реализации, то, априори, они не будут существовать и для разрешимых алгебр Ли высших размерностей.

Следовательно, из проведенных выше рассуждений следует такой результат.

Предложение 2.4. *Уравнение вида* (2.29) *допускает алгебру инвариантности размерности выше двух тогда, когда оно эквивалентно уравнению*

$$u_{tx} + mxu_x + u = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$$

или уравнению

$$u_{tx} + \frac{m}{z}u_x + \frac{k}{z^2}u = 0, \quad z = t - x, \quad k, m \in \mathbb{R}, \quad |k| + |m| \neq 0,$$

алгебрами инвариантности которых являются, соответственно, такие четырехмерные алгебры Ли операторов симметрии:

$$\langle \partial_t, t\partial_t - x\partial_x, \partial_x - mtu\partial_u, u\partial_u \rangle \quad (m \in \mathbb{R});$$
$$\langle u\partial_u, \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x - mtu\partial_u \rangle \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Убедимся, что полученный в предложении 2.4 результат совпадает с классификационным результатом Л.В. Овсянникова.

Действительно, первое из приведенных в предложении 2.4 уравнений заменой переменных

$$\overline{t} = -t, \quad \overline{x} = x, \quad v = e^{tx}u$$

сводится к уравнению

$$v_{\overline{t}\overline{x}} + \overline{t}v_{\overline{t}} + (1-m)\overline{x}v_{\overline{x}} + (1-m)\overline{t}\overline{x}v = 0,$$

которое с точностью до обозначения переменных и постоянной ($1 - m = p$) совпадает со вторым уравнением из предложения 2.2.

Положив во втором уравнении из предложения 2.4 $k = \frac{2}{q}$, $m = \frac{2(1-p)}{q}$, видим, что замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = -x, \quad v = z^{\frac{2}{q}}u, \quad z = t - x$$

сводит его к уравнению

$$v_{\overline{t}\overline{x}} - \frac{2v_{\overline{t}}}{q(\overline{t} + \overline{x})} - \frac{2pv_{\overline{x}}}{q(\overline{t} + \overline{x})} + \frac{4pv}{q^2(\overline{t} + \overline{x})} = 0,$$

которое является уравнением Эйлера–Пуассона.

Следовательно, использование нового подхода привело к известному результату.

Заметим, что из рассмотренных выше примеров следует такое основное отличие предлагаемого метода от классического метода Ли–Овсянникова. Если в классическом методе на первом месте всегда находятся спецификации функций, от которых приходят к соответствующим им алгебрам Ли операторов симметрии, то в предложенном нами подходе решающую роль в групповой классификации уравнения играют именно алгебры Ли операторов симметрии (реализации алгебр Ли), которые и определяют соответствующие спецификации произвольных функций в исследуемом уравнении.

На этом мы заканчиваем знакомство с методами групповой классификации дифференциальных уравнений и переходим к решению задачи групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.1).

Для лучшего понимания классического метода групповой классификации дифференциальных уравнений мы предлагаем читателю для самостоятельной работы такие задачи.

Задание 2.1. Провести групповую классификацию нелинейного уравнения диффузии с переменными коэффициентами

$$f(x)u_t = (g(x)D(u)u_x)_x - k(u)u_x, \quad f(x) \cdot g(x) \neq 0.$$

Заметим, что эта задача рассматривалась в [109], где показано, что существенными для рассмотрения являются только два случая: $f(x)g(x) = 1$ или $f(x)g(x) \neq 1$.

Задание 2.2. Провести групповую классификацию уравнения

$$f(u)u_t = (g(u)u_x)_x + (g(u)(u_y - 1))_y - h(u),$$

которое используется в моделях движения грунтовых вод.

Отметим, что здесь $u = u(t, x, y)$, и поэтому нужно рассматривать класс операторов

$$v = \tau(t, x, y, u)\partial_t + \xi^1(t, x, y, u)\partial_x + \xi^2(t, x, y, u)\partial_y + \eta(t, x, y, u)\partial_u$$

и для построения продолженных операторов воспользоваться формулами (1.59), (1.62). Сравнить полученный результат групповой классификации с результатом [95].

Задание 2.3. Провести групповую классификацию волновых уравнений (здесь $u = u(t, x)$):

$u_{tt} = \lambda u_{xx} + g(u, u_x)$ [164];

$u_{tt} = f(u_x)u_{xx}$ [175];

$u_{tt} = [f(u)u_x + g(x, u]_x$ [176].

Отметим, что для волновых уравнений в отдельных случаях удается провести полную групповую классификацию стандартными методами и тогда, когда уравнения содержат произвольные функции двух переменных.

2.2. Групповая классификация уравнений теплопроводности с нелинейным источником

Во втором параграфе мы рассматриваем задачу групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.1), где $f = 1$, $g = F(t,x,u,u_x)$ — гладкая функция своих аргументов, которая является нелинейной хотя бы по одной из переменных u или u_x.

2.2.1. Операторы симметрии и группа эквивалентности уравнения

Итак, рассматривается задача групповой классификации нелинейных уравнений вида

$$u_t = u_{xx} + F(t,x,u,u_x), \quad u = u(t,x). \tag{2.37}$$

На первом шаге групповой классификации уравнения (2.37) найдем вид инфинитезимальных операторов группы симметрии данного уравнения и построим его группу эквивалентности.

В соответствии с известным алгоритмом Ли [46, 55] наиболее общий вид инфинитезимальных операторов ищем в классе операторов

$$Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u, \tag{2.38}$$

где $\tau = \tau(t,x,u)$, $\xi = \xi(t,x,u)$, $\eta = \eta(t,x,u)$ — произвольные действительные гладкие функции, которые определены в пространстве $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^1$ независимых $\mathbb{R}^2 = \langle t,x\rangle$ и зависимой $\mathbb{R}^1 = \langle u\rangle$ переменных. Условие инвариантности уравнения (2.37) относительно оператора Q (2.38) имеет вид

$$\varphi^t - \varphi^{xx} - \tau F_t - \xi F_x - \eta F_u - \varphi^x F_{u_x}\big|_{(2.37)} = 0. \tag{2.39}$$

Выполнив соответствующие преобразования и вычисления, из (2.39) получаем, что в (2.38) $\tau = 2a(t)$, $\xi = \dot a(t)x + b(t)$, $\eta = \eta(t,x,u)$, где $a(t)$, $b(t)$ — произвольные гладкие функции, $\dot a(t) = \dfrac{da}{dt}$. При этом функции a, b, η и F из (2.37) связаны соотношением

$$\begin{aligned}\eta_t - u_x(\ddot a x + \dot b) + (\eta_u - 2\dot a)F = \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_x^2\eta_{uu} +\\ + 2aF_t + (\dot a x + b)F_x + \eta F_u + \eta_x F_{u_x} + u_x(\eta_u - \dot a)F_{u_x}.\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место следующее предложение.

Предложение 2.5. *Группа симметрии уравнения* (2.37) *генерируется инфинитезимальными операторами вида*

$$Q = 2a(t)\partial_t + (\dot a(t)x + b(t))\partial_x + f(t,x,u)\partial_u, \tag{2.40}$$

где функции a, b, f, F удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned}f_t - u_x(\ddot a x + \dot b) + (f_u - 2\dot a)F = f_{xx} + 2u_x f_{xu} + u_x^2 f_{uu} +\\ + 2aF_t + (\dot a x + b)F_x + fF_u + f_x F_{u_x} + u_x(f_u - \dot a)F_{u_x}.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Нетрудно убедиться в том, что когда на функцию F не наложено никаких дополнительных условий, кроме ее гладкости по аргументам, то оператор Q является нулевым. То есть в общем случае уравнение (2.37) не допускает локальных преобразований. Равенство (2.41) в дальнейшем мы называем классифицирующим уравнением. Очевидно, что прямой анализ уравнения (2.41) невозможен, и, исходя из него, мы не можем получить полный перечень спецификаций функций F в уравнении (2.37).

При построении группы эквивалентности $\mathcal{E}$ уравнения (2.37) можно идти разными путями. Мы остановимся сначала на инфинитезимальном методе, который дает возможность достаточно просто найти непрерывную подгруппу $\mathcal{E}_c$ группы $\mathcal{E}$.

Будем искать инфинитезимальный оператор

$$E = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \mu\partial_F,$$

генерирующий группу $\mathcal{E}_c$, в соответствии с условием инвариантности уравнения (2.37) относительно группы $\mathcal{E}_c$, которая здесь записывается в виде системы

$$u_t = u_{xx} + F, \quad F_{u_t} = 0. \tag{2.42}$$

В (2.42) u, F рассматриваются как дифференциальные переменные: u — в пространстве $\langle t,x\rangle$, F — в пространстве $\langle t,x,u,u_t,u_x\rangle$. Координаты τ, ξ, η оператора E ищутся как функции переменных t, x, u, а координата μ — как функция переменных t, x, u, u_t, u_x, F. Инфинитезимальный критерий инвариантности системы (2.42) имеет вид

$$\varphi^t - \varphi^{xx} - \mu\big|_{(2.42)} = 0, \tag{2.43}$$

$$\mu^{u_t}\big|_{(2.42)} = 0. \tag{2.44}$$

С учетом того, что функции τ, ξ, η не зависят от F, уравнение (2.44) приобретает вид

$$\mu_{u_t} - F_{u_x}\varphi^x_{u_t} = 0.$$

Поскольку здесь F — дифференциальная переменная (так что F, F_{u_x} являются алгебраически независимыми), то последнее уравнение приводит к $\mu = \mu(t, x, u, u_x, F)$ и уравнению

$$\varphi^x_{u_t} = 0. \tag{2.45}$$

Поскольку

$$\varphi^x = \eta_x + u_x\eta_u - u_t\tau_x - u_x u_t\tau_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u,$$

то, учитывая (2.45), приходим к $\tau_x = \tau_u = 0$, а поэтому $\tau = \tau(t)$. Следовательно, из уравнения (2.44) следует, что $\mu = \mu(t, x, u, u_x, F)$, $\tau = \tau(t)$. Подставив полученные значения τ, μ в (2.43) и проведя соответствующие преобразования, приходим к такому результату:

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \frac{1}{2}\dot\tau x + \rho(t), \quad \eta = \eta(t, x, u),$$

$$\mu = \eta_t - \eta_{xx} + F(\eta_u + \dot\tau) - u_x(\frac{1}{2}\ddot\tau x + \dot\rho) - 2u_x\eta_{xu} - u_x^2\eta_{uu}$$

или

$$E = \tau(t)\partial_t + \left[\frac{1}{2}\dot\tau x + \rho(t)\right]\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u + [\eta_t - \eta_{xx} +$$
$$+ (\eta_u + \dot\tau)F - u_x(\frac{1}{2}\ddot\tau x + \dot\rho) - 2u_x\eta_{xu} - u_x^2\eta_{uu}]\partial_F. \tag{2.46}$$

Из (2.46) следует, что $\mathcal{E}_c$ является бесконечномерной группой преобразований.

Поскольку задача классификации оптимальной системы подгрупп бесконечномерных групп, вообще говоря, остается открытой, то отсутствует возможность использования оптимальных систем подгрупп найденной группы $\mathcal{E}_c$ для получения спецификаций функции F в уравнении (2.37).

Рассмотрим теперь прямой метод построения группы эквивалентности уравнения (2.37) и найдем группу $\mathcal{E}$ уравнения (2.37).

Пусть преобразования

$$\tau = \alpha(t, x, u,), \quad \xi = \beta(t, x, u,), \quad v = \gamma(t, x, u,) \tag{2.47}$$

являются невырожденной заменой переменных в пространстве V, которая преобразует уравнение (2.37) в уравнение

$$v_\tau = v_{\xi\xi} + G(\tau, \xi, v, v_\xi). \tag{2.48}$$

В соответствии с общим правилом замены переменных

$$u_x = \frac{v_\tau\alpha_x + v_\xi\beta_x - \gamma_x}{\gamma_u - v_\tau\alpha_u - v_\xi\beta_u},$$

но из (2.48), вследствие произвольности функции G, следует, что должно быть

$$u_x \to g(\tau, \xi, v, v_\xi),$$

то есть в (2.47) обязательно $\alpha_x = \alpha_u = 0$ или $\alpha = \alpha(t)$, $\dot\alpha \neq 0$. Тогда замене переменных (2.48), где $\alpha = \alpha(t)$, $\dot\alpha \neq 0$, соответствует

$$u_t = v_\tau\dot\alpha(\gamma_u - v_\xi\beta_u)^{-1} + \theta_1(\tau, \xi, v, v_\xi),$$
$$u_{xx} = v_{\xi\xi}\{\beta_x^2(\gamma_u - v_\xi\beta_u)^{-1} + 2\beta_x\beta_u(v_\xi\beta_x - \gamma_x)(\gamma_u - v_\xi\beta_u)^{-2} +$$
$$+ \beta_u^2(v_\xi\beta_x - \gamma_x)^2(\gamma_u - v_\xi\beta_u)^{-3}\} + \theta_2(\tau, \xi, v, v_\xi),$$

где θ_1, θ_2 — некоторые известные функции своих аргументов.

Учитывая вид уравнения (2.48), приходим к равенству

$$\dot\alpha(\gamma_u - v_\xi\beta_u)^2 = \beta_x^2(\gamma_u - v_\xi\beta_u)^2 +$$
$$+ 2\beta_x\beta_u(v_\xi\beta_x - \gamma_x)(\gamma_u - v_\xi\beta_u) + \beta_u^2(v_\xi\beta_x - \gamma_x)^2.$$

Поскольку α, γ, β не зависят от u_x (а потому и соответствующие выражения в новых переменных от v_ξ), то, проведя расщепление последнего равенства по степеням v_ξ, получаем такую определяющую систему для функций α, β, γ:

$$(\dot\alpha - \beta_x^2)\gamma_u^2 = \gamma_x\beta_u(\gamma_x\beta_u - 2\beta_x\gamma_u),$$
$$-2(\dot\alpha - \beta_x^2)\gamma_u\beta_u = 2\beta_x^2\gamma_u\beta_u, \quad \dot\alpha\beta_u^2 = 0.$$

Поскольку $\dot\alpha \neq 0$, то из последнего уравнения системы следует, что $\beta_u = 0$, и система сводится к уравнению

$$(\dot\alpha - \beta_x^2)\gamma_u^2 = 0.$$

Вследствие невырожденности замены переменных (2.47) $\gamma_u \neq 0$, а поэтому $\dot\alpha = \beta_x^2$. Отсюда получаем, что $\dot\alpha > 0$, а $\beta = \pm\sqrt{\dot\alpha}x + \rho(t)$. Приходим к такому результату.

Предложение 2.6. *Группу эквивалентности $\mathcal{E}$ уравнения* (2.37) *составляют преобразования*

$$\overline{t} = T(t), \quad \overline{x} = \varepsilon\sqrt{\dot{T}(t)}x + X(t), \quad \overline{u} = U(t,x,u), \tag{2.49}$$

где $\dot{T}(t) > 0$, $U_u \neq 0$, $\dot{T} = \frac{d}{dt}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Очевидно, что преобразования (2.49) получаются из преобразований непрерывной группы $\mathcal{E}_c$, которая генерируется оператором (2.46), если последнюю дополнить дискретным преобразованием $x \to -x$.

2.2.2. Предварительная групповая классификация уравнения (2.37)

В данном пункте, в соответствии со вторым шагом алгоритма метода, мы проводим предварительную групповую классификацию уравнений (2.37), которые допускают алгебры инвариантности размерностей до 3 включительно. Классификацию мы проводим, двигаясь от одномерных алгебр Ли к двухмерным, а затем — от двухмерных к трехмерным алгебрам Ли операторов симметрии.

Инвариантность уравнения (2.37) **относительно одномерных алгебр Ли операторов симметрии.** Как было показано выше, инфинитезимальные операторы, которые составляют базис алгебры инвариантности уравнения (2.37), имеют вид (2.40). Для упрощения их вида можем использовать замены переменных (2.49), которые сохраняют инвариантным вид уравнения (2.37).

Теорема 2.1. *Существуют преобразования* (2.49) *из группы $\mathcal{E}$, которые сводят оператор* (2.40) *к одному из таких операторов:*

$$Q = \pm\partial_t, \tag{2.50}$$
$$Q = \partial_x, \tag{2.51}$$
$$Q = \partial_u. \tag{2.52}$$

Доказательство. Пусть Q имеет вид (2.40). Тогда, осуществив замену переменных (2.49), приходим к оператору

$$Q \to \tilde{Q} = 2a\dot{T}\partial_{\overline{t}} + \left[2a\left(\dot{X} + \frac{1}{2}x\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}\right) + \varepsilon(\dot{a}x + b)\sqrt{\dot{T}}\right]\partial_{\overline{x}} + \\ + [2aU_t + (\dot{a}x + b)U_x + fU_u]\partial_{\overline{u}}.$$

Учитывая, что оператор Q не может быть нулевым оператором, рассматриваем случаи $f = 0$ или $f \neq 0$.

Случай $f = 0$. В этом случае в (2.49) полагаем $U = U(u)$, а поэтому

$$\tilde{Q} = 2a\dot{T}\partial_{\overline{t}} + \left[2a\left(\dot{X} + \frac{1}{2}x\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}\right) + \varepsilon(\dot{a}x + b)\sqrt{\dot{T}}\right]\partial_{\overline{x}}.$$

Если $a = 0$, то $b \neq 0$, и, положив в (2.49) T равным решению уравнения $\dot{T} = |b|^{-2}$, приходим к оператору

$$\tilde{Q} = \pm\partial_{\overline{x}}.$$

С точностью до эквивалентности, которую определяет замена (2.49), можем считать, что

$$\tilde{Q} = \partial_{\overline{x}}.$$

Если же $a \neq 0$, то, положив в (2.49) $\varepsilon = 1$, T равным решению уравнения $\dot{T} = \frac{1}{2|a|}$, X равным решению уравнения

$$2a\dot{X} + b\sqrt{\dot{T}} = 0,$$

приходим к оператору

$$\tilde{Q} = \pm\partial_{\overline{t}}.$$

Случай $f \neq 0$. Если $a = b = 0$, то, положив в (2.49) функцию U равной решению уравнения

$$fU_u = 1,$$

приходим к оператору

$$\tilde{Q} = \partial_{\overline{u}}.$$

Если же $|a| + |b| \neq 0$, то, положив в (2.49) функцию U равной решению уравнения

$$2aU_t + (\dot{a}x + b)U_x + fU_u = 0, \quad U_u \neq 0,$$

приходим к уже рассмотренному случаю.

Нетрудно убедиться, что полученные операторы нельзя свести один в другой преобразованиями (2.49) из группы $\mathcal{E}$ уравнения (2.37). ■

Из доказанной теоремы выводится следствие, которое содержит первый классификационный результат для нелинейных уравнений вида (2.1).

Следствие 2.1. *Если нелинейное уравнение вида* (2.37) *допускает одномерную алгебру инвариантности* A_1, *то с точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы* $\mathcal{E}$, *оно совпадает с одним из таких трех уравнений:*

$$u_t = u_{xx} + F(x, u, u_x), \tag{2.53}$$

$$u_t = u_{xx} + F(t, u, u_x), \tag{2.54}$$

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u_x). \tag{2.55}$$

Алгебры инвариантности этих уравнений, соответственно, имеют вид

$$A_1^1 = \langle \partial_t \rangle, \quad A_1^2 = \langle \partial_x \rangle, \quad A_1^3 = \langle \partial_u \rangle.$$

Доказательство. Предположим, что уравнение (2.37) допускает одномерную алгебру инвариантности. Тогда базисный оператор этой алгебры имеет вид (2.40) и, в соответствии с результатами теоремы 2.1, приводится преобразованиями из группы $\mathcal{E}$ к одному из операторов (2.50)–(2.52). Классифицирующее уравнение (2.41) для оператора (2.50) приобретает вид

$$\pm F_t = 0,$$

откуда следует, что $F = F(x, u, u_x)$, то есть соответствующее инвариантное уравнение имеет вид (2.53). Для уравнения (2.53) классифицирующее уравнение (2.41) имеет вид

$$f_t - u_x(\ddot{a}x + \dot{b}) + (f_u - 2\dot{a})F = f_{xx} + 2u_x f_{xu} + u_x^2 f_{uu} + \\ + (\dot{a}x + b)F_x + fF_u + f_x F_{u_x} + u_x(f_u - \dot{a})F_{u_x}.$$

Если F является произвольной функцией своих аргументов, то имеют место равенства

$$f_t = f_{xx}, \quad \ddot{a}x + \dot{b} = -2f_{xu}, \quad f_{uu} = 0,$$
$$f = 0, \quad f_x = 0, \quad f_u - \dot{a} = f_u - 2\dot{a} = 0, \quad \dot{a}x + b = 0.$$

Отсюда следует, что в операторе (2.40) $f = \dot{a} = b = 0$, то есть

$$Q = \lambda_1 \partial_t, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.53) является одномерная алгебра Ли операторов симметрии A_1^1.

Аналогично проводится и рассмотрение операторов (2.51) и (2.52), которое приводит к уравнениям (2.54), (2.55) с максимальными алгебрами инвариантности A_1^2, A_1^3 соответственно.

Неэквивалентность полученных уравнений следует из неэквивалентности их алгебр инвариантности. ■

Инвариантность уравнения (2.37) **относительно двухмерных алгебр Ли операторов симметрии.** Как было отмечено выше, среди двухмерных действительных алгебр Ли $A_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ различают две алгебры:

$$A_{2.1}: \ [e_1, e_2] = 0; \quad A_{2.2}: \ [e_1, e_2] = e_2.$$

Для изучения их реализаций в классе операторов (2.40) мы можем использовать результаты теоремы 2.1 и следствие из нее, сразу положив один из базисных операторов этих алгебр равным базисному оператору одной из реализаций A_1^i $(i = 1, 2, 3)$. При этом для упрощения вида второго базисного оператора мы можем использовать преобразования

$$A_1^1: \ \bar{t} = t + \lambda_1, \quad \bar{x} = \varepsilon x + \lambda_2, \quad \bar{u} = U(x, u),$$
$$A_1^2: \ \bar{t} = t + \lambda_1, \quad \bar{x} = x + X(t), \quad \bar{u} = U(t, u),$$
$$A_1^3: \ \bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = \varepsilon\sqrt{\dot{T}}x + X(t), \quad \bar{u} = u + U(t, x), \tag{2.56}$$

которые оставляют вид базисных операторов алгебр A_1^i $(i = 1, 2, 3)$ неизменным.

Лемма 2.1. *С точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы* $\mathcal{E}$, *реализации алгебры* $A_{2.1}$ *исчерпываются такими алгебрами Ли инфинитезимальных операторов:*

$$\langle \partial_t, \partial_x \rangle, \quad \langle \partial_t, \partial_u \rangle, \quad \langle \partial_x, \alpha(t)\partial_x + \partial_u \rangle,$$
$$\langle \partial_u, g(t, x)\partial_u \rangle \quad (g \neq \mathrm{const}), \quad \langle \partial_x, \alpha(t)\partial_x \rangle \quad (\dot{\alpha} \neq 0).$$

Доказательство. Для построения реализаций алгебры $A_{2.1}$, вследствие того, что эта алгебра является абелевой алгеброй Ли, достаточно провести расширения реализаций одномерных алгебр Ли еще одним оператором вида (2.40).

Пусть $e_1 = \partial_t$, а оператор e_2 имеет вид (2.40). Проверив выполнение коммутационного соотношения, которое определяет алгебру $A_{2.1}$, видим, что

$$e_2 = \lambda\partial_x + f(x,u)\partial_u, \quad \lambda = \text{const}.$$

Если $\lambda = 0$, то $f \neq 0$ и первое из преобразований (2.56), где U является решением уравнения $fU_u = 1$, сводит данную реализацию ко второй реализации из перечисленных в лемме.

Если $\lambda \neq 0$, то первое из преобразований (2.56), где U — решение уравнения

$$\lambda U_x + fU_u = 0, \quad U_u \neq 0,$$

сводит данную реализацию к первой реализации из перечисленных в лемме.

Пусть теперь $e_1 = \partial_x$. Тогда

$$e_2 = \lambda\partial_t + b(t)\partial_x + f(t,u)\partial_u, \quad \lambda = \text{const}.$$

Если $\lambda = f = 0$, то имеет место последняя реализация из перечня реализаций.

Если $\lambda = 0$, $f \neq 0$, то второе из преобразований (2.56), где U — решение уравнения $fU_u = 1$, сводит данную реализацию к третьей реализации из перечня. Если же $\lambda \neq 0$, то второе из преобразований (2.56), где X и U равны решениям уравнений

$$\lambda\dot{X} + b = 0, \quad \lambda U_t + fU_u = 0, \quad U_u \neq 0,$$

приводит данную реализацию к первой реализации из перечисленных.

Пусть, наконец, $e_1 = \partial_u$. Тогда

$$e_2 = 2a(t)\partial_t + (\dot{a}x + b)\partial_x + f(t,x)\partial_u.$$

В этом случае третья замена переменных (2.56) сводит операторы e_1, e_2 к операторам

$$\overline{e}_1 = \partial_{\overline{u}},$$
$$\overline{e}_2 = 2a\dot{T}\partial_{\overline{t}} + \left[2a\left(\varepsilon\frac{\ddot{T}}{2\sqrt{\dot{T}}}x + \dot{X}\right) + \varepsilon\sqrt{\dot{T}}(\dot{a}x + b)\right]\partial_{\overline{x}} + {}$$
$$+ [2aU_t + U_x(\dot{a}x + b) + f]\partial_{\overline{u}}.$$

Если $a = b = 0$, то имеем четвертую реализацию из перечня, где $f \neq \text{const}$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то, положив в замене переменных T, U равными решениям уравнений

$$\sqrt{\dot{T}}|b| = 1, \quad bU_x + f = 0,$$

сводим e_1, e_2 к базисным операторам третьей реализации из перечня.

Если же $a \neq 0$, то, положив T, X, U равными решениям уравнений

$$2|a|\dot{T} = 1, \quad 2a\dot{X} + \varepsilon\sqrt{\dot{T}}b = 0,$$
$$2aU_t + U_x(\dot{a}x + b) + f = 0,$$

сводим операторы e_1, e_2 к виду

$$\overline{e}_1 = \partial_{\overline{u}}, \quad \overline{e}_2 = \pm\partial_{\overline{t}}.$$

То есть с точностью до обозначений приходим ко второй реализации из перечня.

Для завершения доказательства остается только убедиться в неэквивалентности полученных реализаций.

Поскольку все случаи рассматриваются аналогично, ограничимся только случаями первой и второй реализаций из перечня. Пусть $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_x$, $\overline{e}_1 = \partial_{\overline{t}}$, $\overline{e}_2 = \partial_{\overline{u}}$. Предположив, что существуют преобразования (2.49), которые преобразуют оператор e_1 в оператор $E_1 = \alpha\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_2$, оператор e_2 в оператор $E_2 = \gamma\overline{e}_1 + \delta\overline{e}_2$, $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, приходим к равенству $\dot{T} = 0$, которое противоречит условию невырожденности группы преобразований $\mathcal{E}$. Следовательно, первая и вторая реализации из перечня являются неэквивалентными. ■

Лемма 2.2. *С точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы $\mathcal{E}$, реализации алгебры $A_{2.2}$ исчерпываются такими алгебрами Ли инфинитезимальных операторов:*

$$\langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t\rangle, \quad \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x\rangle, \quad \langle -u\partial_u, \partial_u\rangle,$$
$$\langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u\rangle, \quad \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u\rangle \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Доказательство. Как и при построении реализаций алгебры $A_{2.1}$, мы и здесь сразу полагаем один из базисных операторов (оператор e_2) равным одному из базисных операторов алгебр A_1^i $(i = 1, 2, 3)$.

Пусть $e_2 = \partial_t$. Тогда из выполнения коммутационного соотношения $[e_1, e_2] = e_2$ следует, что

$$e_1 = (-t + 2\lambda)\partial_t + \left(-\frac{1}{2}x + \delta\right)\partial_x + f(x,u)\partial_u, \quad \lambda, \delta = \mathrm{const}.$$

Использовав первую замену переменных (2.56), где $\lambda_1 = -2\lambda$, $\lambda_2 = -2\delta$, U — решение уравнения

$$fU_u + (\delta - \frac{1}{2}x)U_x = 0, \quad U_u \neq 0,$$

приходим к первой реализации из перечня.

Если $e_2 = \partial_x$, то

$$e_1 = (-2t + 2C_1)\partial_t + (-x + b(t))\partial_x + f(t,u)\partial_u, \quad C_1 = \mathrm{const}.$$

Вторая замена переменных (2.56), где $\lambda_1 = -C_1$, X, U — решения, соответственно, уравнений

$$2(C_1 - t)\dot{X} + b(t) + X = 0,$$
$$2(C_1 - t)U_t + fU_u = 0, \quad U_u \neq 0,$$

сводит операторы e_1, e_2 к операторам

$$\overline{e}_1 = -2\overline{t}\partial_{\overline{t}} - \overline{x}\partial_{\overline{x}}, \quad e_2 = \partial_{\overline{x}}.$$

Следовательно, с точностью до обозначения переменных пришли ко второй реализации из перечня.

Пусть, наконец, $e_2 = \partial_u$. Тогда

$$e_1 = 2a\partial_t + (\dot{a}x + b)\partial_x + (-u + f(t,x))\partial_u.$$

Если $a = b = 0$, то, положив в третьей замене переменных (2.56) $U = -f$, приводим операторы e_1, e_2 к операторам

$$\overline{e}_1 = -\overline{u}\partial_{\overline{u}}, \quad \overline{e}_2 = \partial_{\overline{u}}.$$

Пришли к третьей реализации из перечня.

Если $a = 0$, то существует замена, которая сводит операторы e_1, e_2 к операторам, которые составляют базис четвертой реализации. Если же $a \neq 0$, то аналогично приходим к пятой реализации из перечня.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что полученные реализации являются неэквивалентными. ■

Используя результаты лемм 2.1 и 2.2, приходим ко второму классификационному результату для исследуемого класса уравнений (2.37). Далее мы используем такие обозначения:

$$A^1_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_x \rangle;$$
$$A^2_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_u \rangle;$$
$$A^3_{2.1} = \langle \partial_x, \alpha(t)\partial_x + \partial_u \rangle;$$
$$A^1_{2.2} = \langle -t\partial_x - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t \rangle;$$
$$A^2_{2.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x \rangle;$$
$$A^3_{2.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u \rangle;$$
$$A^4_{2.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u \rangle \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Теорема 2.2. *Нелинейные уравнения вида* (2.37)*, которые допускают двухмерные алгебры инвариантности, с точностью до эквивалентности исчерпываются такими уравнениями:*

$$A^1_{2.1}: \quad u_t = u_{xx} + \tilde{F}(u, u_x);$$
$$A^2_{2.1}: \quad u_t = u_{xx} + \tilde{F}(x, u_x);$$
$$A^3_{2.1}: \quad u_t = u_{xx} - \dot{\alpha}uu_x + \tilde{F}(t, u_x), \quad \alpha = \alpha(t);$$
$$A^1_{2.2}: \quad u_t = u_{xx} + u_x^2\tilde{F}(u, xu_x);$$
$$A^2_{2.2}: \quad u_t = u_{xx} + t^{-1}\tilde{F}(u, tu_x^2);$$
$$A^3_{2.2}: \quad u_t = u_{xx} + u_x\tilde{F}(t, e^x u_x);$$
$$A^4_{2.2}: \quad u_t = u_{xx} + u_x\tilde{F}(x, e^{\epsilon t}u_x), \quad \epsilon = \pm 1.$$

Первой в каждой строчке перечня указана одна из семи реализаций двухмерных алгебр Ли, которые для произвольных значений функций $\tilde{F}$ являются максимальными алгебрами инвариантности соответствующих уравнений.

Доказательство. Если уравнение вида (2.37) допускает двухмерную алгебру Ли инвариантности, то базис этой алгебры составляют операторы вида (2.40). В соответствии с результатами лемм 2.1 и 2.2, с точностью до эквивалентности, такие алгебры инвариантности принадлежат множеству реализаций алгебр $A_{2.1}$ и $A_{2.2}$, которые получены в упомянутых выше леммах.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно из множества полученных реализаций алгебр $A_{2.1}$, $A_{2.2}$ отобрать те, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37). Для этого нужно указать вид функций F в соответствующих инвариантных уравнениях.

Для первой и второй реализаций из леммы 2.1 (мы их обозначаем, соответственно, $A^1_{2.1}$, $A^2_{2.1}$) вид инвариантных уравнений очевиден:

$$A^1_{2.1}: \quad u_t = u_{xx} + \tilde F(u, u_x);$$

$$A^2_{2.1}: \quad u_t = u_{xx} + \tilde F(x, u_x).$$

Для третьей реализации из леммы 2.1 (реализации $A^3_{2.1}$) проверка классифицирующего соотношения (2.41), с учетом $F = F(t, u, u_x)$, приводит к равенству

$$-\dot\alpha u_x = F_u,$$

откуда следует, что для $A^3_{2.1}$ инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} - \dot\alpha u u_x + \tilde F(t, u_x).$$

Проверка классифицирующего уравнения (2.41) для четвертой реализации алгебры $A_{2.1}$ из леммы 2.1, с учетом $F = F(t, x, u_x)$, приводит к равенству

$$g_t = g_{xx} + g_x F_{u_x}, \quad g = g(t, x).$$

Поскольку $g \ne \text{const}$, то обязательно $g_x \ne 0$, а поэтому

$$F = (g_t - g_{xx}) g_x^{-1} u_x + \tilde F(t, x),$$

откуда следует, что соответствующее инвариантное уравнение является линейным дифференциальным уравнением, и из дальнейшего рассмотрения мы его исключаем.

Наконец, рассмотрение последней из реализаций алгебры $A_{2.1}$ привело к условию

$$\dot\alpha u_x = 0,$$

откуда следует $\dot\alpha = 0$, что противоречит условию существования этой реализации. Следовательно, эта реализация не может быть алгеброй инвариантности уравнений исследуемого вида.

Проведя аналогичный анализ для реализаций алгебры $A_{2.2}$ из леммы 2.2, мы получили, что только третья из них не удовлетворяет условиям сформулированной задачи: соответствующее инвариантное уравнение

$$u_t = u_{xx} + u_x \tilde F(t, x)$$

является линейным.

Остальные же реализации алгебры $A_{2.2}$ (реализации $A^i_{2.2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$) удовлетворяют условиям сформулированной задачи, и соответствующие им инвариантные уравнения имеют вид, который приведен в формулировке теоремы.

Для завершения доказательства теоремы нужно убедиться, что максимальные алгебры инвариантности полученных уравнений совпадают с соответствующими реализациями.

Рассмотрим подробно случай $A^3_{2.1}$-инвариантного уравнения.

Здесь $F = -\dot\alpha u u_x + \tilde F(t, u_x)$, $\alpha = \alpha(t)$, поэтому классифицируюшее уравнение (2.41) приобретает вид

$$\begin{aligned} &f_t - u_x(\ddot a x + \dot b) + (f_u - 2\dot a)[-\dot\alpha u u_x + \tilde F] = \\ &\quad = f_{xx} + 2u_x f_{ux} + u_x^2 f_{uu} + 2a[-\ddot\alpha u u_x + \tilde F_t] - \\ &\quad - \dot\alpha f u_x - \dot\alpha u f_x + f_x \tilde F_{u_x} - \dot\alpha u u_x (f_u - \dot a) + u_x (f_u - \dot a)\tilde F_{u_x}. \end{aligned}$$

В случае произвольного значения функции $\tilde F$ (учитывая, что a, b, f не зависят от u_x) приходим к равенствам

$$a = 0, \quad f_u = 0, \quad f_x = 0, \quad f_t = 0, \quad \dot b = \dot\alpha f,$$

откуда следует, что $a = 0$, $f = \lambda_1 = \text{const}$, $b = \alpha\lambda_1 + \lambda_2$, $\alpha = \alpha(t)$. Следовательно, максимальная алгебра инвариантности рассмотренного уравнения, в случае произвольного значения функции $\tilde F$, является двухмерной алгеброй Ли операторов симметрии, которая с точностью до выбора базиса совпадает с реализацией $A^3_{2.1}$.

Рассмотрение остальных $A_{2.1}$-инвариантных и $A_{2.2}$-инвариантных уравнений приводит к аналогичному результату. ■

Инвариантность уравнения (2.37) **относительно трехмерных алгебр Ли операторов симметрии.** Как было подчеркнуто в первом разделе, трехмерные действительные алгебры Ли $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3, \rangle$ с точностью до изоморфизма исчерпываются двумя простыми алгебрами Ли

$$\begin{aligned} so(3):&\quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2; \\ sl(2, \mathbb{R}):&\quad [e_1, e_3] = -2e_2, \quad [e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3; \end{aligned}$$

двумя разложимыми разрешимыми алгебрами Ли

$$A_{3.1}: \quad [e_i, e_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$A_{3.2}: \quad [e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$$

и семью неразложимыми разрешимыми алгебрами Ли

$$\begin{array}{ll}
A_{3.3}: & [e_2,e_3]=e_1, \quad [e_1,e_2]=[e_1,e_3]=0;\\
A_{3.4}: & [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=e_1+e_2, \quad [e_1,e_2]=0;\\
A_{3.5}: & [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=e_2, \quad [e_1,e_2]=0;\\
A_{3.6}: & [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=-e_2, \quad [e_1,e_2]=0;\\
A_{3.7}: & [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=qe_2, \quad [e_1,e_2]=0, \quad 0<|q|<1;\\
A_{3.8}: & [e_1,e_3]=-e_2, \quad [e_2,e_3]=e_1, \quad [e_1,e_2]=0;\\
A_{3.9}: & [e_1,e_3]=qe_1-e_2, \quad [e_2,e_3]=e_1+qe_2,\\
 & [e_1,e_2]=0, \quad q>0.
\end{array}$$

Классификацию нелинейных уравнений, которые допускают трехмерные алгебры инвариантности, начинаем с рассмотрения реализаций простых алгебр Ли $so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R})$.

Лемма 2.3. *В классе операторов* (2.40) *не существуют реализации алгебры* $so(3)$, *а реализации алгебры* $sl(2,\mathbb{R})$ *с точностью до эквивалентности исчерпываются такими реализациями:*

$$\langle \partial_t, t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t-tx\partial_x\rangle,$$
$$\langle \partial_t, t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t-tx\partial_x+x^2\partial_u\rangle,$$
$$\langle \partial_u, u\partial_u, -u^2\partial_u\rangle.$$

Доказательство. При построении реализаций алгебр $so(3)$ и $sl(2,\mathbb{R})$ мы, исходя из результатов теоремы 2.1 и следствия из нее, сразу же получаем, что один из базисных операторов этих алгебр пробегает множество операторов $\{\partial_t,\partial_x,\partial_u\}$.

Рассмотрим сначала вопрос о существовании реализаций алгебры $so(3)$. Пусть $e_1=\partial_t$, а операторы e_2, e_3 имеют вид (2.40). Проверив выполнение коммутационных соотношений $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_3,e_1]=e_2$, видим, что с точностью до эквивалентности можем положить

$$\begin{aligned}
e_2&=2\alpha\cos t\partial_t+[-\alpha x\sin t+\beta\cos(t+\gamma)]\partial_x+\\
&\quad+\varphi(x,u)\cos[t+\psi(x,u)]\partial_u,\\
e_3&=-2\alpha\sin t\partial_t-[\alpha x\cos t+\beta\sin(t+\gamma)]\partial_x-\\
&\quad-\varphi(x,u)\sin[t+\psi(x,u)]\partial_u,
\end{aligned}$$

где α, β, γ — произвольные действительные постоянные, φ и ψ — произвольные действительные гладкие функции своих аргументов.

Но выполнение третьего коммутационного соотношения $[e_2,e_3]=e_1$ приводит к условию $4\alpha^2=-1$, которое не имеет смысла в действительной области.

Если $e_1=\partial_x$, то аналогичные рассуждения приводят к ошибочному равенству $1=0$.

Наконец, если $e_1=\partial_u$, то, проверив коммутационные соотношения, определяющие алгебру $so(3)$, видим, что

$$e_2=\varphi(t,x)\cos u\partial_u, \quad e_3=-\varphi(t,x)\sin u\partial_u,$$

где $\varphi^2=-1$.

Следовательно, в классе операторов (2.40) не существуют реализации алгебры $so(3)$.

Перейдем теперь к построению реализаций алгебры $sl(2,\mathbb{R})$. Пусть e_2 пробегает множество операторов $\{\partial_t,\partial_x,\partial_u\}$, а операторы e_1, e_3 имеют вид (2.40).

Если $e_2=\partial_t$, то, проверив выполнение коммутационных соотношений, которые определяют алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, видим, что с точностью до эквивалентности можем положить

$$e_1=\lambda_1e^{-t}(2\partial_t-x\partial_x),$$
$$e_3=-\frac{1}{2}\lambda_1^{-1}e^t\partial_t-\frac{1}{4}\lambda_1^{-1}xe^t\partial_x+\epsilon x^2e^t\partial_u,$$

где $\lambda_1\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq 0$, $\epsilon=0,1$.

Далее, замена переменных

$$\overline{t}=\frac{1}{2}\lambda_1^{-1}e^t, \quad \overline{x}=\sqrt{\frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1}}xe^{\frac{1}{2}t}, \quad \overline{u}=\frac{1}{2}|\lambda_1|^{-1}u, \qquad \lambda_1\neq 0,$$

преобразует оператор e_2 в оператор $\overline{t}\partial_{\overline{t}}+\frac{1}{2}\overline{x}\partial_{\overline{x}}$, оператор e_1 — в оператор $\partial_{\overline{t}}$, а оператор e_3 — в оператор $-\overline{t}^2\partial_{\overline{t}}-\overline{t}\overline{x}\partial_{\overline{x}}+\epsilon\overline{x}^2\partial_{\overline{u}}$ $(\epsilon=0,1)$. Следовательно, в зависимости от значений ϵ имеем одну из двух первых приведенных в формулировке реализаций алгебры $sl(2,\mathbb{R})$.

Если $e_2=\partial_x$, то проверка коммутационных соотношений, которые определяют алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, приводит к ошибочному равенству $-2=0$.

Если же $e_2=\partial_u$, то, проверив выполнение коммутационных соотношений, которые определяют алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, видим, что с точностью до эквивалентности можем положить

$$e_1=e^{-u}\partial_u, \quad e_3=-e^u\partial_u.$$

Далее, замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = e^u$$

преобразует оператор e_1 в оператор $\partial_{\overline{u}}$, оператор e_2 — в оператор $\overline{u}\partial_{\overline{u}}$, а оператор e_3 — в оператор $-\overline{u}^2\partial_{\overline{u}}$. Пришли к третьей реализации из приведенных в формулировке леммы. Неэквивалентность полученных реализаций алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ проверяется непосредственно. ■

Теорема 2.3. *Нелинейные уравнения вида* (2.37)*, которые допускают алгебры инвариантности, изоморфные полупростым алгебрам Ли, с точностью до эквивалентности исчерпываются уравнением*

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}G(\omega),$$

где G — произвольная гладкая функция переменной $\omega = 2u - xu_x$. В случае произвольного значения функции G максимальной алгеброй инвариантности уравнения является такая реализация алгебры $sl(2,\mathbb{R})$:

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle.$$

Доказательство. С точностью до изоморфизма среди наиболее низких полупростых действительных алгебр Ли различают две трехмерные алгебры Ли: $so(3)$, $sl(2,\mathbb{R})$.

В соответствии с результатами леммы 2.3 в классе операторов (2.40) реализации алгебры $so(3)$ не существуют, а реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ с точностью до эквивалентности исчерпываются одной из таких реализаций:

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x \rangle,$$

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle,$$

$$\langle \partial_u, u\partial_u, -u^2\partial_u \rangle.$$

Поскольку первые две реализации содержат оператор ∂_t, то в соответствующих им инвариантных уравнениях $F = F(x, u, u_x)$. При этих условиях классифицирующее уравнение (2.41) для оператора $t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x$ приобретает вид

$$-2F = xF_x - u_xF_{u_x},$$

откуда следует, что

$$F = x^{-2}\tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = xu_x. \tag{2.57}$$

Тогда для оператора $-t^2\partial_t - tx\partial_x$ классифицирующее уравнение (2.41) приобретает вид

$$-2\omega = 0,$$

откуда следует, что первая реализация алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ не может быть алгеброй инвариантности уравнений вида (2.37).

Для оператора $-t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u$ классифицирующее уравнение (2.41), где F имеет вид (2.57), такое:

$$2\tilde{F}_\omega + \tilde{F}_u = \omega - 2.$$

Отсюда следует, что в соответствующем инвариантном уравнении

$$F = \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}G(\omega), \quad \omega = 2u - xu_x. \tag{2.58}$$

Наконец, третья реализация алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ содержит оператор ∂_u, поэтому в соответствующем инвариантном уравнении $F = F(t, x, u_x)$. Но требование инвариантности уравнения относительно оператора $u\partial_u$ приводит к равенству

$$F = u_xF_{u_x},$$

откуда следует, что

$$F = u_x\tilde{F}(t, x),$$

то есть соответствующее последней реализации инвариантное уравнение является линейным.

Подводя итоги, видим, что $sl(2,\mathbb{R})$-инвариантные нелинейные уравнения вида (2.37) исчерпываются одним уравнением, которое приведено в формулировке теоремы.

Найдем его максимальную алгебру инвариантности. Для этого подставим значение (2.58) функции F в классифицирующее уравнение (2.41):

$$f_t + x^{-1}f_x - f_{xx} - x^{-1}(2u - \omega)\left(\ddot{a}x + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x\right) -$$
$$- x^{-2}(2u - \omega)^2\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right) + x^{-2}(f_u + 2x^{-1}b)G +$$
$$+ x^{-1}\left[f_x - 2x^{-1}f + x^{-1}(2u - \omega)(f_u + x^{-1}b)\right]G_\omega = 0.$$

Поскольку здесь $a = a(t)$, $b = b(t)$, $f = f(t, x, u)$, $G = G(\omega)$, то для произвольных значений функции G выполнение полученного равенства равносильно выполнению системы уравнений

$$f_t + x^{-1}f_x - f_{xx} = 0, \quad f_{uu} + \frac{1}{4}f_u = 0,$$
$$\ddot{a}x + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x = 0,$$
$$f_u + 2x^{-1}b = 0, \quad f_u + x^{-1}b = 0, \quad f_x - 2x^{-1}f = 0,$$

общее решение которой имеет вид

$$a = -\frac{1}{2}\lambda_1 t^2 + \lambda_2 t + \lambda_3, \quad b = 0, \quad f = 2\lambda_1 x,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные действительные постоянные интегрирования.

Подставив найденные значения функций a, b, f в оператор (2.40), видим, что максимальная алгебра инвариантности рассмотренного уравнения совпадает с соответствующей реализацией алгебры $sl(2, \mathbb{R})$.

Для доказательства теоремы остается убедиться, что полученным уравнением исчерпываются нелинейные уравнения вида (2.37), алгебры инвариантности которых являются полупростыми алгебрами Ли или содержат их как подалгебры. Для этого нам достаточно убедиться, что, кроме известной реализации алгебры $sl(2, \mathbb{R})$, в классе операторов (2.40) не существуют такие реализации полупростых действительных алгебр Ли, которые бы удовлетворяли условиям сформулированной задачи.

В соответствии с известной теоремой Картана [12] любая полупростая действительная алгебра Ли может быть разложена в прямую сумму попарно ортогональных простых алгебр Ли, и это разложение единственно (с точностью до изоморфизма). Хорошо известно, что в теории абстрактных алгебр Ли различают четыре типа классических алгебр Ли над полем действительных чисел:

- тип A_{n-1} $(n > 1)$ содержит четыре действительных формы алгебры $sl(n, \mathbb{C})$: $su(n)$, $sl(n, \mathbb{R})$, $su(p, q)$ $(p + q = n,\ p \geqslant q)$, $su^*(2n)$;
- тип D_n $(n > 1)$ содержит три действительных формы алгебры $so(2n, \mathbb{C})$: $so(2n)$, $so(p, q)$ $(p + q = 2n,\ p \geqslant q)$, $so^*(2n)$;
- тип B_n $(n > 1)$ содержит две действительных формы алгебры $so(2n + 1, \mathbb{C})$: $so(2n + 1)$, $so(p, q)$ $(p + q = 2n + 1,\ p > q)$;

- тип C_n $(n \geqslant 1)$ содержит три действительных формы алгебры $sp(n, \mathbb{C})$: $sp(n)$, $sp(n, \mathbb{R})$, $sp(p, q)$ $(p + q = n,\ p \geqslant q)$;

Как отмечалось выше, среди наиболее низких классических простых алгебр Ли с точностью до изоморфизма различают две алгебры $so(3)$ и $sl(2, \mathbb{R})$. Отсюда следует, что все возможные реализации трехмерных простых алгебр Ли в классе операторов (2.40), которые удовлетворяют условию сформулированной задачи, исчерпываются реализацией алгебры $sl(2, \mathbb{R})$

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle. \tag{2.59}$$

Следующей размерностью классических полупростых алгебр Ли является размерность 6. Различают (с точностью до изоморфизма) четыре шестимерные полупростые алгебры Ли: $so(4)$, $so(3, 1)$, $so(2, 2)$ и $so^*(4)$. Поскольку $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, $so^*(4) \sim so(3) \oplus sl(2, \mathbb{R})$, а алгебра $so(3, 1)$ содержит алгебру $so(3)$ как подалгебру, то вопрос о существовании реализаций шестимерных алгебр Ли остается открытым только для алгебры $so(2, 2)$. Но $so(2, 2) \sim sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$, поэтому, положив $so(2, 2) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \oplus \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \rangle$, где операторы e_1, e_2, e_3 совпадают, соответственно, с базисными операторами реализации (2.59), а операторы $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$ имеют вид (2.40), из выполнения коммутационных соотношений $[e_i, \tilde{e}_j] = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ получаем, что

$$\tilde{e}_j = \lambda_j \partial_u \quad (j = 1, 2, 3),$$

где λ_j — произвольные действительные постоянные. Отсюда следует, что в заданном классе операторов не существуют и реализации алгебры $so(2, 2)$.

К аналогичному результату привело рассмотрение и полупростых классических алгебр Ли, которые имеют размерность 8: $sl(3, \mathbb{R})$, $su(3)$, $su(2, 1)$.

Далее, поскольку $su^*(4) \sim so(5, 1)$, а алгебра $so(5, 1)$ содержит как подалгебру алгебру $so(4)$, то в классе заданных операторов не существует реализаций, отличных от реализации (2.59), алгебры типа A_{n-1} $(n > 1)$ и типа D_n $(n > 1)$.

Не будут иметь реализаций, отличных от (2.59), и алгебры типов B_n $(n > 1)$ и C_n $(n \geqslant 1)$. В самом деле, уже для $n = 2$ алгебры типа B_n содержат как подалгебры алгебры $so(4)$ и $so(3, 1)$. Также имеют место такие соотношения: $sp(2, \mathbb{R}) \sim so(3, 2)$ (подалгеброй $so(3, 2)$ является $so(3, 1)$), $sp(1, 1) \sim so(4, 1)$ (подалгеброй $so(4, 1)$ является $so(3, 1)$), $sp(2) \sim so(5)$ (подалгеброй $so(5)$ является $so(4)$).

Остается рассмотреть случаи исключительных полупростых действительных алгебр Ли, которые принадлежат к одному из пяти типов: G_1, F_4, E_6, E_7, E_8. Поскольку их рассмотрение проводится аналогично, подробно рассмотрим первые два типа этих алгебр.

Тип G_2 содержит компактную действительную форму g_2 и одну некомпактную действительную форму g_2'. Поскольку $g_2 \cap g_2' \sim su(2) \oplus su(2) \sim so(4)$ и алгебра $so(4)$ не имеет реализаций в заданном классе операторов, то в этом классе операторов не имеют реализаций и алгебры g_2 и g_2'.

Тип F_4 содержит компактную действительную форму f_4 и две некомпактные действительные формы f_4', f_4''. Поскольку $f' \cap f_4 \sim sp(3) \oplus su(2)$, $f_4'' \cap f_4 \sim so(9)$, то в заданном классе операторов не имеют реализаций и алгебры этого типа. ■

Теперь перейдем к классификации нелинейных уравнений вида (2.37), алгебрами инвариантности которых являются разрешимые трехмерные действительные алгебры Ли операторов симметрии.

Как было отмечено выше, трехмерные разрешимые действительные алгебры Ли исчерпываются с точностью до изоморфизма двумя разложимыми алгебрами Ли ($A_{3.1}$ и $A_{3.2}$) и семью неразложимыми алгебрами Ли ($A_{3.i}$, $i = 3, 4, \dots, 9$).

Рассмотрение начинаем из построения $A_{3.1}$- и $A_{3.2}$-инвариантных уравнений. Для описания реализаций алгебр $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ ($i = 1, 2$) мы существенно используем результаты лемм 2.1, 2.2 и теоремы 2.2. Так, поскольку $A_{3.1} = 3A_1 = A_{2.1} \oplus A_1$, где $A_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A_1 = \langle e_3\rangle$, то при построении реализаций алгебры $A_{3.1}$ в классе операторов (2.40) мы можем сразу положить, что алгебра $A_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$ совпадает с одной из реализаций $A_{2.1}^i$ ($i = 1, 2, 3$). Для упрощения вида оператора e_3 будем использовать преобразования

$$\bar t = t + \lambda_1, \quad \bar x = x + \lambda_2, \quad \bar u = U(u); \tag{2.60}$$

$$\bar t = t + \lambda_1, \quad \bar x = \epsilon x + \lambda_2, \quad \bar u = u + U(x); \tag{2.61}$$

$$\bar t = t + \lambda_1, \quad \bar x = x + X(t), \quad \bar u = u + U(t), \tag{2.62}$$

которые сохраняют, соответственно, вид базисных операторов реализаций $A_{2.1}^1$, $A_{2.1}^2$, $A_{2.1}^3$ неизменным. В (2.60)–(2.62) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \pm 1$.

Пусть $A_{2.1} = A_{2.1}^1$. Тогда $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_x$, а поэтому $e_3 = f(u)\partial_u$. Учитывая действие преобразования (2.60), получаем реализацию

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_u. \tag{2.63}$$

Пусть теперь $A_{2.1} = A_{2.1}^2$. Тогда $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_u$, а $e_3 = \lambda\partial_x + f(x)\partial_u$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $\lambda = 0$, то имеет место реализация

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = f(x)\partial_u, \quad f' \neq 0. \tag{2.64}$$

Если же $\lambda \neq 0$, то, положив в преобразованиях (2.61) функцию U равной решению уравнения

$$\lambda U_x + f(x) = 0,$$

убеждаемся, что в этом случае операторы e_i ($i = 1, 2, 3$) сводятся к операторам вида (2.63).

Пусть, наконец, $A_{2.1} = A_{2.1}^3$. Тогда $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \alpha(t)\partial_x + \partial_u$, а поэтому

$$e_3 = 2\lambda\partial_t + b(t)\partial_x + f(t)\partial_u,$$

где $2\lambda\dot\alpha = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\lambda \neq 0$, то $\dot\alpha = 0$, и, положив в (2.62) X и U равными решениям, соответственно, уравнений

$$2\lambda\dot X + b = 0, \quad 2\lambda U_t + f = 0,$$

сводим операторы e_i ($i = 1, 2, 3$) к трем операторам вида (2.63). Если же $\lambda = 0$, то имеет место реализация

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = \alpha(t)\partial_x + \partial_u, \quad e_3 = \beta(t)\partial_x + \gamma(t)\partial_u, \tag{2.65}$$

где гладкие функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ принимают значения, которые гарантируют линейную независимость операторов e_1, e_2, e_3.

Следовательно, с точностью до эквивалентности, которая определяется преобразованиями из группы $\mathcal{E}$, имеем три реализации алгебры $A_{3.1}$, которые определяются тройками операторов e_i ($i = 1, 2, 3$) (2.63)–(2.65).

Определим вид уравнений (2.37), которые инвариантны относительно каждой из полученных реализаций алгебры $A_{3.1}$.

В случае реализации (2.63) вид уравнения очевиден:

$$u_t = u_{xx} + G(u_x).$$

Если базисные операторы алгебры $A_{3.1}$ имеют вид (2.64), то $F = \tilde F(x, u_x)$ и условие инвариантности (2.41) для оператора e_3 приобретает вид

$$f'' + f'\tilde F_{u_x} = 0, \quad f' \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde F = -f''(f')^{-1}u_x + G(x),$$

то есть соответствующее инвариантное уравнение линейно.

Пусть, наконец, базисные операторы алгебры $A_{3.1}$ имеют вид (2.65). Тогда $F = -\dot{\alpha}uu_x + \tilde{F}(t, u_x)$ и условие инвариантности (2.41) для оператора e_3 принимает вид

$$\dot{\gamma} = (\dot{\beta} - \gamma\dot{\alpha})u_x,$$

откуда следует, что $\gamma = C_1$, $\beta = \gamma\alpha + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Но тогда $e_3 = C_1(\alpha\partial_x + \partial_u) + C_2\partial_x = C_1e_2 + C_2e_1$, что противоречит условию линейной независимости операторов e_i $(i = 1, 2, 3)$.

Следовательно, подытоживая сказанное выше, убеждаемся, что существует одна реализация алгебры $A_{3.1}$, которая является алгеброй инвариантности нелинейного уравнения вида (2.37). А именно,

$$\langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u\rangle : \quad u_t = u_{xx} + G(u_x).$$

Перейдем теперь к рассмотрению реализаций алгебры $A_{3.2}$. Поскольку $A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1$, где $A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle$, $A_1 = \langle e_3\rangle$, то при описании реализаций алгебры $A_{3.2}$ мы можем сразу полагать, что алгебра $A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle$ совпадает с одной из реализаций $A^i_{2.2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Для упрощения вида оператора e_3 будем использовать преобразования

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = \epsilon x, \quad \bar{u} = U(u); \tag{2.66}$$

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x + \lambda_1\sqrt{|t|}, \quad \bar{u} = U(u); \tag{2.67}$$

$$\bar{t} = t + \lambda_1, \quad \bar{x} = x + X(t), \quad \bar{u} = u + e^{-x}U(t), \tag{2.68}$$

$$\bar{t} = t + \lambda_1, \quad \bar{x} = \epsilon x + \lambda_2, \quad \bar{u} = u + e^{-t}U(x), \tag{2.69}$$

которые сохраняют вид базисных операторов, соответственно, реализаций $A^1_{2.2}$, $A^2_{2.2}$, $A^3_{2.2}$, $A^4_{2.2}$ неизменным. В (2.66)–(2.69) $\epsilon = \pm 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть $A_{2.2} = A^1_{2.2}$. Тогда $e_1 = -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x$, $e_2 = \partial_t$, $e_3 = f(u)\partial_u$, $f \neq 0$. Нетрудно убедиться, что преобразование (2.66), где U — решение уравнения $f \cdot U_u = 1$, сводит данную тройку операторов к операторам (используем начальные обозначения):

$$e_1 = -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \quad e_2 = \partial_t, \quad e_3 = \partial_u. \tag{2.70}$$

Пусть $A_{2.2} = A^2_{2.2}$. В этом случае $e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x$, $e_2 = \partial_x$, $e_3 = \lambda\sqrt{|t|}\partial_x + f(u)\partial_u$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Если $\lambda = 0$, то $f \neq 0$ и аналогично предыдущему случаю приходим к реализации

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_u. \tag{2.71}$$

Если $f = 0$, $\lambda \neq 0$, то имеет место реализация

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \sqrt{|t|}\partial_x. \tag{2.72}$$

А если $\lambda f \neq 0$, то с точностью до действия преобразования (2.67) имеем реализацию

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u. \tag{2.73}$$

Пусть, далее, $A_{2.2} = A^3_{2.2}$. Тогда

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u,$$
$$e_3 = \lambda\partial_t + b(t)\partial_x + e^{-x}f(t)\partial_u, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Если $\lambda = b = 0$, то имеет место реализация

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = e^{-x}f(t)\partial_u, \quad f \neq 0. \tag{2.74}$$

Если $\lambda = 0$, $b \neq 0$, то, положив в (2.68) $U = b^{-1}f$, сводим базисные операторы к операторам (в начальных обозначениях):

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \alpha(t)\partial_x, \quad \dot{\alpha} \neq 0. \tag{2.75}$$

Если же $\lambda b \neq 0$, то аналогично приходим к реализации

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \partial_t. \tag{2.76}$$

Пусть, наконец, $A_{2.2} = A^4_{2.2}$. Тогда

$$e_1 = \epsilon\partial_t - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u,$$
$$e_3 = C_1\partial_t + C_2\partial_x + e^{-\epsilon t}f(x)\partial_u, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

С точностью до действия преобразований (2.69) и выбора базиса приходим к таким реализациям:

$$e_1 = \epsilon\partial_t - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u,$$
$$e_3 = e^{-\epsilon t}f(x)\partial_u, \quad f \neq 0, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{2.77}$$

$$e_1 = \epsilon\partial_t - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \partial_x, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{2.78}$$

$$e_1 = \epsilon\partial_t - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u,$$
$$e_3 = \partial_t + \lambda\partial_x, \quad \lambda > 0, \quad \epsilon = \pm 1. \tag{2.79}$$

Проведем отбор из полученных реализаций алгебры $A_{3.2}$ тех, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37).

Для реализации (2.70) вид инвариантного уравнения очевиден:

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 G(\omega), \quad \omega = x u_x^2.$$

Аналогично, вид уравнения, которое инвариантно относительно алгебры $A_{3.2}$ с базисными операторами (2.71), такой:

$$u_t = u_{xx} + t^{-1} G(\omega), \quad \omega = t u_x^2.$$

Если имеет место реализация (2.72), то в уравнении (2.37) $F = t^{-1}\tilde{F}(u,\, t u_x^2)$, а поэтому условие инвариантности (2.41) для оператора e_3 приобретает вид

$$\frac{\epsilon}{2\sqrt{|t|}} u_x = 0, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Отсюда следует, что данная тройка операторов не может образовывать базис алгебры инвариантности уравнения исследуемого вида.

Если имеет место реализация (2.73), то $F = t^{-1}\tilde{F}(u, t u_x^2)$ и условие (2.41) для оператора e_3 приобретает вид

$$-\frac{\epsilon}{2\sqrt{|t|}} u_x = t^{-1}\tilde{F}_u, \quad \epsilon = 1 \text{ для } t > 0, \quad \epsilon = -1 \text{ для } t < 0,$$

откуда вытекает, что

$$\tilde{F} = -\frac{1}{2}\sqrt{|\omega|}u + G(\omega), \quad \omega = t u_x^2,$$

а поэтому инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2} t^{-1} u \sqrt{|\omega|} + t^{-1} G(\omega), \quad \omega = t u_x^2.$$

Пусть теперь операторы e_i $(i = 1, 2, 3)$ имеют одно из значений (2.74)–(2.76). Тогда $F = u_x \tilde{F}(t, e^x u_x)$ и условие (2.41) для оператора e_3, соответственно, имеет вид одного из таких равенств:

$$\dot{f} = f(1 - \tilde{F} - \omega \tilde{F}_\omega), \quad \omega = e^x u_x,$$
$$-\dot{\alpha} = \alpha\omega\tilde{F}_\omega, \quad \omega = e^x u_x,$$
$$\tilde{F}_t = 0.$$

В соответствии с этим получаем такие значения F в инвариантных уравнениях:

$$F = u_x(\dot{f} f^{-1} - 1) + e^x G(t),$$

$$F = -\dot{\alpha}\alpha^{-1} u_x \ln|\omega| + u_x G(t), \quad \omega = e^x u_x,$$

$$F = u_x G(\omega), \quad \omega = e^x u_x.$$

Нашим требованиям к классификации удовлетворяют второе и третье из этих значений функции F.

Наконец, для троек (1.76)–(2.79) аналогично получаем такие значения функции F в инвариантных уравнениях:

$$F = -(f + f'')(f') u_x + e^{-\epsilon t} G(x),$$

$$F = u_x G(e^{\epsilon t} u_x),$$

$$F = u_x G(\omega), \quad \omega = (u_x)^\lambda e^{\epsilon(\lambda t - x)}, \quad \lambda > 0, \quad G \neq \text{const}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Нашим требованиям к классификации удовлетворяют второе и третье значения функции F.

Результаты классификации уравнений (2.37), которые инвариантны относительно трехмерных разложимых разрешимых действительных алгебр Ли операторов симметрии, представлены в таблице 2.1. Там мы используем такие обозначения:

$$A^1_{3.1} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u \rangle;$$

$$A^1_{3.2} = \langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u \rangle;$$

$$A^2_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u \rangle;$$

$$A^3_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u \rangle;$$

$$A^4_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \alpha(t)\partial_x \rangle \quad (\dot{\alpha} \neq 0);$$

$$A^5_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t \rangle;$$

$$A^6_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle \quad (\epsilon = \pm 1);$$

$$A^7_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_t + \lambda\partial_x \rangle \quad (\lambda > 0, \epsilon = \pm 1).$$

Таблица 2.1

$A_{3.1}$- и $A_{3.2}$-инвариантные уравнения (2.37)

Алгебра	Функция F
$A^1_{3.1}$	$G(u_x)$
$A^1_{3.2}$	$u_x^2 G(\omega), \quad \omega = xu_x$
$A^2_{3.2}$	$t^{-1}G(\omega), \quad \omega = tu_x^2$
$A^3_{3.2}$	$-\frac{1}{2}t^{-1}u\sqrt{\lvert\omega\rvert} + t^{-1}G(\omega), \quad \omega = tu_x^2$
$A^4_{3.2}$	$-\dot\alpha\alpha^{-1}u_x \ln\lvert\omega\rvert + u_x G(t), \quad \dot\alpha \neq 0,\ \omega = e^x u_x$
$A^5_{3.2}$	$u_x G(\omega), \quad \omega = e^x u_x$
$A^6_{3.2}$	$u_x G(\omega), \quad \omega = e^{\epsilon t}u_x, \ \ \epsilon = \pm 1$
$A^7_{3.2}$	$u_x G(\omega), \quad \omega = (u_x)^\lambda e^{\epsilon(\lambda t - x)}, \ \ \lambda > 0, \ \ \epsilon = \pm 1$

Непосредственное использование алгоритма Ли показало, что для произвольных значений функций G в полученных уравнениях соответствующие реализации алгебр $A_{3.1}$ и $A_{3.2}$ являются максимальными алгебрами инвариантности этих уравнений.

Для завершения групповой классификации $A_{3.1}$- и $A_{3.2}$-инвариантных уравнений необходимо убедиться, что значения функций F из таблицы 2.1 определяют неэквивалентные $A_{3.2}$-инвариантные уравнения исследуемого вида. Для этого нам достаточно убедиться в неэквивалентности их алгебр инвариантности.

Поскольку доказательство этого факта предусматривает выполнение значительного объема стандартных вычислений, здесь ограничимся рассмотрением только реализаций $A^2_{3.2}$ и $A^3_{3.2}$.

Пусть

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u;$$
$$\tilde e_1 = -2\overline{t}\partial_{\overline{t}} - \overline{x}\partial_{\overline{x}}, \quad \tilde e_2 = \partial_{\overline{x}}, \quad \tilde e_3 = \partial_{\overline{u}}.$$

Предположим, что реализации $A^2_{3.2}$ и $A^3_{3.2}$ являются эквивалентными. Тогда должны существовать такие преобразования вида (2.49), которые преобразуют реализацию $A^3_{3.2} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ в реализацию $A^2_{3.2} = \langle \tilde e_1, \tilde e_2, \tilde e_3\rangle$:

$$e_i \overset{(2.49)}{\rightarrow} E_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\tilde e_j \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.80}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $\det\|\alpha_{ij}\| \neq 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Выполнение (2.80) приводит к таким равенствам:

$$t\dot T = \alpha_{11}T,$$
$$2t\left(\frac{\epsilon}{2}\ddot T(\dot T)^{-\frac{1}{2}}x + \dot X\right) - \epsilon x\sqrt{\dot T} = -\epsilon\alpha_{11}\sqrt{\dot T}x - \alpha_{11}X + \alpha_{12},$$
$$2tU_t - xU_x = \alpha_{13}, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \epsilon\sqrt{\dot T} = \alpha_{22},$$
$$U_x = \alpha_{23}, \quad \alpha_{31} = 0, \quad \epsilon\sqrt{|t|}\sqrt{\dot T} = \alpha_{32},$$
$$\sqrt{|t|}U_x + U_u = \alpha_{33}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Учитывая, что $\epsilon\sqrt{\dot T} = \alpha_{22} \neq 0$ (в противном случае преобразования будут вырожденными), приходим к равенству $\sqrt{|t|}\alpha_{22} = \alpha_{32}$, из которого следует, что $\alpha_{22} = \alpha_{32} = 0$. Полученное противоречие показывает, что наше предположение ошибочно. Следовательно, реализации $A^2_{3.2}$ и $A^3_{3.2}$ являются неэквивалентными.

Далее проводим классификацию нелинейных уравнений вида (2.37), алгебрами инвариантности которых являются неразложимые трехмерные разрешимые алгебры Ли $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, где $i = 3, 4, \ldots, 9$.

Структура алгебры $A_{3.3}$ такая, что операторы e_1, e_2 составляют базис алгебры Ли $A_{2.1}$. В соответствии с результатами теоремы 2.2 алгебра $A_{2.1}$ имеет три неэквивалентные реализации, которые являются максимальными алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37).

Поэтому при рассмотрении реализаций алгебры $A_{3.3}$ можем сразу положить, что операторы e_1, e_2 составляют базис одной из реализаций $A^i_{2.1}$ $(i = 1, 2, 3)$. Для упрощения вида оператора e_3 используем преобразование (2.60), (2.61), (2.62) соответственно.

Пусть операторы e_1, e_2 составляют базис реализации $A^1_{2.1}$. Тогда если $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_x$, то проверка коммутационных соотношений

$$[e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1 \tag{2.81}$$

показывает, что в классе операторов (2.40) не существует оператор e_3, который бы дополнял операторы e_1, e_2 до базиса алгебры $A_{3.3}$.

Если $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_t$, то из выполнения коммутационных соотношений (2.81) следует, что

$$e_3 = (t + \lambda)\partial_x + f(u)\partial_u, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться, что существуют преобразования (2.60), которые сводят оператор e_3 к виду (оставляем начальные обозначения переменных)

$$e_3 = t\partial_x + \epsilon\partial_u, \quad \epsilon = 0, 1. \tag{2.82}$$

Наиболее общий вид уравнения (2.37), которое инвариантно относительно алгебры $A^1_{2.1}$, такой:

$$u_t = u_{xx} + \tilde{F}(u, u_x). \tag{2.83}$$

Поэтому условие инвариантности уравнения (2.37) относительно найденной реализации алгебры $A_{3.3}$ совпадает с условием (2.41) инвариантности уравнения (2.83) относительно оператора (2.82):

$$-u_x = \epsilon\tilde{F}_u.$$

Отсюда следует, что в (2.82) обязательно $\epsilon = 1$, а в (2.83)

$$\tilde{F} = -uu_x + G(u_x).$$

Рассмотрение случаев, когда операторы e_1, e_2 составляют базис реализаций $A^2_{2.1}$, $A^3_{2.1}$, проводится аналогично. Мы получили еще четыре неэквивалентные реализации, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37):

$$\langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x \rangle: \quad u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + G(u_x), \quad \lambda > 0;$$

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + b(t)\partial_x \rangle: \quad u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{b}u_x^2 + G(t), \quad \dot{b} \neq 0;$$

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda\partial_t \rangle: \quad u_t = u_{xx} + G(\omega), \quad \omega = t - \lambda u_x, \quad \lambda \neq 0;$$

$$\langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, \partial_x, x\partial_u + 2\lambda t[t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u] \rangle:$$

$$u_t = u_{xx} - 2\lambda uu_x + t^{-3}G(\omega), \quad \omega = u_x t^2 - \frac{t}{2\lambda}, \ \lambda \neq 0.$$

Общим свойством алгебр $A_{3.i}$ $(i = 4, 5, \ldots, 9)$ есть то, что операторы e_1, e_2 составляют базис абелевой двухмерной алгебры $A_{2.1}$. Поэтому рассмотрение реализаций этих алгебр проводим аналогично анализу случая алгебры $A_{3.3}$.

Остановимся, например, на случае алгебры $A_{3.7}$. При наличии известных пар операторов e_1, e_2 все здесь сводится к проверке коммутационных соотношений

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = qe_2, \quad 0 < |q| < 1, \tag{2.84}$$

где оператор e_3 имеет вид (2.40).

Пусть операторы e_1, e_2 составляют базис реализации $A^1_{2.1}$. Тогда если $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_x$, то из выполнения коммутационных соотношений (2.84) (с точностью до действия преобразований (2.60)) следует, что $q = \frac{1}{2}$ и

$$e_3 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \epsilon u\partial_u, \quad \epsilon = 0, 1.$$

Проверив условие инвариантности уравнения (2.37) относительно полученной реализации алгебры $A_{3.7}$, видим, что для $\epsilon = 0$ инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 G(u),$$

а для $\epsilon = 1$ — вид

$$u_t = u_{xx} + G(\omega), \quad \omega = uu_x^2.$$

Если $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_t$, то из выполнения коммутационных соотношений (2.84) следует, что $q = 2$. Но это противоречит условию $0 < |q| < 1$. Заметим, что для $q = 2$ мы приходим к реализации, которая с точностью до выбора базиса совпадает с полученной выше.

Пусть, далее, операторы e_1, e_2 составляют базис реализации $A^2_{2.1}$. Если $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_u$, то

$$e_3 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u, \quad 0 < |q| < 1.$$

Если же $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_t$, то

$$e_3 = qt\partial_t + \frac{1}{2}qx\partial_x + u\partial_u, \quad 0 < |q| < 1.$$

Мы получили две разные реализации алгебры $A_{3.7}$:

$$L_1 = \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u \rangle, \quad 0 < |q| < 1;$$

$$L_2 = \langle \partial_u, \partial_t, qt\partial_t + \frac{1}{2}qx\partial_x + u\partial_u \rangle, \quad 0 < |q| < 1.$$

Выберем в L_2 базисные операторы таким образом:

$$\overline{e}_1 = e_2, \quad \overline{e}_2 = e_1, \quad \overline{e}_3 = \frac{1}{q}e_3.$$

Нетрудно убедиться, что в этом базисе выполняются коммутационные соотношения алгебры $A_{3.7}$ и реализация $L_2 = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle$ совпадает с реализацией L_1, где $q \neq 0, \pm 1$.

Поэтому, объединяя эти две реализации в одну, приходим к реализации, базис которой составляют операторы

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u, \quad q \neq 0, \pm 1.$$

Соответствующее инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + x^{2(q-1)}G(\omega), \quad \omega = x^{1-2q}u_x.$$

Пусть, наконец, операторы e_1, e_2 составляют базис реализации $A^3_{2.1}$. Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, приходим к еще одной реализации алгебры $A_{3.7}$, базис которой составляют операторы

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = \partial_u + \lambda |t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x,$$
$$e_3 = 2t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u, \quad q \neq 0, \pm 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Соответствующее инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\lambda(1-q)|t|^{-\frac{1}{2}(1+q)}uu_x + |t|^{\frac{1}{2}(q-1)}G(\omega),$$
$$\omega = |t|^{\frac{1}{2}(1-q)}u_x.$$

Полученные результаты для неразложимых трехмерных разрешимых алгебр Ли приведены в таблице 2.2. Там мы используем такие обозначения:

$$A^1_{3.3} = \langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u \rangle;$$
$$A^2_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x \rangle \quad (\lambda > 0);$$
$$A^3_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + b(t)\partial_x \rangle \quad (\ddot{b} \neq 0);$$
$$A^4_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda\partial_t \rangle \quad (\lambda \neq 0);$$
$$A^5_{3.3} = \langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, \partial_x, x\partial_u + 2\lambda t[t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u] \rangle \quad (\lambda \neq 0);$$
$$A^1_{3.4} = \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+t)\partial_u \rangle;$$

$$A^2_{3.4} = \langle \partial_x, \partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle;$$
$$A^3_{3.4} = \langle \partial_u, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u \rangle;$$
$$A^4_{3.4} = \langle \partial_u + \alpha\partial_x, \partial_x, \alpha^2(\dot{\alpha})^{-1}\partial_t + (1+\alpha)x\partial_x + [(1-\alpha)u + x]\partial_u \rangle,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ $(\dot{\alpha} \neq 0)$ — решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\alpha^2\ddot{\alpha} + 2(\dot{\alpha})^2 = 0; \tag{2.85}$$
$$A^1_{3.5} = \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + u\partial_u \rangle;$$
$$A^2_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \rangle;$$
$$A^1_{3.6} = \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - u\partial_u \rangle;$$
$$A^2_{3.6} = \langle \partial_x, \partial_u + \lambda t\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle \quad (\lambda \geqslant 0);$$
$$A^1_{3.7} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x \rangle;$$
$$A^2_{3.7} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + u\partial_u \rangle;$$
$$A^3_{3.7} = \langle \partial_t, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u \rangle \quad (q \neq 0, \pm 1);$$
$$A^4_{3.7} = \langle \partial_x, \partial_u + \lambda|t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u \rangle$$
$$(0 < |q| < 1, \ \lambda \in \mathbb{R});$$
$$A^1_{3.8} = \langle \partial_x, \lambda t\partial_x + \partial_u, -\lambda(t^2 + \lambda^{-2})\partial_t - \lambda tx\partial_x + (\lambda tu - x)\partial_u \rangle$$
$$(\lambda \neq 0);$$
$$A^1_{3.9} = \langle \partial_x, \alpha\partial_x + \partial_u,$$
$$- (\dot{\alpha})^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + (q-\alpha)x\partial_x + [(\alpha+q)u - x]\partial_u \rangle;$$

где $q > 0$, $\alpha = \alpha(t)$ $(\dot{\alpha} \neq 0)$ — решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1+\alpha^2)\ddot{\alpha} = 2q(\dot{\alpha})^2. \tag{2.86}$$

Заметим, что нам удалось найти общие решения уравнений (2.85) и (2.86). Они имеют довольно громоздкий вид, определяют функцию $\alpha(t)$ неявно и содержат интегралы, которые не определяются через элементарные функции.

Таблица 2.2

Уравнения (1.2), инвариантные относительно неразложимых трехмерных разрешимых алгебр Ли

Алгебра	Функция F
$A^1_{3.3}$	$-uu_x + G(u_x)$
$A^2_{3.3}$	$\lambda^{-1}x + G(u_x), \quad \lambda \neq 0$
$A^3_{3.3}$	$-\frac{1}{2}\dot{b}(t)u_x^2, \quad \ddot{b} \neq 0$
$A^4_{3.3}$	$G(\omega), \quad \omega = t - \lambda u_x,\ \lambda \neq 0$
$A^5_{3.3}$	$-2\lambda uu_x + t^{-3}G(\omega), \quad \omega = u_x t^2 - \frac{t}{2\lambda},\ \lambda \neq 0$
$A^1_{3.4}$	$2\ln\lvert u_x\rvert G(\omega), \quad \omega = x^{-1}u_x$
$A^2_{3.4}$	$\frac{1}{2}t^{-1}uu_x + \lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}G(u_x)$
$A^3_{3.4}$	$\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}G(\omega), \quad \omega = t^{-1}u_x^2$
$A^4_{3.4}$	$-\dot{\alpha}uu_x + \alpha^{-6}\exp(2\alpha^{-1})G(\omega), \quad \omega = u_x\alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^3$
$A^1_{3.5}$	$G(\omega), \quad \omega = x^{-1}u_x$
$A^2_{3.5}$	$\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}G(u_x)$
$A^1_{3.6}$	$x^{-4}G(\omega), \quad \omega = x^3u_x$
$A^2_{3.6}$	$-\lambda uu_x + \lvert t\rvert^{-\frac{3}{2}}G(\omega), \quad \omega = tu_x,\ \lambda \geqslant 0$
$A^1_{3.7}$	$u_x^2G(u)$
$A^2_{3.7}$	$G(\omega),\ \omega = u^{-1}u_x^2$
$A^3_{3.7}$	$x^{2(q-1)}G(\omega), \quad \omega = x^{1-2q}u_x$
$A^4_{3.7}$	$-\frac{1}{2}\lambda(1-q)\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}(1+q)}uu_x + \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}(q-2)}G(\omega), \quad \omega = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}(1-q)}u_x$
$A^1_{3.8}$	$-\lambda uu_x + (t^2+\lambda^{-2})^{-\frac{3}{2}}G(\omega), \quad \omega = \lambda u_x(t^2+\lambda^{-2}) - t$
$A^1_{3.9}$	$-\dot{\alpha}uu_x + (1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\exp(q\arctan\alpha)G(\omega), \quad \omega = u_x(1+\alpha^2) - \alpha$

Так, общее решение уравнения (2.85) имеет вид

$$\int_0^\alpha \exp(-2\xi^{-1})d\xi = \lambda t + \lambda_1, \quad \lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

а уравнения (2.86) —

$$\int_0^\alpha \exp(-2q\arctan\xi)d\xi = \lambda t + \lambda_1, \quad \lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Отметим также, что полученные реализации, как показала непосредственная проверка, неэквивалентны, и для произвольных значений функций G они являются максимальными алгебрами инвариантности соответствующих уравнений.

2.2.3. Завершение групповой классификации уравнения (2.37)

В этом пункте мы выполняем последний шаг алгоритма метода групповой классификации дифференциальных уравнений. Здесь мы проводим описание нелинейных уравнений исследуемого вида с самыми высокими симметрийными свойствами. Для этого нам нужно получить полный перечень неэквивалентных уравнений вида (2.37), максимальные алгебры инвариантности которых имеют размерность выше чем 3.

В соответствии с теоремой Леви–Мальцева каждая действительная алгебра Ли является или алгеброй Ли, которая имеет нетривиальное разложение Леви, или разрешимой алгеброй Ли. Исходя из этого, завершение групповой классификации мы начинаем с описания тех нелинейных уравнений вида (2.37), алгебры инвариантности которых имеют нетривиальный фактор Леви, то есть содержат как подалгебры некоторые полупростые алгебры Ли операторов симметрии.

Далее мы проводим классификацию тех уравнений, алгебры инвариантности которых являются разрешимыми алгебрами Ли размерности выше за 3. Для этого, исходя из наличия у разрешимой алгебры Ли композиционного ряда, мы, прежде всего, рассматриваем уравнения, которые допускают четырехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии.

Инвариантность относительно алгебр Ли операторов симметрии с нетривиальным разложением Леви. Если дифференциальное уравнение допускает алгебру Ли операторов симметрии с нетривиальным фактором Леви, то оно будет инвариантным относительно некоторой полупростой алгебры Ли операторов симметрии. В соответствии с результатами теоремы 2.3 нелинейные уравнения с таким свойством исчерпываются уравнением

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}G(\omega), \quad \omega = 2u - xu_x, \qquad (2.87)$$

максимальная алгебра инвариантности которого

$$\langle \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u \rangle$$

является изоморфной алгебре $sl(2,\mathbb{R})$. Так как уравнение (2.87) содержит произвольную функцию, которая является функцией одного аргумента, то для изучения возможностей расширения его симметрийных свойств мы можем использовать стандартные приемы.

Классифицирующее уравнение (2.41) для уравнения (2.87) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left[x^{-1}(f_x - 2x^{-1}f) + 2ux^{-2}(f_u - x^{-1}b) - x^{-2}(f_u + x^{-1}b)\omega\right] G_\omega + \\
&\quad + x^{-2}(f_u + 2x^{-1}b)G = x^{-2}\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right)\omega^2 - \\
&\quad - x^{-1}\left(\ddot{x} + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x\right) + \\
&\quad + 4ux^{-2}\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right)\omega + 4u^2x^{-2}\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right) + \\
&\quad + 2ux^{-1}\left(\ddot{a}x + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x\right) - f_t - x^{-1}f_x + f_{xx}.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Поскольку в уравнении (2.88) функции a, b, f являются функциями переменных t, x, u, а функция G зависит от переменной $\omega = 2u - xu_x$, то расширение симметрийных свойств уравнения (2.87) возможно только для тех значений функции G, которые являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$(m\omega + n)\dot{G} + pG = k\omega^2 + l\omega + s, \tag{2.89}$$

где $m, n, k, l, s \in \mathbb{R}$, $|m| + |n| + |p| \neq 0$, $\dot{G} = \frac{d}{d\omega}$.

Проанализировав уравнение (2.89), мы получили, что исследованию подлежат такие значения функции G:

$$\begin{aligned}
&G = C_1\omega^2 + C_2\omega + C_3, \\
&G = C_1e^{r\omega} + C_2\omega^2 + C_3\omega + C_4, \quad C_1, r \neq 0, \\
&G = C_1\ln|\omega| + C_2\omega^2 + C_3\omega + C_4, \quad C_1 \neq 0, \\
&G = C_1\omega\ln|\omega| + C_2\omega^2 + C_3\omega + C_4, \quad C_1 \neq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&G = C_1\omega^2\ln|\omega| + C_2\omega^2 + C_3\omega + C_4, \quad C_1 \neq 0, \\
&G = C_1|\omega|^r + C_2\omega^2 + C_3\omega + C_4, \quad C_1 \neq 0, \quad r \neq 0, 1, 2, \\
&\qquad C_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

В дальнейшем изложении будем использовать такие обозначения:

$$\begin{aligned}
&A = x^{-1}(f_x - 2x^{-1}f) + 2ux^{-2}(f_u + x^{-1}b), \\
&B = -x^{-2}(f_u + x^{-1}b), \quad K = x^{-2}(f_u + 2x^{-1}b), \\
&L = x^{-2}\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right), \\
&M = -x^{-1}\left(\ddot{a}x + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x\right) - 4ux^{-2}\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right), \\
&N = 4u^2x^{-2}\left(f_{uu} + \frac{1}{4}f_u\right) + \\
&\qquad + 2ux^{-1}\left(\ddot{a}x + \dot{b} + 2f_{xu} + x^{-2}b + \frac{1}{2}f_x\right) - f_t - x^{-1}f_x + f_{xx}.
\end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнение (2.88) принимает вид

$$(A + B\omega)G_\omega + KG = L\omega^2 + M\omega + N.$$

Пусть $G = C_1\omega^2 + C_2\omega + C_3$. Подставив это значение G в (1.87) и проведя "расщепления" полученного равенства по степеням переменной ω, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&C_1(2B + K) = L, \quad 2C_1A + C_2(B + K) = M, \\
&C_2A + C_3K = N.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Если $C_1 = 0$, то из условия $L = 0$ следует, что в операторе симметрии (2.40)

$$f = \varphi(t,x) + \psi(t,x)e^{-\frac{1}{4}u}.$$

Подстановка этого значения f во второе и третье уравнения (2.90) показывает, что следует различать два случая: $C_2 = 0$ и $C_2 \neq 0$, $\psi = 0$. Для $C_2 = 0$ пришли к такому классификационному результату: если в уравнении (2.87) $G = 3$, то группа инвариантности этого уравнения генерируется оператором

$$\begin{aligned}
Q = {} & (2\lambda_1t^2 + 2\lambda_2t + \lambda_3)\partial_t + [(2\lambda_1t + \lambda_2)x + \lambda_4t + \lambda_5]\partial_x + \\
& + \left[-2\lambda_1x^2 - 2\lambda_4x + 2x^{-1}(\lambda_4t + \lambda_5) + \lambda_6 + \psi e^{-\frac{1}{4}u}\right]\partial_u,
\end{aligned}$$

где функция $\psi = \psi(t,x)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\psi_t = \psi_{xx} - x^{-1}\psi_x + \frac{3}{4}x^{-2}\psi;$$

если же в (2.87) $G = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 3$, то группа инвариантности уравнения генерируется оператором

$$Q = (2\lambda_1 t^2 + 2\lambda_2 t + \lambda_3)\partial_t + (2\lambda_1 t + \lambda_2)x\partial_x + \\ + \left(-2\lambda_1 x^2 - \lambda_4 + \psi e^{-\frac{1}{4}u}\right)\partial_u,$$

где функция $\psi = \psi(t,x)$ удовлетворяет такому линейному уравнению теплопроводности:

$$\psi_t = \psi_{xx} - x^{-1}\psi_x + \frac{m}{4}x^{-2}\psi.$$

Здесь и далее $\lambda_i \in \mathbb{R}$ для всех значений i. Но поскольку замена переменных

$$t = t, \quad x = x, \quad u = 4\ln|v|, \quad v = v(t,x)$$

приводит уравнение

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + nx^{-2}, \quad n \in \mathbb{R},$$

к линейному уравнению теплопроводности

$$v_t = v_{xx} - x^{-1}v_x + \frac{1}{4}nx^{-2}v,$$

то полученные случаи уравнений (2.87) из дальнейшего рассмотрения мы исключаем.

Если же $C_1 = 0$, а $C_2 \neq 0$, то непосредственные вычисления показывают, что в этом случае расширение симметрии уравнения (2.87) не происходит.

Пусть теперь в G $C_1 \neq 0$. Тогда, учитывая инвариантность уравнения (2.87) относительно сдвигов по зависимой переменной u, можем в G положить $C_2 = 0$, вследствие чего система (2.90) принимает вид

$$C_1(2B + K) = L, \quad 2C_1 A = M, \quad C_3 K = N. \tag{2.91}$$

Из первого равенства (2.91) следует, что нужно различать два случая: $C_1 = -\frac{1}{4}$ и $C_1 \neq 0, -\frac{1}{4}$.

Случай $C_1 = -\frac{1}{4}$. Тут

$$f = \varphi + \psi u,$$

где $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$ — произвольные действительные дифференцируемые функции своих переменных, и проверка второго и третьего равенств (2.91) показывает, что расширение симметрии уравнения (2.87) происходит тогда, когда

$$G = 1 - \frac{1}{4}\omega^2,$$

а группа инвариантности уравнения генерируется оператором

$$Q = (2\lambda_1 t^2 + 2\lambda_2 t + \lambda_3)\partial_t + [(2\lambda_1 t + \lambda_2)x + \lambda_4 t + \lambda_5]\partial_x + \\ + [-2\lambda_1 x^2 - \lambda_4 x + x^{-1}(\lambda_4 t + \lambda_5)(1 + u)]\partial_u$$

и является пятипараметрической группой локальных преобразований. Отметим, что замена переменных

$$t = t, \quad x = x, \quad u = xv - 1, \quad v = v(t,x)$$

приводит полученное уравнение

$$u_t = u_{xx} + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}$$

к хорошо известному уравнению Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + vv_x.$$

Случай $C_1 \neq 0, -\frac{1}{4}$. Из первого равенства (2.91) следует, что в этом случае

$$f = \varphi + \psi e^{ru},$$

где $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$ — произвольные действительные дифференцируемые функции своих аргументов, $r = -\frac{1}{4} - C_1$, $r \neq 0, -\frac{1}{4}$. Но дальнейшая проверка второго и третьего равенств (2.91) показала, что в этом случае расширение симметрии уравнения (2.87) не происходит.

Следовательно, с точностью до эквивалентности первому значению функции G в уравнении (2.87) соответствует единственный, в рамках сформулированной задачи, случай расширения симметрийных свойств этого уравнения.

Пусть теперь

$$G = C_1 e^{r\omega} + C_2\omega^2 + C_3\omega + C_4, \quad rC_1 \neq 0.$$

Подстановка этого значения G в (2.88) приводит к таким равенствам:

$$\begin{aligned} &B = 0, \quad rA + K = 0, \quad C_2K = L, \\ &2C_2A + C_3K = M, \quad C_3A + C_4K = N. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Из первого равенства (2.92) следует, что

$$f = -x^{-1}ub + \varphi(t,x),$$

поэтому второе равенство (2.92) принимает вид

$$r[3x^{-2}ub + x^{-1}(\varphi_x - 2x^{-1}\varphi)] + x^{-3}b = 0.$$

Учитывая, что $b = b(t)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, видим, что

$$b = 0, \quad \varphi_x - 2x^{-1}\varphi = 0,$$

то есть

$$\varphi = x^2\gamma(t).$$

Дальнейшая подстановка полученных значений b и φ в остальные равенства (2.92) приводит к уравнениям

$$\gamma = -\ddot{a}, \quad \dot{\gamma} = 0,$$

а значит, оператор, генерирующий группу инвариантности соответствующего уравнения (2.87), имеет вид

$$Q = (-\lambda_1 t^2 + 2\lambda_2 t + \lambda_3)\partial_t + (-\lambda_1 t + \lambda_2)x\partial_x + \lambda_1 x^2\partial_u,$$

отсюда следует, что в этом случае расширение симметрийных свойств исследуемого уравнения не происходит.

К аналогичному результату привел анализ и остальных указанных выше значений функции G в уравнении (2.87).

Из проведенных рассуждений следует такое утверждение.

Теорема 2.4. *С точностью до эквивалентности нелинейные уравнения вида* (2.37)*, которые допускают алгебры инвариантности, изоморфные алгебрам Ли с нетривиальным разложением Леви, исчерпываются уравнением Бюргерса*

$$u_t = u_{xx} + uu_x,$$

максимальная алгебра инвариантности которого

$$\langle \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u, t\partial_x - \partial_u, \partial_x \rangle$$

изоморфна алгебре $sl(2,\mathbb{R}) \Subset 2A_1$.

Инвариантность относительно четырехмерных разложимых разрешимых алгебр Ли операторов симметрии. Поскольку все нелинейные уравнения вида (2.37), инвариантные относительно трехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии, содержат произвольные функции одной переменной, то для завершения их групповой классификации можно использовать стандартные методы. С другой стороны, можно надеяться, что, продолжая исследование в таком подходе, мы в нелинейных уравнениях, инвариантных относительно четырехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии, получим функции F, которые будут иметь уже полностью определенный вид. Действительно, как будет показано ниже, такими окажутся все уравнения, что и даст возможность завершить групповую классификацию уравнения (2.37).

Продолжим классификацию, описав уравнения, которые являются инвариантными относительно четырехмерных разложимых разрешимых алгебр Ли операторов симметрии.

Различают 10 разложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли: $4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1$, $A_{2.2} \oplus 2A_1 = A_{3.2} \oplus A_1$, $2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$, $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = 3,4,\ldots,9)$. Очевидно, что все эти алгебры, кроме алгебры $2A_{2.2}$, являются прямой суммой некоторой трехмерной разрешимой алгебры Ли $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ $(i = 1,2,\ldots,9)$ и одномерной алгебры $A_1 = \langle e_4 \rangle$. Это дает возможность при рассмотрении реализаций четырехмерных разрешимых алгебр Ли использовать известные результаты для трехмерных и двухмерных (в случае алгебры $2A_{2.2}$) алгебр Ли.

Алгебра $4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1$. В соответствии с результатами предыдущего пункта, для алгебры $A_{3.1}$ существует только одна реализация в классе операторов (2.40), которая является алгеброй инвариантности нелинейного уравнения вида (2.37). Следовательно,

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_u.$$

Но поскольку алгебра $4A_1$ является абелевой, то

$$e_4 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3,$$

то есть оператор e_4 является линейной комбинацией операторов e_i $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда следует, что в классе операторов (2.40) не существует реализаций алгебры $4A_1$, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений (2.37).

Алгебра $A_{3.2} \oplus A_1$. В соответствии с результатами предыдущего пункта имеем семь неэквивалентных реализаций алгебры $A_{3.2}$ в классе операторов (2.40), которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений (2.37). Рассмотрим возможности расширения каждой из них до реализаций алгебры $A_{3.2} \oplus A_1$:

1) $A^1_{3.2} = \langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u\rangle$. Из выполнения коммутационных соотношений $[e_4, e_i] = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ следует, что $e_4 = \lambda e_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

2) $A^2_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u\rangle$. Здесь $e_4 = \lambda_1\sqrt{|t|}\partial_x + \lambda_2\partial_u$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, поэтому базис соответствующей реализации алгебры $A_{3.2} \oplus A_1$ можно выбрать в виде

$$\langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u, \sqrt{|t|}\partial_x\rangle.$$

Но требование инвариантности уравнения (2.37) относительно данной алгебры Ли операторов симметрии приводит к равенству

$$-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{|t|}}u_x = 0, \quad \text{где } \varepsilon = 1 \text{ для } t > 0 \quad \text{и } \varepsilon = -1 \text{ для } t < 0;$$

3) $A^3_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u\rangle$. Проверив выполнение коммутационных соотношений, убеждаемся, что

$$e_4 = \lambda_1\sqrt{|t|}\partial_x + \lambda_2\partial_u, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

то есть имеет место уже рассмотренный выше случай 2);

4) $A^4_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \alpha(t)\partial_x\rangle$ $(\dot{\alpha} \neq 0)$. Здесь $e_4 = \beta(t)\partial_x$ и условие инвариантности уравнения (2.37) относительно полученной алгебры Ли операторов симметрии имеет вид

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что два базисных оператора линейно зависимы ($\beta = \lambda\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$);

5) $A^5_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t\rangle$. Здесь $e_4 = \lambda_1\partial_x + \lambda_2 e^{-x}\partial_u$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Проверка условия инвариантности уравнения (2.37) относительно данной алгебры Ли операторов симметрии показывает, что соответствующие уравнения (независимо от значений λ_1, λ_2) линейны;

6) $A^6_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_x\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$. Здесь $e_4 = \lambda_1\partial_t + \lambda_2 e^{-\epsilon t}\partial_u$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, и соответствующие инвариантные уравнения являются линейными;

7) $A^7_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_t + \lambda\partial_x\rangle$ $\lambda > 0)$. Здесь $e_4 = \lambda_1\partial_x + \lambda_2 e^{\frac{\epsilon}{\lambda}(x-\lambda t)}\partial_u$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, а поэтому соответствующие инвариантные уравнения линейны.

Следовательно, как и в предыдущему случае, в классе операторов (2.40) не существует реализаций алгебры $A_{3.2} \oplus A_1$, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37).

Алгебра $2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$. Алгебра $2A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3, e_4\rangle$, где $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_4$, содержит как подалгебру алгебру $A_{3.2}$. При этом в роли третьего оператора, который коммутирует с операторами e_1, e_2, может быть как оператор e_3, так и оператор e_4. В соответствии с этим и проводим рассмотрение реализации этой алгебры.

1) $A^1_{3.2} = \langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u\rangle$. Пусть $e_3 = \partial_u$. Тогда $e_4 = e^u\partial_u$ и соответствующее инвариантное уравнение (2.37) принимает вид

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 + \frac{\lambda}{x}u_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Если же $e_4 = \partial_u$, то $e_3 = -u\partial_u$ и соответствующее инвариантное уравнение является линейным.

2) $A^2_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u\rangle$. Если $e_3 = \partial_u$, то $e_4 = e^u\partial_u$ и соответствующее инвариантное уравнение (2.37) принимает вид

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 + \lambda\frac{u_x}{\sqrt{|t|}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Если же $e_4 = \partial_u$, то

$$e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

а соответствующее инвариантное уравнение (1.2) имеет вид

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\epsilon u_x}{4\sqrt{|t|}}\ln|tu_x^2| + \frac{\beta u_x}{\sqrt{|t|}},$$

где $\epsilon = 1$ для $t > 0$ и $\epsilon = -1$ для $t < 0$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

3) $A^3_{3.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u\rangle$. Если $e_3 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u$, то $e_4 = e^u\partial_u$ и приходим к уравнению

$$u_t = u_{xx} - \frac{\epsilon u u_x}{2\sqrt{|t|}} + \frac{\epsilon u_x}{4\sqrt{|t|}}\ln|tu_x^2| - u_x^2 + \frac{\lambda u_x}{\sqrt{|t|}}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где $\epsilon = 1$ для $t > 0$ и $\epsilon = -1$ для $t < 0$.

Использовав далее замену переменных

$$v = -e^{-u}, \quad v = v(t,x), \quad u = u(t,x),$$

убеждаемся, что этот случай содержится в предыдущем, где $u < 0$, $\lambda = 1$, $\beta = \lambda$. Поэтому отдельно рассматривать его не будем.

Если же $e_4 = \sqrt{|t|}\partial_x + \partial_u$, то проверка коммутационных соотношений показывает, что в классе операторов (2.40) дополнение этой реализации алгебры $A_{3.2}$ к реализации алгебры $2A_{2.2}$ является невозможным.

4) $A^4_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \alpha(t)\partial_x\rangle$ ($\dot\alpha \neq 0$). Если $e_3 = \alpha(t)\partial_x$, то проверка коммутационных соотношений приводит к условию $\alpha = 1$. Если же $e_4 = \alpha(t)\partial_x$, $\dot\alpha \neq 0$, то проверка коммутационных соотношений показывает, что $\alpha = e^{\lambda t}$, $\lambda \neq 0$ и $e_3 = \dfrac{1}{\lambda}\partial_t + \beta(t)\partial_x$. С точностью до преобразований эквивалентности

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x + X(t), \quad \overline{u} = u,$$

где X — решение уравнения $\dfrac{1}{\lambda}\dot X + \beta = 0$, можем положить

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \frac{1}{\lambda}\partial_t, \quad e_4 = e^{\lambda t}\partial_x, \quad \lambda \neq 0.$$

Тогда, с точностью до действия замены переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x - \frac{C}{\lambda}, \quad \overline{u} = u,$$

которая оставляет вид базисных операторов данной алгебры Ли неизменным, соответствующее инвариантное уравнение принимает вид (в начальных обозначениях переменных)

$$u_t = u_{xx} - \lambda(xu_x + u_x\ln|u_x|), \quad \lambda \neq 0.$$

5) $A^5_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t\rangle$. Если $e_3 = \partial_t$, то

$$e_4 = \lambda_1 e^t\partial_x + \lambda_2 e^{t-x}\partial_u, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Соответствующее инвариантное уравнение (2.37) является нелинейным при условии $\lambda_1 \neq 0$. Поэтому можем положить

$$e_4 = e^t\partial_x + \lambda e^{t-x}\partial_u, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и соответствующее инвариантное уравнение примет вид

$$u_t = u_{xx} + u_x(1 - \lambda e^{-x}u_x^{-1})[\beta - \ln|u_x e^x - \lambda|] + \lambda e^{-x}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = \beta e^{-x} + u$$

оставляет вид операторов e_1, e_2, e_3 неизменным, а оператор e_4 сводит к оператору ($\beta = \lambda$) $e_4 = e^{\overline{t}}\partial_{\overline{u}}$. Следовательно, результат можно подать так:

$$\langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t, e^t\partial_x\rangle: \ u_t = u_{xx} - u_x\ln|u_x| - xu_x + \lambda u_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Наконец, замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x - \lambda, \quad \overline{u} = u$$

дает возможность в построенном уравнении положить $\lambda = 0$. Заметим, что этот случай содержится в предыдущем, если там $\lambda = 1$.

Если $e_4 = \partial_t$, то в классе операторов (2.40) не существует реализаций алгебры $2A_{2.2}$.

6) $A^6_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_x\rangle$ ($\epsilon = \pm 1$). Если $e_3 = \partial_x$, то $e_4 = e^{x-\epsilon t}\partial_u$ и соответствующее инвариантное уравнение является линейным. Если же положить $e_4 = \partial_x$, то расширение данной алгебры к реализации алгебры $2A_{2.2}$ невозможно.

7) $A^7_{3.2} = \langle \epsilon\partial_t - u\partial_u, \partial_u, \partial_t + \lambda\partial_x\rangle$ ($\lambda > 0$, $\epsilon = \pm 1$). Если $e_3 = \partial_t + \lambda\partial_x$, то $e_4 = e^{(1+\epsilon)x-\epsilon t}\partial_u$ и соответствующее инвариантное уравнение является линейным.

Если же $e_4 = \partial_t + \lambda\partial_x$, то попытка расширения $A^7_{3.2}$ к реализации алгебры $2A_{2.2}$ приводит к ошибочным соотношениям.

Подведем предварительный итог. В классе операторов (2.40) существуют четыре неэквивалентные реализации алгебры $2A_{2.2}$, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений (2.37):

$$\langle -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \partial_t, \partial_u, e^u\partial_u\rangle:$$

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 + \frac{\lambda}{x}u_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.93}$$

$\langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u, e^u\partial_u\rangle$:

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 + \lambda\frac{u_x}{\sqrt{|t|}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.94}$$

$\langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \partial_u\rangle$:

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\epsilon u_x}{4\sqrt{|t|}}\ln|tu_x^2| + \frac{\beta u_x}{\sqrt{|t|}}, \tag{2.95}$$

$\epsilon = 1$ для $t > 0$ i $\epsilon = -1$ для $t < 0$, $\lambda \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$;

$\langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \frac{1}{\lambda}\partial_t, e^{\lambda t}\partial_x\rangle$:

$$u_t = u_{xx} - \lambda u_x(x + \ln|u_x|), \quad \lambda \neq 0. \tag{2.96}$$

Алгебры $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = 3, 4, 5, 6)$. Анализ данных алгебр показал, что в классе операторов (2.40) не существует реализаций этих алгебр, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37).

Алгебра $A_{3.7} \oplus A_1$. Для алгебры $A_{3.7}$ получены четыре неэквивалентные реализации, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37). Проведем анализ возможности их расширения к реализациям алгебры $A_{3.7} \oplus A_1$.

1) $A^1_{3.7} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x\rangle$. Тогда с точностью до эквивалентности можем положить $e_4 = u\partial_u$. Соответствующее нелинейное инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{-1}u_x^2, \quad \lambda \neq 0. \tag{2.97}$$

2) $A^2_{3.7} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + u\partial_u\rangle$. Проверка коммутационных соотношений показывает, что $e_4 = u\partial_u$, то есть пришли к реализации, которая совпадает с предыдущей.

3) Рассмотрение двух последних реализаций алгебры $A_{3.7}$ не привело к новым реализациям алгебры $A_{3.7} \oplus A_1$, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений (2.37).

Алгебра $A_{3.8} \oplus A_1$. Анализ реализации $A^1_{3.8}$ показал, что не существует расширения этой реализации к реализациям алгебры $A_{3.8} \oplus A_1$, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37).

Алгебра $A_{3.9} \oplus A_1$. Для алгебры $A_{3.9}$ существует одна реализация, которая является алгеброй инвариантности нелинейного уравнения вида (2.37):

$$A^1_{3.9} = \langle \partial_x, \alpha\partial_x + \partial_u, -(\dot\alpha)^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + (q-\alpha)x\partial_x + [(\alpha+q)u - x]\partial_u\rangle,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению (2.86).

Данная реализация допускает расширение к реализации алгебры $A_{3.9} \oplus A_1$, но проверка условия инвариантности (2.41) приводит к условию

$$e_4 = e_1 - qe_2.$$

Отсюда следует, что не существуют реализации алгебры $A_{3.9} \oplus A_1$, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37).

Следовательно, среди нелинейных уравнений вида (2.37) только пять уравнений (2.93)–(2.97) инвариантны относительно четырехмерных разложимых разрешимых алгебр Ли операторов симметрии. Проведем дальнейший анализ этих уравнений и исключим из рассмотрения те, которые не удовлетворяют условиям сформулированной задачи.

Уравнение (2.93). В соответствии с инфинитезимальным алгоритмом Ли получаем, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.93) является бесконечномерная алгебра операторов симметрии. При этом, в зависимости от значений параметра λ, ее базис составляют такие операторы:

1. $\lambda \neq 0, 2$

$$Q_1 = -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \quad Q_2 = \partial_t, \quad Q_3 = \partial_u,$$

$$Q_4 = 2t^2\partial_t + 2tx\partial_x + \left[\frac{1}{2}x^2 + (1+\lambda)t\right]\partial_u,$$

$$Q_\infty = g(t,x)e^u\partial_u, \quad g_t = g_{xx} + \frac{\lambda}{x}g_x;$$

2. $\lambda = 0$

$$Q_1 = -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \quad Q_2 = \partial_t, \quad Q_3 = \partial_u,$$

$$Q_4 = 2t^2\partial_t + 2tx\partial_x + \left[\frac{1}{2}x^2 + t\right]\partial_u, \quad Q_5 = t\partial_x + \frac{1}{2}x\partial_u,$$

$$Q_6 = \partial_x, \quad Q_\infty = g(t,x)e^u\partial_u, \quad g_t = g_{xx};$$

3. $\lambda = 2$

$$Q_1 = -t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x, \quad Q_2 = \partial_t, \quad Q_3 = \partial_u,$$

$$Q_4 = 2t^2\partial_t + 2tx\partial_x + \frac{1}{2}(x^2 + 3t)\partial_u,$$

$$Q_5 = t\partial_x + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}t)\partial_u, \quad Q_6 = \partial_x + \frac{1}{x}\partial_u,$$

$$Q_\infty = g(t,x)e^u\partial_u, \quad g_t = g_{xx} + \frac{2}{x}g_x.$$

Нетрудно убедиться, что замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = u - \ln|x|$$

сводит третий случай ко второму.

Следовательно, пришли к двум неэквивалентным уравнениям

$$u_t = u_{xx} - u_x^2;$$

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda}{2}u_x - u_x^2, \quad \lambda \neq 0{,}2.$$

Но эти уравнения заменой переменных

$$u = -\ln|v|, \quad u = u(t,x), \quad v = v(t,x) \tag{2.98}$$

сводятся, соответственно, к линейным уравнениям теплопроводности

$$v_t = v_{xx};$$

$$v_t = v_{xx} + \frac{\lambda}{x}v_x, \quad \lambda \neq 0, 2.$$

Поэтому нелинейность в уравнении (2.93) является несущественной.

Уравнение (2.94). Данное уравнение заменой переменных (2.98) сводится к такому линейному уравнению теплопроводности:

$$v_t = v_{xx} + \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}}v_x.$$

Уравнение (2.95). Использовав алгоритм Ли, убеждаемся, что построенная реализация алгебры $2A_{2.2}$ является максимальной алгеброй инвариантности данного уравнения.

Уравнение (2.96). Использовав алгоритм Ли, убеждаемся, что построенная реализация алгебры $2A_{2.2}$ является максимальной алгеброй инвариантности данного уравнения.

Уравнение (2.97). Данное уравнение заменой переменных

$$v = \ln|u|, \quad v = v(t,x), \quad u = u(t,x)$$

сводится к модифицированному уравнению Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + (\lambda + 1)v_x^2,$$

которое эквивалентно линейному уравнению теплопроводности.

Для завершения групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.37), которые допускают четырехмерные разложимые разрешимые алгебры Ли операторов симметрии, остается показать неэквивалентность уравнений (2.95) и (2.96). Для этого убедимся, что соответствующие им реализации алгебры $2A_{2.2}$ неэквивалентны.

Пусть

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \quad e_4 = \partial_u;$$

$$\tilde{e}_1 = \partial_{\overline{x}} - \overline{u}\partial_{\overline{u}}, \quad \tilde{e}_2 = \partial_{\overline{u}}, \quad \tilde{e}_3 = \lambda^{-1}\partial_{\overline{t}}, \quad \tilde{e}_4 = e^{\lambda t}\partial_{\overline{x}},$$

где $\lambda \neq 0$.

Предположим, что существуют такие преобразования (2.49), которые преобразуют реализацию $2A_{2.2} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ в реализацию $2A_{2.2} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\rangle$:

$$e_i \overset{(2.49)}{\to} E_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij}\tilde{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.99}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, $\det\|\alpha_{ij}\| \neq 0$. Тогда выполнение условий (2.99) приводит к таким равенствам:

$$-2t\dot{T} = \lambda^{-1}\alpha_{13}, \quad -2tU_t - xU_x = -\alpha_{11}U + \alpha_{12},$$

$$-2t\left(\frac{\varepsilon}{2}\ddot{T}(\dot{T})^{-\frac{1}{2}}x + \dot{X}\right) - \varepsilon\sqrt{\dot{T}}x = \alpha_{11} + \alpha_{24}e^{\lambda t},$$

$$\varepsilon\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{21} + \alpha_{24}e^{\lambda t}, \quad U_x = -\alpha_{21}U + \alpha_{22}, \quad \alpha_{23} = 0,$$

$$\lambda\sqrt{|t|}\varepsilon\sqrt{\dot{T}} = \alpha_{31} + e^{\lambda t}\alpha_{34}, \quad \alpha_{33} = 0,$$

$$-uU_u + \lambda\sqrt{|t|}U_x = -\alpha_{31}U + \alpha_{32},$$

$$\alpha_{41} = \alpha_{43} = \alpha_{44} = 0, \quad U_u = \alpha_{42}.$$

Рассмотрев равенства, которые содержат только значения функции U и ее производных, получаем, что

$$U = \alpha_{42}u + \alpha_{32}, \quad \alpha_{42} \neq 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{31} = 1.$$

Но при этих условиях рассмотрение равенств, которые содержат только функцию $\dot{T}$, приводит к выполнению условия $1 = 0$.

Следовательно, наше предположение ошибочно, а уравнения (2.95), (2.96) неэквивалентны.

Инвариантность относительно неразложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли. Напомним, что среди четырехмерных неразложимых разрешимых действительных алгебр Ли $A_4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ различают десять алгебр (приводим только значение ненулевых коммутационных соотношений):

$$\begin{aligned}
A_{4.1}:\ & [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2;\\
A_{4.2}:\ & [e_1, e_4] = qe_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,\\
& [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad q \neq 0;\\
A_{4.3}:\ & [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2;\\
A_{4.4}:\ & [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3;\\
A_{4.5}:\ & [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = qe_2,\\
& [e_3, e_4] = pe_3, \quad -1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 1, \quad p \cdot q \neq 0;\\
A_{4.6}:\ & [e_1, e_4] = qe_1, \quad [e_2, e_4] = pe_2 - e_3,\\
& [e_3, e_4] = e_2 + pe_3, \quad q \neq 0, \quad p \geqslant 0;\\
A_{4.7}:\ & [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1,\\
& [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3;\\
A_{4.8}:\ & [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1+q)e_1,\\
& [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = qe_3, \quad |q| \leqslant 1;\\
A_{4.9}:\ & [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2qe_1,\\
& [e_2, e_4] = qe_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + qe_3, \quad q \geqslant 0;\\
A_{4.10}:\ & [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2,\\
& [e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_2, e_4] = e_1.
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что алгебры $A_{4.i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ имеют коммутативный идеал, который совпадает с алгеброй $A_{3.1} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, алгебры $A_{4.i}$ $(i = 7, 8, 9)$ — нильпотентный идеал, который совпадает с алгеброй $A_{3.3} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, а алгебра $A_{4.10}$ — разрешимый идеал $A_{3.5} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Это дает возможность для построения реализаций четырехмерных неразложимых разрешимых алгебр Ли использовать уже известные результаты для алгебр $A_{3.1}$, $A_{3.3}$ и $A_{3.5}$.

Алгебра $A_{4.1}$. Для алгебры $A_{3.1}$ получено только одна реализация $A^1_{3.1}$, которая является алгеброй инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37), а именно:

$$A^1_{3.1} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u\rangle : \quad u_t = u_{xx} + G(u_x).$$

При расширении данной реализации к реализациям алгебры $A_{4.1}$ нужно перебрать все возможности выбора базисных операторов e_1, e_2, e_3 этой алгебры. Проведя такой перебор, мы получили в классе операторов (2.40) единственную реализацию алгебры $A_{4.1}$ с такими базисными операторами:

$$e_1 = \partial_u, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_t, \quad e_4 = t\partial_x + x\partial_u.$$

Но соответствующее инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и сводится к линейному уравнению теплопроводности.

Алгебра $A_{4.2}$. Рассмотрев все возможности расширения реализации $A^1_{3.1}$, мы получили, что в классе операторов (2.40) есть две реализации данной алгебры. А именно:

$$\langle \partial_t, \partial_u, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u\rangle \quad (q = 2);$$
$$\langle \partial_x, \partial_u, \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+t)\partial_u\rangle \quad (q = \frac{1}{2}).$$

Соответствующие инвариантные уравнения имеют вид

$$u_t = u_{xx} + \lambda \exp(-u_x), \quad \lambda \neq 0; \tag{2.100}$$
$$u_t = u_{xx} + 2\ln|u_x| + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.101}$$

Алгебра $A_{4.3}$. В классе операторов (2.40) получено одна реализация алгебры $A_{4.3}$ с такими базисными операторами:

$$e_1 = \partial_u, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_t, \quad e_4 = t\partial_x + u\partial_u.$$

Соответствующее инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} - u_x\ln|u_x| + \lambda u_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.102}$$

Алгебра $A_{4.4}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в классе операторов (2.40) данная алгебра не имеет реализаций.

Алгебра $A_{4.5}$. Рассмотрение данной алгебры привело к шести реализациям, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений (2.37):

1) $\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + pu\partial_u \rangle :$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{2p-2}{2p-1}}, \quad \lambda \neq 0, \quad q = \frac{1}{2}, \quad p \neq 0, \frac{1}{2}, 1;$$

2) $\langle \partial_t, \partial_u, \partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u \rangle :$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{2q-2}{2q-1}}, \quad p = \frac{1}{2}, \quad \lambda \neq 0, \quad q = 0, \frac{1}{2}, 1;$$

3) $\langle \partial_x, \partial_t, \partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x + pu\partial_u \rangle :$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{p-2}{p-1}}, \quad q = 2, \quad \lambda \neq 0, \quad p \neq 0, 1, 2;$$

4) $\langle \partial_x, \partial_u, \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u \rangle :$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{q-2}{q-1}}, \quad p = 2, \quad \lambda \neq 0, \quad q \neq 0, 1, 2;$$

5) $\langle \partial_u, \partial_t, \partial_x, 2pt\partial_t + px\partial_x + u\partial_u \rangle :$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{1-2p}{1-p}}, \quad q = 2p, \quad \lambda \neq 0, \quad p \neq 0, \frac{1}{2}, 1;$$

6) $\langle \partial_u, \partial_x, \partial_t, 2qt\partial_t + qx\partial_x + u\partial_u \rangle :$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{1-2q}{1-q}}, \quad p = 2q, \quad q \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \quad \lambda \neq 0.$$

Несложно убедиться, что первый и второй, третий и четвертый, а также пятый и шестой случаи являются попарно эквивалентными. Так, положим во втором случае

$$\overline{e}_1 = \partial_t, \quad \overline{e}_2 = \partial_x, \quad \overline{e}_3 = \partial_u, \quad \overline{e}_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + qu\partial_u.$$

Тогда в этом базисе имеют место те же коммутационные соотношения, что и для базисных операторов первой реализации, где $p = q$, откуда и следует эквивалентность первого и второго полученных случаев.

Остановимся далее на третьей реализации данной алгебры. Положим здесь

$$\overline{e}_1 = \partial_t, \ \overline{e}_2 = \partial_x, \ \overline{e}_3 = \partial_u,$$
$$\overline{e}_4 = \frac{1}{2}e_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \tilde{p}u\partial_u, \quad \tilde{p} = \frac{1}{2}p.$$

Для данного базиса выполняются те же коммутационные соотношения, что и для базисных операторов первой реализации, а соответствующее инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{2\tilde{p}-2}{2\tilde{p}-1}}, \quad \tilde{p} \neq 0, \frac{1}{2}, 1.$$

Аналогично убеждаемся, что и пятый случай приводится к первому.

Следовательно, для алгебры $A_{4.5}$ с точностью до эквивалентности существует единственная реализация, которая является алгеброй инвариантности нелинейного уравнения, а именно:

$$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + ku\partial_u \rangle :$$
$$u_t = u_{xx} + \lambda u_x^{\frac{2k-2}{2k-1}}, \quad \lambda \neq 0, \quad k \neq 0, \ \frac{1}{2}, \ 1. \tag{2.103}$$

Алгебра $A_{4.6}$. Анализ алгебры $A_{4.6}$ показал, что в классе операторов (2.40) не существует реализаций этой алгебры.

Алгебра $A_{4.7}$. В соответствии с результатами предыдущего пункта имеем пять неэквивалентных реализаций алгебры $A_{3.3}$, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.37):

$$A^1_{3.3} = \langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u \rangle : \quad u_t = u_{xx} - uu_x + G(u_x);$$
$$A^2_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x \rangle \ (\lambda > 0) : \quad u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + G(u_x);$$
$$A^3_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + b(t)\partial_x \rangle \ (b \neq 0) :$$
$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{b}(t)u_x^2 + G(t);$$
$$A^4_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda\partial_t \rangle \ (\lambda \neq 0) :$$
$$u_t = u_{xx} + G(\omega), \ \omega = t - \lambda u_x;$$
$$A^5_{3.3} = \langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, \partial_x, x\partial_u + 2\lambda t[t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u] \rangle \ (\lambda \neq 0) :$$
$$u_t = u_{xx} - 2\lambda uu_x + t^{-3}G(\omega), \quad \omega = u_xt^2 - \frac{1}{2\lambda}t.$$

К реализациям алгебры $A_{4.7}$ приводит только расширение реализации $A^3_{3.3}$. Имеем две реализации с такими базисными операторами:

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u\rangle;$$

$$\langle \partial_u, x\partial_u - \alpha\partial_x, -\partial_x, (\dot{\alpha})^{-1}\alpha^2\partial_t + (1+\alpha)x\partial_x + (2u - \frac{1}{2}x^2)\partial_u\rangle,$$

где функция $\alpha = \alpha(t)$, $\ddot{\alpha} \neq 0$, является решением уравнения (2.85). Соответствующие инвариантные уравнения имеют вид:

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4t}u_x^2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.104}$$

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}u_x^2 + (\lambda + \alpha)\alpha^{-2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.105}$$

Алгебра $A_{4.8}$. К реализациям алгебры $A_{4.8}$ приводит расширение всех реализаций алгебры $A_{3.3}$.

Приходим к таким результатам:

$$\langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u\rangle :$$

$$u_t = u_{xx} - uu_x + \lambda|u_x|^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.106}$$

$$\langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}u\partial_u\rangle :$$

$$u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + m\sqrt{|u_x|}, \quad \lambda > 0, \quad m \neq 0; \tag{2.107}$$

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda|t| + \lambda|t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (1+q)u\partial_u\rangle$$

$$(|q| \neq 1,\ \lambda \neq 0): \quad u_t = u_{xx} - \frac{\lambda}{4}\epsilon(1-q)|t|^{-\frac{1}{2}(1+q)}u_x^2 + m|t|^{\frac{1}{2}(q-1)},$$

$$\text{где} \quad \epsilon = 1 \text{ для } t > 0, \quad \epsilon = -1 \text{ для } t < 0, \quad m \in \mathbb{R}; \tag{2.108}$$

$$\langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, x\partial_u + 2\lambda t(t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u), -\partial_x,$$

$$-t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u\rangle : \tag{2.109}$$

$$u_t = u_{xx} - 2\lambda uu_x + mt^{-3}|t^2u_x - \frac{1}{2}\lambda^{-1}t|^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Алгебра $A_{4.9}$. К реализации алгебры $A_{4.9}$ приводит только расширение реализации $A^3_{3.3}$. Имеем реализацию

$$\langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \alpha\partial_x, -(\dot{\alpha})^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t + (q-\alpha)x\partial_x + [2qu - \frac{1}{2}x^2]\partial_u\rangle,$$

где $q > 0$, функция $\alpha = \alpha(t)$, $\dot{\alpha} \neq 0$, является решением уравнения (2.86).

Соответствующее инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot{\alpha}u_x^2 + (\lambda - \alpha)(1+\alpha^2)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.110}$$

Алгебра $A_{4.10}$. Попытки расширения известных реализаций алгебры $A_{3.5}$ к реализациям алгебры $A_{4.10}$ приводят к ошибочным равенствам. Следовательно, в классе операторов (2.40) алгебра $A_{4.10}$ не имеет реализаций.

Дальнейшая проверка на эквивалентность полученных уравнений показала, что все они являются неэквивалентными. Далее, замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = u - \lambda t$$

позволяет положить $\lambda = 0$ в уравнении (2.101), а замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = u + 2(1+q)^{-1}\epsilon m|t|^{\frac{1}{2}(q+1)}$$

позволяет положить $m = 0$ в уравнении (2.108).

Использование инфинитезимального метода Ли показало, что все реализации, относительно которых инвариантны уравнения (2.100)–(2.110), являются максимальными алгебрами инвариантности соответствующих уравнений. Только уравнение (2.106), в котором $\lambda = 0$, допускает расширение симметрийных свойств, но в этом случае оно с точностью до действия замены переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{u} = -u$$

совпадает с полученным выше уравнением Бюргерса. К уравнениям Бюргерса сводится и уравнение (2.109), если $m = 0$.

Основной результат групповой классификации. Поскольку все уравнения, которые получены в этом пункте, являются неэквивалентными и не содержат произвольных функций, то задачу групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.37) можно считать решенной.

Как следует из проведенных рассуждений, самые высокие симметрийные свойства среди нелинейных уравнений исследуемого вида имеет известное уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + uu_x.$$

Максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения является пятимерная алгебра Ли операторов симметрии

$$\langle \partial_x, t\partial_x - \partial_u, \partial_t, -2t\partial_t - x\partial_x + u\partial_u, t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu + x)\partial_u \rangle.$$

Существуют также тринадцать нелинейных уравнений вида (2.37), максимальными алгебрами инвариантности которых являются четырехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии. Перечень этих уравнений приведен в таблице 2.3, где мы используем такие обозначения:

$$2A^1_{2.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, -u\partial_u + \lambda\sqrt{|t|}\partial_x, \partial_u \rangle \ (\lambda \neq 0);$$

$$2A^2_{2.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, \frac{1}{\lambda}\partial_t, e^{\lambda t}\partial_x \rangle \ (\lambda \neq 0);$$

$$A^1_{4.2} = \langle \partial_t, \partial_u, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (u + x)\partial_u \rangle;$$

$$A^2_{4.2} = \langle \partial_x, \partial_u, \partial_t, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u + t)\partial_u \rangle;$$

$$A^1_{4.3} = \langle \partial_u, \partial_x, \partial_t, t\partial_x + u\partial_u \rangle;$$

$$A^1_{4.5} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + ku\partial_u \rangle \ (k \neq 0, \frac{1}{2}, 1);$$

$$A^1_{4.7} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u \rangle;$$

$$A^2_{4.7} = \langle \partial_u, -\partial_x, x\partial_u - \alpha\partial_x, \dot\alpha^{-1}\alpha^2\partial_t + \\ + (1 + \alpha)x\partial_x + (2u - \frac{1}{2}x^2)\partial_u \rangle,$$

где функция $\alpha = \alpha(t), \ddot\alpha \neq 0$ является решением уравнения (2.85);

$$A^1_{4.8} = \langle \partial_x, \partial_t, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u \rangle;$$

$$A^2_{4.8} = \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \lambda\partial_x, t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{3}{2}u\partial_u \rangle \ (\lambda > 0);$$

$$A^3_{4.8} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \lambda|t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + (1 + q)u\partial_u \rangle \\ (|q| \neq 1, \ \lambda \neq 0);$$

$$A^4_{4.8} = \langle \partial_u + 2\lambda t\partial_x, x\partial_u + 2\lambda t(t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u), -\partial_x, \\ - t\partial_t - \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u \rangle \ (\lambda > 0);$$

$$A^1_{4.9} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u + \alpha\partial_x, -(\dot\alpha)^{-1}(1 + \alpha^2)\partial_t + \\ + (q - \alpha)x\partial_x + (2qu - \frac{1}{2}x^2)\partial_u \rangle,$$

где $q > 0$, функция $\alpha = \alpha(t)$, $\dot\alpha \neq 0$ является решением уравнения (2.86).

В столбике МАИ указаны реализации четырехмерных алгебр Ли, которые являются максимальными алгебрами инвариантности соответствующих уравнений.

Таблица 2.3

Уравнения (2.37)**, инвариантные относительно четырехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии**

N п/п	Уравнения	МАИ
1	$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda\epsilon u_x}{4\sqrt{\vert t\vert}}\ln\vert tu_x^2\vert + \frac{\beta u_x}{\sqrt{\vert t\vert}}$, $\epsilon = 1$ для $t > 0$, $\epsilon = -1$ для $t < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$	$2A^1_{2.2}$
2	$u_t = u_{xx} - \lambda u_x(x + \ln\vert u_x\vert)$, $\lambda \neq 0$	$2A^2_{2.2}$
3	$u_t = u_{xx} + \lambda\exp(-u_x)$, $\lambda \neq 0$	$A^1_{4.2}$
4	$u_t = u_{xx} + 2\ln\vert u_x\vert$	$A^2_{4.2}$
5	$u_t = u_{xx} - u_x\ln\vert u_x\vert + \lambda u_x$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$A^1_{4.3}$
6	$u_t = u_{xx} + \lambda\vert u_x\vert^{\frac{2k-2}{2k-1}}$, $\lambda \neq 0$, $k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$	$A^1_{4.5}$
7	$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4t}u_x^2$	$A^1_{4.7}$
8	$u_t = u_{xx} - uu_x + \lambda\vert u_x\vert^{\frac{3}{2}}$, $\lambda \neq 0$	$A^1_{4.8}$
9	$u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + m\sqrt{\vert u_x\vert}$, $\lambda > 0$, $m \neq 0$	$A^2_{4.8}$
10	$u_t = u_{xx} - \frac{\lambda\epsilon}{4}(1 - q)\vert t\vert^{-\frac{1}{2}(1+q)}u_x^2$, $\lambda \neq 0$, $\vert q\vert \neq 1$; $\epsilon = 1$ для $t > 0$, $\epsilon = -1$ для $t < 0$	$A^3_{4.8}$
11	$u_t = u_{xx} - \frac{1}{2}\dot\alpha u_x^2 + (\lambda - \alpha)(1 + \alpha^2)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$A^1_{4.9}$
12	$u_t = u_{xx} + \frac{1}{2}\dot\alpha u_x^2 + (\lambda + \alpha)\alpha^{-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$A^2_{4.7}$
13	$u_t = u_{xx} - 2\lambda uu_x + mt^{-3}\vert t^2u_x - \frac{1}{2}\lambda^{-1}t\vert^{\frac{3}{2}}$, $\lambda > 0$, $m \neq 0$	$A^4_{4.8}$

В завершение параграфа мы предлагаем для самостоятельного решения такие задачи.

Задание 2.4. В предложенном подходе провести групповую классификацию линейного уравнения параболического типа

$$u_t = u_{xx} + A(t,x)u_x + B(t,x)u + C(t,x).$$

Сравнить полученный результат с результатом групповой классификации Л.В. Овсянникова [46] (см. также п. 2.1.1).

Задание 2.5. В предложенном подходе провести групповую классификацию линейного уравнения третьего порядка

$$u_t = A(t,x)u_{xxx} + B(t,x)u_{xx} + C(t,x)u_x + D(t,x)u + E(t,x).$$

Сравнить максимальные конечномерные алгебры инвариантности уравнения Кортевега–де Фриза и уравнения

$$u_t = u_{xxx}.$$

2.3. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционного типа

В третьем параграфе мы проводим групповую классификацию нелинейных уравнений вида

$$u_t = F(t,x,u,u_x)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \tag{2.111}$$

где $F \neq 0$.

Как и в предыдущем параграфе, для решения задачи используется предложенный в [25, 187] подход к групповой классификации с несколько измененным порядком выполнения шагов его алгоритма.

2.3.1. Предварительные результаты групповой классификации уравнения (2.111)

В соответствии с алгоритмом Ли инфинитезимальные операторы группы симметрии уравнения (2.111) ищем в виде (2.38).

Условие инвариантности уравнения (2.111) относительно оператора (2.38) имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi^t - [\tau F_t + \xi F_x + \eta F_u + \varphi^x F_{u_x}]u_{xx} -\\ - \varphi^{xx}F - \tau G_t - \xi G_x - \eta G_u - \varphi^x G_{u_x}\big|_{(2.111)} = 0.\end{aligned}$$

Произведя необходимые вычисления и преобразования и осуществив расщепление полученного равенства по степеням свободных дифференциальных переменных u_{tx}, u_{xx}, приходим к такому результату.

Предложение 2.7. *Группа симметрии уравнения* (2.111) *генерируется инфинитезимальными операторами вида*

$$Q = a(t)\partial_t + b(t,x,u)\partial_x + c(t,x,u)\partial_u, \tag{2.112}$$

где действительные гладкие функции a, b, c, F, G *удовлетворяют таким двум равенствам:*

$$\begin{aligned}&(2b_x + 2u_x b_u - \dot a)F = aF_t + bF_x + cF_u +\\ &\quad + (c_x + u_x c_u - u_x b_x - u_x^2 b_u)F_{u_x},\\ &c_t - u_x b_t + (c_u - \dot a - u_x b_u)G + (u_x b_{xx} - c_{xx} - 2u_x c_{ux} - u_x^2 c_{uu} +\\ &\quad + 2u_x^2 b_{xu} + u_x^3 b_{uu})F = aG_t + bG_x + cG_u +\\ &\quad + (c_x + u_x c_u - u_x b_x - u_x^2 b_u)G_{u_x}.\end{aligned} \tag{2.113}$$

Здесь и далее $\dot a = \dfrac{da}{dt}$, $\ddot a = \dfrac{d^2a}{dt^2}$ и т. п.

Для построения группы эквивалентности $\mathcal{E}$ уравнения (2.111) необходимо из множества невырожденных замен переменных пространства $V = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^1$ независимых $\mathbb{R}^2 = \langle t, x\rangle$ и зависимой $\mathbb{R}^1 = \langle u\rangle$ переменных

$$\begin{aligned}&\bar t = \alpha(t,x,u), \quad \bar x = \beta(t,x,u),\\ &v = \gamma(t,x,u), \quad \frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(t,x,u)} \neq 0,\end{aligned} \tag{2.114}$$

отобрать те преобразования, которые сохраняют вид уравнения (2.111) неизменным.

Предложение 2.8. *Группу* $\mathcal{E}$ *составляют преобразования*

$$\bar t = T(t), \quad \bar x = X(t,x,u), \quad v = U(t,x,u), \tag{2.115}$$

где $\dot T \neq 0$, $\dfrac{D(X,U)}{D(x,u)} \neq 0$.

Доказательство. Пусть невырожденная замена переменных (2.114) преобразовывает уравнение (2.111) в уравнение

$$v_{\bar t} = \tilde F(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x})v_{\bar x\bar x} + \tilde G(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x}). \tag{2.116}$$

В соответствии с общим правилом замены переменных имеем

$$u_x = \frac{v_{\bar t}\alpha_x + v_{\bar x}\beta_x - \gamma_x}{\gamma_u - v_{\bar t}\alpha_u - v_{\bar x}\beta_u}. \tag{2.117}$$

Поскольку функции F, G в (2.111) и $\tilde F$, $\tilde G$ в (2.116) являются произвольными функциями своих аргументов, то должно выполняться условие

$$u_x \to g(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x}).$$

Поэтому в (2.117) $\alpha_x = \alpha_u = 0$. Следовательно, в (2.114) обязательно $\alpha = T(t)$, $\dot T \neq 0$.

Далее, выполнив замену переменных (2.114), где $\alpha = T(t)$, приходим к таким преобразованиям:

$$\begin{aligned} &u_t \to v_{\bar t}\dot T(\gamma_u - v_{\bar x}\beta_u)^{-1} + \theta_1(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x}),\\ &u_{xx} \to v_{\bar x\bar x}\theta_2(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x}) + \theta_3(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x}). \end{aligned} \tag{2.118}$$

Здесь функции θ_1, θ_2, θ_3 приобретают совершенно конкретные значения и при этом $\theta_2 \neq 0$. Вследствие невырожденности замены переменных $\gamma_u - v_{\bar x}\beta_u \neq 0$. Поэтому в результате подстановки этих значений (2.118) в уравнение (2.111) приходим к уравнению вида (2.116). ■

Как следует из результатов предложения 2.7, инфинитезимальные операторы, генерирующие группу инвариантности уравнения (2.111), принадлежат к более широкому классу линейных дифференциальных операторов, чем инфинитезимальные операторы, которые генерируют группу симметрии уравнения (2.37). С другой стороны, и группа эквивалентности уравнения (2.111) является значительно более широкой, чем группа эквивалентности уравнения (2.37). В частности, она содержит преобразование

$$\bar t = t, \quad \bar x = u, \quad v = x, \tag{2.119}$$

которое значительно сужает перечень неэквивалентных уравнений вида (2.111). В этом мы убеждаемся, выполняя уже первый шаг алгоритма метода групповой классификации для уравнения (2.111).

Теорема 2.5. *Существуют замены переменных* (2.115)*, которые сводят оператор* (2.112) *к одному из таких двух операторов:*

$$Q = \partial_t; \tag{2.120}$$

$$Q = \partial_x. \tag{2.121}$$

Доказательство. В результате выполнения замены переменных (2.115) оператор (2.112) преобразовывается в оператор

$$Q \to \bar Q = a\dot T\partial_{\bar t} + (aX_t + bX_x + cX_u)\partial_{\bar x} + (aU_t + bU_x + cU_u)\partial_v. \tag{2.122}$$

Пусть в (2.112) $a \neq 0$. Тогда, положив в (2.115) функцию T равной решению уравнения $\dot T = a^{-1}$, а функции X и U — равными фундаментальным решениям однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$aY_t + bY_x + cY_u = 0, \quad Y = Y(t, x, u),$$

убеждаемся, что оператор (2.122) приобретает вид $\bar Q = \partial_{\bar t}$.

Пусть теперь в (2.112) $a = 0$. Тогда в (2.112) обязательно или $b \neq 0$, или $c \neq 0$. Если $b \neq 0$, то, положив в (2.115) функцию X равной частному решению уравнения

$$bX_x + cX_u = 1,$$

а функцию U — равной фундаментальному решению уравнения

$$bU_x + cU_u = 0,$$

преобразуем оператор (2.122) в оператор $\bar Q = \partial_{\bar x}$.

Если же в (2.112) $b = 0$, $c \neq 0$, то с точностью до действия замены переменных (2.119) имеем предыдущий случай.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что не существуют преобразования из группы $\mathcal{E}$, которые преобразуют оператор (2.120) в оператор $\partial_{\bar x}$. ■

Следствие 2.2. *Если нелинейное уравнение вида* (2.111) *допускает одномерную алгебру инвариантности A_1, то с точностью до эквивалентности оно совпадает с одним из таких двух уравнений:*

$$u_t = F(x, u, u_x)u_{xx} + G(x, u, u_x), \tag{2.123}$$

$$u_t = F(t, u, u_x)u_{xx} + G(t, u, u_x). \tag{2.124}$$

Максимальные алгебры инвариантности этих уравнений, соответственно, имеют вид: $A_1^1 = \langle\partial_t\rangle$, $A_1^2 = \langle\partial_x\rangle$.

Доказательство. Если уравнение (2.111) допускает одномерную алгебру инвариантности, то ее базисный оператор имеет вид (2.112) и преобразованиями (2.115) может быть сведен к одному из операторов (2.120), (2.121).

Используя классифицирующие уравнения (2.113), убеждаемся, что инвариантные относительно этих операторов уравнения вида (2.111), соответственно, совпадают с уравнениями (2.123), (2.124). Использование инфинитезимального метода Ли показало, что когда функции F и G в полученных уравнениях являются произвольными функциями своих аргументов, то соответствующие одномерные алгебры Ли операторов симметрии являются максимальными алгебрами инвариантности этих уравнений.

Наконец, неэквивалентность уравнений (2.123), (2.124) следует из неэквивалентности их алгебр инвариантности. ■

Используя результаты предложений 2.7, 2.8, теоремы 2.5 и следствия из нее, переходим к дальнейшей групповой классификации уравнений вида (2.111). Сначала мы проведем классификацию нелинейных уравнений вида (2.111), алгебры инвариантности которых являются алгебрами Ли операторов симметрии с нетривиальным разложением Леви.

2.3.2. Инвариантность уравнений (2.111) относительно алгебр Ли операторов симметрии с нетривиальным разложением Леви

Если максимальная алгебра инвариантности дифференциального уравнения является алгеброй Ли операторов симметрии с нетривиальным разложением Леви, то она содержит как подалгебру некоторую полупростую алгебру Ли операторов симметрии. Следовательно, данное дифференциальное уравнение будет инвариантным относительно некоторой полупростой алгебры Ли операторов симметрии. Поэтому здесь, как и при исследовании уравнений вида (2.37), мы начинаем с описания $so(3)$- и $sl(2,\mathbb{R})$-инвариантных нелинейных уравнений вида (2.111).

Теорема 2.6. *С точностью до эквивалентности в классе операторов* (2.112) *существует одна реализация алгебры* $so(3)$

$$\langle \partial_x, \operatorname{tg} u \sin x\partial_x + \cos x\partial_u, \operatorname{tg} u\cos x\partial_x - \sin x\partial_u\rangle, \tag{2.125}$$

которая является алгеброй инвариантности уравнения вида (2.111). *При этом в* (2.111)

$$F = \frac{\sec^2 u}{1+\omega^2}, \quad G = \frac{2\omega^2+1}{1+\omega^2}\operatorname{tg} u + \sqrt{1+\omega^2}\tilde G(t),$$
$$\omega = u_x \sec u. \tag{2.126}$$

Если в (2.126) $\tilde G$ *— произвольная функция своего аргумента, то реализация* (2.125) *является максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения.*

Доказательство. Алгебра $so(3) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1. \tag{2.127}$$

Для описания реализаций алгебры $so(3)$ мы должны в качестве базисных операторов e_i $(i = 1, 2, 3)$ взять операторы вида (2.112) и отобрать такие тройки операторов, которым удовлетворяли бы коммутационные соотношения (2.127). Для упрощения вида этих операторов мы можем использовать преобразования (2.115).

В соответствии с результатами теоремы 2.5 один из базисных операторов алгебры $so(3)$ (например, оператор e_1) мы можем сразу положить равным ∂_t или ∂_x.

Пусть $e_1 = \partial_t$. Тогда из выполнения первых двух коммутационных соотношений (2.127) следует, что

$$e_2 = \lambda\cos t\partial_t + [b\cos t + \beta\sin t]\partial_x + [c\cos t + \gamma\sin t]\partial_u,$$
$$e_3 = -\lambda\sin t\partial_t + [-b\sin t + \beta\cos t]\partial_x + [-c\sin t + \gamma\cos t]\partial_u,$$

где $\lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$; $b = b(x,u)$, $c = c(x,u)$, $\beta = \beta(x,u)$, $\gamma = \gamma(x,u)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов. Но проверка третьего коммутационного соотношения (2.127) приводит к равенству $\lambda^2 = -1$, которое не имеет смысла в действительной области. Следовательно, в этом случае не существует реализаций алгебры $so(3)$ в классе операторов (2.112).

Пусть теперь $e_1 = \partial_x$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что среди преобразований группы $\mathcal{E}$ только преобразования

$$\bar t = T(t), \quad \bar x = x + X(t,u), \quad v = U(t,u), \quad \dot T \neq 0, \quad U_u \neq 0 \tag{2.128}$$

не изменяют вид оператора e_1.

Далее, из выполнения первых двух коммутационных соотношений (2.127) следует, что

$$e_2 = \alpha\cos(x+\gamma)\partial_x + \beta\cos(x+\theta)\partial_u,$$
$$e_3 = -\alpha\sin(x+\gamma)\partial_x - \beta\sin(x+\theta)\partial_u, \tag{2.129}$$

где $\alpha = \alpha(t,u)$, $\gamma = \gamma(t,u)$, $\beta = \beta(t,u)$, $\theta = \theta(t,u)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов. Если в (2.129) $\beta = 0$, то проверка третьего коммутационного соотношения (2.127) приводит к равенству $\alpha^2 = -1$, которое не имеет смысла в действительной области. Поэтому в (2.129) обязательно $\beta \neq 0$. Положив в (2.128) $X = \theta$, а функцию U — равной решению уравнения $U_u = \beta^{-1}$, видим, что операторы e_2, e_3 в результате такой замены переменных преобразовываются в операторы (оставляем начальные обозначения переменных)

$$e_2 = \alpha\cos(x+\gamma)\partial_x + \cos x\partial_u,$$
$$e_3 = -\alpha\sin(x+\gamma)\partial_x - \sin x\partial_u,$$

где $\alpha = \alpha(t,u)$, $\gamma = \gamma(t,u)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Проверка третьего коммутационного соотношения (2.127) для полученных операторов e_1, e_2 приводит к равенствам

$$\cos\gamma = 0, \quad \alpha^2 + \alpha_u\sin\gamma = -1,$$

откуда следует, что

$$e_2 = \operatorname{tg}[u \pm \tilde\alpha(t)]\sin x\partial_x + \cos x\partial_u,$$
$$e_3 = \operatorname{tg}[u \pm \tilde\alpha(t)]\cos x\partial_x - \sin x\partial_u,$$

где $\tilde\alpha(t)$ — произвольная гладкая функция переменной t.

Наконец, положив в (2.128) $T = t$, $X = 0$, $U = u \pm \tilde\alpha(t)$, убеждаемся, что полученная реализация сводится к реализации вида (2.125).

Проверим далее, будет ли реализация (2.125) алгеброй инвариантности уравнений вида (2.111). Для оператора e_1 в инвариантном уравнении $F = F(t,u,u_x)$, $G = G(t,u,u_x)$. Поэтому для операторов e_2 и e_3 условия (2.113) эквивалентны такой системе дифференциальных уравнений:

$$F_u - u_x\operatorname{tg}uF_{u_x} = 2\operatorname{tg}u\cdot F,$$
$$(1+u_x^2\sec^2 u)F_{u_x} = -2u_x\sec^2 u\cdot F,$$
$$u_x\sec^2 u\cdot G + u_x\operatorname{tg}u(1-2u_x^2\sec^2 u)F = (1+u_x^2\sec^2 u)\cdot G_{u_x},$$
$$(1+2u_x^2\sec^2 u)F = G_u - u_x\operatorname{tg}u\cdot G_{u_x}.$$

Из первых двух уравнений системы следует, что $F = \dfrac{\sec^2 u}{1+\omega^2}\tilde F(t)$, где $\omega = u_x\sec u$. Из четвертого уравнения системы получаем, что $G = \dfrac{2\omega^2+1}{1+\omega^2}\operatorname{tg}u\tilde F(t) + \bar G(t,\omega)$. Наконец, из третьего уравнения системы следует, что $\bar G = \sqrt{1+\omega^2}\tilde{\tilde G}(t)$. Следовательно, если реализация (2.125) алгебры $so(3)$ является алгеброй инвариантности уравнения (2.111), то в инвариантном уравнении

$$F = \frac{\sec^2 u}{1+\omega^2}\tilde F(t), \quad G = \frac{2\omega^2+1}{1+\omega^2}\operatorname{tg}u\tilde F(t) + \sqrt{1+\omega^2}\tilde G(t),$$
$$\omega = u_x\sec u. \tag{2.130}$$

Здесь $\tilde F(t)$, $\tilde G(t)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов и при этом $\tilde F(t) \neq 0$.

Замена переменных (2.128), где $X = 0$, $U = u$, не меняет вид операторов реализации (2.125). Поэтому, положив T равным решению уравнения $\dot T = \tilde F$, можем преобразовать полученное инвариантное уравнение (2.130) в такое, где $\tilde F(t) = 1$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для произвольной функции $\tilde G(t)$ реализация (2.125) является максимальной алгеброй инвариантности полученного уравнения вида (2.111), где функции F и G имеют значение (2.126). ■

Теорема 2.7. *С точностью до эквивалентности в классе операторов* (2.112) *существуют пять реализаций алгебры* $sl(2,\mathbb{R})$, *которые являются алгебрами инвариантности уравнений вида* (2.111)*:*

$$\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \partial_t\rangle; \tag{2.131}$$
$$\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t + x(x^2-t)\partial_x, \partial_t, \rangle; \tag{2.132}$$
$$\langle 2x\partial_x - u\partial_u, -x^2\partial_x + xu\partial_u, \partial_x\rangle; \tag{2.133}$$
$$\langle 2x\partial_x - u\partial_u, (u^{-4}-x^2)\partial_x + xu\partial_u, \partial_x\rangle; \tag{2.134}$$
$$\langle 2x\partial_x - u\partial_u, -(u^{-4}+x^2)\partial_x + xu\partial_u, \partial_x\rangle. \tag{2.135}$$

Значения функций F *и* G *в соответствующих инвариантных уравнениях такие:*

$sl(2,\mathbb{R})$	F	G
(2.131)	$\tilde F(\omega)$	$x^{-2}\left[\tilde G(\omega) - 2u\tilde F(\omega) + u^2 - u\omega\right]$, $\omega = 2u - xu_x$
(2.132)	ω^{-3}	$x^{-2}\left[-\frac{1}{4}\omega + 3\omega^{-2} + \omega^{-1}\tilde G(u)\right]$, $\omega = xu_x$
(2.133)	u^{-4}	$-2u^{-5}u_x^2$
(2.134)	$u^{-4}\left(1+4\omega^2\right)^{-1}$	$u\left[\sqrt{1+4\omega^2}\tilde G(t) - \frac{10\omega^2+1}{8\omega^2+2}\right]$, $\omega = u^{-3}u_x$
(2.135)	$u^{-4}\left(1-4\omega^2\right)^{-1}$	$u\left[\sqrt{\lvert 1-4\omega^2\rvert}\tilde G(t) + \frac{10\omega^2-1}{8\omega^2-2}\right]$, $\omega = u^{-3}u_x$

Если в инвариантных уравнениях функции $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ являются произвольными функциями своих аргументов, то соответствующие реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ являются максимальными алгебрами инвариантности этих уравнений. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения $u_t = u^{-4}u_{xx} - 2u^{-5}u_x^2$ (третьего в перечне) является пятимерная алгебра Ли операторов симметрии, изоморфная алгебре $sl(2,\mathbb{R}) \oplus L_{2.1}$, где $sl(2,\mathbb{R})$ совпадает с реализацией (2.133), а $L_{2.1} = \langle 4t\partial_t + u\partial_u, \partial_t\rangle$.

Доказательство. Алгебра $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1. \tag{2.136}$$

В соответствии с результатами теоремы 2.5 мы можем сразу один из базисных операторов реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ (выбираем оператор e_3) взять равным оператору ∂_t или оператору ∂_x.

Пусть $e_3 = \partial_t$. Тогда из выполнения второго коммутационного соотношения (2.136) следует, что с точностью до эквивалентности оператор e_1 совпадает или с оператором $2t\partial_t$, или с оператором $2t\partial_t + x\partial_x$.

Если $e_1 = 2t\partial_t$, то из выполнения остальных коммутационных соотношений (2.136) следует, что $e_2 = -t^2\partial_t$. Пришли к реализации $\langle 2t\partial_t,\ -t^2\partial_t, \partial_t\rangle$. Но требование того, чтобы полученная реализация являлась алгеброй инвариантности уравнения (2.111), приводит к равенству $F = 0$, что противоречит предположению о том, что в уравнении $F \neq 0$.

Если же $e_1 = 2t\partial_t + x\partial_x$, то с точностью до эквивалентности имеют место реализация $\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x, \partial_t\rangle$, а также реализации (2.131) и (2.132) алгебры $sl(2,\mathbb{R})$.

Проверка условий (2.113) показывает, что первая реализация не может быть алгеброй инвариантности уравнения (2.111); для реализации (2.131)

$$F = \tilde{F}(\omega), \quad G = x^{-2}\left[\tilde{G}(\omega) - 2u\tilde{F}(\omega) + u^2 - u\omega\right],$$
$$\omega = 2u - xu_x,$$

а для реализации (2.132) —

$$F = \omega^{-3}\tilde{F}(u), \quad G = x^{-2}\left[-\frac{1}{4}\omega + 3\omega^{-2}\tilde{F}(u) + \omega^{-1}\tilde{G}(u)\right],$$
$$\omega = xu_x.$$

Нетрудно убедиться, что замена переменных

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad u = U(v), \quad U' \neq 0, \quad v = v(t,x)$$

оставляет вид базисных операторов реализации (2.132) неизменным. Поэтому, положив функцию U равной решению уравнения $(U')^3 = \tilde{F}(U)$, видим, что с точностью до эквивалентности в найденных для реализации (2.132) значениях функций F и G можно положить $\tilde{F} \equiv 1$.

Пусть теперь $e_3 = \partial_x$. Тогда из выполнения коммутационных соотношений (2.136) следует, что с точностью до эквивалентности в классе операторов (2.112) реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ исчерпываются реализацией $\langle 2x\partial_x, -x^2\partial_x, \partial_x\rangle$ и реализациями (2.133), (2.134), (2.135).

Проверка условий (2.113) показывает, что первая реализация не может быть алгеброй инвариантности уравнений вида (2.111). Остальные реализации удовлетворяют условиям поставленной задачи. При этом для реализации (2.133)

$$F = u^{-4}\tilde{F}(t), \quad G = -2u^{-5}u_x^2\tilde{F}(t) + u\tilde{G}(t);$$

для реализации (2.134)

$$F = \frac{1}{u^4\left(1 + 4\omega^2\right)}\tilde{F}(t), \quad G = u\left[\sqrt{1 + 4\omega^2}\tilde{G}(t) - \frac{10\omega^2 + 1}{8\omega^2 + 2}\tilde{F}(t)\right],$$
$$\omega = u^{-3}u_x;$$

а для реализации (2.135)

$$F = \frac{1}{u^4\left(1 - 4\omega^2\right)}\tilde{F}(t),$$
$$G = u\left[\sqrt{|1 - 4\omega^2|}\tilde{G}(t) + \frac{10\omega^2 - 1}{8\omega^2 - 2}\tilde{F}(t)\right], \quad \omega = u^{-3}u_x.$$

Нетрудно убедиться, что замена переменных

$$\bar{t} = T, \quad \bar{x} = x, \quad v = U(t)u, \quad T \neq 0, \quad U \neq 0,$$

оставляет вид базисных операторов реализации (2.133) неизменным. Поэтому, положив здесь функции T и U равными решениям уравнений $\dot{U} = U\tilde{G}(t)$, $U \neq 0$, $\dot{T} = \tilde{F}U^4$, видим, что с точностью до эквивалентности в первом полученном инвариантном уравнении можно положить $\tilde{F} \equiv 1$, $\tilde{G} \equiv 0$.

Аналогично, непосредственной проверкой убеждаемся, что замена переменных

$$\bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = x, \quad v = u$$

оставляет вид базисных операторов реализаций (2.134)–(2.135) неизменным. Поэтому, положив $T(t) = \int^t \tilde{F}(\xi)d\xi$, в соответствующих инвариантных уравнениях с точностью до эквивалентности можно считать $\tilde{F} \equiv 1$.

Уравнение, которое является инвариантным относительно реализации (2.133), не содержит произвольных функций. Поэтому, воспользовавшись алгоритмом Ли, получаем, что его максимальной алгеброй инвариантности является пятимерная алгебра Ли операторов симметрии, которая является прямой суммой полупростой алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ с базисными операторами (2.133) и двухмерной разрешимой алгебры Ли $L_{2.1} = \langle 4t\partial_t + u\partial_u, \partial_t\rangle$.

Остальные инвариантные уравнения содержат произвольные функции, и непосредственная проверка показывает, что в общем случае соответствующие реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ являются их максимальными алгебрами инвариантности.

Для завершения доказательства теоремы необходимо убедиться в неэквивалентности полученных $sl(2,\mathbb{R})$-инвариантных уравнений. Поскольку размерность максимальной алгебры инвариантности третьего в перечне уравнения равна 5, то его неэквивалентность остальным уравнениям (алгебры инвариантности которых имеют размерность 3) очевидна.

Для проверки неэквивалентности остальных уравнений убеждаемся, что не существует таких преобразований (2.115), которые сводили бы алгебры инвариантности этих уравнений одна в другую.

Остановимся, например, на случае первого и второго уравнений из перечня. Пусть

$$e_1 = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad e_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \quad e_3 = \partial_t.$$
$$\overline{e}_1 = 2\overline{t}\partial_{\overline{t}} + \overline{x}\partial_{\overline{x}}, \quad e_2 = -\overline{t}^2\partial_{\overline{t}} - \overline{x}(\overline{x}^2 - \overline{t})\partial_{\overline{x}}, \quad \overline{e}_3 = \partial_{\overline{t}}.$$

Предположим, что существуют преобразования (2.115), которые переводят реализацию (2.131) в реализацию (2.132):

$$e_i \overset{(2.115)}{\rightarrow} E_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\overline{e}_j, \tag{2.137}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j = 1,2,3)$, $\det\|\alpha_{ij}\| \neq 0$. Из выполнения (2.137) следует, что должны выполняться равенства

$$\begin{aligned}
&2t\dot{T} = 2\alpha_{11}T - \alpha_{12}T^2 + \alpha_{13}, \quad 2tU_t + xU_x = 0,\\
&2tX_t + xX_x = \alpha_{11}X + \alpha_{12}X(X^2 - T),\\
&-t^2\dot{T} = 2\alpha_{21}T - \alpha_{22}T^2 + \alpha_{23},\\
&-t^2X_t - txX_x + x^2X_u = \alpha_{21}X + \alpha_{22}X(X^2 - T),\\
&-t^2U_t - txU_x + x^2U_u = 0, \quad U_t = 0,\\
&\dot{T} = 2\alpha_{31}T - \alpha_{32}T^2 + \alpha_{33}, \quad X_t = \alpha_{31}X + \alpha_{32}X(X^2 - T).
\end{aligned}$$

Но тогда $U_t = U_x = U_u = 0$. А это противоречит условию невырожденности замен переменных (2.115). Следовательно, наше предположение ошибочно, а поэтому первое и второе $sl(2,\mathbb{R})$-инвариантные уравнения из перечня теоремы неэквивалентны.

К аналогичному результату привело рассмотрение и остальных возможных пар $sl(2,\mathbb{R})$-инвариантных уравнений. ■

Теорема 2.8. *В классе операторов* (2.112)*, кроме полученных реализаций алгебр* $so(3)$ *и* $sl(2,\mathbb{R})$*, не существует других реализаций полупростых алгебр Ли, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида* (2.111).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.3, достаточно убедиться, что в классе операторов (2.112), кроме реализаций, полученных в теоремах 2.6 и 2.7, не существует других реализаций полупростых действительных алгебр Ли, удовлетворяющих условиям сформулированной задачи, то есть таких, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111).

Рассмотрим сначала случай классических полупростых действительных алгебр Ли. Алгебры размерности 3 рассмотрены в теоремах 2.6 и 2.7, поэтому дальнейшему исследованию подлежат алгебры размерности 6: $so(4)$, $so(3,1)$, $so(2,2)$, $so^*(4)$.

Поскольку $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, то $so(4) = \langle e_i, \bar{e}_i | i = 1,2,3\rangle$, где $\langle e_1, e_2, e_3\rangle = so(3)$, $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\rangle = so(3)$ и $[e_i, \bar{e}_j] = 0$, $i,j = 1,2,3$. В соответствии с результатами теоремы 2.6 существует единственная реализация алгебры $so(3)$, которая является алгеброй инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111). Положим базисные операторы e_i $(i = 1,2,3)$, соответственно, равными базисным операторам реализации (2.125). Тогда из условия $[e_i, \bar{e}_j] = 0$ $(i,j = 1,2,3)$ вытекает, что операторы $\bar{e}_j$ нужно рассматривать в таком классе операторов:

$$\bar{e} = a(t)\partial_t, \quad a \neq 0. \tag{2.138}$$

Поскольку замена переменных

$$\bar{t}=T(t),\quad \bar{x}=x,\quad v=u$$

оставляет вид операторов (2.125) неизменным, то один из операторов $\bar{e}_j$ $(j=1,2,3)$ вида (2.138) можно свести к оператору $\partial_{\bar{t}}$. Пусть $\bar{e}_1 = \partial_t$. Тогда проверка коммутационных соотношений алгебры $so(3)$ показывает, что

$$\bar{e}_2=\lambda\cos(t+\lambda_1)\partial_t,\quad \bar{e}_3=-\lambda\sin(t+\lambda_1),$$

где $\lambda_1,\lambda\in\mathbb{R}$ и $\lambda^2=-1$. Но последнее равенство в действительной области не имеет смысла. Отсюда следует, что не существуют реализации алгебры $so(4)$ в классе операторов (2.112), которые были бы алгебрами инвариантности уравнений вида (2.111).

Поскольку $so^*(4)\sim so(3)\oplus sl(2,\mathbb{R})$, то для построения ее реализаций нужно описать реализации алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ в классе операторов (2.138). Но, как было показано при доказательстве теоремы 2.7, в классе операторов (2.138) существует одна реализация этой алгебры: $\langle 2t\partial_t,-t^2\partial_t,\partial_t\rangle$, которая не может быть алгеброй инвариантности уравнений вида (2.111).

Алгебра $so(3,1)$ имеет разложение Картана $\langle e_1,e_2,e_3\rangle\dot{+}\langle N_1,N_2,N_3\rangle$, где $\langle e_1,e_2,e_3\rangle = so(3)$, $[e_i,N_j]=\epsilon_{ijl}N_l$, $[N_i,N_j]=-\epsilon_{ijl}e_l$, $i,j,l = 1,2,3$; ϵ_{ijl} — антисимметричный тензор третьего ранга, $\epsilon_{123}=1$. Поэтому, положив операторы e_i $(i=1,2,3)$ равными, соответственно, базисным операторам реализации (2.125), получаем, что с точностью до эквивалентности

$$N_1=\cos u\partial_u,\quad N_2=-\sec u\cos x\partial_x+\sin u\sin x\partial_u,$$
$$N_3=\sec u\sin x\partial_x+\sin u\cos x\partial_u.$$

Но проверка условий (2.113) уже для оператора N_1 приводит к равенству $F=0$, которое противоречит требованию $F\neq 0$ для уравнения (2.111).

При описании реализаций алгебры $so(2,2)$ мы воспользовались тем, что $so(2,2)\sim sl(2,\mathbb{R})\oplus sl(2,\mathbb{R})$. Это дало возможность выбрать базисные операторы этой алгебры так, чтобы $so(2,2)=\langle e_i,\bar{e}_i|i = 1,2,3\rangle$, где $\langle e_1,e_2,e_3\rangle=sl(2,\mathbb{R})$, $\langle\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\rangle=sl(2,\mathbb{R})$ и $[e_i,\bar{e}_j]=0$ $(i,j=1,2,3)$. Перебор всех троек (2.131)–(2.135) для операторов e_i $(i=1,2,3)$ показал, что не существует реализаций алгебры $so(2,2)$, которые были бы алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111).

Следовательно, не существует ни одной реализации шестимерных классических полупростых алгебр Ли, которые бы удовлетворяли условиям поставленной задачи.

К аналогичному результату привело и рассмотрение алгебр Ли, которые имеют следующую размерность 8: $sl(3,\mathbb{R})$, $su(3)$ и $su(2,1)$.

А как было показано в доказательстве теоремы 2.3 из предыдущего параграфа, в этом случае не будут существовать реализации как классических полупростых алгебр Ли размерности выше трех, так и исключительных полупростых алгебр Ли. ■

Поскольку полученными в теоремах 2.6 и 2.7 уравнениями исчерпываются те, которые допускают полупростые алгебры Ли операторов симметрии, то для описания уравнений, алгебры инвариантности которых имеют нетривиальное разложение Леви, нужно изучить возможности расширения симметрийных свойств тех уравнений, которые содержат произвольные функции одного аргумента. Поэтому будем использовать стандартные приемы групповой классификации.

Так, подстановка в первое равенство (2.113) значения (2.126) функции F приводит к такой системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad 2b_x-\dot{a}-2c\operatorname{tg}u=0,\\ &\text{(ii)}\quad b_u+c_x\sec^2 u=0,\\ &\text{(iii)}\quad 2c_u-\dot{a}=0. \end{aligned}$$

Из уравнения (iii) следует, что $c=\frac{1}{2}\dot{a}u+\tilde{c}(t,x)$. Тогда из условия совместности уравнений (i) и (ii) следует, что $\dot{a}=0$, $\tilde{c}_{xx}+\tilde{c}=0$, а поэтому

$$\dot{a}=0,\quad b=[f(t)\sin x-g(t)\cos x]tgu+h(t),$$
$$c=f(t)\cos x+g(t)\sin x,$$

где f, g, h — произвольные гладкие функции переменной t.

После подстановки значений (2.126) функций F и G во второе равенство (2.113) видим, что $a\dot{\tilde{G}}=0$, $\dot{f}=\dot{g}=\dot{h}=0$. Отсюда следует, что расширение симметрии возможно при условии $\tilde{G}=\lambda$, $\lambda=\text{const}$. В этом случае максимальная алгебра симметрии инвариантного уравнения является четырехмерной алгеброй Ли операторов симметрии $so(3)\oplus L_1$, где $so(3)$ совпадает с реализацией (2.125), а $L_1=\langle\partial_t\rangle$.

К аналогичному результату приводит и рассмотрение уравнений, которые инвариантны относительно реализаций (2.132), (2.134) и (2.135). Здесь расширение симметрии также возможно при условии $\tilde{G}=\lambda$, $\lambda=\text{const}$, и максимальные алгебры инвариантности являются четырехмерными алгебрами Ли операторов симметрии вида $sl(2,\mathbb{R})\oplus L_1$. При этом если $sl(2,\mathbb{R})$ совпадает с реализацией (2.132), то $L_1 = \langle\partial_u\rangle$; если же $sl(2,\mathbb{R})$ совпадает с реализациями (2.134) и (2.135), то $L_1 = \langle\partial_t\rangle$.

Осталось рассмотреть $sl(2,\mathbb{R})$-инвариантное уравнение, которое инвариантно относительно реализации (2.131). В результате подстановки полученных значений функций F и G в равенства (2.113) приходим к уравнениям:

$$(A-2B\omega)\tilde F = (C+D\omega+B\omega^2)\dot{\tilde F}, \tag{2.139}$$

$$(E+B\omega)\tilde G-(C+D\omega+B\omega^2)\dot{\tilde G} = \bar e + L\omega + \\ +(M+N\omega+P\omega^2+S\omega^3)\tilde F - 2u(C+D\omega+B\omega^2)\dot{\tilde F}, \tag{2.140}$$

где

$$A = 2xb_x - x\dot a + 4ub_u, \quad B = b_u,$$
$$C = 2xc - x^2c_x - 2u(b+xc_u-xb_x)+4u^2b_u,$$
$$D = b + xc_u - xb_x - 4ub_u,$$
$$\bar e = -x^3c_t + 2x^2ub_t + x^2uc_x + xu^2(c_u-2b_x+\dot a) - 2u^3b_u,$$
$$L = -x^2b_t - xc + ub + ux(b_x-\dot a) + u^2b_u,$$
$$E = 2b + x(c_u-\dot a) - 2ub_u,$$
$$M = 2uE - 2xc + x^3c_{xx} - 2x^2u(b_{xx}-2c_{xu}) - \\ - 4xu^2(2b_{xu}-c_{uu}) - 8u^3b_{uu},$$
$$N = 2ub_u + x^2(b_{xx}-2c_{xu}) + 4xu(2b_{xu}-c_{uu}) + 12u^2b_{uu},$$
$$P = -x(2b_{xu}-c_{uu}) - 6ub_{uu}, \quad S = b_{uu},$$
$$\dot{\tilde F} = \frac{d\tilde F}{d\omega}, \quad \dot{\tilde G} = \frac{d\tilde G}{d\omega}, \quad \omega = 2u - xu_x.$$

Расширение симметрийных свойств исследуемого уравнения возможно тогда, когда выполнение равенств (2.139) и (2.140) не требует равенства нулю всех коэффициентов A, B, C, D в уравнении (2.139). То есть тогда, когда функция $\tilde F$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$(k-2m\omega)\tilde F = (n+p\omega+m\omega^2)\dot{\tilde F} \tag{2.141}$$

с постоянными коэффициентами k, m, n, p, которые одновременно не обращаются в нуль.

Отметим, что преобразования

$$\bar t = t, \quad \bar x = \delta x, \quad v = \delta^2 u + \delta_1, \quad \delta\neq 0, \quad \delta_1\in\mathbb{R}, \tag{2.142}$$

оставляют вид базисных операторов реализации (2.131) (а значит, и вид соответствующего инвариантного уравнения) неизменным. При этом в результате выполнения (2.142) имеют место соотношения

$$\tilde F \longrightarrow \bar F = \delta^2\tilde F,$$
$$\tilde G \longrightarrow \bar G = \delta^4\tilde G + 2\delta_1\delta^2\tilde F + \delta_1\delta^2\omega + \delta_1^2,$$
$$\omega \longrightarrow \bar\omega = \delta^2\omega + 2\delta_1.$$

Проводя анализ классификационного соотношения (2.141), мы будем пользоваться тем, что отношения эквивалентности исследуемого уравнения естественным образом переносятся на уравнение (2.141): после действия преобразования эквивалентности (2.142) уравнение (2.141) сохраняет свой вид с заменой коэффициентов по правилу

$$k \longrightarrow \delta^{-2}(k+4\delta_1\delta^{-2}m), \quad m \longrightarrow \delta^{-4}m,$$
$$n \longrightarrow n - 2\delta_1\delta^{-2}p + 4\delta_1^2\delta^{-4}m, \quad p \longrightarrow \delta^{-2}p - 4\delta_1\delta^{-4}m. \tag{2.143}$$

Также заметим, что замена переменных

$$\bar t = -t, \quad \bar x = x, \quad v = -u \tag{2.144}$$

преобразовывает базисные операторы реализации (2.131) согласно правилу

$$e_1 \longrightarrow \bar e_1 = e_1, \quad e_2 \longrightarrow \bar e_2 = -e_2, \quad e_3 \longrightarrow \bar e_3 = -e_3.$$

Это дает возможность вместе с преобразованиями (2.142) при анализе классификационного соотношения (2.141) использовать и преобразования (2.144). Если в (2.141) $\tilde F$ не является постоянной величиной (то есть с точностью до эквивалентности $\tilde F\neq 1$), то обязательно $|k| + |m|\neq 0$, а если $m=0$, то $|n|+|p|\neq 0$.

Пусть $m=0$. Тогда, в зависимости от значений n и p, используя преобразования (2.144) и соотношения (2.143), равенство (2.141) можно свести либо к виду $\omega\dot{\tilde F} = \alpha\tilde F$ ($\alpha\neq 0$), либо к виду $\dot{\tilde F} = \tilde F$. Отсюда получаем такие два значения функции $\tilde F$: $\tilde F = \lambda\omega^\alpha$ ($\alpha\cdot\lambda\neq 0$), $\tilde F = \lambda\exp(\omega)$ ($\lambda\neq 0$).

Пусть теперь $m \neq 0$. Тогда равенство (2.141) можно свести к виду

$$(\omega^2 + \alpha\omega + \gamma)\dot{\tilde{F}} = -2\omega\tilde{F}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, в зависимости от значений α, получаем еще такие значения функции $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = \lambda(\omega^2 + \gamma)^{-1}, \quad \gamma \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0;$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda}{\left(\omega + \frac{\alpha}{2}\right)^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{\omega + \frac{\alpha}{2}}\right), \quad \alpha \cdot \lambda \neq 0;$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda}{(\omega + \frac{\alpha}{2})^2 + \beta^2} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{\omega + \frac{\alpha}{2}}{\beta}\right),$$

$$\alpha \cdot \lambda \neq 0,\ \gamma - \frac{\alpha^2}{4} = \beta^2 > 0;$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda}{(\omega + \frac{\alpha}{2})^2 - \beta^2} \left|\frac{\omega + \frac{\alpha}{2} - \beta}{\omega + \frac{\alpha}{2} + \beta}\right|^{\frac{\alpha}{2\beta}},$$

$$\alpha \cdot \lambda \neq 0,\ \frac{\alpha^2}{4} - \gamma = \beta^2 > 0.$$

Из сказанного выше следует, что дальнейшему рассмотрению подлежат такие значения функции $\tilde{F}$ (в приведенных ниже формулах $\alpha, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \lambda \cdot \beta \neq 0$):

$$\tilde{F} = 1;$$

$$\tilde{F} = \lambda\omega^\alpha;$$

$$\tilde{F} = \lambda \exp \omega;$$

$$\tilde{F} = \lambda(\omega^2 + \alpha)^{-1};$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda}{(\omega + \alpha)^2} \exp\left(-\frac{2\alpha}{\omega + \alpha}\right);$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda}{(\omega + \alpha)^2 + \beta^2} \exp\left(\frac{2\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{\omega + \alpha}{\beta}\right);$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda}{(\omega + \alpha)^2 - \beta^2} \exp\left|\frac{\omega + \alpha - \beta}{\omega + \alpha + \beta}\right|^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Поскольку перебор значений $\tilde{F}$ требует значительного объема вычислений, то мы здесь коротко останавливаемся только на одном случае, а для остальных указываем только результаты анализа.

Пусть $\tilde{F} = 1$. Тогда из равенства (2.139) следует, что $A = B = 0$. Отсюда получаем, что $b = \frac{1}{2}\dot{a}x + \tilde{b}(t)$, а равенство (2.140) приобретает вид

$$\tilde{E}\tilde{G} - (\tilde{C} + \tilde{D}\omega)\dot{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{E}} + \tilde{L}\omega + \tilde{P}\omega^2, \tag{2.145}$$

где

$$\tilde{E} = 2\tilde{b} + xc_u, \quad \tilde{D} = \tilde{b} + xc_u, \quad \tilde{P} = xc_{uu},$$

$$\tilde{C} = 2xc - x^2c_x - 2xuc_u - 2u\tilde{b},$$

$$\tilde{\tilde{E}} = -x^3c_t + x^2uc_x + xu^2c_u + 2x^2u\left(\dot{\tilde{b}} + \frac{1}{2}x\ddot{a}\right) +$$

$$+ 2uE - 2xc + x^3c_{xx} + 4x^2uc_{xu} + 4xu^2c_{uu},$$

$$\tilde{L} = -x^2\left[\dot{\tilde{b}} + \frac{1}{2}x\ddot{a}\right] - xc + u\tilde{b} - 2x^2c_{xu} - 4xuc_{uu}.$$

Пусть в (2.145) $\tilde{G} = 0$. Тогда выполняются условия

$$\tilde{\tilde{E}} = \tilde{L} = \tilde{P} = 0.$$

Отсюда следует, что в этом случае

$$c = x^{-1}\tilde{b}u + 2x^{-1}\tilde{b} - x\dot{\tilde{b}} - \frac{1}{2}x^2\ddot{a}, \quad b = \frac{1}{2}x\dot{a} + \tilde{b}, \quad \ddot{\tilde{b}} = \frac{d^3a}{dt^3} = 0.$$

Следовательно, для $\tilde{F} = 1$, $\tilde{G} = 0$ имеет место расширение симметрии. Алгеброй инвариантности уравнения будет пятимерная алгебра Ли операторов симметрии $sl(2,\mathbb{R}) \Subset L_{2.2}$, где $sl(2,\mathbb{R})$ совпадает с реализацией (2.131), а $L_{2.2} = \langle t\partial_x + [x^{-1}t(u+2) - x]\partial_u, \partial_x + x^{-1}(u+2)\partial_u\rangle$.

Если в (2.145) $\tilde{G} = \lambda$, $\lambda \neq 0$, то приходим к условиям

$$\lambda\tilde{E} = \tilde{\tilde{E}}, \quad \tilde{L} = \tilde{P} = 0.$$

Отсюда следует, что $\tilde{b} = 0$, $c = -\frac{1}{2}x^2\ddot{a}$, $\frac{d^3a}{dt^3} = 0$, то есть здесь расширение симметрии не происходит.

Если в (2.145) $\tilde{G}$ является произвольной функцией переменной ω, то приходим к условиям

$$\tilde{E} = \tilde{C} = \tilde{D} = \tilde{\tilde{E}} = \tilde{L} = \tilde{P} = 0.$$

То есть в (2.139) и (2.140) $A = B = C = D = 0$ и расширение симметрии уравнения не происходит.

В соответствии со сказанным выше осталось рассмотреть случаи, когда функция $\tilde{G}$ является решением уравнения

$$k\tilde{G} - (l + m\omega)\dot{\tilde{G}} = s + p\omega + q\omega^2, \tag{2.146}$$

где $|k| + |l| + |m| \neq 0$, $k, l, s, p, q \in \mathbb{R}$.

Если в (2.146) $|l| + |m| = 0$, то $k \neq 0$ и с точностью до эквивалентности различаем три случая:

$$\tilde{G} = \alpha + \gamma\omega^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0, \frac{1}{4};$$

$$\tilde{G} = \beta\omega + \frac{1}{4}\omega^2, \quad \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 1;$$

$$\tilde{G} = \alpha + \omega + \frac{1}{4}\omega^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрение этих значений функции $\tilde{G}$ показало, что к расширению симметрии соответствующего уравнения приводит только третье значение функции $\tilde{G}$. При этом

$$c = f(t,x) + g(t,x)e^{-\frac{1}{4}u},$$

$$f = -2x\dot{\tilde{b}} - \frac{1}{2}x^2\ddot{a} + 2x^{-1}\tilde{b} + \tilde{f}(t),$$

$$x^3 g_t - x^3 g_{xx} + x^2 g_x - \frac{1}{4}\alpha x g = 0,$$

и если $\alpha \neq 3$, то $\dfrac{d^3a}{dt^3} = 0$, $\dot{\tilde{f}} = 0$, $\tilde{b} = 0$; а если $\alpha = 3$, то $\dfrac{d^3a}{dt^3} = 0$, $\dot{\tilde{f}} = 0$, $\ddot{\tilde{b}} = 0$.

Анализ равенства (2.146), где $|l| + |m| \neq 0$, показал, что в этом случае расширение симметрии исследуемого уравнения не происходит.

Следовательно, если $\tilde{F} = 1$, то расширение симметрийных свойств исследуемого уравнения происходит только в трех случаях. При этом

инвариантные уравнения имеют такой вид:

$$u_t = u_{xx} + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 - 2x^{-2}u; \tag{2.147}$$

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + x^{-2}\alpha, \quad \alpha \neq 3; \tag{2.148}$$

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4}u_x^2 - x^{-1}u_x + 3x^{-2}. \tag{2.149}$$

Замена переменных

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad v = x^{-1}(u+2)$$

принадлежит группе $\mathcal{E}$ уравнения (2.111) и сводит уравнение (2.147) к уравнению Бюргерса

$$v_{\bar{t}} = v_{\bar{x}\bar{x}} - vv_{\bar{x}}.$$

Аналогично, замена переменных из группы $\mathcal{E}$

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad |v| = \sqrt{|x|}e^{\frac{1}{4}u}$$

сводит уравнения (2.148) и (2.149), соответственно, к линейным уравнениям теплопроводности

$$v_{\bar{t}} = v_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{\alpha - 3}{4\bar{x}^2}v, \quad \alpha \neq 3;$$

$$v_{\bar{t}} = v_{\bar{x}\bar{x}}.$$

Следовательно, существенно нелинейным является случай уравнения (2.147), которое эквивалентно уравнению Бюргерса.

Проведя анализ остальных значений функции $\tilde{F}$, мы получили, что расширение симметрии исследуемого уравнения происходит еще только в случае, когда $\tilde{F} = \omega$, $\tilde{G} = \lambda\omega^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. В этом случае максимальной алгеброй инвариантности уравнения является четырехмерная алгебра Ли операторов симметрии $sl(2,\mathbb{R}) \oplus L_1$, где $sl(2,\mathbb{R})$ совпадает с реализацией (2.131), а $L_1 = \langle x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$.

Подводя итоги, видим, что в рамках сформулированной задачи существуют пять уравнений, которые инвариантны относительно четырехмерных алгебр Ли операторов симметрии, и два уравнения, которые инвариантны относительно пятимерных алгебр Ли операторов симметрии.

Ниже мы приводим перечень этих уравнений и их максимальные алгебры инвариантности.

Нелинейные уравнения (2.111)**, алгебры инвариантности которых являются алгебрами Ли операторов симметрии с нетривиальным разложением Леви:**

1) $u_t = \dfrac{\sec^2 u}{1+u_x^2\sec^2 u}u_{xx} + \dfrac{1+2u_x^2\sec^2 u}{1+u_x^2\sec^2 u}\mathrm{tg}u + \lambda\sqrt{1+u_x^2\sec^2 u},$

$\lambda\in\mathbb{R},\ \ so(3)\oplus L_1,\ so(3)$ — реализация (2.125), $L_1=\langle\partial_t\rangle;$

2) $u_t = x^{-3}u_x^{-3}u_{xx} - \dfrac{1}{4}x^{-1}u_x + 3x^{-4}u_x^{-2} + \lambda x^{-3}u_x^{-1},\quad \lambda\in\mathbb{R},$

$sl(2,\mathbb{R})\oplus L_1,\ sl(2,\mathbb{R})$ — реализация (2.132), $L_1=\langle\partial_u\rangle;$

3) $u_t = \dfrac{u^2}{u^6+4u_x^2}u_{xx} - \dfrac{10uu_x^2+u^7}{8u_x^2+2u^6} + \lambda u^{-2}\sqrt{u^6+4u_x^2},\quad \lambda\in\mathbb{R},$

$sl(2,\mathbb{R})\oplus L_1,\ sl(2,\mathbb{R})$ — реализация (2.134), $L_1=\langle\partial_t\rangle;$

4) $u_t = \dfrac{u^2}{u^6-4u_x^2}u_{xx} + \dfrac{10uu_x^2-u^7}{8u_x^2-2u^6} + \lambda u^{-2}\sqrt{|u^6-4u_x^2|},\quad \lambda\in\mathbb{R},$

$sl(2,\mathbb{R})\oplus L_1,\ sl(2,\mathbb{R})$ — реализация (2.135), $L_1=\langle\partial_t\rangle;$

5) $u_t = \lambda[2u-xu_x]u_{xx} + [4\gamma-4\lambda-1]x^{-2}u^2 +$
$+[1+2\lambda-4\gamma]x^{-1}uu_x + \gamma u_x^2,\ \lambda\neq 0,\ \gamma\in\mathbb{R},\quad sl(2,\mathbb{R})\oplus L_1,$
$sl(2,\mathbb{R})$ — реализация (2.131), $L_1=\langle x\partial_x+2u\partial_u\rangle;$

6) $u_t = u^{-4}u_{xx} - 2u^{-5}u_x^2,\quad sl(2,\mathbb{R})\oplus L_{2.1},$
$sl(2,\mathbb{R})$ — реализация (2.133), $L_{2.1}=\langle 4t\partial_t+u\partial_u,\partial_t\rangle;$

7) $u_t = u_{xx} + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 - 2x^{-2}u,$
$sl(2,\mathbb{R})\Subset L_{2.2},\ sl(2,\mathbb{R})$ — реализация (2.131),
$L_{2.2}=\langle t\partial_x+[tx^{-1}(u+2)-x]\partial_u,\partial_x+x^{-1}(u+2)\partial_u\rangle.$

Заметим, что шестое из перечня уравнение заменой переменных

$$\bar t = t,\quad \bar x = x,\quad v = u^3$$

приводится к уравнению

$$v_{\bar t} = \left(v^{-\frac{4}{3}}v_{\bar x}\right)_{\bar x},$$

которое было получено Л.В. Овсянниковым [47] при групповой классификации нелинейного уравнения теплопроводности.

2.3.3. Инвариантность уравнения (2.111) относительно разрешимых алгебр Ли операторов симметрии

Как и при классификации нелинейных уравнений вида (2.37) мы и здесь, проводя описание неэквивалентных нелинейных уравнений вида (2.111), которые допускают разрешимые алгебры Ли операторов симметрии, движемся поэтапно, от алгебр размерности 1 к алгебрам размерности 2, от алгебр размерности 2 к алгебрам размерности 3 и т. д.

Классификацию уравнений, которые допускают двух- и трехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии, мы называем предварительной, а классификацию уравнений, которые допускают алгебры Ли операторов симметрии размерности выше за трех, — завершением классификации.

Предварительная классификация. В соответствии с результатами теоремы 2.5 и следствия из нее нелинейные уравнения вида (2.111), алгебры инвариантности которых являются одномерными алгебрами Ли операторов симметрии, с точностью до эквивалентности исчерпываются такими двумя уравнениями:

$$A_1^1=\langle\partial_t\rangle : u_t = F(x,u,u_x)u_{xx} + G(x,u,u_x);$$
$$A_1^2=\langle\partial_x\rangle : u_t = F(t,u,u_x)u_{xx} + G(t,u,u_x).$$

Каждая из двухмерных действительных алгебр Ли $A_2=\langle e_1,e_2\rangle$, которые, как известно, с точностью до изоморфизма исчерпываются алгебрами $A_{2.1}$ ($[e_1,e_2]=0$) и $A_{2.2}$ ($[e_1,e_2]=e_2$), содержит как подалгебру одномерную алгебру A_1. Поэтому при построении реализаций двухмерных алгебр Ли мы проводим расширение в классе операторов (2.112) известных реализаций алгебры A_1 к реализациям алгебр $A_{2.1}$ и $A_{2.2}$.

Остановимся подробно на рассмотрении случая алгебры $A_{2.1}$.

Пусть $e_1=\partial_t$, а e_2 — оператор вида (2.112). Тогда из выполнения коммутационного соотношения, которое определяет алгебру $A_{2.1}$, следует, что с точностью до выбора базиса этой алгебры можем положить

$$e_2 = b(x,u)\partial_x + c(x,u)\partial_u. \tag{2.150}$$

Поскольку оператор (2.150) мы можем рассматривать как касательное векторное поле, определенное в пространстве $R_2=\langle x,u\rangle$, то, в соответствии с известной теоремой о подобии векторных полей [46, с. 41], можем положить $e_2 = \partial_u$. Следовательно, имеет место реализация $\langle \partial_t, \partial_u \rangle$.

Пусть теперь $e_1 = \partial_x$, e_2 — оператор вида (2.112). Тогда из выполнения коммутационного соотношения следует, что

$$e_2 = a(t)\partial_t + b(t,u)\partial_x + c(t,u)\partial_u. \tag{2.151}$$

Если в (2.151) $a \neq 0$, то, используя замену переменных

$$\begin{aligned} &\bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = x + X(t,u), \\ &v = U(t,u), \quad \dot{T} \neq 0, \quad U_u \neq 0, \end{aligned} \tag{2.152}$$

где $\dot{T} = a^{-1}$, а функции X и U являются решениями, соответственно, уравнений $a_t + xX_u + b = 0$, $a_t + c_u = 0$, $U_u \neq 0$, мы сводим оператор (2.151) к оператору $\bar{e}_2 = \partial_{\bar{t}}$.

Если в (2.151) $a = 0$, $c \neq 0$, то, положив в (2.152) $T = t$, а функции X и U равными решениям уравнений $c_u + b = 0$, $cU_u = 1$, сводим оператор (2.151) к оператору $\bar{e}_2 = \partial_v$.

Наконец, если в (2.151) $a = c = 0$, то, как несложно убедиться, существуют преобразования (2.152), которые, в зависимости от значений функции b ($b_u = 0$ или $b_u \neq 0$), сводят оператор (2.151) к операторам $\bar{e}_2 = \bar{t}\partial_{\bar{x}}$ и $\bar{e}_2 = v\partial_{\bar{x}}$ соответственно.

Следовательно, мы получили такие четыре реализации алгебры $A_{2.1}$: $\langle \partial_t, \partial_u \rangle$, $\langle \partial_x, \partial_u \rangle$, $\langle \partial_x, t\partial_x \rangle$, $\langle \partial_x, u\partial_x \rangle$.

Проверка условий (2.113) для третьей из полученных реализаций приводит к равенству $u_x = 0$, откуда следует, что эта реализация не может быть алгеброй инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111).

Для четвертой из полученных реализаций инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = u_x^{-2}F(t,u)u_{xx} + u_xG(t,u),$$

но замена переменных (2.119) сводит его к линейному уравнению

$$v_{\bar{t}} = F(\bar{t},\bar{x})v_{\bar{x}\bar{x}} - G(\bar{t},\bar{x}).$$

Поэтому и четвертая реализация не удовлетворяет условиям сформулированной задачи.

Дальнейшая проверка показала, что существуют только две неэквивалентные реализации алгебры $A_{2.1}$, которые являются алгебрами

инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111). Значения функций F и G в соответствующих инвариантных уравнениях приведены в таблице 2.4, в которой используются обозначения

$$A^1_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_u \rangle, \quad A^2_{2.1} = \langle \partial_x, \partial_u \rangle.$$

Изучение реализаций алгебры $A_{2.2}$ проводилось аналогично. В результате проведенных вычислений мы получили три неэквивалентные реализации алгебры $A_{2.2}$, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111). Значения функций F и G в инвариантных уравнениях приведены в таблице 2.4, где использованы обозначения

$$\begin{aligned} &A^1_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t \rangle, \quad A^2_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x \rangle, \\ &A^3_{2.2} = \langle -x\partial_x - u\partial_u, \partial_x \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае произвольных значений функций в инвариантных уравнениях соответствующие реализации двухмерных алгебр Ли являются максимальными алгебрами инвариантности этих уравнений.

Таблица 2.4

Инвариантность уравнений вида (2.112) относительно двухмерных алгебр Ли операторов симметрии

Алгебра	F	G
$A^1_{2.1}$	$\tilde{F}(x,u_x)$	$\tilde{G}(x,u_x)$
$A^2_{2.1}$	$\tilde{F}(t,u_x)$	$\tilde{G}(t,u_x)$
$A^1_{2.2}$	$x\tilde{F}(u,\omega)$	$x^{-1}\tilde{G}(u,\omega)$, $\omega = xu_x$
$A^2_{2.2}$	$t\tilde{F}(u,\omega)$	$t^{-1}\tilde{G}(u,\omega)$, $\omega = tu_x$
$A^3_{2.2}$	$u^2\tilde{F}(t,u_x)$	$u\tilde{G}(t,u_x)$

Теперь перейдем к классификации нелинейных уравнений вида (2.111), которые допускают трехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии. Сначала остановимся на $A_{3.1}$- и $A_{3.2}$-инвариантных уравнениях, то есть уравнениях, алгебры инвариантности которых являются трехмерными разложимыми разрешимыми алгебрами Ли операторов симметрии.

Очевидно, что для построения реализаций этих алгебр в рассматриваемом классе операторов достаточно дополнить оператором e_3

вида (2.112) уже известные реализации двухмерных алгебр $A^i_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$ $(i = 1, 2)$ (для алгебры $A_{3.1}$) и $A^i_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ (для алгебры $A_{3.2}$). Выполнив соответствующие вычисления, мы получили одну реализацию алгебры $A_{3.1}$ и шесть неэквивалентных реализаций алгебры $A_{3.2}$, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111):

$$
\begin{aligned}
&A^1_{3.1} = \langle \partial_t, \partial_u, \partial_x\rangle;\\
&A^1_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t, \partial_u\rangle;\\
&A^2_{3.2} = \langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_t, xu\partial_u\rangle;\\
&A^3_{3.2} = \langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x\rangle;\\
&A^4_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, \partial_u\rangle;\\
&A^5_{3.2} = \langle -x\partial_x - u\partial_u, \partial_u, \partial_t\rangle;\\
&A^6_{3.2} = \langle -x\partial_x - u\partial_u, \partial_u, tx\partial_x\rangle.
\end{aligned}
$$

Значения функций F и G в соответствующих инвариантных уравнениях приведены в таблице 2.5, где $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ — произвольные гладкие функции своих аргументов.

Таблица 2.5

Инвариантность уравнений вида (2.111) относительно трехмерных разложимых разрешимых алгебр Ли операторов симметрии

Алгебра	F	G
$A^1_{3.1}$	$\tilde{F}(u_x)$	$\tilde{G}(u_x)$
$A^1_{3.2}$	$x\tilde{F}(\omega)$	$x^{-1}\tilde{G}(\omega)$, $\omega = xu_x$
$A^2_{3.2}$	$u^{-1}e^{x\omega}\tilde{F}(x)$	$e^{x\omega}[\tilde{G}(x) - \omega^2\tilde{F}(x)]$, $\omega = u^{-1}u_x$
$A^3_{3.2}$	$t^{-1}x^2\tilde{F}(\omega)$	$x^{-1}\tilde{G}(\omega)$, $\omega = t^{-1}x^2u_x$
$A^4_{3.2}$	$t\tilde{F}(\omega)$	$t^{-1}\tilde{G}(\omega)$, $\omega = tu_x$
$A^5_{3.2}$	$x^2\tilde{F}(u_x)$	$x\tilde{G}(u_x)$
$A^6_{3.2}$	$x^2\tilde{F}(t)$	$xt^{-1}u_x\ln\lvert u_x\rvert + xu_x\tilde{G}(t)$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что приведенные выше реализации являются максимальными алгебрами инвариантности соответствующих уравнений, если функции $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ — произвольные функции своих аргументов.

Неразложимые трехмерные разрешимые алгебры Ли исчерпываются семью алгебрами $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ $(i = 3, 4, \ldots, 9)$.

Все эти алгебры содержат двухмерный абелевый идеал $A_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$. Поэтому для описания их реализаций в рассматриваемом классе операторов достаточно провести расширение реализаций алгебры $A_{2.1}$, дополнив их оператором e_3 вида (2.112). Напомним, что рассматривать необходимо как реализации $A^i_{2.1} = \langle e_1, e_2\rangle$ $(i = 1, 2)$, так и реализации $\tilde{A}^i_{2.1} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2\rangle$ $(i = 1, 2)$, где $\tilde{e}_1 = e_2$, $\tilde{e}_2 = e_1$.

Остановимся подробно на построении реализаций алгебры $A_{3.3}$ (алгебра Вейля), которая является нильпотентной алгеброй Ли.

Сначала рассмотрим расширение реализации $A^1_{2.1}$. Если $e_1 = \partial_t$, $e_2 = \partial_u$, то из выполнения коммутационного соотношения $[e_2, e_3] = e_1$, где e_3 имеет вид (2.112), следует равенство $b_u\partial_x + c_u\partial_u = \partial_t$, выполнение которого приводит к ошибочному равенству $1 = 0$.

Если же $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_t$, то $e_3 = \tilde{b}(x)\partial_x + [t + \tilde{c}(x)]\partial_u$, и с точностью до эквивалентности, которую определяют преобразования из группы $\mathcal{E}$, приходим к таким трем реализациям алгебры $A_{3.3}$: $\langle \partial_u, \partial_t, \partial_x + t\partial_u\rangle$, $\langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u\rangle$, $\langle \partial_u, \partial_t, (t + x)\partial_u\rangle$.

Проверка условий (2.113) показывает, что вторая реализация не может быть алгеброй инвариантности уравнений вида (2.111), а инвариантное относительно третьей реализации уравнение линейно. Условиям задачи удовлетворяет только первая полученная реализация.

При рассмотрении реализации $A^2_{2.1}$ мы должны учитывать две возможности: $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_u$ и $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_x$. Но поскольку замена переменных (2.119) сводит первый случай ко второму и наоборот, то можно ограничиться рассмотрением только, например, второго случая.

В результате приходим еще к таким реализациям алгебры $A_{3.3}$, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111): $\langle \partial_u, \partial_x, \partial_t + x\partial_u\rangle$, $\langle \partial_u, \partial_x, t\partial_x + x\partial_u\rangle$.

Непосредственная проверка показала, что существуют всего две неэквивалентных реализации алгебры $A_{3.3}$, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111):

$$A^1_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_t, t\partial_u + \partial_x\rangle, \quad A^2_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, t\partial_x + x\partial_u\rangle.$$

Значения функций F и G в соответствующих инвариантных уравнениях приведены в таблице 2.6.

Заметим, что для записи реализации $A^1_{3.3}$ мы учитывали преобразования эквивалентности (2.119).

Таблица 2.6

Инвариантность уравнений вида (2.111) относительно алгебры Вейля операторов симметрии

Алгебра	F	G
$A^1_{3.3}$	$\tilde{F}(u_x)$	$x+\tilde{G}(u_x)$
$A^2_{3.3}$	$\tilde{F}(t)$	$-\frac{1}{2}u_x^2+\tilde{G}(t)$

Исследование остальных неразложимых трехмерных разрешимых алгебр Ли проводилось аналогично. Ниже приведены их неэквивалентные реализации, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111), а в таблице 2.7 — значения функций F и G в соответствующих инвариантных уравнениях:

$$A^1_{3.4}=\langle\partial_u,\partial_t,t\partial_t+x\partial_x+[t+u]\partial_u\rangle;$$
$$A^2_{3.4}=\langle\partial_u,\partial_t,t\partial_t+[t+u]\partial_u\rangle;$$
$$A^3_{3.4}=\langle\partial_x,\partial_u,2t\partial_t+(x+u)\partial_x+u\partial_u\rangle;$$
$$A^4_{3.4}=\langle\partial_x,\partial_u,(x+u)\partial_x+u\partial_u\rangle;$$
$$A^1_{3.5}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle;$$
$$A^2_{3.5}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t+u\partial_u\rangle;$$
$$A^3_{3.5}=\langle\partial_x,\partial_u,2t\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle;$$
$$A^1_{3.6}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u\rangle;$$
$$A^2_{3.6}=\langle\partial_t,\partial_u,t\partial_t-u\partial_u\rangle;$$
$$A^3_{3.6}=\langle\partial_x,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u\rangle;$$
$$A^4_{3.6}=\langle\partial_x,\partial_u,x\partial_x-u\partial_u\rangle;$$
$$A^1_{3.7}=\langle\partial_u,\partial_t,qt\partial_t+x\partial_x+u\partial_u\rangle\ (q\neq 0,\pm 1);$$
$$A^2_{3.7}=\langle\partial_u,\partial_t,qt\partial_t+u\partial_u\rangle\ (q\neq 0,\pm 1);$$
$$A^3_{3.7}=\langle\partial_x,\partial_u,t\partial_t+x\partial_x+qu\partial_u\rangle\ (0<|q|<1);$$
$$A^4_{3.7}=\langle\partial_x,\partial_u,x\partial_x+qu\partial_u\rangle\ (0<|q|<1);$$
$$A^1_{3.8}=\langle\partial_x,\partial_u,\partial_t+u\partial_x-x\partial_u\rangle;$$
$$A^2_{3.8}=\langle\partial_x,\partial_u,u\partial_x-x\partial_u\rangle;$$
$$A^1_{3.9}=\langle\partial_x,\partial_u,\partial_t+(u+qx)\partial_x+(qu-x)\partial_u\rangle\ (q>0);$$
$$A^2_{3.9}=\langle\partial_x,\partial_u,(u+qx)\partial_x+(qu-x)\partial_u\rangle\ (q>0).$$

Таблица 2.7

Инвариантность уравнений вида (2.111) относительно неразложимых трехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии

Алгебра	F	G
$A^1_{3.4}$	$x\tilde{F}(u_x)$	$\tilde{G}(u_x)+\ln\lvert x\rvert$
$A^2_{3.4}$	$u_x^{-1}\tilde{F}(x)$	$\tilde{G}(x)+\ln\lvert u_x\rvert$
$A^3_{3.4}$	$u_x^{-2}\tilde{F}(\omega)$	$u_x e^{-\frac{1}{u_x}}\tilde{G}(\omega),\ \omega=2u_x^{-1}-\ln\lvert t\rvert$
$A^4_{3.4}$	$u_x^{-2}\tilde{F}(t)\exp(2u_x^{-1})$	$u_x\tilde{G}(t)\exp(u_x^{-1})$
$A^1_{3.5}$	$x\tilde{F}(u_x)$	$\tilde{G}(u_x)$
$A^2_{3.5}$	$u_x^{-1}\tilde{F}(x)$	$\tilde{G}(x)$
$A^3_{3.5}$	$\tilde{F}(u_x)$	$\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}\tilde{G}(u_x)$
$A^1_{3.6}$	$x\tilde{F}(\omega)$	$x^{-2}\tilde{G}(\omega),\ \omega=x^2u_x$
$A^2_{3.6}$	$u_x\tilde{F}(x)$	$u_x^2\tilde{G}(x)$
$A^3_{3.6}$	$t\tilde{F}(\omega)$	$t^{-2}\tilde{G}(\omega),\ \omega=t^2u_x$
$A^4_{3.6}$	$u_x^{-1}\tilde{F}(t)$	$\sqrt{\lvert u_x\rvert}\tilde{G}(t)$
$A^1_{3.7}$	$\lvert x\rvert^{2-q}\tilde{F}(u_x)$	$\lvert x\rvert^{1-q}\tilde{G}(u_x)\ (q\neq 0,\pm 1)$
$A^2_{3.7}$	$\lvert u_x\rvert^{-q}\tilde{F}(x)$	$\lvert u_x\rvert^{1-q}\tilde{G}(x), q\neq 0,\pm 1$
$A^3_{3.7}$	$t\tilde{F}(\omega)$	$\lvert t\rvert^{q-1}\tilde{G}(\omega),\ \omega=\lvert t\rvert^{1-q}u_x(0<\lvert q\rvert<1)$
$A^4_{3.7}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{2}{q-1}}\tilde{F}(t)$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{q}{q-1}}\tilde{G}(t)\ (0<\lvert q\rvert<1)$
$A^1_{3.8}$	$(1+u_x^2)^{-1}\tilde{F}(\omega)$	$\sqrt{1+u_x^2}\tilde{G}(\omega),\ \omega=t+\arctan u_x$
$A^2_{3.8}$	$(1+u_x^2)^{-1}\tilde{F}(t)$	$\sqrt{1+u_x^2}\tilde{G}(t)$
$A^1_{3.9}$	$\dfrac{\exp(-2q\arctan u_x)\tilde{F}(\omega)}{1+u_x^2}$	$\sqrt{1+u_x^2}\exp(-q\arctan u_x)\tilde{G}(\omega),$ $\omega=t+\arctan u_x\ (q>0)$
$A^2_{3.9}$	$\dfrac{\exp(-2q\arctan u_x)\tilde{F}(t)}{1+u_x^2}$	$\sqrt{1+u_x^2}\exp(-q\arctan u_x)\tilde{G}(t),\ (q>0)$

Заметим, что расширение области значений параметра q в реализациях $A^1_{3.7}$, $A^2_{3.7}$ алгебры $A_{3.7}$ позволило свести четыре неэквивалентные реализации этой алгебры к двум.

Отметим также, что для произвольных значений функций $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ из таблиц 2.6 и 2.7 соответствующие реализации алгебр Ли являются максимальными алгебрами инвариантности полученных уравнений.

Завершение групповой классификации. Следующий шаг метода групповой классификации предусматривает описание нелинейных уравнений вида (2.111), которые инвариантны относительно четырехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии.

Как известно, четырехмерные разрешимые алгебры Ли с точностью до изоморфизма исчерпываются 10 разложимыми в прямую сумму разрешимых алгебр Ли более низкой размерности и 10 неразложимыми алгебрами Ли. Поскольку нелинейные уравнения вида (2.111), которые инвариантны относительно трехмерных разрешимых алгебр Ли, содержат произвольные функции, зависящие от одного аргумента, то следует надеяться, что в нелинейных уравнениях, которые инвариантны относительно четырехмерных разрешимых алгебр Ли, эти функции приобретут совершенно конкретный вид.

Действительно, как будет показано ниже, такими будут все полученные уравнения, кроме уравнения

$$u_t = F(u_x)u_{xx}. \tag{2.153}$$

Групповая классификация нелинейных уравнений вида (2.153) была проведена в [4, 6], кроме того, мы на ней подробно останавливались в первом параграфе этого раздела.

Учитывая последнее, мы в дальнейших исследованиях будем требовать, чтобы уравнения вида

$$u_t = F(u_x)u_{xx} + G(u_x)$$

или эквивалентные им уравнения заменами переменных (2.115) не сводились не только к линейным уравнениям, но и к уравнениям вида (2.153).

Напомним, что среди разложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли различают алгебры

$$4A_1 = A_{3.1} \oplus A_1, \quad A_{3.2} \oplus A_1,$$
$$2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}, \quad A_{3.i} \oplus A_1 \quad (i = 3, 4, \ldots, 9).$$

Проведя расширение реализации $A^1_{3.1}$ в случае алгебры $4A_1$ и реализаций $A^i_{3.2}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ в случае алгебры $A_{3.2} \oplus A_1$ оператором e_4 вида (2.112), мы получили, что в рамках сформулированной задачи не существует реализаций алгебр $4A_1$ и $A_{3.2} \oplus A_1$, которые удовлетворяли бы условиям сформулированной задачи.

В результате рассмотрения реализаций алгебры $2A_{2.2}$ мы пришли к четырем неэквивалентным реализациям, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111). Ниже перечислены эти реализации и соответствующие им значения функций F и G в инвариантных уравнениях:

$$2A^1_{2.2} = A^1_{3.2} \ni \langle -u\partial_u + kx\partial_x \rangle \ \ (k \neq 0): \quad F = \lambda x|\omega|^{-k},$$
$$G = \beta x^{-1}|\omega|^{1-k}, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \omega = xu_x;$$
$$2A^2_{2.2} = A^2_{3.2} \ni \langle x\partial_x \rangle: \quad F = \lambda x^2 u^{-1} \exp\omega,$$
$$G = (\beta - \lambda\omega^2)\exp\omega, \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \omega = xu^{-1}u_x;$$
$$2A^3_{2.2} = A^4_{3.2} \ni \langle -u\partial_u + kt\partial_t \rangle \ \ (k \neq 0, 1): \quad F = \lambda t|\omega|^{\frac{2k}{1-k}},$$
$$G = \beta t^{-1}|\omega|^{\frac{1}{1-k}}, \quad \omega = tu_x, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R};$$
$$2A^4_{2.2} = A^4_{3.2} \ni \langle -u\partial_u + t\partial_x \rangle:$$
$$F = \lambda t, \quad G = u_x \ln|tu_x| + \beta u_x, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Во всех полученных инвариантных уравнениях функции F и G приобретают совершенно конкретные значения. Поэтому для полного решения задачи остается найти максимальные алгебры инвариантности этих уравнений, решив для каждой из полученных пар функций F и G определяющие уравнения (2.113). Предварительно мы провели упрощения вида функций F и G, используя для этого максимальные группы преобразований эквивалентности в классе замен переменных (2.115) для каждой из полученных реализаций $2A^i_{2.2}$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Остановимся подробно на случае реализации $2A^1_{2.2}$. Пусть

$$2A_{2.2} = \langle e_i | i = 1, 2, 3, 4 \rangle,$$
$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_4, \quad [e_i, e_j] = 0 \quad (i = 1, 2; j = 3, 4);$$
$$2\tilde{A}_{2.2} = \langle \bar{e}_i, i = 1, 2, 3, 4 \rangle,$$
$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \bar{e}_2, \quad [\bar{e}_3, \bar{e}_4] = \bar{e}_4, \quad [\bar{e}_i, \bar{e}_j] = 0 \quad (i = 1, 2; j = 3, 4).$$

Тогда взаимно однозначное соответствие между алгебрами $2A_{2.2}$ и $2\tilde{A}_{2.2}$ устанавливают такие два изоморфизма:

1) $\bar{e}_1 = e_3 + \gamma e_4, \quad \bar{e}_2 = \alpha e_4, \quad \bar{e}_3 = e_1 + \mu e_2, \quad \bar{e}_4 = \tilde{\beta} e_2;$

2) $\bar{e}_1 = e_1 + \gamma e_2, \quad \bar{e}_2 = \alpha e_2, \quad \bar{e}_3 = e_3 + \mu e_4, \quad \bar{e}_4 = \tilde{\beta} e_4,$

где $\alpha \cdot \tilde{\beta} \neq 0$, $\alpha, \tilde{\beta}, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$.

Далее непосредственными вычислениями убеждаемся, что для реализации $2A^1_{2.2}$ максимальную группу преобразований эквивалентности в классе замен переменных (2.115) составляют преобразования

$$\overline{t} = \alpha t + \gamma, \quad \overline{x} = \delta x, \quad v = \tilde{\beta} u + \mu, \tag{2.154}$$

где $\alpha, \delta, \tilde{\beta}, \gamma, \mu \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \delta \cdot \tilde{\beta} \neq 0$.

Замена переменных (2.154), где $\lambda \cdot \delta \cdot \alpha^{-1} |\beta|^k = 1$, сводит уравнение, инвариантное относительно реализации $2A^1_{2.2}$, к уравнению

$$v_{\overline{t}} = |\overline{x}|^{1-k} |v_{\overline{x}}|^{-k} v_{\overline{x}\overline{x}} + \beta |\overline{x}|^{-k} |v_{\overline{x}}|^{1-k}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0.$$

Проведя аналогичные вычисления для остальных полученных реализаций алгебры $2A_{2.2}$, убеждаемся, что с точностью до эквивалентности в дальнейшем можем рассматривать такие инвариантные уравнения:

$$2A^1_{2.2}: u_t = |x|^{1-k}|u_x|^{-k} u_{xx} + \beta |x|^{-k} |u_x|^{1-k}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0; \tag{2.155}$$

$$2A^2_{2.2}: u_t = x^2 u^{-1} \exp(\omega) u_{xx} + (\beta - \omega^2) \exp \omega, \quad \omega = x u^{-1} u_x, \quad \beta \in \mathbb{R}; \tag{2.156}$$

$$2A^3_{2.2}: u_t = \pm |t|^{\frac{k+1}{1-k}} |u_x|^{\frac{2k}{1-k}} u_{xx} + \epsilon |t|^{\frac{k}{1-k}} |u_x|^{\frac{1}{1-k}}, \quad \epsilon = 0, 1, \quad k \neq 0, 1; \tag{2.157}$$

$$2A^4_{2.2}: u_t = \lambda t u_{xx} + u_x \ln |t u_x|, \quad \lambda \neq 0. \tag{2.158}$$

Подстановка значений функций F и G из уравнений (2.155)–(2.158) в определяющую систему (2.113) и дальнейшее исследование соответствующих систем привели к таким результатам.

1. Если в уравнении (2.155) $k \neq 0, 2$, $\beta \neq \dfrac{k-1}{k-2}$ или $k = 2$, $\beta \neq \dfrac{5}{4}$, то реализация $2A^1_{2.2}$ является максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения.

Если же в (2.155) $k = 2$, $\beta = \dfrac{5}{4}$, то максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения является пятимерная алгебра Ли операторов симметрии. Ее базис составляют базисные операторы реализации $2A^1_{2.2}$ $(k = 2)$ и оператор $4xu\partial_x - u^2\partial_u$. Но несложно убедиться, что эта алгебра Ли изоморфна алгебре $sl(2, \mathbb{R}) \oplus A_{2.2}$ и замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = u, \quad v = \alpha |x|^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha \neq 0,$$

сводит ее базисные операторы к операторам, которые составляют базис реализации $sl(2, \mathbb{R}) \oplus L_{2.1}$, где $sl(2, \mathbb{R})$ — реализация (2.133), $L_{2.1} = \langle 4t\partial_t + u\partial_u, \partial_t \rangle$. Следовательно, уравнение (2.155), где $k = 2$, $\beta = \dfrac{5}{4}$, эквивалентно полученному выше уравнению, которое сводится к нелинейному уравнению теплопроводности из классификации Л.В. Овсянникова [47].

Наконец, если в (2.155) $k \neq 0, 2$ и $\beta = \dfrac{k-1}{k-2}$, то данное уравнение преобразованиями из группы $\mathcal{E}$ сводится к уравнению вида (2.153).

2. Если в уравнении (2.156) $\beta \neq -2$, то реализация $2A^2_{2.2}$ является максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения. Если же $\beta = -2$, то максимальная алгебра инвариантности данного уравнения является пятимерной алгеброй Ли операторов симметрии

$$\langle \partial_t, -xu\partial_u, x^2\partial_x + \ln |x^2 u| xu\partial_u, 2t\partial_t + 2u\partial_u - x\partial_x, t\partial_t + u\partial_u \rangle.$$

Но замена переменных

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = -x^{-1}, \quad v = x^{-1} \ln |u| + 2x^{-1}(1 + \ln |x|)$$

сводит такое уравнение к уравнению

$$v_{\overline{t}} = \exp(v_{\overline{x}}) v_{\overline{x}\overline{x}},$$

которое принадлежит классу уравнений (2.153).

3. Реализация $2A^3_{2.2}$ $(k \neq 0, 1)$ является максимальной алгеброй симметрии уравнения (2.157), если $\epsilon = 1$. Если же в этом уравнении $\epsilon = 0$, то его максимальной алгеброй инвариантности является пятимерная алгебра Ли операторов симметрии

$$2A^3_{2.2} \quad (k \neq 0, 1) \Subset \langle |t|^{\frac{1+k}{k-1}} \partial_t \rangle.$$

Но замена переменных

$$\overline{t} = \frac{1}{2}(1 - k)|t|^{\frac{2}{1-k}}, \quad \overline{x} = x, \quad v = u$$

сводит это уравнение к уравнению

$$v_{\overline{t}} = \pm |v_{\overline{x}}|^{\frac{2k}{1-k}} v_{\overline{x}\overline{x}},$$

которое принадлежит к уравнениям вида (2.153).

4. Реализация $2A^4_{2.2}$ является максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.158).

Рассмотрение случая алгебры $A_{3.3} \oplus A_1$ показало, что в рамках сформулированной задачи эта алгебра не имеет реализаций в классе операторов (2.112). Для алгебры $A_{3.5} \oplus A_1$ мы получили реализацию $A^2_{3.5} \oplus \langle \partial_x \rangle$, но соответствующее инвариантное уравнение

$$u_t = u_x^{-1} u_{xx}$$

принадлежит классу уравнений (2.153). Исследование случая алгебры $A_{3.7} \oplus A_1$ привело к уравнению

$$u_t = u_x^{-2} u_{xx} + u_x^{-1},$$

которое заменой переменных (2.119) сводится к уравнению, эквивалентному линейному уравнению теплопроводности.

Для остальных разложимых четырехмерных алгебр Ли мы получили еще восемь неэквивалентных реализаций, которые являются максимальными алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111). Сведенный результат групповой классификации неэквивалентных нелинейных уравнений вида (2.111), максимальными алгебрами инвариантности которых являются четырехмерные разложимые разрешимые алгебры Ли операторов симметрии, представлен в таблице 2.8.

Как и в предыдущем параграфе изучение реализаций неразложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли проводим дополнением известных реализаций трехмерных разрешимых алгебр Ли $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ оператором e_4 вида (2.112) по такой схеме: $A_{4.i} = A_{3.1} \Supset \langle e_4 \rangle$ $(i = 1, \ldots, 6)$, $A_{4.i} = A_{3.3} \Supset \langle e_4 \rangle$ $(i = 7, 8, 9)$, $A_{4.10} = A_{3.5} \Supset \langle e_4 \rangle$.

Поскольку существует одна реализация алгебры $A_{3.1}$, которая является максимальной алгеброй инвариантности уравнения

$$u_t = F(u_x) u_{xx} + G(u_x), \tag{2.159}$$

то реализации алгебр $A_{4.i}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ могут быть алгебрами инвариантности только нелинейных уравнений, которые принадлежат к уравнениям вида (2.159).

Непосредственные вычисления показали, что в рамках сформулированной задачи алгебра $A_{4.1}$ не имеет реализаций. Для остальных алгебр из рассматриваемого класса мы, изъяв из рассмотрения случаи, когда инвариантные уравнения эквивалентны уравнению (2.153), получили семь реализаций, которые являются максимальными алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111):

$$A^1_{4.2} = A^1_{3.1} \Supset \langle qt\partial_t + x\partial_x + (u + x)\partial_u \rangle \quad (q \neq 0, 1);$$
$$A^2_{4.2} = A^1_{3.1} \Supset \langle t\partial_t + (t + x)\partial_x + qu\partial_u \rangle \quad (q \neq 0, 1);$$
$$A^1_{4.3} = A^1_{3.1} \Supset \langle t\partial_t + x\partial_u \rangle;$$
$$A^2_{4.3} = A^1_{3.1} \Supset \langle t\partial_x + u\partial_u \rangle;$$
$$A^1_{4.4} = A^1_{3.1} \Supset \langle t\partial_t + (t + x)\partial_x + (x + u)\partial_u \rangle;$$
$$A^1_{4.5} = A^1_{3.1} \Supset \langle t\partial_t + px\partial_x + qu\partial_u \rangle \quad (p < q,\ p \cdot q \neq 0;\ p, q, \neq 1);$$
$$A^1_{4.6} = A^1_{3.1} \Supset \langle qt\partial_t + (px + u)\partial_x + (pu - x)\partial_u \rangle \quad (q \neq 0;\ p \geqslant 0).$$

Таблица 2.8

Инвариантность уравнений вида (2.111) относительно разложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии

Алгебра	F	G
$2A^1_{2.2}$, $(k \neq 0, 2)$	$\lvert x\rvert^{1-k} \lvert u_x\rvert^{-k}$	$\beta \lvert x\rvert^{-k} \lvert u_x\rvert^{1-k}$, $\beta \neq \dfrac{k-1}{k-2}$
$2A^1_{2.2}$ $(k = 2)$	$x^{-1} u_x^{-2}$	$\beta x^{-2} u_x^{-1}, \beta \neq \dfrac{5}{4}$
$2A^2_{2.2}$	$x^2 u^{-1} \exp \omega$	$(\beta - \omega^2) \exp \omega$, $\omega = xu^{-1} u_x$, $\beta \neq -2$
$2A^3_{2.2}$ $(k \neq 0, 1)$	$\pm \lvert t\rvert^{\frac{k+1}{1-k}} \lvert u_x\rvert^{\frac{2k}{1-k}}$	$\lvert t\rvert^{\frac{k}{1-k}} \lvert u_x\rvert^{\frac{1}{1-k}}$
$2A^4_{2.2}$	λt, $\lambda \neq 0$	$u_x \ln \lvert tu_x\rvert$
$A^2_{3.4} \oplus \langle \partial_x \rangle$	u_x^{-1}	$\ln \lvert u_x\rvert$
$A^4_{3.4} \oplus \langle \partial_t \rangle$	$u_x^{-2} \exp(2u_x^{-1})$	$u_x \exp(u_x^{-1})$
$A^2_{3.6} \oplus \langle \partial_x \rangle$	u_x	u_x^2
$A^4_{3.6} \oplus \langle \partial_t \rangle$	u_x^{-1}	$\sqrt{\lvert u_x\rvert}$
$A^2_{3.7} \oplus \langle \partial_x \rangle$ $(q \neq 0, \pm 1, 2)$	$\lvert u_x\rvert^{-q}$	$\lvert u_x\rvert^{1-q}$
$A^4_{3.7} \oplus \langle \partial_t \rangle$ $(0 < \lvert q\rvert < 1)$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{2}{q-1}}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{q}{q-1}}$
$A^2_{3.8} \oplus \langle \partial_t \rangle$	$(1 + u_x^2)^{-1}$	$\sqrt{1 + u_x^2}$
$A^2_{3.9} \oplus \langle \partial_t \rangle$ $(q > 0)$	$\dfrac{\exp(-2q \arctan u_x)}{1 + u_x^2}$	$\sqrt{1 + u_x^2} \exp(-q \arctan u_x)$

Соответствующие значения функций F и G в инвариантных уравнениях представлены в таблице 2.9. Там же мы указали и уравнение (2.153), максимальной алгеброй инвариантности которого для произвольных значений функции F является такая реализация алгебры $A_{4.5}$ $(p = q = \frac{1}{2})$:

$$A^2_{4.5} = A^1_{3.1} \ni \langle t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u \rangle.$$

Как было подчеркнуто выше, рассмотрение реализаций алгебр $A_{4.i}$ $(i = 7, 8, 9)$ мы проводили дополнением известных реализаций алгебры $A_{3.3}$ оператором e_4 вида (2.112). При этом при рассмотрении известных реализаций алгебры $A_{3.3} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ мы учитывали такой изоморфизм для этой алгебры: $e_1 \to e_1$, $e_2 \to -e_3$, $e_3 \to e_2$.

Исследования для алгебр $A_{4.7}$ и $A_{4.9}$ привели к трем неэквивалентным реализациям

$$A^1_{4.7} = A^1_{3.3} \ni \langle t\partial_t + (x - t)\partial_x + \left(2u - \frac{1}{2}t^2\right)\partial_u \rangle,$$
$$A^2_{4.7} = A^2_{3.3} \ni \langle -\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u \rangle,$$
$$A^1_{4.9} = A^2_{3.3} \ni \langle -(1 + t^2)\partial_t + (q - t)x\partial_x + \left(2qu - \frac{1}{2}x^2\right)\partial_u \rangle \ (q > 0),$$

которые являются максимальными алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111). Значения функций F и G в этих уравнениях представлены в таблице 2.9.

Рассмотрение алгебры $A_{4.8}$ привело к четырем неэквивалентным реализациям, которые являются алгебрами инвариантности нелинейных уравнений вида (2.111):

$$A^1_{4.8} = A^1_{3.3} \ni \langle t\partial_t + qx\partial_x + (1 + q)u\partial_u \rangle \quad (q \in \mathbb{R}),$$
$$A^2_{4.8} = A^1_{3.3} \ni \langle t\partial_t + k\partial_x + u\partial_u \rangle \quad (k \neq 0),$$
$$A^3_{4.8} = A^1_{3.3} \ni \langle x\partial_x + u\partial_u + k^{-1}(\partial_t + x\partial_u) \rangle \quad (k \neq 0),$$
$$A^4_{4.8} = A^2_{3.3} \ni \langle (1 - q)t\partial_t + x\partial_x + (1 + q)u\partial_u \rangle \quad (|q| \neq 1).$$

Реализации $A^2_{4.8}$, $A^4_{4.8}$ являются максимальными алгебрами инвариантности соответствующих нелинейных уравнений вида (2.111), значения функций F и G для которых представлены в таблице 2.9.

Для реализации $A^1_{4.8}$ с точностью до эквивалентности инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = \lambda |u_x|^{2q-1} u_{xx} + x + \epsilon |u_x|^q, \tag{2.160}$$

Таблица 2.9

Инвариантность уравнения (2.111) **относительно неразложимых четырехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии**

Алгебра	F	G
$A^1_{4.2}$	$\exp(2 - q)u_x$	$\exp(1 - q)u_x$, $q \neq 0, 1$
$A^2_{4.2}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{1}{q-1}}$	$(1 - q)^{-1}u_x \ln \lvert u_x\rvert$, $q \neq 0, 1$
$A^1_{4.3}$	$\exp(-u_x)$	$\exp(-u_x)$
$A^2_{4.3}$	1	$-u_x \ln \lvert u_x\rvert$
$A^1_{4.4}$	$\exp u_x$	$-\frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.5}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{2p-1}{q-p}}$	$\lvert u_x\rvert^{\frac{q-1}{q-p}}$, $p < q$, $p \cdot q \neq 0$, $p, q \neq 1$
$A^2_{4.5}$	$\tilde{F}(u_x)$	0
$A^1_{4.6}$	$\dfrac{\exp[(q - 2p)\arctan u_x]}{1 + u_x^2}$	$\sqrt{1 + u_x^2}\exp[(q - p)\arctan u_x]$, $q \neq p$, $p \geqslant 0$
$A^1_{4.7}$	λu_x, $\lambda \neq 0$	$x + u_x \ln \lvert u_x\rvert$
$A^2_{4.7}$	$\pm\exp(-2t)$	$-\frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.8}$ $(q \neq -\frac{1}{2})$	$\pm\lvert u_x\rvert^{2q-1}$	x
$A^1_{4.8}$ $(q \neq 0, 1)$	$\lambda\lvert u_x\rvert^{2q-1}$, $\lambda \neq 0$	$x + \lvert u_x\rvert^q$
$A^2_{4.8}$	$\lambda\lvert u_x\rvert^{-1}$, $\lambda \neq 0$	$x - k\ln\lvert u_x\rvert$, $k \neq 0$
$A^3_{4.8}$	$\pm\exp(2ku_x)$	$x + \exp(ku_x)$, $k \neq 0$
$A^4_{4.8}$ $(\lvert q\rvert \neq 1)$	$\lvert t\rvert^{\frac{1+q}{1-q}}$	$-\frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.9}$ $(q > 0)$	$\pm\exp(-2q\arctan t)$	$\mp\dfrac{t\exp(-2q\arctan t)}{1 + t^2} - \frac{1}{2}u_x^2$
$A^1_{4.10}$	$\dfrac{\exp(2k\arctan u_x]}{1 + u_x^2}$	$\beta\lvert t\rvert^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1 + u_x^2}\exp(k\arctan u_x)$, $k \geqslant 0$, $\beta \neq 0$

где если $q = 0, 1$, то $\epsilon = 0$, $\lambda = \pm 1$, а когда $q \neq 0, 1$, то или $\epsilon = 0$, $\lambda = \pm 1$, или $\epsilon = 1$, $\lambda \neq 0$.

Дальнейшее исследование уравнения (2.160) показало, что для $q \neq -\frac{1}{2}$ реализация $A^1_{4.8}$ является его максимальной алгеброй инвариантности. Если же $q = -\frac{1}{2}$, то замена переменных (2.119) сводит уравнение (2.160) к уравнению

$$v_{\overline{t}} = \lambda v_{\overline{x}\overline{x}} - v v_{\overline{x}},$$

которое является известным уравнением Бюргерса.

В случае реализации $A^3_{4.8}$ инвариантное уравнение имеет вид

$$u_t = \pm\exp(2ku_x)u_{xx} + x + \epsilon\exp(ku_x), \quad k \neq 0, \quad \epsilon = 0, 1.$$

Если $\epsilon = 1$, то реализация $A^3_{4.8}$ является максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения. Если же $\epsilon = 0$, то замена переменных

$$\overline{t} = \frac{1}{2k}e^{2kt}, \quad \overline{x} = -x, \quad v = -2ku + 2ktx, \quad k \neq 0,$$

сводит данное уравнение к уравнению

$$v_{\overline{t}} = \pm\exp(v_{\overline{x}})v_{\overline{xx}},$$

которое принадлежит к уравнениям класса (2.153).

Наконец, проведя дополнение реализаций алгебры $A_{3.5} = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ оператором e_4 вида (2.112), мы получили такую реализацию алгебры $A_{4.10}$

$$A^1_{4.10} = A^3_{3.5} \ni \langle 2kt\partial_t + u\partial_x - x\partial_u\rangle, \quad k \geqslant 0,$$

которая является максимальной алгеброй инвариантности уравнения

$$u_t = \frac{\exp(2k\arctan u_x)}{1 + u_x^2}u_{xx} + \beta|t|^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1 + u_x^2}\exp(k\arctan u_x),$$
$$k \geqslant 0, \quad \beta \neq 0.$$

Полный перечень неэквивалентных уравнений вида (2.111), максимальными алгебрами инвариантности которых являются неразложимые четырехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии, представлен в таблице 2.9.

Для завершения групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.111) нам остается провести анализ уравнений, алгебрами инвариантности которых являются пятимерные алгебры Ли операторов симметрии. Выше мы получили два таких уравнения, алгебры инвариантности которых являются полупрямыми суммами полупростой и разрешимой алгебр Ли. В соответствии с классификацией [4, 6] имеется еще три уравнения вида (2.153), алгебры инвариантности которых являются пятимерными разрешимыми алгебрами Ли операторов симметрии:

$$A^1_5 = A^2_{4.5} \ni \langle t\partial_t - x\partial_u\rangle;$$
$$A^2_5 = A^2_{4.5} \ni \langle nt\partial_t - u\partial_u\rangle, \quad (n \geqslant -1, n \neq 0);$$
$$A^3_5 = A^2_{4.5} \ni \langle nt\partial_t + u\partial_x - x\partial_u\rangle, \quad (n \geqslant 0).$$

При этом алгебры A^i_5 $(i = 1, 2, 3)$ попадают в разные классы неразложимых пятимерных разрешимых алгебр Ли из известной классификации пятимерных разрешимых алгебр Ли [43]:

$$A^2_5 \sim A_{5.34} \quad (p = 2), \quad A^3_5 \sim A_{5.33} \quad (p = 2 + n, \ q = -n),$$
$$A^4_5 \sim A_{5.35} \quad (p = 2, \ q = n).$$

Следовательно, соответствующие им инвариантные уравнения являются неэквивалентными. В таблицу 2.10 мы поместили перечень нелинейных уравнений вида (2.111), максимальными алгебрами инвариантности которых являются пятимерные разрешимые алгебры Ли.

Таблица 2.10

Инвариантность уравнения (2.111) **относительно пятимерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии**

Алгебра	F	G
A^1_5	$\exp u_x$	0
A^2_5	u_x^n, $n \geqslant -1$, $n \neq 0$	0
A^3_5	$\dfrac{\exp(n\arctan u_x)}{1 + u_x^2}$, $n \geqslant 0$	0

Проведенные выше исследования позволяют сделать такие выводы. С точностью до эквивалентности среди нелинейных уравнений вида (2.111) самые высокие симметрийные свойства имеют 35 уравнений, максимальными алгебрами инвариантности которых являются четырехмерные алгебры Ли операторов симметрии, и 5 уравнений, максимальными алгебрами инвариантности которых являются пятимерные алгебры Ли операторов симметрии. При этом последние 5 уравнений исчерпываются известными в математической физике уравнением Бюргерса, нелинейным уравнением теплопроводности из известной классификации [47] и тремя уравнениями нелинейной фильтрации [4, 6].

В завершение параграфа предлагаем для самостоятельного решения такие задания.

Задание 2.6. В работе [139] с использованием классических методов рассматривалась задача групповой классификации уравнения

$$u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x).$$

Было показано, что в случае произвольного значения функций f и g данное уравнение допускает трехпараметрическую группу инвариантности, которая генерируется операторами

$$v_1 = \partial_t, \quad v_2 = \partial_u, \quad v_3 = t\partial_u.$$

Далее, с использованием однопараметрических подгрупп конечнопараметрической группы преобразований эквивалентности (которая сама является подгруппой полной бесконечнопараметрической группы эквивалентности) данного уравнения была найдена последовательность спецификаций функций f и g, при которых уравнение допускает один дополнительный оператор симметрии.

Используя новый подход к групповой классификации, описать все уравнения указанного вида, которые инвариантны относительно четырехмерных разрешимых алгебр Ли операторов симметрии.

Заметим, что операторы v_1, v_2, v_3 составляют базис алгебры Ли, которая изоморфна алгебре $A_{3.3}$ (алгебре Вейля). Поэтому для решения задачи нужно выполнить первый шаг алгоритма, а затем с точностью до эквивалентности описать реализации тех четырехмерных разрешимых алгебр Ли, которые содержат алгебру $A_{3.3}$ как подалгебру.

Задание 2.7. В работе [141] проведена групповая классификация одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} + K(u)u_t = (F(u)u_x)_x + H(u)u_x, \quad F(u) \neq 0.$$

Там, в частности, было показано, что в случае произвольных значений функций K, F, H данное уравнение допускает двухпараметрическую группу инвариантности, которая генерируется операторами

$$v_1 = \partial_t, \quad v_2 = \partial_x.$$

Провести групповую классификацию данного уравнения в новом подходе и сравнить результат классификации с полученным в [141].

2.4. Симметрийная редукция и точные решения нелинейных уравнений эволюционного типа

В этом параграфе мы используем известные симметрийные свойства нелинейных уравнений вида (2.37) и (2.111) для построения их точных решений. Рассмотрению подлежат те из уравнений, алгебры инвариантности которых имеют размерность выше чем 3 (то есть уравнения, правые части которых не содержат произвольные функции).

Отметим, что интерес к построению инвариантных решений нелинейных уравнений вызван, в частности, тем, что важные классы таких решений (например, автомодельные решения [46]) являются инвариантными относительно определенных классов групп локальных преобразований.

Также довольно часто известные решения важных для разных приложений уравнений являются как раз инвариантными решениями. Проиллюстрируем это на примере известного в теории фильтрации [11, 56] уравнения Буссинеска

$$h_t = km^{-1}(hh_x)_x. \tag{2.161}$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, m — пористость почвы, $h = h(t,x)$ — напор в момент времени t в сечении, определяемый абсциссой x.

Первое точное решение уравнения (2.161) было получено Буссинеском [103], который для решения задачи с краевыми условиями

$$h(t,0) = 0, \quad h_x\big|_{x=L} = 0$$

использовал метод Фурье и искал решения в виде

$$h = T(t)X(x).$$

Найденное Буссинеском решение имеет вид

$$h = \frac{H_0 F(\xi)}{1 + \dfrac{3b^2 k H_0}{2m^2} t}, \tag{2.162}$$

где H_0 — известная постоянная, $\xi = \dfrac{x}{L}$,

$$b = \int\limits_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}} = \frac{1}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}86236,$$

$F(\xi)$ — обращение равенства

$$\xi = \frac{1}{b} \int\limits_0^F \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}}.$$

Оно характеризует так называемый “упорядоченный режим” Буссинеска и соответствует неустановившемуся притоку почвенных вод в дренажную галерею ($x = 0$) с напором на контуре, который равен нулю, в водоносном пласте ширины L и максимальной высоты H_0, который расположен на горизонтальном водоупоре и ограничен вертикальной водонепроницаемой стенкой $x = L$ ($h_x|_{x=L} = 0$). При этом уравнение начальной свободной поверхности имеет вид $h = H_0 F(\xi)$.

Решение (2.162) соответствует и задаче о неустановившемся притоке почвенных вод к бесконечному ряду дренажных галерей, которые лежат на горизонтальном водоупоре, для специального вида поверхности дисперсии [56].

Решение уравнения (2.161) типа мгновенного источника

$$h = \frac{m}{6kt}\left[\left(\frac{9kt}{m}\right)^{\frac{2}{3}} - x^2\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant \left(\frac{9kt}{m}\right)^{\frac{2}{3}} = l \tag{2.163}$$

получил Баренблатт [11].

Соколов [69] рассматривал обобщенное уравнение Буссинеска для случая двух пространственных переменных ($h = h(t, x, y)$):

$$h_t = \frac{1}{2}a^2\left[\left(h^2\right)_{xx} + \left(h^2\right)_{yy}\right], \quad a^2 = \frac{k}{m}. \tag{2.164}$$

Он построил такие частные решения уравнения (2.164):

$$h = -\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{8a^2(t-t_0)} + C|t-t_0|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.165}$$

$$h + H_0 \ln|1 - hH_0^{-1}| = Ax + By + a^2(A^2+B^2)t + C, \tag{2.166}$$

$$h = Ax + By + a^2(A^2+B^2)t + C, \tag{2.167}$$

где H_0, A, B, C — произвольные постоянные интегрирования, $H_0 \neq 0$.

Соколов также уточнил решение

$$h = \frac{m}{8kt}\left(4\sqrt{\frac{kt}{\pi m}} - r^2\right), \quad 0 \leqslant r \leqslant 2\left(\frac{kt}{\pi m}\right)^{\frac{1}{4}} = l, \tag{2.168}$$

$$h = 0, \quad r \geqslant l,$$

уравнения Буссинеска

$$h_t = \frac{a^2}{2r}\left[r\left(h^2\right)_r\right]_r,$$

которое соответствует осесимметрическому движению почвенных вод. Решение (2.168) было получено в [11] и приведено в [56] в неверном виде.

Заметим, что решение (2.168) получается из решения (2.165), в котором положено

$$t_0 = 0, \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2, \quad C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\pi k}}.$$

Также в [69] были получены известные [11] решения уравнения (2.161). А именно, решение (2.163) и решения

$$h = H_0 \ln|1 - hH_0^{-1}| = A_1 x + a^2 A_1^2 t + C,$$

$$h = A_1 x + a^2 A_1^2 t + C,$$

где H_0, A_1, C — произвольные постоянные интегрирования, $H_0 \neq 0$, $a^2 = \dfrac{k}{m}$.

Отметим, что перечисленные выше решения были получены без явного использования симметрийных свойств уравнений (2.161) и (2.164).

Более того, впервые симметрийные свойства одномерного уравнения Буссинеска были исследованы Овсянниковым при групповой классификации нелинейного уравнения теплопроводности [47]. Симметрия двух- и трехмерного уравнения Буссинеска была исследована Дородницыным, Князевой и Свирщевским [22]. Серова [68] рассматривала уравнение

$$u_t = F(u)\Delta u \tag{2.169}$$

в пространстве $n+1$ независимых переменных $t, x_1, \ldots, x_n$. В частности, частным случаем уравнения (2.169) для $F = \lambda\sqrt{u}$ является уравнение

$$u_t = \lambda\sqrt{u}\Delta u, \quad \lambda \neq 0, \tag{2.170}$$

к которому сводится n-мерное уравнение Буссинеска

$$v_t = \frac{1}{2}\lambda\Delta v^2, \quad \lambda \neq 0,$$

локальной заменой $u = v^2$.

В работе [68] с использованием метода симметрийной редукции был построен ряд точных решений уравнения (2.170).

Систематическое рассмотрение симметрийной редукции трехмерного уравнения Буссинеска к обыкновенным дифференциальным уравнениям проведено в статье [96].

Отметим, что, как это следует из результатов работ [68, 96], все известные точные решения уравнения Буссинеска (полученные Буссинеском, Баренблаттом и Соколовым) являются инвариантными решениями. Так, решение (2.162) получается как результат редукции уравнения (2.161), которая соответствует оператору симметрии $t\partial_t - h\partial_h$. Решения (2.163), (2.165)–(2.167) совпадают (с точностью до обозначения постоянных) с инвариантными решениями, которые можно найти в [96].

Заметим также, хотя это и выходит за пределы исследований, что к особому прогрессу в построении точных решений уравнения Буссинеска не привело и использование неклассических (Q-условных) симметрий этого уравнения (подробное рассмотрение Q-условной симметрии дифференциальных уравнений можно найти в [89]). Проблема существования неклассических симметрий уравнения Буссинеска для разных размерностей изучалась в работах [66, 67]. Там были найдены новые (нелиевские) операторы симметрии этого уравнения, но соответствующая им симметрийная редукция привела к инвариантным (в классическом смысле Ли) решениям уравнения Буссинеска.

Позже, в работе [188] было показано, что решение проблемы построения новых операторов симметрии для уравнений эволюционного типа

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{2.171}$$

конструктивно в классе операторов

$$Q = \partial_t + A(t, x, u)\partial_x + B(t, x, u)\partial_u. \tag{2.172}$$

В классе же операторов

$$Q = \partial_x + B(t, x, u)\partial_u$$

(именно такие операторы рассматривались в работе [66]) задача построения новых операторов симметрии уравнения (2.171) эквивалентна задаче получения новых точных решений этого уравнения. А уравнение Буссинеска, которое является частным случаем уравнения (2.171), в классе операторов (2.172) допускает только операторы классической симметрии. Вместе с тем необходимо отметить, что не следует ограничиваться при рассмотрении Q-условной симметрии уравнений вида (2.171) только классом операторов (2.172). Как показывает практика, рассмотрение другого класса операторов также часто приводит к существенно новым решениям исследуемых уравнений.

Исходя из сказанного выше, видим, что использование симметрийных методов исследования уравнений в частных производных для построения их точных решений остается актуальным и сегодня (в особенности это имеет место для нелинейных уравнений).

Перейдем теперь к построению инвариантных решений нелинейных уравнений вида (2.37).

2.4.1. Симметрийная редукция и построение точных решений уравнений вида (2.37)

Процедура симметрийной редукции дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют нетривиальные алгебры инвариантности, предусматривает наличие оптимального перечня подалгебр некоторой размерности данной алгебры Ли операторов симметрии. Классификация подалгебр действительных алгебр Ли невысокой размерности с точностью до сопряженности, которую определяют действия групп внутренних автоморфизмов этих алгебр, проведена в [160]. Поскольку здесь мы рассматриваем задачу симметрийной редукции дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными к обычным дифференциальным уравнениям, то для редукции нужно использовать одномерные подалгебры алгебр Ли операторов симметрии исследуемых уравнений. При этом эти подалгебры должны удовлетворять необходимым условиям существования редукции, которые в нашем случае сводятся к выполнению условия

$$|\tau| + |\xi| \neq 0 \tag{2.173}$$

в некоторой области пространства V для данного оператора симметрии вида (2.38). Следовательно, используя перечни одномерных подалгебр из [160], мы, прежде всего, отбираем те из подалгебр, которые удовлетворяют условию (2.173).

Далее, поскольку наибольший интерес в разных приложениях имеют решения, определенные в области, где $t > 0$, $x > 0$, мы здесь ограничиваемся рассмотрением именно таких решений. Это, кроме того, несколько упрощает вид исследуемых уравнений и соответствующие вычисления.

Рассмотрим подробно симметрийную редукцию первого уравнения из таблицы 2.3, которое для $t > 0$, $x > 0$ принимает такой вид:

$$u_t = u_{xx} + \frac{\lambda u_x}{4\sqrt{t}} \ln|tu_x^2| + \frac{\beta u_x}{\sqrt{t}}, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.174}$$

Максимальной алгеброй инвариантности этого уравнения является реализация

$$2A^1_{2.2} = \langle -2t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x, \partial_u\rangle \quad (\lambda \neq 0).$$

В соответствии с результатами классификации [160] одномерные подалгебры алгебры

$$2A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3, e_4\rangle \quad ([e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4)$$

исчерпываются такими алгебрами: $\langle e_2\rangle, \langle e_4\rangle$, $\langle e_3\rangle, \langle e_1 + \alpha e_3\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{R},\ \epsilon = \pm 1$). Поскольку в данном случае

$$e_1 = -2t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x, \quad e_4 = \partial_u,$$

то условию (2.173) удовлетворяют все подалгебры, кроме $\langle e_4\rangle$.

Алгебра $\langle e_2\rangle$. Поскольку $e_2 = \partial_x$, то уравнение $e_2 \cdot F(t, x, u) = 0$ имеет два решения $\omega_1 = u$, $\omega_2 = t$. Поэтому соответствующий анзац $\omega_1 = \varphi(\omega_2)$, где φ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента, имеет вид

$$u = \varphi(t)$$

и сводит уравнение (2.174) к уравнению

$$\varphi' = 0,$$

общее решение которого

$$\varphi = C = \mathrm{const}$$

приводит к тривиальному решению исследуемого уравнения:

$$u = C.$$

В дальнейшем мы будем исключать из исследования и те одномерные подалгебры алгебр Ли операторов симметрии исследуемых уравнений, соответствующая которым симметрийная редукция приводит к тривиальным решениям.

Алгебра $\langle e_3\rangle$. Здесь $e_3 = -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x$, поэтому решением уравнения $e_3 \cdot F(t, x, u) = 0$ являются функции $\omega_1 = u\exp\left(\dfrac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right)$, $\omega_2 = t$, поэтому соответствующий анзац имеет вид

$$u = \varphi(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right)$$

и сводит уравнение (2.174) к уравнению

$$\varphi' = \frac{1}{2t}[A - \ln|\varphi|]\varphi, \quad A = \lambda^{-2}[2 + \lambda^2\ln|\lambda| - 2\lambda\beta].$$

Полученное уравнение легко интегрируется:

$$\varphi = \pm\exp\left(A + Ct^{-1/2}\right), \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

и приводит к такому инвариантному решению уравнения (2.174):

$$u = \pm\exp\left[\lambda^{-2}(2 + \lambda^2\ln|\lambda| - 2\lambda\beta) + \frac{C - \lambda^{-1}x}{\sqrt{t}}\right],$$
$$C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Алгебра $\langle e_1\rangle$. Здесь $e_1 = -2t\partial_u - x\partial_x$ является инфинитезимальным оператором однопараметрической группы растяжений пространства независимых переменных. Согласно [46] таким операторам соответствуют автомодельные решения. Проведя стандартные вычисления, получаем, что инвариантный анзац имеет вид

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = tx^{-2},$$

а соответствующее редуцированное уравнение

$$4\omega^2\varphi'' + \Big[6\omega - 1 - \lambda\sqrt{\omega}\ln 2 - \\ - \frac{3}{2}\lambda\sqrt{\omega}\ln\omega - 2\beta\sqrt{\omega} - \lambda\sqrt{\omega}\ln|\varphi'|\Big]\varphi' = 0$$

явно допускает понижение порядка на единицу.

С другой стороны, нормализатор алгебры $\langle e_1\rangle$ в алгебре $2A_{2.2}$ совпадает с алгеброй $\langle e_1, e_3, e_4\rangle$, нетривиальной частью которой является двухмерная алгебра Ли $\langle e_3, e_4\rangle$. Поэтому редуцированное уравнение гарантировано допускает двухпараметрическую группу инвариантности. В групповом анализе дифференциальных уравнений хорошо известно, что обыкновенное дифференциальное уравнение, которое допускает двухпараметрическую группу инвариантности, интегрируется в квадратурах. Кратко остановимся на этом вопросе (более подробную информацию можно найти, например, в [32, 55, 138]), а потом возвратимся к рассмотрению симметрийной редукции уравнения (2.174).

Заметим также, что приведенная ниже схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые допускают двухпараметрические группы преобразований, принадлежит С. Ли [152].

Итак, пусть обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y = y(x), \tag{2.175}$$

допускает двухмерную алгебру Ли с базисными операторами вида

$$\mathrm{v}_1 = \xi_2 \partial_1 + \eta_1 \partial_y, \quad \mathrm{v}_2 = \xi_2 \partial_x + \eta_2 \partial_y, \tag{2.176}$$

где $\xi_i = \xi_i(x, y)$, $\eta_i = \eta_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ — некоторые гладкие функции своих аргументов в пространстве $\langle x, y \rangle$.

В основе алгоритма интегрирования уравнения (2.175) лежат инвариантные свойства двухмерной алгебры Ли операторов симметрии (2.176), которые позволяют разбить множество всех таких алгебр Ли на четыре типа. С одним из таких свойств мы уже встречались: операторы v_1, v_2 составляют базис алгебры Ли, изоморфной либо алгебре $A_{2.1}$ ($[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = 0$), либо алгебре $A_{2.2}$ ($[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = \mathrm{v}_2$). Как известно, это свойство инвариантно относительно невырожденной замены переменных

$$\bar{x} = X(x, y), \quad \bar{y} = Y(x, y), \quad \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0. \tag{2.177}$$

Вместе с операцией коммутирования дифференциальных операторов введем в рассмотрение еще и операцию так называемого *псевдоскалярного* (косого) произведения

$$\mathrm{v}_1 \vee \mathrm{v}_2 = \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2.$$

Оказывается, что любая двухмерная алгебра Ли путем выбора подходящего базиса v_1, v_2 сводится к одному из четырех разных типов, которые исчерпываются такими каноническими структурными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = 0, \quad \mathrm{v}_1 \vee \mathrm{v}_2 \neq 0;\\
&\text{II.} \quad [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = 0, \quad \mathrm{v}_1 \vee \mathrm{v}_2 = 0;\\
&\text{III.} \quad [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = \mathrm{v}_2, \quad \mathrm{v}_1 \vee \mathrm{v}_2 \neq 0;\\
&\text{IV.} \quad [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = \mathrm{v}_2, \quad \mathrm{v}_1 \vee \mathrm{v}_2 = 0.
\end{aligned}$$

Эти структурные соотношения инвариантны относительно замены (2.177).

Также существуют замены переменных (2.177), которые, в соответствии с указанными типами двухмерных алгебр Ли, сводят базисы этих алгебр Ли к одному из таких:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \mathrm{v}_1 = \partial_{\bar{x}}, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_{\bar{y}};\\
&\text{II.} \quad \mathrm{v}_1 = \partial_{\bar{y}}, \quad \mathrm{v}_2 = \bar{x}\partial_{\bar{y}};\\
&\text{III.} \quad \mathrm{v}_1 = -\bar{x}\partial_{\bar{x}} - \bar{y}\partial_{\bar{y}}, \quad \mathrm{V}_2 = \partial_{\bar{y}};\\
&\text{IV.} \quad \mathrm{v}_1 = -\bar{y}\partial_{\bar{y}}, \quad \mathrm{v}_2 = \partial_{\bar{y}}.
\end{aligned}$$

Соответствующие переменные $\bar{x}$, $\bar{y}$ называются каноническими переменными.

Если уравнение (2.175) допускает двухмерную алгебру Ли операторов симметрии первого типа, то в канонических переменных оно принимает вид

$$\bar{y}'' = g(\bar{y}')$$

и легко интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{d\bar{y}'}{g(\bar{y}')} = \bar{x} + C_1,$$

или явным образом $\bar{y}' = \varphi(\bar{x} + C_1)$, откуда

$$\bar{y} = \int \varphi(\bar{x} + C_1) d(\bar{x} + C_1) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Уравнение (2.175), которое инвариантно относительно двухмерной алгебры Ли операторов симметрии второго типа, в канонических переменных имеет вид

$$\bar{y}'' = g(\bar{x})$$

и интегрируется двумя квадратурами

$$\bar{y} = \int \left(\int g(\bar{x}) d\bar{x} \right) d\bar{x} + C_1\bar{x} + C_2.$$

Уравнение (2.175), которое инвариантно относительно двухмерной алгебры Ли операторов симметрии третьего типа, в канонических переменных имеет вид

$$\bar{y}'' = \frac{1}{\bar{x}} g(\bar{y}')$$

и также решается двумя квадратурами

$$\int \frac{d\bar{y}'}{g(\bar{y}')} = \ln|\bar{x}| + C_1.$$

Наконец, для уравнения (2.175), которое инвариантно относительно двухмерной алгебры Ли операторов симметрии четвертого типа, преобразованное уравнение

$$\bar{y}'' = g(\bar{x})\bar{y}'$$

имеет общее решение

$$\bar{y} = C_1 \int \exp\left(\int g(\bar{x})d\bar{x}\right) d\bar{x} + C_2.$$

Возвратимся теперь к рассмотрению симметрийной редукции уравнения (2.174). Из сказанного выше следует, что в результате редукции, соответствующей алгебре $\langle e_1\rangle$, мы получили уравнение, которое может быть проинтегрировано в квадратурах. Но для этого мы должны найти второй оператор симметрии редуцированного уравнения (один оператор очевиден — ∂_φ), определить тип алгебр инвариантности, найти канонические переменные, записать редуцированное уравнение в канонических переменных и, наконец, проинтегрировать его.

Чтобы избежать выполнения ряда указанных выше шагов, осуществим построение анзаца, соответствующего алгебре $\langle e_1\rangle$, который сразу будет редуцировать уравнение (2.174) к обыкновенному дифференциальному уравнению, записанному в канонических переменных.

Для этого найдем замену переменных

$$\bar{\omega} = \mathrm{W}(\omega), \quad \bar{u} = u, \quad \omega = tx^{-2}, \tag{2.178}$$

которая сводит операторы e_3, e_4, составляющие базис алгебры $A_{2.2}$ и удовлетворяющие условию $e_3 \vee e_4 \neq 0$, к виду

$$e_3 \to \bar{e}_3 = -\bar{u}\partial_{\bar{u}} - \bar{\omega}\partial_{\bar{\omega}}, \quad e_4 \to \bar{e}_4 = \partial_{\bar{u}}.$$

Поскольку

$$\partial_u \overset{(2.178)}{\to} \partial_{\bar{u}}, \quad -u\partial_u + \lambda\sqrt{t}\partial_x \overset{(2.178)}{\to} -\bar{u}\partial_{\bar{u}} - 2\lambda\omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{W}'\partial_{\bar{\omega}},$$

то функция W в (2.178) должна удовлетворять уравнению

$$2\lambda\omega^{\frac{3}{2}}\mathrm{W}' = \mathrm{W}, \quad \mathrm{W} \neq 0.$$

Отсюда следует, что в (2.178) можем положить

$$\mathrm{W} = \exp\left(-\lambda^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}\right) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right).$$

Согласно этому, построение соответствующего оператору e_1 анзаца осуществляем в пространстве переменных $\langle u, \omega\rangle$, где $\omega = \exp\left(-\dfrac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right)$, и приходим к такой подстановке:

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = \exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right). \tag{2.179}$$

Анзац (2.179) сводит уравнение (2.174) к уравнению

$$\omega\varphi'' = \left[\frac{1}{2}\lambda^2\ln|\varphi'| + A\right]\varphi', \quad A = \lambda\beta - 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln|\lambda|. \tag{2.180}$$

Уравнение (2.180) легко интегрируется, и его общее решение имеет вид

$$\varphi = \pm\int \exp\left[C_1\omega^{\frac{\lambda^2}{2}} - 2\lambda^{-2}A\right]d\omega + C_2, \quad C_1 \neq 0, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с этим искомое автомодельное решение уравнения (2.174) таково:

$$u = \pm\int \exp\left[C_1\omega^{\frac{\lambda^2}{2}} - 2\lambda^{-2}A\right]d\omega + C_2, \quad \omega = \exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right),$$

$$A = \lambda\beta - 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln|\lambda|, \quad \lambda C_1 \neq 0, \quad \beta, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Алгебра $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$ ($\alpha \neq 0$). Здесь нормализатор алгебры содержит нетривиальную одномерную подалгебру $\langle e_1 - \alpha e_3\rangle$. Поэтому, подобрав в пространстве $\langle ut^{-\frac{\alpha}{2}}, \frac{x}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha\lambda}{2}\ln t\rangle$ функций, инвариантных относительно оператора $e_1 + \alpha e_3$, новые переменные $\bar{u}$, ω так, чтобы оператор

$e_1 - \alpha e_3$ сводился к оператору ∂_ω, получаем анзац

$$u = \exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}}\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}} + \frac{\alpha\lambda}{2}\ln t,$$

который сводит уравнение (2.174) к уравнению

$$\varphi'' - \frac{2}{\lambda}\varphi' - \frac{1}{2}\alpha\lambda\varphi' + \frac{1}{\lambda^2}\varphi + \\ + \frac{\lambda}{2}\left(\varphi' - \frac{1}{2}\varphi\right)\ln\left|\varphi' - \frac{1}{\lambda}\varphi\right| + \beta\left[\varphi' - \frac{1}{\lambda}\varphi\right] = 0. \tag{2.181}$$

Уравнение (2.181) не содержит независимой переменной и допускает понижение порядка на единицу. В общем виде нам его проинтегрировать не удалось, но оно имеет частное решение

$$\varphi = \pm\lambda\exp\left[\frac{2(1-\lambda\beta)}{\lambda^2}\right],$$

которому соответствует такое инвариантное решение уравнения (2.174):

$$u = \pm\lambda\exp\left[-\frac{x}{\lambda\sqrt{t}} + \frac{2(1-\lambda\beta)}{\lambda^2}\right].$$

Алгебра $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$. Решив уравнение

$$(e_1 + \epsilon e_4)\cdot F(t, x, u) = 0,$$

приходим к анзацу

$$u = \varphi(\omega) - \frac{1}{2}\epsilon\ln t, \quad \omega = tx^{-2},$$

который сводит уравнение (2.174) к уравнению

$$4\omega^2\varphi'' + \left[6\omega - 1 - \left(\lambda\ln 2 + 2\beta - \frac{3}{2}\lambda\ln\omega\right)\sqrt{\omega}\right]\varphi' - \\ - \lambda\sqrt{\omega}\varphi'\ln|\varphi'| + \frac{1}{2}\epsilon\omega^{-1} = 0,$$

которое также проинтегрировать в общем виде не удалось. Отметим только, что это уравнение, как и предыдущее, допускает понижение порядка на единицу, поскольку не содержит явно функции φ.

Алгебра $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$. Здесь можно использовать высокую размерность нетривиальной части нормализатора этой подалгебры в алгебре $2A_{2.2}$. Но и прямая редукция, соответствующая анзацу

$$u = \varphi(t) + \epsilon x,$$

приводит к уравнению

$$\varphi' = \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}\left(\frac{\lambda}{4}\ln t + \beta\right),$$

которое легко интегрируется и имеет такое общее решение:

$$\varphi = \frac{1}{2}\lambda\epsilon\sqrt{t}(\ln t - 2) + 2\epsilon\beta\sqrt{t} + C.$$

Соответствующее инвариантное решение уравнения (2.174) имеет вид

$$u = \frac{1}{2}\lambda\epsilon\sqrt{t}(\ln t - 2) + 2\epsilon\beta\sqrt{t} + \epsilon x + C,$$
$$\lambda \neq 0, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \beta, C \in \mathbb{R}.$$

Алгебра $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$. Здесь нетривиальная часть нормализатора подалгебры в алгебре $2A_{2.2}$ имеет размерность, равную единице, а соответствующий оператору $e_2 + \epsilon e_3$ анзац

$$u = \exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t} + \epsilon}\right)\varphi(t)$$

редуцирует уравнение (2.174) к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\varphi' = (\lambda\sqrt{t} + \epsilon)^{-1} \times \Big[\left(\lambda\sqrt{t} + \epsilon\right)^{-1} - \\ - \frac{1}{4}\lambda t^{-\frac{1}{2}}\ln\left(t\left(\lambda\sqrt{t} + \epsilon\right)^{-2}\varphi^2\right) - \beta t^{-\frac{1}{2}}\Big]\varphi. \tag{2.182}$$

Уравнение (2.182) инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований с инфинитезимальным оператором $(\lambda\sqrt{t} + \epsilon)^{-1}\varphi\partial_\varphi$. Поэтому сведение этого оператора к оператору ∂_z, где z — новая искомая функция переменной t, приводит к подстановке

$$\varphi = \exp[(\epsilon + \lambda\sqrt{t})^{-1}z],$$

которая преобразует уравнение (2.182) в уравнение

$$z' = (\epsilon + \lambda\sqrt{t})^{-1} - \frac{1}{4}\lambda t^{-\frac{1}{2}} \ln\left[t(\epsilon + \lambda\sqrt{t})^{-2}\right] - \beta t^{-\frac{1}{2}}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получаем

$$z = 2(\lambda^{-1} - \beta)\sqrt{t} - \frac{1}{2}\lambda\sqrt{t}(\ln t - 2) -$$
$$- 2\epsilon\lambda^{-2} \ln\left|\epsilon + \lambda\sqrt{t}\right| + \left(\epsilon + \lambda\sqrt{t}\right)\left(\ln\left|\epsilon + \lambda\sqrt{t}\right| - 1\right) + C,$$

в соответствии с чем

$$\varphi = C_1\left(\ln\left|\epsilon + \lambda\sqrt{t}\right| - 1\right) \times$$
$$\times \exp\frac{\sqrt{t}\left[4\lambda(1 - \lambda\beta) - \lambda^3(\ln t - 2)\right] - 4\epsilon\ln\left|\epsilon + \lambda\sqrt{t}\right|}{2\lambda^2\left(\epsilon + \lambda\sqrt{t}\right)},$$
$$C_1 \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \epsilon = \pm 1. \tag{2.183}$$

Соответствующее инвариантное решение уравнения (2.174) имеет вид

$$u = \exp\left(-\frac{x}{\lambda\sqrt{t} + \epsilon}\right)\varphi,$$

где φ — функция (2.183).

Далее, аналогично проведена редукция и для остальных уравнений из таблицы 2.3. При этом, кроме подалгебр, которые не удовлетворяют условию (2.173), мы изъяли из рассмотрения и те, редукция по которым приводит к тривиальным результатам. Кроме того, все вычисления были проведены в области, где $t > 0$, $x > 0$. Далее мы не проводим подробное изложение, а сразу указываем полученные результаты с краткими комментариями.

Уравнение

$$u_t = u_{xx} - \lambda u_x(x + \ln|u_x|), \quad \lambda \neq 0, \tag{2.184}$$

также $2A_{2.2}$-инвариантное уравнение. Поскольку здесь

$$e_1 = \partial_x - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \lambda^{-1}\partial_t, \quad e_4 = e^{\lambda t}\partial_x,$$

то условиям задачи, которую мы решаем, удовлетворяют такие одномерные подалгебры алгебры Ли операторов симметрии: $\langle e_3\rangle, \langle e_1\rangle$, $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$ $(\alpha \neq 0)$, $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$.

Найденные инвариантные решения уравнения (2.184) приведены в таблице 2.11. Для тех случаев, когда нам не удалось построить общий интеграл редуцированного уравнения, в таблице приведены анзац и соответствующее редуцированное уравнение.

Заметим только, что алгебре $\langle e_3\rangle$ соответствует стационарное решение уравнения (2.184). Редукция по алгебрам $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$ приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка, вследствие чего в соответствующее инвариантное решение уравнения (2.184) входит только одна постоянная интегрирования. Редуцированные уравнения, соответствующие алгебрам $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$ и $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$, нам проинтегрировать в общем виде не удалось. Отметим только, что они легко сводятся к уравнениям первого порядка. Первое ($\varphi' = p(\varphi)$) — к уравнению

$$\alpha^2 pp' + (\lambda - 2\alpha)p - \lambda(\alpha p - \varphi)\ln|\alpha p - \varphi| + \varphi = 0,$$

а второе ($\varphi' = f(x)$) — к уравнению

$$f' - \lambda f(x + \ln|f|) - \epsilon\lambda = 0.$$

Таблица 2.11

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.184)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_3\rangle$	$u = \pm\int \exp[C_1 e^{\lambda x} - x - \lambda^{-1}]dx + C_2$, $\lambda \neq 0$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\langle e_1\rangle$	$u = \pm\exp[Ce^{\lambda t} - x - \lambda^{-1}]$, $C \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$
$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$	$u = e^{-x}\varphi(\omega)$, $\omega = \alpha x - \lambda t$, $\alpha\lambda \neq 0$, $\alpha^2\varphi'' + (\lambda - 2\alpha)\varphi' - \lambda(\alpha\varphi' - \varphi)\ln|\alpha\varphi' - \varphi| + \varphi = 0$
$\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$	$u = \pm\lvert 1 + \epsilon e^{\lambda t}\rvert \exp\Big[\frac{-x + C_1 e^{\lambda t} - (1+\lambda)\epsilon t e^{\lambda t}}{1 + \epsilon e^{\lambda t}} + \frac{1 + \epsilon e^{\lambda t}\ln\lvert 1 + \epsilon e^{\lambda t}\rvert}{\lambda(1 + \epsilon e^{\lambda t})}\Big]$, $\lambda \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$	$u = e^{-\lambda t}[\epsilon x - \lambda^{-1}t - \lambda^{-2}] + C_1$, $C_1\lambda \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$
$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$	$u = \epsilon\lambda t + \varphi(x)$, $\lambda \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $\varphi'' - \lambda\varphi'(x + \ln\lvert\varphi'\rvert) - \epsilon\lambda = 0$

Проведем теперь анализ $A_{4.2}$-инвариантных уравнений из таблицы 2.3:

$$u_t = u_{xx} + \lambda \exp(-u_x), \quad \lambda \neq 0, \tag{2.185}$$

$$u_t = u_{xx} + 2\ln|u_x|. \tag{2.186}$$

Уравнение (2.185) инвариантно относительно реализации $A^1_{4.2}$, поэтому здесь

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \partial_x, \quad e_4 = 2t\partial_t + x\partial_x + (u+x)\partial_u,$$

вследствие чего условию задачи симметрийной редукции уравнения (2.185) удовлетворяют подалгебры $\langle e_1\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$, $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$ $(\alpha \neq 0)$.

Алгебре $\langle e_1\rangle$ соответствует стационарное решение уравнения (2.185):

$$u = (x - \lambda^{-1}C_1)\ln|C_1 - \lambda x| - x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Рассмотрение редукций, которые соответствуют алгебрам $\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$, $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$ $(\alpha \neq 0)$, привело к двум нестационарным решениям уравнения (2.185). Они, соответственно, имеют такой вид:

$$u = \epsilon t + \int \ln[C_1 e^{\epsilon x} + \epsilon\lambda]dx + C_2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \lambda \neq 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x - \alpha t,$$

где функция φ определяется равенством

$$\int \frac{e^{\varphi'}d\varphi'}{\alpha^{-1}\lambda + \varphi' e^{\varphi'}} = -\alpha\omega + C_1, \quad \alpha\lambda \neq 0, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Наконец, анзац

$$u = x\varphi(\omega) + x\ln|x|, \quad \omega = tx^{-2},$$

который мы получили при рассмотрении алгебры $\langle e_4\rangle$, редуцирует уравнение (2.185) к уравнению

$$4\omega^2\varphi'' + (2\omega - 1)\varphi' + 1 + \exp(2\omega\varphi' - \varphi - 1) = 0.$$

Уравнение (2.186) инвариантно относительно реализации $A^2_{4.2}$, поэтому здесь

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = \partial_u, \quad e_3 = \partial_t, \quad e_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (u+t)\partial_u$$

и условию задачи симетрийной редукции удовлетворяют подалгебры $\langle e_3\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$, $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$ $(\alpha \neq 0)$.

Алгебрам $\langle e_3\rangle$ и $\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$ соответствуют стационарные решения уравнения (2.186):

$$u = \varphi(x), \quad \int \frac{d\varphi'}{\ln|\varphi'|} = -2x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

$$u = C_1 + \epsilon x, \quad \epsilon = \pm 1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

К нестационарному решению

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = t - \alpha x,$$

$$\int \frac{d\varphi'}{\varphi' - 2\ln|\alpha\varphi'|} = \alpha^{-2}\omega + C_1, \quad \alpha \neq 0, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

привело рассмотрение алгебры $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$.

Анзац

$$u = t\varphi(\omega) + t\ln|t|, \quad \omega = tx^{-2},$$

который соответствует алгебре $\langle e_4\rangle$, редуцирует уравнение (2.186) к уравнению

$$4\omega^3\varphi'' + \omega(6\omega - 1)\varphi' + 2\ln|\varphi'| - \varphi + 3\ln|\omega| + 2\ln 2 - 1 = 0.$$

Следующим в таблице 2.3 приведено $A_{4.3}$-инвариантное уравнение

$$u_t = u_{xx} - u_x\ln|u_x| + \lambda u_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.187}$$

Поскольку базис алгебры инвариантности уравнения (2.187) составляют операторы

$$e_1 = \partial_u, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_t, \quad e_4 = t\partial_x + u\partial_u,$$

то условию редукции удовлетворяют такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности: $\langle e_1 + \epsilon e_2\rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_3 + \alpha e_1\rangle$, $\langle e_3 + \alpha e_4\rangle$ $(\alpha \neq 0)$.

Все редуцированные уравнения, кроме одного, интегрируются в квадратурах. В случае алгебры $\langle e_3 + \alpha e_4\rangle$ $(\alpha \neq 0)$ анзац

$$u = e^{\alpha t}\varphi(\omega), \quad \omega = x - \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

сводит уравнение (2.187) к уравнению

$$\varphi'' + (\lambda - \ln|\varphi'|)\varphi' - \alpha\varphi = 0,$$

которое нам проинтегрировать не удалось. Отметим только, что оно допускает понижения порядка на единицу ($\varphi' = p(\varphi)$):

$$pp' + (\lambda - \ln|p|)p - \alpha\varphi = 0.$$

Сведенный результат построения инвариантных решений для уравнения (2.187) представлен в таблице 2.12.

Базис алгебры Ли операторов симметрии $A_{4.5}$-инвариантного уравнения

$$u_t = u_{xx} + \lambda|u_x|^{\frac{2k-2}{2k-1}}, \quad \lambda \neq 0, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, \tag{2.188}$$

составляют операторы

$$e_1 = \partial_t, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = \partial_u, \quad e_4 = t\partial_x + \frac{1}{2}x\partial_x + ku\partial_u.$$

Поэтому условию редукции удовлетворяют такие одномерные подалгебры алгебры $A_{4.5}$: $\langle e_1\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$, $\langle e_1+\epsilon e_2+\alpha e_3\rangle$ ($\alpha \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$). Результаты симметрийной редукции для уравнения (2.188) представлены в таблице 2.13.

Таблица 2.12

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.187)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_1+\epsilon e_2\rangle$	$u = \epsilon(x+\lambda t) + C_1$, $\epsilon = \pm 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_3\rangle$	$u = \pm\int \exp(C_1 \exp x + \lambda)dx + C_2$, $\lambda C_1 \neq 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$
$\langle e_4\rangle$	$u = \pm\exp[(x+\ln t + C_1)t^{-1} + \lambda]$, $\lambda \neq 0$, $C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_3+\alpha e_1\rangle$	$u = \alpha t + \varphi(x)$, $\int \frac{d\varphi'}{\alpha + \varphi'(\lambda + \ln|\varphi'|)} = x + C_1$, $\alpha\lambda \neq 0$, $C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_3+\alpha e_4\rangle$	$u = e^{\alpha t}\varphi(\omega)$, $\omega = x - \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\varphi'' + (\lambda - \ln|\varphi'|)\varphi' - \alpha\varphi = 0$, $\lambda\alpha \neq 0$

Таблица 2.13

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.188)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_1\rangle$	$u = \pm\frac{2k-1}{2\lambda k}\left\|C_1 - \frac{\lambda x}{2k-1}\right\|^{2k} + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$
$\langle e_4\rangle$	$u = t^k\varphi(\omega)$, $\omega = tx^{-2}$, $4\omega^2\varphi'' + \lambda 2^{\frac{2k-2}{2k-1}}\|\omega\|^{\frac{3k-3}{2k-1}}\|\varphi'\|^{\frac{2k-2}{2k-1}} + \omega(6\omega-1)\varphi' - k\varphi = 0$, $\lambda \neq 0$, $k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$
$\langle e_1+\epsilon e_3\rangle$	$u = \epsilon t + \varphi(x)$, $\int \frac{d\varphi'}{\epsilon - \lambda\|\varphi'\|^{\frac{2k-2}{2k-1}}} = x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \pm 1$, $\lambda \neq 0$
$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$	$u = \lambda t + \epsilon x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \pm 1$, $\lambda \neq 0$
$\langle e_1+\epsilon e_2+\alpha e_3\rangle$	$u = \alpha t + \varphi(\omega)$, $\omega = x - \epsilon t$, $\int \frac{d\varphi'}{\alpha - \epsilon\varphi' - \lambda\|\varphi'\|^{\frac{2k-2}{2k-1}}} = \omega + C_1$, $\alpha\lambda \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Базис алгебры Ли операторов симметрии $A_{4.7}$-инвариантного уравнения

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{4t}u_x^2 \tag{2.189}$$

составляют операторы

$$e_1 = \partial_u, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = x\partial_u - \frac{1}{2}\ln|t|\partial_x,$$
$$e_4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u.$$

Поэтому условию симметрийной редукции удовлетворяют только две одномерные подалгебры алгебры $A_{4.7}$: $\langle e_3\rangle$, $\langle e_4\rangle$.

Алгебре $\langle e_3\rangle$ соответствует анзац

$$u = \varphi(t) - x^2\ln^{-1} t,$$

который сводит уравнение (2.189) к уравнению

$$\varphi' = -\frac{2}{\ln t}.$$

Поэтому соответствующее инвариантное решение уравнения (2.189) имеет вид

$$u = -x^2 \ln^{-1} t - 2\int \frac{dt}{\ln t} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрение алгебры $\langle e_4 \rangle$, которой соответствуют автомодельные решения уравнения (2.189), привело к анзацу

$$u = t\varphi(\omega), \quad \omega = tx^{-2},$$

который сводит это уравнение к уравнению

$$4\omega^3\varphi'' + \omega^3(\varphi')^2 + \omega(6\omega - 1)\varphi' - \varphi = 0.$$

Редуцированное уравнение нам проинтегрировать не удалось.

Остановимся далее на рассмотрении трех $A_{4.8}$-инвариантных уравнений:

$$u_t = u_{xx} - uu_x + \lambda|u_x|^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda \neq 0; \tag{2.190}$$

$$u_t = u_{xx} + \lambda^{-1}x + m\sqrt{|u_x|}, \quad \lambda > 0, \quad m \neq 0; \tag{2.191}$$

$$u_t = u_{xx} - \frac{\lambda}{4}(1-q)t^{-\frac{1}{2}(1+q)}u_x^2, \quad \lambda \neq 0, \quad |q| \neq 1. \tag{2.192}$$

Базис алгебры инвариантности уравнения (2.190) составляют операторы

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = \partial_t, \quad e_3 = t\partial_x + \partial_u, \quad e_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u.$$

Поэтому параметр q в коммутационных соотношениях, которые определяют алгебру $A_{4.8}$, равен $-\frac{1}{2}$ и условию симметрийной редукции удовлетворяют такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности: $\langle e_2 \rangle$, $\langle e_3 \rangle$, $\langle e_4 \rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_3 \rangle$ $(\epsilon = \pm 1)$.

Алгебре $\langle e_2 \rangle$ соответствуют стационарные решения уравнения (2.190)

$$u = \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' - \varphi\varphi' + \lambda|\varphi'|^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Это уравнение допускает понижение порядка на единицу и приводится к уравнению $(\varphi' = p(\varphi))$

$$p' - \varphi + \lambda|p|^{\frac{1}{2}} = 0,$$

которое подстановкой

$$p = \varphi^2 f(\varphi)$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\varphi f' + 2f + \lambda\sqrt{|f|} - 1 = 0,$$

откуда следует, что функция f определяется равенством

$$\int \frac{df}{1 - \lambda|f|^{\frac{1}{2}} - 2f} = \ln|\varphi| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

и ее значения зависят от значений параметра λ.

Рассмотрение алгебры $\langle e_3 \rangle$ привело к такому инвариантному решению уравнения (2.190):

$$u = 2\lambda t^{-\frac{1}{2}} + t^{-1}(x + C_1), \quad \lambda \neq 0, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Анзац, соответствующий алгебре $\langle e_4 \rangle$,

$$u = t^{-\frac{1}{2}}\varphi(\omega), \quad \omega = tx^{-2},$$

преобразует уравнение (2.190) в уравнение

$$4\omega^{\frac{3}{2}}\varphi'' + 2\varphi\varphi' + \left(6\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}\right)\varphi' + 2\sqrt{2}\lambda\omega^{\frac{3}{2}}|\varphi'|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\omega^{-\frac{3}{2}}\varphi = 0,$$

проинтегрировать которое нам не удалось.

Наконец, редукция по алгебре $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$, для которой анзац имеет вид

$$u=\epsilon t+\varphi(\omega),\quad \omega=x-\frac{1}{2}\epsilon t^2,$$

привела к уравнению

$$\varphi''+\lambda|\varphi'|^{\frac{3}{2}}-\varphi\varphi'-\epsilon=0,\quad \epsilon=\pm1,\quad \lambda\neq0,$$

которое допускает понижение порядка на единицу.

Базис алгебры инвариантности уравнения (2.191) составляют операторы

$$e_1=\partial_u,\quad e_2=\partial_t,\quad e_3=t\partial_u+\lambda\partial_x,\quad e_4=t\partial_t+\frac{1}{2}x\partial_x+\frac{3}{2}u\partial_u.$$

Поэтому значение параметра q в коммутационных соотношениях, которые определяют алгебру $A_{4.8}$, равно $\frac{1}{2}$ и рассматривать нужно такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности: $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$ ($\epsilon=\pm1$).

Алгебре $\langle e_2\rangle$ соответствуют стационарные решения уравнения (2.191)

$$u=\varphi(x),$$

где функция φ определяется из следующих соотношений:

$$\varphi'=x^2\psi(x),$$
$$\int\frac{d\psi}{2\psi+m\sqrt{\psi}+\lambda^{-1}}=-\ln x+C_1,\quad \lambda>0,\quad m\neq0,\quad C_1\in\mathbb{R}.$$

Исследование редукции, соответствующей алгебре $\langle e_3\rangle$, привело к такому решению уравнения (2.191):

$$u=\frac{tx}{\lambda}+\frac{2mt^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\lambda}}+C_1,\quad \lambda>0,\quad m\neq0,\quad C_1\in\mathbb{R}.$$

Редукция по алгебрам $\langle e_4\rangle$ и $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$ привела к таким результатам:

$$\langle e_4\rangle:\quad u=t^{\frac{3}{2}}\varphi(\omega),\quad \omega=tx^{-2},$$
$$4\omega^3\varphi''+\omega(6\omega-1)\varphi'+\sqrt{2}m\omega^{-\frac{3}{2}}|\varphi'|^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\varphi+\lambda^{-1}\omega^{-\frac{1}{2}}=0;$$

$$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle:\quad u=\varphi(\omega)+\frac{1}{2}\epsilon t^2,\quad \omega=x-\epsilon\lambda t,$$
$$\varphi''+\lambda\varphi'+m|\varphi'|^2+\lambda^{-1}\omega=0.$$

Здесь $\epsilon=\pm1$, $\lambda>0$, $m\neq0$.

Поскольку базис алгебры инвариантности уравнения (2.192) составляют операторы

$$e_1=\partial_u,\quad e_2=\partial_x,\quad e_3=x\partial_u+\lambda t^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_x,$$
$$e_4=2t\partial_t+x\partial_x+(1+q)u\partial_u,\quad |q|\neq1,\quad \lambda\neq0,$$

то возникает потребность при редукции различать случаи $q=0$ и $q\neq0$.

Если $q=0$, то рассматривать следует такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности: $\langle e_2\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_3+\alpha e_4\rangle$ ($\alpha\neq0$, $\epsilon=\pm1$).

Результат симметрийной редукции для уравнения (2.192), в котором $q=0$, представлен в таблице 2.14.

Если в уравнении (2.192) $q\neq0$, то рассматривать следует такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности: $\langle e_3\rangle$, $\langle e_4\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$ ($\epsilon=\pm1$).

Сведенный результат симметрийной редукции для уравнения (2.192), в котором $q\neq0$, представлен в таблице 2.15.

Базис алгебры Ли операторов симметрии $A_{4.9}$-инвариантного уравнения

$$u_t=u_{xx}-\frac{1}{2}\dot{\alpha}u_x^2+(\lambda-\alpha)(1+\alpha^2)^{-1},\tag{2.193}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$, α — решение уравнения (2.86) ($\dot{\alpha}\neq0$), составляют операторы

$$e_1=\partial_u,\quad e_2=\partial_x,\quad e_3=x\partial_u+\alpha\partial_x,$$
$$e_4=-(\dot{\alpha})^{-1}(1+\alpha^2)\partial_t+(q-\alpha)x\partial_x+\left[2qu-\frac{1}{2}x^2\right]\partial_u\quad (q>0).$$

Поэтому условию симметрийной редукции уравнения (2.193) удовлетворяют только две одномерные подалгебры алгебры инвариантности этого уравнения: $\langle e_2\rangle$, $\langle e_4\rangle$.

Таблица 2.14

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.192) **($q = 0$)**

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_3\rangle$	$u = 2\lambda^{-1}\sqrt{t} + \frac{1}{2}\lambda^{-1}x^2 t^{-\frac{1}{2}} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$
$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$	$u = \lambda^{-1}\sqrt{t} - \epsilon\lambda^{-2}\ln\lvert\epsilon + \lambda\sqrt{t}\rvert + \frac{1}{2}(\lambda\sqrt{t} + \epsilon)^{-1}x^2 + C_1$, $\lambda \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_4\rangle$	$u = \sqrt{t}\varphi(\omega)$, $\omega = tx^{-2}$, $4\omega^3\varphi'' - \lambda\omega^3(\varphi')^2 + \omega(6\omega - 1)\varphi' - \frac{1}{2}\varphi = 0$, $\lambda \neq 0$
$\langle e_3 + \alpha e_4\rangle$	$u = \frac{x}{2\alpha}\ln t - \frac{\lambda}{8\alpha^2}\sqrt{t}\ln^2 t + \sqrt{t}\varphi(\omega)$, $\omega = t^{-\frac{1}{2}}x - \frac{\lambda}{2\alpha}\ln t$, $\varphi'' - \frac{\lambda}{4}(\varphi')^2 + \frac{1}{2}[\omega + \lambda\alpha^{-1}]\varphi' - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2\alpha}\omega = 0$, $\alpha, \lambda \neq 0$

Таблица 2.15

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.192) **($q \neq 0$)**

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_3\rangle$	$u = \frac{1}{2\lambda}x^2 t^{\frac{1}{2}(q-1)} + \frac{2}{\lambda(1+q)}t^{\frac{1}{2}(q+1)} + C_1$, $\lambda \neq 0$, $\lvert q\rvert \neq 0, 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_4\rangle$	$u = t^{\frac{1}{2}(1+q)}\varphi(\omega)$, $\omega = tx^{-2}$, $4\omega^3\varphi'' - \lambda(1-q)\omega^3(\varphi')^2 + \omega(6\omega - 1)\varphi' - \frac{1}{2}(1+q)\varphi = 0$, $\lambda \neq 0$, $\lvert q\rvert \neq 0, 1$
$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$	$u = \frac{1}{2}x^2(\lambda t^{\frac{1}{2}(1-q)} + \epsilon)^{-1} + \int \frac{dt}{\epsilon + \lambda t^{\frac{1}{2}(1-q)}} + C_1$, $\epsilon = \pm 1$, $\lambda \neq 0$, $\lvert q\rvert \neq 0, 1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

Алгебре $\langle e_2\rangle$ соответствует такое инвариантное решение уравнения (2.193):

$$u = \int \frac{(\lambda - \alpha)dt}{1 + \alpha^2} + C_1,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha = \alpha(t)$ $(\dot\alpha \neq 0)$ — решение уравнения (2.86), $C_1 \in \mathbb{R}$.

Анзац

$$u = \frac{\alpha x^2}{2(1 + \alpha^2)} + \varphi(\omega)e^{-2q\arctan\alpha}, \quad \omega = \frac{x^2}{1 + \alpha^2}e^{2q\arctan\alpha},$$

соответствующий алгебре $\langle e_4\rangle$, сводит уравнение (2.193) к уравнению

$$4p\omega\varphi'' - 2\omega(\varphi')^2 + 2(p - q\omega)\varphi' + 2q\varphi - \frac{1}{2}\omega + \lambda p = 0,$$
$$p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad q > 0.$$

Здесь мы учли, что из (2.86) следуют такие соотношения:

$$\ddot\alpha = \frac{2q(\dot\alpha)^2}{1 + \alpha^2}, \quad \dot\alpha = p^{-1}e^{2q\arctan\alpha}, \quad p \neq 0.$$

2.4.2. Симметрийная редукция и построение точных решений уравнений вида (2.111)

Нелинейные уравнения вида (2.111), правые части которых явным образом не зависят от независимых переменных, были объектом исследования многих работ. В частности, вопрос симметрийной редукции таких уравнений и построение их инвариантных решений рассматривались как в цитированных выше работах [21, 105, 108, 159], так и в ряде других работ (см., например, [5, 60, 101]).

Довольно подробный обзор известных результатов групповой классификации нелинейных уравнений вида (2.111) и построения их решений по состоянию на начало 90-х годов прошлого века сделан в [107].

Учитывая сказанное выше и то, что наиболее перспективными в смысле построения точных решений являются уравнения, которые допускают разложимые разрешимые алгебры Ли операторов симметрии, мы здесь ограничиваемся рассмотрением только тех уравнений вида (2.111), в правые части которых явным образом входят независимые переменные и которые допускают четырехмерные разложимые разрешимые алгебры инвариантности. Напомним также, что все вычисления проводятся в области, где $t > 0$, $x > 0$. Следовательно, задачу симметрийной редукции мы решаем для $2A_{2.2}$-инвариантных уравнений:

$$u_t = x^{1-k}|u_x|^{-k}u_{xx} + \beta x^{-k}|u_x|^{1-k},$$

$$\beta \neq \frac{k-1}{k-2}, \quad k \neq 0, 2; \tag{2.194}$$

$$u_t = x^{-1}u_x^{-2}u_{xx} + \beta x^{-2}u_x^{-1}, \quad \beta \neq \frac{5}{4}; \tag{2.195}$$

$$u_t = x^2u^{-1}\exp(\omega)u_{xx} + (\beta - \omega^2)\exp\omega,$$
$$\omega = xu^{-1}u_x, \quad \beta \neq -2; \tag{2.196}$$

$$u_t = \pm t^{\frac{k+1}{1-k}}|u_x|^{\frac{2k}{1-k}}u_{xx} + t^{\frac{k}{1-k}}|u_x|^{\frac{1}{1-k}}, \quad k \neq 0, 1; \tag{2.197}$$

$$u_t = \lambda t u_{xx} + u_x \ln|tu_x|, \quad \lambda \neq 0. \tag{2.198}$$

Базис алгебры Ли операторов симметрии, которую допускает уравнение (2.194), составляют операторы

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_t,$$
$$e_3 = -u\partial_u + kx\partial_x, \quad e_4 = \partial_u \quad (k \neq 0).$$

Поэтому условию симметрийной редукции удовлетворяют такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности этого уравнения: $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$ $(\alpha \neq 0,\ \epsilon = \pm 1)$.

Сведенный результат симметрийной редукции для уравнения (2.194) представлен в таблице 2.16.

Здесь мы отметим только, что алгебре $\langle e_2\rangle$ соответствует стационарное решение уравнения (2.194), а алгебрам $\langle e_1\rangle$, $\langle e_3\rangle$ — автомодельные решения этого уравнения.

Базис алгебры Ли операторов симметрии уравнения (2.195) составляют операторы

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_t, \quad e_3 = -u\partial_u + 2x\partial_x, \quad e_4 = \partial_u,$$

поэтому рассматривать следует те же одномерные подалгебры алгебры $2A_{2.2}$, что и в предыдущем случае.

Сведенный результат симметрийной редукции для уравнения (2.195) представлен в таблице 2.17.

Таблица 2.16

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.194)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_2\rangle$	$u = C_1x^{1-\beta} + C_2,\ \beta \neq 1,$ $u = C_1\ln x + C_2,\ \beta = 1,\ C_1 \neq 0,\ C_2 \in \mathbb{R}$
$\langle e_3\rangle$	$u = \pm\|k\|x^{-\frac{1}{k}}\|C_1 + (1 + k^{-1} \pm \beta)t\|^{\frac{1}{k}},$ $C_1 \in \mathbb{R},\ \beta \neq \frac{k-1}{k-2},\ k \neq 0, 2$
$\langle e_1\rangle$	$u = \varphi(\omega),\ \omega = (tx^{-1})^{\frac{1}{k}},\ \beta \neq \frac{k-1}{k-2},\ k \neq 0, 2,\ C_1 \in \mathbb{R}$ $\int \frac{d\varphi'}{\|\varphi'\|[\|k\|\beta \pm (k+1) \mp \|k\|^{2-k}\|\varphi'\|^k]} = -\ln\omega + C_1,$
$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$	$u = t^\alpha\varphi(\omega),\ \omega = xt^{\alpha k-1},$ $\omega\varphi'' + \beta\|\varphi'\| - \alpha\omega^k\|\varphi'\|^k\varphi - (\alpha k - 1)\omega^{k+1}\varphi'\|\varphi'\|^k = 0,$ $\alpha \neq 0,\ \beta \neq \frac{k-1}{k-2},\ k \neq 0, 2$
$\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$	$u = \varphi(\omega) - \epsilon\ln t,\ \omega = tx^{-1},\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq \frac{k-1}{k-2},\ k \neq 0, 2,$ $\varphi'' + \omega^{-1}(\beta\|\varphi'\| + 2\varphi') - \omega^{k-2}\|\varphi'\|^k(\varphi' - \epsilon\omega^{-1}) = 0$
$\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$	$u = C_1e^{\epsilon x} + \epsilon t + C_2,$ $k = 1,\ \beta = 0,\ \epsilon = \pm 1,\ C_1 > 0,\ C_2 \in \mathbb{R}$ $u = \varphi(x) + \epsilon t,\ \epsilon = \pm 1,\ k \neq 0, 1, 2,\ \beta \neq \frac{k-1}{k-2},\ C_1 \in \mathbb{R}$ $\int \frac{d\varphi'}{\epsilon\|1-k\|^{2-k}\|\varphi'\|^k - k\varphi' - \beta\|1-k\|\|\varphi'\|} = \frac{1}{1-k}\ln x + C_1$
$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$	$u = e^{-\epsilon t}\varphi(\omega),\ \omega = \ln x - \epsilon kt,$ $\varphi'' + \epsilon e^\omega\|\varphi'\|^k[\varphi + k\varphi'] - \varphi' + \beta\|\varphi'\| = 0,$ $\beta \neq \frac{k-1}{k-2},\ k \neq 0, 2,\ \epsilon = \pm 1$

Заметим, что алгебре $\langle e_1\rangle$ соответствует автомодельное решение уравнения (2.195). Мы здесь, как и выше, не проводим анализ полученных интегралов, поскольку их значения в значительной мере зависят от значений параметров, которые входят в такие интегралы.

Так, если $\beta = \frac{3}{2}$, то интеграл для определения функции φ принимает вид

$$\int \frac{d\varphi'}{(\varphi')^2} = \frac{1}{2}\ln\omega + C,$$

откуда нетрудно получить, что

$$\varphi = \pm \int \frac{d\omega}{|C_1 - \ln\omega|^{\frac{1}{2}}} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Если же $\beta = \frac{1}{2}$, то

$$\int \frac{d\varphi'}{\varphi'[(\varphi')^2 - 4]} = \frac{1}{2}\ln\omega + C,$$

Таблица 2.17

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.195)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_2\rangle$	$u = C_1x^{1-\beta} + C_2,\ \beta \neq 1, \frac{5}{4},\ C_1 \neq 0,\ C_2 \in \mathbb{R}$; $u = C_1\ln x + C_2,\ \beta = 1,\ C_1 \neq 0,\ C_2 \in \mathbb{R}$
$\langle e_3\rangle$	$u = \pm x^{-\frac{1}{2}}\lvert C_1 + (6-4\beta)t\rvert^{\frac{1}{2}},\ \beta \neq \frac{5}{4},\ C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_1\rangle$	$u = \varphi(\omega),\ \omega = \sqrt{tx^{-1}},\ \beta \neq \frac{5}{4}$, $\int \frac{d\varphi'}{\varphi'[(\varphi')^2 - 6 + 4\beta]} = \frac{1}{2}\ln\omega + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$	$u = t^{\alpha}\varphi(\omega),\ \omega = xt^{2\alpha-1}$, $\omega\varphi'' + (1-2\alpha)\omega^3(\varphi')^3 - \alpha\omega^2(\varphi')^2\varphi + \beta\varphi' = 0,\ \beta \neq \frac{5}{4},\ \alpha \neq 0$
$\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$	$u = \varphi(\omega) - \epsilon\ln t,\ \omega = tx^{-1},\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq \frac{5}{4}$, $\omega\varphi'' - \omega(\varphi')^3 + \epsilon(\varphi')^2 + (2-\beta)\varphi' = 0,\ \varphi' \neq 0$
$\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$	$u = \varphi(\xi) + \epsilon t,\ \xi = x^{-1},\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq \frac{5}{4}$, $\varphi = \int \frac{d\xi}{C_1 - \epsilon\ln\xi} + C_2$, если $\beta = 2$, $\int \frac{d\varphi'}{\varphi'(\epsilon\varphi' + \beta - 2)} = \ln\xi + C_1$, если $\beta \neq 2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$	$u = e^{-\epsilon t}\varphi(\omega),\ \omega = xe^{-2\epsilon t},\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq \frac{5}{4}$, $\omega\varphi'' + 2\epsilon\omega^3(\varphi')^3 + \epsilon\omega^2(\varphi')^2 + \beta\varphi' = 0,\ \varphi' \neq 0$

откуда следует, что

$$\varphi = 2\int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - C_1\omega^4}},$$

где $C_1 \neq 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $1 - C_1\omega^4 > 0$.

Поскольку полный анализ этого и других приведенных в таблицах интегралов требует стандартных вычислений, мы здесь на этом не останавливаемся.

Отметим также, что редуцированные уравнения, соответствующие алгебрам $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$, допускают понижение порядка на единицу и приводятся к известным уравнениям Абеля первого рода.

Базис алгебры Ли операторов симметрии уравнения (2.196) составляют операторы

$$e_1 = -t\partial_t - u\partial_u, \quad e_2 = \partial_t, \quad e_3 = x\partial_x, \quad e_4 = xu\partial_u.$$

Поэтому условию задачи симметрийной редукции удовлетворяют такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности уравнения (2.196): $\langle e_2\rangle$, $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$, $\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$ ($\alpha \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$).

Сведенный результат симметрийной редукции для уравнения (2.196) представлен в таблице 2.18.

Таблица 2.18

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.196)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_2\rangle$	$u = C_1x^{\beta}e^{C_2x+\beta-1},\ C_1 \neq 0,\ \beta \neq -2,\ C_2 \in \mathbb{R}$
$\langle e_1\rangle$	$u = t\varphi(x),\ \varphi = \exp(x\psi - 1),\ \psi = \psi(\xi),\ \xi = x^{-1}$, $\psi = \int(1 - \ln\lvert C_1\xi^{\beta} + 1\rvert)d\xi + C_2,\ C_1 \neq 0,\ \beta \neq -2,\ C_1 \in \mathbb{R}$
$\langle e_1 + \alpha e_3\rangle$	$u = t\varphi(\omega),\ \omega = xt^{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq -2$, $\omega^2\varphi^{-1}\varphi'' - \omega^2\varphi^{-2}(\varphi')^2 - (\varphi + \alpha\omega\varphi')\exp(-\omega\varphi^{-1}\varphi') + \beta = 0$
$\langle e_1 + \epsilon e_4\rangle$	$u = t^{1-\epsilon x}\varphi(x),\ \epsilon = \pm 1,\ \beta \neq -2$ $x^2\varphi'' - x^2\varphi^{-1}(\varphi')^2 + \beta\varphi - (1-\epsilon x)\varphi^2\exp(-x\varphi^{-1}\varphi') = 0$,
$\langle e_2 + \epsilon e_4\rangle$	$u = exp(-\epsilon tx)\varphi(x)$, $x^2\varphi^{-1}\varphi'' - x^2\varphi^{-2}(\varphi')^2 + \epsilon x\varphi\exp(-x\varphi^{-1}\varphi') + \beta = 0$, $\epsilon = \pm 1,\ \beta \neq -2$
$\langle e_2 + \epsilon e_3\rangle$	$u = \varphi(\omega),\ \omega = xe^{-\epsilon t}$, $\omega^2\varphi^{-1}\varphi'' - \omega^2\varphi^{-2}(\varphi')^2 + \epsilon\omega\varphi'\exp(-\omega\varphi^{-1}\varphi') + \beta = 0$, $\epsilon = \pm 1,\ \beta \neq -2$

При рассмотрении уравнения (2.197) мы конкретизировали его вид, выбрав в перемене знаков только плюс и положив $k = \frac{1}{2}$. Поэтому исследовалось уравнение

$$u_t = t^3 u_x^2 u_{xx} + t u_x^2. \qquad (2.199)$$

Базис алгебры инвариантности уравнения (2.199) составляют операторы

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = -u\partial_u + \frac{1}{2}t\partial_t, \quad e_4 = \partial_u.$$

Поэтому анализу подлежат такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности данного уравнения: $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1+\alpha e_3\rangle$, $\langle e_1+\epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2+ +\epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$ $(\alpha\neq 0,\ \epsilon=\pm 1)$.

Результаты симметрийной редукции уравнения (2.199) сведены в таблице 2.19.

Первое из редуцированных уравнений таблицы 2.19, которое соответствует подалгебре $\langle e_3\rangle$, заменой переменных

$$x = \overline{\varphi} - \bar{x}, \quad \varphi = \bar{x}^2, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\bar{x})$$

сводится к уравнению

$$\bar{\varphi}'' = \frac{1}{4\bar{x}}(\bar{\varphi}' - 1)\left[\left((\bar{\varphi}' - 1)^2 + 1\right)^2 + 3\right],$$

которое, вообще говоря, интегрируется двумя квадратурами и общее решение которого определяется из таких соотношений:

$$\bar{\varphi} = \int \psi(\bar{x})d\bar{x} + \bar{x} + C_1,$$

$$\psi\left[(\psi^2+1)^2+3\right]^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\psi^2+1}{\sqrt{3}}\right] = C_2\bar{x},$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ C_2 \neq 0.$$

Уравнения, соответствующие подалгебрам $\langle e_1+\epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$, допускают понижение порядка на единицу.

Остается рассмотреть уравнение (2.198). Здесь

$$e_1 = -t\partial_t - x\partial_x, \quad e_2 = \partial_x, \quad e_3 = -u\partial_u + t\partial_x, \quad e_4 = \partial_u.$$

Поэтому были рассмотрены такие одномерные подалгебры алгебры инвариантности этого уравнения: $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1\rangle$, $\langle e_1+\alpha e_3\rangle$, $\langle e_1+\epsilon e_4\rangle$,

$\langle e_2+\epsilon e_4\rangle$, $\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$ $(\alpha\neq 0,\ \epsilon=\pm 1)$. Результат вычислений сведен в таблице 2.20.

Таблица 2.19

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.199)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_3\rangle$	$u = t^{-2}\varphi(x)$, $(\varphi')^2(\varphi''+1)+2\varphi=0$
$\langle e_1\rangle$	$u = \int f(\omega)d\omega + C_1$, $\omega = t^{-2}x^2$, $\omega\left[4f^2+2f+1\right]\exp\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4f+1}{\sqrt{3}}\right] = C_2$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$, $C_2\neq 0$
$\langle e_1+\alpha e_3\rangle$	$\alpha=2$: $u = x^2\varphi(t)$, $\varphi\left[4t^4\varphi^2+2t^2\varphi+1\right]^{-\frac{1}{2}}\times$ $\times\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4t^2\varphi+1}{\sqrt{3}}\right] = C_1$, $C_1\neq 0$, $\alpha\neq 0,\ 2$: $u = t^{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}\varphi(\omega)$, $\omega = t^{-2}x^{2-\alpha}$, $(2-\alpha)^4\omega^{\frac{4-4\alpha}{2-\alpha}}(\varphi')\varphi'' + (2-\alpha)^3(1-\alpha)\omega^{\frac{2-3\alpha}{2-\alpha}}(\varphi')^3 +$ $+(2-\alpha)^2\omega^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}(\varphi')^2 - \frac{2\alpha}{2-\alpha}\varphi + 2\omega\varphi' = 0$
$\langle e_1+\epsilon e_4\rangle$	$u = \varphi(\omega) - \epsilon\ln t$, $\omega = t^{-2}x^2$, $16\omega^2(\varphi')^2\varphi'' + 8\omega(\varphi')^3 + 4\omega(\varphi')^2 + 2\omega\varphi' + \epsilon = 0$, $\epsilon=\pm 1$
$\langle e_2+\epsilon e_4\rangle$	$u = \frac{1}{2}t^2 + \epsilon x + C_1$, $\epsilon=\pm 1$, $C_1\in\mathbb{R}$
$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$	$u = t^{-2}\varphi(\omega)$, $\omega = \epsilon x - 2\ln t$, $(\varphi')^2(\varphi''+1) + 2\varphi' + 2\varphi = 0$, $\epsilon=\pm 1$

На этом мы завершаем рассмотрение нелинейных уравнений эволюционного типа и переходим к симметрийному анализу ряда важных линейных уравнений параболического типа, которые нашли широкие приложения в разных задачах естествознания.

В завершение параграфа мы предлагаем читателю провести симметрийную редукцию, по возможности, построить точные решения для остальных уравнений вида (2.111), и выполнить такие задачи.

Таблица 2.20

Симметрийная редукция и точные решения уравнения (2.198)

Алгебра	Решение или редуцированное уравнение
$\langle e_3\rangle$	$u=\pm\exp[\lambda+C_1t^{-1}-xt^{-1}]$, $\lambda\neq0$, $C_1\in\mathbb{R}$
$\langle e_1\rangle$	$u=\int\left[\lambda\pm\exp(C_1\omega^{\lambda^{-1}})\right]d\omega+C_2$, $\omega=\exp\left(-\dfrac{x}{t}\right)$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$, $\lambda C_1\neq0$
$\langle e_1+\alpha e_3\rangle$	$u=t^\alpha\varphi(\omega)$, $\omega=xt^{-1}+\alpha\ln t$, $\lambda\varphi''+\varphi'\ln\lvert\varphi'\rvert+(\omega-\alpha)\varphi'-\alpha\varphi=0$, $\alpha\lambda\neq0$
$\langle e_1+\epsilon e_4\rangle$	$u=\varphi(\omega)-\epsilon\ln t$, $\omega=tx^{-1}$, $\epsilon=\pm1$ $\lambda\omega^3\varphi''-\omega\varphi'\ln\lvert\omega^2\varphi'\rvert+(2\lambda\omega^2-1)\varphi'+\epsilon\omega^{-1}=0$, $\lambda\neq0$
$\langle e_2+\epsilon e_4\rangle$	$u=\epsilon t(\ln t-1)+\epsilon x+C_1$, $\epsilon=\pm1$, $C_1\in\mathbb{R}$
$\langle e_2+\epsilon e_3\rangle$	$u=\exp\left\{\dfrac{1}{\epsilon+t}[t(\lambda-\epsilon\ln t)+(1+\epsilon t-\epsilon\lambda)\ln(t+\epsilon)]-x+C_1\right\}$, $\epsilon=\pm1$, $\lambda\neq0$, $C_1\in\mathbb{R}$

Задание 2.8. В работах [14, 75, 98] проведена групповая классификация уравнений вида

$$u_t+uu_x=F(u_n),\quad u_n=\frac{\partial^n u}{\partial x^n},\quad n\geqslant2.$$

Были рассмотрены уравнения

$$u_t+uu_x=F(u_{xx}),\qquad u_t+uu_x=F(u_{xxx}),\qquad u_t+uu_x=F(u_{xxxx}),$$

частными случаями которых являются хорошо известные в математической физике уравнения Бюргерса, Кортевега-де Фриза, Кортевега-де Фриза–Бюргерса.

Используя результаты групповой классификации, рассмотреть такие задачи:

1) определить тип максимальных алгебр инвариантности, которые получены в теоремах 1–3 [75];
2) провести классификацию одномерных подалгебр максимальных алгебр инвариантности с точностью до сопряженности, которую определяет группа внутренних автоморфизмов;
3) провести симметрийную редукцию и построить точные решения приведенных уравнений для всех полученных в [75] спецификаций функций F.

Глава 3

Групповая классификация уравнений Фоккера–Планка. Точно решаемые стационарные уравнения Шредингера

Уравнение Фоккера–Планка (ФП) является основным уравнением теории непрерывных марковских процессов. В одномерном случае оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u]+\frac12\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u],$$

где $u=u(t,x)$ — переходная плотность вероятности, $A(t,x)$ и $B(t,x)$ — достаточно гладкие функции, которые называются коэффициентами сноса и диффузии соответственно, $B(t,x)\neq0$. Будем считать, что выполняются все условия, при которых правомерно использование операций дифференцирования и интегрирования. Название уравнения ФП связано с роботами Фоккера [113] и Планка [162]. В [113] Фоккер исследовал броуновское движение в поле излучения, а в [162] Планк сделал попытку построения полной теории флуктуаций. Строгое математическое обоснование уравнения ФП дал А. Колмогоров [34]. Вообще говоря, уравнение ФП, которое определяет изменение плотности вероятности для данной системы с течением времени, служит основой аналитических методов изучения диффузионных процессов в естественных науках [17, 18, 23, 71, 72, 158, 167].

В случае нескольких пространственных переменных уравнение ФП описывает более разнообразные и более сложные процессы, чем одномерное уравнение ФП. В общем случае n-мерное уравнение ФП имеет вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(t,x)u(t,x)]+\frac12\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}[B_{ij}u(t,x)],$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, коэффициенты сноса $A(t,x)$ и диффузии $B(t,x)$ определяются, соответственно, как вектор и матрица

$$A(t,x) = (A_1(t,x), \ldots, A_n(t,x)), \quad B(t,x) = \|B_{ij}(t,x)\|_{i,j=1}^n.$$

В последнее время интенсивно проводятся теоретико-групповые исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Исследованиями симметрийных свойств уравнения теплопроводности (частного случая уравнения ФП) занимался еще С. Ли. Нахождению групп симметрии уравнения ФП с разными коэффициентами сноса и диффузии посвящены работы [100, 106, 140, 158, 168, 169, 172, 173, 184]. С помощью замены [71, 156] в работе [106] полностью проклассифицировано с симметрийной точки зрения уравнения ФП, где $A(t,x) \equiv A(x)$ и $B(t,x) \equiv B(x)$ (что соответствует однородному диффузионному процессу).

Данный раздел посвящен применению метода Ли для исследования одномерного и двухмерного уравнений ФП. С использованием этого метода найдены максимальные группы преобразований для одномерного уравнения ФП с произвольными коэффициентами сноса и диффузии. Главное внимание посвящено построению в явном виде классов точных решений уравнений ФП, которые имеют четырехмерную алгебру инвариантности. Также исследованы симметрийные свойства двухмерного уравнения ФП с произвольными коэффициентами сноса и постоянными коэффициентами диффузии, а также построены классы точных решений уравнения Крамерса (частный случай двухмерного уравнения ФП). Также в этом разделе мы останавливаемся на проблеме построения точно и квази-точно решаемых моделей Шредингера.

3.1. Групповая классификация одномерного уравнения Фоккера–Планка с произвольными коэффициентами сноса и диффузии

В первом параграфе осуществлена полная групповая классификация одномерного уравнения ФП для произвольных коэффициентов сноса и диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u]. \tag{3.1}$$

Кроме того, рассмотрен ряд других задач, которые тесно связаны с теоретико-алгебраическими исследованиями уравнения (3.1). Для исследования симметрийных свойств уравнения (3.1) использован алгоритм Ли.

В соответствии с алгоритмом Ли операторы алгебры инвариантности уравнения (3.1) ищем в классе операторов

$$Q = \xi^0(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.2}$$

Условие инвариантности уравнения (3.1) относительно оператора (3.2) имеет вид

$$\underset{2}{\hat{Q}}L|_{L=0} = 0, \tag{3.3}$$

где

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u],$$

$\underset{2}{\hat{X}}$ — второе продолжение оператора X. Проведя стандартные операции, приходим к такой определяющей системе для функций ξ^0, ξ^1, η:

$$\begin{aligned}
&\xi^0 = \xi^0(t), \quad \xi^1 = \xi^1(t,x), \quad \eta = \chi(t,x)u,\\
&2\xi^1_x B - \xi^0_t B - \xi^1 B_x - \xi^0 B_t = 0,\\
&\xi^0_t(A - B_x) - \xi^1_t + \xi^0(A_t - B_{tx}) + \xi^1(A_x - B_{xx}) -\\
&\quad - \xi^1_x(A - B_x) + \frac{1}{2}B\xi^1_{xx} = B\chi_x,\\
&\chi_t + \xi^0_t\left(A_x - \frac{1}{2}B_{xx}\right) + \xi^0\left(A_{tx} - \frac{1}{2}B_{txx}\right) +\\
&\quad + \xi^1\left(A_{xx} - \frac{1}{2}B_{xxx}\right) + \chi_x(A - B_x) - \frac{1}{2}B\chi_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Отметим, что инвариантность уравнения (3.1) относительно операторов $f(t,x)\partial_u$, где $f(t,x)$ — произвольное решение уравнения (3.1), является очевидной вследствие линейности уравнения (3.1). Поэтому в дальнейшем мы здесь такие операторы не рассматриваем.

Также нетрудно убедиться, что уравнение (3.1) инвариантно относительно оператора $u\partial_u$ (также одно из свойств линейных дифференциальных уравнений). Более того, если в (3.2) $\xi^0 = \xi^1 \equiv 0$, то система (3.4) приобретает вид

$$B\chi_x = 0, \quad \chi_t = 0, \quad B \neq 0,$$

то есть в этом случае $\eta = \lambda u\partial_u$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, существенными являются случаи, когда в (3.2) ξ^0 и ξ^1 не являются одновременно равными нулю.

В дальнейших исследованиях мы используем замены переменных

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X(t,x), \quad u = v(t,x)\tilde u,$$
$$\frac{dT}{dt} \neq 0, \quad X_x \neq 0, \quad v \neq 0, \tag{3.5}$$

которые сохраняют вид уравнения (3.1) неизменным.

Теорема 3.1. *Если уравнение ФП* (3.1) *допускает хотя бы один оператор симметрии* Q ($Q \neq u\partial_u$, $Q \neq f(t,x)\partial_u$, *где* $f(t,x)$ — *произвольное решение уравнения* (3.1)), *то существуют преобразования вида* (3.5), *которые сводят его к уравнению* (3.1), *где* $A = \tilde A(\tilde x)$, $B = \tilde B(\tilde x)$, *или к уравнению теплопроводности.*

Доказательство. В соответствии с условием теоремы мы рассматриваем те из решений определяющей системы (3.4), где ξ^0 и ξ^1 одновременно не обращаются в нуль. Рассмотрим два случая:

1) существует решение (ξ^0, ξ^1, χ) определяющих уравнений (3.4), для которого $\xi^0 \not\equiv 0$;

2) существует решение (ξ^0, ξ^1, χ) определяющих уравнений (3.4), для которого $\xi^0 \equiv 0$, $\xi^1 \not\equiv 0$.

Пусть (ξ^0, ξ^1, χ), где $\xi^0 \not\equiv 0$ — решение определяющих уравнений (3.4). Рассмотрим преобразование вида (3.5)

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = \omega(t,x), \quad u = v(t,x)\tilde u, \tag{3.6}$$

где $T(t) = \int \frac{dt}{\xi^0(t)}$, а функции $\omega = \omega(t,x)$ и $v = v(t,x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\xi^0\omega_t + \xi^1\omega_x = 0, \quad \xi^0 v_t + \xi^1 v_x = \chi v. \tag{3.7}$$

Пусть, далее, $\omega \neq \mathrm{const}$ — произвольное фиксированное решение первого из уравнений (3.7). Тогда оператор симметрии

$$Q = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \chi u\partial_u$$

в новых переменных $(\tilde t, \tilde x, \tilde u)$ имеет вид $\tilde Q = \partial_{\tilde t}$. Покажем далее, что среди преобразований (3.6) существует такое, которое переводит уравнение (3.1) в уравнение ФП с коэффициентами $\tilde A(\tilde x)$, $\tilde B(\tilde x)$.

Поскольку преобразованное уравнение допускает оператор симметрии $\tilde Q = \partial_{\tilde t}$, то коэффициенты в нем будут функциями переменной $\tilde x$. С другой стороны, применив преобразование (3.6) к уравнению (3.1), приходим к такому уравнению в новых переменных:

$$\tilde u_{\tilde t} = \frac{\xi^0}{v}\left\{\left[-v_t + \left(\frac12 B_{xx} - A_x\right)v + (B_x - A)v_x + \frac12 Bv_{xx}\right]\tilde u + \right.$$
$$+\left[-v\omega_t + (B_x - A)v\omega_x + \frac12 B(2v_x\omega_x + v\omega_{xx})\right]\tilde u_{\tilde x} +$$
$$\left. + \frac12 Bv\omega_x^2\tilde u_{\tilde x\tilde x}\right\}. \tag{3.8}$$

Здесь предполагается, что в выражениях, которые зависят от переменных (t,x), нужно выполнить замену $(t,x) \to (\tilde t, \tilde x)$. Для того чтобы уравнение (3.8) было уравнением ФП, необходимо, чтобы существовали такие функции $\tilde A(\tilde t, \tilde x)$, $\tilde B(\tilde t, \tilde x)$, которые удовлетворяли бы уравнениям

$$\tilde B(\tilde t, \tilde x) = B\omega_x^2\xi^0,$$
$$\tilde B_{\tilde x} - \tilde A = -\left(\omega_t + (B_x - A)\omega_x + \frac{v_x}{v}\omega_x B + \frac12\omega_{xx}B\right)\xi_0, \tag{3.9}$$
$$\frac12\tilde B_{\tilde x\tilde x} - \tilde A_{\tilde x} = \left(-\frac{v_t}{v} + \frac12 B_{xx} - A_x + \frac{v_x}{v}(B_x - A) + \frac12\frac{v_{xx}}{v}B\right)\xi_0.$$

а) Рассмотрим первое из уравнений (3.9). Покажем, что $\partial_{\tilde t}\tilde B = 0$. Из преобразований (3.6)–(3.7) следует, что

$$\partial_{\tilde t} = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x.$$

Поэтому, учитывая первое из уравнений (3.7), видим, что

$$\partial_{\tilde t}(B\xi^0\omega_x^2) = \xi^0\omega_x^2(\xi^0 B_t + \xi^1 B_x + \xi_t^0 - 2B\xi_x^1) = 0.$$

Последнее равенство выполняется вследствие уравнений (3.4).

б) Рассмотрим второе уравнение системы (3.9). Из первого уравнения этой системы получаем:

$$\tilde B_{\tilde x} = \frac{\xi^0}{\omega_x}\partial_x(B\omega_x^2).$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (3.9), находим $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \xi^0\omega_t + A\xi^0\omega_x - \frac{v_x}{v}\xi^0\omega_x B + \frac{3}{2}\xi^0\omega_{xx}B. \tag{3.10}$$

Как и в а), можно показать, что следствием системы (3.4) является такое равенство:

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{A} = (\xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x)\left[\xi^0\omega_t + A\xi^0\omega_x - \frac{v_x}{v}\xi^0\omega_x B + \frac{3}{2}\xi^0\omega_{xx}B\right] = 0.$$

Отсюда следует, что $\tilde{A} = \tilde{A}(\tilde{x})$.

в) Рассмотрим третье уравнение системы (3.9). Из а) и б) следует, что левая часть этого уравнения такая: $\frac{1}{2}\tilde{B}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \tilde{A}_{\tilde{x}} = F(\tilde{x}) = F(\omega)$. Из второго уравнения системы (3.7) следует, что $v(t,x) = v^*(t,x)G(\omega)$, где $v^*(t,x)$ — его частное решение, $G(\omega)$ — произвольная функция. Подставляя полученное значение функции ω в правую часть третьего уравнения системы (3.9), получаем:

$$F(\omega) = F_1(t,x) + F_2(t,x)G' + F_3(t,x)[G'' + G'^2], \quad F_3(t,x) \neq 0.$$

Далее, так же как и в а) и б), убеждаемся, что вследствие уравнений (3.4), (3.7) имеют место равенства

$$\partial_{\tilde{t}}F_i(t,x) = [\xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x]F_i(t,x) = 0, \quad i = 1,2,3.$$

Следовательно, $F_i = F_i(\tilde{x}) = F_i(\omega)$. Окончательно получаем:

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega)G' + F_3(\omega)[G'' + G'^2], \quad F_3 \neq 0.$$

Выбирая функцию $G(\omega)$, равной частному решению этого уравнения, получаем преобразование (3.6), где

$$T = \int \frac{dt}{\xi^0}, \; v(t,x) = v^*(t,x)G(\omega),$$

которое сводит соответствующее уравнение ФП (3.1) к уравнению ФП с коэффициентами $\tilde{B}(\tilde{x})$, $\tilde{A}(\tilde{x})$.

Пусть теперь существует решение $\{\xi^0, \xi^1, \chi\}$ определяющих уравнений (3.4), для которого $\xi^0 \equiv 0$, $\xi^1 \not\equiv 0$. В этом случае для упрощения уравнения (3.1) используем преобразование

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = R(t,x), \quad u = v(t,x)\tilde{u}, \tag{3.11}$$

где

$$\xi^1 R_x = 1, \quad \xi^1 v_x = \chi v. \tag{3.12}$$

Нетрудно показать, что существует преобразование (3.11), (3.12), которое сводит оператор $Q = \xi^1\partial_x + \chi u\partial_u$ к оператору $\tilde{Q} = \partial_{\tilde{x}}$. Тогда коэффициенты $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ в преобразованном уравнении ФП зависят только от $\tilde{t}$. А такие уравнения сводятся к уравнению теплопроводности преобразованиями вида:

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = x + R(t), \quad u = v(t)\tilde{u}. \tag{3.13}$$

Теорема доказана. ■

Следствие 3.1. *Уравнение ФП* (3.1) *может допускать алгебры инвариантности размерности* 1, 2, 4, 6.

Доказательство следствия 3.1 вытекает из теоремы 3.1 и результатов групповой классификации линейных параболических уравнений [46] (см. также начало второй главы).

Наиболее интересными с теоретико-групповой точки зрения являются случаи, когда заданное уравнение имеет наиболее высокие симметрийные свойства. Такими, очевидно, для уравнения ФП будут случаи, когда оно допускает алгебры инвариантности размерности 4 и 6. Найдем условия инвариантности уравнения ФП (3.1) относительно 4- и 6-мерных алгебр инвариантности.

В работе [23] показано, что любой диффузионный процесс с коэффициентом сноса $A(t,x)$ и коэффициентом диффузии $B(t,x)$ можно свести к диффузионному процессу с коэффициентами $\tilde{A}(t,x) = A(t,x)/B(t,x)$ и $\tilde{B}(t,x) = 1$ с помощью замены соответствующей временной переменной $\tau(t)$. В работе [106] было показано, что уравнение ФП (3.1), где $A(t,x) = A(x)$, $B(t,x) = 1$, может допускать шести-, четырех- и двухпараметрические группы преобразований. Используя результат теоремы 3.1, проведем аналогичную групповую классификацию уравнения ФП для коэффициента $B(t,x) = 1$ и произвольного коэффициента $A(t,x)$. Положив в уравнениях (3.4) $B = 1$, приходим к равенствам

$$\xi^0 = \tau(t), \quad \xi^1 = \frac{1}{2}x\tau' + \varphi(t),$$

$$\frac{3}{2}\tau'\Phi + \tau\Phi_t + \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right)\Phi_x = \frac{1}{2}\tau''' x + \varphi'', \tag{3.14}$$

$$\chi = \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right)A(t,x) - \frac{1}{4}x^2\tau'' - \varphi' x + \tau\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial A(t,\xi)}{\partial t}d\xi + \theta(t),$$

где $\Phi = A_t + \frac{1}{2}A_{xx} + AA_x$, x_0 — некоторая фиксированная точка, θ — произвольная функция переменной t. Найдем условие, которому должна удовлетворять функция Φ, чтобы уравнение (3.14) (как уравнение относительно $\tau(t), \varphi(t)$) имело по крайней мере два линейно независимых решения $(\tau_1(t), \varphi_1(t))$ и $(\tau_2(t), \varphi_2(t))$. Из следствия 3.1 следует, что существуют либо три, либо пять операторов симметрии (кроме тривиального $u\partial_u$). Предположим, что $\Phi_{xx} \neq 0$. Дифференциальное следствие второго порядка уравнений (3.14) по переменной x имеет вид

$$\frac{5}{2}\tau'\Phi_{xx} + \tau\Phi_{txx} + \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right)\Phi_{xxx} = 0. \tag{3.15}$$

Из предположения, что $\Phi_{xxx} = 0$, то есть $\Phi_{xx} = F(t) \neq 0$, получаем условие

$$\frac{5}{2}\tau' F + \tau F' = 0. \tag{3.16}$$

Это линейное однородное уравнение 1-го порядка и его общее решение определяются одной функцией. Поэтому $\Phi_{xxx} \neq 0$. Тогда из (3.15) следует, что

$$-\varphi(t) = \frac{5\Phi_{xx} + x\Phi_{xxx}}{2\Phi_{xxx}}\tau' + \frac{\Phi_{txx}}{\Phi_{xxx}}\tau = h(t,x)\tau' + r(t,x)\tau.$$

Отсюда видно, что для линейно независимых решений (τ_1, φ_1), (τ_2, φ_2) уравнения (3.15) их первые компоненты τ_1, τ_2 также являются линейно-независимыми. При этом

$$h_x\tau_1' + r_x\tau_1 = 0, \quad h_x\tau_2' + r_x\tau_2 = 0.$$

Поскольку Вронскиан $\begin{vmatrix} \tau_1' & \tau_1 \\ \tau_2' & \tau_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то из этой системы, как системы линейных алгебраических уравнений относительно h_x, r_x, следует, что $h_x \equiv 0$, $r_x \equiv 0$, то есть

$$\frac{5\Phi_{xx} + x\Phi_{xxx}}{2\Phi_{xxx}} = h(t), \quad \frac{\Phi_{xxt}}{\Phi_{xxx}} = r(t). \tag{3.17}$$

Из условий (3.17) получаем

$$\Phi = \lambda(x - H(t))^{-3} + F(t)x + G(t), \tag{3.18}$$

где $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$, H, F, G — произвольные функции. Теперь заметим, что при $\Phi_{xx} = 0$ функция Φ имеет вид (3.18) с $\lambda = 0$. Таким образом, условие (3.18) является необходимым для того, чтобы алгебра инвариантности уравнения (3.1) имела размерность четыре или шесть. Подставив (3.18) в (3.15) и приравняв нулю коэффициенты при $x - H$, $(x-H)^{-4}$ и $(x-H)^0$, приходим к таким условиям:

$$2\tau' F + \tau F' = \frac{1}{2}\tau''', \quad \lambda(\tau H' - \frac{1}{2}\tau' H - \varphi) = 0, \tag{3.19}$$

$$\frac{3}{2}\tau'(FH + G) + \tau(F'H + G') + F(\frac{1}{2}\tau' H + \varphi) = \frac{1}{2}\tau''' H + \varphi'''.$$

1. Пусть $\lambda \neq 0$. Решим второе уравнение (3.19) относительно функции $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \tau H' - \frac{1}{2}\tau' H$$

и подставим найденное выражение в третье уравнение. В результате получим, что

$$\frac{3}{2}\tau'(FH + G - H'') + \tau(FH + G - H'')' = 0.$$

Условие существования у этого уравнения по крайней мере двух независимых решений τ_1, τ_2 приводит к равенству $FH + G - H'' = 0$. В этом случае количество фундаментальных решений системы (3.19) будет равно 3. Действительно, есть три линейно независимых решения τ_1, τ_2, τ_3 у первого уравнения системы (3.19). Из второго уравнения системы (3.19) φ_i определяется через τ_i, $i = 1, 2, 3$.

2. Если $\lambda = 0$, то система (3.19) имеет пять решений (τ_i, φ_i), $i = 1, \ldots, 5$. Из проведенных выше соображений следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть в уравнении ФП* (3.1) $B(t,x) = 1$, *а функция* $A(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$A_t + \frac{1}{2}A_{xx} + AA_x = \lambda(x - H(t))^{-3} + F(t)x + G(t), \tag{3.20}$$

где H, F, G — *произвольные гладкие функции,* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда если в* (3.20) $\lambda \neq 0$, *а* G *удовлетворяет равенству*

$$G = H'' - FH, \tag{3.21}$$

то уравнение ФП допускает четырехмерную алгебру инвариантности. Если в (3.20) $\lambda = 0$*, то уравнение ФП допускает шестимерную алгебру инвариантности.*

Замечание 3.1. Когда коэффициент $A(t, x)$ является решением уравнения Бюргерса, то уравнение ФП (3.1) сводится к уравнению теплопроводности [89].

Как отмечалось выше, в [46] осуществлена групповая классификация линейного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f(t, x)u_x + g(t, x)u.$$

Там было получено, что это уравнение допускает более чем двухмерную алгебру инвариантности в двух случаях: если оно эквивалентно уравнению теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

(алгебра инвариантности шестимерная) или уравнению

$$u_t = u_{xx} + \frac{m}{x^2}u, \quad m \neq 0$$

(алгебра инвариантности четырехмерная).

Найдем локальные преобразования (3.6), (3.7), которые сводят полученные в теореме 3.2 уравнения ФП к указанным выше уравнениям.

Рассмотрим сначала уравнение ФП (3.1), где $B(t, x) = 1$, а $A(t, x)$ удовлетворяет соотношение (3.20), где $\lambda = 0$. Пусть τ — произвольное решение системы (3.19) и $\tau > 0$. Из формул (3.7), (3.14) следует, что $\omega = \tau^{-1/2}x - \int_{t_0}^{t} \varphi\tau^{-3/2}dt$, где t_0 — произвольное фиксированное значение. Рассмотрим преобразование:

$$\tilde{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\tau}, \quad \tilde{x} = \omega = \tau^{-1/2}x - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\tau^{-3/2}d\xi,$$
$$u(t, x) = v(t, x)\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}). \tag{3.22}$$

Выполнив в (3.1) замену переменных (3.22), приходим к уравнению

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = -2\tau\left(\frac{v_t}{v} + A_x + A\frac{v_x}{v} - \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}\right)\tilde{u} - \\ - 2\left(-\frac{1}{2}\tau^{1/2}\tau' x - \varphi\tau^{-1/2} + A\tau^{1/2} - \frac{v_x}{v}\tau^{1/2}\right)\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \tag{3.23}$$

Приравняв нулю коэффициент при $\tilde{u}_{\tilde{x}}$, получаем, что

$$v = \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^{-1}\tau' x^2 - \tau^{-1}\varphi x + \int\limits_{x_0}^{x} A(t, \xi)d\xi + h(t)\right), \tag{3.24}$$

где $h(t)$ — произвольная функция, x_0 — произвольное фиксированное число. Подставив значение v (3.24) в выражение $\frac{v_t}{v} + A_x + A\frac{v_x}{v} - \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}$ (коэффициент при $\tilde{u}$ в (3.23)) и приравняв его нулю, получаем:

$$h'(t) = \frac{1}{2}\left[\tau^{-2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\tau^{-1}\tau^1 - A_x(t, x_0) - A^2(t, x_0)\right], \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{2}\tau^{-1}\tau'' - \frac{1}{4}\tau^{-2}(\tau')^2 = F, \quad \tau^{-1}\varphi' - \frac{1}{2}\tau^2\tau'\varphi = G. \tag{3.26}$$

Несложно убедиться, что любое решение (τ, φ) системы (3.26), где $\tau \neq 0$, удовлетворяет системе (3.19) с $\lambda = 0$, $H = 0$. Далее, не уменьшая общности рассуждений, всегда можем считать, что $\tau > 0$ на некотором промежутке (выполнив, если это нужно, замену $\tau \to -\tau$, $\varphi \to -\varphi$). Тогда, согласно условию (3.20), где $\lambda = 0$, преобразование (3.22), (3.24), (3.25) сводит уравнение ФП (3.1) к уравнению теплопроводности

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \tag{3.27}$$

Отметим, что система (3.26) преобразуется в такую:

$$2y' + y^2 = 4F, \quad y = \frac{\tau'}{\tau}, \quad \varphi = \tau^{1/2}\int\limits_{t_0}^{t} \tau^{1/2}Gdt. \tag{3.28}$$

Пусть теперь в (3.20) $\lambda \neq 0$. Преобразование (3.22) сводит уравнение (3.1) к уравнению (3.23). Условие того, что (3.23) является уравнением ФП, такое:

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\omega) = -\frac{1}{2}\tau^{-1/2}\tau' x - \varphi\tau^{-\frac{1}{2}} + A\tau^{1/2}\tau^{1/2}\frac{v_x}{v},$$

$$\tilde{A}_\omega = \tau\left(\frac{v_t}{v} + A_x + A\frac{v_x}{v} - \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}\right), \tag{3.29}$$

где ω определяется равенством (3.22). Первое условие эквивалентно уравнению (поскольку $\partial_{\tilde{t}} = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x$)

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{A}\left[\tau\partial_t + \left(\frac{1}{2}\tau' x + \varphi\right)\partial_x\right] \times \\ \times\left(\frac{1}{2}\tau^{-1/2}\tau' x - \varphi\tau^{\frac{1}{2}} + A\tau^{1/2} - \tau^{1/2}\frac{v_x}{v}\right) = 0. \tag{3.30}$$

Опуская промежуточные вычисления, запишем общее решение уравнения (3.30), считая его уравнением относительно функции $v = v(t,x)$:

$$v(t,x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} A(t,\xi)d\xi - \frac{1}{4}\tau^{-1}\tau' x^2 - \tau^{-1}\varphi x + k(\omega)\right]. \tag{3.31}$$

Здесь $k(\omega)$ — произвольная функция, x_0 — фиксированная точка. Подставив полученное значение v с (3.31) в первое уравнение (3.29), убеждаемся, что $\tilde{A} = -k'(\omega)$. Далее, подставив это выражение для $\tilde{A}$ и выражение (3.31) для $v(t,x)$ во второе уравнение (3.29), убеждаемся, что при выполнении условий

$$\tau^{-1}\varphi' - \frac{1}{2}\tau^{-2}\tau'\varphi = G, \quad \frac{1}{2}\tau^{-1}\tau'' - \frac{1}{4}\tau^{-2}\tau'^2 = F,$$

$$\tau^{1/2}\int\limits_{t_0}^{t}\varphi\tau^{-3/2}dt = H, \tag{3.32}$$

$$k'' - k'^2 = \lambda\omega^{-2} \tag{3.33}$$

имеет место равенство. Условие (3.32) можно выбрать так, поскольку произвольное решение (τ,φ), где $\tau \neq 0$, данной системы является, как несложно убедиться, частным решением системы уравнений (3.19), (3.21). Этого достаточно для построения преобразования (3.22). Система (3.32) (с учетом (3.21)) эквивалентна такой системе:

$$2y' + y^2 = 4F, \quad y = \frac{\tau'}{\tau}, \quad \varphi = \tau^{3/2}\left(\tau^{-1/2}H\right)'. \tag{3.34}$$

Следовательно, уравнение ФП (3.1) при условиях (3.20) и (3.21) с $\lambda \neq 0$ инвариантно относительно четырехмерной алгебры инвариантности и при помощи преобразований

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \tau^{-1/2}x - \tau^{-1/2}H(t), \quad u = v(t,x)\tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x}), \tag{3.35}$$

где $T = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\tau(t)}$, $v(t,x)$ имеет вид (3.31), $\tau \neq 0$ — произвольное решение первого уравнения (3.34), $k(\omega)$ — решение уравнения (3.33), сводится к уравнению

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = 2k''(\omega)\tilde{u} + 2k'(\omega)\tilde{u}_\omega + \tilde{u}_{\omega\omega}.$$

Если в последнем уравнении выполнить замену

$$\bar{t} = \tilde{t}, \quad \bar{x} = \omega, \quad \tilde{u} = \exp(-k(\omega))\bar{u},$$

то это уравнение вследствие (3.33) сведется к известному уравнению

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{\lambda}{\bar{x}^2}\bar{u}. \tag{3.36}$$

Остановимся на ряде известных уравнений.

А. Уравнения с шестипараметрической группой симметрии, которые сводятся к уравнению теплопроводности.

1. Уравнение, которое описывает процесс Орнштейна–Уленбека [17]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k}(kxu) + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.37}$$

Здесь $A = -kx$, $B(t,x) = D = \mathrm{const}$. Далее во всех примерах, где $B(t,x)$ — (ненулевая) постоянная, можно, без ограничения общности, положить $B(t,x) = 1$. С помощью замены

$$u(t,x) = v(t,x)\tilde{u}(\tilde{t}(t), \tilde{x}(t,x)), \tag{3.38}$$

где $v(t,x)$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$ — функции, которые находятся из формул (3.22), (3.24)–(3.26),

$$v = \exp(kt), \quad \tilde{x} = \exp(kt)x, \quad \tilde{t} = \frac{1}{4k}\exp(2kt),$$

уравнение Орнштейна–Уленбека (3.37) сводится к уравнению теплопроводности (3.27).

2. Процесс диффузии в поле силы тяготения описывается уравнением [17]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(gu) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.39}$$

Уравнение (3.39) сводится к (3.27) с помощью замены (3.38), где

$$v = \exp\left(-gx - \frac{g^2}{2}t\right), \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{t} = \frac{1}{2}t.$$

3. Уравнение процесса релеевского типа [172]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x - \frac{1}{x}\right)u\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.40}$$

сводится к (3.27) с помощью замены (3.38), где

$$v = \exp(2\gamma t)x, \quad \tilde{x} = \exp(\gamma t)x, \quad \tilde{t} = \frac{1}{4\gamma}\exp(2\gamma t).$$

Приведенные ниже три уравнения (3.41)–(3.43) описывают модели в популяционной генетике [23].

$$4. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[(1-x^2)^2 u]. \tag{3.41}$$

Используя замену [71]

$$u = \frac{1}{\sqrt{B(x)}}w(\tau, y), \quad \tau = t, \quad y = \int \frac{dx}{\sqrt{B(x)}},$$

сводим уравнение (3.41) к виду

$$w_\tau = -(A(y)w)\tau + \frac{1}{2}w_{yy},$$

где $A(y) = \sqrt{2}\,\mathrm{th}(\sqrt{2}y)$, $B = 1$. Легко проверить, что $A(y)$ удовлетворяет условию (3.20) с $\lambda = 0$. Тогда суперпозиция приведенного преобразования и соответствующей замены (3.22), (3.24)–(3.26) дает замену (3.38), где

$$v = \exp(-t)\left(1-x^2\right)^{-3/2}, \quad \tilde{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \tilde{t} = t,$$

которая сводит уравнение (3.41) к уравнению теплопроводности (3.27).

$$5. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2\left(1-x^2\right)u\right]. \tag{3.42}$$

Аналогично предыдущему случаю получаем замену (3.38), где

$$v = \exp\left(-\frac{\alpha}{8}t\right)x^{-3/2}\left(1-x^2\right)^{-3/2}, \quad \tilde{x} = \ln\frac{x}{1-x}, \quad \tilde{t} = \frac{\alpha}{2}t,$$

которая сводит уравнение (3.42) к уравнению (3.27).

$$6. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(x-c)^2 u\right] + \beta\frac{\partial}{\partial x}[(x-c)u]. \tag{3.43}$$

Уравнение (3.43) сводится к уравнению теплопроводности (3.27) заменой (3.38), где

$$v = \exp\left\{-\left(\frac{\beta^2}{2\alpha} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{8}\right)t\right\}(x-c)^{(-3/2+\beta/\alpha)},$$
$$\tilde{x} = \sqrt{2/\alpha}\ln(x-c), \quad \tilde{t} = t.$$

7. Уравнение ФП вида [34, 71]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial k}[a(t)x + b(t)]u + c(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

сводится к уравнению теплопроводности (3.27) заменой (3.38) [34, 172], где

$$v = \exp\{\alpha(t)\}, \quad \tilde{x} = \exp\{\alpha(t)\}x + \beta(t), \quad \tilde{t} = \gamma(t),$$

и, кроме того,

$$\alpha(t) = -\int_0^t a(s)ds, \quad \beta(t) = \int_0^t b(s)\exp\{\alpha(s)\}ds,$$
$$\gamma = \int_0^t c(s)\exp\{2\alpha(s)\}ds.$$

В. Уравнения с четырехпараметрической группой симметрии, которые сводятся к уравнению (3.36).

1. Уравнения Фоккера–Планка для процесса Релея

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x - \frac{\mu^2}{x}\right)u\right] + \mu^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.44}$$

где γ, μ — произвольные постоянные. Функция $\frac{A(x)}{2\mu} = \frac{1}{2x} - \frac{\gamma x}{2\mu}$ удовлетворяет условию (3.20). Следовательно, группа инвариантности уравнения (3.44) не является изоморфной группе инвариантности уравнения теплопроводности и не сводится к нему с помощью локальных преобразований. Выполнив преобразование $t' = t$, $x' = \sqrt{2}\mu^{-1}x$, $u'(t,x) = u(t,x)$, легко убедиться, что функция $A'(t',x')$ в преобразованном уравнении ФП удовлетворяет критерию (3.20). Тогда суперпозиция этого преобразования и преобразования (3.35), (3.31)–(3.33) приводит к замене переменных

$$\begin{aligned}
&\tilde{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}\gamma}\operatorname{th}\sqrt{2}\gamma t,\ \ \tilde{x} = (\mu\operatorname{ch}\sqrt{2}\gamma t)^{-1}x,\\
&u(t,x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\ln x\mu^{-1} - \gamma\mu^{-2}x^2\right\}\times\\
&\qquad\times\exp\left\{-\frac{\gamma\mu^{-2}x^2}{2\sqrt{2}}\operatorname{th}\sqrt{2}\gamma t - \frac{1}{2}\ln\operatorname{ch}\sqrt{2}\gamma t\right\}w(\tilde{t},\tilde{x}),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

которая сводит уравнение (3.44) к уравнению (3.36) с $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. Уравнение, описывающее рост популяции [72]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\beta x u). \tag{3.46}$$

После замены

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\beta x}}w(\tau,y), \quad \tau = t, \quad y = \sqrt{2x/\beta}$$

уравнение (3.46) преобразуется в такое уравнение ФП:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\alpha y}{2} - \frac{1}{2y}\right)w\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где $A(y) = \left(\frac{\alpha y}{2} - \frac{1}{2y}\right)$ удовлетворяет условию (3.20).

3. Уравнение, которое описывает модели в физике плазмы [23],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}x^{-2p}u\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}x^{1-2p}u\right), \tag{3.47}$$

где $p \neq -\frac{1}{2}$ (в случае $p = \frac{1}{2}$ оно допускает шестипараметрическую группу — см. уравнение (3.43)). После замены переменных

$$u = \sqrt{2}x^{(2p-1)/2}w(\tau,y), \quad \tau = t, \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{2p+1}x^{(2p+1)/2}$$

уравнение (3.47) преобразуется в такое уравнение ФП:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2y}w\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где $A(y) = \frac{1}{2y}$ удовлетворяет условию (3.20).

3.2. Использования симметрийных свойств для построения точных решений одномерных уравнений Фоккера–Планка

Как было показано в предыдущем параграфе, если уравнение ФП допускает шестипараметрическую группу локальных преобразований, то локальной заменой переменных оно преобразуется в уравнение теплопроводности. Выполняя обратную замену переменных, из известных точных решений уравнения теплопроводности можно получить точные решения исходного уравнения ФП.

В случае группы меньшей размерности для построения точных решений уравнений ФП применяют другие методы, в частности метод симметрийной редукции.

Рассмотрим уравнение, которое описывает процесс Релея:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma x - \frac{\mu^2}{x}\right)u\right] + \mu^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.48}$$

где γ, μ — произвольные постоянные. Как показано выше, функция

$$\frac{A(x)}{2\mu} = \frac{1}{2x} - \frac{\gamma x}{2\mu}$$

удовлетворяет критерию инвариантности уравнения ФП относительно четырехмерной алгебры. Следовательно, уравнение (3.48) не преобразуется в уравнение теплопроводности с помощью локальных преобразований.

Предложение 3.1. *Максимальной алгеброй инвариантности уравнения* (3.48) *является четырехмерная алгебра* A_4 *с базисными операторами*

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_1 = \exp\{2\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + \left(1 - \frac{\gamma}{\mu}x^2\right)I\right),$$

$$I = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad D_2 = \exp\{-2\gamma t\}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - i\right), \qquad (3.49)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[P_0, D_1] = 2\gamma D, \quad [D_1, D_2] = \frac{4}{\gamma}P_0 + 4I,$$

$$[P_0, D_1] = 2\gamma D, \quad [I, P_0] = [I, D_1] = [I, D_2] = 0. \qquad (3.50)$$

Доказательство может быть получено операторным методом или методом Ли.

Используем операторы (3.49) для построения точных решений уравнения (3.48). Прежде всего покажем, что его известное стационарное решение [17]

$$u_s(x) = \frac{\gamma x}{\mu}\exp\left(-\frac{\gamma x^2}{2\mu}\right) \qquad (3.51)$$

является частным случаем решения, инвариантного относительно оператора D_1 (3.49). С этой целью построим анзац, соответствующий оператору D_1. Согласно алгоритму симметрийной редукции [46] если уравнение допускает оператор симметрии, то его точное решение может быть найдено в виде

$$u(x) = \psi(x)\varphi(\omega),$$

где $\psi(x)$ и $\omega = \omega(x)$ — функции, определяемые из условий

$$Q\psi(x) \equiv [\xi^0(t,x)\partial_t + \xi^1(t,x)\partial_x + \eta(t,x,u)]\psi(x) = 0,$$
$$\xi^0(t,x)\partial_t\omega + \xi^1(t,x)\partial_x\omega = 0.$$

Полученный так анзац редуцирует уравнение (3.48) ФП к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\varphi(\omega)$. Для оператора D_1 этот анзац имеет вид

$$u(t,x) = x\exp\left(-\frac{\gamma x^2}{2\mu}\right)\varphi(\omega), \quad \omega = x\exp(\gamma t). \qquad (3.52)$$

Подстановка (3.52) в (3.48) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\omega\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = 0. \qquad (3.53)$$

Здесь и далее $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{d\omega}, \ddot{\varphi} = \dfrac{d^2\varphi}{d\omega^2}$. Общее решение уравнения (3.53) имеет вид

$$\varphi(\omega) = c_1\ln\omega + c_2. \qquad (3.54)$$

После подстановки (3.54) в (3.52) получаем такое решение уравнения (3.48):

$$u(t,x) = x\exp\left\{-\frac{\gamma x^2}{2\mu}\right\}(c_1(\gamma t + \ln x) + c_2). \qquad (3.55)$$

Легко видеть, что решение (3.51) является частным случаем (3.55), если в последнем положить $c_1 = 0$, $c_2 = \gamma/\mu$. Для более регулярного описания решений уравнения (3.48) найдем полный набор неэквивалентных одномерных подалгебр алгебры A_4, и затем для каждой такой подалгебры построим соответствующий анзац. Заметим, что, как следует из (3.50), алгебра A_4 изоморфна алгебре

$$gl(2,\mathbb{R}) = sl(2,\mathbb{R}) \oplus I.$$

Изоморфизм устанавливается линейным преобразованием

$$B_1 = \frac{1}{\gamma}P_0 + I, \quad B_2 = \frac{1}{2}D_1, \quad B_3 = -\frac{1}{2}D_2, \quad B_4 = I.$$

Используя этот факт, построим таблицу 3.1 одномерных подалгебр и соответствующих им анзацев.

Таблица 3.1

Алгебра	Инвариантная переменная	Анзац
$\frac{1}{\gamma}P_0 + (1+\alpha)I$	$\omega = x$	$u = \exp\{\gamma(1+\alpha)t\}\varphi(\omega)$
D_2	$\omega = \exp\{\gamma t\}x$	$u = \exp\{\gamma t\}\varphi(\omega)$
$-\frac{1}{2}D_2 \pm I$	$\omega = \exp\{\gamma t\}x$	$u = \exp\{\gamma t \pm e^{2\gamma t}\}\varphi(\omega)$
$\frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{2}D_2 + \alpha I$	$\omega = \dfrac{x^2e^{2\gamma t}}{e^{4\gamma t}+1}$	$u = \exp\left\{\gamma t - \dfrac{\gamma}{2\mu}\dfrac{x^2e^{4\gamma t}}{e^{4\gamma t}+1} + \alpha\,\mathrm{arctg}(e^{2\gamma t})\right\}\varphi(\omega)$

В результате подстановки анзацов 1–4 из таблицы 3.1 в (3.48) приходим к таким обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\mu\omega^2\ddot{\varphi} + (\gamma^3 - \mu\omega)\dot{\varphi} + (\mu - \alpha\omega^2)\varphi = 0,\\
&\omega^2\ddot{\varphi} - \omega\dot{\varphi} + \varphi = 0,\\
&\mu\omega^2\ddot{\varphi} - \mu\omega\dot{\varphi} + (\mu \pm 2\gamma\omega^2)\varphi = 0,\\
&4\mu^2\omega^2\ddot{\varphi} + (\gamma^2\omega^2 - 2\gamma\alpha\mu\omega + \mu^2)\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

В частности, легко найти общее решение второго уравнения из (3.56) и, используя второй анзац из таблицы 3.1, получить частное решение уравнения (3.48):

$$u(t,x) = x\exp\{2\gamma t\}(c_1 + c_2(\ln x + \gamma t)).$$

Также для построения частных решений линейного дифференциального уравнения (3.48) можно использовать метод разделения переменных, который тесно связан с групповыми свойствами этого уравнения. В соответствии с результатами статьи [189] имеют место три неэквивалентных случая разделения переменных для уравнения

$$w_{y_0} = w_{y_1y_1} + \frac{1}{2}y_1^{-2}w, \tag{3.57}$$

которые определяются такими функциями:

$$\begin{aligned}
&w = \varphi_1(y_0)\varphi_2(y_1),\\
&w = \varphi_1(y_0)\varphi_2\left(y_1y_0^{-1/2}\right),\\
&w = \exp\left\{-\frac{1}{4}(1+y_0^2)^{-1}y_0y_1^2\right\}\varphi_1(y_0)\varphi_2\left(y_1\left(1+y_0^2\right)^{-1/2}\right).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Следовательно, существуют три системы координат, в которых имеет место разделение переменных в уравнении (3.48). Подставив (3.58) в (3.57), мы получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций φ_1 и φ_2, решив которые и воспользовавшись соотношениями (3.45), где $\tilde{t} = y_0$, $\tilde{x} = y_1$, получим решения с разделяющимися переменными уравнения (3.48).

В завершение параграфа мы предлагаем читателю для самостоятельного выполнения такие задачи.

Задание 3.1. Провести анализ остальных редуцированных уравнений (3.56) и получить соответствующие инвариантные решения уравнения (3.48), которое описывает процесс Релея.

Задание 3.2. В первом разделе найдена оптимальная система подалгебр нетривиальной алгебры Ли операторов симметрии уравнения теплопроводности (3.27). Провести симметрийную редукцию уравнений (3.37), (3.39)–(3.43) по одномерным подалгебрам из оптимальной системы подалгебр, воспользовавшись эквивалентностью этих уравнений уравнению (3.27).

Задание 3.3. Используя известные результаты [41] разделения переменных для уравнения теплопроводности (3.27), провести разделение переменных для уравнений (3.37), (3.39)–(3.43).

3.3. Симметрийные свойства двухмерного уравнения Фоккера–Планка

Рассмотрим двухмерное уравнение ФП

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} = &-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_i(t,x_1,x_2)u\right] +\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[B_{ij}(t,x_1,x_2)u\right],
\end{aligned} \tag{3.59}$$

где $u = u(t,x_1,x_2)$; $A_i(t,x_1,x_2)$, $B_{ij}(t,x_1,x_2)$, $i,j = 1,2$, — некоторые гладкие функции. Коэффициенты сноса и диффузии в этом случае определяются как вектор и 2×2 матрица, соответственно, —

$$\begin{aligned}
&A(t,x_1,x_2) = \left(A_1(t,x_2,x_2),\ A_2(t,x_1,x_2)\right),\\
&B(t,x_1,x_2) = \left\|B_{ij}(t,x_1,x_2)\right\|_{i,j=1,2}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Исследуем симметрийные свойства уравнения ФП (3.59) с однородным коэффициентом сноса

$$A(t,x,y) = \left(A_1(x,y),\ A_2(x,y)\right) \tag{3.61}$$

и коэффициентом диффузии вида

$$B(t,x,y) = \begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}, \tag{3.62}$$

где B_1, B_2 — постоянные, то есть уравнения вида

$$\begin{aligned}
L \equiv \frac{\partial u}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x}\left[A_1(x,y)\,u\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[A_2(x,y)\,u\right] -\\
&-\frac{1}{2}B_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}B_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Найдем условия на коэффициенты (3.61), (3.62), при которых уравнение ФП (3.63) допускает 9-мерную максимальную алгебру инвариантности, то есть такой же размерности, как и нетривиальная часть алгебры инвариантности двухмерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.64}$$

Для исследования симметрии уравнения ФП (3.63) используем алгоритм Ли. Операторы алгебры инвариантности ищем в виде

$$X = \xi^0(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \xi^2(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}\eta(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

и коэффициенты оператора определяем из инфинитезимального условия инвариантности

$$\underset{2}{X} L\big|_{L=0} = 0, \tag{3.65}$$

где $\underset{2}{X}$ — 2-е продолжение оператора X. Приходим к линейной системе дифференциальных уравнений для определения функций ξ^i, $i = 0, 1, 2$, и η:

$$\begin{aligned} &\xi^0_u = 0, \quad \xi^1_u = 0, \quad \xi^2_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \\ &\xi^0_x = 0, \quad \xi^0_y = 0, \quad \xi^0_t = 2\xi^1_x = 2\xi^2_y, \\ &B_1\xi^2_x = -B_2\xi^1_y, \quad B_1\eta_{ux} = -\xi^1_t + A_1\xi^1_x + A_{1x}\xi^1 + A_{1y}\xi^2 - A_2\xi^1_y, \\ &B_2\eta_{uy} = -\xi^2_t - A_1\xi^2_x + A_{2x}\xi^1 + A_{2y}\xi^2 + A_2\xi^2_y, \\ &\eta_t + (A_{1xx} + A_{2xy})\,\xi^1 u + (A_{1xy} + A_{2yy})\,\xi^2 u + A_1\eta_x + A_2\eta_y + \\ &\quad + (A_{1x} + A_{2y})\left(\xi^0_t u + \eta - u\eta_u\right) - \frac{1}{2}B_1\eta_{xx} - \frac{1}{2}B_2\eta_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\xi^0 = F(t), \quad \xi^1 = \frac{1}{2}\frac{dF(t)}{dt}x + Q(t)B_1 y + P(t),$$

$$\xi^2 = -Q(t)B_2 x + \frac{1}{2}\frac{dF(t)}{dt}y + R(t), \quad \eta = K(t,x,y)u + M(t,x,y),$$

где функция $M(t,x,y)$ является произвольным решением уравнения (3.63), а функции $F(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $R(t)$, $K(t,x,y)$ — решения системы

$$\begin{aligned} &B_1K_x = -\xi^1_t + A_1\xi^1_x + A_{1x}\xi^1 + A_{1y}\xi^2 - A_2\xi^1_y, \\ &B_2K_y = -\xi^2_t - A_1\xi^2_x + A_{2x}\xi^1 + A_{2y}\xi^2 + A_2\xi^2_y, \\ &K_t + (A_{1xx} + A_{2xy})\,\xi^1 + (A_{1xy} + A_{2yy})\,\xi^2 + (A_{1x} + A_{2y})\,\xi^0_t + \\ &\quad + A_1K_x + A_2K_y - \frac{1}{2}B_1K_{xx} - \frac{1}{2}B_2K_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Общее решение системы (3.66) определяет максимальную (в смысле Ли) конечномерную алгебру инвариантности уравнения (3.63).

Решив систему (3.66), приходим к такому результату.

Теорема 3.3. *Уравнение ФП* (3.63) *допускает* 9*-мерную алгебру инвариантности тогда и только тогда, когда коэффициентам сноса и диффузии удовлетворяют таким условиям:*

$$\begin{aligned} &A_{1x} + \frac{(A_1)^2}{B_1} + A_{2y} + \frac{(A_2)^2}{B_2} = c_1x^2 + c_2x + c_3y^2 + c_4y + c_5, \\ &A_{1y}B_2 = A_{2x}B_1. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Здесь c_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ — *произвольные действительные постоянные интегрирования.*

Рассмотрим двухмерное уравнение ФП для релеевского процесса [17]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[\gamma x u] + \frac{\partial}{\partial y}[\gamma y u] + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{3.68}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &A_1(t,x,y) = -\gamma x, \quad A_2(t,x,y) = -\gamma y, \\ &B(t,x,y) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

γ, ε — постоянные. Несложно проверить, что коэффициенты сноса и диффузии (3.69) удовлетворяют условиям (3.67).

Поскольку уравнение ФП является уравнением диффузионного типа и, кроме того, размерность его алгебры инвариантности такая же, как и для уравнения теплопроводности (3.64), естественно возникает вопрос о возможной связи между этими уравнениями.

Действительно, уравнение (3.68) с помощью замены

$$u(t,x,y) = f(t,x,y)w\left(\tau(t,x,y), p(t,x,y), q(t,x,y)\right),$$

где функция f и новые независимые переменные τ, p, q определяются, соответственно, формулами

$$f = \exp\{2\gamma t\}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\gamma}\exp\{2\gamma t\},$$
$$p = \exp\{\gamma t\}\,x, \quad q = \exp\{\gamma t\}\,y,$$

преобразуется в уравнение теплопроводности

$$w_\tau = w_{pp} + w_{qq}.$$

В [41] проведено описание координат, в которых двухмерное уравнение теплопроводности допускает разделение переменных. Предлагаем читателю для самостоятельного выполнения такие задачи.

Задание 3.4. Описать координаты, в которых уравнение (3.68) допускает разделение переменных, используя связь этого уравнения с двухмерным уравнением теплопроводности.

Задание 3.5. Конечномерная алгебра инвариантности двухмерного уравнения теплопроводности изоморфна полной расширенной алгебре Галилея, классификация подалгебр которой известна [74]. Используя двухмерные подалгебры этой алгебры, провести симметрийную редукцию двухмерного уравнения теплопроводности к обыкновенным дифференциальным уравнениям с дальнейшим построением его инвариантных решений. Полученные решения использовать для построения точных решений уравнения (3.68).

3.4. Симметрийная классификация и точные решения уравнения Крамерса

Рассмотрим двухмерное уравнение Фоккера–Планка, которое описывает движение частицы в флуктуирующей среде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(yu) + \frac{\partial}{\partial y}(V'(x)u) + \gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(yu + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{3.70}$$

Здесь $u = u(t,x,y)$ — плотность вероятности, γ — постоянная и $V(x)$ — внешний потенциал. Уравнение (3.70) известно в литературе

как уравнение Крамерса. Коэффициенты сноса и диффузии для него имеют, соответственно, вид

$$A(t,x,y) = (y,\ -V'(x) - \gamma y), \quad B(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Изучим симметрийные свойства уравнения (3.70) для разных потенциалов. Инфинитезимальные операторы лиевской симметрии уравнения (3.70) ищем в таком общем виде:

$$Q = \xi^0\frac{\partial}{\partial t} + \xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial y} + \eta\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.71}$$

где ξ^0, ξ^1, ξ^2, η — гладкие функции переменных t, x, y и u.

Инвариантность уравнения (3.70) относительно операторов вида $f(t,x)\partial/\partial u$, где $f(t,x)$ — произвольное решение уравнения (3.70), является очевидной вследствие линейности уравнения (3.70). Поэтому такие операторы мы здесь не рассматриваем.

Теорема 3.4. *Максимальной группой инвариантности свободного уравнения Крамерса* (3.70) *(с $V'(x) = 0$) является шестипараметрическая группа Ли, которая генерируется такими операторами:*

$$P_0 = \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad I = u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$G_1 = t\partial_x + \partial_y + \frac{1}{2}(y + \gamma x), \quad T_1 = \exp(-\gamma t)\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x - \partial_y\right),$$
$$S_1 = \exp(\gamma t)\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x + \partial_y + y\right). \tag{3.72}$$

Доказательство. Применяя алгоритм Ли к уравнению (3.70), находим, что

$$\xi^0 = F(t), \quad \xi^1 = \frac{3}{2}xF'(t) + G(t), \quad \xi^2 = \frac{1}{2}yF' + \frac{3}{2}xF'' + G',$$
$$\eta = -\frac{1}{2\gamma}\left[(2F'' + \gamma F')\frac{y^2}{2} + \left(\frac{3}{2}x(F''' + \gamma F'') + G'' + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\gamma G' + \frac{1}{2}xF'V'' + V''G + \frac{1}{2}V'F'\right)y + \Theta(t,x)\right]. \tag{3.73}$$

При этом функции $F(t)$, $G(t)$ и $\Theta(t,x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
&5F''' - 2\gamma^2 F' + 4V''F' + 3xV'''F' + 2V'''G = 0,\\
&\Theta_x + \frac{3}{2}x(-F'''' + \gamma^2 F'') - \frac{3}{2}xV''F'' + \frac{3}{2}\gamma xV''F' +\\
&\quad + \frac{3}{2}V'F'' + \frac{3}{2}\gamma V'F' - G''' + \gamma^2 G' - V''G' + \gamma V''G = 0,\\
&\Theta_t + V'\left(\frac{3}{2}x(F''' + \gamma F'') + (G'' + \gamma G') +\right.\\
&\quad \left. + \frac{3}{2}xV''F' + V''G + \frac{1}{2}V'F'\right) + 2\gamma F'' - \gamma^2 F' = 0.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Положим в уравнениях (3.73) и (3.74) $V'(x) = 0$. Решив уравнения (3.74), с (3.71) и (3.73) получаем операторы (3.72).

Замечание 3.2. Замена переменных

$$u = w(\tau, \xi, \eta), \quad \tau = t, \quad \xi = x - \frac{c}{\gamma}\, t, \quad \eta = y - \frac{c}{\gamma}$$

приводит уравнение (3.70) с $V'(x) = C = \mathrm{const}$ к свободному уравнению Крамерса.

Замечание 3.3. Замена переменных

$$u = w(\tau, \xi, \eta), \quad \tau = t, \quad \xi = x + \frac{c}{k}, \quad \eta = y, \quad k \neq 0$$

сводит уравнение (3.70) с $V'(x) = kx + C$ к уравнению (3.70), в котором $V'(x) = kx$.

Используя равенства (3.73), (3.74), убеждаемся в справедливости трех следующих утверждений.

Предложение 3.2. *Максимальной группой инвариантности уравнения* (3.70) *с* $V'(x) = kx$, *где* $k \neq -\frac{3}{4}\gamma^2, \frac{3}{16}\gamma^2$, *является шестипараметрическая группа Ли локальных преобразований.*

A. В случае $k < \frac{\gamma^2}{4}$ *базисными операторами соответствующей алгебры Ли являются такие операторы:*

$$\begin{aligned}
&P_0, \quad I, \quad X_i = \exp(\lambda_i t)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial y} +\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2\gamma}[(\lambda_i^2 + \gamma\lambda_i + k)y + (-\lambda_i^3 + \gamma^2\lambda_i - k\lambda_i + \gamma k)x]\right),
\end{aligned} \tag{3.75}$$

где $i = 1, 2, 3, 4$, *а* λ_i — *корни алгебраического уравнения*

$$\lambda^4 + (2k - \gamma^2)\lambda^2 + k^2 = 0. \tag{3.76}$$

B. В случае $k > \frac{\gamma^2}{4}$ *базисными операторами соответствующей алгебры Ли являются такие операторы*

$$P_0, \quad I, \quad Y_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.77}$$

где $Y_1 = \mathrm{Re}\, X_1$, $Y_2 = \mathrm{im}\, X_1$, $Y_3 = \mathrm{Re}\, X_3$, $Y_4 = \mathrm{im}\, X_3$. *При этом операторы* X_i *определены в* (3.75), *а* λ_i — *комплексные корни уравнения* (3.76).

C. В случае $k = \frac{\gamma^2}{4}$ *базисными операторами соответствующей алгебры Ли являются такие операторы*

$$\begin{aligned}
&P_0, \quad I,\\
&X_i = \exp(\lambda_i t)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\gamma y}{2} + \frac{\gamma^2}{4}x\right), \quad i = 1, 3,\\
&X_i = \exp(\lambda_i t)\left(t\frac{\partial}{\partial x} + (1 + \lambda_i t)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\gamma t}{2} + 1\right)y + \frac{\gamma^2}{2}tx\right), \ i = 2, 4,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

где λ_1, $\lambda_2 = \lambda_1$, $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_1$ — *корни уравнения* (3.76).

Предложение 3.3. *Максимальной группой инвариантности уравнения* (3.70) *с* $V'(x) = kx$, *где* $k = -\frac{3}{4}\gamma^2$ *или* $k = \frac{3}{16}\gamma^2$, *является восьмипараметрическая группа Ли локальных преобразований, которая генерируется операторами* (3.75) *и операторами* N_1 *и* N_2, *где*

а) в случае $k = -\frac{3}{4}\gamma^2$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \exp(\gamma t)\left(\partial_t + \frac{3}{2}\gamma x\partial_x + \frac{\gamma}{2}(3\gamma x + y)\partial_y + \frac{3}{4}\gamma y^2 +\right.\\
&\quad \left. + \frac{3}{4}\gamma^2 xy - \frac{9}{16}\gamma^3 x^2 + \frac{\gamma}{2}\right),\\
N_2 &= \exp(-\gamma t)\left(\partial_t - \frac{3}{2}\gamma x\partial_x + \frac{\gamma}{2}(3\gamma x - y)\partial_y + \frac{1}{4}\gamma y^2 +\right.\\
&\quad \left. + \frac{3}{4}\gamma^2 xy + \frac{9}{16}\gamma^3 x^2 - \frac{3}{2}\gamma\right);
\end{aligned} \tag{3.79}$$

b) в случае $k = \frac{3}{16}\gamma^2$

$$N_1 = \exp\left(\frac{1}{2}\gamma t\right)\left(\partial_t + \frac{3}{4}\gamma x\partial_x + \frac{\gamma}{4}\left(\frac{3}{2}\gamma x + y\right)\partial_y + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\gamma y^2 + \frac{3}{8}\gamma^2 xy + \frac{9}{64}\gamma^3 x^2\right),$$
$$N_2 = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)\left(\partial_t - \frac{3}{4}\gamma x\partial_x + \frac{\gamma}{4}\left(\frac{3}{2}\gamma x - y\right)\partial_y + \gamma\right). \quad (3.80)$$

Предложение 3.4. *Максимальной группой инвариантности уравнения* (3.70) *с* $V'(x) \neq kx + c$ *является двухпараметрическая группа Ли локальных преобразований, которая генерируется операторами* $P_0 = \partial_t$ *и* I.

Далее кратко остановимся на результатах исследования Q-условной симметрии уравнения Крамерса. Подробности о понятии Q-условной симметрии дифференциальных уравнений в частных производных можно найти в [89].

Рассмотрим оператор (3.71) и соответствующее инфинитезимальное условие на функции, которые являются инвариантными относительно порожденной им однопараметрической группы локальных преобразований:

$$Q[u] = 0, \quad (3.81)$$

где $Q[u] = \eta - \xi^0\dfrac{\partial u}{\partial t} - \xi^1\dfrac{\partial u}{\partial x} - \xi^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$ — характеристика оператора Q.

Определение 3.1. Говорят, что уравнение (3.70) является Q-условно инвариантным относительно оператора Q (3.71), если система (3.70), (3.81) является инвариантной относительно этого оператора.

В частности, любой оператор лиевской симметрии является оператором Q-условной симметрии. Так же, как и операторы лиевской симметрии, операторы Q-условной симметрии позволяют редуцировать исходное уравнение к уравнениям с меньшим количеством независимых переменных, что значительно расширяет возможности построения точных решений.

Рассмотрим, в качестве примера, уравнение (3.70) с потенциалом

$$V' = kx^{-1/3} + \frac{3}{16}\gamma^2 x, \quad k \neq 0. \quad (3.82)$$

Из предложения 3.4 следует, что оператор

$$Q = \partial_t - \frac{3}{4}\gamma x\partial_x + \left(\frac{3}{8}\gamma^2 - \frac{1}{4}\gamma y\right)\partial_y + \gamma u\partial_u \quad (3.83)$$

не является оператором лиевской симметрии уравнения (3.70), (3.82). Но оператор (3.83) приводит к подстановке

$$u(t,x,y) = \exp(\gamma t)\varphi(\omega_1,\omega_2),$$
$$\omega_1 = \exp\left(\frac{3}{4}\gamma t\right)x, \quad \omega_2 = x^{-1/3}y + \frac{3}{4}\gamma x^{2/3}, \quad (3.84)$$

которая редуцирует это уравнение. Действительно, подставляя (3.84) в (3.70), (3.82), получаем уравнение

$$\omega_2\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} - \left(\frac{\omega_2^2}{2} + k\right)\omega_1^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} - \gamma\omega_1^{-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} = 0. \quad (3.85)$$

Уравнение (3.85), в свою очередь, можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению. Например, предположив дополнительно, что функция φ не зависит от переменной ω_1 (то есть $\varphi = \varphi(\omega_2)$), из (3.85) получаем уравнение $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} = 0$. Каждое точное решение уравнения (3.85) вместе с анзацем (3.84) дает точное решение уравнения (3.70), (3.82),

Замечание 3.4. Если Q — оператор Q-условной симметрии некоторого уравнения в частных производных, то это уравнение является также Q-условно инвариантным относительно оператора $\bar{Q} = f(x,u)Q$, где $f = f(x,u)$ — произвольная ненулевая функция зависимых и независимых переменных. Такие операторы Q и $\bar{Q}$ называют эквивалентными. С точностью до эквивалентности можем считать, что в (3.70) $\xi^0 = 1$, если $\xi^0 \not\equiv 0$.

Проведя анализ системы (3.70), (3.81), мы получили ряд результатов относительно Q-условной симметрии уравнения Крамерса, которые подаем ниже в виде следующих утверждений.

Предложение 3.5. *Произвольный оператор Q-условной симметрии уравнения* (3.70) *с* $V' \neq kx^{-1/3} + \frac{3}{16}\gamma^2 x$ *или* $V' \neq kx$ *является эквивалентным оператору лиевской симметрии этого уравнения, то есть оператору из линейной оболочки операторов* ∂_t, I.

Предложение 3.6. *Уравнение* (3.70), (3.82) *допускает операторы Q-условной симметрии вида*

$$Q = \partial_t + F(t)x\partial_x + \left(\frac{1}{3}F(t)y + F'(t)x + \frac{2}{3}F^2 x\right)\partial_y + fu\partial_u,$$

где $F = F(t)$ — произвольное решение уравнения

$$F'' + 2FF' + \frac{4}{9}F^3 - \frac{1}{4}\gamma^2 F = 0,$$

а функция $f = f(t,x,y)$ определяется из соотношения

$$2\gamma f = -y^2\left(\frac{2}{3}F' + \frac{4}{9}F^2 + \frac{1}{3}\gamma F\right) - yx\left(\gamma F' + \frac{2}{3}\gamma F^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 F\right) -$$
$$- x^2\left(\frac{3}{8}\gamma^2 F' + \frac{1}{4}\gamma^2 F^2 + \frac{3}{16}\gamma^3 F\right) - x^{2/3}k\left(2F' + \frac{4}{3}F^2 + \gamma F\right) +$$
$$+ C\exp\left\{-\frac{2}{3}\int F dt\right\} - \frac{4}{3}\gamma F + \gamma^2,$$

$C = \mathrm{const}$.

Предложение 3.7. *Все операторы Q-условной симметрии уравнения (3.70) с $V' = kx$, где $k \neq -\frac{1}{4}\gamma^2, \frac{3}{16}\gamma^2$, эквивалентны операторам лиевской симметрии этого уравнения, то есть операторам из линейной оболочки или операторам (3.75), или (3.77), или (3.78) (в зависимости от значений постоянной k).*

Предложение 3.8. *Все операторы Q-условной симметрии уравнения (3.70) с $V' = kx$, где $k = -\frac{1}{4}\gamma^2$ или $k = \frac{3}{16}\gamma^2$ (включая те операторы, которые эквивалентны операторам лиевской симметрии этого уравнения), имеют такой вид:*

$$Q = \partial_t + (F(t)x + G(t))\partial_x +$$
$$+ \left[\frac{1}{3}F(t)y + \left(F'(t) + \frac{2}{3}F(t)^2\right)x + G'(t) + \frac{2}{3}F(t)G(t)\right]\partial_y +$$
$$+ f(t,x,y)u\partial_u.$$

Здесь функции $F = F(t)$, $G = G(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$F'' + 2FF' + \frac{4}{9}F^3 + \left(\frac{4}{5}k - \frac{2}{5}\gamma^2\right)F = 0,$$
$$G'' + \frac{4}{3}FG' + \frac{2}{3}F'G + \gamma G' + \frac{2}{3}\gamma FG + \frac{4}{9}F^2 G + k = h(t),$$

а функция $h = h(t)$ является решением уравнения

$$h'' + \left(\frac{4}{3}F - \gamma\right)h' + \left(k + \frac{2}{3}F' + \frac{4}{9}F^2 - \frac{2}{3}\gamma F\right)h = 0.$$

Функция $f = f(t,x,y)$ определяется из соотношения

$$2\gamma f = -y^2\left(\frac{2}{3}F' + \frac{4}{9}F^2 + \frac{1}{3}\gamma F\right) - y\left[x\left(\gamma F' + \frac{2}{3}\gamma F^2\right) + h\right] +$$
$$+ \frac{3}{4}\gamma^3 x^2 F + x\left(h' - \gamma h + \frac{2}{3}Fh\right) + s(t),$$

если $k = -\frac{3}{4}\gamma^2$, или

$$2\gamma f = -y^2\left(\frac{2}{3}F' + \frac{4}{9}F^2 + \frac{1}{3}\gamma F\right) -$$
$$- y\left[x\left(\gamma F' + \frac{2}{3}\gamma F^2 + \frac{1}{2}\right) + h\right] -$$
$$- x^2\left(\frac{3}{16}\gamma^3 F + \frac{3}{8}\gamma^2 F' + \frac{1}{4}\gamma^2 F^2\right) +$$
$$+ x\left(h' - \gamma h + \frac{2}{3}Fh\right) + s(t),$$

$k = \frac{3}{16}\gamma^2$. В обоих случаях функция $s = s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$s' + \frac{2}{3}Fs = -2\gamma\left(\frac{2}{3}F' + \frac{4}{9}F^2 + \frac{1}{3}\gamma F\right) + \frac{4}{3}\gamma^2 F.$$

В завершение остановимся на примере Q_1, Q_2-условной симметрии уравнения Крамерса с произвольным потенциалом. Легко показать, что это уравнения инвариантно относительно пары операторов

$$Q_1 = \partial_x + V'(x), \quad Q_2 = \partial_y + y$$

при дополнительном условии

$$Q_1[u] = 0, \quad Q_2[u] = 0.$$

Отметим, что стационарное решение (хорошо известное как решение Больцмана [17])

$$u = \exp\left\{-\frac{y^2}{2} - V(x)\right\}$$

уравнения Крамерса (3.70) с произвольным потенциалом является инвариантным относительно этих операторов.

Из приведенных примеров видно, что дальнейшая работа по нахождению операторов Q- и Q_1-, Q_2-условной симметрии является перспективной и имеет большое значение для построения точных решений уравнения Крамерса.

Рассмотрим теперь свободное уравнение Крамерса ($V'(x) = 0$) (см. [17]). Возьмем оператор из (3.72)

$$S_1 = \exp(\gamma t)\left(\frac{1}{\gamma}\partial_x + \partial_y + y\right).$$

Найдем его инварианты

$$\omega_1 = t, \quad \omega_2 = \gamma x - y, \quad \omega_3 = \frac{y^2}{2} + \ln u$$

и построим соответствующий анзац

$$u(t,x,y) = \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = \gamma x - y. \tag{3.86}$$

Подстановка (3.86) в свободное уравнение Крамерса приводит к одномерному линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} - \gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} = 0.$$

Очевидно, что из точных решений уравнения теплопроводности с помощью анзаца (3.86) можно получить ряд частных решений свободного уравнения Крамерса.

Большое количество точных решений уравнения (3.70) может быть найдено с помощью метода, описанного в [72]. Если $u_0(t,x,y)$ является решением уравнения (3.70), то функции $Qu_0, Q^2u_0, \ldots$, где Q — произвольный оператор лиевской симметрии уравнения (3.70), также будут решениями этого уравнения. Например, с помощью операторов X_i (3.75) для уравнения (3.70) с $V'(x) = kx$ $\left(k < \frac{\gamma^2}{4}\right)$ легко получить ряд точных решений, начиная с $u_0 = e^{\gamma t}$. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

На этом мы завершаем рассмотрение линейных дифференциальных уравнений параболического типа. Как следует из вышесказанного, широкое применение в различных проблемах находят уравнения с высокими симметрийными свойствами. При этом значительное их количество приводится локальными заменами к хорошо изученным линейным уравнениям теплопроводности.

3.5. Реализация алгебры Ли $O(2,2)$ и квази-точно решаемые матричные одномерные операторы Шредингера

В последние годы много работ (см., например, [185, 186, 177, 181]) было посвящен проблеме построения точно и *квази-точно решаемых* моделей Шредингера

$$H[x]\Psi(x) = [\partial_x^2 + V(x)]\Psi(x) = \lambda\Psi(x).$$

В работах [185, 170, 171] были описаны все одномерные скалярные модели. В дальнейшем метод, который был использован в этих работах, мы называем методом Турбинера–Шифмана. В статье [191] были описаны несколько матричных моделей указанного вида, которые имеют Ли-алгебраическую структуру. В этом и следующем параграфе мы останавливаемся именно на проблеме построения моделей указанного вида, имеющих Ли-алгебраическую структуру.

3.5.1. Предварительные замечания и алгоритм построения операторов Шредингера

В статьях [191, 192] был расширен метод Турбинера–Шифмана [185, 170, 171] построения квази-точно решаемых (КТР) одномерных моделей на случай матричных гамильтонианов. Первоначально их метод применялся для скалярных одномерных стационарных уравнений Шредингера. Позже он был расширен на случай многомерных скалярных стационарных уравнений Шредингера [171, 131–133] (см., также, [181]).

Процедура построения КТР матричной (скалярной) модели основывается на концепции Ли-алгебраического гамильтониана. Будем говорить, что оператор второго порядка от одной переменной является Ли-алгебраическим, если выполняются следующие условия:

- гамильтониан можно представить в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами операторов первого порядка $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, которые образуют алгебру Ли g;
- алгебра Ли g имеет конечномерное инвариантное подпространство $\mathcal{I}$ всего пространства представления.

Если действие Ли-алгебраического Гамильтониана $H[x]$ ограничить на пространство $\mathcal{I}$, то он представляется матричным оператором $\mathcal{H}$, и, таким образом, собственные числа и собственные векторы гамильтониана вычисляются алгебраическим путем. Это означает, что Гамильтониан $H[x]$ является квази-точно решаемым (для скалярных КТР моделей см. [181]).

Стоит упомянуть и об альтернативных подходах к построению матричных КТР моделей [178, 104, 111, 112]. Главная идея состоит в том, чтобы задать вид базисных элементов инвариантного пространства $\mathcal{I}$. Как правило, рассматриваются полиномы по x. Зафиксировав базисные элементы, приходим к соответствующей задаче классификации подалгебр алгебры матрично-дифференциальных операторов, зависящей от одной переменной [112].

Априори мы не накладываем никаких ограничений на вид базисных элементов пространства $\mathcal{I}$. Единственное, что мы фиксируем, — это класс, которому принадлежат элементы алгебры Ли g. Выберем этот класс $\mathcal{L}$ как множество матричных дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{L} = \{Q: \; Q = a(x)\partial_x + A(x)\}\,. \tag{3.87}$$

Здесь $a(x)$ — гладкая вещественная функция, $A(x)$ — $N \times N$-матрица, элементами которой являются гладкие комплекснозначные функции от x, d/dx обозначается как ∂_x.

Очевидно, что $\mathcal{L}$ является бесконечномерной алгеброй Ли, в которой коммутаторами являются обычные скобки Ли. Если задана подалгебра $\langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\rangle$ алгебры $\mathcal{L}$, пространство представления которой содержит конечномерное инвариантное подпространство, то несложно построить матричную КТР модель. Для этого рассмотрим билинейную форму операторов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ (один из которых может быть единичной матрицей $N \times N$) с постоянными комплексными коэффициентами α_{jk}

$$H[x] = \left(\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} Q_j Q_k\right). \tag{3.88}$$

Таким образом, возникает задача классификации подалгебр алгебры $\mathcal{L}$ с точностью до группы внутренних автоморфизмов. Задача классификации неэквивалентных реализаций алгебр Ли дифференциальных операторов первого порядка, зависящих от одной и двух переменных была полностью решена самим Ли [154, 155] (см., также, [134]). В работе [192] была проведена классификация реализаций алгебр Ли размерностей не выше трех с операторами из класса $\mathcal{L}$ (3.87), где N — произвольно. Далее, для $N = 2$, мы рассмотрим те из них, из которых можно получить КТР матричные Гамильтонианы $H[x]$. Оказывается, что среди реализаций трехмерных алгебр Ли только случай алгебры $sl(2)$ удовлетворяет этому требованию. Он приводит к двум семействам 2×2 КТР моделей, одна из которых, при

специальных ограничениях, представляет хорошо известное семейство скалярных КТР гамильтонианов (подробности см. в [192]).

Хорошо известно, что физический смысл имеют лишь те операторы Шредингера, которые являются эрмитовыми. Это требование накладывает такие ограничения на выбор КТР моделей, которые не рассматривались в статьях [191, 192]. Необходимо отметить, что задача сведения КТР скалярного оператора к эрмитовому является, в определенном смысле, тривиальной и решена явно с помощью соответствующего преобразования независимой переменной и некоторого калибровочного преобразования волновой функции. Однако в случае матричных КТР операторов первого и второго порядка задача их преобразования в эрмитовые формы Шредингера становится нетривиальной и требует довольно сложных вычислений. Поэтому естественно, что, в отличие от скалярного случая, не всякий матричный КТР оператор второго порядка можно свести к эрмитовому виду. Здесь главной целью является систематическое развитие алгебраической процедуры построения КТР эрмитовых матричных операторов Шредингера

$$\hat{H}[x] = \partial_x^2 + V(x). \tag{3.89}$$

Это требует некоторой модификации алгебраической процедуры, использованной в [191, 192]. Здесь мы рассмотрим в качестве алгебры g прямую сумму двух алгебр $sl(2)$ (т.е. алгебру $o(2,2)$). Соответствующие алгебраические структуры представлены далее в пункте 5.3.2. Здесь же приведен алгоритм построения эрмитовых КТР матричных операторов Шредингера, зависящих от одной переменной. Полный список найденных указанным способом КТР моделей представлен в пункте 5.3.4.

Более сильное ограничение на КТР операторы Шредингера состоит в том, что базисные элементы инвариантного пространства $\mathcal{I}$ должны быть квадратично-интегрируемыми функциями в $\mathbb{R}$. Это означает, что такое пространство является гильбертовым, то есть на его элементах можно ввести скалярное произведение

$$\langle \vec{f}(y), \vec{g}(y)\rangle = \int \vec{f}(y)^{\dagger} \vec{g}(y) dy,$$

где $\vec{f}(y)^{\dagger}$ — эрмитовое сопряжение $\vec{f}(y)$.

Подробное исследование этой задачи в случае скалярных КТР операторов Шредингера было проведено в [135]. Здесь с использованием вышеупомянутых результатов построен несколько классов КТР матричных операторов Шредингера (гамильтонианов), действующих на конечномерных инвариантных пространствах, базисными элементами которых являются квадратично-интегрируемые функции в $\mathbb{R}$. Поскольку такие Гамильтонианы являются, по нашему мнению, наиболее важными с физической точки зрения, перечислим некоторые примеры, не вдаваясь в подробности способа их построения. Подробная процедура вычислений соответствующих классов гамильтонианов содержится в пунктах 5.3.2–5.3.4. Далее σ_k обозначают 2×2-матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Модель 1. $(\hat{H}[y] + E)\psi(y) = 0$, где

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 - \frac{y^6}{256} + \frac{4m-1}{16}y^2 - \frac{1}{4}y^2\sigma_3 - \sigma_1.$$

Инвариантное пространство $\mathcal{I}$ этого оператора имеет размерность $2m$ и натянуто на векторы

$$\begin{aligned} \vec{f}_j &= \exp\left(-\frac{y^4}{64}\right)\left(\frac{y}{2}\right)^{2j}\vec{e}_1, \\ \vec{g}_k &= \exp\left(-\frac{y^4}{64}\right)\left(m\left(\frac{y}{2}\right)^{2k}\vec{e}_2 - k\left(\frac{y}{2}\right)^{2k-2}\vec{e}_1\right), \end{aligned}$$

где $j = 0, \ldots, m-2$, $k = 0, \ldots, m$, $\vec{e}_1 = (1,0)^T, \vec{e}_2 = (0,1)^T$ и m — произвольное натуральное число.

Несложно проверить, что базисные векторы инвариантного пространства $\mathcal{I}$ будут квадратично-интегрируемыми функциями на интервале $(-\infty, +\infty)$. Заметим, что существует аналогичный КТР скалярный оператор Шредингера, чье инвариантное пространство натянуто на базисные векторы с этим свойством (подробнее см. в [177, 182]).

Модель 2. $(\hat{H}[y] + E)\psi(y) = 0$, где

$$\begin{aligned} \hat{H}[y] = {} & \partial_y^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\exp(-2y) + m\exp(-y) + \frac{1}{2}\exp(2y) + \\ & + \left[m\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin(\sqrt{2}e^y) - \frac{\sqrt{6}}{2}\cos(\sqrt{2}e^y) - \exp(-y)\sin(\sqrt{2}e^y)\right]\sigma_1 + \\ & + \left[m\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cos(\sqrt{2}e^y) + \frac{\sqrt{6}}{2}\sin(\sqrt{2}e^y) - \exp(-y)\cos(\sqrt{2}e^y)\right]\sigma_3. \end{aligned}$$

Для этого оператора инвариантное пространство $\mathcal{I}$ имеет размерность $2m$ и натянуто на векторы

$$\begin{aligned} \vec{f}_j &= U^{-1}(y)\exp(-jy)\vec{e}_1, \\ \vec{g}_k &= U^{-1}(y)\left(m\exp(-ky)\vec{e}_2 - k\exp(-(k-1)y)\vec{e}_1\right), \end{aligned}$$

где $j = 0, \ldots, m-2$, $k = 0, \ldots, m$, m — произвольное натуральное число и

$$\begin{aligned} U^{-1}(y) = {} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}e^{-y}\right) \times \\ & \times (\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sigma_3)\left[\cos(\sqrt{2}e^y) + \frac{i\sqrt{3}\sigma_2 - \sigma_1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}e^y)\right]. \end{aligned}$$

Базисные векторы инвариантного пространства $\mathcal{I}$ — квадратично интегрируемые. Действительно, функции $\vec{f}_j(y)$ и $\vec{g}_k(y)$ асимптотически ведут себя как $\exp\left(-\frac{(2j+1)y}{2}\right)$ и $\exp\left(-\frac{(2k+1)y}{2}\right)$, соответственно, когда $y \to +\infty$. Более того, они ведут себя как $\exp\left(-\frac{(2j+1)y}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}e^{-y}\right)$ и $\exp\left(-\frac{(2k+1)y}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}e^{-y}\right)$, соответственно, когда $y \to -\infty$. Это означает, что они очень быстро стремятся к нулю при условии $y \to \pm\infty$.

Модель 3. $(\hat{H}[y] + E)\psi(y) = 0$, где

$$\begin{aligned} \hat{H}[y] = {} & \partial_y^2 + \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 y}\left[-\frac{1}{4}\operatorname{ch}^4 y + (2m-1)\operatorname{ch}^3 y - 2\operatorname{ch}^2 y - \right. \\ & \left. - 2m\operatorname{ch} y + 2\right] + \frac{1}{2}(2m - 1 - \operatorname{ch} y)\sigma_3 - \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для этого оператора инвариантное пространство $\mathcal{I}$ имеет размерность $2m$ и натянуто на векторы

$$\begin{aligned} \vec{f}_j &= U^{-1}(y)\exp(-jy)\vec{e}_1, \\ \vec{g}_k &= U^{-1}(y)\left(m\exp(-ky)\vec{e}_2 - k\exp(-(k-1)y)\vec{e}_1\right), \end{aligned}$$

где $j = 0, \ldots, m-2$, $k = 0, \ldots, m$, m — произвольное натуральное число и

$$U^{-1}(y) = \exp\left(-\frac{\operatorname{ch} y}{4}\right)\left|\operatorname{th}\frac{y}{2}\right|^{-1/4}.$$

Можно непосредственно проверить, что базисными векторами инвариантного пространства $\mathcal{I}$ являются квадратично интегрируемые функции на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Модель 4. $(\hat{H}[y] + E)\psi(y) = 0$, где

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 - \frac{y^2}{16} + \frac{5m^2 - 2m}{4m^2y^2} + \frac{(2m-1)(4m-1)}{m\rho} \times$$
$$\times \sin\left(-\frac{\rho}{2}\ln|y|\right)\sigma_1 - \frac{4m-1}{2}\sqrt{\frac{2m-1}{2m}}\cos\left(-\frac{\rho}{2}\ln|y|\right)\sigma_3 + \frac{1}{2}$$

и $\rho = \frac{\sqrt{16m^2-8m}}{m}$.

Для этого оператора инвариантное пространство $\mathcal{I}$ имеет размерность $2m$ и натянуто на векторы

$$\vec{f}_j = U^{-1}(y)\exp(-jy)\vec{e}_1,$$
$$\vec{g}_k = U^{-1}(y)\left(m\exp(-ky)\vec{e}_2 - k\exp(-(k-1)y)\vec{e}_1\right),$$

где $j = 0, \ldots, m-2$, $k = 0, \ldots, m$, m — произвольное натуральное число и

$$U^{-1}(y) = |y|^{1/2}\exp\left(-\frac{y^2}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\rho}{4}\ln|y|\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i(4m-1)\sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{16m^2-8m}}\sin\left(\frac{\rho}{4}\ln|y|\right)\right]\Lambda,$$

где $\Lambda = 1 + i(\sqrt{16m^2-8m} + 4m - 1)\sigma_1$.

Очевидно, что базисные векторы инвариантного пространства $\mathcal{I}$ — квадратично интегрируемые функции на интервале $(-\infty, +\infty)$.

3.5.2. Расширение алгебры $sl(2)$

Следуя работам [191, 192], рассмотрим реализацию алгебры $sl(2)$

$$sl(2) = \langle Q_-,\ Q_0,\ Q_+\rangle = \langle \partial_x,\ x\partial_x - \frac{m-1}{2} + S_0,$$
$$x^2\partial_x - (m-1)x + 2S_0x + S_+\rangle, \tag{3.90}$$

где $S_0 = \sigma_3/2$, $S_+ = (i\sigma_2 + \sigma_1)/2$, а $m \geqslant 2$ — произвольное натуральное число. Это представление приводит к семейству КТР моделей, и, более

того, алгебра (3.90) имеет следующее конечномерное инвариантное пространство

$$\mathcal{I}_{sl(2)} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \langle \vec{e}_1, x\vec{e}_1, \ldots, x^{m-2}\vec{e}_1\rangle \oplus \tag{3.91}$$
$$\langle m\vec{e}_2, \ldots, mx^j\vec{e}_2 - jx^{j-1}\vec{e}_1, \ldots, mx^m\vec{e}_2 - mx^{m-1}\vec{e}_1\rangle.$$

Поскольку пространства $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ инвариантны относительно действия любого из операторов (3.90), то вышеприведенное представление является приводимым. Более серьезная трудность состоит в том, что если мы возьмем билинейные комбинации (3.88) операторов (3.90), коэффициентами которых будут комплексные числа, то, вообще говоря, невозможно построить КТР оператор, эквивалентный эрмитовому оператору Шредингера. Для преодоления этой трудности используем идею, предложенную в [192], где в билинейной форме (3.88) коэффициентами являются постоянные 2×2-матрицы. С этой целью рассмотрим расширение алгебры Ли (3.90), добавив к ней следующие три матричных оператора:

$$R_- = S_-, \quad R_0 = S_-x + S_0, \quad R_+ = S_-x^2 + 2S_0x + S_+, \tag{3.92}$$

где $S_\pm = (i\sigma_2 \pm \sigma_1)/2$.

Непосредственная проверка показывает, что пространство (3.91) инвариантно относительно действия линейной комбинации операторов (3.92). Рассмотрим следующее множество операторов:

$$\langle T_\pm = Q_\pm - R_\pm,\ T_0 = Q_0 - R_0,\ R_\pm,\ R_0,\ I\rangle, \tag{3.93}$$

где Q и R — операторы (3.90) и (3.92), соответственно, и I — единичная 2×2-матрица. Прямыми вычислениями проверяем, что операторы $T_\pm$, T_0 так же, как и операторы $R_\pm$, R_0, удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $sl(2)$. Более того, операторы $T_\pm$, T_0 коммутируют с любым из операторов $R_\pm$, R_0. Следовательно, операторы (3.93) образуют алгебру Ли

$$sl(2) \oplus sl(2) \oplus I \cong o(2,2) \oplus I.$$

Далее будем обозначать эту алгебру как g.

Операторы Казимира алгебры g кратны единичной матрице:

$$K_1 = T_0^2 - T_+T_- - T_0 = \left(\frac{m^2-1}{4}\right)I,$$
$$K_2 = R_0^2 - R_+R_- - R_0 = \frac{3}{4}I.$$

Используя этот факт, можно показать, что представление этой алгебры, реализуемое на пространстве $\mathcal{I}_{sl(2)}$, неприводимо.

Интересно и то, что операторы (3.93) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&R_-^2 = 0, \quad R_0^2 = \frac{1}{4}, \quad R_+^2 = 0,\\
&\{R_-, R_0\} = 0, \quad \{R_+, R_0\} = 0, \quad \{R_-, R_+\} = -1,\\
&R_-R_0 = \frac{1}{2}R_-, \quad R_0R_+ = \frac{1}{2}R_+, \quad R_-R_+ = R_0 - \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3.94}
$$

Здесь $\{Q_1, Q_2\} = Q_1Q_2 + Q_2Q_1$. Следовательно, алгебру g можно рассматривать и как супералгебру (ср. с результатами работы [112]).

3.5.3. Общий вид эрмитового КТР оператора

Используя коммутационные соотношения алгебры Ли g совместно с соотношениями (3.94), можно показать, что любая билинейная комбинация операторов (3.93) является линейной комбинацией двадцати одной (базисной) квадратичной формой этих операторов. Рассматривая такие линейные комбинации, мы приходим ко всем КТР моделям, которые можно получить с помощью рассматриваемого подхода. Напомним, что нашей целью является вывод не отдельных семейств КТР матричных операторов второго порядка как таковых, а именно операторов Шредингера (3.89). Это означает, что необходимо преобразовать билинейную комбинацию (3.88) к стандартному виду (3.89). Принципиальным является требование, чтобы соответствующие преобразования могли выражаться явными формулами, поскольку нам нужно получить явный вид как матричного потенциала оператора Шредингера, так и базисных функций его инвариантного пространства.

Общий вид КТР модели, которая строится в рамках нашего подхода, следующая:

$$
H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \tag{3.95}
$$

где $\xi(x)$ — есть некоторая вещественная функция, а $B(x)$, $C(x)$ — матричные функции размерности 2×2. Пусть $U(x)$ будет обратимой 2×2-матрицей-функцией, удовлетворяющей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
U'(x) = \frac{1}{2\xi(x)}\left(\frac{\xi'(x)}{2} - B(x)\right)U(x), \tag{3.96}
$$

а функция $f(x)$ определена из соотношения

$$
f(x) = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\xi(x)}}. \tag{3.97}
$$

Тогда замена переменных, которая сводит (3.95) к стандартному виду (3.89), запишется как

$$
\begin{aligned}
&x \to y = f(x),\\
&H[x] \to \hat{H}[y] = \hat{U}^{-1}(y)H[f^{-1}(y)]\hat{U}(y),
\end{aligned} \tag{3.98}
$$

где f^{-1} обозначает функцию, обратную к f, $\hat{U}(y) = U(f^{-1}(y))$.

Применив преобразование (3.98), приходим к оператору Шредингера

$$
\hat{H}[y] = \partial_y^2 + V(y), \tag{3.99}
$$

где

$$
\begin{aligned}
V(y) = \Bigg\{&U^{-1}(x)\left[-\frac{1}{4\xi}B^2(x) - \frac{1}{2}B'(x) + \frac{\xi'}{2\xi}B(x) + C(x)\right]U(x) +\\
&+ \frac{\xi''}{4} - \frac{3\xi'^2}{16\xi}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)}.
\end{aligned} \tag{3.100}
$$

Далее, $\{W(x)\}_{x=f^{-1}(y)}$ означает, что нужно подставить $f^{-1}(y)$ вместо x в выражении $W(x)$.

Кроме того, если обозначить через $\vec{f}_1(x), \ldots, \vec{f}_{2m}(x)$ базисные элементы инвариантного пространства (3.91), то инвариантное пространство оператора $\hat{H}[y]$ примет вид

$$
\hat{\mathcal{I}}_{sl(2)} = \left\langle \hat{U}^{-1}(y)\vec{f}_1(f^{-1}(y)), \ldots, \hat{U}^{-1}(y)\vec{f}_{2m}(f^{-1}(y))\right\rangle. \tag{3.101}
$$

Согласно сказанному выше, будем искать такие КТР модели, для которых можно явно записать формулу преобразований (3.98). Это означает, что решение системы (3.96) нужно построить в явном виде. Для достижения этого выберем среди вышеупомянутого множества двадцати одной линейно независимых форм двенадцать таких:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \partial_x^2,\ A_1 = x\partial_x^2, \quad A_2 = x^2\partial_x^2 + (m-1)\sigma_3,\\
&B_0 = \partial_x,\ B_1 = x\partial_x + \frac{\sigma_3}{2}, \quad B_2 = x^2\partial_x - (m-1)x + \sigma_3 x + \sigma_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_1 = \sigma_1\partial_x + \frac{m}{2}\sigma_3, \quad C_2 = i\sigma_2\partial_x + \frac{m}{2}\sigma_3, \quad C_3 = \sigma_3\partial_x,\\
&D_1 = x^3\partial_x^2 - 2\sigma_1 x\partial_x + (3m - m^2 - 3)x +\\
&\qquad + (2m-3)x\sigma_3 + (4m-4)\sigma_1,\\
&D_2 = x^3\partial_x^2 - 2i\sigma_2 x\partial_x + (3m - m^2 - 3)x +\\
&\qquad + (2m-3)x\sigma_3 + (4m-4)\sigma_1,\\
&D_3 = 2\sigma_3 x\partial_x + (1-2m)\sigma_3.
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

Их линейные комбинации имеют такую структуру, что система (3.96) может быть проинтегрирована в замкнутом виде. Однако здесь мы систематически изучим лишь первые девять квадратичных форм из этого списка, исключив D_1, D_2, D_3 из дальнейшего рассмотрения.

Таким образом, далее рассматривается следующий вид гамильтониана:

$$
\begin{aligned}
H[x] = \sum_{\mu=0}^{2}(\alpha_\mu A_\mu + \beta_\mu B_\mu) + \sum_{i=1}^{3}\gamma_i C_i = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\partial_x^2 +\\
+ (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 + \gamma_1\sigma_1 + i\gamma_2\sigma_2 + \gamma_3\sigma_3)\partial_x + \beta_2\sigma_3 x -\\
-\beta_2(m-1)x + \beta_2\sigma_1 + \left[\alpha_2(m-1) + \frac{\beta_1}{2} + \frac{m}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\right]\sigma_3.
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

Здесь α_0, α_1, α_2 — произвольные вещественные константы, а $\beta_0, \ldots, \gamma_3$ — произвольные комплексные константы.

Введя следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
&\tilde\gamma_1 = \gamma_1, \quad \tilde\gamma_2 = i\gamma_2, \quad \tilde\gamma_3 = \gamma_3,\\
&\delta = 2\alpha_2(m-1) + \beta_1 + m(\gamma_1+\gamma_2),\\
&\xi(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \eta(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0,
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

получим следующий вид общего решения системы (3.96):

$$
\begin{aligned}
U(x) = \xi^{1/4}(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int\frac{\eta(x)}{\xi(x)}dx\right]\times\\
\times\exp\left[-\frac{1}{2}\tilde\gamma_i\sigma_i\int\frac{1}{\xi(x)}dx\right]\Lambda,
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

где Λ — произвольная постоянная обратимая матрица 2×2. Далее, преобразование (3.98), где матрица $U(x)$ имеет вид (3.105), сводит

КТР оператор (3.103) к оператору Шредингера (3.99), где

$$
\begin{aligned}
V(y) = \Bigg\{\frac{1}{4\xi}\Lambda^{-1}\{-\eta^2 + 2\xi'\eta - 2\xi\eta' - 4\beta_2(m-1)x\xi - \tilde\gamma_i^2 +\\
+ 2(\xi'-\eta)\tilde\gamma_i\sigma_i + 4\beta_2\xi U^{-1}(x)\sigma_1 U(x) + (4\beta_2 x + 2\delta)\xi\times\\
\times U^{-1}(x)\sigma_3 U(x)\}\Lambda + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{3(2\alpha_2 x + \alpha_1)^2}{16\xi}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)}.
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

Здесь ξ, η — функции от x, определенные в (3.104), $f^{-1}(y)$ — функция обратная к $f(x)$ (3.97).

Условие эрмитовости оператора Шредингера (3.99) эквивалентно требованию эрмитовости матрицы $V(y)$. Для описания эрмитовых матриц среди многопараметрического семейства матриц (3.106) воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. *Матрицы $z\sigma_a$, $w(\sigma_a \pm i\sigma_b)$, $a \neq b$, где $\{z, w\} \subset \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{R}$, $w \neq 0$, нельзя привести к эрмитовым с помощью преобразования*

$$
A \to A' = \Lambda^{-1}A\Lambda,
\tag{3.107}
$$

где Λ — обратимая постоянная 2×2-матрица.

Доказательство. Лемму достаточно доказать для случая $a = 1$, $b = 2$, поскольку все другие случаи эквивалентны. Предположим обратное: допустим, что существует преобразование (3.107), которое сводит матрицу $z\sigma_1$ к эрмитовой матрице A'. Поскольку $\mathrm{tr}\,(z\sigma_1) = \mathrm{tr}\,A' = 0$, матрица A' имеет вид $\alpha_i\sigma_i$ с некоторыми вещественными константами α_i. Далее, из равенства $\det(z\sigma_1) = \det A'$ получаем $z^2 = \alpha_i^2$. Последнее соотношение противоречит тому, что $z \notin \mathbb{R}$. Следовательно, матрица $z\sigma_1$ не может быть приведена к эрмитовой с помощью преобразования (3.107).

Рассмотрим теперь матрицу $w(\sigma_1 + i\sigma_2)$. Общий вид матрицы Λ такой:

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

Тогда преобразование (3.107) имеет следующий вид:

$$
A' = \Lambda^{-1}w(\sigma_1 + i\sigma_2)\Lambda = \frac{2w}{\delta}\begin{pmatrix} cd & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}, \quad \delta = \det\Lambda.
$$

Следовательно, условия эрмитовости матрицы A' запишутся как

$$\frac{w}{\delta}cd = \frac{\bar{w}}{\bar{\delta}}\bar{c}\bar{d}, \quad \frac{-w}{\delta}c^2 = \frac{\bar{w}}{\bar{\delta}}\bar{d}^2,$$

где верхняя черта обозначает комплексное сопряжение.

Из второго соотношения следует, что c, d могут обращаться в нуль только одновременно, что невозможно, поскольку матрица Λ обратима. Следовательно, справедливо равенство $cd \neq 0$. Отсюда получаем

$$\frac{-d}{c} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \leftrightarrow |c|^2 + |d|^2 = 0.$$

Это противоречие доказывает, что матрицу $w(\sigma_1 + i\sigma_2)$ нельзя привести к эрмитовому виду.

Поскольку матрица $\sigma_1 + i\sigma_2$ сводится к $\sigma_1 - i\sigma_2$ с помощью некоторого преобразования (3.107), то лемма доказана. ■

Лемма 3.2. *Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — комплексные векторы, $\vec{\sigma}$ — вектор, чьими компонентами являются матрицы Паули $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Тогда справедливо следующее утверждение.*

1°) *Ненулевая матрица $\vec{a}\vec{\sigma}$ сводится к эрмитовому виду с помощью преобразования* (3.107) *тогда и только тогда, когда $\vec{a}^{\,2} > 0$ (это неравенство означает, в частности, что $\vec{a}^{\,2} \in \mathbb{R}$);*

2°) *Ненулевые матрицы $\vec{a}\vec{\sigma}$, $\vec{b}\vec{\sigma}$ с $\vec{b} \neq \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, сводятся одновременно к эрмитовым с помощью преобразования* (3.107) *тогда и только тогда, когда*

$$\vec{a}^{\,2} > 0, \quad \vec{b}^{\,2} > 0, \quad (\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0;$$

3°) *Матрицы $\vec{a}\vec{\sigma}$, $\vec{b}\vec{\sigma}$, $\vec{c}\vec{\sigma}$ с $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \lambda\vec{a}$, $\vec{c} \neq \mu\vec{b}$, $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$, сводятся одновременно к эрмитовым с помощью преобразования* (3.107) *тогда и только тогда, когда*

$$\vec{a}^{\,2} > 0, \quad \vec{b}^{\,2} > 0, \quad (\vec{a} \times \vec{b})^2 > 0, \quad \left\{\vec{a}\vec{c}, \quad \vec{b}\vec{c}, \quad (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Здесь мы обозначаем скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ как $\vec{a}\,\vec{b}$, а их векторное произведение — как $\vec{a} \times \vec{b}$.

Доказательство. Сначала докажем справедливость утверждения 1. Предположим, что ненулевую матрицу $\vec{a}\vec{\sigma}$ можно привести к эрмитовой. Докажем, что отсюда следует неравенство $\vec{a}^2 > 0$.

Рассмотрим матрицы:

$$\Lambda_{ij}(a,b) = \begin{cases} 1 + \epsilon_{ijk}\dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - b}{a} i\sigma_k, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0, \end{cases} \tag{3.108}$$

где $(i,j,k) = \mathrm{cycle}\,(1,2,3)$. Докажем, что они обратимы при условии

$$\sqrt{a_i^2 + a_j^2} \neq 0. \tag{3.109}$$

При условии (3.109) выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_l \to \Lambda_{ij}^{-1}(a,b)\ \sigma_l\ \Lambda_{ij}(a,b) = \begin{cases} \sigma_k, & l = k, \\ \dfrac{b\sigma_i + a\sigma_j}{\sqrt{a^2+b^2}}, & l = i, \\ \dfrac{-a\sigma_i + b\sigma_j}{\sqrt{a^2+b^2}}, & l = j. \end{cases} \tag{3.110}$$

Поскольку $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то существует, по крайне мере, одна пара индексов i, j такая, что $a_i^2 + a_j^2 \neq 0$. Применяя преобразование (3.110) с $a = a_i$, $b = a_j$, получаем

$$\vec{a}\vec{\sigma} \to \vec{a}\,'\vec{\sigma} = \sqrt{a_i^2 + a_j^2}\,\sigma_j + a_k\sigma_k \tag{3.111}$$

(суммирования по индексам i, j, k нет). Прямая проверка показывает, что величина $\vec{a}^{\,2}$ инвариантна относительно преобразования (3.110), т.е. $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\,'^2$.

Если $\vec{a}^{\,2} = 0$, то $a_j'^2 + a_k'^2 = 0$ или $a_i' = \pm i a_k'$. Следовательно, в силу леммы 3.1, получаем, что матрица (3.111) не может быть приведена к эрмитовому виду. Следовательно, $\vec{a}^{\,2} \neq 0$ и соотношение $a_j'^2 + a_k'^2 \neq 0$ справедливо. Применив преобразование (3.110), где $a = \sqrt{a_i^2 + a_j^2}$, $b = a_k$, получаем

$$\vec{a}\,'\vec{\sigma} \to \sqrt{\vec{a}^{\,2}}\,\sigma_k. \tag{3.112}$$

Из леммы 3.1 следует, что если число $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$ комплексное, то такую матрицу нельзя привести к эрмитовому виду. Следовательно, соотношение $\vec{a}^{\,2} > 0$ справедливо.

Достаточность утверждения следует из того, что при условии $\vec{a}^{\,2} > 0$, матрица (3.112) эрмитова.

Докажем теперь необходимость утверждения 2 леммы. Прежде всего заметим, что, в силу утверждения 1, $\vec{a}^{\,2} > 0$, $\vec{b}^{\,2} > 0$. Далее, не уменьшая общности, можно снова предположить, что $a_i^2 + a_j^2 \neq 0$. Возьмем суперпозицию двух преобразований вида (3.110) с $a = a_i$, $b = a_j$ и $a = \sqrt{a_i^2 + a_j^2}, b = a_k$:

$$\Lambda_{ij}(a_i, a_j)\Lambda_{jk}(\sqrt{a_i^2 + a_j^2}, a_k) = 1 + i\epsilon_{ijk}\frac{\sqrt{\vec{a}^{\,2}} - a_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}\sigma_i + \tag{3.113}$$

$$+ i\epsilon_{ijk}\frac{\sqrt{a_i^2 + a_j^2} - a_j}{a_i}\sigma_k - i\epsilon_{ijk}\frac{\sqrt{a_i^2 + a_j^2} - a_j}{a_i}\frac{\sqrt{\vec{a}^{\,2}} - a_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}\sigma_j$$

(здесь существует конечный предел, когда $a_i \to 0$). Используя эту формулу и принимая во внимание (3.110), получим

$$\vec{a}\vec{\sigma} \to \sqrt{\vec{a}^{\,2}}\sigma_k,$$

$$\vec{b}\vec{\sigma} \to \vec{b}\,'\vec{\sigma} = \frac{b_i a_j - b_j a_i}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}\sigma_i + \frac{a_k\vec{a}\,\vec{b} - b_k\vec{a}^2}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}\sigma_j + \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2}}\sigma_k. \tag{3.114}$$

Покажем, что необходимым условием одновременной приводимости матриц $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\sigma_k$, $\vec{b}\,'\vec{\sigma}$ к эрмитовым является $\vec{a}\,\vec{b} \in \mathbb{R}$. Действительно, поскольку матрицы $\vec{b}\,'\vec{\sigma}$, σ_k одновременно приводятся к эрмитовым, то и матрицу $\vec{b}'\vec{\sigma} + \lambda\sigma_k$ можно привести к эрмитовой для любого вещественного λ. Отсюда заключаем, учитывая утверждение 1, что

$$b_i'^2 + b_j'^2 + (b_k' + \lambda)^2 > 0, \tag{3.115}$$

где λ — произвольное вещественное число. Это неравенство справедливо, только если $b_k' = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2}} \in \mathbb{R}$.

Выбрав в (3.115) $\lambda = -b_k'$, приходим к неравенству $b_i'^2 + b_j'^2 > 0$. Поскольку $b_i'^2 + b_j'^2 = (\vec{a} \times \vec{b}\,)^2$, то отсюда получаем, что $(\vec{a} \times \vec{b}\,)^2 > 0$. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности утверждения 2 рассмотрим преобразование (3.110) с

$$a = \frac{b_i a_j - b_j a_i}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}, \qquad b = \frac{a_k\vec{a}\,\vec{b} - b_k\vec{a}^{\,2}}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}. \tag{3.116}$$

Матрицы $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\sigma_k$ инвариантны относительно этого преобразования, а матрица $\vec{b}\,'\vec{\sigma}$ (3.114) сводится к следующей:

$$\vec{b}'\vec{\sigma} \to \vec{b}\,''\vec{\sigma} = \frac{\sqrt{(\vec{a} \times \vec{b}\,)^2}}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}}}\sigma_j + \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}}}\sigma_k, \tag{3.117}$$

откуда и следует достаточность утверждения 2.

Доказательство утверждения 3 леммы аналогично доказательству утверждения 2. Первые три условия следуют из утверждения 2. Применив последовательно преобразования (3.110) с параметрами a, b вида (3.116) к матрице $\vec{c}\vec{\sigma}$, получим, учитывая (3.113),

$$\vec{c}\vec{\sigma} \to \vec{c}\,''\vec{\sigma} = \frac{\epsilon_{ijk}\vec{a}(\vec{c} \times \vec{b}\,)}{\sqrt{(\vec{c} \times \vec{b}\,)^2}}\sigma_i + \frac{(\vec{a} \times \vec{b}\,)(\vec{a} \times \vec{c}\,)}{\sqrt{(\vec{c} \times \vec{b}\,)^2}\sqrt{\vec{a}^{\,2}}}\sigma_j + \frac{\vec{a}\vec{c}}{\sqrt{\vec{a}^{\,2}}}\sigma_k. \tag{3.118}$$

Используя стандартные тождества для смешанных векторных произведений, получаем, что коэффициенты при матрицах σ_i, σ_j, σ_k действительны тогда и только тогда, когда справедливы следующие соотношения:

$$\left\{\vec{a}\vec{c},\ \vec{b}\vec{c},\ (\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Это завершает доказательство леммы 3.2. ∎

Лемма 3.2 играет ключевую роль, когда мы сводим потенциалы (3.106) к эрмитовому виду. Общий подход заключается в следующем. Сначала мы сводим КТР оператор к оператору Шредингера

$$\partial_y^2 + f(y)\vec{a}\vec{\sigma} + g(y)\vec{b}\vec{\sigma} + h(y)\vec{c}\,\vec{\sigma} + r(y).$$

Здесь f, g, h, r — некоторые линейно независимые вещественные функции, а $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — комплексные постоянные векторы, компоненты которых зависят от параметров $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Далее, используя лемму 3.2, находим условия на параметры $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, при которых можно одновременно свести матрицы $\vec{a}\vec{\sigma}$, $\vec{b}\vec{\sigma}$, $\vec{c}\vec{\sigma}$ к эрмитовому виду. Затем, используя формулы (3.108), (3.113), (3.116), находим вид матрицы Λ. Формулы (3.112), (3.117), (3.118) дают явный вид преобразованных матриц $\vec{a}\vec{\sigma}$, $\vec{b}\vec{\sigma}$, $\vec{c}\vec{\sigma}$ и, следовательно, эрмитовый вид матричного потенциала $V(y)$.

3.5.4. КТР матричные модели

Применяя алгоритм, описанный в конце предыдущего пункта, построим широкие семейства КТР матричных моделей (3.103), которые можно свести к эрмитовым матричным операторам Шредингера. Ниже приведены окончательные результаты, а именно, выписаны ограничения на выбор параметров и явный вид КТР эрмитовых операторов Шредингера. После этого подробно показано, как вывести соответствующие формулы для одного из шести неэквивалентных случаев. В нижеприведенных формулах через $[A] \vee [B]$ будем обозначать дизъюнкцию двух утверждений A и B.

Случай 1. $\tilde\gamma_1 = \tilde\gamma_2 = \tilde\gamma_3 = 0$ и

$$[\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}] \vee [\beta_2 = 0,\ \beta_1 = 2\alpha_2,\ \beta_0 = \alpha_1 + i\mu,\ \mu \in \mathbb{R}];$$

$$\hat H[y] = \partial_y^2 + \left\{ \frac{1}{4(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)} \times \right.$$
$$\big\{ -\beta_2^2 x^4 - [2\beta_1\beta_2 + 4\alpha_2\beta_2(m-1)]x^3 +$$
$$+ \left[2\alpha_2\beta_1 - 2\alpha_1\beta_2 - \beta_1^2 - 2\beta_0\beta_2 - 4\alpha_1\beta_2(m-1)\right] x^2 +$$
$$+ [4\alpha_2\beta_0 - 2\beta_0\beta_1 - 4m\alpha_0\beta_2]\, x + 2\alpha_1\beta_0 - 2\alpha_0\beta_1 - \beta_0^2 +$$
$$+4\beta_2(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\sigma_1 +$$
$$+ (4\beta_2 x + 2\delta)(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\sigma_3 \big\} +$$
$$\left. + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{3(2\alpha_2 x + \alpha_1)^2}{16(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)} \right\}\Bigg|_{x = f^{-1}(y)},$$
$$\Lambda = 1.$$

Случай 2. $\beta_2,\ \delta = 0$ и

$$2\alpha_2\beta_1 - \beta_1^2 \in \mathbb{R},\ 2\alpha_2\beta_0 - \beta_0\beta_1 \in \mathbb{R},$$
$$2\alpha_1\beta_0 - 2\beta_1\alpha_0 - \beta_0^2 - \tilde\gamma_i^2 \in \mathbb{R},$$
$$\left[(2\alpha_2 - \beta_1)^2\tilde\gamma_i^2 > 0\right] \vee \left[2\alpha_2 - \beta_1 = 0\right],$$
$$\left[(\alpha_1 - \beta_0)^2\tilde\gamma_i^2 > 0\right] \vee \left[\alpha_1 - \beta_0 = 0\right];$$

$$\hat H[y] = \partial_y^2 + \left\{ \frac{1}{4(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)} \right\{ \beta_1(2\alpha_2 - \beta_1)x^2 +$$
$$+ 2\beta_0(2\alpha_2 - \beta_1)x + 2\alpha_1\beta_0 - 2\beta_1\alpha_0 - \beta_0^2 - \tilde\gamma_i^2 +$$

$$+ \left[2(2\alpha_2 - \beta_1)x + 2(\alpha_1 - \beta_0)\right] \sqrt{\tilde\gamma_i^2}\,\sigma_3 \Big\} +$$
$$\left. + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{3(2\alpha_2 x + \alpha_1)^2}{16(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)} \right\}\Bigg|_{x = f^{-1}(y)},$$
$$\Lambda = \Lambda_{12}(\tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2)\Lambda_{23}\big(\sqrt{\tilde\gamma_1^2 + \tilde\gamma_2^2}, \tilde\gamma_3\big), \quad \tilde\gamma_1^2 + \tilde\gamma_2^2 \neq 0.$$

(Если $\tilde\gamma_1^2 + \tilde\gamma_2^2 = 0$, то можно выбрать другую матрицу Λ (27), когда $\tilde\gamma_i^2 + \tilde\gamma_j^2 \neq 0$.)

Случай 3. $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ и

$$\Big[\{\beta_2, \gamma_1\} \subset \mathbb{R},\ \gamma_3 = 0,\ \gamma_2 = \sqrt{\gamma_1^2 - 2\alpha_2\gamma_1}, \alpha_2\gamma_1 < 0,$$
$$\beta_1 = 2\alpha_2 + \beta_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ \beta_0 = \alpha_1 + \beta_2\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\Big];$$

$$\hat H[y] = \partial_y^2 + \left\{ \frac{\alpha_2}{2} - \frac{3(2\alpha_2 x + \alpha_1)^2}{16(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)} + \right.$$
$$+ \frac{1}{4(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)} \times \left\{ -\beta_2^2 x^4 - \left[2\beta_2^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 4\alpha_2\beta_2 m\right] x^3 - \right.$$
$$- \left[\frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2) + 2\alpha_1\beta_2(1+2m)\right] x^2 -$$
$$- \left[\frac{2\alpha_1\beta_2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\beta_2)}{\alpha_2^2} + 4\alpha_0\beta_2 m\right] x + \alpha_1^2 - \beta_2^2\frac{\alpha_0^2}{\alpha_2^2}$$
$$- 4\beta_2\frac{\alpha_0\alpha_1}{\alpha_2} - 4\alpha_0\alpha_2 - 2\alpha_2\gamma_1 + 4\beta_2 x(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \times$$
$$\times \left[\sin\left(\theta(y)\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}\,\right)\sigma_1 + \cos\left(\theta(y)\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}\,\right)\sigma_3\right] +$$
$$+ 2(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\left[\frac{\sin\left(\theta(y)\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}\,\right)}{\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}} \times \right.$$
$$\times \left(\delta\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}\,\sigma_1 - 2\beta_2\sqrt{\gamma_1^2 - 2\alpha_2\gamma_1}\,\sigma_3\right) +$$
$$+ \cos\left(\theta(y)\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{2\beta_2\sqrt{\gamma_1^2-2\alpha_2\gamma_1}}{\sqrt{-2\alpha_2\gamma_1}}\sigma_1+\delta\sigma_3\right)\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda=1+\left(\sqrt{1-\frac{2\alpha_2}{\gamma_1}}-\sqrt{\frac{-2\alpha_2}{\gamma_1}}\right)\sigma_3.$$

Случай 4. $\alpha_2\neq 0$, $\beta_2=0$.

Подслучай 4.1. $\delta\neq 0$, γ_1,γ_2 не обращаются одновременно в нуль и

$$\gamma_1^2-\gamma_2^2<0,\quad \gamma_3=i\mu,\quad \{\mu,\delta\}\subset\mathbb{R},\quad i(\alpha_1-\beta_0)\in\mathbb{R},\quad \beta_1=2\alpha_2;$$

$$\hat{H}[y]=\partial_y^2+\Bigg\{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{3(2\alpha_2x+\alpha_1)^2}{16(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)}+$$
$$+\frac{1}{4\xi}\Bigg\{-\beta_0^2+2\alpha_1\beta_0-2\alpha_0\beta_1-\tilde{\gamma}_i^2+$$
$$+2(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\Bigg[\delta\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\sigma_1\frac{\sin\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}\right)}{\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}}+$$
$$+\frac{-i\delta\gamma_3\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\sigma_2+\delta(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\sigma_3}{\tilde{\gamma}_i^2}\cos\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}\right)\Bigg]+$$
$$+\left[\frac{2\delta\alpha_2\gamma_3}{\tilde{\gamma}_i^2}x^2+\frac{2\delta\alpha_1\gamma_3}{\tilde{\gamma}_i^2}x+\frac{(2\alpha_1-2\beta_0)\tilde{\gamma}_i^2+2\delta\alpha_0\gamma_3}{\tilde{\gamma}_i^2}\right]\times$$
$$\times\left(i\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\sigma_2+\gamma_3\sigma_3\right)\Bigg\}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda=\Lambda_{21}(i\gamma_1,\gamma_2).$$

Подслучай 4.2. $\delta\neq 0$, $\gamma_1=\gamma_2=0$, $\gamma_3\neq 0$ и

$$\{\delta,\ \beta_1(2\alpha_2-\beta_1),\ \beta_0(2\alpha_2-\beta_1),\ -\beta_0^2+2\alpha_1\beta_0-2\alpha_0\beta_1,$$
$$\gamma_3(2\alpha_2-\beta_1),\ \gamma_3(\alpha_1-\beta_0)\}\subset\mathbb{R};$$

$$\hat{H}[y]=\partial_y^2+\Bigg\{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{3(2\alpha_2x+\alpha_1)^2}{16(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)}+$$
$$+\frac{1}{4(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)}\{\beta_1(2\alpha_2-\beta_1)x^2+2\beta_0(2\alpha_2-\beta_1)x-$$

$$-\beta_0^2+2\alpha_1\beta_0-2\beta_1\alpha_0-\gamma_3^2+\big[2\delta\alpha_2x^2+2x((2\alpha_2-$$
$$-\beta_1)\gamma_3+\delta\alpha_1)+2(\alpha_1-\beta_0)\gamma_3+2\delta\alpha_0\big]\sigma_3\}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda=1.$$

Случай 5. $\alpha_2=0$, $\beta_2\neq 0$ и

$$\alpha_1\neq 0,\ \gamma_1^2-\gamma_2^2<0,\ \tilde{\gamma}_i^2<0,\ \gamma_3=\frac{\tilde{\gamma}_i^2}{2\alpha_1},$$
$$\{\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta(\gamma_2^2-\gamma_1^2)+2\beta_2\gamma_1\gamma_3\}\subset\mathbb{R},$$
$$\{i(2\alpha_0\beta_2\gamma_3-\beta_1\tilde{\gamma}_i^2+2\beta_2\alpha_1\gamma_1+\delta\alpha_1\gamma_3),$$
$$i((\alpha_1-\beta_0)\tilde{\gamma}_i^2+2\beta_2\alpha_0\gamma_1+\delta\alpha_0\gamma_3))\}\subset\mathbb{R};$$

$$\hat{H}[y]=\partial_y^2+\Bigg\{-\frac{3\alpha_1^2}{16(\alpha_1x+\alpha_0)}+\frac{1}{4(\alpha_1x+\alpha_0)}\Bigg\{-\beta_2^2x^4-$$
$$-2\beta_1\beta_2x^3+\left[(2-4m)\alpha_1\beta_2-\beta_1^2-2\beta_0\beta_2\right]x^2-$$
$$-\left[2\beta_0\beta_1+4m\alpha_0\beta_2\right]x+2\alpha_1\beta_0-2\alpha_0\beta_1-\beta_0^2-\tilde{\gamma}_i^2+$$
$$+4x(\alpha_1x+\alpha_0)\Bigg[\beta_2\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\sigma_1\frac{\sin\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}\right)}{\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}}+$$
$$+\frac{\beta_2\sqrt{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\tilde{\gamma}_i^2}}{\tilde{\gamma}_i^2}\sigma_3\cos\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}\right)\Bigg]+2(\alpha_1x+\alpha_0)\times$$
$$\times\Bigg[\left(\frac{\delta(\gamma_2^2-\gamma_1^2)+2\beta_2\gamma_1\gamma_3}{\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}}\sigma_1-\frac{2\beta_2\gamma_2\tilde{\gamma}_i^2}{\sqrt{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\tilde{\gamma}_i^2}}\sigma_3\right)\times$$
$$\times\frac{\sin\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}\right)}{\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}}+\left(\frac{2\beta_2\gamma_2}{\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}}\sigma_1+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta(\gamma_1^2-\gamma_2^2)-2\beta_2\gamma_1\gamma_3}{\sqrt{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\tilde{\gamma}_i^2}}\sigma_3\right)\cos\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde{\gamma}_i^2}\right)\Bigg]+$$
$$+\Bigg[x\frac{4\alpha_0\beta_2\gamma_3-2\beta_1\tilde{\gamma}_i^2+4\alpha_1\beta_2\gamma_1+2\delta\alpha_1\gamma_3}{\tilde{\gamma}_i^2}+$$

$$+\frac{(2\alpha_1-2\beta_0)\tilde\gamma_i^2+4\alpha_0\beta_2\gamma_1+2\delta\alpha_0\gamma_3}{\tilde\gamma_i^2}\Bigg]\times$$

$$\times\left(-i\sqrt{-\tilde\gamma_i^2}\sigma_2\right)\Bigg\}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda=\Lambda_{21}(i\gamma_1,\gamma_2)\Lambda_{23}\left(-i\gamma_3\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2},\gamma_1^2-\gamma_2^2\right).$$

Случай 6. $\alpha_2=0$, $\beta_2=0$.

Подслучай 6.1. $\delta\neq0$, $\tilde\gamma_1,\tilde\gamma_2$ не обращаются в нуль одновременно и

$$\tilde\gamma_i^2<0,\ \{\delta^2(\gamma_1^2-\gamma_2^2)<0,\ \beta_0,\ \beta_1\}\subset\mathbb{R},$$
$$\{i(-\beta_1\tilde\gamma_i^2+\delta\alpha_1\gamma_3),\ i((\alpha_1-\beta_0)\tilde\gamma_i^2+\delta\alpha_0\gamma_3)\}\subset\mathbb{R};$$

$$\hat H[y]=\partial_y^2+\Bigg\{-\frac{3\alpha_1^2}{16(\alpha_1x+\alpha_0)}+\frac{1}{4(\alpha_1x+\alpha_0)}\Bigg\{-\beta_1^2x^2-$$
$$-2\beta_0\beta_1x+2\alpha_1\beta_0-2\alpha_0\beta_1-\beta_0^2-\tilde\gamma_i^2+$$
$$+2(\alpha_1x+\alpha_0)\left[\delta\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2}\sigma_1\frac{\sin\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde\gamma_i^2}\right)}{\sqrt{-\tilde\gamma_i^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta(\gamma_1^2-\gamma_2^2)}{\sqrt{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\tilde\gamma_i^2}}\sigma_3\cos\left(\theta(y)\sqrt{-\tilde\gamma_i^2}\right)\right]+$$
$$+\left[x\frac{-2\beta_1\tilde\gamma_i^2+2\delta\alpha_1\gamma_3}{\tilde\gamma_i^2}+\frac{(2\alpha_1-2\beta_0)\tilde\gamma_i^2+2\delta\alpha_0\gamma_3}{\tilde\gamma_i^2}\right]\times$$
$$\times\left(-i\sqrt{-\tilde\gamma_i^2}\sigma_2\right)\Bigg\}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$
$$\Lambda=\Lambda_{21}(i\gamma_1,\gamma_2)\Lambda_{23}\left(-i\gamma_3\sqrt{\gamma_2^2-\gamma_1^2},\gamma_1^2-\gamma_2^2\right).$$

Подслучай 6.2.

$$\gamma_1=\gamma_2=0,\ \gamma_3\neq0,\ \{\beta_1^2,\ \beta_0\beta_1\}\subset\mathbb{R},$$
$$\{-\beta_1\gamma_3+\delta\alpha_1,\ (\alpha_1-\beta_0)\gamma_3+\delta\alpha_0,\ -\beta_0^2+2\alpha_1\beta_0-2\alpha_0\beta_1\}\subset\mathbb{R};$$

$$\hat H[y]=\partial_y^2+\Bigg\{-\frac{3\alpha_1^2}{16(\alpha_1x+\alpha_0)}+\frac{1}{4(\alpha_1x+\alpha_0)}\{-\beta_1^2x^2-2\beta_0\beta_1x+$$
$$+2\alpha_1\beta_0-2\alpha_0\beta_1-\beta_0^2-\gamma_3^2+2(\alpha_1x+\alpha_0)\times$$
$$\times[2x\beta_1(\alpha_1-\gamma_3)+2(\alpha_1-\beta_0)\gamma_3+2\beta_1\alpha_0]\sigma_3\}\Bigg\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$
$$\Lambda=1.$$

В приведенных выше формулах функция, обратная к

$$y=f(x)\equiv\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0}},\tag{3.119}$$

обозначается как $f^{-1}(y)$, функция $\theta=\theta(y)$ определяется как

$$\theta(y)=-\left\{\int\frac{dx}{\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0}\right\}\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},\tag{3.120}$$

а $\tilde\gamma_i^2$ означает $\tilde\gamma_1^2+\tilde\gamma_2^2+\tilde\gamma_3^2$.

Полная процедура получения вышеприведенных формул довольно громоздка. Поэтому здесь мы не будем приводить вычисления, а покажем основные этапы вывода соответствующих формул для случая, когда $\alpha_2\neq0$, $\beta_2\neq0$. Нетрудно доказать, что $\tilde\gamma_i^2\neq0$. Действительно, предположим, что выполняется соотношение $\tilde\gamma_i^2=0$. Рассмотрим выражение $\Omega=U^{-1}(x)\sigma_3U(x)$ в формуле (3.106). Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа, получаем

$$\Omega=\sigma_3+\theta(i\gamma_1\sigma_2+\gamma_2\sigma_1)-\frac{\theta^2}{2}\gamma_3\tilde\gamma_i\sigma_i,$$

где θ — функция (3.120). Рассматривая коэффициент при θ^2, получаем, что $\gamma_3=0$ (иначе, воспользовавшись леммой 3.2, получили бы неравенство $\gamma_3^2\tilde\gamma_i^2\neq0$, что противоречит предположению $\tilde\gamma_i^2=0$). Поскольку матричный коэффициент при θ должен быть эрмитовым, получаем соотношение $\tilde\gamma_i^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2<0$. Это противоречие доказывает справедливость утверждения $\tilde\gamma_i^2\neq0$. Теперь, с учетом этого неравенства, можно представить матричный потенциал (3.106) в форме

$$V(y)=\Bigg\{\frac{\alpha_2}{2}-\frac{3(2\alpha_2x+\alpha_1)^2}{16(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)}+\frac{1}{4(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)}\times$$
$$\times\Lambda^{-1}\Bigg\{-\beta_2^2x^4-[2\beta_1\beta_2+4\alpha_2\beta_2(m-1)]x^3+$$

$$+\left[2\alpha_2\beta_1 - 2\alpha_1\beta_2 - \beta_1^2 - 2\beta_0\beta_2 - 4\alpha_1\beta_2(m-1)\right] x^2 +$$
$$+ \left[4\alpha_2\beta_0 - 2\beta_0\beta_1 - 4m\alpha_0\beta_2\right] x + 2\alpha_1\beta_0 - 2\alpha_0\beta_1 - \beta_0^2 -$$
$$- \tilde{\gamma}_i^2 + 4x(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\Bigg[\beta_2\gamma_3(\tilde{\gamma}_i^2)^{-1}\tilde{\gamma}_i\sigma_i +$$
$$+ \beta_2(\gamma_2\sigma_1 + i\gamma_1\sigma_2)(\tilde{\gamma}_i^2)^{-1/2}\operatorname{sh}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right) +$$
$$+ \left[\beta_2(-\gamma_1\gamma_3\sigma_1 - i\gamma_2\gamma_3\sigma_2 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\sigma_3)\right]\times$$
$$\times (\tilde{\gamma}_i^2)^{-1}\operatorname{ch}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)\Bigg] + 2(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)\times$$
$$\times \Bigg[(\delta\gamma_2\sigma_1 + i(\delta\gamma_1 - 2\beta_2\gamma_3)\sigma_2 - 2\beta_2\gamma_2\sigma_3)\times$$
$$\times (\tilde{\gamma}_i^2)^{-1/2}\operatorname{sh}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right) + \left[(2\beta_2(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) - \delta\gamma_1\gamma_3)\sigma_1 -\right.$$
$$- i(2\beta_2\gamma_1\gamma_2 + \delta\gamma_2\gamma_3)\sigma_2 + (\delta(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - 2\beta_2\gamma_1\gamma_3)\sigma_3\big]\times$$
$$\times (\tilde{\gamma}_i^2)^{-1}\operatorname{ch}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)\Bigg] + \left[(-2\beta_2\tilde{\gamma}_i^2 + 4\alpha_2\beta_2\gamma_1 +\right.$$
$$+ 2\delta\alpha_2\gamma_3)x^2 + ((4\alpha_2 - 2\beta_1)\tilde{\gamma}_i^2 + 4\alpha_1\beta_2\gamma_1 + 2\delta\alpha_1\gamma_3)x +$$
$$+ \frac{(2\alpha_1 - 2\beta_0)\tilde{\gamma}_i^2 + 4\alpha_0\beta_2\gamma_1 + 2\delta\alpha_0\gamma_3}{\tilde{\gamma}_i^2}\Big]\times$$
$$\times (\tilde{\gamma}_i^2)^{-1}\tilde{\gamma}_i\sigma_i\Big\}\Lambda\ \Big\}\Big|_{x=f^{-1}(y)}, \tag{3.121}$$

где $\theta = \theta(y)$ определяется из (3.120).

Предположим теперь, что γ_1, γ_2 не обращаются одновременно в нуль. Докажем, что в этом случае $\tilde{\gamma}_i^2 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим (не равный нулю) матричный коэффициент при $4x\xi\operatorname{ch}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)$ в выражении (3.121), и пусть комплексное число $\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2} = a + ib$. Несложно доказать, что $\operatorname{ch}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right) = f(x) + ig(x)$, где f, g — линейно независимые вещественные функции. Рассматривая матричные коэффициенты

при $f(x)$, $g(x)$, видим, что для приводимости матрицы (3.121) к эрмитовому виду нужно к такому виду привести матрицы A и iA, а это невозможно. Противоречие доказывает, что $\tilde{\gamma}_i^2 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим следующие матричные коэффициенты при

$$4x\xi\frac{\operatorname{sh}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}}, \quad 4x\xi\operatorname{ch}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)$$

в (3.121). Эти коэффициенты можно представить в виде $\vec{a}\vec{\sigma}$, $\vec{b}\vec{\sigma}$, где

$$\vec{a} = \beta_2(\gamma_2, i\gamma_1, 0), \quad \vec{b} = \beta_2(-\gamma_1\gamma_3, -i\gamma_2\gamma_3, \gamma_1^2 - \gamma_2^2),$$

и, более того,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \beta_2^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(i\gamma_1, -\gamma_2, i\gamma_3).$$

С помощью леммы 3.2 легко получить, что

$$\beta_i \in \mathbb{R}, \quad \gamma_3 = i\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1^2 - \gamma_2^2 < 0.$$

И, наконец, рассмотрим матричный коэффициент при $2\xi\frac{\operatorname{sh}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)}{\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}}$, который имеет вид $\vec{c}\vec{\sigma}$, где $\vec{c} = (\delta\gamma_2, i(\delta\gamma_1 - 2\beta_2\gamma_3), -2\beta_2\gamma_2)$. Из утверждения 3 леммы 3.2 следуют условия

$$\{\gamma_1,\ \gamma_2\} \subset \mathbb{R}, \quad [\gamma_1 = 0] \vee [\gamma_3 = 0].$$

Рассматривая аналогичным образом матричный коэффициент при $2\xi\operatorname{ch}\left(\theta\sqrt{\tilde{\gamma}_i^2}\right)$ получаем следующие ограничения на коэффициенты $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$:

$$\Bigg[\{\beta_2, \gamma_1\} \subset \mathbb{R},\ \gamma_3 = 0, \gamma_2 = \sqrt{\gamma_1^2 - 2\alpha_2\gamma_1},\ \alpha_2\gamma_1 < 0,$$
$$\beta_1 = 2\alpha_2 + \beta_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ \beta_0 = \alpha_1 + \beta_2\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\Bigg].$$

Результат вычислений — формула для случая 2.

Аналогично можно доказать, что при условии $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 \neq 0$, матрицу (3.121) нельзя свести к эрмитовому виду.

Дальнейшее сужение выбора КТР матричных гамильтонианов состоит в том, что базисные элементы соответствующего инвариантного пространства будут квадратично-интегрируемыми функциями на интервале $(-\infty,\infty)$. Например, если положить в случае 1 $\alpha_1=1$, $\beta_2=-1$, $\beta_0=1/2$, а остальные коэффициенты приравнять нулю, то придем к модели 1 из списка КТР гамильтонианов, приведенных в пункте 3.5.1. Остальные модели из списка можно получить аналогично.

Подведем некоторые итоги. Основная цель параграфа состояла в том, чтобы дать систематическую алгебраическую трактовку эрмитовых КТР гамильтонианов в рамках конструктивного подхода к построению КТР матричных моделей, предложенных в статьях [191,192]. В целом процедура основывается на специальном представлении алгебры $o(2,2)$, которое задается формулами (3.90), (3.92), (3.93). Посредством того, что пространство представления алгебры (3.93) имеет конечномерное инвариантное подпространство (3.91), были систематически построены шесть многопараметрических семейств эрмитовых КТР гамильтонианов в одномерном случае. По причинам вычислительного характера не было представлено систематического описания эрмитовых КТР гамильтонианов с потенциалами, зависящими от эллиптических функций.

Задача построения всех эрмитовых КТР гамильтонианов вида (3.103), имеющих квадратично-интегрируемые собственные функции, также выходит за рамки настоящего параграфа. Мы ограничили анализ этой проблемы несколькими примерами таких гамильтонианов, отложив ее для дальнейшего исследования.

Очень интересно сравнить результаты настоящего параграфа, основанных на структуре пространства представления для операторов (3.90), (3.92), (3.93), образующих алгебру $o(2,2)$, с результатами работы [112], где возникают некие супералгебры матрично-дифференциальных операторов. Такую взаимосвязь можно объяснить тем, что данное представление алгебры Ли $o(2,2)$ имеет структуру супералгебры. Последнее справедливо в силу того, что операторы (3.93) удовлетворяют соотношения (3.94).

Еще одна сопутствующая задача заключается в использовании найденных результатов для интегрирования многомерного уравнения Паули с помощью метода разделения переменных. Промежуточной задачей в рамках рассматриваемого метода является редукция уравнения Паули к четырем системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью анзацев (подстановок), разделяющих переменные. Следующий шаг заключается в изучении того, будут ли соответствующие матрично-дифференциальные операторы относиться к одному из шести классов КТР гамильтонианов, построенных в пункте 3.5.4.

3.6. О новых классах эрмитовых точно решаемых матричных одномерных операторов Шредингера, к которым приводят реализации разрешимых алгебр Ли

В настоящем параграфе мы останавливаемся на использовании рассмотренного в предыдущем параграфе подхода для построения многопараметрических семейств *точно решаемых* матричных моделей Шредингера, исходя из представлений разрешимых четырехмерных алгебр Ли в классе операторов (3.87), где $A(x)$ — 2×2-матрица.

Однако здесь данный подход является, в некотором смысле, обобщением предыдущего. Также как и в случае квази-точно решаемых моделей, мы выбираем представление некоторой алгебры, находим инвариантное пространство $\mathcal{I}$, а затем пополняем множество операторов этого представления такими операторами, которые действуют в пространстве $\mathcal{I}$ инвариантным образом. Отличие состоит в том, что теперь дополнительные операторы не обязательно принадлежат классу (3.87) и не будут образовывать, вместе с операторами представления, алгебру Ли.

Будем называть гамильтониан $H[x]$ (и, вообще, оператор вида (3.125)) *точно решаемыми*, если

- он может быть представлен в виде квадратичной формы операторов первого порядка вида (3.87), где $A(x)$ может быть 2×2-матрицей ;
- данное множество операторов имеет конечномерные инвариантные пространства с любой заданной размерностью (в случае квази-точно решаемых гамильтонианов размерность для конкретного представления алгебры фиксирована).

Полностью эта схема построения будет реализована на примере одного представления алгебры $A_{4.8}(q=-1)$.

Как частные случаи приведем *модели 1, 2*, для которых соответствующие инвариантные пространства являются гильбертовыми.

Модель 1. $(\hat{H}(y)+E)\psi(y)=0$, где

$$\hat{H}(y)=\partial_y^2-\left(\sin y+\frac{1}{2}y\cos y\right)\sigma_1+\left(\cos y-\frac{1}{2}y\sin y\right)\sigma_3+\frac{3}{4}.$$

Эта модель соответствует случаю 1 в пункте 3.6.2, где $\alpha_2=\beta_2=\delta_3=$ $=\gamma_0=1$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, а остальные коэффициенты равны нулю. Инвариантное пространство $\mathcal{I}$ этого оператора имеет размерность $2k+3$ и порождается векторами

$$\vec{f}_j = ie^{-y^2/4}y^j \exp\left(\frac{-i\sigma_2}{2}y\right)\vec{e}_1,$$

$$\vec{g}_s = -ie^{-y^2/4}y^s \exp\left(\frac{-i\sigma_2}{2}y\right)\vec{e}_2,$$

где $j=0,\ldots,k+1$, $s=0,\ldots,k$, $\vec{e}_1=(1,0)^T$, $\vec{e}_2=(0,1)^T$, σ_i $(i = 1,2,3)$ — 2×2-матрицы Паули.

Модель 2.

$$\hat{H}(y) = \partial_y^2 - \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\sigma_1 + \sin\left(2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\sigma_3\right] + \\ + \frac{5}{4y^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16}y^2.$$

Эта модель соответствует подслучаю 2.1 в пункте 3.6.2, где $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_0 = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$, а остальные коэффициенты равны нулю. Инвариантное пространство $\mathcal{I}$ порождается векторами

$$\vec{f}_j = ie^{-y^2/8}\left|\frac{y}{2}\right|^{2j+1/2}\exp\left(-i\sigma_2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\vec{e}_1,$$

$$\vec{g}_s = -ie^{-y^2/8}\left|\frac{y}{2}\right|^{2s+1/2}\exp\left(-i\sigma_2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\vec{e}_2,$$

где $j=0,\ldots,k+1$, $s=0,\ldots,k$.

3.6.1. Общий вид эрмитового точно решаемого оператора Шредингера

В работе [2] было найдено представление алгебры Ли $A_{4.8}$ $(q = -1)$ с операторами

$$Q_1 = A,\quad Q_2 = Be^{-x},\quad Q_3 = e^x(\partial_x + C),\quad Q_4 = \partial_x, \tag{3.122}$$

где $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Операторы $Q_1,\ldots,Q_4$ (3.122) удовлетворяют коммутационным соотношениям (остальные коммутационные соотношения равны нулю):

$$[Q_2,Q_3] = Q_1,\quad [Q_2,Q_4] = Q_2,\quad [Q_3,Q_4] = -Q_3.$$

Соответствующее инвариантное пространство имеет такой вид:

$$\mathcal{I} = \langle e^{-cx}\vec{e}_1, e^{-(c+1)x}\vec{e}_1,\ldots,e^{-(c+k+1)x}\vec{e}_1\rangle\oplus \\ \oplus\langle e^{-cx}\vec{e}_2, e^{-(c+1)x}\vec{e}_2,\ldots,e^{-(c+k)x}\vec{e}_2\rangle, \tag{3.123}$$

где k — произвольное натуральное число.

Поскольку в операторах (3.122) все матрицы верхнетреугольные, то для построения эрмитового гамильтониана H естественно было бы дополнить множество операторов (3.122) новыми операторами с нижнетреугольными матрицами. Причем эти операторы должны оставлять пространство (3.123) инвариантным. Нетрудно убедиться, что в классе операторов (3.87), где $A(x)$ может быть 2×2-матрицей, все такие операторы имеют вид:

$$R_1 = S_0,\quad R_2 = S_+e^x\partial_x,\quad R_3 = S_+\partial_x,\quad R_4 = S_0e^x\partial_x, \\ R_5 = S_0\partial_x,\quad R_6 = S_+e^{-x}\partial_x,\quad R_7 = S_-e^x\partial_x, \tag{3.124}$$

где $S_0 = \dfrac{\sigma_3}{2}$, $S_\pm = \dfrac{i\sigma_2 \pm \sigma_1}{2}$, σ_i $(i=1,2,3)$ — 2×2-матрицы Паули.

Напомним, что общая форма точно решаемой модели, в рамках нашего подхода, имеет вид

$$H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \tag{3.125}$$

где $\xi(x)$ — некоторая действительная функция, $B(x)$, $C(x)$ — 2×2-матричные функции. При этом нужно рассматривать лишь те независимые билинейные формы операторов (3.122), (3.124), в которых коэффициентами при производной второго порядка ∂_x^2 являются действительные скалярные функции.

Пусть $U(x)$ — невырожденная матричная функция, которая удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.96), а также определим функцию $f(x)$ соотношением (3.97). Оказывается, что замена переменных (3.98) сводит гамильтониан (3.125) к стандартному виду оператора Шредингера (3.99), где $V(y)$ имеет вид (3.100).

Легко показать, что при помощи замены $U(x) = e^{-cx}$ можно избавиться от параметра c в операторах (3.122), а также в базисных элементах (3.123), которые обозначим через $\vec{b}_1(x),\ldots,\vec{b}_{2k+3}(x)$. Далее, преобразованное инвариантное пространство будет иметь вид:

$$\mathcal{I} = \langle\hat{U}^{-1}(y)\vec{b}_1(z^{-1}(y)),\ldots,\hat{U}^{-1}(y)\vec{b}_{2k+3}(z^{-1}(y))\rangle, \tag{3.126}$$

где $\hat{U}(y) = U(x)|_{x=z^{-1}}$ — матрица из (3.96).

Поскольку нашей целью является построение эрмитовых моделей, то нужно, чтобы уравнение (3.96) решалось в явном виде. Выберем из всех линейно независимых квадратичных форм операторов (3.122), (3.124) такие, при которых матрица $B(x)$ соответствующего гамильтониана (3.125) имеет вид

$$B(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{3} \tilde{\varphi}_i \sigma_i h(x) = g(x) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\sigma} h(x), \tag{3.127}$$

где $g(x)$, $h(x)$ — комплекснозначные скалярные функции, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_1, i\varphi_2, \varphi_3)$ — комплекснозначные константы, которые зависят от параметров α_{ij} (3.88), $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (произведение i перед произвольным параметром выбрано для удобства).

Все возможные линейно независимые квадратичные формы операторов (3.122), (3.124) в классе операторов (3.125) приведены ниже.

$$\begin{aligned}
&Q_4^2 = \partial_x^2, \quad Q_3 Q_4 = e^x \partial_x^2, \quad Q_3^2 = e^{2x}(\partial_x^2 + \partial_x),\\
&Q_3 = e^x \partial_x, \quad \tilde{R}_2 = R_2 - R_7 = Q_1 Q_3 - R_7 = \sigma_1 e^x \partial_x,\\
&\tilde{R}_7 = R_2 + R_7 = Q_1 Q_3 + R_7 = i\sigma_2 e^x \partial_x,\\
&2R_4 = 2R_1 Q_3 = \sigma_3 e^x \partial_x, \quad Q_4 = \partial_x,\\
&2R_3 = 2Q_1 Q_4 = (\sigma_1 + i\sigma_2)\partial_x, \quad 2R_5 = \sigma_3 \partial_x,\\
&2R_6 = (\sigma_1 + i\sigma_2) e^{-x} \partial_x, \quad 2Q_1 = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad 2R_1 = \sigma_3,\\
&2Q_2 = (\sigma_1 + i\sigma_2) c^{-x}.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Соответствующий гамильтониан H (3.88), (3.125) имеет вид

$$\begin{aligned}
H[x] = {} & \alpha_0 Q_4^2 + \alpha_1 Q_3 Q_4 + \alpha_2 Q_3^2 + \beta_0 Q_3 + \beta_1 \tilde{R}_2 + \beta_2 \tilde{R}_7 +\\
& + 2\beta_3 R_4 + \gamma_0 Q_4 + 2\gamma_1 R_3 + 2\gamma_3 R_5 + 2\kappa R_6 + 2\delta_1 Q_1 +\\
& + 2\delta_3 R_1 + 2\varepsilon Q_2 = [\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}]\partial_x^2 + [\alpha_2 e^{2x} +\\
& + \beta_0 e^x + \tilde{\beta}_a \sigma^a e^x + \gamma_0 + \gamma_1(\sigma_1 + i\sigma_2) + \gamma_3 \sigma_3 +\\
& + \kappa(\sigma_1 + i\sigma_2) e^{-x}]\partial_x + \delta_1(\sigma_1 + i\sigma_2) + \delta_3 \sigma_3 +\\
& + \varepsilon(\sigma_1 + i\sigma_2) e^{-x} = \xi(x)\partial_x^2 + [g(x) + \tilde{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\sigma} e^x + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\sigma} +\\
& + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\sigma} e^{-x}]\partial_x + \tilde{\boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} e^{-x},
\end{aligned} \tag{3.129}$$

где

$$\begin{aligned}
&\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}; \quad g(x) = \gamma_0 + \beta_0 e^x + \alpha_2 e^{2x};\\
&\tilde{\beta}_1 = \beta_1, \ \tilde{\beta}_2 = i\beta_2, \ \tilde{\beta}_3 = \beta_3; \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1, \ \tilde{\gamma}_2 = i\gamma_1, \ \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\kappa}_1 = \kappa, \ \tilde{\kappa}_2 = i\kappa, \ \tilde{\kappa}_3 = 0; \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon, \ \tilde{\varepsilon}_2 = i\varepsilon, \ \tilde{\varepsilon}_3 = 0;\\
&\tilde{\delta}_1 = \delta_1, \ \tilde{\delta}_2 = i\delta_1, \ \tilde{\delta}_3 = \delta_3.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Матрица $B(x)$ гамильтониана (3.125), (3.129) будет иметь вид (3.127) в одном из четырех таких случаев:

$$\begin{aligned}
&1. \ \tilde{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}, \ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \lambda \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mu \tilde{\boldsymbol{\beta}};\\
&2. \ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}, \ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \neq \mathbf{0}, \ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mu \tilde{\boldsymbol{\gamma}};\\
&3. \ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}, \ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \neq \mathbf{0};\\
&4. \ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3.131}$$

где λ, μ — некоторые константы. Тогда гамильтониан (3.129) можно записать так:

$$\begin{aligned}
&H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + [g(x) + h(x)\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\sigma}]\partial_x + \tilde{\boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} e^{-x},\\
&h = \omega e^x + \lambda + \mu e^{-x},
\end{aligned} \tag{3.132}$$

причем в приведенных случаях (3.131) параметры $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_1, i\varphi_2, \varphi_3)$, ω, λ, μ принимают, соответственно, значения

$$\begin{aligned}
&1. \ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \ \omega = 1;\\
&2. \ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \ \omega = 0, \ \lambda = 1;\\
&3. \ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}, \ \omega = 0, \lambda = 0, \ \mu = 1;\\
&4. \ h = 0.
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Тогда общее решение уравнения (3.96) имеет вид

$$U(x) = \xi^{1/4}(x) \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{g(x)}{\xi(x)} dx\right] \exp\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\sigma}}{2} \theta(x) dx\right] \Lambda, \tag{3.134}$$

где $\theta(x) = -\int \frac{h(x)}{\xi(x)} dx$, Λ — произвольная невырожденная 2×2-матрица.

С учетом формулы Кемпбелла–Хаусдорфа потенциал (3.100) будет иметь такой вид:

$$V(y) = \Lambda^{-1} \left\{ \frac{1}{16\xi} \left[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\omega^2 \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2) e^{2x} + (4\alpha_0\alpha_1 + \right.\right.$$

$$+ 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\omega\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 +$$
$$+ 2\mu\omega\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \gamma_0^2) - 8\mu\lambda\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 e^{-x} - 4\mu^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 e^{-2x}\big] +$$
$$+ \frac{1}{2\xi}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0\omega + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)e^{2x} + \left(2\alpha_2\mu + \alpha_1\lambda -\right.\right.$$
$$\left. - \beta_0\lambda - \gamma_0\omega - \alpha_0\omega + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)e^x + 2\alpha_1\mu -$$
$$- \beta_0\mu - \gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} +$$
$$\left. + \left(\alpha_0\mu - \gamma_0\mu + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)e^{-x}\right]\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma} +$$
$$+ \left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}\right)\operatorname{ch}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) +$$
$$\left(\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}\right)e^{-x}\operatorname{ch}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) +$$
$$+ \frac{i([\tilde{\boldsymbol{\delta}} \times \tilde{\boldsymbol{\varphi}}], \boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}}\operatorname{sh}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) +$$
$$\left. + \frac{i([\tilde{\varepsilon} \times \tilde{\boldsymbol{\varphi}}], \boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}}e^{-x}\operatorname{sh}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)\right\}\Lambda\Bigg|_{x=f^{-1}(y)}. \qquad (3.135)$$

Тем самым построили оператор Шредингера (3.99).

3.6.2. Семейство эрмитовых потенциалов (3.135)

Здесь мы опишем полное многопараметрическое семейство потенциалов (3.135), которые сводятся к эрмитовым. Заметим, что этот потенциал имеет такую структуру:

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \sum_{i=1}^{5} v_i(y)\Lambda^{-1}\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}\Lambda + v_0(y), \qquad (3.136)$$

причем v_i — линейно независимые функции, $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)})$ — комплекснозначные постоянные векторы, компоненты которых зависят от параметров α_i, $\tilde{\varphi}_i$, ε_i, δ_i из формул (3.130), (3.133). Для того чтобы потенциал (3.136) был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}$ одновременно сводились к эрмитовым при помощи некоторого преобразования Λ. Условия такого сведения приведены в лемме 3.2, согласно которой имеют место такие условия:

(i) матрица $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$ сводится к эрмитовой при помощи преобразований $A \to \Lambda^{-1}A\Lambda$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a}^{(1)})^2 > 0$ (в частности, это означает, что $(\mathbf{a}^{(1)})^2 \in \mathbb{R}$);

(ii) матрицы $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{a}^{(2)} \neq \lambda\mathbf{a}^{(1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, сводятся одновременно к эрмитовым тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{a}^{(1)})^2 > 0, \quad (\mathbf{a}^{(2)})^2 > 0, \quad [\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}]^2 > 0, \quad \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)} \in \mathbb{R};$$

(iii) матрицы $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}(i \neq 1, 2)$, где $\mathbf{a}^{(2)} \neq \lambda\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(i)} \neq \mu\mathbf{a}^{(2)}$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, сводятся одновременно к эрмитовым тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{a}^{(1)})^2 > 0, \quad (\mathbf{a}^{(2)})^2 > 0, \quad [\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}]^2 > 0, \quad \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)} \in \mathbb{R}.$$
$$\{\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(i)},\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{a}^{(i)},\ ([\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}]\mathbf{a}^{(i)})\} \subset \mathbb{R}.$$

Перейдем непосредственно к отбору операторов Шредингера (3.99), которые сводятся к эрмитовым. В процессе отбора в зависимости от параметров (3.130) возникают разные классы этих операторов с эрмитовой матрицей $V(y)$. Это, в свою очередь, дает полное описание точно решаемых матричных моделей (3.132), которые можно свести к эрмитовым матричным операторам Шредингера. Учитывая лемму 3.2, ниже мы приводим окончательные результаты: условия на параметры, явный вид точно решаемых эрмитовых операторов Шредингера, а также соответствующие преобразования Λ. После этого мы, в качестве примера, подробно останавливаемся на выведении соответствующих формул случая 1. В нижеприведенных формулах запись $[A] \wedge [B]$ означает конъюнкцию двух утверждений A и B.

Дальнейший анализ показал, что эрмитовые модели получаются только тогда, когда в (3.131), (3.133) $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \omega = 1, \mu = 0$.

Случай 1.

$$[\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0,\ \varepsilon \neq 0,\ \beta_1 \neq \beta_2] \wedge [\{\lambda, \gamma_0, \beta_0, \varepsilon(\beta_1 - \beta_2),$$
$$\delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \beta_3\delta_3, \delta_3\} \subset \mathbb{R}]$$

$$\wedge\left[\mu = \alpha_0 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \right.$$

$$\left. = \alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = 0\right],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} +$$

$$+ (8\alpha_1\gamma_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}})e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} + \gamma_0^2)] +$$

$$+ \left(P\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + \Omega\right) + \frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}e^{-x} \times\right.$$

$$\left. \times \cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\right)\sigma_1 + \left(P\sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + \Omega\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}e^{-x}\sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\right)\sigma_3\right|_{x=z^{-1}(y)},$$

где

$$P = \sqrt{\delta_3^2 - \frac{(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}})^2}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \cos\Omega = \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{P\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \sin\Omega = \frac{\delta_3}{P},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}\right) \cdot \exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Здесь и дальше мы обозначаем $f^{-1}(y)$ как обратную функцию к (3.97), $\theta(x)$ — функция, которая определяется формулой (3.134).

Случай 2.

$$[\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0,\ \varepsilon = 0,\ \beta_1 \neq \beta_2, (\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}})^2 - \tilde{\boldsymbol{\delta}}^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 > 0] \wedge [\lambda \in \mathbb{R}].$$

Подслучай 2.1.

$$\left[\delta_3 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \alpha_1\lambda - \beta_0 - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \right.$$

$$\left. = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = 0\right] \wedge [\gamma_0, \beta_0 \in \mathbb{R}],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\big[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 -$$

$$- 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} + (4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 -$$

$$- 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma_0^2)] +$$

$$+ \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_1 + \right.$$

$$\left.\left. + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_3\right]\right|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}\right)\exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Подслучай 2.2.

$$\left[\delta_3 = 0,\ \gamma_0 = -\alpha_0,\ \lambda = -2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right] \wedge [\gamma_0,\ i\beta_0 \in \mathbb{R}],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\big[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 -$$

$$- 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} + (4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^x -$$

$$- 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma_0^2)] + \frac{i\lambda\beta_0}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\sigma_2 e^x +$$

$$+ \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_1 + \right.$$

$$\left.\left. + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_3\right]\right|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}\right)\exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Подслучай 2.3.

$$[\delta_1 = 0, \beta_1^2 - \beta_2^2 \neq 0] \wedge \left[\left\{ i\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right), \right.\right.$$

$$i\left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),\ i\left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),$$

$$\left.\left. 2\alpha_2\gamma_0 - \beta_0^2,\ \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0,\ \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R}\right],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\big[\big(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 -$$

$$- 4\tilde{\boldsymbol\beta}^2\big)e^{2x} + \big(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 -$$

$$- 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2\big)e^x - 4\big(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 + \gamma_0^2\big)\big] +$$

$$+ \frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^{2x} + \right.$$

$$+ \left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^x +$$

$$\left. + \left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\right] i\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^{\mathbf{2}}}\sigma_2 +$$

$$+ \frac{\delta_3\sqrt{\beta_1^2 - \beta_2^2}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^{\mathbf{2}}}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3 - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1\right]\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu\sigma_3)\exp(\chi\sigma_1),$$

$$e^{2\nu} = \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}}, \quad e^{2\chi} = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} - \beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} + \beta_3}}.$$

Подслучай 2.4.

$$[\delta_1, \delta_3 \neq 0] \wedge \left[\left\{ i\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right), \right.\right.$$

$$i\left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),\ i\left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),$$

$$\left.\left. 2\alpha_2\gamma_0 - \beta_0^2,\ \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0, \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R}\right],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\big[\big(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 -$$

$$- 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol\beta}^2\big)e^{2x} + \big(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 -$$

$$- 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2\big)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 + \gamma_0^2)\big] +$$

$$+ \frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^{2x} + \right.$$

$$+ \left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^x +$$

$$\left. + \left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\right] i\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\sigma_2 +$$

$$+ \sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol\delta}^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 - (\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta})^2}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1 - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3\right]\Bigg|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu\vec{\alpha}\vec{\sigma}) \cdot \exp(\chi\sigma_3), \quad \boldsymbol\alpha = \frac{\delta_3\tilde{\boldsymbol\beta} - \beta_3\tilde{\boldsymbol\delta}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}},$$

$$e^{2\nu\vec{\alpha}^2} = \sqrt{\frac{\delta_1(\beta_1 - \beta_2) - \sqrt{\delta_3(\beta_1 - \beta_2)[\delta_3(\beta_1 + \beta_2) - 2\delta_1\beta_3]}}{\delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \sqrt{\delta_3(\beta_1 - \beta_2)[\delta_3(\beta_1 + \beta_2) - 2\delta_1\beta_3]}}}.$$

Величина χ определена таким образом. При действии преобразования Λ_1 на $\dfrac{\tilde{\boldsymbol\beta}^2\tilde{\boldsymbol\delta}\boldsymbol\sigma-(\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta})\tilde{\boldsymbol\beta}\boldsymbol\sigma}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}$ получаем некоторую матрицу $\mathbf{b}\boldsymbol\sigma$. Компоненты вектора $\mathbf{b}=(b_1,b_2,0)$ связаны с χ таким соотношением:

$$e^{2\chi}=\sqrt{\frac{ib_1+b_2}{ib_1-b_2}}.$$

В случае когда параметры не удовлетворяют вышеуказанным условиям (случаи 1, 2), полученные эрмитовые операторы Шредингера имеют диагональный вид, а именно

$$\hat{H}[y]=\partial_y^2+h(x)+g(x)\sigma_3|_{x=f^{-1}(y)}. \tag{3.137}$$

В целом процедура получения вышеприведенных формул для гамильтонианов $\hat{H}[y]$, которые не принадлежат классу (3.137), очень громоздкая. Поэтому остановимся на основных этапах вывода соответствующей формулы на примере 1, не вдаваясь в технические подробности. В этом случае, когда $\varepsilon\neq0$, с помощью леммы 3.2 можно доказать, что $\tilde{\boldsymbol\beta}^2<0$ и $\beta_1\neq\beta_2$.

Рассмотрим векторы $\mathbf{a}^{(i)}$ в таких обозначениях:

$$\mathbf{a}^{(1)}=\frac{\tilde{\boldsymbol\varepsilon}\times\tilde{\boldsymbol\beta}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}},\quad \mathbf{a}^{(2)}=\tilde{\boldsymbol\varepsilon}-\frac{\tilde{\boldsymbol\varepsilon}\tilde{\boldsymbol\beta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\tilde{\boldsymbol\beta},\quad \mathbf{a}^{(3)}=\frac{\tilde{\boldsymbol\delta}\times\tilde{\boldsymbol\beta}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}},$$
$$\mathbf{a}^{(4)}=\tilde{\boldsymbol\delta}-\frac{\tilde{\boldsymbol\delta}\tilde{\boldsymbol\beta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\tilde{\boldsymbol\beta},\quad \mathbf{a}^{(5)}=\tilde{\boldsymbol\beta}.$$

Покажем, что векторы $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}\neq0$, то есть они удовлетворяют условию леммы. Действительно, если бы один из них равнялся нулю, то можно было бы показать, что $\tilde{\boldsymbol\beta}=\nu_1\tilde{\boldsymbol\varepsilon}\neq0$. Поскольку $\tilde{\boldsymbol\delta}=(\delta_1,i\delta_1,\delta_3)$, то прямое вычисление показывает, что векторы $\mathbf{a}^{(3)}=\nu_2\tilde{\boldsymbol\varepsilon}$, $\mathbf{a}^{(4)}=\nu_3\tilde{\boldsymbol\varepsilon}$. Тогда потенциал (3.135) имеет вид

$$V(y)=f_1(x)+g(x)\Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol\varepsilon}\boldsymbol\sigma\Lambda.$$

Поскольку $\tilde{\boldsymbol\varepsilon}^2=0$, то, в силу пункта (i), потенциал будет эрмитовым, когда $g(x)\equiv0$, а значит, он принадлежит классу (3.137). Отсюда следует, что векторы $\mathbf{a}^{(i)}(i=1,2)$ ненулевые.

Воспользовавшись условиями (ii), которые накладываются на векторы $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, получаем, что $\varepsilon(\beta_1-\beta_2)\in\mathbb{R}$.

Из пункта (iii), в случае применения к векторам $\mathbf{a}^{(3)}$, $\mathbf{a}^{(4)}$, следует условие

$$\delta_3,\ \delta_1(\beta_1-\beta_2)+\beta_3\delta_3\subset\mathbb{R}.$$

Для того чтобы оператор (3.136) был эрмитовым, необходимо, чтобы функция $v_0(y)$ была действительной, поскольку след матриц $\Lambda^{-1}\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol\sigma\Lambda$ нулевой. Учитывая вид $v_0(y)$ из (3.135), а также применяя пункт (iii) к вектору $\mathbf{a}^{(5)}$, получаем остальные условия, которые накладываются на параметры в случае 1.

Сначала находим преобразование $\Lambda_1=\exp(\boldsymbol\alpha\boldsymbol\sigma)$, которое сводит матрицу $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol\sigma$ к виду $\dfrac{\varepsilon(\beta_1-\beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\sigma_3$. После применения формулы Хаусдорфа–Кемпбелла получаем условия, которые накладываются на неизвестные параметры $\boldsymbol\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, а также само преобразование Λ_1. Эти преобразования сводят матрицу $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol\sigma$ в некоторую матрицу $\mathbf{b}^{(2)}\boldsymbol\sigma$. Далее ищем преобразование Λ_2 вида $\exp(\nu\sigma_3)$, которое не меняет матрицу σ_3. Параметр ν находим из условия, что матрица $\mathbf{b}^{(2)}\boldsymbol\sigma$ должна переходить в $\dfrac{\varepsilon(\beta_1-\beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\sigma_1$. После применения преобразования $\Lambda=\Lambda_1\cdot\Lambda_2$ к остальным матрицам $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol\sigma$, $i\neq1,2$, приходим к эрмитовому виду потенциала (3.135).

В качестве упражнения предлагаем читателям использовать другие известные [2] представления четырехмерных разрешимых алгебр Ли для построения многопараметрических семейств точно решаемых матричных моделей Шредингера.

Литература

[1] Абраменко А.А., Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — **38**, №4. — С. 482–489.

[2] Абраменко А.А. Четырехмерные алгебры Ли и точно решаемые матричные модели // Вестник Киевского университета. — 1999. — №3. — Р. 11–17.

[3] Адо И.Д. Представление алгебр Ли матрицами // Усп. матем. наук. — 1947. — **2**, вып. 6. — С. 159–173.

[4] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. — 1987. — **293**, №5. — С. 1033–1035.

[5] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства и точные решения уравнений нелинейной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. — Новосибирск, 1987. — С. 24–27.

[6] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 34 / Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1989. — С. 3–83.

[7] Баранник А.Ф., Марченко В.А. О точных решениях нелинейного уравнения Шредингера в пространстве Минковского $R_{1,2}$ // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — №9. — С. 5–8.

[8] Баранник Л.Ф. О симметрийной редукции и точных решениях уравнения Лиувилля // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1989. — №12. — С. 3–5.

[9] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, №4. — С. 411–416.

[10] Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №5. — С. 579–584.

[11] Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и мех. — 1952. — **16**, вып. 1. — С. 67–78.

[12] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

[13] Биркгоф Г. Гидродинамика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 400 с.

[14] Бойко В.Н., Попович В.Е. Групповая классификация галилей-инвариантных уравнений высокого порядка // Труды Института математики НАН Украины. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2001. — **36**. — С. 45–50.

[15] Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошн. среды, вып. 7. — Новосибирск, 1971. — С. 212–214.

[16] Бытев В.О. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. — 1975. — **3**, №5. — С. 13–17.

[17] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 528 с.

[18] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова думка, 1968. — 354 с.

[19] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. — М.: Мир. — 1981. — 336 с.

[20] Гурса Е. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. — Киев: Радянська школа, 1941. — 415 с.

[21] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — **22**, №6. — С. 1393–1400.

[22] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двухмерном и трехмерном случаях // Дифф. уравнения. — 1983. — **19**, №7. — С. 1215–1223.

[23] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз. — 1963. — 860 с.

[24] Дынкин Е.Б. Структура полупростых алгебр // Усп. матем. наук. — 1947. — **2**. — С. 59–127.

[25] Жданов Р.З., Лагно В.И. Групповая классификация уравнений теплопроводности с нелинейным источником // Доклады НАН Украины.—2000. — №3. — С. 12–16.

[26] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. — М.: Знание. — 1989. — 48 с.

[27] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства волновых уравнений для частиц с нулевой массой // Докл. АН СССР. — 1968. — **178**, №3. — С. 566–568.

[28] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.

[29] Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. — Новосибирск: Наука, 1972. — 200 с.

[30] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[31] Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнений Дирака // Докл. АН СССР. — 1969. — **185**, №6. — С. 1226–1228.

[32] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. — М.: Знание.— 1990. — 48 с.

[33] Катков В.Л. Групповая классификация решений уравнений Хопфа // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1965. — №6. — С. 105–106.

[34] Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятности // Успехи мат. наук. — 1938. — **5**. — С. 5–41.

[35] Костенко В.Г. Интегрирование некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. — Львов: Изд-во Льв. ун-та, 1959. — 22 с.

[36] Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

[37] Лагно В.И., Самойленко А.М. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. — 2002. — **38**, №3. — С. 365–372.

[38] Ленский Э.В. О групповых свойствах уравнений движения нелинейной вязко-пластической среды // Вестн. Моск. ун-та. Мат., Мех. — 1966. — №5. — С. 116–125.

[39] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — Минск: Вышейшая школа, 1974. — 766 с.

[40] Меньшиков В.М. Решения уравнения двухмерной газовой динамики типа простых волн // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1969. — №3. — С. 129–134.

[41] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир. — 1981. — 344 с.

[42] Морозов В.В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1958. — №4 (5). — С. 161–171.

[43] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — №3 (34). — С. 99–106.

[44] Мубаракзянов Г.М. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — №4 (35). — С. 104–116.

[45] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — №1 (32). — С. 114–123.

[46] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука. — 1978. — 400 с.

[47] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. — 1959. — **125**, №3. — С. 492–495.

[48] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Ж. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — №3. — С. 126–145.

[49] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во СОА СССР, 1962. — 238 с.

[50] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений механики // Механика сплошн. среды и родственные пробл. анализа. — М.: Наука, 1972. — С. 381–393.

[51] Овсянников Л.В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1958. — **118**, №3. — С. 439–442.

[52] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981. — 368 с.

[53] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1966. — 140 с.

[54] Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ дифференциальных уравнений механики // Общая механика. Т. 2. / Итоги науки и техники. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1975. — С. 5–52.

[55] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир. — 1989. — 639 с.

[56] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука. — 1977. — 664 с.

[57] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1970. — 332 с.
[58] Постников М.М. Лекции по геометрии, Семестр V, Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982. — 448 с.
[59] Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье–Стокса, описывающие движения со свободной границей // Докл. АН СССР. — 1972. — **202**, №2. — С. 302–305.
[60] Пухначев В.В. Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. — 1987. — **294**, №3. — С. 535–538.
[61] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. — М.: Высшая школа, 1989. — 383 с.
[62] Свирщевский С.Р. Групповая классификация и инвариантные решения нелинейных полигармонических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1993. — **29**, №10. — С. 1772–1781.
[63] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1967. — 440 с.
[64] Серов М.И., Чернига Р.М. Симметрии Ли и точные решения нелинейных уравнений теплопроводности с конвективным членом // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, №9. — С. 1262–1270.
[65] Серов Н.И. Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений // Теорет.-алгебраические иссл. в мат. физике. — Киев: Ин-т математики, 1981. — С. 59–63.
[66] Серова М.М. О некоторых условно инвариантных решениях уравнения Буссинеска // Симметрия и решения уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1989. — С. 71–73.
[67] Серова М.М. Условная инвариантность уравнения Буссинеска относительно алгебры Галилея // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1988. — С. 92–94.
[68] Серова М.М. О точных решениях уравнения Буссинеска // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1983. — С. 55–58.
[69] Соколов Ю.Д. О некоторых частных решениях уравнения Буссинеска // Укр. мат. журн. — 1956. —**8**, №1. — С. 48–54.
[70] Сухарев М.Г. Инвариантные решения уравнений, описывающих движение жидкости и газа в длинных трубопроводах // Докл. АН СССР. — 1967. — **175**, №4. — С. 781–787.

[71] Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио. — 1977. — 488 с.
[72] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. — М.: Мир. — 1984. — 738 с.
[73] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №1. — С. 116–123.
[74] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгруповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1991. — 304 с.
[75] Фущич В.И., Бойко В.Н. Галилей-инвариантные уравнения типа Бюргерса и Кортевега-де Фриза высокого порядка // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, №12. — С. 1589–1601.
[76] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея // Докл. АН УССР. — 1989. — №4. — С. 19–34.
[77] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре // Докл. АН УССР. — 1989. — №5. — С. 46–53.
[78] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. — Киев: Наукова думка. — 1992. — 288 с.
[79] Фущич В.И., Жданов Р.З. Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака // Физика элемент. частиц и атомн. ядра. — 1988. — **19**, вып. 5. — С. 1154–1196.
[80] Фущич В.И., Лагно В.И. Линейные и нелинейные представления групп Галилея в двухмерном пространстве-времени // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, №3. — С. 414–423.
[81] Фущич В.И., Наконечный В.В. Теоретико-алгебраический анализ уравнений Ламе // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, №2. — С. 267–273.
[82] Фущич В.И., Никитин А.Г. Групповые свойства уравнений Максвелла // Теоретико-груповые методы в математической физике. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. — С. 45–80.
[83] Фущич В.И., Никитин А.Г. О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения // Докл. АН СССР. — 1978. — **238**, №1. — С. 46–49.
[84] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука. — 1990. — 400 с.

[85] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наукова думка, 1983. — 200 с.

[86] Фущич В.И., Сегеда Ю.Н. О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики // Укр. мат. журн. — 1976. — **28**, №6. — С. 844–849.

[87] Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна–Инфельда // Докл. АН СССР. — 1981. — **263**, №3. — С. 582–586.

[88] Фущич В.И., Серов Н.И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера // Докл. АН СССР. — 1983. — **273**, №3. — С. 543–546.

[89] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова думка. — 1989. — 336 с.

[90] Фущич В.И., Цифра И.М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теорет. и мат. физика. — 1985. — **64**, №1. — С. 41–50.

[91] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир. — 1964. — 534 с.

[92] Черкасов И.Д. О преобразовании диффузионного процесса в винеровский // Теория вероятностей и ее применения. — 1957. — **2**. вып. 3. — С. 384–388.

[93] Шевалле К. Теория групп Ли. Т.3. Общая теория алгебр Ли. — М.: ИЛ. — 1958. — 316 с.

[94] Штелень В.М. Групповой анализ нелинейных дифференциальных уравнений, связанных с уравнением Шредингера // Укр. мат. журн. — 1981. — **26**, №2. — С. 323–326.

[95] Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H., Kovalev V.F. Water redistribution in irrigated soil profiles: invariant solutions of the governing equation // Nonlinear Dynamics. — 1997. — **13**. — P. 395–409.

[96] Barannik L.F., Lahno H.O. Symmetry reduction of the Bousinesq equation to ordinary differential equations // Rep. Math. Phys. — 1996. — **38**, №1. — P. 1–9.

[97] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Aplicandae Math. — 2001. — **69**, №1. — P. 43–94.

[98] Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg-de Vries Equations // Proceedings of the Second International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1997. — **1**. — P. 122–129.

[99] Bluman G.W. On the transformation of diffusion processes into the Wiener provess // J. Appl. Math. — 1980. — **39**. — P. 238–247.

[100] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. — Berlin: Springer. — 1974. — 332 p.

[101] Bluman G., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u+b)^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ // J. Math. Phys. — 1980. — **21**, №5. — P. 1019–1023.

[102] Bluman G., Kumei S. Symmetries and differential equations. — New York: Springer, 1989. — 400 p.

[103] Boussinesq J. Recherches theoriques sur l’ecoulement des nappes d’eau infiltres daus le sot et sur le debit des sources // J. Math. Pures et Appl. — 1904. — **10**, №1. — P. 5–78.

[104] Brihaye Y., Giller S., Gonera C., Kosiński P. The structure of quasi-exactly solvable systems // J. Math. Phys. — 1995. — **36**, №8. — P. 4340–4349.

[105] Cherniha R. and Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. Jnl. of Appl. Math.— 1998. — **9**. — P. 527–542.

[106] Ciconga G., Vitali D. Classification on the extended symmetries of the Fokker-Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — **23**. — L85–L88.

[107] CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Editor N. Ibragimov. — CRC Press. — 1994. — 400 p.

[108] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. — 1994. — **190**. — P. 149–154.

[109] El-labany S.K., Elhanbaly A.M. and Sabry R. Group classification and symmetry reduction of variable coefficient nonlinear diffusion-convection equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — **35**. — P. 8055–8063.

[110] Fedorchuk V. Symmetry reduction and exact solutions of the Euler–Lagrange–Born–Infeld, multidimensional Monge–Ampere and eikonal equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — **2**, №3–4. — P. 329–333.

[111] Finkel F., González–López A., Rodríguez M.A. Quasi-exactly solvable spin 1/2 Schrödinger operators // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — **38**, №6. — P. 2795–2811.

[112] Finkel F., González–López A., Rodríguez M.A. Quasi-exactly solvable Lie superalgebras of differential operators // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — **30**, №19. — P. 6879–6892.

[113] Fokker A.D. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld // Annalen der Physik. — 1914. — **43**. — P. 810–820.

[114] Fushchych W.I., Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear systems of second-order equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — **28**. — P. 5569–5579.

[115] Fushchich W.I., Cherniha R.M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1985. — **18**. — P. 3491–3503.

[116] Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. — Dordrecht: Reidel, 1987. — 214 p.

[117] Fushchych W.I., Nikitin A.G. Symmetry of equations of quantum mechanics. — New York: Allerton Press, 1994. — 460 p.

[118] Fushchich W., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. — **1**, №1. — P. 75–98.

[119] Fushchych W., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. II // J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. — **1**, №2. — P. 158–188.

[120] Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**, №16. — P. 929–933.

[121] Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — **16**, №15. — P. 3645–3656.

[122] Fushchich W.I., Shtelen W.M. Conformal symmetry and new exact solutions of SU_2 Yang–Mills theory // Lett. Nuovo Cim. — 1983. — **38**, №2. — P. 37–40.

[123] Fushchich W.I., Shtelen W.M. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett. Nuovo Cim. — 1982. — **34**, №16. — P. 498–502.

[124] Fushchich W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[125] Fushchich W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z. On the conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions // Phys. Lett. B. — 1985. — **159**, №2–3. — P. 189–191.

[126] Fushchych W.I., Yehorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotations group $O(n)$ and its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — **28**, №1. — P. 69–92.

[127] Fushchych W., Zhdanov R. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publisher, 1997. — 383 p.

[128] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Reports. — 1989. — **172**, №4. — P. 123–174.

[129] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. II. Exact solutions // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — **22**, №5. — P. 469–497.

[130] Gandarias M.L. Classical point symmetries for a porous medium equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — **29**. — P. 607–633.

[131] Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. Quasi-exactly solvable Lie algebras of differential operators in two complex variables // J. Phys. A: Math. Gen. — 1991. — **24**, №17. — P. 3995–4008.

[132] Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. New quasi-exactly solvable Hamiltonians in two dimensions // Commun. Math. Phys. — 1994. — **159**, №3. — P. 503–537.

[133] Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. Quasi-exact solvability. Lie algebras, cohomology, and new applications to quantum mechanics // Contemp. Math. — 1994. — **160**. — P. 113–140.

[134] Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. Lond. Math. Soc., III. — 1992. — **64**, №2. — P. 339-368.

[135] Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P. Normalizability of one-dimensional quasi-exactly solvable Schrödinger operators // Commun. Math. Phys. — 1993. — **153**, №1. — P. 117–146.

[136] Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. — 1984. — **25**, №4. — P. 791–806.

[137] Grundland A.M., Tuszynski J.A. Symmetry breaking and bifurcation solutions in the classical complex Φ^6 field theory // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**, №19. — P. 6243–6258.

[138] Ibragimov N.H. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. — Chichester, New York: John Wiley. — 1999. — 347 p.

[139] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. — 1991. — **32**, №11. — P. 2988–2995.

[140] Khater A.H., Moussa M.H.M., Abdul-Aziz S.F. Potential symmetries and invariant solutions for generalized one-dimensional Fokker–Planck equation // Physika A. — 2002. — **304**. — P. 395–408.

[141] Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation // Int. J. Nonlin. Mech. — 2001. — **36**. — P. 987–997.

[142] Lagno V.I. Group analysis of some class of nonlinear evolution equations // Proc. of the Intern Conf. “Modern Group Analysis for the New Millennium”. — Ufa. — 2001. — P. 105–110.

[143] Lahno V.I. On new Galilei-invariant equations in two-dimensional space-time // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — **31**, №42. — P. 8511–8519.

[144] Lahno V. On new relativistically invariant nonlinear equations in two-dimensional space-time // Rep. on Math. Phys. — 1998. — **41**, №3. — P. 271–277.

[145] Lahno V.I. Realizations of the Poincaré algebra and Poincaré-invariant equations in three-dimensional space-time // Rep. on Math. Phys. — 2000. — **46**, №1-2. — P. 137–142.

[146] Lahno V., Onyshchenko A. The Ovsjannikov’s theorem on group classification of a linear hypperbolic type partial differential equation revisited // Proc. of Institute of Math. of the NAS of Ukraine. — 2000. — **30**. — P. 141–145.

[147] Lahno V., Zhdanov R., Fushchych W. Symmetry reduction and exact solutions of the Yang–Mills equations // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — **2**, №1. — P. 51–72.

[148] Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten // Math. Ann. — 1885. — **25**, №1. — P. 71–151.

[149] Lie S. Classification und Integration von gewönlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann. — 1888. — **32**. — P. 213–281.

[150] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen // Arch. Math. — 1881. — **6**, Helf 3. — P. 328–368.

[151] Lie S. Vorlesungen über continuierliche Gruppen. — Leipzig: Teubner, 1893. — 805 p.

[152] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: B.G. Teubner. — 1891. — 400 p.

[153] Lie S., Engel F. Theorie der transformationsgruppen. Bd. 1–3. — Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.

[154] Lie S. — Gesammelte Abhandlungen, Leipzig: B.G. Teubner. — 1924. — **5**. — P. 767–773.

[155] Lie S. — Gesammelte Abhandlungen, Leipzig: B.G. Teubner. — 1924. — **6**. — P. 1–94.

[156] Miyadzawa T. Theory of the one-variable Fokker–Planck equation // Phys. Rev. A. — 1989. — **39**, №3. — P. 1447–1468.

[157] Morgan A.G. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations // Quart. J. Math. Oxford. — 1952. — **3**, №12. — P. 250–259.

[158] Nariboli G.A. Group-invariant solutions of the Fokker–Planck equation // Stochastic Processes and their Applications. — 1977. — №5. — P. 157–171.

[159] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — **118**, №4. — P. 172–176.

[160] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. — 1977. — **18**, №7. — P. 1449–1455.

[161] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // J. Math. Phys. — 1975. — **16**, №8. — P. 1597–1624.

[162] Planck M. Sitzungsber. — Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. — 1917. — 325 p.

[163] Popovych R.O., Boyko V.M. Differential invariants and aplication to Riccati type equation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — V. 43, Part 1. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2002. — P. 184–193.

[164] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. — 1987. — **12**, №4. — P. 71–87.

[165] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys. — 1990. — **31**, №5. — P. 1095–1105.

[166] Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schödinger group // J. Math. Phys. — 1993. — **34**, №2. — P. 558–570.

[167] Risken H. The Fokker–Planck equation. — Berlin: Springer, 1989. — 472 p.

[168] Rudra P. Symmetry classes of the Fokker–Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. —1990. — **23**. — L1663–L1670.

[169] Sastri C.C.A., Dann K.A. Lie symmetries of some equations the Fokker–Planck type // J. Math. Phys. —1985. — **26**, №12. — P. 3042–3047.

[170] Shifman M.A. New findings in quantum mechanics (partial algebraization of the spectral problem) // Int. J. Mod. Phys. A — 1989. — **5**. — P.2897–2952.

[171] Shifman M.A., Turbiner A.V. Quantal problems with partial algebraization of the spectrum // Commun. Math. Phys. — 1998. — **126**. — P.347–365.

[172] Shtelen W.M., Stogny V.I. Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — **22**. — L539–L543.

[173] Spichak S., Stognii V. One-dimentional Fokker–Planck equation invariant under four- and six-parametrical group // J. Math. Phys. — 1999. — **32**, №7. — P. 8341–8353.

[174] Spichak S.V., Zhdanov R.Z. On algebraic classification of Hermitian quasi-exactly solvable matrix Schrödinger operators on line // J. Phys. A. — 1999. — **32**, №20. — P. 3815–3831.

[175] Suhubi E.S., Bakkaloğlu A. Group properties and similarity solutions for a quasi-linear wave equation in the plane // Int. J. Nonlin. Mech. — 1991. — **26**, №5. — P. 567–584.

[176] Torrisi M., Valenti A. Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 1990. — **38**, №2. — P. 445–458.

[177] Turbiner A.V. Quasi-exactly solvable problems and $sl(2)$ algebra // Commun. Math. Phys. — 1988. — **118**. — P. 467–474.

[178] Turbiner A.V. Lie-algebras and linear operators with invariant subspaces. Lie algebras, cohomology, and new applications to quantum mechanics // Contemp. Math. — 1994. — **160**. — P. 263–310.

[179] Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. — 1988. — **29**. — P. 2139–2144.

[180] Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimensional six // J. Math. Phys. — 1990. — **31**. — P. 1344–1350.

[181] Ushveridze A.G. Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics. — Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994. — 465 p.

[182] Ushveridze A.G. Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics // Sov. J. Part. Nucl. — 1989. — **20**. — P. 504–528.

[183] Winternitz P., Grundland A.M., Tuszynski J.A. Exact solutions of the multidimensional classical Φ^6 field equations obtained by symmetry reduction // J. Math. Phys. — 1987. — **28**, №9. — P. 2194–2212.

[184] Wolf F. Lie algebraic solutions of linear Fokker–Planck equations // J. Math. Phys. — 1988. — **29**, №2. — P. 305–307.

[185] Zaslavskii O.B., Ulyanov V.V. New classes of exact solutions of the Schrödinger equation and potential-field description of spin systems // Sov. Phys. JETF. — 1984. — **60**. — P. 991–996.

[186] Zaslavskii O.B., Ulyanov V.V. Periodic effective potentials for spin systems and new exact solutions of one-dimensional Schrödinger equation for the energy bands // Theor. Math. Phys. — 1987. — **71**. — P. 520–528.

[187] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — **32.** — P. 7405–7418.

[188] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation // Physica D. — 1998. — **122**. — P. 178–186.

[189] Zhdanov R.Z., Lagno V.I. On separability criteria for a time-invariant Fokker–Planck equaiton // Докл. НАН Украины. — 1993. — №2. — P. 18–21.

[190] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Symmetry and exact solutions of the Maxwell and $SU(2)$ Yang–Mills equations // Modern Nonlinear Optics, Part 2, Second Edition, Advances in Chemical Physics, Vol. 119. — John Wiley and Sons. — 2001. — P. 269–351.

[191] Zhdanov R.Z. On quasi-exactly solvable matrix models // Phys. Lett. B. — 1997. — **405**, №3/4. — P. 253–256.

[192] Zhdanov R.Z. On algebraic classification of quasi-exactly solvable matrix models // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — **30**, №24. — P. 8761–8770.

Указатель обозначений

Предметный указатель

Лагно Виктор Иванович
Спичак Станислав Викторович
Стогний Валерий Иванович

Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 31.03.2004. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,25. Уч. изд. л. 23,56.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1. Заказ №

АНО “Институт компьютерных исследований”
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru