W.I. Fushchych
Scientific Works

Volume 4
1990–1992

Editor
Vyacheslav Boyko

Kyiv 2002

Редукция и точные решения уравнения Гамильтона–Якоби

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Проведена классификация с точностью до эквивалентности подалгебр алгебры $AC(1,4)$, являющейся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. С использованием подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$ построены анзацы, редуцирующие уравнение Гамильтона–Якоби к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены широкие классы точных решений уравнения Гамильтона–Якоби. Исследуется также зависимость между уравнениями Гамильтона–Якоби и эйконала.

Введение

В настоящей работе изучается уравнение Гамильтона–Якоби

$$u_t + \frac{1}{2m}(\nabla u)^2 = 0, \tag{1.1}$$

где $u = u(t,\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, m — постоянная (масса частицы). Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1.1) является конформная алгебра $AC(1,4)$, являющаяся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. Это позволяет использовать подалгебры алгебры $AC(1,4)$ для редукции и нахождения точных решений уравнения (1.1). Работа состоит из 7 параграфов. В § 1 выделяются подалгебры алгебры $AC(1,4)$, которые позволяют находить вещественные решения уравнения (1.1), а также исследуется зависимость между уравнением Гамильтона–Якоби и релятивистским уравнением Гамильтона

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1. \tag{1.2}$$

В § 2 проведена классификация подалгебр алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-еквивалентности. Две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются $C(1,4)$-эквивалентными, если с точностью до $C(1,4)$-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами. В § 3 для каждой подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$ находится полная система ее инвариантов. Это позволяет в §§ 4–7 построить анзацы, редуцирующие уравнение (1.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений получены широкие классы точных решений уравнения (1.1).

§ 1. Алгебра инвариантности уравнения Гамильтона–Якоби

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения Гамильтона–Якоби является конформная алгебра $AC(1,4)$ [1], обладающая базисом

$$J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad P_a = \partial_a, \quad P_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + m\partial_u),$$

Препринт 90.41, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, 40 с.

$$P_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 - m\partial_u), \quad D = -(t\partial_0 + x^a\partial_a + u\partial_u),$$
$$J_{04} = t\partial_0 - u\partial_u, \quad J_{0a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$
$$J_{a4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\partial_0 + \left(t - \frac{1}{m}\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$
$$K_0 = -\sqrt{2}\left[\left(t^2 + \frac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)x^a\partial_a + \left(\frac{m}{2}\vec{x}^{\,2} + \frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$
$$K_4 = \sqrt{2}\left[\left(t^2 - \tfrac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0 + \left(t - \tfrac{1}{m}u\right)x^a\partial_a + \left(\tfrac{m}{2}\vec{x}^{\,2} - \tfrac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$
$$K_a = -2x_aD + \left(\frac{2}{m}tu - \vec{x}^{\,2}\right)P_a,$$

где $\vec{x}^{\,2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $(a, b = 1, 2, 3)$.

Алгебра $AC(1,4)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1,4) = \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle \supset\!\!\!\!+ AO(1,4)$, где $AO(1,4) = \langle J_{\mu\nu} \,|\, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, 4\rangle$, расширенную алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = AP(1,4) \supset\!\!\!\!+ \langle D\rangle$, а также оптическую алгебру $AOpt(3)$, обладающую базисом

$$S_1 + T_1 = -\sqrt{2}\left\{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\partial_0 + tx^a\partial_a + \frac{m}{2}\vec{x}^2\partial_u\right\},$$
$$Z_1 = -J_{04} - D = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + 2u\partial_u,$$
$$C_1 = J_{04} - D = 2t\partial_0 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3,$$
$$T_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\partial_0, \quad M_1 = -\sqrt{2}m\partial_u, \quad P_a = \partial_a,$$
$$G_a = J_{0a} + J_{a4} = -\sqrt{2}(t\partial_a + mx_a\partial_u), \quad J_{ab}.$$

В предлагаемой работе полалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$ используются для редукции и поиска точных решений уравнения (1.1). Уравнение (1.1) неинвариантно относительно преобразования Ψ: $t \to -t$, $x_a \to x_a$, $u \to u$, а потому неинвариантно относительно группы $C(1,4)$. Это означает, что подалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$ следует изучать с точностью до G_1-эквивалентности, где G_1 — собственный нормальный делитель группы $C(1,4)$, причем $G_1\lambda\{\Psi\} = C(1,4)$. При этом две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются G_1-эквивалентными, если с точностью до G_1-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами. Эта задача эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности, которую мы и будем в дальнейшем рассматривать. Исходя из этого, проводим вначале классификацию подалгебр, алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности, выписываем редуцированные уравнения, соответствующие этим подалгебрам, и находим, где это возможно, точные решения уравнения (1.1). Преобразование Ψ легко учесть в окончательном результате, подействовав, если это необходимо, на редуцированные уравнения или найденные решения уравнения (1.1).

Так как мы ищем только вещественные решения уравнения (1.1), то достаточно ограничиться рассмотрением лишь тех подалгебр $L \subset AC(1,4)$, которые с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности не содержат P_0 и $P_0 + P_4$. Действительно, пусть, например, $P_0 \in L$. Поскольку $P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + m\partial_u)$, то полная система инвариантов алгебры $\langle P_0\rangle$ состоит из функций mx_0-u, x_1, x_2, x_3. Любое решение уравнения (1.1), инвариантное относительно L, инвариантно и относительно $\langle P_0\rangle$ и потому имеет вид $u=mx_0-f(x_1,x_2,x_3)$. Но тогда $2m^2+(\nabla u)^2=0$, и мы приходим к противоречию. Аналогично рассматривается случай $P_0+P_4\in L$.

Уравнение (1.1) тесно связано с релятивистским уравнением Гамильтона. Чтобы установить эту связь между двумя уравнениями, рассмотрим пространства $X_t\times U$ и $X\times V$, где и $X=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\}$ и $X_t=\{(t,x_1,x_2,x_3)\}$ — пространства, представляющие независимые переменные, а $U=\{u\}$ и $V=\{v\}$ пространства зависимых переменных. Отображение $\theta:(t,\vec{x},u)\to(x_0,\vec{x},v)$, определенное с помощью формул

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{u}{m}\right),\quad x_a=x_a,\quad v=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{u}{m}\right),$$

является отображением пространства $X_t\times U$ на пространство $X\times V$. В предположении, что $\frac{\partial v}{\partial x_0}+1\neq 0$, подстановка θ переводит уравнение (1.2) в уравнение (1.1). Аналогично, отображение $\theta_1:(x_0,\vec{x},v)\to(t,\vec{x},u)$, определенное с помощью формул

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+v),\quad x_a=x_a,\quad u=\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0-v),$$

является отображением пространства $X\times V$ на пространство $X_t\times U$, и если $m+u_t\neq 0$, то подстановка θ_1 переводит уравнение (1.1) в (1.2). Так как $\theta\theta_1$ — тождественное преобразование пространства $X\times V$, а $\theta_1\theta$ — тождественное преобразование пространства $X_t\times U$, то $\theta_1=\theta^{-1}$.

Исследуем зависимость между уравнениями (1.1) и (1.2) более подробно. С этой целью рассмотрим пространства $X_t\times U\times U^{(1)}$ и $X\times V\times V^{(1)}$, координаты которых представляют независимые переменные, зависимые переменные и производные первого порядка от зависимых переменных. Выделим в $X_t\times U\times U^{(1)}$ открытое подпространство M_1, состоящее из тех векторов $(t,\vec{x},u,u_0,u_1,u_2,u_3)$ у которых $u_0+m\neq 0$, а в $X\times V\times V^{(1)}$ — открытое подпространство M_2, состоящее из тех векторов $(x_0,\vec{x},v,v_0,v_1,v_2,v_3)$, у которых $v_0+1\neq 0$. Покажем, что отображение $\theta:X_t\times U\to X\times V$ можно продолжить до отображения $\hat{\theta}:M_1\to M_2$.

Возьмем произвольную функцию $u=f(t,\vec{x})$, и пусть

$$\Gamma_f=\{(t,\vec{x},f(t,\vec{x}))\mid(t,\vec{x})\in\Omega\}\subset X_t\times U$$

— ее график, где Ω — область определения функции f. Отображение θ переводит Γ_f в

$$\theta\cdot\Gamma_f=\{x_0,\vec{x},v)=\theta(t,\vec{x},v)\mid(t,\vec{x},u)\in\Gamma_f\}.$$

Множество $\theta\cdot\Gamma_f$ в общем случае не является графиком какой-либо однозначной функции $v=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Однако, поскольку $m+u_t\neq 0$, то результат преобразования $\theta\cdot\Gamma_f=\Gamma_{\hat{f}}$ является графиком некоторой однозначной гладкой функции $v=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Докажем это. Действительно, имеем

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0-v)-u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+v),x_1,x_2,x_3\right)=0. \tag{1.3}$$

Найдем производную по v:

$$-\frac{m}{\sqrt{2}} - u_t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(m + u_t).$$

По условию $m + u_t \neq 0$. Поэтому уравнение (1.3) определяет в некоторой окрестности точки (x_0, x_1, x_2, x_3, v) v как однозначную функцию $\hat{f}$ от x_0, x_1, x_2, x_3. Функция $\hat{f}$ называется образом f при отображении θ и обозначается $\hat{f} = \theta \cdot f$ [3]. Отметим также, что если $u_t = 0$, то уравнение Гамильтона–Якоби не имеет действительных решений. Поэтому следует предполагать, что $u_t \neq 0$ и $m + u_t \neq 0$. При таком предположении из допущения $v_0 - 1 = 0$ вытекает, что $v_0 = 1$. В то же время из уравнения (1.3) получаем $1 + v_0 = 0$, т.е. $v_0 = -1$. Таким образом, $v_0 + 1 \neq 0$. Продолжение $\hat{\theta} : M_1 \to M_2$ отображения θ определяется так, что оно преобразует производные функции $u = f(t, \vec{x})$ в соответствующие производные преобразованных функций $v = f(x_0, \vec{x})$. Продолженное действие отображения θ определено корректно. Действительно, пусть $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_1^0, u_2^0, u_2^0, u_3^0)$ — заданная точка в M_1. Выберем произвольную гладкую функцию $u = f(t, \vec{x})$, определенную в окрестности точки $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, график которой лежит в M_1 и которая имеет данные производные u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0 в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$. Преобразованная функция $\theta \cdot f$ определена в окрестности соответствующей точки $(x_0^0, \vec{x}^{\,0}, v^0) = \theta(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0)$. Мы определим теперь действие продолженного преобразования $\hat{\theta}$ на точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ вычисляя производные преобразованной функции $\theta \cdot f$ в точке $(x_0^0, \vec{x}^{\,0})$. Пользуясь цепным правилом, получаем, что это определение зависит лишь от производных функции f в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, т.е. от самой точки $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0)$, и, следовательно, не зависит от выбора функции f, представляющей точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, u^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0)$.

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1.2) является конформная алгебра $\hat{A}C(1, 4)$ [4], реализующаяся следующими операторами:

$$\hat{P}_\alpha = \partial_\alpha, \quad \hat{J}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad \hat{D} = -x^\alpha \partial_\alpha,$$
$$\hat{K}_\alpha = -2(g^{\alpha\beta} x_\beta)\hat{D} - (g^{\beta\nu} x_\beta x_\nu)\partial_\alpha,$$

где $x_4 = u$, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta, \nu = 0, 1, \ldots, 4)$. Пусть Δ_1 и Δ_2 — многообразия, которые определяются уравнениями (1.1) и (1.2) соответственно, M_1' — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_1, для которых $u_t + m \neq 0$, а M_2' — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_2, для которых $u_0 + 1 \neq 0$. Очевидно, $M_1' = M_1 \cap \Delta_1$, $M_2' = M_2 \cap \Delta_2$, в силу выше изложенного $\hat{\theta}$ отображает M_1' на M_2'. Инвариантность уравнения (1.1) относительно группы $G_1 = \exp AC(1, 4)$ означает, что многообразие Δ_1 инвариантно относительно действия продолженной группы $\tilde{G}_1$. Аналогично, многообразие Δ_2 инвариантно относительно продолженной группы $\tilde{G}_2$, где $G_2 = \exp \hat{A}C(1, 4)$. Отсюда вытекает, что если $g_1 \in \tilde{G}_1$, то $\hat{\theta} g_1 \hat{\theta}_1 \in G_2$ и обратно, если $g_2 \in \tilde{G}_2$, то $\hat{\theta}_1 g_2 \hat{\theta} \in \tilde{G}_1$. Таким образом, отображение θ индуцирует изоморфизм $\varphi_\theta : X \to \theta X \theta_1$ алгебры $AC(1, 4)$ на алгебру $\hat{A}C(1, 4)$, который действует следующим образом:

$$P_0 \to -\hat{P}_0, \quad P_4 \to -\hat{P}_4, \quad J_{ab} \to \hat{J}_{ab}, \quad J_{a4} \to -\hat{J}_{a4}, \quad J_{04} \to \hat{J}_{04},$$
$$J_{0a} \to -\hat{J}_{0a}, \quad K_0 \to -\hat{K}_0, \quad K_4 \to -\hat{K}_4, \quad K_a \to \hat{K}_a.$$

Докажем, например, что $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$. Действительно, пусть $f(x_0, \vec{x}, v)$ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда

$$\theta_1 f(x_0, \vec{x}, v) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{u}{m}\right), \vec{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{u}{m}\right)\right),$$

и, значит, $P_0 \cdot \theta_1 f(x_0, \vec{x}, v) = -\frac{\partial f}{\partial x_0}$. Следовательно, $\theta P_0 \theta_1 = -\frac{\partial}{\partial x_0} = -\hat{P}_0$, а потому $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$.

Пусть H произвольная подалгебра алгебры $AC(1,4)$, тогда $\varphi_\theta(H) = \hat{H}$ является подалгеброй алгебры $\hat{A}C(1,4)$, причем ранги алгебр H и $\hat{H}$ совпадают. Из предыдущих результатов вытекает, что если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — полная система инвариантов алгебры H, то $\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_s)$ — полная система инвариантов алгебры $\hat{H}$. Анзац $\omega_s = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$, соответствующие подалгебре H, редуцирует уравнение (1.1) к дифференциальному уравнению $F(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, содержащему только переменные $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$, функцию φ и частные производные $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{s-1}$ от φ по переменным $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$ соответственно. Анзац $\theta(\omega_s) = \varphi(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}))$, соответствующий подалгебре $\hat{H}$, редуцирует уравнение (1.2) к дифференциальному уравнению $F(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}), \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, имеющему тот же вид, что и предыдущее. Это утверждение вытекает из равенства

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1 = -\frac{4m}{(m+v_t)^2}\left(v_t + \frac{1}{2m}(\Delta v)^2\right)$$

и соотношений

$$u_0 = \frac{m - v_t}{m + v_t}, \quad u_a = \frac{\sqrt{2}}{m + v_t} v_a \quad (a = 1, 2, 3),$$

которые связывают производные функций $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $v = \theta u$.

§ 2. Подалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$

В настоящем параграфе мы проводим классификацию подалгебр алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности. Как уже отмечалось в § 1, мы рассматриваем лишь те подалгебры $L \subset AC(1,4)$, которые с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности не содержат P_0 и $P_0 + P_4$. При решении этой задачи используется классификация подалгебр конформной алгебры $AC(1,4)$ с точностью до $C(1,4)$-сопряженности, изложенная в [5]. Положим $H_a = J_{0a} - J_{a4}$.

I. Подалгебры ранга 4 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$; 2) $\langle J_{04}, P_1, P_2, P_3 \rangle$; 3) $\langle G_3, J_{04}, P_1, P_2 \rangle$;
4) $\langle J_{03}, J_{0,4}, J_{34}, P_1, P_2 \rangle$,
5) $AO'(1,3) \oplus \langle P_3 \rangle$, где $AO'(1,3) = \langle J_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = 0, 1, 2, 4 \rangle$; 6) $AO(1,4)$;
7) $\langle J_{12}, D, P_3, P_4 \rangle$; 8) $\langle D, P_1, P_2, P_3 \rangle$; 9) $\langle J_{04}, D, P_1, P_2 \rangle$;
10) $\langle J_{04} + \alpha D_1, P_1, P_2, P_3 \rangle$; 11) $\langle J_{04}, J_{12}, D, P_3 \rangle$; 12) $\langle G_3, J_{04}, D, P_1 \rangle$;
13) $\langle G_3 + \alpha D, J_{04} + \beta D, P_1, P_2 \rangle$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$; 14) $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3 \rangle$;
15) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D, P_1 \rangle$; 16) $AO(4) \oplus \langle D \rangle$; 17) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D \rangle$;
18) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D \rangle$; 19) $AO'(1,3) \oplus \langle D, P_3 \rangle$; 20) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2, P_3 \rangle$;
21) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T, P_1, P_2 \rangle$; 22) $\langle J_{04} + D + M, G_3, P_1, P_2 \rangle$;
23) $\langle J_{04} - D, G_1, G_2 + P_2, P_3 \rangle$;
24) $\langle Z_1, S_1 + T_1 + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2}G_3 \rangle$;
25) $AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1, Z_1 \rangle$;

26) $\langle P_0+K_0-2J_{12}-2J_{34}, P_1+K_1+2J_{02}, P_3+K_3+2J_{04}, J_{13}+J_{24}\rangle$;
27) $\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03}, -P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-4J_{23}, K_4-P_4\rangle$;
28) $\langle J_{12}-J_{34}+\alpha(P_0+K_0)\rangle \oplus \langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle$ $(\alpha>0)$;
29) $\langle P_0+K_0\rangle \oplus AO(3)\oplus\langle K_4-P_4\rangle$;
30) $\langle P_0+K_0\rangle \oplus \langle 2J_{12}+J_{34}, J_{13}+J_{24}-\frac{\sqrt{3}}{2}(K_4-P_4), J_{23}+J_{14}+\frac{\sqrt{3}}{2}(K_3-P_3)\rangle$;
31) $\langle P_0+K_0\rangle \oplus AO(4)$;
32) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1-P_1, K_2-P_2, K_3-P_3, K_4-P_4\rangle$;
33) $\langle P_1+K_1, P_2+K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$;
34) $\langle P_1+K_1, P_2+K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle K_3-P_3, K_4-P_4, J_{34}\rangle$.

II. Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle J_{04}, P_1, P_2\rangle$; 2) $\langle J_{04}, J_{12}, J_3\rangle$; 3) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$; 4) $\langle J_{04}+P_3, P_1, P_2\rangle$;
5) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq 0)$; 6) $\langle J_{04}, D, P_1\rangle$; 7) $\langle J_{12}+cJ_{04}, D, P_3\rangle$ $(c>0)$;
8) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$;
10) $\langle J_{04}+D+M, J_{12}+\alpha M, P_3\rangle$ $(\alpha\geq 0)$; 11) $\langle J_{04}+D, J_{12}+M, P_3\rangle$;
12) $\langle P_1, P_2, P_4\rangle$; 13) $\langle J_{12}, P_3, P_4\rangle$; 14) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$; 15) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$;
16) $\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$; 17) $\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$; 18) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$;
19) $\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4\rangle$; 20) $\langle J_{12}+\alpha D, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha>0)$; 21) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$;
22) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$ $(\alpha>0)$; 23) $\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2\rangle$;
24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle$; 25) $AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\gamma M_1\rangle$ $(\gamma<0)$;
26) $\langle S_1+T_1, J_{12}, Z_1\rangle$; 27) $AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle$;
28) $\langle S_1+T_1+J_{12}, Z_1, H_1+P_2\rangle$;
29) $\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\gamma<0)$;
30) $\langle \alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\alpha\in R)$;
31) $\langle J_{04}+D, H_1+P_3, H_2+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$; 32) $\langle G_3, P_1, P_2\rangle$;
33) $\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle$; 34) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 35) $\langle G_3+2T, P_1, P_2\rangle$;
36) $\langle G_1, G_2-P_2, P_3\rangle$; 37) $\langle G_3, J_{04}+P_2, P_1\rangle$; 38) $\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3\rangle$;
39) $\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D, P_3\rangle$ $(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$; 40) $\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$;
41) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 42) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle$; 43) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1\rangle$;
44) $\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$; 45) $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$;
46) $\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle$; 47) $\langle P_0+K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$;
48) $AO(3)\oplus\langle P_0+K_0\rangle$; 49) $\langle P_0-K_0-\alpha(K_4-P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq 1)$;
50) $\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03}, -P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-4J_{23}\rangle$;
51) $\langle 2J_{12}+J_{34}, 2J_{13}+2J_{13}+2J_{24}-\sqrt{3}(K_4-P_4), 2J_{23}-2J_{14}+\sqrt{3}(K_3-P_3)\rangle$.

III. Подалгебры ранга 2 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle P_2, P_3\rangle$; 2) $\langle J_{12}, P_3\rangle$; 3) $\langle J_{04}, P_1\rangle$; 4) $\langle J_{12}+cJ_{04}, P_3\rangle$ $(c>0)$;
5) $\langle G_3, P_1\rangle$; 6) $\langle J_{12}, J_{34}\rangle$; 7) $\langle J_{04}, J_{12}\rangle$; 8) $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$;
9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 10) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$; 11) $\langle J_{12}+P_0, P_3\rangle$; 12) $\langle J_{14}+P_3, P_2\rangle$;
13) $\langle J_{12}+M, P_3\rangle$; 14) $\langle J_{04}+P_2, P_1\rangle$; 15) $\langle G_3+P_2, P_1\rangle$; 16) $\langle G_3+2T, P_1\rangle$;
17) $\langle J_{12}+P_0, J_{34}+\delta P_0\rangle$ $(\delta\geq 0)$; 18) $\langle J_{04}+P_3, J_{12}+\delta P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$;
19) $\langle J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$; 20) $\langle J_{12}+M, G_3+\delta T\rangle$ $(\delta=0;2)$; 21) $\langle J_{12}, G_3+2T\rangle$;
22) $\langle G_1+P_3, G_2+\mu P_2+\delta P_2+\delta P_3\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$; 23) $\langle G_3, J_{04}+P_1\rangle$;
24) $\langle J_{12}+J_{34}, D\rangle$; 25) $\langle J_{12}+cJ_{34}, D\rangle$ $(0<c<1)$; 26) $\langle J_{04}, D\rangle$;
27) $\langle J_{12}+cJ_{04}, D\rangle$ $(c>0)$; 28) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$ $(\alpha>0)$;
29) $\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0,\ \beta>0)$; 30) $\langle J_{12}+\alpha D, J_{34}+\beta D\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$;
31) $\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$; 32) $\langle J_{04}, J_{12}+\alpha D\rangle$;

33) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1 \rangle$; 34) $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T), P_3 \rangle$ $(c > 0)$;
35) $\langle J_{04} + D + M, J_{12} + \alpha M \rangle$ $(\alpha \geq 0)$; 36) $\langle J_{04} + D, J_{12} + M \rangle$;
37) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T \rangle$; 38) $\langle J_{04} - D, G_3 + P_1 \rangle$;
39) $\langle J_{12} + c(J_{04} - 2D), G_3 + 2T \rangle$ $(c > 0)$; 40) $\langle S_1 + T_1 + J_{12}, G_1 + P_2 \rangle$;
41) $\langle J_{12}, S + T \rangle$; 42) $\langle S_1 + T_1 + J_{12} + M, G_1 + P_2 \rangle$; 43) $\langle S_1 + T_1, Z_1 \rangle$;
44) $\langle S_1 + T_1 + \alpha J_{12}, Z_1 \rangle$ $(\alpha > 0)$; 45) $\langle S_1 + T_1 + J_{12} + \lambda Z_1, G_1 + P_2 \rangle$ $(\lambda > 0)$;
46) $\langle J_{12} + \alpha Z_1, S_1 + T_1 + \beta Z_1 \rangle$ $(\alpha > 0)$; 47) $\langle J_{12}, S_1 + T_1 + \alpha Z_1 \rangle$ $(\alpha > 0)$;
48) $\langle J_{12} + M, S_1 + T_1 + \gamma M \rangle$; 49) $\langle J_{12}, S_1 + T_1 + M \rangle$; 50) $\langle P_0 + K_0, J_{12} \rangle$;
51) $\langle P_0 + K_0, J_{12} + \alpha J_{34} \rangle$ $(0 < \alpha \leq 1)$;
52) $\langle J_{12} + \alpha(P_0 + K_0), J_{34} + \beta(P_0 + K_0) \rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta \geq 0,\ 2\alpha \neq 1$ при $\beta = 0)$.

IV. Подалгебры ранга 1 алгебры $AC(1,4)$:
1) $\langle P_1 \rangle$; 2) $\langle J_{12} \rangle$; 3) $\langle J_{12} + cJ_{34} \rangle$ $(0 < c \leq 1)$; 4) $\langle J_{04} \rangle$;
5) $\langle J_{12} + cJ_{04} \rangle$ $(c > 0)$; 6) $\langle J_{12} + P_0 \rangle$; 7) $\langle J_{12} + P_3 \rangle$; 8) $\langle J_{12} + M \rangle$;
9) $\langle J_{12} + J_{34} + P_0 \rangle$; 10) $\langle J_{12} + cJ_{34} + P_0 \rangle$ $(0 < c < 1)$; 11) $\langle J_{04} + P_1 \rangle$;
12) $\langle J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle$ $(c > 0)$; 13) $\langle G_3 + P_1 \rangle$; 14) $\langle G_3 + 2T \rangle$; 15) $\langle G_3 - J_{12} + 2T \rangle$;
16) $\langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D \rangle$ $(0 < c \leq 1,\ \alpha > 0)$; 17) $\langle J_{04} + \alpha D \rangle$ $(0 < \alpha \leq 1)$;
18) $\langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle$ $(0 < c \leq \alpha)$; 19) $\langle J_{04} - D + 2T \rangle$;
20) $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T) \rangle$; 21) $\langle S + T \rangle$; 22) $\langle S + T + M \rangle$;
23) $\langle S + T + \alpha J_{12}, M \rangle$ $(\alpha > 0)$; 24) $\langle S_1 + T_1 + \alpha J_{12} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
25) $\langle S_1 + T_1 + J_{12} + G_1 + P_2 \rangle$; 26) $\langle S_1 + T_1 + \alpha Z_1 \rangle$ $(\alpha \neq 0)$;
27) $\langle S_1 + T_1 + \alpha J_{12} + \beta Z_1 \rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta \neq 0)$; 28) $\langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} \rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 2)$;
29) $\langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} + \beta J_{34} \rangle$ $(0 < \alpha \leq \beta;\ \alpha, \beta \neq 2)$; 30) $\langle P_0 + K_0 \rangle$.

3. Инварианты подалгебр ранга 3 конформной алгебры $AC(1,4)$

В настоящем параграфе мы находим инварианты подалгебр ранга 3 конформной алгебры $AC(1,4)$, представленных в § 2. Запись $L : f_1, \ldots, f_s$ будет означать, что функции $f_1, \ldots, f_s$ образуют полную систему инвариантов алгебры L. Будем предполагать, что $AC(1,4)$ реализуется дифференциальными операторами на множестве решений уравнения Гамильтона–Якоби.

$$\langle J_{04}, P_1, P_2 \rangle : \ tu,\ x_3.$$

$$\langle J_{04}, J_{12}, P_3 \rangle : \ tu,\ \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}.$$

$$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} \rangle : \ tu,\ \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}.$$

$$\langle J_{04} + P_3, P_1, P_2 \rangle : \ tu,\ te^{-x_3}.$$

$$\langle J_{04} + \alpha D, P_1, P_2 \rangle \ (\alpha \neq 0; 1) : \ ut^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},\ tx_3^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

$$\langle J_{04} + D, P_1, P_2 \rangle : \ \frac{u}{x_3^2},\ t.$$

$$\langle J_{04}, D, P_1 \rangle : \ \frac{tu}{x_3^2},\ \frac{x_2}{x_3}.$$

$$\langle J_{12} + cJ_{04}, D, P_3 \rangle \ (c > 0) : \ \frac{tu}{x_1^2 + x_2^2},\ 2\ln t - \ln(x_1^2 + x_2^2) + 2c \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}.$$

$$\langle J_{04}, J_{12}, D \rangle : \ \frac{tu}{x_1^2 + x_2^2},\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}.$$

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$ $(\alpha \neq 1)$: $\dfrac{tu}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right) t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$.

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+D\rangle$: $\dfrac{u}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, t.

$\langle J_{04}+D+M, J_{12}+\alpha M, P_3\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: $\dfrac{u}{x_1^2+x_2^2}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right) e^{2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} - \sqrt{2}t}$.

$\langle J_{04}+D, J_{12}+M, P_3\rangle$: $\dfrac{u}{x_1^2+x_2^2}$, $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1} - t$.

$\langle P_1, P_2, P_4\rangle$: $u+mt$, x_3.

$\langle J_{12}, P_3, P_4\rangle$: $u+mt$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$.

$\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$: $ut-\dfrac{m}{2}x_3^2$, x_2.

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$: $u+mt$, $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$.

$\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$: $ut-\dfrac{m}{2}x_3^2$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$.

$\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$: $ut-\dfrac{m}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)$, x_3.

$\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4\rangle$: $u+mt-\sqrt{2}m\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$.

$\langle J_{12}+\alpha D, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$: $(u+mt)e^{-\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}}$, $\ln\left(x_1^2+x_2^2\right) - 2\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}$.

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$: $\dfrac{2ut-mx_3^2}{x_1^2}$, $\dfrac{x_1}{x_2}$.

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$ $(\alpha > 0)$: $\dfrac{2ut-mx_3^2}{x_1^2+x_2^2}$, $2\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)$.

$\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2\rangle$: $u+\dfrac{m}{\sqrt{2}}\ln t$, $\dfrac{t^{1/2}}{x_3}$.

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle$: $u+\dfrac{m}{\sqrt{2}}\ln t$, $\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{t}$.

$AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\gamma M_1\rangle$ $(\gamma<0)$: $\dfrac{\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1}$, $u-\dfrac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1}-\sqrt{2}\gamma m\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)$.

$\langle S_1+T_1, J_{12}, Z_1\rangle$: $\dfrac{\left(2t^2+1\right)u-mt\vec{x}^{\,2}}{\vec{x}^{\,2}}$, $\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}$.

$AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle$: $\dfrac{\left(2t^2+1\right)u-mt\vec{x}^{\,2}}{\vec{x}^{\,2}}$, $\ln\dfrac{2t^2+1}{\vec{x}^{\,2}}-2\alpha\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)$.

$\langle S_1+T_1+J_{12}, Z_1, H_1+P_2\rangle$: $\dfrac{\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2}{\left(2t^2+1\right)x_3^2}$,

$$\frac{\sqrt{2}\left(2t^2+1\right)u}{x_3^2}-m\left[\frac{\sqrt{2}t\vec{x}^{\,2}}{x_3^2}+2\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)\sqrt{2}t+x_1x_2\left(2t^2-1\right)}{x_3^2}\right].$$

$\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\gamma<0)$:

$$\omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}},$$

$$u-\sqrt{2}mt\omega^2-\frac{m}{\sqrt{2}}\left[\frac{t\left(2t^2-3\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{\sqrt{2}\left(1-6t^2\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\right.$$

$$-\frac{2}{2t^2+1}x_1x_3-\frac{2\sqrt{2}t}{2t^2+1}x_2x_3\Bigg]-m\gamma\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t).$$

$\langle \alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\alpha\in R)$:

$$u-\frac{m}{\omega^2}\left[\frac{\sqrt{2}t\left(2t^2-3\right)}{2\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{1-6t^2}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2t^2+1}x_1x_3-\right.$$

$$\left.-\frac{2t}{2t^2+1}x_2x_3\right]-\sqrt{2}mt,\ \ln\omega+\alpha\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}t),$$

$$\text{где } \omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}}.$$

$\langle J_{04}+D, H_1+P_3, H_2+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0)$:

$$\frac{u-\frac{m}{2t}x_1^2-\frac{m\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}t-\alpha)}x_2^2}{\left(\frac{\beta x^2}{\sqrt{2}t-\alpha}+\frac{x_1}{\sqrt{2}t}+x_3\right)^2},\ t.$$

$\langle G_3, P_1, P_2\rangle$: $ut-\dfrac{m}{2}x_3^2,\ u.$

$\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle$: $u,\ ut-\dfrac{m}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right).$

$AO(1,3)$: $u-mt,\ u^2+m^2\left(t^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right).$

$\langle G_3+2T, P_1, P_2\rangle$: $u^2-2m^2x_3,\ u^3-3m^2x_3u+3m^3t.$

$\langle G_1, G_2-P_2, P_3\rangle$: $u,\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{m}u+1\right)t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2^2-\dfrac{m}{2u}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{m}u+1\right)x_1^2.$

$\langle G_3, J_{04}+P_2, P_1\rangle$: $ue^{x_2},\ 2ut-mx_3^2.$

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3\rangle$: $ue^{x_3},\ 2ut-m\left(x_1^2+x_2^2\right).$

$\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D, P_3\rangle$ $(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$: $\dfrac{ut}{x_1^2+x_2^2},$

$$\alpha\ln\frac{u}{t}+2\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

$\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$: $ux_2^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}},\ \dfrac{2ut-mx_3^2}{x_2^2},$

$\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$: $\dfrac{2ut-mx_3^2}{x_1^2+x_2^2},\ \dfrac{mt+u}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}}.$

$\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle$: $\dfrac{u^2-2m^2x_3}{x_2},\ \dfrac{\left(u^3-3m^2x_3u+3m^3t\right)^2}{x_2^3}.$

$\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$: $\dfrac{u^2-2m^2x_3}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}},\ \dfrac{u^3-3m^2x_3u+3m^3t}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{3/4}}.$

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$: $u+mt,\ \left(t-\dfrac{u}{m}\right)^2+2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right).$

$\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle$:

$$\frac{\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)\right]^2-4\left(x_1^2+x_2^2\right)}{\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2},$$

$$\frac{(mt+u)\left[tu-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)\right]+2\sqrt{2}x_1x_3m^2+2mx_2(mt-u)}{\sqrt{2}\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2}.$$

$$\langle P_0-K_0,J_{12},J_{34}\rangle:\ \frac{2m^2x_3^2+(mt-u)^2}{2m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)},\ \frac{\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)}.$$

$$AO(3)\oplus\langle P_0-K_0\rangle:\ \frac{\sqrt{2}\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]}{mt-u},\ \frac{2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}}.$$

$$\langle P_0-K_0-\alpha(K_4-P_4),J_{12},J_{13},J_{23}\rangle\ (\alpha>0,\ \alpha\neq1):$$

$$\frac{2(mt-u)^2+\left[2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)},$$

$$\alpha\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(mt+u)}{2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)}+\operatorname{arctg}\frac{2ut-m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}{\sqrt{2}(mt-u)}.$$

$$\langle -2D+J_{04},-P_0+P_4+\sqrt{3}G_3,K_0+K_4+\sqrt{3}H_3\rangle:\ \frac{mt-u}{m\sqrt{2}},$$

$$3\sqrt{3}\frac{2(mt+u+m\sqrt{2}x_5)+2\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)x_4}{m\sqrt{2}x_3^3}+$$

$$+\frac{(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^3}{2\sqrt{2}m^3x_3^3}-\frac{\left[\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2+8m^2x_4\right]^3}{8m^6x_3^3}-$$

$$-12\frac{\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2+8m^2x_4}{4m^4x_3}\left[(mt-u)^2+2m^2\right].$$

$$\langle J_{03},J_{04},J_{34},J_{12}\rangle:\ ut-\frac{m}{2}x_3^2,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}.$$

$$\langle J_{04}+D+M,G_3,P_1\rangle:\ \frac{u}{x_2^2},\ \frac{x_3^2}{u}+\frac{\sqrt{2}}{m}\ln\frac{u}{x_3^2}-\frac{2}{m}(t-\sqrt{2}\ln x_3).$$

§ 4. Анзацы вида $u=f(t,\vec{x})\varphi(\omega)$, $\omega=\omega(t,\vec{x})$

В §§ 4–7 мы используем инварианты подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$, выписанные в § 2, для построения анзацев, редуцирующих уравнение (1.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Все такие анзацы мы разбиваем на четыре типа в зависимости от вида анзаца. Для каждого анзаца мы указываем соответствующую ему подалгебру, выписываем редуцированное уравнение и некоторые точные решения уравнения (1.1). В отдельных случаях удобно проводить редукцию уравнения (1.1) по заданной алгебре $L\subset AC(1,4)$, используя для этого цепочку ее подалгебр. Рассмотрим, например, алгебру $L=\langle Y_1,Y_2,Y_3\rangle$, где $Y_1=-P_0+P_4+\sqrt{3}G_3$, $Y_2=-2D+J_{04}$, $Y_3=K_0+K_4+\sqrt{3}H_3$, и выделим в ней цепочку подалгебр $\langle Y_1\rangle\subset\langle Y_1,Y_2\rangle\subset L$. Полная система инвариантов подалгебры $\langle Y_1\rangle$ состоит из функций

$$t_1=2y_1+2\sqrt{3}y_2y_5+y_2^3,\quad t_2=\sqrt{3}y_2^2+4y_5,\quad t_3=u,\quad t_4=y_4,$$

где $y_1=x_0+x_4$, $y_2=x_0-x_4$, $y_2=x_2$, $y_5=x_3$. Уравнение Гамильтона–Якоби в переменных y_1, y_2, y_4, y_5, u принимает вид

$$4\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y_4}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y_5}\right)^2=1. \tag{4.1}$$

Подалгебре $\langle Y_1\rangle$ соответствует анзац $u=u(t_1,t_2,t_4)$. Подставляя его в уравнение

(4.1), получаем

$$4\sqrt{3}t_2\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial t_4}\right)^2-16\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^2=1. \tag{4.2}$$

Полная система инвариантов подалгебры $\langle Y_1, Y_2\rangle$ состоит из функций

$$\omega_1=\frac{t_1^2}{t_4^3},\quad \omega_2=\frac{t_2}{t_4},\quad \frac{u}{t_4}.$$

Применяя анзац $u=t_4\cdot v(\omega_1,\omega_2)$, редуцируем уравнение (4.2) к уравнению

$$\begin{gathered}16\sqrt{3}\omega_1\omega_2\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_1}\right)^2-v^2-9\omega_1^2\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_1}\right)^2-\omega_2^2\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_1}\right)^2+\\+6\omega_1 v\frac{\partial v}{\partial \omega_1}+2\omega_2 v\frac{\partial v}{\partial \omega_2}-6\omega_1\omega_2 v\frac{\partial v}{\partial \omega_1}\frac{\partial v}{\partial \omega_2}-16\left(\frac{\partial v}{\partial \omega_2}\right)^2=1.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Генератор Y_3 в переменных v, ω_1, ω_2 приобретает вид

$$2m\left[(4+v^2)+\omega_2^2\right]\frac{\partial}{\partial\omega_1}+2\sqrt{3}m\frac{\partial}{\partial\omega_2}.$$

Следовательно, полная система инвариантов алгебры L состоит из функций v и $\omega=3\sqrt{3}\omega_1-\omega_2^3-12\omega_2(\omega_3^2+1)$. Применяя анзац $v=\varphi(\omega)$ и подставляя его в уравнение (4.3), получаем редуцированное уравнение

$$-9\left[\varphi^2-256\left(\omega^2+1\right)^2\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)^2+6\omega\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)-\omega^2-1=0.$$

1) $\langle J_{12}+cJ_{04}, D, P_3\rangle$. Анзац $u=\frac{x_1^2+x_2^2}{t}\varphi(\omega)$, $\omega=2\ln t-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)+2c\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$, соответствующий данной алгебре, редуцирует уравнение (1.1) к уравнению

$$2\left(1+c^2\right)\dot\varphi^2+(2m-4\varphi)\dot\varphi+2\varphi^2-m\varphi=0.$$

Решим это уравнение при $c=1$. Находим, что

$$\varphi=\frac{2\varphi-m\pm\sqrt{m^2-4\varphi^2}}{4}.$$

Рассмотрим случай “+”. Используя подстановку Эйлера, получаем

$$\ln\frac{2m^2-4\varphi^2-2m\sqrt{m^2-4\varphi^2}}{2m^2-2m\sqrt{m^2-4\varphi^2}}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m^2-4\varphi^2}-m}{2\varphi}=\omega+C.$$

Подставив в это уравнение вместо φ выражение $\frac{tu}{x_1^2+x_2^2}$, а вместо $\omega-2\ln t-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)+2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$, приходим к такому решению уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\begin{gathered}\ln\left[\frac{x_1^2+x_2^2}{t^2}-\frac{2u^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)-m\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-4t^2u^2}}\right]-\\-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)-4t^2u^2}}{2tu}-2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+\tilde C=0.\end{gathered}$$

2) $\langle J_{04}+P_3, P_1, P_2\rangle$. Рассмотрим анзац $u=\frac{1}{t}\varphi(\omega)$, где $\omega=te^{-x^3}$. Он преобразует уравнение (1.1) в уравнение

$$\dot\varphi^2=\frac{2m(1-\omega)}{\omega^2}\varphi.$$

Если $m\varphi>0$, то

$$\varphi=\frac{m}{2}\left(2\sqrt{1-\omega}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-\omega}-1}{\sqrt{1-\omega}+1}\right|+C\right)^2.$$

Соответствующие решение уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид

$$u=\frac{m}{2t}\left(2\sqrt{1-te^{-x_3}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-te^{-x_3}}-1}{\sqrt{1-te^{-x_3}}+1}\right|+C\right)^2.$$

Здесь m произвольное, а $1-te^{-x_3}\geq 0$. Если $1-te^{-x_3}<0$ и $m<0$, то имеем решение

$$u=-\frac{2m}{t}\left(C+\sqrt{te^{-x_3}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{te^{-x_3}-1}\right)^2.$$

4) $\langle J_{04}, P_1, P_2\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(x_3),\quad \dot\varphi^2=2m\varphi;\quad u=\frac{m}{2t}(x_3+C)^2.$$

5) $\langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\quad \dot\varphi^2=2m\varphi;\quad u=\frac{m}{2t}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+C\right)^2.$$

6) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2},\quad \dot\varphi^2=2m\varphi;$$
$$u=\frac{m}{2t}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+C\right)^2.$$

7) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq 0;1)$:

$$u=t^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\varphi(\omega),\quad \omega=tx_3^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$
$$\dot\varphi^2+2m\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\omega^{\frac{1-3\alpha}{\alpha-1}}\dot\varphi+2m\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3}\omega^{\frac{2-4\alpha}{\alpha-1}}\varphi=0.$$

8) $\langle J_{04}+D, P_1, P_2\rangle$:

$$u=x_3^2\varphi(\omega),\quad \omega=t,\quad m\dot\varphi+2\varphi^2=0;\quad u=\frac{mx_3^2}{2t+C}.$$

9) $\langle J_{04}, D, P_1\rangle$:

$$u=\frac{x_3^2}{t}\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_2}{x_3},\quad (1+\omega^2)\dot\varphi^2-4\omega\varphi\dot\varphi+4\varphi^2-2m\varphi=0;\quad u=\frac{m}{2t}x_3^2.$$

10) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}, \quad 2\omega^2(\omega+1)\dot{\varphi}^2 + 4\omega\varphi\dot{\varphi} + 2\varphi^2 - m\varphi = 0;$$

$$u = \frac{m}{2t}\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

11) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$ $(\alpha \neq 1)$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{t}\varphi(\omega), \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\frac{2\omega^2}{m}\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{4\omega}{m}\varphi + \frac{2\alpha}{1-\alpha}\omega\right)\dot{\varphi} + \frac{2\varphi^2}{m} - \varphi = 0; \quad u = C + \frac{m}{2t}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right).$$

12) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D\rangle$:

$$u = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\varphi(\omega), \quad \omega = t, \quad m\dot{\varphi} + 2\varphi^2 = 0; \quad u = \frac{m\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{2t + C}.$$

13) $\langle J_{04} + D + M, J_{12} + \alpha M, P_3\rangle$ $(\alpha \geq 0)$:

$$u = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right) e^{2\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} - \sqrt{2}t},$$

$$(1 + \alpha^2)\omega^2\dot{\varphi}^2 + 2\omega\varphi\dot{\varphi} - \frac{\sqrt{2}}{2}m\omega\dot{\varphi} + \varphi^2 = 0.$$

14) $\langle J_{04} + D, J_{12} + M, P_3\rangle$:

$$u = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - t, \quad \dot{\varphi}^2 - m\dot{\varphi} + 2\varphi^2 = 0;$$

$$\left[\sqrt{m^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 8u^2} - m\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]^3 -$$

$$- 24u^2\left[\sqrt{m^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 8u^2} - m\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right] =$$

$$= 12\sqrt{2}u^3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - 12tu^3 + Cu^3,$$

$$\frac{2\sqrt{m^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 8u^2} - 2m\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{u} +$$

$$+ \frac{16u}{\sqrt{m^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 8u^2} - m\left(x_1^2 + x_2^2\right)} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - t + C.$$

§ 5. Анзацы вида $u = f(t, \vec{x})\varphi(\omega) + g(t, \vec{x})$, $\omega = \omega(t, \vec{x})$.

1) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$. Анзац $u = \varphi(\omega) - mt$, $\omega = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, соответствующий данной алгебре, редуцирует уравнение (1.1) к уравнению $\dot{\varphi}^2 - 2m^2 = 0$. Общим решением этого уравнения является функция $\varphi = \pm\sqrt{2}\omega + C$. Ей соответствует такое решение уравнения Гамильтона–Якоби:

$$u = -mt \pm \sqrt{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2} + C.$$

2) $\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4\rangle$. Анзац $u=\varphi(\omega)-mt-\sqrt{2}m\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$, редуцирует уравнение (1.1) к уравнению

$$\dot\varphi^2 = 2m^2\frac{\omega^2-1}{\omega^2},$$

общим решением которого является

$$\varphi = \pm m\sqrt{2}\left[-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\omega+1}{\omega-1}}-\sqrt{\omega^2-1}\right]+C.$$

Соответствующим решением уравнения (1.1) является

$$\varphi = \pm m\sqrt{2}\left[-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}+1}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}-1}}-\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{1/2}\right]-$$
$$-mt+\sqrt{2}m\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+C.$$

3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$ $(\alpha>0)$. Применяя анзац

$$u=\frac{x_1^2+x_2^2}{2t}\varphi(\omega)+\frac{mx_3^2}{2t},$$

получаем редуцированное уравнение

$$(\alpha^2+1)\dot\varphi^2-2\varphi\dot\varphi+\varphi(\varphi-m)=0.$$

Следовательно,

$$\dot\varphi=\frac{\varphi\pm\sqrt{m(\alpha^2+1)\varphi-\alpha^2\varphi^2}}{\alpha^2+1},$$

откуда

$$-\omega+C=-\ln\varphi+2\varepsilon\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{m(\alpha^2+1)\varphi-\alpha^2\varphi^2}}{\alpha\varphi}-$$
$$-\ln\frac{\varphi+\varepsilon\sqrt{m(\alpha^2+1)\varphi-\alpha^2\varphi^2}}{\varphi^2}\quad(\varepsilon=\pm1).$$

Подставив вместо φ выражение $\frac{2ut-mx_3^2}{x_1^2+x_2^2}$, а вместо ω — $2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)$, получаем решение уравнения (1.1).

4) $\langle P_1, P_2, P_4\rangle$:

$$u=\varphi(x_3)-mt,\quad \dot\varphi^2=2m^2;\quad u=(-1\pm\sqrt{2})mt+C.$$

5) $\langle J_{12}, P_3, P_4\rangle$:

$$u=\varphi(\omega)-mt,\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\quad \dot\varphi^2=2m^2;$$
$$u=\pm\sqrt{2}m\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}-mt+C.$$

6) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$:

$$u=\frac{1}{t}\varphi(\omega)+\frac{m}{2t}x_3^2,\quad \omega=x_2,\quad \dot\varphi^2=2m\varphi;\quad u=\frac{m}{2t}\left[(x_2+C)^2+x_3^2\right].$$

7) $\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$:

$$u = \frac{1}{t}\varphi(\omega) + \frac{m}{2t}x_3^2, \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \dot\varphi^2 = 2m\varphi;$$
$$u = \frac{m}{2t}\left[\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + C\right)^2 + x_3^2\right].$$

8) $\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$:

$$u = \frac{1}{t}\varphi(\omega) + \frac{m}{2t}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = x_3, \quad \dot\varphi^2 = 2m\varphi;$$
$$u = \frac{m}{2t}\left[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + C)^2\right].$$

9) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$:

$$u = \frac{1}{t}\varphi(\omega) + \frac{m}{2t}x_3^2, \quad \omega = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \dot\varphi^2 = 2m\varphi;$$
$$u = \frac{m}{2t}\left[x_3^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + C\right)^2\right].$$

10) $\langle J_{12} + \alpha D, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$:

$$u = e^{\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}\varphi(\omega) - mt, \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},$$
$$4(1+\alpha^2)\dot\varphi^2 - 4\alpha^2\varphi\dot\varphi + \alpha^2\varphi^2 - 2m^2e^{\omega} = 0;$$
$$u = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} - mt, \quad m = \pm\frac{1}{2}, \quad u = \sqrt{2}m\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} - mt,$$

11) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$:

$$u = \frac{x_1^2}{2t}\varphi(\omega) + \frac{mx_3^2}{2t}, \quad \omega = \frac{x_1}{x_2},$$
$$\omega^2(\omega+1)\dot\varphi^2 + 4\omega\varphi\dot\varphi + 4\varphi(\varphi - m) = 0; \quad u = \frac{m}{2t}\left(x_1^2 + x_3^2\right).$$

12) $\langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2\rangle$:

$$u = \varphi(\omega) - \frac{m}{\sqrt{2}}\ln t, \quad \omega = \frac{t^{1/2}}{x_3}, \quad \dot\varphi^2 + \frac{m}{\omega^3}\dot\varphi - \sqrt{2}m^2\frac{1}{\omega^4} = 0;$$
$$u = \frac{m}{4t}x_3^2 + \frac{m}{2\sqrt{2}}(-2 \pm 2)\ln t \pm$$
$$\pm\, m\left[\frac{\left(\sqrt{x_3^2 + 4\sqrt{2}t} - x_3\right)^4 - 32t^2}{16t\left(\sqrt{x_3^2 + 4\sqrt{2}t} - x_3\right)^2} + \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{x_3^2 + 4\sqrt{2}t} - x_3\right)\right] + C.$$

13) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - D + 2T\rangle$:

$$u = \varphi(\omega) - \frac{m}{\sqrt{2}}\ln t, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{t}, \quad 4\omega\dot{\varphi}^2 - 2m\omega\dot{\varphi} - \sqrt{2}m^2 = 0;$$

$$u = -\frac{m}{\sqrt{2}}\ln t + \frac{m}{4}\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega\right)^3 + \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega\right)^2 - 2\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega\right) +$$

$$\left. + 2\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega + \sqrt{2}\right)\right] + C,$$

$$u = -\frac{m}{2}\ln t - \frac{m\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega + \sqrt{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega^2 + 2\sqrt{2}\omega} + \omega + \sqrt{2}}\right] + C.$$

14) $AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \gamma M_1\rangle$ $(\gamma < 0)$:

$$u = \varphi(\omega) + \frac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1} + \sqrt{2}\gamma m \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t), \quad \omega = \frac{\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1},$$
$$m^2(\omega + 2\gamma) + 2\omega\dot{\varphi}^2 = 0;$$
$$u = \frac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1} + \sqrt{2}\gamma m \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) \pm$$
$$\pm m\gamma\left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\vec{x}^{\,2} + 2\gamma\,(2t^2+1)}{\vec{x}^{\,2}}} + \frac{\sqrt{-\vec{x}^{\,2}\,(\vec{x}^{\,2} + 2\gamma\,(2t^2+1))}}{\sqrt{2}\gamma\,(2t^2+1)}\right] + C.$$

15) $\langle S_1 + T_1, J_{12}, Z_1\rangle$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2t^2+1}\varphi(\omega) + \frac{mt\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{2t^2+1}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2},$$
$$2\omega(\omega+1)^2\dot{\varphi}^2 + 2\varphi^2 + m^2 = 0.$$

16) $AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \alpha Z_1\rangle$:

$$u = \frac{\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1}\varphi(\omega) + \frac{mt\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1}, \quad \omega = \ln\frac{2t^2+1}{\vec{x}^{\,2}} - 2\alpha\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t),$$
$$2\dot{\varphi}^2 - (4\varphi + 2\sqrt{2}m\alpha)\dot{\varphi} + 2\varphi^2 + m^2 = 0.$$

17) $\langle S_1 + T_1 + J_{12}, Z_1, H_1 + P_2\rangle$:

$$u = \frac{x_3^2}{\sqrt{2}(2t^2+1)}\varphi(\omega) + m\left[\frac{t\vec{x}^{\,2}}{2t^2+1} + \sqrt{2}\frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)\sqrt{2}t + x_1x_2\left(2t^2-1\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}\right],$$
$$\omega = \frac{\left(x_1 + \sqrt{2}tx_2\right)^2}{(2t^2+1)\,x_3}, \quad (\omega + \omega^2)\dot{\varphi}^2 - 2\omega\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 + m^2(4\omega+1) = 0.$$

18) $\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\gamma<0)$:

$$u=\sqrt{2}\varphi(\omega)+2mt\omega^2+m\left[\frac{t\left(2t^2-3\right)}{(2t^2+1)}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{\sqrt{2}\left(1-6t^2\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{2t^2+1}x_1x_3-\frac{2\sqrt{2}t}{2t^2+1}x_2x_3\right]+\sqrt{2}m\gamma\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t),$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}},\quad \dot\varphi^2=-\frac{4m^2\gamma+12m^2\omega^2}{3};$$
$$u=2mt\omega^2+m\left[\frac{t\left(2t^2-3\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{\sqrt{2}\left(1-6t^2\right)}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\frac{2}{2t^2+1}x_1x_3-\right.$$
$$\left.-\frac{2\sqrt{2}t}{2t^2+1}x_2x_3\right]+m\sqrt{2}\gamma\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)\pm2\sqrt{2}m\arcsin\sqrt{\frac{3}{|\gamma|}}\omega+C.$$

19) $\langle\alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$ $(\alpha\in R)$:

$$u=\sqrt{2}\omega^2\varphi(\ln\omega+\alpha\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t))+\sqrt{2}m\left[\frac{\sqrt{2}t\left(2t^2-3\right)}{2\left(2t^2+1\right)^2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1-6t^2}{\left(2t^2+1\right)^2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2t^2+1}x_1x_3-\frac{2t}{2t^2+1}x_2x_3\right]+2mt\omega^2,$$
$$\omega=\frac{2\sqrt{2}tx_1+\left(2t^2-1\right)x_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2t^2+1\right)x_3}{\left(2t^2+1\right)^{3/2}},$$
$$3\dot\varphi^2+4(m\alpha+3\varphi)\dot\varphi+12\left(\varphi^2+m^2\right)=0.$$

20) $\langle J_{04}+D, H_1+P_3, H_2+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\geq0)$

$$u=\left(\frac{\beta x_2}{\sqrt{2}t-\alpha}+\frac{x_1}{\sqrt{2}t}+x_3\right)^2\varphi(\omega)+\frac{m}{2t}x_1^2+\frac{m\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}t-\alpha)}x_2^2,$$
$$m\dot\varphi+2\left(\frac{1}{2t^2}+\frac{\beta^2}{(\sqrt{2}t-\alpha)^2}+1\right)\varphi^2=0;$$
$$u=\left(\frac{\beta x_2}{\sqrt{2}t-\alpha}+\frac{x_1}{\sqrt{2}t}+x_3\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{mt(2t-\sqrt{2}\alpha)}{4t^3+(2mC-2\sqrt{2}\alpha)t^2-(2+2\beta^2+\sqrt{2}m\alpha C)t+\sqrt{2}\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{2t}x_1^2+\frac{m\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}t-\alpha)}x_2^2\right).$$

§ 6. Анзацы вида $p(u)=f(t,\vec{x})\varphi(\omega)+g(t,\vec{x})$, $\omega=\omega(t,\vec{x},u)$

1) $\langle G_3, P_1, P_2\rangle$:

$$u=\varphi(\omega),\quad \omega=ut-\frac{m}{2}x_3^2,\quad \omega\dot\varphi-\varphi=0;\quad u=\frac{mCx_3^2}{2(Ct-1)}.$$

2) $\langle G_1, G_2, G_3 - J_{12}\rangle$:

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = ut - \frac{m}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right), \quad \omega\dot\varphi - \varphi = 0;$$
$$u = \frac{mC\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}{2(Ct-1)}.$$

3) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$:

$$u = -\varphi(\omega) + mt, \quad \omega = u^2 + m^2\left(t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right),$$
$$(2\varphi^2 - 2\omega)\dot\varphi^2 - 2\varphi\dot\varphi + 1 = 0;$$
$$u = mt - C\left[u^2 + m^2\left(t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)\right]^{1/2}, \quad C = \frac{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}.$$

4) $\langle G_3 + 2T, P_1, P_2\rangle$:

$$u^2 = \varphi(\omega) + 2m^2 x_3, \quad \omega = u^3 - 3m^2 x_3 u + 3m^3 t, \quad \varphi\dot\varphi^2 = \frac{4}{9};$$
$$u^2 - 2m^2 x_3 - \left(C + u^3 - 3m^2 x_3 u + 3m^3 t\right)^{2/3} = 0.$$

5) $\langle G_1, G_2 - P_2, P_3\rangle$:

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = \left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)t - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2^2 - \frac{u}{2m}\left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)x_1^2,$$
$$\omega\dot\varphi - \varphi - \frac{m}{\sqrt{2}} = 0;$$
$$u + C\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)t - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2^2 - \frac{m}{2u}\left(\frac{\sqrt{2}}{m}u + 1\right)x_1^2\right\} + \frac{m}{\sqrt{2}} = 0.$$

6) $\langle G_3, J_{04}, P_1\rangle$:

$$u = e^{-x_2}\varphi(\omega), \quad \omega = 2ut - mx_3^2, \quad 4m\omega\varphi\dot\varphi^2 - 4m\dot\varphi - \varphi^2 = 0;$$
$$x_2 + \ln\frac{u}{\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} - 1} - \frac{1}{m^2}\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} + C = 0,$$
$$x_2 + \ln\frac{u\left(\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} - 1\right)}{\omega} - \frac{1}{m^2}\sqrt{1 + \frac{\omega}{m}} + C = 0.$$

7) $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3\rangle$:

$$u = e^{-x_3}\varphi(\omega), \quad \omega = 2ut - m\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad 4m\omega\dot\varphi^2 - 4m\varphi\dot\varphi - \varphi^2 = 0.$$

8) $\langle J_{04} + \alpha D, J_{12} + \beta D, P_3\rangle$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}\varphi(\omega), \quad \omega = \alpha\ln\frac{u}{t} + 2\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1} - \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$
$$-m(\varphi^2 - \alpha^2\dot\varphi^2) + 2\varphi[\varphi^2 + (\beta^2 + 1)\dot\varphi^2 - 2\varphi\dot\varphi] = 0.$$

9) $\langle G_3, J_{04} + \alpha D, P_1 \rangle$:

$$u = x_2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{2ut - mx_3^2}{x_2^2},$$

$$4\omega(\omega - m)\dot{\varphi}^2 + \left(4m - 4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\omega\right)\varphi\dot{\varphi} + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2 \varphi^2 = 0;$$

$$u = \frac{\left(mx_3^2 + 2Ct\right) \pm \sqrt{\left(mx_3^2 + 2Ct\right)^2 - 8mCt\left(x_2^2 + x_3^2\right)}}{4t} \quad (\alpha = -1).$$

10) $\langle J_{12}, J_{34}, D \rangle$:

$$u = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2t}\varphi(\omega) + \frac{mx_3^2}{2t}, \quad \omega = \frac{mt + u}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$(-2m^2 + \omega^2)\dot{\varphi}^2 + 4\omega(m - \varphi)\dot{\varphi} + 4\varphi(\varphi - m) = 0.$$

11) $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T, P_1 \rangle$:

$$u^2 = x_2\varphi(\omega) + 2m^2 x_3, \quad \omega = \frac{\left(u^3 - 3m^2 x_3 u + 3m^3 t\right)^2}{x_2^3},$$

$$9\omega(\omega - 4m^4\varphi)\dot{\varphi}^2 - 6\omega\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 + 4m^4 = 0.$$

12) $\langle J_{04} + D + M, G_3, P_1 \rangle$:

$$u = x_2^2\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_3^2}{u} + \frac{\sqrt{2}}{m}\ln\frac{u}{x_3^2} - \frac{2}{m}(t - \sqrt{2}\ln x_3),$$

$$\sqrt{2}\dot{\varphi}^2 - m\varphi\dot{\varphi} + m\varphi^3 = 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{m}\ln\left|\frac{\sqrt{m^2 - 2\sqrt{2}m\varphi} - m}{\sqrt{m^2 - 2\sqrt{2}m\varphi} + m}\right| - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 - 2\sqrt{2}m\varphi} - m} - \omega + C = 0.$$

13) $\langle J_{12}, J_{04} - 2D, G_3 + 2T \rangle$:

$$u^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}\varphi(\omega) + 2m^2 x_3, \quad \omega = \frac{u^3 - 3m^2 x_3 u + 3m^3 t}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{3/4}},$$

$$(36m^4\varphi - 9\omega^2)\dot{\varphi}^2 + 12\omega\varphi\dot{\varphi} - 4(\varphi^2 + 4m^4) = 0.$$

14) $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle$:

$$u = \varphi(\omega) - mt, \quad \omega = \left(t - \frac{u}{m}\right)^2 + 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right), \quad 8\omega\dot{\varphi}^2 - 2m^2 = 0.$$

§ 7. Анзацы вида $p(t, x, u) = \varphi(\omega)$, $\omega = \omega(t, x, u)$

1) $\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34} \rangle$:

$$\frac{\left[2ut - m\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1\right)\right]^2 - 4\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{\left[2ut - m\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right)\right]^2} = \varphi(\omega),$$

$$\omega = \frac{(mt + u)\left[tu - m\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1\right) + 2\sqrt{2}x_1 x_3 m^2 + 2mx_2(mt - u)\right]}{\sqrt{2}\left[2ut - m\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right)\right]^2},$$

$$(16\omega^2 - 1)\dot{\varphi}^2 + 2(5\varphi - 1)\omega\dot{\varphi} + 16\varphi(\varphi - 1) = 0.$$

2) $\langle P_0 - K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$:

$$\frac{2m^2x_3^2 + (mt-u)^2}{2m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2\right)},$$
$$(\omega^2+4)\dot\varphi^2 - 4\omega\varphi\dot\varphi - 4\varphi(1+\varphi) = 0.$$

3) $AO(3) \oplus \langle P_0 - K_0\rangle$:

$$\frac{\sqrt{2}\left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]}{mt-u} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}},$$
$$(4+\omega\varphi)\dot\varphi^2 + 4\omega\varphi\dot\varphi + 4\varphi^2(\varphi+1) = 0.$$

4) $\langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$:

$$\frac{2(mt-u)_1^2 + \left[2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\right]^2}{m^2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)} = \varphi(\omega),$$
$$\omega = \alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}(mt+u)}{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1\right)} + \mathrm{arctg}\,\frac{2ut - m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)}{\sqrt{2}(mt-u)},$$
$$(-\alpha^2\dot\varphi + \varphi + 4)\dot\varphi^2 + \varphi^2(\varphi+4)^2 = 0.$$

5) $\langle -2D + J_{04}, -P_0 + P_4 + \sqrt{3}G_3, K_0 + K_4 + \sqrt{3}H_3\rangle$:

$$6\sqrt{3}\frac{(mt+u+m\sqrt{2}x_5) + \sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)x_4}{m\sqrt{2}x_3^3} + \frac{(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^3}{2\sqrt{2}m^3x_3^3} -$$
$$- \frac{\left[\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2 + 8m^2x_4\right]^3}{8m^6x_3^3} -$$
$$- 12\frac{\sqrt{3}(mt+u-m\sqrt{2}x_5)^2 + 8m^2x_4}{4m^4x_3}\left[(mt-u)^2 + 2m^2\right] = \varphi(\omega),$$
$$\omega = \frac{mt-u}{m\sqrt{2}}, \quad -9[\varphi^2 - 256(\omega^2+1)^2]\dot\varphi^2 + 6\omega\varphi\dot\varphi - \omega^2 - 1 = 0.$$

1. Boyer C.P., Penafiel M.N., Conformal symmetry of the Hamilyon–Jacobi equation and quantization, *Nuovo Cim. B*, 1976, **31**, № 2, 195–210.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ в точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1987, 639 с.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498.
5. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт № 88.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 48 с.

Об одном обобщении метода С. Ли

В.И. ФУЩИЧ

Предложено обобщение метода С.Ли решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В прошлом веке С. Ли заложил идейные основы мощного метода решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). В последнее время классические идеи С. Ли необычайно бурно развиваются как в теоретическом, так и в прикладном направлении. Возрождение интереса к классическим подходам к ДУЧП обусловлено, видимо, тем, что существует огромное число статей и монографий по теоремам существования, однако слишком мало работ по конструктивным методам отыскания решений.

Современное математическое моделирование различных процессов квантовой физики, оптики, акустики, электродинамики, океанологии, гидродинамики, биофизики приводит нас к многомерным нелинейным ДУЧП, которые не могут быть решены линейными методами. Большинство из таких нелинейных моделей не могут рассматриваться как линейные модели плюс некоторая малая нелинейная добавка.

Лиевский подход к решению ДУЧП совершенно не связан с предположением о малости нелинейных членов. Для него важно лишь то, чтобы ДУЧП обладало нетривиальной группой инвариантности [1]. В этом случае многомерное ДУЧП может быть редуцировано к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), которые, во многих важных случаях, могут быть решены. Возникают естественные вопросы: как решить те ДУЧП, которые не обладают нетривиальной локальной симметрией? Как обобщить метод Ли?

В настоящей работе предложено обобщение классического метода С. Ли. Идея такого обобщения сформулирована в [2, 3].

Для конкретности рассмотрим два уравнения: нелинейное скалярное волновое и спинорное уравнения

$$p_\mu p^\mu u(x) + F(u, u^*, x)u = 0, \tag{1}$$

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi(x) + F_1(\bar{\Psi}\Psi, x)\Psi(x) = 0, \tag{2}$$

$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, γ_μ — матрицы Дирака, u — комплекснозначная скалярная функция, Ψ — четырехкомпонентный спинор, F, F_1 — произвольные гладкие функции, $x \in R(1,3)$ — пространство Минковского, u^* — комплексно-сопряженная функция, $\bar{\Psi}$ — дираковски-сопряженный спинор.

1. Предположим, что уравнение (1) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. В этом случае F не зависит от x [1]. Базисные элементы алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ этой группы инвариантности имеют вид

$$P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad J_{\mu\nu} = \alpha_\mu p_\nu - \alpha_\nu p_\mu, \quad \mu,\nu = \overline{0,3}. \tag{3}$$

Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, С. 4–9.

Лиевский алгоритм построения решений ДУЧП состоит в следующем. Решения (1) ищем в виде следующего анзаца [1, 3]:

$$u = f(x)\varphi(\omega), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{4}$$

Симметрийные свойства уравнения (1) дают возможность отыскать в явном виде функции $f(x)$ и новые переменные ω_1, ω_2, ω_3, при которых четырехмерное уравнение (1) редуцируется к трехмерному ДУЧП для функции φ. Повторяя этот процесс, т.е. построив анзацы вида (4) для трехмерного, а затем для двумерного ДУЧП, приходим к ОДУ.

Идея обобщения метода Ли основана на следующем наблюдении [2, 3]. Если не вдаваться в детали исследования групповых свойств уравнения и процесса редукции многомерного уравнения (1) к ОДУ, то метод Ли можно сформулировать весьма кратко. Присоединим к уравнению (1) следующее уравнение:

$$(a_{\mu\nu} J_{\mu\nu} + b_\mu P_\mu) u(x) = 0, \tag{5}$$

где $a_{\mu\nu}$, b_μ — произвольные константы.

Соотношение (5) является линейным ДУЧП первого порядка. Решая (5) и требуя, чтобы это решение удовлетворяло уравнению (1), построим решение исходного нелинейного уравнения (1). Решения уравнения (1), построенные указанным способом, совпадут с решениями, полученными по методу Ли.

Формула (5) указывает путь для обобщения лиевского метода решения ДУЧП. Он состоит в обобщении соотношения (5). Присоединим уравнению (1) следующее нелинейное уравнение первого порядка:

$$\{a_{\mu\nu}(x, u, \underset{1}{u}) J_{\mu\nu} + b_\mu(x, u, \underset{1}{u}) P_\mu\} u(x) = F_2(x, u, \underset{1}{u}), \tag{6}$$

где $a_{\mu\nu}(x, u, \underset{1}{u})$, $b_\mu(x, u, \underset{1}{u})$, $F_2(x, u, \underset{1}{u})$ — некоторые гладкие функции x, u, $\underset{1}{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$.

Если существуют решения уравнения (6) при некоторых фиксированных функциях $a_{\mu\nu}$, b_μ, F_2, которые удовлетворяют (1), то такие решения не могут быть получены с помощью метода Ли. Очевидно, что решение уравнения (6) может быть решением (1), если уравнения (1) и (6) совместны. Поэтому необходимо исследовать совместность системы (1), (6). В общей постановке это очень трудная проблема. Однако, при конкретном выборе $a_{\mu\nu}$, b_μ, F_2 эта задача может быть решена. Так, например, если

$$a_{\mu\nu} = 0, \quad b_\mu(x, u, \underset{1}{u}) = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \quad F_2 = 1, \tag{7}$$

задача о совместности уравнений (1) и (6) полностью решена [4] , т.е. указан явный вид функций F, при которых система (1), (6) совместна.

2. Для спинорной системы (2), инвариантной относительно группы $P(1,3)$, уравнение типа (6) имеет вид

$$\{A_{\mu\nu}(x, \Psi^*, \Psi) J_{\mu\nu} + B_\mu(x, \Psi^*, \Psi) P_\mu\}\Psi = F_3(x, \Psi^*, \Psi)\Psi, \tag{8}$$

где $A_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$, B_μ — матрицы.

В том частном случае, когда $A_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}E$, $B_\mu = b_\mu E$, E — единичная матрица, решения уравнения (8), удовлетворяющие системе (2), будут совпадать с решениями, полученными по лиевскому методу. Во всех остальных случаях построенные решения (2), с использованием уравнения (8), дают новые решения. В частности, когда

$$A_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}, \quad B_\mu = 0, \tag{9}$$

получим решения, которые не могут быть построены лиевским методом.

3. В этом пункте приведем несколько задач, которые автору представляются важными для развития нелиевских методов решения ДУЧП.

3.1. Исследовать совместность и построить решения следующих скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} & p_\mu p^\mu u(x) = F(u, \underset{1}{u}, \Box u), \\ & \lambda_1 (J_{\mu\nu} u)(J_{\mu\nu} u) + \lambda_2 (p_\mu u)(p^\mu u) + \lambda_3 (K_\mu u)(K^\mu u) = F_4(x, u), \\ & K_\mu = 2x_\mu x_\nu p^\nu - x_\alpha x^\alpha p_\mu; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & p_\mu p^\mu u = F(x, \underset{1}{u}, \Box u), \\ & \lambda_4 x_\mu x_\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \lambda_5 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = F_5(x, u, \underset{1}{u}), \end{aligned} \tag{11}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ — произвольные параметры.

3.2. Исследовать лиевскую и нелиевскую симметрии уравнений

$$\begin{aligned} & p_\mu p^\mu u(x) = F(|u|) u, \\ & \frac{\partial \rho}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_a} \frac{\partial \rho}{\partial x_a} + \lambda \right)^{1/2}, \quad \rho = u^* u. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотреть случаи, когда параметр $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$, $F = 0$ и $F = |u|^k$, $F = m^2$, m — действительный параметр.

3.3. Исследовать совместность и построить семейства частных решений спинорных систем ДУЧП

$$\begin{aligned} & \gamma_\mu p^\mu \Psi + F_1(\bar\Psi \Psi)\Psi = 0, \\ & \lambda_1 (S_{\mu\nu} J_{\mu\nu})\Psi + \lambda_2 (\bar\Psi S_{\mu\nu} \Psi) J_{\mu\nu} \Psi + \\ & \qquad + \lambda_3 (\bar\Psi \gamma_\mu \Psi) P_\mu \Psi + \lambda_4 (\bar\Psi \gamma_\mu \Psi) K_\mu \Psi = F_6(\bar\Psi \Psi)\Psi, \\ & K_\mu = 2x_\mu x_\alpha p^\alpha - x_\alpha x^\alpha p_\mu + 2S_{\mu\nu} x_\nu; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & p_\alpha p^\alpha \Psi + F_7(\bar\Psi \Psi, \overline{\gamma_\alpha p^\alpha \Psi} \cdot \gamma_\nu p^\nu \Psi)\Psi = 0, \\ & \lambda_1 (S_{\mu\nu} J_{\mu\nu})\Psi + \lambda_2 \gamma_\mu p^\mu \Psi + \lambda_3 \gamma_4 \gamma_\mu p^\mu \Psi = F_8(\bar\Psi \Psi)\Psi; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & p_\alpha p^\alpha \Psi + F(\bar\Psi \Psi)\Psi = 0, \\ & \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad j_\mu = \lambda_1 \bar\Psi \gamma_\mu \Psi + \lambda_2 \bar\Psi \gamma_4 \gamma_\mu \Psi + \lambda_3 \bar\Psi p_\mu \Psi; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & p_\alpha p^\alpha \Psi + F(\bar\Psi \Psi)\Psi = 0, \\ & \bar\Psi \gamma_\mu p^\mu \Psi = \lambda_4 F_{10}(\bar\Psi \Psi). \end{aligned} \tag{16}$$

3.4. Исследовать локальную и нелокальную симметрию уравнений Шредингера для двух частиц

$$
\begin{gathered}
p_0 u(t,x,y) = \left\{ \frac{1}{2m_1} p_k^2 + \frac{1}{2m_2} p_{k+3}^2 + V(t,x,y) \right\} u(t,x,y), \\
p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial x_{k+3}} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad k=1,2,3.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Потенциал $V(t,x,y)$ удовлетворяет условиям

$$
p_k^2 V = \lambda_1 V, \quad p_{k+3}^2 V = \lambda_2 V, \tag{18}
$$

или

$$
\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta_x V, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \Delta_y V, \tag{19}
$$

или

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta_x V, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta_y V, \tag{20}
$$

или

$$
\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial V}{\partial x_a}\frac{\partial V}{\partial x_a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_4 \frac{\partial V}{\partial y_a}\frac{\partial V}{\partial y_a} = 0, \tag{21}
$$

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — произвольные параметры.

3.5. Исследовать симметрию псевдодифференциального уравнения

$$
\begin{gathered}
p_0^2 u(t,x,y) = \Big\{ p_k^2 + p_{k+3}^2 + m_1^2 + m_2^2 + \\
+ 2\left(p_k^2 + m_1^2\right)^{1/2} \left(2p_{k+3}^2 + m_2^2\right)^{1/2} \Big\} u(t,x,y).
\end{gathered} \tag{22}
$$

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений, в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alambert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.

О некоторых новых волновых уравнениях математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Предложены уравнения для описания взаимодействия скалярных и тензорных полей.

1. В стандартной нерелятивистской квантовой механике взаимодействие двух частиц (волн) описывается с помощью уравнения Шредингера

$$p_0 u(t,x,y) = \left\{ \frac{1}{2m_1} p_k^2 + \frac{1}{2m_2} p_{k+3}^2 + V(t,x,y) \right\} u(t,x,y), \tag{1}$$

где $p_0 = -i\frac{\partial}{\partial t}$, $p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$, $p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial x_{k+3}} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}$, $x_{k+3} \equiv y_k$, $k = 1,2,3$, $V(t,x,y)$ — потенциал взаимодействия, $u(t,x,y)$ — волновая функция системы двух частиц, m_1, m_2 — массы частиц.

Возможен и другой подход к описанию взаимодействия двух частиц (волн). Сопоставим невзаимодействующим частицам волновые функции $u_1(t,x)$ и $u_2(t,y)$. Взаимодействие скалярных волн u_1 и u_2 опишем с помощью такой системы

$$\begin{aligned} p_0 u_1(t,x) &= \frac{1}{2m_1} p_k^2 u_1(t,x) + V_1(t,x,y,u_1,u_2), \\ p_0 u_2(t,x) &= \frac{1}{2m_2} p_{k+3}^2 u_2(t,x) + V_2(t,x,y,u_1,u_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Конкретное взаимодействие волн u_1 и u_2 описывается заданием потенциалов V_1 и V_2, которые, вообще говоря, нелинейным образом зависят от u_1 и u_2. При линейном взаимодействии

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{11}(t,x,y)u_1 + V_{12}(t,x,y)u_2, \\ V_2 &= V_{21}(t,x,y)u_1 + V_{22}(t,x,y)u_2. \end{aligned}$$

В отсутствии взаимодействия между частицами система (2) распадается на два независимых уравнения Шредингера, которые инвариантны относительно алгебры

$$\begin{aligned} &P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_{k+3} = p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial x_{k+3}} = -i\frac{\partial}{\partial y_k}, \\ &J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k, \quad J_{k+3\,l+3} = x_{k+3} p_{l+3} - x_{l+3} p_{k+3}, \\ &G_k = t p_k - x_k m_1, \quad G_{k+3} = t p_{k+3} - x_{k+3} m_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы для модели (2) выполнялся принцип относительности Галилея, достаточно потребовать инвариантности системы (2) относительно операторов G_k и G_{k+3}. Такое требование существенно сужает класс допустимых потенциалов V_1 и V_2. Описанию линейных и нелинейных уравнений вида (2), инвариантных относительно алгебры (3), будет посвящена отдельная публикация.

Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, С. 9–11.

2. Опишем взаимодействие двух скалярных полей u_1 и u_2 помощью гиперболической системы уравнений. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &p_0^2u_1(t,x) = p_k^2u_1(t,x) + m_1^2u_1(t,x) + V_1(t,x,y,u_1,u_2),\\ &p_0^2u_2(t,x) = p_{k+3}^2u_2(t,x) + m_2^2u_2(t,x) + V_2(t,x,y,u_1,u_2). \end{aligned} \tag{4}$$

При отсутствии взаимодействия, система (4) распадается на два независимых уравнения Клейна–Гордона–Фока, которые инвариантны относительно алгебра

$$\begin{aligned} &P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_{k+3} = p_{k+3} = -i\frac{\partial}{\partial y_k},\\ &J_{kl} = x_kp_l - x_lp_k, \quad J_{k+3\,l+3} = x_{k+3}p_{l+3} - x_{l+3}p_{k+3},\\ &J_{0k} = tp_k - x_kp_0, \quad J_{0\,k+3} = tp_{k+3} - x_{k+3}p_0. \end{aligned} \tag{5}$$

В случае нетривиального взаимодействия, естественно потребовать инвариантность (4) относительно алгебры (5). Важно подчеркнуть, что системе (4), в отличие от других релятивистских уравнений для двух частиц, содержит только одну временную переменную.

Взаимодействие двух электромагнитных волн, характеризующихся векторами $\vec{E}_1(t,x)$, $\vec{H}_1(t,x)$ и $\vec{E}_2(t,y)$, $\vec{H}_2(t,y)$ описывается системой

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\vec{E}_1(t,x)}{\partial t} = \mathrm{rot}_x\vec{H}_1(t,x) + \vec{V}_1(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2),\\ &\frac{\partial\vec{H}_1(t,x)}{\partial t} = -\mathrm{rot}_x\vec{E}_1(t,x) + \vec{V}_2(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2),\\ &\frac{\partial\vec{E}_2(t,y)}{\partial t} = \mathrm{rot}_y\vec{H}_2(t,y) + \vec{V}_3(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2),\\ &\frac{\partial\vec{H}_2(t,y)}{\partial t} = -\mathrm{rot}_y\vec{E}_2(t,y) + \vec{V}_2(t,x,y,\vec{E}_1,\vec{H}_1,\vec{E}_2,\vec{H}_2). \end{aligned}$$

Конечно, на векторы $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$ можно накладывать, в зависимости от конкретной задачи, дополнительные условия. Например, $\mathrm{div}\,\vec{E}_1 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H}_1 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{E}_2 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H}_2 = 0$.

Взаимодействия тензорного $A_{\mu\nu}(t,x)$, векторного $B_\mu(t,x)$ и скалярного $u(t,x)$ полей можно описать системой

$$A_{\mu\nu}(t,x)\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu} + B_\mu(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_\mu} + C(t,x)u(t,x) = 0. \tag{6}$$

Коэффициенты системы (6) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$p_\alpha p^\alpha A_{\mu\nu}(t,x) = \lambda_1A_{\mu\nu}(t,x), \tag{7}$$

$$p_\alpha p^\alpha B_\mu(t,x) = \lambda_2B_\mu(t,x), \tag{8}$$

$$p_\alpha p^\alpha C(t,x) = \lambda_3C(t,x), \tag{9}$$

λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные параметры.

Подчеркнем, что уравнение (6) при фиксированных функциях $A_{\mu\nu}$, B_μ, C не инвариантно относительно группы Пуанкаре. Однако, если эти функции удовлетворяют уравнения (7)–(9), то система (6)–(9) инвариантна относительно группы

Пуанкаре. Симметрийные свойства системы (6)–(9) дают возможность строить семейство точных решений.

Возможно описание взаимодействующих частиц с помощью следующего уравнения четвертого порядка:

$$\Big\{p_0^4 - 2p_0^2\left(p_k^2 + p_{k+3}^2 + m_1^2 + m_2^2\right) - 2\left(p_k^2 + m_1^2\right)\left(p_{k+3}^2 + m_2^2\right) + \\ + \left(p_k^2 + m_1^2\right)^2 + \left(p_{k+3}^2 + m_2^2\right)^2\Big\} u(t, x, y) = F(|u|)u(t, x, y).$$

О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера в пространстве Минковского $R_{1,n}$

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК

Symmetry reduction of the nonlinear d'Alembert equation $\Box u + \lambda u^k = 0$ in the Minkowski space $R_{1,n}$ is studied. Some exact solutions of this equation are found.

Рассмотрим нелинейное уравнение д'Аламбера в псевдоевклидовом пространстве $R_{1,n}$ $(n > 1)$

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \tag{1}$$

где $\Box u = u_{00} - u_{11} - \cdots - u_{nn}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u \equiv u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n)$.

Известно [1], что если $k \neq 1$, то максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является расширенная алгебра Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, обладающая базисом $J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0$, $J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b$, $P_\mu = \partial_\mu$, $S = -x^\mu\partial_\mu + \frac{2u}{k-1}\partial_u$ $(a, b = 1, \ldots, n)$. Генераторы поворотов $J_{\mu\nu}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, генераторы трансляций P_μ порождают коммутативный идеал V, причем $A\tilde{P}(1,n) = V \supset\!\!\!\!+\ A\tilde{O}(1,n)$, где $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle S\rangle$. В [2–4] проведена симметрийная редукция уравнения (1) по некоторым подалгебрам алгебр $A\tilde{P}(1,2)$ и $A\tilde{P}(1,3)$ и получен ряд его точных решений.

В настоящем сообщении подалгебры алгебра $A\tilde{P}(1,n)$ используются для поиска инвариантных решений уравнения (1). Для этого описываем максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащиеся в $AP(1,n)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n\rangle$. Если L — одна из таких подалгебр, $\omega'(x,u)$, $\omega(x)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&AE(n-l-1) = \langle P_{l+1}, \ldots, P_{n-1}, J_{l+1,l+2}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle \quad (0 \le l \le n-2);\\
&AO(l) = \langle J_{12}, \ldots, J_{l-1,l}\rangle \quad (2 \le l \le n);\\
&AO(l_1; l_2) = \langle J_{l_1+1,l_2+2}, \ldots, J_{l_1+l_2-1,l_1+l_2}\rangle \quad (0 \le l_1 < l_2,\ l_1 + l_2 \le n);\\
&AE'(l) = \langle G_1, \ldots, G_l, J_{12}, \ldots, J_{l-1,l}\rangle; \quad A\tilde{E}'(l) = AE'(l) \supset\!\!\!\!+\ \langle J_{0n}\rangle;\\
&\Phi_1(\lambda_1) = \langle G_1 + \lambda_1 P_1, \ldots G_{r_1} + \lambda_1 P_{r_1}\rangle \supset\!\!\!\!+\ AO(r_1);\\
&\Phi_2(\lambda_2) = \langle G_{r_1+1} + \lambda_2 P_{r_1+1}, \ldots, G_{r_1+r_2} + \lambda_2 P_{r_1+r_2}\rangle \supset\!\!\!\!+\ AO(r_1; r_2);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_t(\lambda_t) = \langle G_{\sigma+1} + \lambda_t P_{\sigma+1}, \ldots, G_{\sigma+r_t} + \lambda_t P_{\sigma+r_t}\rangle \supset\!\!\!\!+\ AO(\sigma; r_t),
\end{aligned}
$$

где $\sigma = r_1 + r_2 + \cdots + r_{t-1}$, $\sigma + r_t = n - 1$.

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки, 1990, № 6, С. 31–34.

Теорема 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AE(n-1)$; 2) $L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(1 < l < n)$;
3) $L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(1 \le l \le n-1)$;
4) $L_4 = \langle J_{0n} \rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(2 \le l \le n-1)$;
5) $L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-1)$ $(2 \le l \le n-1)$;
6) $L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \oplus AO(l_1; l_2) \oplus AE(n-l-1)$ $(l = l_1 + l_2)$;
7) $L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE(n-2)$; 8) $L_8 = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots \oplus \Phi_t$;
9) $L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE(n-2)$;
10) $L_{10} = (AE'(l) \Supset \langle J_{0n} + \alpha P_{l+1} \rangle) \oplus AE(n-l-2)$.

Теорема 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащаяся в $AP(1,n)$, и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,n)$-сопряжена одной из следующих алгебр:*

1) $L_{1,1} = L_1 \oplus \langle S \rangle$; 2) $L_{1,2} = L_1 \Supset \langle J_{0n} + \alpha S \rangle$ $(\alpha \ne 0)$;
3) $L_{1,3} = L_1 \Supset \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle$; 4) $L_{2,1} = L_2 \Supset \langle S \rangle$; 5) $L_{3,1} = L_3 \Supset \langle S \rangle$;
6) $L_{3,2} = L_3 \Supset \langle J_{0n} + \alpha S \rangle$ $(\alpha \ne 0)$; 7) $L_{3,3} = L_3 \Supset \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n \rangle$;
8) $L_{4,1} = L_4 \Supset \langle S \rangle$; 9) $L_{5,1} = L_5 \Supset \langle S \rangle$; 10) $L_{6,1} = L_6 \Supset \langle S \rangle$;
11) $L_{7,1} = L_7 \Supset \langle J_{0n} - 2S \rangle$; 12) $L_{8,1} = L_8 \Supset \langle J_{0n} - S \rangle$.

Нетрудно убедиться, что уравнение (1) не имеет решений, инвариантных относительно $L_{8,1}$. Учитывая, что редукция уравнения (1) по подалгебрам $L_{1,1}$, $L_{1,2}$, $L_{1,3}$ и $L_{7,1}$ была проведена в [2, 4], в дальнейшем подалгебры 1–3, 11 и 12 теоремы 2 не рассматриваются. Выпишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 2. Запись $L : f_1(x), \dots, f_s(x)$ будет означать, что функции $f_1(x), \dots, f_s(x)$ образуют полную систему инвариантов алгебры L.

$$L_{2,1}: \quad \frac{u}{x_0^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_l^2}{x_0^2};$$

$$L_{3,1}: \quad \frac{u}{x_0^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{\left(x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_l^2 - x_n^2\right)^{1/2}}{x_0 - x_n};$$

$$L_{3,2}: \quad \frac{u}{\left(x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_l^2 - x_n^2\right)^{1/(1-k)}},$$
$$\omega = \delta \ln\left(x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_l^2 - x_n^2\right) - \ln(x_0 - x_n);$$

$$L_{3,3}: \quad \frac{u}{(x_0 - x_n)^{1/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_l^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n);$$

$$L_{4,1}: \quad \frac{u}{\left(x_1^2 + \cdots + x_l^2\right)^{1(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_1^2 + \cdots + x_l^2}{x_0^2 - x_n^2};$$

$$L_{5,1}: \quad \frac{u}{x_{l+1}^{2/(1-k)}}, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_l^2 - x_n^2}{x_{l+1}^2};$$

$$L_{6,1}: \quad \frac{u}{\left(x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2\right)^{1/(1-k)}}, \quad \omega=\frac{x_{l_1+1}^2+\cdots+x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2-x_1^2-\cdots-x_{l_1}^2-x_n^2}.$$

Применяя анзац $\omega'=\varphi(\omega)$, редуцируем уравнение д'Аламбера к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$

$$L_{2,1}: \quad 4(\omega^2-\omega)\ddot\varphi+\left(-\frac{8}{1-k}+6\omega-4l\right)\dot\varphi+\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{3,1}: \quad -\ddot\varphi+\frac{4+l(1-k)}{1-k}\frac{1}{\omega}\dot\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{3,2}: \quad 4\delta(\delta-1)\ddot\varphi+\left[\frac{8\delta-4}{1-k}+2\delta l\right]\dot\varphi+\left[\frac{4k}{(1-k)^2}+\frac{2(l+2)}{1-k}\right]\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{3,3}: \quad 4\ddot\varphi+\frac{4+2l-2lk}{1-k}\dot\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{4,1}: \quad 4\omega^2(1-\omega)\ddot\varphi+\left(-\frac{8}{1-k}+4\omega^2-2\omega l\right)\dot\varphi-\frac{2l(1-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{5,1}: \quad 4(\omega-\omega^2)\ddot\varphi+\left(\frac{8}{1-k}+2l+4-6\omega\right)\dot\varphi-\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$L_{6,1}: \quad 4(\omega-\omega^2)\ddot\varphi+\left(\frac{8}{1-k}+2l_1+4-8\omega+2\omega l_2\right)\dot\varphi- \\ -\frac{2l_2(1-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Выпишем некоторые точные решения д'Аламбера

$$L_{3,1}: \ u^{-4/l}=\sigma(l)\left[\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}+c(x_0-x_n)\right]^2,$$
$$\sigma(l)=\frac{\lambda}{l(l+2)}, \quad k=\frac{4+l}{l}, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}(\delta=0): \ u^{1-k}=\frac{\lambda(1-k)^2\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)}{2c\sigma(k,l)}\frac{1-c(x_0-x_n)^{\frac{\sigma(k,l)}{2}}}{(x_0-x_n)^{\frac{\sigma(k,l)}{2}}},$$
$$\sigma(k,l)=l+2-kl, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}: \ u^{1-k}=\sigma(k,l)\left[x_0-x_n-c\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right],$$
$$\sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2c(l-kl+2)}, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}: \ u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right),$$
$$\sigma(k,l)=-\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-kl+2)}, \quad 1\le l\le n-1;$$

$$L_{3,2}: \ u^{1-k}=\sigma_1(k,l)\frac{\left[(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}-c\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right]^2}{(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}},$$
$$\sigma_1(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{4c(1+k)(2+l-kl)}, \quad \sigma_2(k,l)=\frac{4+l-kl}{2};$$

$$L_{3,3}:\ u^{2/l}=\sigma(k,l)\frac{x_0-x_n}{\left[(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2)+(x_0-x_n)\{\ln(x_0-x_n)+c\}\right]^2},$$
$$\sigma(k,l)=-\frac{4l(l+1}{\lambda},\quad k=\frac{2+l}{l},\quad 1\le l\le n-1;$$
$$L_{4,1}:\ u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right),\quad \sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-kl+2k)},\quad 1\le l\le n.$$

Запись $L:\ u=u(x)$ означает, что решение $u=u(x)$ уравнения (1) инвариантно относительно подалгебры L.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
3. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
4. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **26**, № 4, 791–806.

Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК

Введено понятие канонического разложения произвольной подалгебры алгебры $AO(1,n)$. С помощью этого разложения описаны все максимальные подалгебры L ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ удовлетворяющие условию $L \cap V = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$, где $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$ — пространство трансляций.

1. Введение. Целью настоящей работы является применение групповых методов к нахождению точных решений нелинейного уравнения

$$\Box u + F(u) = 0 \qquad (1)$$

в пространстве Минковского $R_{1,n}$, где $\Box u = u_{00} - u_{11} - \cdots - u_{nn}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u \equiv u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R_{1,n}$; $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n$, $F(u)$ — гладкая функция. Уравнение (1) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,n)$. Ее алгебра Ли $AP(1,n)$ реализуется следующими операторами:

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} x_\alpha \partial_\nu - g^{\nu\alpha} x_\alpha \partial_\mu. \qquad (2)$$

Будем предполагать, что $F(u) = \lambda u^k$ или $F(u) = \lambda \exp u$. Тогда максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является расширенная алгебра Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n) = AP(1,n) \Supset \langle S \rangle$, где $S = -x^\mu \partial_\mu + \frac{2u}{k-1}\partial_u$ при $F = \lambda u^k$ и $S = -x^\mu \partial_\mu + 2\partial_u$ при $F = \lambda \exp u$ [1]. Генераторы поворотов $J_{\mu\nu}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, генераторы трансляций P_μ порождают коммутативный идеал V, причем $A\tilde{P}(1,n) = V \Supset A\tilde{O}(1,n)$, где $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle S \rangle$. В [2, 3] описаны максимальные подалгебры ранга n подалгебры $AP(1,n)$. В [4, 5] проведена редукция уравнения (1) по некоторым подалгебрам алгебр $A\tilde{P}(1,2)$ и $A\tilde{P}(1,3)$ и получен ряд его точных решений.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части работы определяется каноническое разложение произвольной подалгебры алгебры $AO(1,n)$. В п. 6 указанное разложение применяется к описанию максимальных подалгебр L ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$, удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Во второй части работы решена задача описания максимальных подалгебр ранга n расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$. В пп. 8 и 9 построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция уравнения (1) по каждой из них и найдены широкие классы точных решений.

2. Основные понятия. Пусть R — поле вещественных чисел, R_n — n-мерное арифметическое векторное пространство над R, V — псевдоевклидово пространство типа $(1;n)$, состоящее из $(1+n)$-мерных столбцов, $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ — базис V,

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 11, С. 1552–1559.

элементы которого являются единичными столбцами. Обозначим через $O(1,n)$ группу псевдоортогональных преобразований пространства V. Будем предполагать, что $O(1,n)$ реализована в виде вещественных матриц порядка $n+1$. Тогда ее алгебра Ли $AO(1,n)$ состоит из всех вещественных матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^T & A \end{pmatrix},$$

где $X \in R_n$, A — кососимметрическая матрица порядка n, X^T — матрица, транспонированная к X. Полагая $[\Delta, Z] = \Delta \cdot Z$, $[Z, Z'] = 0$ для произвольных $\Delta \in AO(1,n)$, $Z, Z' \in V$, превратим векторное пространство $V \dot{+} AO(1,n)$ в алгебру Ли, которая называется алгеброй Пуанкаре и обозначается $AP(1,n)$. Очевидно, $AP(1,n) = V \oplus AO(1,n)$. Алгебра $AP(1,n)$ является алгеброй Ли группы Пуанкаре $P(1,n)$, которая состоит из всех вещественных матриц порядка $n+2$ вида

$$\begin{pmatrix} B & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $B \in O(1,n)$, $Y \in V$. Следовательно, алгебра $AP(1,n)$ реализуется как алгебра квадратных матриц порядка $n+2$

$$\begin{pmatrix} \Delta & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in AO(1,n)$, $Z \in V$.

Пусть E_{ik} — матрица порядка$n+2$, имеющая единицу на пересечении i-й строки и k-го столбца и нули на всех остальных местах $(i,k = 0,1,\ldots,n{+}1)$. Базис алгебры $AP(1,n)$ образуют матрицы $J_{0a} = -E_{0a} - E_{a0}$, $J_{ab} = -E_{ab} + E_{ba}$, $P_0 = E_{0,n+1}$, $P_a = E_{a,n+1}$ $(a < b;\ b = 1,2,\ldots,n)$. Алгебра $AP(1,n)$ изоморфна алгебре дифференциальных операторов (2), действующих в пространстве вещественных функций от переменной $x \in R_{1,n}$.

Расширенной группой Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda B & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $B \in O(1,n)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, $Y \in V$. Ее алгебра Ли $A\tilde{P}(1,n)$ является полупрямой суммой $AP(1,n) \oplus \langle S \rangle$, где $S = E_{00} + E_{11} + \cdots + E_{nn}$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $\tilde{P}(1,n)$, $AG = \langle X_1, \ldots, X_s \rangle$ — алгебра Ли группы G. Не постоянная функция $f(x,u)$, $x \in R_{1,n}$, называется инвариантом группы G, если $f(x,u)$ постоянна на G-орбите каждой точки (x,u). Функция $f(x,u)$ является инвариантом G тогда и только тогда, когда $X_i f(x,u) = 0$ для всех $i = 1,\ldots,s$. Если r — ранг алгебры AG и $r < n+1$, то существует система $s_1 = n+1-r$ функционально независимых инвариантов $f_1(x,u),\ldots,f_{s_1}(x,u)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант f группы G можно выразить через инварианты $f_1,\ldots,f_{s_1}$, т.е. $f(x,u) = \psi(f_1(x,u),\ldots,f_s(x,u))$. Эту систему инвариантов будем называть полной системой инвариантов группы G или алгебры AG.

Пусть L_1 и L_2 — подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Если для некоторого элемента $C \in \tilde{P}(1,n)$ подалгебры CL_1C^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры L_1, L_2 будем называть эквивалентными [3, 6]. В классе всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, эквивалентных между собой, существует с точностью до $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра.

Подалгебра $L \subset AO(1,n)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(1,n)$ принадлежит классу 1 или имеет изотропный ранг 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L, равен 1. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра L алгебры $AO(1,n)$ имеет изотропный ранг 0 или 1.

3. Каноническое разложение подалгебры класса 0 алгебры $\boldsymbol{AO(1,n)}$. В работе [7] определено каноническое разложение подалгебры класса 0 псевдоортогональной алгебры $AO(p,q)$. Так как оно играет важную роль в наших исследованиях, то рассмотрим это понятие применительно к алгебре $AO(1,n)$.

Пусть F — подалгебра класса 0 алгебры $AO(1,n)$. Тогда псевдоевклидово пространство V разлагается в прямую ортогональную сумму неприводимых F-подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \ldots, P_{k_0}\rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0+1}, \ldots, P_{k_0+k_1}\rangle$, …, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \cdots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = n$, $k_0 \geq 0$, $k_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, s$. Здесь V_0 — псевдоевклидово пространство типа $(1; k_0)$, если $k_0 \neq 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i, $i = 1, \ldots, s$. Обозначим через $O(V_i)$ группу изометрий пространства V_i, а через $AO(V_i)$ ее алгебру Ли. Если $J \in F$, то $\operatorname{ad} J$ можно рассматривать как линейное преобразование $\hat{J}_i$ пространства V_i. Матрица $\pi_i(J)$ преобразования $\hat{J}_i$ в базисе пространства V_i содержится в $AO(V_i)$. Отображение $\pi_i : F \to AO(V_i)$. является гомоморфизмом, а $\pi_i(F)$ — неприводимой подалгеброй алгебры $AO(V_i)$. Так как отображение $J \to (\pi_0(J), \ldots, \pi_s(J))$ есть изоморфизм F в алгебру $\pi_0(F) \times \cdots \times \pi_s(F)$, то будем говорить, что F разлагается относительно базиса $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ в подпрямое произведение алгебр $\pi_0(F), \ldots, \pi_s(F)$ записывать это так:

$$F = \pi_0(F) \times \cdots \times \pi_s(F). \tag{3}$$

Пусть $F_i = \{J \in F' \mid \pi_j(J) = 0 \text{ для всех } j \neq i\}$, где $F' = \pi_0(F) \times \cdots \times \pi_s(F)$. Легко видеть, что F_i — подалгебра алгебры F' наряду с разложением (3) мы имеем разложение $F = F_0 + \cdots + F_s$ алгебры F в подпрямую сумму алгебр $F_0, \ldots, F_s$. В дальнейшем алгебры $F_0, \ldots, F_s$ будем называть неприводимыми частями алгебры F. Условимся алгебру F_i отождествлять с алгеброй $\pi_i(F)$. В этом смысле будем говорить, что F_i — неприводимая подалгебра алгебры $AO(V_i)$. Из работы [8] вытекает, что неприводимая часть F_0 совпадает с $AO(V_0)$.

Подалгебры F_i и F_j отличные от F_0, назовем эквивалентными, если $k_i = k_j$ и существует такая матрица $C \in O(V_i)$, что $C\pi_i(J)C^{-1} = \pi_j(J)$ для всех $J \in F$. Нетрудно убедиться, что рассматриваемое отношение на множестве $\{F_0, F_1, \ldots, F_s\}$ является отношением эквивалентности, а потому оно проводит разбиение множества неприводимых частей алгебры F на классы $\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_t$. Класс $\mathfrak{U}_0$ существует только при $k_0 \geq 2$ и состоит в этом случае из одной подалгебры $F_0 = AO(V_0)$. Если $F_{m_1}, F_{m_2}, \ldots, F_{m_{r_i}} \in \mathfrak{U}_i$, то через A_i обозначим подалгебру $(\pi_{m_1}+\cdots+\pi_{m_{r_i}})(F)$. Подалгебру A_i назовем примарной частью алгебры F. Очевидно, F является подпрямой суммой своих примарных частей. Разложение $F=A_0+\cdots+A_t$ будем называть каноническим разложением алгебры F. Если F совпадает со своей примарной частью, то F называется примарной алгеброй.

Теорема 1 [7]. *Пусть F — подалгебра класса* 0 *алгебры $AO(1,n)$, $A_1,\ldots,A_t$ — примарные части F, $W\subset V$ — F-инвариантное подпространство. Тогда $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_t\oplus W'$, где $[A_i,W_i]=W_i$, $[A_i,W_j]=0$ при $i\neq j$, $[F,W']=0$* $(i,j=1,\ldots,t)$. *Если примарная алгебра A является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(V_1),AO(V_2),\ldots,AO(V_q)$, то с точностью до $O(1,n)$-сопряженности ненулевые подпространства U пространства V со свойством $[A,U]=U$ исчерпываются пространствами $V_1,V_1\oplus V_2,\ldots,V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_q$.*

4. Каноническое разложение подалгебры класса 1 алгебры $AO(1,n)$. В настоящем пункте речь идет о подалгебрах класса 1 алгебры $AO(1,n)$, проекция которых на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0. В п. 3 было определено каноническое разложение подалгебры F класса 0 алгебры $AO(1,n)$. Это разложение позволило описать с точностью до $O(1,n)$-сопряженности все подпространства, инвариантные относительно F и тем самым свести проблему классификации подалгебр класса 0 алгебры $AO(1,n)$ в некотором смысле к проблеме классификации неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k\leq n$. Естественно возникает задача определения подобного разложения для подалгебры Φ класса 1 алгебры $AO(1,n)$. Согласно работе [7] всегда можно предполагать, что подалгебра Φ оставляет инвариантным подпространство $V_{(1)}=\langle P_0+P_n,P_1,\ldots,P_{n-1}\rangle$. Указанное разложение подалгебры Φ связано с разложением пространства $V_{(1)}$ в ортогональную сумму подпространств. Это разложение пространства $V_{(1)}$ определяется следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть Φ — подалгебра класса* 1 *алгебры $AO(1,n)$. Пространство $V_{(1)}$ с точностью до $O(1,n)$-сопряженности является прямой ортогональной суммой Φ-инвариантных подпространств U и W, удовлетворяющих двум условиям:*

1) пространство U изотропно и является ортогональной суммой $U=U_1+\cdots+U_s$ Φ-инвариантных подпространств $U_1=\langle P_0+P_n\rangle\oplus V_1,\ldots,U_s=\langle P_0+P_n\rangle\oplus V_s$, где $V_1=\langle P_1,\ldots,P_{k_1}\rangle,\ldots,V_s=\langle P_{\sigma+1},\ldots,P_{\sigma+k_s}\rangle$, $s\geq 1$, $\sigma=k_1+\cdots+k_{s-1}$; каждое из подпространств U_i содержит только следующие Φ-инвариантные подпространства: 0, *$\langle P_0+P_n\rangle$, U_i;*

2) пространство W невырождено и является прямой ортогональной суммой подпространств $W_1=\langle P_{l_0+1},\ldots,P_{l_0+l_1}\rangle,\ldots,W_t=\langle P_{\delta+1},\ldots,P_{\delta+l_t}\rangle$, $t\geq 0$, $l_0=\sigma+k_s$, $\delta=l_0+\cdots+l_{t-1}$, $\sigma+l_t=n-1$. Каждое из подпространств W_i неприводимо и инвариантно относительно Φ.

Доказательство. Пусть W — максимальное невырожденное подпространство $V_{(1)}$ инвариантное относительно Φ. Тогда $V_{(1)}=W\oplus U$, где $U=W^{\perp}$ — ортогональное дополнение к W. Пусть $O(n-1)$ — ортогональная группа, действующая на пространстве $\langle P_1,\ldots,P_{n-1}\rangle$. Очевидно, $O(n-1)\subset O(1,n)$ и подпространство $V_{(1)}$ инвариантно относительно группы $O(n-1)$. Используя теорему Витта, приведем базис подпространства W к виду $P_{l_0+1}+\alpha(P_0+P_n),\ldots,P_{n-1}+\beta(P_0+P_n)$. Подействовав на этот базис автоморфизмом $\exp(\alpha G_{l_0+1}+\cdots+\beta G_{n-1})$, получим базис $\{P_{l_0+1},\ldots,P_{n-1}\}$. Таким образом, можно предполагать, что $W = \langle P_{l_0+1},\ldots,P_{n-1}\rangle$. Но тогда $U = \langle P_0+P_n, P_1,\ldots,P_{l_0}\rangle$. В частности, может быть $U = \langle P_0+P_n\rangle$.

Допустим, что $U \neq \langle P_0+P_n\rangle$. Пусть U_1' — минимальное, отличное от $\langle P_0+P_n\rangle$, ненулевое Φ-инвариантное подпространство пространства U. Учитывая, что ортогональная группа $O(l_0)$ действующая на пространстве $\langle P_1,\ldots,P_{l_0}\rangle$, оставляет $V_{(1)}$ инвариантным, получаем, что U_1' $O(l_0)$-сопряжено, а значит, и $O(1,n)$-сопряжено с подпространством $U_1 = \langle P_0+P_n, P_1,\ldots,P_{k_1}\rangle$. Очевидно, автоморфизм φ, отображающий U_1' на U_1, не изменяет подпространства W. Подпространство U разлагается в ортогональную сумму $U = U_1 + U_1^{\perp}$, где $U_1^{\perp} = \langle P_0+P_n, P_{k_1+1},\ldots,P_{l_0}\rangle$. Применяя к подпространству $U_1^{\perp}$ рассуждения, приведенные выше для подпространства U_1', получаем через конечное число шагов искомое разложение пространства U. Эти же рассуждения доказывают существование разложения для подпространства W, указанного в теореме. Теорема доказана.

Пусть $T_1 = \langle G_1,\ldots,G_k\rangle,\ldots,T_s = \langle G_{\sigma+1},\ldots,G_{\sigma+k_s}\rangle$, где $G_\alpha = J_{0a} - J_{an}$, $a = 1,\ldots,\sigma+k_s$, и пусть $AE'(U_i) = T_i \niplus AO(V_i)$, $i = 1,\ldots,s$. Алгебра $AE'(U_i)$ является, очевидно, алгеброй Евклида. Максимальная подалгебра K, для которой существует разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям теоремы 2, разлагается в прямую сумму подалгебр $AE'(U_i)$ и $AO(W_j)$, т.е.

$$K = AE(U_1) \oplus \cdots \oplus AE(U_s) \oplus AO(W_1) \oplus \cdots \oplus AO(W_t).$$

Пусть L — любая другая подалгебра, обладающая указанным разложением пространства $V_{(1)}$. Тогда $L \subset K$ и L является подпрямой суммой подалгебр $\bar{\Phi}_i \subset AE(U_i)$ и $F_j \subset AO(W_j)$. Очевидно, F_j — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W_j)$, а U_i содержит только следующие $\bar{\Phi}_i$-инвариантные подпространства: 0, $\langle P_0+P_n\rangle$, U_i. Алгебры $\bar{\Phi}_i$ и F_j будем называть элементарными частями алгебры L и записывать это так:

$$L = \bar{\Phi}_1 \dotplus \cdots \dotplus \bar{\Phi}_s \dotplus F_1 \dotplus \cdots \dotplus F_t. \qquad (4)$$

Определим структуру каждой из подалгебр $\bar{\Phi}_i$. Так как в U_i существует только одно нетривиальное подпространство $\langle P_0+P_n\rangle$, инвариантное относительно $\bar{\Phi}_i$, то проекция Φ_i алгебры $\bar{\Phi}_i$ на $AO(V_i)$ действует неприводимо на V_i. Следовательно, подалгебра Φ_i действует вполне приводимо на подпространстве T_i и потому обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $\bar{\Phi}_i$ [7]. Поэтому $\bar{\Phi}_i = T_i \oplus \Phi_i$.

Используем разложение (4) и введем понятие примарной части алгебры L. С этой целью рассмотрим два множества подалгебр $\mathfrak{M}_1 = \{\bar{\Phi}_1,\ldots,\bar{\Phi}_s\}$ и $\mathfrak{M}_2 = \{F_1,\ldots,F_t\}$. В п. 3 было определено отношение эквивалентности на множестве $\mathfrak{M}_2$, которое проводит разбиение $\mathfrak{M}_2$ на классы $\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_t$. Подалгебры $F_{k_1}, F_{k_2}, \ldots, F_{k_{n_j}}$, входящие в класс $\mathfrak{U}_j$, определяют примарную часть $A_j(d_j;n_j)$, являющуюся подпрямой суммой подалгебр $F_{k_1}, F_{k_2},\ldots,F_{k_{n_j}}$. Здесь d_j — размерность подпространств $W_{k_1}, W_{k_2},\ldots,W_{k_{n_j}}$.

Перейдем к определению примарных частей алгебры L, которые строятся на основе элементарных частей $\bar{\Phi}_i$. Обозначим через τ_i проектирование L на $\bar{\Phi}_i$, а через Φ_{ij} алгебру $(\tau_i+\tau_j)(L)$ $(i \neq j;\ i,j = 1,\ldots,s)$. Пусть N — произвольное L-инвариантное подпространство $V_{(1)}$, θ_i — проектирование N на U_i, и $N_{ij} =$

$(\theta_i+\theta_j)(N)$. Допустим, что $\theta_i(N)=U_i$, $\theta_j(N)=U_j$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Если подпространство N_{ij} неразложимо в сумму подпространств U_i и U_j, то $\bar{\Phi}_{ij}=(T_i\oplus T_j)\oplus(\Phi_i\dot{+}\Phi_j)$, где $\Phi_i\dot{+}\Phi_j$ — примарная подалгебра алгебры $AO(V_i\oplus V_j)$.*

Введем на множестве $\mathfrak{M}_1$ отношение эквивалентности следующим образом. Две подалгебры $\bar{\Phi}_i,\bar{\Phi}_j\in\mathfrak{M}_1$ будем называть эквивалентными, если $\bar{\Phi}_{ij}=(T_i\oplus T_j)\oplus(\Phi_i\dot{+}\Phi_j)$, где $\Phi_i\dot{+}\Phi_j$ — примарная подалгебра алгебры $AO(V_i\oplus V_j)$. Данное отношение проводит разбиение множества $\mathfrak{M}_1$ на классы $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_i$. Если $\Phi_{h_1},\ldots,\Phi_{h_{m_i}}\in\mathfrak{R}_i$, то через $B_i(r_i;m_i)$ обозначим подалгебру $B_i(r_i;m_i)=(\tau_{h_1}+\cdots+\tau_{h_{m_i}})(L)$. Здесь r_i — размерность пространств $V_{h_1},\ldots,V_{h_{m_i}}$. Согласно этому определению примарная часть $B_i(r_i;m_i)$ имеет следующий вид:

$$B_i(r_i;m_i)=(T_{h_1}\oplus\cdots\oplus T_{h_{m_i}})\oplus(\Phi_{h_1}\dot{+}\cdots\dot{+}\Phi_{h_{m_i}}),$$

где $\Phi_{h_1}\dot{+}\cdots\dot{+}\Phi_{h_{m_i}}$ является примарной подалгеброй алгебры $AO(V_{h_1}\oplus\cdots\oplus V_{h_{m_i}})$. Таким образом, произвольная подалгебра L класса 1 алгебры $AO(1,n)$, обладающая нулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$, разлагается в подпрямую сумму примарных подалгебр

$$L=B_1(r_1;m_1)\dot{+}\cdots\dot{+}B_t(r_t;m_t)\dot{+}A_1(d_1;n_1)\dot{+}\cdots\dot{+}A_s(d_s;n_s). \tag{5}$$

Если $t=0$, то в разложении (5) примарные части $B_i(r_i;m_i)$ отсутствуют и мы получаем следующее разложение подалгебры L:

$$L=A_1(d_1;n_1)\dot{+}\cdots\dot{+}A_s(d_s;n_s). \tag{6}$$

Разложения (5) и (6) будем называть каноническими разложениями алгебры L. Используя каноническое разложение алгебры L, нетрудно дать классификацию всех L-инвариантных подпространств пространства V с точностью до $O(1,n)$-сопряженности.

5. Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. Опишем все максимальные подалгебры L ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$, удовлетворяющие условию $L\cap V=\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$. При описании таких подалгебр можно предполагать, что $L\cap V=0$. Обозначим через π проектирование $AP(1,n)$ на $AO(1,n)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 2. *Пусть F — подалгебра класса 1 алгебры $AO(1,n)$, совпадающая со своей примарной частью $B_1(r_1;m_1)$, и $r_1>1$. Любая подалгебра $L\subset AP(1,n)$, удовлетворяющая условиям $\pi(L)=F$ и $L\cap V=0$, содержит подалгебру, которая $P(1,n)$-сопряжена подалгебре L_1 с базисом $G_1+\lambda_1P_1,\ldots,G_{r_1}+\lambda_1P_{r_1},\ldots,G_{(m_1-1)r_1+1}+\lambda_{m_1}P_{(m_1-1)r_1+1},\ldots,G_{m_1r_1}+\lambda_{m_1}P_{m_1r_1}$.*

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$AE(n-l-1)=\langle P_{l+1},\ldots,P_{n-1},J_{l+1,l+2},\ldots,J_{n-2,n-1}\rangle,\quad 0\le l\le n-2;$$
$$AO(l)=\langle J_{12},\ldots,J_{l-1,l}\rangle,\quad 2\le l\le n;$$
$$AO(l_1;l_2)=\langle J_{l_1+1,l_1+2},\ldots,J_{l_1+l_2-1,l_1+l_2}\rangle,\quad 0\le l_1<l_2,\ l_1+l_2\le n;$$

$$AE'(l) = \langle G_1, \dots, G_l, J_{12}, \dots, J_{l-1,l}\rangle;$$
$$A\tilde{E}'(l) = AE'(l) \oplus \langle J_{0n}\rangle;$$
$$\Phi_1(\lambda_1) = \langle G_1 + \lambda_1 P_1, \dots, G_{r_1} + \lambda_1 P_{r_1}\rangle \oplus AO(r_1);$$
$$\Phi_2(\lambda_2) = \langle G_{r_1+1} + \lambda_2 P_{r_1+1}, \dots, G_{r_1+r_2} + \lambda_2 P_{r_1+r_2}\rangle \oplus AO(r_1; r_2);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Phi_t(\lambda_t) = \langle G_{\sigma+1} + \lambda_t P_{\sigma+1}, \dots, G_{\sigma+r_t} + \lambda_t P_{\sigma+r_t}\rangle \oplus AO(\sigma; r_t),$$

где $\sigma = r_1 + r_2 + \dots + r_{t-1}$.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AE(n-1)$;
2) $L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 1 < l < n$;
3) $L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 1 \le l \le n-1$;
4) $L_4 = \langle J_{0n}\rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 2 \le l \le n-1$;
5) $L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-1), \quad 2 \le l \le n-1$;
6) $L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \oplus AO(l_1; l_2) \oplus AE(n-l-1), \quad l = l_1 + l_2$;
7) $L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n\rangle \oplus AE(n-2)$;
8) $L_8 = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \dots \oplus \Phi_t \oplus AE(n-\sigma-r_t-1)$;
9) $L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1\rangle \oplus AE(n-2)$;
10) $L_{10} = (AE'(l) \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{l+1}\rangle) \oplus AE(n-l-2)$;
11) $L_{11} = \langle J_{12} + \alpha P_0\rangle \oplus AE(n-2)$.

Доказательство. Пусть L — произвольная подалгебра класса 1 алгебры $AP(1,n)$ и $\pi(L) = F$ обладает каноническим разложением (5). Как уже отмечалось, можно предполагать, что $L \cap V = 0$. Рассмотрим подробно случай, когда проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ равна нулю (остальные случаи рассматриваются аналогично). Допустим вначале, что все r_i больше единицы. Согласно результатам, изложенным в п. 4, $B_1(r_1; m_1) = (T_1 \oplus \dots \oplus T_{m_1}) \oplus (\Phi_1 \dotplus \dots \dotplus \Phi_{m_1})$. Из предложения 2 вытекает, что LL содержит подалгебру $L_1 = \langle G_1 + \lambda_1 P_1, \dots, G_{r_1} + \lambda_1 P_{r_1}$. Полная система инвариантов подалгебры L_1 состоит из функций $x_0 - x_n$,

$$\varphi(x) = -x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n - \lambda_1}\left(x_1^2 + \dots + x_{r_1}^2\right) + x_n^2,$$

$x_{r_1+1}, \dots, x_{n-1}$. Поэтому любой инвариант f алгебры L является функцией вида $f(x_0 - x_n, \varphi(x), x_{r_1+1}, \dots, x_{n-1})$. Так как каждая из этих функций f является инвариантом подалгебры $AO(V_1) = \langle J_{12}, \dots, J_{r_1-1,r_1}\rangle$, то ввиду максимальности L имеем $AO(V_1) \subset L$ и потому $m_1 = 1$. Следовательно, $\Phi_1 = AO(V_1)$ и подалгебра $K_1 = L_1 \oplus AO(V_1)$ выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = K_1 \oplus L'$.

Рассмотрим далее примарную часть $B_2(r_2; m_2)$ алгебры F. Аналогичными рассуждениями доказываем, что $m_2 = 1$ и L' содержит подалгебру $K_2 = L_2 \oplus AO(V_2)$, $L_2 = \langle G_{r_1+1} + \lambda_2 P_{r_1+1}, \dots, G_{r_1+r_2} + \lambda_2 P_{r_1+r_2}\rangle$, которая выделяется в L' прямым слагаемым. Значит, $L = K_1 + K_2 \oplus L''$. Полная система инвариантов подалгебры $K_1 \oplus K_2$ состоит из функций $x_0 - x_n$ и

$$-x_0^2+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_1}\left(x_1^2+\cdots+x_{r_1}^2\right)+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_2}\left(x_{r_1+1}^2+\cdots+x_{r_1+r_2}^2\right)+x_n^2,$$

$x_{r_1+r_2+1}, \ldots, x_{n-1}$. Через t шагов получаем $L = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_t \oplus \bar{L}$, где $K_i = L_i \oplus AO(V_i)$, $L_i = \langle G_{\sigma_i+1}+\lambda_i P_{\sigma_i+1}, \ldots, G_{\sigma_i+r_i}+\lambda_i P_{\sigma_i+r_i}\rangle$, $\sigma_i = r_1+\cdots+r_{i-1}$, а $\bar{L} \subset \langle P_{\sigma+r_t+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle \oplus A_1(d_1;n_1) \dot{+} \cdots \dot{+} A_s(d_s;n_s)$. Отсюда вытекает, что функции $x_0 - x_n$ и

$$-x_0^2+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_1}\left(x_1^2+\cdots+x_{r_1}^2\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_t}\left(x_{\sigma+1}^2+\cdots+x_{\sigma+r_t}^2\right)+x_n^2,$$

являются инвариантами алгебры L. Так как полная система инвариантов алгебры L состоит из двух инвариантов, то $s=0$. Следовательно, из условия $L \cap V = 0$. получаем $\bar{L} = 0$ и $\sigma + r_t = n-1$, т.е. алгебра L относится к типу 8 теоремы 3.

Рассмотрим далее случай, когда $r_1 = 1$, а все остальные r_i больше единицы. Так как подалгебры K_i, соответствующие примарным частям $B_i(r_i;m_i)$, $i = 1,2,\ldots,t-1$, выделяются прямыми слагаемыми в алгебре L, то достаточно ограничиться рассмотрением случая $t=1$. Тогда $B_1(1;m_1) = \langle G_1, \ldots, G_{m_1}\rangle$ и алгебра L содержит подалгебру L_1 с базисом

$$X_1 = G_1 + d_{11}P_1 + \cdots + \alpha_{1,m_1}P_{m_1} + Y_1 + \gamma_1(P_0 - P_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{m_1} = G_{m_1} + \alpha_{m_1,1}P_1 + \cdots + \alpha_{m_1,m_1}P_{m_1} + Y_{m_1} + \gamma_{m_1}(P_0 - P_n),$$

где $Y_1, \ldots, Y_{m_1} \in \bar{L} = \langle P_{m_1+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle \oplus A_1(d_1;n_1) \dot{+} \cdots \dot{+} A_s(d_s;n_s)$, и в случае $m_1 > 1$ $[Y_i, Y_j] \in \langle P_{m_1+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle$, $i,j = 1,\ldots,m_1$. Очевидно, алгебра L представляется в виде суммы $L = L_1 + L_A$, где L_A — подпространство алгебры $\langle P_0 + P_n\rangle \oplus \bar{L}$. Поэтому функция $x_0 - x_n$ является инвариантом алгебры L. По условию ранг алгебры L равен $n-1$, следовательно, $s=0$ или $s=1$.

Если $s=1$, то $n_1 = 1$ и функция $x_{m_1+1}^2 + \cdots + x_{m_1+d_1}^2$ является инвариантом алгебры L. Так как инварианты $x_0 - x_n$ и $x_{m_1+1}^2 + \cdots + x_{m_1+d_1}^2$ алгебры L функционально независимы, то из условия $L \cap V = 0$ получаем, что $m_1 + d_1 = n-1$ и подалгебра $AO(W_1) = \langle J_{m_1+1,m_1+2}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle$ содержится в L. Таким образом, $Y_1 = \cdots = Y_{m_1} = 0$ и $L = L_1 \oplus AO(W_1)$. Ранг алгебры L равен $n-2$, что противоречит условию. Следовательно, $s=0$ и потому $m_1 = n-1$. Очевидно $[X_i, X_j] = (\alpha_{ji} - \alpha_{ij})(P_0 - P_n) - 2\gamma_i P_i + 2\gamma_j P_j$. Так как $L \cap V = 0$, то $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\gamma_i = \gamma_j = 0$ и потому матрица $A = (\alpha_{ij})$ симметрическая. Но тогда существует такая ортогональная матрица $C \in O(m_1)$, что $CAC^{-1} = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}]$. Отсюда следует, что с точностью до $P(1,n)$-сопряженности можно предполагать, что $X_1 = G_1 + \lambda_1 P_1, \ldots, X_{n-1} = G_{n-1} + \lambda_{n-1}P_{n-1}$. Поэтому алгебра L имеет два функционально независимых инварианта $x_0 - x_n$ и

$$-x_0^2+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_1}x_1^2+\cdots+\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\lambda_{n-1}}x_{n-1}^2+x_n^2.$$

Таким образом, L относится к типу 8 теоремы.

Если $n = 2$, то алгебра L с точностью до $P(1,n)$-сопряженности содержит элемент $X_1 = G_1 + (P_0 - P_2)$ и потому $L = \langle G_1 + P_0 - P_2\rangle$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
3. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре, Препринт 86.86, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 40 с.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
5. Баранник А.Ф., Симметрийная редукция и точные решения уравнения Лиувилля, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 12, 3–5.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Баранник А.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт 86.87, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 48 с.
8. Тауфик М.С., О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли, в сб. Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, Яросл. ун-т, 1980, 86–115.

Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК

Описаны максимальные подалгебры L ранга n расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$, где $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$ — пространство трансляций. Построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция уравнений Даламбера и Лиувилля по каждой из них, и найдены широкие классы точных решений данных уравнений.

Настоящая статья является продолжением [1].

6. Максимальные подалгебры ранга n алгеры $A\tilde{P}(1,n)$. Опишем максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащиеся в $AP(1,n)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Центральное место занимает следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга r, $2 \le r \le n$, алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Если $L \not\subset AP(1,n)$, то $L = K \oplus \langle S' \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $r-1$ алгебры $AP(1,n)$, а $S' = S + X$, $X \in AP(1,n)$.*

Таблица 1

Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$	Нормализатор алгебры в $A\tilde{P}(1,n)$
$L_1 = AE(n-1)$	$L_1 \oplus \langle J_{0n}, P_0, P_n, S \rangle$
$L_2 = AO(l) \oplus AE(n-l)$	$L_2 \oplus \langle S \rangle$
$L_3 = AE'(l) \oplus AE(n-l-1)$	$L_3 \oplus \langle J_{0n}, P_0 + P_n, S \rangle$
$L_4 = \langle J_{0n} \rangle \oplus AO(l) \oplus AE(n-l-1)$	$L_4 \oplus \langle S \rangle$
$L_5 = A\tilde{E}'(l) \oplus AE(n-l-2)$	$L_5 \oplus \langle S, P_{l+1} \rangle$
$L_6 = A\tilde{E}'(l_1) \oplus AO(l_1, l_2) \oplus AE(n-l-1)$	$L_6 \oplus \langle S \rangle$
$L_7 = \langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE(n-2)$	$L_7 \oplus \langle J_{0n} - 2S \rangle$
$L_8 = \Phi_1 \oplus \cdots \oplus \Phi_t \oplus AE(n-\sigma-r_t-1)$	$L_8 \oplus \langle J_{0n} - 2S \rangle$
$L_9 = \langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE(n-2)$	L_9
$L_{10} = (A\tilde{E}'(l) \oplus \langle J_{0n} + dP_{l+1} \rangle) \oplus AE(n-l-2)$	L_{10}
$L_{11} = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle \oplus AE(n-2)$	L_{11}

Предложение 3 легко доказывается на основании теоремы об универсальном инварианте. Из этого предложения вытекает, что описание максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащихся в $AP(1,n)$, сводится к нахождению всех расширений максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle S + X \rangle$, $X \in AP(1,n)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть K — произвольная максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. Из табл. 1 вытекает, что ее нормализатор в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$ представляется в виде $K \oplus F$, где F — подалгебра. Следовательно, максимальная подалгебра L ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, содержащая K, является полупрямой суммой $L = K \oplus \langle S + X \rangle$, где $S + X \in F$. Пусть $L' = K \oplus \langle S + X' \rangle$,

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 12, С. 1693–1700.

$S + X' \in F$, — какая-нибудь другая максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 4. *Две подалгебры $L = K \oplus \langle S + X\rangle$ и $L' = K \oplus \langle S + X'\rangle$ $\tilde{P}(1,n)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\langle S + X\rangle$ и $\langle S + X'\rangle$ сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры F.*

Из предложений 3 и 4 вытекает следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга n алгебры $AP(1,n)$, не содержащихся в $AP(1,n)$.

1) Проводим классификацию всех максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ с точностью до $P(1,n)$-сопряженности.

2) Для максимальной подалгебры $K \subset AP(1,n)$ ранга $n-1$ находим ее нормализатор $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,n)}K$ в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$ (см. табл. 1). Пусть, например, $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,n)}K = K \oplus F$.

3) Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов всех одномерных подалгебр алгебры F с ненулевой проекцией на $\langle S\rangle$.

4) Если $\langle S + X_1\rangle, \ldots, \langle S + X_t\rangle$ — все одномерные подалгебры алгебры F, то $K_1 = K \oplus \langle S + X_1\rangle, \ldots, K_t = K \oplus \langle S + X_t\rangle$ — все максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, являющиеся расширениями подалгебры K.

Используя указанный алгоритм и результаты, изложенные в п. 5, находим список максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, не содержащихся в $AP(1,n)$ и удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n\rangle$.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ с ненулевой проекцией на $\langle S\rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n\rangle$. Тогда L сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_{1,1} = L_1 \oplus \langle S\rangle$;
2) $L_{1,2} = L_1 \oplus \langle J_{0n} + \alpha S\rangle \quad (\alpha \neq 0)$;
3) $L_{1,3} = L_1 \oplus \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n\rangle$;
4) $L_{2,1} = L_2 \oplus \langle S\rangle$;
5) $L_{3,1} = L_3 \oplus \langle S\rangle$;
6) $L_{3,2} = L_3 \oplus \langle J_{0n} + \alpha S\rangle \quad (\alpha \neq 0)$;
7) $L_{3,3} = L_3 \oplus \langle J_{0n} + S + P_0 + P_n\rangle$;
8) $L_{4,1} = L_4 \oplus \langle S\rangle$;
9) $L_{5,1} = L_5 \oplus \langle S\rangle$;
10) $L_{6,1} = L_6 \oplus \langle S\rangle$;
11) $L_{7,1} = L_7 \oplus \langle J_{0n} - 2S\rangle$;
12) $L_{8,1} = L_8 \oplus \langle J_{0n} - S\rangle$.

Введем далее в рассмотрение расширенную алгебру Евклида $A\tilde{E}(n)$, обладающую базисом $J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b$, $P_a = \partial_a$, S_1, где $S_1 = -x^a\partial_a + 2\partial_u$ или $S_1 = -x^a\partial_a + \frac{2u}{k-1}\partial_u$; $a, b = 1, \ldots, n$. Генераторы поворотов J_{ab} порождают ортогональную алгебру $AO(n)$. Используя указанный выше алгоритм, приходим к следующим результатам.

Предложение 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{E}(3)$. Тогда L $\tilde{E}(3)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{12}, S_1\rangle$; 2) $L_2 = \langle P_3, S_1\rangle$;
3) $L_3 = \langle J_{12} + cS_1, P_3\rangle \quad (c > 0)$; 4) $L_4 = \langle J_{12}, P_1, P_2\rangle$;
5) $L_5 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 6) $L_6 = \langle J_{12}, P_3\rangle$.

Предложение 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{E}(4)$ и $L \cap \langle P_1, \ldots, P_n \rangle = 0$. Тогда L $\tilde{E}(4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{12}, J_{34}, S_1 \rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S_1 \rangle$; 3) $L_3 = AO(4)$.

7. Редукция и точные решения уравнения Лиувилля. В настоящем пункте подалгебры алгебр $A\tilde{P}(1,n)$ и $A\tilde{E}(n)$ используются для поиска инвариантных решений уравнения (1) при $F(u) = \lambda \exp u$. Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ и подпространство $L \cap V$ изотропно. В силу теоремы Витта можно предполагать, что $P_0 + P_1 \in L \cap V$. Тогда любое решение уравнения (1), инвариантное относительно L, имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$, и потому

$$u_{11} + \cdots + u_{n-1,n-1} - \lambda \exp u = 0. \tag{7}$$

Таким образом, указанный случай сводится к рассмотрению уравнения (7) в евклидовом пространстве R_{n-1}. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (7) является расширенная алгебра Евклида $A\tilde{E}(n-1)$, обладающая базисом $J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b$, $P_a = \partial_a$, $S_1 = -x^a\partial_a + 2\partial_u$; $a, b = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, подалгебры алгебры $A\tilde{E}(n-1)$ можно использовать для поиска инвариантных решений уравнения (7), а значит, и уравнения (1). Для иллюстрации остановимся подробно на случае $n = 4$. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в предложении 5; запись L: $f_1, \ldots, f_n$ будет означать, что функции $f_1, \ldots, f_n$ образуют полную систему инвариантов алгебры L:

$$\begin{aligned}
&L_1\colon \quad \omega' = u + 2\ln x_3, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2};\\
&L_2\colon \quad \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};\\
&L_3\colon \quad \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + c \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};\\
&L_4\colon \quad \omega' = u, \quad \omega = x_3;\\
&L_5\colon \quad \omega' = u, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;\\
&L_6\colon \quad \omega' = u, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2.
\end{aligned}$$

Анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\omega(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
&L_1\colon \quad 4(\omega + \omega^2)\ddot{\varphi} + (6\omega + 4)\dot{\varphi} - 2 - \lambda \exp\varphi = 0;\\
&L_2, L_4\colon \quad \ddot{\varphi} - \lambda \exp\varphi = 0; \qquad L_3\colon \quad (4_c^2)\ddot{\varphi} - \lambda \exp\varphi = 0;\\
&L_5\colon \quad 4\omega\ddot{\varphi} + 6\dot{\varphi} - \lambda \exp\varphi = 0; \qquad L_6\colon \quad 4\omega\ddot{\varphi} + 4\dot{\varphi} - \lambda \exp\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Каждому решению редуцированного уравнения соответствует решение уравнения (7), а значит, и уравнения (1). Рассмотрим, например, уравнение $\ddot{\varphi} - \lambda_1 \exp\varphi = 0$, $\lambda_1 = \lambda/(4 + c^2)$. Оно имеет следующие решения [2]:

$$\varphi = \ln\left\{\frac{C_1}{2\lambda_1}\sec^2\left[\frac{\sqrt{C_1}}{2}(\omega + C_2)\right]\right\}, \qquad C_1 > 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad C_2 \in R,$$

$$\varphi = \ln\left\{\frac{2C_1C_2\exp(\sqrt{C_1}\omega)}{\lambda_1[1 - C_2\exp(\sqrt{C_1}\omega)]^2}\right\}, \qquad C_1 > 0, \quad \lambda_1 C_2 > 0,$$

$$\varphi = -\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\omega + C\right)^2.$$

Следовательно, получаем такие решения уравнения (1):

$$u = \ln\left\{\frac{\theta_1}{2\lambda_1\omega_1}\sec^2\left[\frac{\sqrt{\theta_1}}{2}(\omega+\theta_2)\right]\right\},$$
$$u = \ln\left\{\frac{2\theta_1\theta_3\exp\sqrt{\theta_1}\omega}{\lambda_1\omega_1[1-\theta_3\exp\sqrt{\theta_1}\omega]^2}\right\},$$
$$u = -\ln\left\{\omega_1\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\omega+\theta_2\right)^2\right\},$$

где $\omega_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\theta_1 = \theta_1(x_0 - x_4)$ и $\lambda_1\theta_3 = \lambda_1\theta_3(x_0 - x_4)$ — положительно определенные дифференцируемые функции от переменной $x_0 - x_4$, $\theta_2 = \theta_2(x_0 - x_4)$ — произвольная дифференцируемая функция от переменной $x_0 - x_4$.

Пусть далее L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ и подпространство $L \cap V$ не вырождено. С учетом рассмотренного случая можно предполагать, что $L \cap V = \langle P_0\rangle$ или $L \cap V \subset \langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Если $L \cap V = \langle P_0\rangle$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L, не зависит от x_0, и потому

$$u_{11} + \cdots + u_{nn} - \lambda\exp u = 0. \tag{8}$$

Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (8) является расширенная алгебра Евклида $A\tilde{E}(n)$. Поэтому подалгебры L алгебры $A\tilde{E}(n)$, удовлетворяющие условию $L \cap \langle P_1,\dots,P_n\rangle = 0$, можно использовать для поиска решений уравнения (8), а значит, и уравнения (1). Рассмотрим случай $n = 4$. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в предложении 6:

$$L_1:\quad \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right),\quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2},$$
$$L_2:\quad \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right),\quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_4^2},$$
$$L_3:\quad \omega' = u,\quad \omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Применяя анзац $\omega' = \varphi(\omega)$, редуцируем уравнение (8) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_1:\quad 4\omega^2(1+\omega)\ddot{\varphi} + 4\omega(1+\omega)\dot{\varphi} - \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$L_2:\quad 4\omega^2(1+\omega)\ddot{\varphi} + 6\omega(1+\omega)\dot{\varphi} - 2 - \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$L_3:\quad 4\omega\ddot{\varphi} + 8\dot{\varphi} - \lambda\exp\varphi = 0.$$

Каждому решению редуцированного уравнения соответствует решение уравнения (8), а значит, и уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда $L \cap V \subset \langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Будем предполагать, что L не содержится в $AP(1,n)$ и ее ранг равен n. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 4:

$$L_{1,1}\colon\ \ \omega' = u + 2\ln(x_0 + x_n), \quad \omega = x_0/x_n,$$

$$L_{1,2}\colon\ \ \omega' = u - \frac{2\alpha}{1-\alpha}\ln(x_0+x_n), \quad \omega = (1+\alpha)\ln(x_0+x_n)+(1-\alpha)\ln(x_0-x_n),$$

$$L_{1,3}\colon\ \ \omega' = u + \ln(x_0 - x_n), \quad \omega = x_0 + x_n + \ln(x_0 - x_n),$$

$$L_{2,1}\colon\ \ \omega' = u + 2\ln x_0, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_l^2}{x_0^2},$$

$$L_{3,1}\colon\ \ \omega' = u + 2\ln(x_0 - x_n), \quad \omega = \frac{\left(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2\right)^{1/2}}{x_0 - x_n},$$

$$L_{3,2}\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2\right),$$

$$\omega = \delta\ln\left(x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2\right) - \ln(x_0 - x_n),$$

$$L_{3,3}\colon\ \ \omega' = u + \ln(x_0 - x_n), \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2}{x_0 - x_n} + \ln(x_0 - x_n),$$

$$L_{4,1}\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_1^2 + \dots + x_l^2\right), \quad \omega = \frac{x_1^2 + \dots + x_l^2}{x_0^2 - x_n^2},$$

$$L_{5,1}\colon\ \ \omega' = u + 2\ln x_{l+1}, \quad w = \frac{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_l^2 - x_n^2}{x_{l+1}^2},$$

$$L_{6,1}\colon\ \ \omega' = u + \ln\left(x_{l_1+1}^2 + \dots + x_{l_1+l_2}^2\right), \quad \omega = \frac{x_{l_1+1}^2 + \dots + x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{l_1}^2 - x_n^2},$$

$$L_{7,1}\colon\ \ \omega' = u + 2\ln\left[(x_0 - x_n)^2 - 4x_1\right],$$

$$\omega = \frac{\left[(x_0 - x_n)^2 - 4x_1\right]^3}{\left[6(x_0 + x_n) - 6x_3(x_0 - x_n) + (x_0 - x_n)^3\right]^2},$$

$$L_{8,1}\colon\ \ \omega' = u + \ln\Bigg[-x_0^2 + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_1}\left(x_1^2 + \dots + x_{r_1}^2\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \lambda_t}\left(x_{\sigma+1}^2 + \dots + x_{\sigma+r_t}^2\right) + x_n^2\Bigg], \qquad \omega = x_0 - x_n.$$

Анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение Лиувилля к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_{1,1}\colon\ \ (1+\omega)^2(1-\omega^2)\ddot\varphi - 2\omega(1+\omega)^2\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{1,2}\colon\ \ 4(1-\alpha^2)\exp(-\omega)\ddot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{1,3}\colon\ \ 4\ddot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{2,1}\colon\ \ 4\omega(\omega-1)\ddot\varphi + (6\omega - 2l)\dot\varphi + 2 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{3,1}\colon\ \ 4\omega^3\ddot\varphi + 2\omega^2(2+l)\dot\varphi - \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{3,2}\colon\ \ 4\delta(\delta-1)\ddot\varphi + 2\delta l\dot\varphi - 2l + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{3,3}\colon\ \ 4\ddot\varphi + 2l\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{4,1}\colon\ \ 4\omega^2(\omega-1)\ddot\varphi + (4\omega^2 - 2l\omega)\dot\varphi - 2l - 4 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{5,1}\colon\ \ 4\omega(1-\omega)\ddot\varphi + (4 + 2l - 6\omega)\dot\varphi - 2 + \lambda\exp\varphi = 0,$$

$$L_{6,1}:\quad 4\omega(1-\omega)\ddot\varphi+(4+2l_1+2l_2\omega-8\omega)\dot\varphi+2l_2-4+\lambda\exp\varphi=0,$$
$$L_{7,1}:\quad 144\omega^2(\omega-1)\ddot\varphi+24\omega(9\omega-4)\dot\varphi-32+\lambda\exp\varphi=0,$$
$$L_{8,1}:\quad \left(1+\frac{\omega}{\omega+\lambda_1}+\dots+\frac{\omega}{\omega+\lambda_t}\right)-\lambda\exp\varphi=0.$$

Используя редуцированные уравнения, соответствующие подалгебрам $L_{4,1}$ и $L_{3,2}$, получаем такие решения уравнения Лиувилля:

$$L_{4,1}:\quad u=\ln\frac{4-2l}{\lambda\left(x_1^2+\dots+x_l^2\right)},$$
$$L_{3,2}(\delta=0):\quad u=\ln\frac{2l}{\lambda\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2\right)},$$
$$L_{3,2}(\delta=1):u=-\ln\left\{\left(-\frac{\lambda}{2Cl}\right)\left[x_0-x_n-C\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2\right)\right]\right\}.$$

8. Редукция и точные решения уравнения Даламбера. В настоящем пункте подалгебры алгебры $A\tilde P(1,n)$ используются для поиска инвариантных решений нелинейного уравнения (1) при $F(u)=\lambda u^k$. Следуя п. 7, мы должны рассмотреть три случая в зависимости от структуры пространства $L\cap V$, где L — подалгебра алгебры $A\tilde P(1,n)$. Рассмотрим один из этих случаев, а именно: будем предполагать, что $L\not\subset AP(1,n)$, $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$ и ранг L равен n. Запишем полные системы инвариантов подалгебр, представленных в теореме 4, за исключением подалгебр $L_{1,i}$, $i=1,2,3$; $L_{7,1}$ и $L_{8,1}$:

$$L_{2,1}:\quad \omega'=\frac{u}{x_0^{2/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_l^2}{x_0^2},$$
$$L_{3,1}:\quad \omega'=\frac{u}{(x_0-x_n)^{2/(1-k)}},\quad \omega=\frac{\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}}{x_0-x_n},$$
$$L_{3,2}:\quad \frac{u}{\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/(1-k)}},$$
$$\omega=\delta\ln\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2\right)-\ln(x_0-x_n),$$
$$L_{3,3}:\quad \omega'=\frac{u}{(x_0-x_n)^{1/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2}{x_0-x_n}+\ln(x_0-x_n),$$
$$L_{4,1}:\quad \omega'=\frac{u}{\left(x_1^2+\dots+x_l^2\right)^{1/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_1^2+\dots+x_l^2}{x_0^2-x_n^2},$$
$$L_{5,1}:\quad \omega'=\frac{u}{x_{l+1}^{2/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2-x_n^2}{x_{l+1}^2},$$
$$L_{6,1}:\quad \omega'=\frac{u}{\left(x_{l_1+1}^2+\dots+x_{l_1+l_2}^2\right)^{1/(1-k)}},\quad \omega=\frac{x_{l_1+1}^2+\dots+x_{l_1+l_2}^2}{x_0^2-x_1^2-\dots-x_{l_1}^2-x_n^2}.$$

Применяя анзац $\omega'=\varphi(\omega)$, редуцируем уравнение Даламбера к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$:

$$L_{2,1}:\quad 4(\omega^2-\omega)\ddot\varphi+\left(-\frac{8}{1-k}+6\omega-4l\right)\dot\varphi+\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$
$$L_{3,1}:\quad -\ddot\varphi+\frac{4+l(1-k)}{1-k}\frac{1}{\omega}\dot\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{3,2}\colon\quad 4\delta(\delta-1)\ddot{\varphi}+\left(\frac{8\delta-4}{1-k}+2\delta l\right)\dot{\varphi}+\left[\frac{4k}{(1-k)^2}+\frac{2(l+2)}{1-k}\right]\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{3,3}\colon\quad 4\ddot{\varphi}+\frac{4+2l-2lk}{1-k}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{4,1}\colon\quad 4\omega^2(1-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8}{1-k}+4\omega^2-2\omega l\right)\dot{\varphi}-\frac{2l(l-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{5,1}\colon\quad 4(\omega-\omega^2)\ddot{\varphi}+\left(\frac{8}{1-k}+2l+4-6\omega\right)\dot{\varphi}-\frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0,$$

$$L_{6,1}\colon\quad 4(\omega-\omega^2)\ddot{\varphi}+\left(\frac{8}{1-k}2l_1+4-8\omega+2\omega l_2\right)\dot{\varphi}-$$
$$-\frac{2l_2(l-k)+4k}{(1-k)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Запишем некоторые точные решения уравнения Даламбера

$$L_{3,1}\colon\quad u^{-4/l}=\sigma(l)\left[\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)^{1/2}+C(x_0-x_n)\right]^2,$$
$$\sigma(l)=\frac{4\lambda}{l(l-2)},\quad k=\frac{4+l}{l},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}(\delta=0)\colon\quad u^{1-k}=\frac{\lambda(1-k)^2\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)}{2C\delta(k,l)}\frac{1-C(x_0-x_n)^{\sigma(k,l)/2}}{(x_0-x_n)^{\sigma(k,l)/2}},$$
$$\sigma(k,l)=l+2-kl,\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}(\delta=1)\colon\quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left[x_0-x_n-C\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right],$$
$$\sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2C(l-lk+2)},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}\colon\quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right),$$
$$\sigma(k,l)=-\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-lk+2)},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{3,2}\colon\quad u^{1-k}=\sigma_1(k,l)\frac{\left[(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}-C_0\left(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2\right)\right]^2}{(x_0-x_n)^{\sigma_2(k,l)}},$$
$$\sigma_1(k,l)=\frac{\lambda(1-k^2)}{4C(1+k)(2+l-kl)},\quad \sigma_2(k,l)=\frac{4+l-kl}{2},$$

$$L_{3,3}\colon\quad u^{2/l}=\sigma(l)\frac{x_0-x_n}{\left[(x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2)+(x_0-x_n)\{\ln(x_0-x_n)+C\}\right]^2},$$
$$k=\frac{2+l}{l},\quad \sigma(l)=-\frac{4l(l+1)}{\lambda},\quad 1\le l\le n-1,$$

$$L_{4,1}\colon\quad u^{1-k}=\sigma(k,l)\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right),$$
$$\sigma(k,l)=\frac{\lambda(1-k)^2}{2(l-lk+2k)},\quad 1\le l\le n-1.$$

1. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.

2. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1971, 576 с.

О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$. I

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО

Получено описание максимальных подалгебр ранга 3 и 4 расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(2,2)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения $\Box u + F(u) = 0$, где $F(u) = \lambda u^k$, $k \neq 1$, или $F(u) = \lambda \exp u$.

1. Введение. Рассмотрим нелинейное уравнение в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$

$$\Box u + F(u) = 0, \tag{1}$$

где $\Box u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44}$, $u_{\mu\nu} = \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $u \equiv u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; $\mu, \nu = 1,2,3,4$; F — гладкая функция. Известно [1], что если $F(u) = \lambda u^k$, $k \neq 1$, или $F(u) = \lambda \exp u$, то максимальной группой инвариантности уравнения (1) является расширенная группа Пуанкаре $\tilde{P}(2,2)$. Ее алгебра Ли $A\tilde{P}(2,2)$ реализуется следующими операторами:

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad S = -x^\alpha \partial_\alpha + \frac{2u}{k-1}\partial_u \quad \text{при } F = \lambda u^k,$$
$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad S = -x^\alpha \partial_\alpha + 2\partial_u \quad \text{при } F = \lambda \exp u,$$

где $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$, $\partial_u \equiv \partial/\partial u$, $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta, \nu = 1,2,3,4$.

В настоящей статье подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ используются для поиска инвариантных решений уравнения (1) при $F(u) = \lambda u^k$ (уравнение Даламбера) и $F(u) = \lambda \exp u$ (уравнение Лиувилля). С этой целью опишем максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, не содержащиеся в $AP(2,2)$. Если L — одна из таких подалгебр ранга 3, $\omega'(x,u)$, $\omega(x)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$. При описании максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ используется метод классификации подалгебр алгебры $AO(2,2)$, основанный на разбиении множества всех ее подалгебр на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом [2].

Статья состоит из двух частей. В первой части описаны максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Во второй части статьи построены инварианты этих максимальных подалгебр, проведена редукция по каждой из них и найдены точные решения уравнений Даламбера и Лиувилля.

Отметим, что редукция волнового уравнения (1) в пространстве Минковского $R_{1,3}$ осуществлена в работах [1, 3–6], а в пространствах $R_{2,2}$ и $R_{2,3}$ с использованием подалгебр алгебр $AP(2,2)$ и $AP(2,3)$ — в работах [7, 8].

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 8, С. 1122–1128.

2. Основные понятия. Расширенной группой Пуанкаре $\tilde{P}(2,2)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda\Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in O(2,2)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, $Y \in R^4$.

Пусть E_{ik} — матрица порядка 5, имеющая единицу на пересечении i-и строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах, $i,k = 1,\ldots,5$.

Тогда базис алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ образуют матрицы $J_{12} = E_{12} - E_{21}$, $L_{ab} = -E_{ab} + E_{ba}$; $a < b$; $a,b = 3,4,5$; $J_{ia} = -E_{ia} - E_{ai}$; $i = 1,2$; $a = 3,4,5$; $P_j = E_{j5}$; $j = 1,\ldots,5$; $S = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44}$. Они удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = g_{ab}P_c - g_{ac}P_b, \\ &J_{ab} = -J_{ba}, \quad [P_a, P_b] = 0, \quad [S, J_{ab}] = 0, \quad [S, P_a] = P_a, \end{aligned}$$

где $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{ab} = 0$ при $a \neq b$; $a,b,c,d = 1,2,3,4$. Генераторы поворотов J_{ab} порождают алгебру $AO(2,2)$, генераторы трансляций P_a порождают коммутативный идеал V, причем $A\tilde{P}(2,2) = AP(2,2) \oplus \langle S\rangle$, где $AP(2,2) = V \oplus AO(2,2)$, $A\tilde{O}(2,2) = AO(2,2) \oplus \langle S\rangle$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $\tilde{P}(2,2)$, $AG = \langle X_1,\ldots,X_s\rangle$ — алгебра Ли группы G. Непостоянная функция $f(x,u) = f(x_1,\ldots,x_4,u)$ называется инвариантом группы G, если $f(x,u)$ постоянна на G-орбите каждой точки (x,u), $x \in R_{2,2}$. Функция $f(x,u)$ является инвариантом G тогда и только тогда, когда $X_i f(x,u) = 0$ для всех $i = 1,\ldots,s$. Если r — ранг алгебры AG и $r < 5$, то существует система $s_1 = 5 - r$ функционально независимых инвариантов $f_1(x,u),\ldots,f_{s_1}(x,u)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант f группы G можно выразить через инварианты $f_1,\ldots,f_{s_1}$, т. е. $f(x,u) = \psi(f_1(x,u),\ldots,f_{s_1}(x,u))$. Эту систему инвариантов будем называть полной системой инвариантов группы G или алгебры AG.

Каждый внутренний автоморфизм $g \to hgh^{-1}$ группы Ли G индуцирует автоморфизм $X \to hXh^{-1}$ алгебры Ли AG. Этот автоморфизм будем называть G-автоморфизмом алгебры AG и обозначать символом φ_h. Подалгебры L_1 и L_2 алгебры AG будем называть G-сопряжениыми, если $hL_1h^{-1} = L_2$. Пусть L_1 и L_2 — подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Если для некоторого элемента $C \in \tilde{P}(2,2)$ подалгебры CL_1C^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры L_1, L_2 будем называть эквивалентными [7, 9]. В этом случае используем обозначение $L_1 \approx L_2$.

Если функции $f_{\underline{i}}(x)$, $i = 1,\ldots,k$, являются инвариантами ненулевой подалгебры L алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, то L будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций. Для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ существует максимальная алгебра инвариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций.

Предложение 1. *Пусть L_1, L_2 — подалгебры алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Для того чтобы $L_1 \approx L_2$, необходимо и достаточно, чтобы максимальные алгебры инвариантности полных систем инвариантов подалгебр L_1 и L_2 были $\tilde{P}(2,2)$-сопряженными.*

Подалгебра $L \subset AO(2,2)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(2,2)$ относится к классу $r > 0$ или имеет изотропный ранг r, если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L, равен r. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра L алгебры $AO(2,2)$ имеет изотропный ранг 0 или 2.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Если подпространство $L \cap V$ отлично от нуля и не является вполне изотропным, то в силу теоремы Витта можно предполагать, что $P_i \in L \cap V$ для некоторого $i \in \{1,2,3,4\}$. Так как $P_i = \partial/\partial x_i$, то инвариант алгебры L не зависит от переменной x_i, и потому рассматриваемый случай сводится к изучению уравнения (1) в пространстве $R_{1,2}$. Поскольку эти случаи детально рассматривались в [1, 3], то, следовательно, достаточно ограничиться изучением тех подалгебр $L \subset A\tilde{P}(2,2)$, для которых $L \cap V = 0$ либо $L \cap V$ является вполне изотропным. Пусть $L \cap V$ является вполне изотропным и $L \cap V = \langle P_1 + P_4 \rangle$.

Тогда любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно L, имеет вид $u = \varphi(x_1 - x_4, x_2, x_3)$, и потому $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + F(\varphi) = 0$. Таким образом, все свелось к рассмотрению уравнения (1) пространстве $R_{1,1}$. Учитывая это, достаточно изучить подалгебры $L \subset A\tilde{P}(2,2)$, для которых $L \cap V = 0$.

Таблица 1

№ п/п	Тип разложения пространства	Максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$
1	$(++--)$	$AO(2,2)$
2	$(++-)(-)$	$AO(2,1) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$
3	$(+)(+--)$	$AO(1,2) = \langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle$
4	$(++)(--)$	$AO(2) \oplus AO(2) = \langle J_{12} \rangle \oplus \langle J_{34} \rangle$
5	$(+)(+)(--)$	$AO(2) = \langle J_{34} \rangle$
6	$(++)(-)(-)$	$AO(2) = \langle J_{12} \rangle$

3. Подалгебры алгебры AO(2,2). Подалгебры алгебры $AO(2,2)$ изучены с точностью до $O(2,2)$-сопряженности в [9] на основе прямого разложения $AO(2,2) = AO(2,1) \oplus AO(2,1)$. В этом пункте классифицируем подалгебры алгебры $AO(2,2)$, используя другой подход, основанный на разбиении множества всех подалгебр алгебры $AO(2,2)$ на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом. Так как этот подход представляет самостоятельный интерес и может быть использован при изучении подалгебр алгебры $AO(2,n)$, $n > 2$, то остановимся на нем более подробно.

Найдем сначала все максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$, используя для этого тип разложения пространства V в прямую ортогональную сумму неприводимых подпространств. Пусть, например, L — максимальная подалгебра класса 0 алгебры $AO(2,2)$ и $V = V_1 \oplus V_2$ — прямая ортогональная сумма двух L-неприводнмых подпространств $V_1 = \langle P_1, P_2 \rangle$, $V_2 = \langle P_3, P_4 \rangle$. Будем говорить, что разложение пространства V относится к типу $(++)(--)$. Очевидно, подалгебра L совпадает с алгеброй $\langle J_{12} \oplus J_{34} \rangle$. Все максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$ приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что если подалгебра $L \subset AO(2,2)$ изотропного ранга 0 не является максимальной, то она либо неприводима, а потому сопряжена с алгеброй $\langle J_{25}+J_{34}, J_{24}-J_{35}, J_{23}-J_{45}, J_{23}\rangle$ [10], либо является подпрямой суммой подалгебр J_{23} и J_{45}. Во втором случае $L=\langle J_{23}+\gamma J_{45}\rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\mathrm{diag}[1,-1,1,1]$, отображает L на $\langle J_{23}-\gamma J_{45}\rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $\gamma>0$. Если $\gamma=1$, то алгебра $J_{23}+J_{45}$ оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство $\langle P_1+P_4, P_2+P_3\rangle$, что противоречит предположению об L. Таким образом, $L=\langle J_{12}+\gamma J_{34}\rangle$; $\gamma>0$, $\gamma\neq 1$.

Перейдем к рассмотрению подалгебр $L\subset AO(2,2)$ изотропного ранга 2. В силу теоремы Витта можно считать, что L оставляет инвариантным подпространство $V_{(2)}=\langle P_1+P_4, P_2+P_3\rangle$. Все такие подалгебры L содержатся в максимальной подалгебре $A\mathrm{Opt}(1,1)$ класса 2, которая является нормализатором в $AO(2,2)$ вполне изотропного подпространства $V_{(2)}$. Отсюда следует, что базис алгебры $AOpt(1,1)$ образуют матрицы $A_1=-J_{14}+J_{23}$, $T=J_{12}-J_{24}+J_{13}-J_{34}$, $A_2=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}-J_{13}-J_{24})$, $A_3=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}+J_{13}+J_{24})$, $D=J_{14}+J_{24}$. Очевидно, $\langle A_1,A_2,A_3\rangle = ASL(2,R)$, $SL(2,R)\oplus\langle D\rangle = AGL(2,R)$ и $\langle T\rangle\oplus AGL(2,R)=AOpt(1,1)$. Базисные элементы алгебры $\langle N_1,N_2,Y_1,Y_2\rangle\oplus AOpt(1,1)$, где $N_1=P_1+P_4$, $N_2=P_2+P_3$, $Y_1=P_1-P_4$, $Y_2=P_2-P_3$, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$
\begin{array}{llll}
[A_1,A_2]=2A_2, & [A_1,A_3]=-2A_3, & [A_1,N_1]=N_1, & [A_2,N_2]=-N_2,\\
[A_1,Y_1]=-Y_1, & [A_2,A_3]=-A_1, & [A_2,N_2]=N_1, & [A_2,Y_1]=-Y_2,\\
[A_3,N_1]=-N_2, & [D,T]=-2T, & [D,N_1]=-N_1, & [D,N_2]=-N_2,\\
[D,Y_1]=Y_1, & [T,Y_1]=-2N_2 & &
\end{array}
$$

(нулевые коммутаторы опущены).

Введем новые переменные $y_1=x_1+x_4$, $y_2=x_1-x_4$, $y_3=x_2+x_3$, $y_4=x_2-x_3$. Тогда алгебра $V\notin AOpt(1,1)$ реализуется следующими дифференциальными операторами первого порядка:

$$
\begin{aligned}
&A_1=-y_1\frac{\partial}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial}{\partial y_3}-y_4\frac{\partial}{\partial y_4},\quad A_2=-y_3\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_4},\\
&A_3=-y_4\frac{\partial}{\partial y_2}+y_1\frac{\partial}{\partial y_3},\quad D=-y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial}{\partial y_3}-y_4\frac{\partial}{\partial y_4},\\
&T=-2y_4\frac{\partial}{\partial y_1}+2y_2\frac{\partial}{\partial y_3},\quad N_1=2\frac{\partial}{\partial y_1},\quad N_2=2\frac{\partial}{\partial y_3},\quad Y_1=2\frac{\partial}{\partial y_2},\\
&Y_2=2\frac{\partial}{\partial y_4}.
\end{aligned}
$$

Классифицируем подалгебры алгебры $AOpt(1,1)$ с точностью до $O(2,2)$-сопряженности. Эта задача решается в четыре этапа.

1. Подалгебры алгебры $ASL(2,R)$. Известно, что $ASL(2,R)$ содержит с точностью до $SL(2,R)$-сопряженности только следующие подалгебры: O, $\langle A_1\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle A_2+A_3\rangle$, $\langle A_1,A_3\rangle$, $\langle A_1,A_2,A_3\rangle$.

2. Подалгебры алгебры $ASL(2,R)\oplus\langle D\rangle$. Применяя теорему Ли–Гурса о подалгебрах прямой суммы двух алгебр Ли, получаем с точностью до $GL(2,R)$-сопряженности следующие подалгебры алгебры $ASL(2,R)\oplus\langle D\rangle$: O, $\langle D\rangle$, $\langle A_1+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_1,D\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3+D\rangle$, $\langle A_3,D\rangle$, $\langle A_2+A_3+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3,D\rangle$, $\langle A_1+\alpha D,A_3\rangle$, $\langle A_1,A_3,D\rangle$, $\langle A_1,A_2,A_3\rangle$, $\langle A_1,A_2,A_3,D\rangle$.

3. Подалгебры алгебры $AOpt(1,1) = \langle T\rangle \oplus AGL(2,R)$. Проводим классификацию подалгебр алгебры $AOpt(1,1)$ с точностью до $O(2,2)$-автоморфизмов, сохраняющих $\langle N_1, N_2\rangle$. Получаем такие подалгебры: O, $\langle T\rangle$, $\langle D\rangle$, $\langle D,T\rangle$, $\langle A_1+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_1+T\rangle$, $\langle A_1+\alpha D, T\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_1+D, 2A_3\pm T\rangle$, $\langle A_1, D\rangle$, $\langle A_1, D, T\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3\pm T\rangle$, $\langle A_3, T\rangle$, $\langle A_3+D\rangle$, $\langle A_3+D, T\rangle$, $\langle A_3, D\rangle$, $\langle A_3, D, T\rangle$, $\langle A_2+A_3+\alpha D\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3\pm T\rangle$, $\langle A_2+A_3+\alpha D, T\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3, D\rangle$, $\langle A_2, A_3, D, T\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, T\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, D\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, D, T\rangle$.

4. На этом этапе выделяется задача классификации подалгебр алгебры $AOpt(1,1)$, полученных в предыдущем пункте, с точностью до $O(2,2)$-сопряженности. Для решения указанной задачи рассмотрим следующие вполне изотропные подпространства V: $S_1 = \langle P_1+P_4, P_2+P_3\rangle$, $S_2 = \langle P_1+P_4, P_2-P_3\rangle$, $S_3 = \langle P_1-P_4, P_2+P_3\rangle$, $S_4 = \langle P_1-P_4, P_2-P_3\rangle$. Обозначим через C_i следующие матрицы: $C_2 = \operatorname{diag}[1,1,-1,1]$, $C_3 = \operatorname{diag}[1,1,1,-1]$, $C_4 = \operatorname{diag}[1,1,-1,-1]$. Пусть φ_i — $O(2,2)$-автоморфизм алгебры $AO(2,2)$, порожденный матрицей C_i, $i=2,3,4$. Группу $\{\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\}$, порожденную автоморфизмами φ_i, обозначим через G_2. Порядок группы G_2 равен 4. Пусть G_1 — группа $O(2,2)$-автоморфизмов, сохраняющая $\langle N_1, N_2\rangle$.

Предложение 2. *Если подалгебры $L_1, L_2 \subset AOpt(1,1)$ сопряжены относительно группы $O(2,2)$-автоморфизмов, то они сопряжены и относительно группы $\{G_1, G_2\}$. Здесь $\{G_1, G_2\}$ — группа, порожденная группами G_1 и G_2.*

Доказательство. Отметим, что с точностью до сопряженности относительно группы G_1 существуют только следующие вполне изотропные подпространства ранга 2: S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть f — $O(2,2)$-автоморфизм отображающий алгебру $L_1\subset AOpt(1,1)$ на алгебру $L_2\subset AOpt(1,1)$. Подпространство $f^{-1}(S_1)$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L_1. Нетрудно убедиться, что существует элемент θ группы G_1, отображающий $f^{-1}(S_1)$ на некоторое подпространство S_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, причем $\theta(L_1)=L_1$. Автоморфизм $f\theta$ отображает L_1 на L_2, а S_i на S_1. Таким образом, можно предполагать, что $f(L_1)=L_2$ и $f(S_i)=S_1$. Но тогда $f\in G_1$, если $i=1$, и $f=f_1\varphi_i$ для некоторого $f_1\in G_1$, если $i\neq 1$. Предположение доказано.

Таблица 2

	A_1	D	A_2	A_3	T
φ_2	D	A_1	$*$	$-\frac{1}{2}T$	$-2A_3$
φ_3	$-D$	$-A_1$	$-\frac{1}{2}T$	$*$	$-2A_2$
φ_4	$-A_1$	$-D$	A_3	A_2	$*$

Отметим, что при доказательстве предложения 2 установлено, что если $O(2,2)$-автоморфизм f отображает алгебру $L_1\subset AOpt(1,1)$ на алгебру $L_2\subset AOpt(1,1)$, то всегда можно считать, что $f=f_1\varphi$, где $f_1\in G_1$, а $\varphi\in G_2$.

Действия автоморфизмов $\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ на базис $\{A_1, A_2, A_3, D, T\}$ алгебры $AOpt(1,1)$ приведены в табл. 2, где символом $*$ обозначены элементы алгебры $AO(2,2)$, не содержащиеся в $AOpt(1,1)$, и потому не представляющие для нас интереса. Используя табл. 2, получаем следующее предложение.

Предложение 3. *Алгебра* $AOpt(1,1)$ *содержит с точностью до* $O(2,2)$*-сопряженности только следующие подалгебры:*

1) O; 2) $\langle T\rangle$; 3) $\langle A_1+\alpha D\rangle$, $0\le\alpha\le 1$; 4) $\langle D,T\rangle$;
5) $\langle A_1+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$, $d\ne 1$; 6) $\langle A_1+T\rangle$; 7) $\langle A_1,D\rangle$;
8) $\langle A_1,D,T\rangle$; 9) $\langle A_3\pm T\rangle$; 10) $\langle A_3,T\rangle$; 11) $\langle A_3+D,T\rangle$;
12) $\langle A_2+A_3+\alpha D\rangle$, $\alpha\ge 0$; 13) $\langle A_2+A_3\pm T\rangle$;
14) $\langle A_2+A_3+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$; 15) $\langle A_2+A_3,D\rangle$;
16) $\langle A_2+A_3,D,T\rangle$; 17) $\langle A_1+D,2A_3\pm T\rangle$;
18) $\langle A_1+\alpha D,A_3,T\rangle$, $|\alpha|\le 1$; 19) $\langle A_1,A_3,D,T\rangle$; 20) $\langle A_1,A_2,A_3\rangle$;
21) $\langle A_1,A_2,A_3,T\rangle$; 22) $\langle A_1,A_2,A_3,D\rangle$; 23) $\langle A_1,A_2,A_3,D,T\rangle$.

4. Подалгебры алгебры $AP(2,2)$. В настоящем пункте нашей задачей является описание с точностью до $P(2,2)$-сопряженности подалгебр $L\subset AP(2,2)$ ранга 2 и 3, удовлетворяющих условию $L\cap V=0$. Используя описание подалгебр алгебры $AO(2,2)$, изложенное в предыдущем пункте, приходим к следующему результату.

Таблица 3

№ п/п	Алгебра	Ранг алгебры	Нормализатор алгебры в $A\tilde{P}(2,2)$
1	$L_1=AO(2,2)$	3	$L_1\oplus\langle S\rangle$
2	$L_2=\langle 3A_1+D,T+Y_1,A_3\rangle$	3	$L_2\oplus\langle 3S-D\rangle$
3	$K_1=\langle D,T\rangle$	2	$K_1\oplus\langle A_1,A_2,A_3\rangle$
4	$K_2=\langle A_1+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$, $\alpha\ne 1$	2	$K_2\oplus\langle S,D\rangle$
5	$K_3=\langle A_1,D\rangle$	2	$K_3\oplus\langle S\rangle$
6	$K_4=\langle A_3+D,T\rangle$	2	$K_4\oplus\langle S,D\rangle$
7	$K_5=\langle A_2+A_3+\alpha D,T\rangle$, $\alpha\ge 0$	2	$K_5\oplus\langle S\rangle$
8	$K_6=\langle A_2+A_3,D\rangle$	2	$K_6\oplus\langle S\rangle$
9	$K_7=\langle A_1-D,A_3,T\rangle$	2	$K_7\oplus\langle 3,D,N_2\rangle$
10	$K_8=\langle 3A_1+D,T+Y_1\rangle$	2	$K_8\oplus\langle 3S-D\rangle$
11	$K_9=\langle A_1+D+N_1,T\rangle$	2	$K_9\oplus\langle S+D,N_1\rangle$
12	$K_{10}=\langle A_3+N_1,T\rangle$	2	$K_{10}\oplus\langle S+D,A_1+3D,N_2\rangle$
13	$K_{11}=\langle A_3+N_1,T+\varepsilon Y_1\rangle$, $\varepsilon=\pm 1$	2	$K_{11}\oplus\langle 2S-A_1-D,N_2\rangle$
14	$K_{12}=\langle J_{12},J_{34}\rangle$	2	$K_{12}\oplus\langle S\rangle$
15	$K_{13}=\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$	2	$K_{13}\oplus\langle S\rangle$
16	$K_{14}=\langle J_{23},J_{24},J_{34}\rangle$	2	$K_{14}\oplus\langle S\rangle$
17	$K_{15}=\langle A_1+D+Y_1-\varepsilon N_1,2A_3+\varepsilon t\rangle$,	2	$K_{15}\oplus\langle Y_1-\varepsilon N_1\rangle$
	$\varepsilon=\pm 1$	2	

Предложение 4. *Пусть* L — *не расщепляемая подалгебра алгебры* $AO(2,2)$, $L\cap V=0$ *и* $\dim L>1$. *Тогда* L $P(2,2)$*-сопряжена одной из следующих подалгебр:*

1) $\langle 3A_1+D,T+Y_1\rangle$; 2) $\langle A_1+D+N_1,T\rangle$; 3) $\langle A_3+N_1,T\pm Y_1\rangle$;
4) $\langle A_3+N_1,T\rangle$; 5) $\langle 3A_1+D,T+Y_1,A_3\rangle$;
6) $\langle A_1-D+N_2,A_3,T\rangle$; 7) $\langle A_1+D+Y_1\pm N_1,2A_3\mp T\rangle$.

Используя предложения 3 и 4, получаем классификацию с точностью до $P(2,2)$-сопряженности максимальных подалгебр $L \cap AP(2,2)$ ранга 2 и 3, удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$. Результаты приведены в табл. 3.

5. Максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. В настоящем пункте определяем максимальные подалгебры ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, не содержащиеся в $AP(2,2)$ и удовлетворяющие условию $L \cap V = 0$. Центральное место занимает следующее предложение.

Предложение 5. *Пусть L— максимальная подалгебра ранга r алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Тогда $L \subset AP(2,2)$ или $L = K \oplus \langle S' \rangle$, где K — максимальная подалгебра ранга $r-1$ алгебры $AP(2,2)$, $S' = S + X$, $X \in AP(2,2)$.*

Предложение 5 доказывается на основе теоремы об универсальном инварианте.

Используя предложение 5 и табл. 3, находим список максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, имеющих нулевое пересечение с пространством V и не содержащихся в $AP(2,2)$.

Теорема 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 или 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$ с ненулевой проекцией на $\langle S \rangle$ и $L \cap V = 0$. Тогда L $\tilde{P}(2,2)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_{1,1} = AO(2,2) \oplus \langle S \rangle$;
2) $L_{2,1} = L_2 \oplus \langle 3S - D \rangle$;
3) $K_{1,1} = K_1 \oplus \langle S + \alpha A_1 \rangle$, $\alpha \geq 0$;
4) $K_{1,2} = K_1 \oplus \langle S + \alpha(A_2 + A_3) \rangle$, $\alpha > 0$;
5) $K_{1,3} = K_1 \oplus \langle S + A_3 \rangle$;
6) $K_{2,1} = K_2 \oplus \langle S + \beta D \rangle$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$;
7) $K_{3,1} = K_3 \oplus \langle S \rangle$;
8) $K_{4,1} = K_4 \oplus \langle S + \beta D \rangle$;
9) $K_{5,1} = K_5 \oplus \langle S + \beta D \rangle$;
10) $K_{6,1} = K_6 \oplus \langle S \rangle$;
11) $K_{7,1} = K_7 \oplus \langle S + \beta D \rangle$;
12) $K_{7,2} = K_7 \oplus \langle S + D + N_2 \rangle$;
13) $K_{8,1} = K_8 \oplus \langle 3S - D \rangle$;
14) $K_{9,1} = K_9 \oplus \langle S + D + \beta N_1 \rangle$;
15) $K_{10,1} = K_{10} \oplus \langle S + D + N_2 \rangle$;
16) $K_{10,2} = K_{10} \oplus \langle S + \alpha A_1 + (1 + 3\alpha) D \rangle$;
17) $K_{10,3} = K_{10} \oplus \langle 2S - A_1 - D \rangle$;
18) $K_{11,1} = K_{11} \oplus \langle 2S - A_1 - D \rangle$ $(\varepsilon = \pm 1)$;
19) $K_{12,1} = K_{12} \oplus \langle S \rangle$;
20) $K_{13,1} = K_{13} \oplus \langle S \rangle$;
21) $K_{14,1} = K_{14} \oplus \langle S \rangle$.

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1983, 336 с.

2. Баранник А.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт 86.87, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 48 с.

3. Fushchych W.I., Serov N.I., The summetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'AIembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.

4. Баранник Л.Ф., Симметрийная редукция и точные решения уравнения Лиувилля, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1988, № 12, 3–5.

5. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.

6. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.

7. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I, *Укр. мат. журн.*, 1988, **40**, № 4, 411–416.

8. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II, *Укр. мат. журн.*, 1989, **41**, № 5, 579–584.

9. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

10. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.

О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$. II

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО

Построены инварианты максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(2,2)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнений Даламбера $\Box u + \lambda u^k = 0$, $k \neq 1$, и Лиувилля $\Box u + \lambda \exp u = 0$. Проведена редукция данных уравнений по максимальным подалгебрам ранга 3 и найдены некоторые точные решения этих уравнений.

Настоящая работа является продолжением статьи [1], поэтому в ней сохранены все основные обозначения, а нумерация разделов продолжена.

6. Полные системы инвариантов максимальных подалгебр ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Вначале находим инварианты максимальных подалгебр ранга 2 и 3 алгебры $AP(2,2)$, представленных в табл. 3. Запись $L\colon f_1(x),\ldots,f_s(x)$ будет означать, что функции $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ образуют полную систему инвариантов алгебры L.

а) Инварианты максимальных подалгебр L ранга 2 и 3 алгебры $AP(2,2)$, удовлетворяющих условию $L\cap V = 0$:

$$L_1\colon\ \omega = y_1y_2 + y_3y_4; \qquad L_2\colon\ \omega = 2(y_1y_2+y_3y_4) + y_1^2/y_4;$$
$$K_1\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_2/y_4;$$
$$K_2\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_2 y_4^{(1-\alpha)(1+\alpha)};$$
$$K_3\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_3y_4;$$
$$K_4\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_2/y_4 - \ln y_4;$$
$$K_5\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,(y_2/y_4) - \ln(y_2^2+y_4^2);$$
$$K_6\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_1y_4 - y_2y_3;$$
$$K_7\colon\ \omega_1 = y_1y_2 + y_3y_4; \quad \omega_2 = y_4;$$
$$K_8\colon\ \omega_1 = 2y_3y_4 - y_2^2y_4, \quad \omega_2 = y_4^{-1}(y_1+y_2y_4)^2;$$
$$K_9\colon\ \omega_1 = y_2, \quad \omega_2 = y_3y_4/y_2 + \ln y_4;$$
$$K_{10}\colon\ \omega_1 = y_4, \quad \omega_2 = (2y_2+y_1y_4)^2 - y_4^2(y_1^2 - 4y_3);$$
$$K_{11}\colon\ \omega_1 = y_4, \quad \omega_2 = (2y_2+y_1y_4)^2 + (2\varepsilon - y_4^2)(y_1^2-4y_3);$$
$$K_{12}\colon\ \omega_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad \omega_2 = x_3^2 + x_4^2;$$
$$K_{13}\colon\ \omega_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad \omega_2 = x_4;$$
$$K_{14}\colon\ \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2^2 - x_3^2 - x_4^2;$$
$$K_{15}\colon\ \omega_1 = 4(y_1y_2+y_3y_4) + \varepsilon(y_1-\delta y_2)^2, \quad \omega_2 = y_4^{-2\varepsilon}\exp(y_1 - \varepsilon y_2).$$

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 9, С. 1237–1244.

б) Инварианты максимальных подалгебр $L \not\subset AP(2,2)$ ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, реализующихся на множестве решений уравнения Даламбера и удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$:

$L_{1,1}$: $u\omega^{\frac{1}{k-1}}$; $L_{2,1}$: $u\omega^{\frac{1}{k-1}}$;

$K_{1,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \omega_1^{\alpha}\omega_2$;

$K_{1,2}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \alpha \ln \omega_1 - 2 \operatorname{arctg} \omega_2$;

$K_{1,3}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \omega_1 - 2\omega_2$;

$K_{2,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \omega_1^{\beta+1}\omega_2^{-(1+\alpha)}$;

$K_{3,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$;

$K_{4,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \omega_1^{\beta+1} + 2\omega_2$;

$K_{5,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \omega_1^{\beta+1} + \omega_2$;

$K_{6,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \dfrac{2\omega_1}{\omega_2}$;

$K_{7,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \dfrac{\omega_1^{\beta+1}}{\omega_2^2}$;

$K_{7,2}$: $u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} - \ln \omega_2$;

$K_{8,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \ln \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$;

$K_{9,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \omega_2 - \ln \omega_1^{\beta+1}$;

$K_{10,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \dfrac{\omega_2}{\omega_1^2} + 4 \ln \omega_1$;

$K_{10,2}$: $u\omega_1^{\frac{1}{(k-1)(2\alpha+1)}}$, $\omega = \ln \dfrac{\omega_2^{2\alpha+1}}{\omega_1^{2(\alpha+1)}}$;

$K_{10,3}$: $u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \omega_1$;

$K_{11,1}$: $u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \omega_1$;

$K_{12,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \omega_1/\omega_2$;

$K_{13,1}$: $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \omega_1/\omega_2^2$;

$K_{14,1}$: $u\omega_2^{\frac{1}{k-1}}$, $\omega = \omega_2/\omega_1^2$.

Сделаем разъяснение относительно инвариантов подалгебр. Рассмотрим, например, подалгебру $K_{1,1}$. Ее основные инварианты $u\omega_1^{\frac{1}{k-1}}$ и $\ln \omega_1^{\alpha}\omega_2$. Они представлены через основные инварианты соответствующей подалгебры K_1 из п. а).

в) Инварианты максимальных подалгебр $L \not\subset AP(2,2)$ ранга 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, реализующихся на множестве решений уравнения Лиувилля и удовлетворяющих условию $L \cap V = 0$:

$L_{1,1}$: $u + \ln \omega$; $L_{2,1}$: $u + \ln \omega$;

$K_{1,1}$: $u + \ln \omega_1$, $\omega = \ln \omega_1^{\alpha}\omega_2$;

$K_{1,2}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\alpha\ln\omega_1-2\operatorname{arctg}\omega_2$;
$K_{1,3}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln\omega_1-2\omega_2$;
$K_{2,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln\omega_1^{\beta+1}\omega_2^{-1(1+\alpha)}$;
$K_{3,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$;
$K_{4,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln\omega_1^{\beta+1}+2\omega_2$;
$K_{5,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln\omega_1^{\beta+1}+\omega_2$;
$K_{6,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=2\omega_1/\omega_2$;
$K_{7,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln(\omega_1^{\beta+1}/\omega_2^2)$;
$K_{7,2}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad \omega=\omega_1/\omega_2-\ln\omega_2$;
$K_{8,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln(\omega_1/\omega_2)$;
$K_{9,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\omega_2-\ln\omega_1^{\beta+1}$;
$K_{10,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\omega_2/\omega_1^2+4\ln\omega_1$;
$K_{10,2}$: $u+\dfrac{1}{2\alpha+1}\ln\omega_1$, $\quad \omega=\ln(\omega_2^{2\alpha+1}/\omega_1^{2(\alpha+1)})$;
$K_{10,3}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad \omega=\omega_1$;
$K_{11,1}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad \omega=\omega_1$;
$K_{12,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\omega_1/\omega_2$;
$K_{13,1}$: $u+\ln\omega_1$, $\quad \omega=\omega_1/\omega_2^2$;
$K_{14,1}$: $u+\ln\omega_2$, $\quad \omega=\omega_2/\omega_1^2$.

Как и в предыдущем пункте, основные инварианты рассмотренных алгебр представлены через основные инварианты соответствующих алгебр из п. а).

7. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(2,2)$. Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, представленная в п. б), $\omega(x)$ — основные инварианты L. Инвариант $\omega'(x,u)$ записываем в виде $u/f(x)$ и рассматриваем анзац $u=f(x)\varphi(\omega(x))$. Подставляя его в уравнение Даламбера, получаем редуцированное уравнение

$$f(\nabla\omega)^2\ddot{\varphi}+(2\nabla f\cdot\nabla\omega+f\cdot\Box\omega)\dot{\varphi}+\Box f\cdot\varphi+\lambda f^k\varphi^k=0,$$

где

$$(\nabla\omega)^2=\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_4}\right)^2,$$
$$\nabla f\nabla\omega=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial\omega}{\partial x_3}-\frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial\omega}{\partial x_4}.$$

Пусть далее L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(2,2)$, представленная в п. в), $\omega'(x,u)$, $\omega(x)$ — основные инварианты L. Инвариант $\omega'(x,u)$ записываем в виде $u-g(x)$. Подставляя анзац $u=\varphi(\omega)+g(x)$ в уравнение Лиувилля, получаем редуцированное уравнение

$$\ddot{\varphi}(\nabla\omega)^2+\dot{\varphi}\cdot\Box\omega+\Box g+\lambda\exp(\varphi+g)=0.$$

Таким образом, чтобы провести редукцию уравнения Даламбера по подалгебрам из п. б), достаточно вычислить для каждой из них $(\nabla\omega)^2$, $\nabla f\nabla\varphi$, $\Box\omega$, $\Box f$. Результаты этих вычислений приведены в табл. 4, которая одновременно позволяет провести редукцию уравнения Лиувилля по всем подалгебрам, представленными в п. в).

Таблица 4

Алгебра	$\frac{1}{f^{k-1}}(\nabla\omega)^2$	$\frac{1}{k^{k-1}}\cdot\Box\omega$	$\frac{1}{f^{k+1}}(\nabla f)^2$	$\frac{1}{f^k}\cdot\Box f$	$\frac{1}{f^k}(\nabla f\cdot\nabla\omega)$
$K_{1,1}$	$4\alpha^2$	4α	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\alpha}{k-1}$
$K_{1,2}$	$4\alpha^2$	4α	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\alpha}{k-1}$
$K_{1,3}$	4	4	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4}{k-1}$
$K_{2,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{3,1}$	$4\omega^2(\omega-1)$	$4\omega^2$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	0
$K_{4,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{5,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{6,1}$	$-\omega^2(\omega^2+4)$	$-2\omega^3$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	0
$K_{7,1}$	$4(\beta^2-1)$	$4(\beta+1)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\beta}{k-1}$
$K_{7,2}$	-4	4	0	0	$-\frac{2}{k-1}$
$K_{8,1}$	$16(1+e^\omega)$	$8e^\omega$	$\frac{8}{(k-1)^2}$	$\frac{8}{(k-1)^2}$	$-\frac{12}{k-1}$
$K_{9,1}$	-4β	4	0	0	$-\frac{2}{k-1}$
$K_{10,1}$	64	16	0	0	$-\frac{8}{k-1}$
$K_{10,2}$	$32\alpha(2\alpha+1)\times$ $\times e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}$	$16\alpha(2\alpha+1)\times$ $\times e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}$	0	0	$-\frac{8e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}}{k-1}$
$K_{10,3}$	0	0	$\frac{32\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{8\omega^2}{k-1}$
$K_{11,1}$	0	0	$\frac{32\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}$	$-\frac{8(\omega^2-2\varepsilon)}{k-1}$
$K_{12,1}$	$4\omega^2(1-\omega)$	$4\omega(1-\omega)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\omega}{k-1}$
$K_{13,1}$	$4\omega^2(1-\omega)$	$6\omega(1-\omega)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{2(k-3)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\omega}{k-1}$
$K_{14,1}$	$4\omega^2(1+\omega)$	$6\omega(1+\omega)$	$\frac{4}{(k-1)^2}$	$-\frac{3(k-3)}{(k-1)^2}$	$-\frac{4\omega}{k-1}$

8. Точные решения уравнения Даламбера. Используя табл. 4, получаем следующие уравнения для функции $\varphi=\varphi(\omega)$:

$$K_{1,1}, K_{1,2}\colon\ 4\alpha^2\ddot\varphi+\frac{4\alpha(k-3)}{k-1}\dot\varphi-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{1,3}:\ 4\ddot{\varphi}+\frac{4(k-3)}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{i,1}(i=2,4,5,7):\ 4(\beta^2-1)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\beta}{k-1}+4\beta+4\right)\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{3,1}:\ 4\omega^2(\omega-1)\ddot{\varphi}+4\omega^2\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{6,1}:\ -\omega^2(\omega^2+4)\ddot{\varphi}-2\omega^3\dot{\varphi}-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{7,2}:\ -4\ddot{\varphi}+\frac{4(k-2)}{k-1}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{8,1}:\ 16(1+e^{\omega})\ddot{\varphi}+\left(-\frac{24}{k-1}+8e^{\omega}\right)\dot{\varphi}+\frac{8}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{9,1}:\ -4\beta\ddot{\varphi}+\frac{4(k-2)}{k-1}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{10,1}:\ 64\ddot{\varphi}+\frac{16(k-2)}{k-1}\dot{\varphi}+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{10,2}:\ 32\alpha(2\alpha+1)e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}\ddot{\varphi}+\left(-\frac{16}{k-1}+16(2\alpha+1)\right)e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{10,3}:\ -\frac{16\omega^2}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{11,1}:\ -\frac{16(\omega^2-2\varepsilon)}{k-1}\dot{\varphi}-\frac{16(k-3)\omega}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{12,1}:\ 4\omega^2(1-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\omega}{k-1}+4\omega(1-\omega)\right)\dot{\varphi}+\frac{4}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{13,1}:\ 4\omega^2(1-\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\omega}{k-1}+6\omega(1-\omega)\right)\dot{\varphi}-\frac{2(k-3)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;$$

$$K_{14,1}:\ 4\omega^2(1+\omega)\ddot{\varphi}+\left(-\frac{8\omega}{k-1}+6\omega(1+\omega)\right)\dot{\varphi}-\frac{2(k-3)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0.$$

Используя редуцированные уравнения, выпишем некоторые решения уравнения Даламбера. Запись L: $u=u(x)$ будет означать, что рассматриваемое решение $u=u(x)$ уравнения Даламбера инвариантно относительно подалгебры L. Если $L=K_{m,i}$, то функцию $u(x)$ представляем через основные инварианты соответствующей подалгебры K_m:

$$K_{1,1}:\ u^{1-k}=-\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1;$$

$$K_{1,2}:\ u=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{C\omega_1 e^{-\frac{2}{\alpha}\operatorname{arctg}\omega_2}}{\left[1-C\omega_1 e^{-\frac{2}{\alpha}\operatorname{arctg}\omega_2}\right]^2}\right\}^{1/2}\quad\text{при}\quad k=3;$$

$$K_{1,3}:\ u=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{C\omega_1 e^{-2\omega_2}}{[1-C\omega_1 e^{-2\omega_2}]^2}\right\}^{1/2}\quad\text{при}\quad k=3;$$

$$K_{2,1}(\beta=1):\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_2^{\frac{1+\alpha}{2}};$$

$$K_{2,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1\omega_2^{\frac{(k-2)(1+\alpha)}{2}};$$

$$K_{4,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+Ce^{-\omega_2};$$

$$K_{4,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1e^{-(k-2)\omega_2};$$

$$K_{5,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+Ce^{-\frac{1}{2}\omega_2};$$

$$K_{5,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1e^{-\frac{k-2}{2}\omega_2};$$

$$K_{7,1}(\beta=1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_2;$$

$$K_{7,1}(\beta=-1)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_1+C\omega_1\omega_2^{k-2};$$

$$K_{7,2}\colon\ u=\frac{24}{\lambda}\frac{\omega_2}{(\omega_1-\omega_2\ln\omega_2+\omega_1C)^2};\quad \text{при}\quad k=2;$$

$$K_{9,1}(\beta\neq0)\colon\ u=\frac{24\beta}{\lambda}\frac{1}{\omega_1(\omega_2-\ln C\omega_1^{\beta+1})^2}\quad \text{при}\quad k=2;$$

$$K_{9,1}(\beta=0)\colon\ u^{1-k}=\omega_1\left\{\frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(\omega_2-\ln\omega_1)+C\right\}\quad \text{при}\quad k\neq2;$$

$$K_{10,1}\colon\ u=-\frac{384}{\lambda}\frac{\omega_1}{\omega_2+\omega_1^2\ln\omega_1}\quad \text{при}\quad k=2;$$

$$K_{10,2}(\alpha=0)\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{16(k-2)}\frac{\omega_2}{\omega_1}+C\omega_1;$$

$$K_{10,3}\colon\ u^{1-k}=\omega_2\left[\frac{\lambda(k-1)^2}{16(k-2)}\frac{1}{\omega_1}+C\omega_1^{k-3}\right]\quad \text{при}\quad k\neq2;$$

$$K_{10,3}\colon\ u=\frac{16\omega_1}{(C-\lambda\ln\omega_1)\omega_2}\quad \text{при}\quad k=2;$$

$$K_{11,1}\colon\ u^{1-k}=\frac{\lambda(k-1)^2}{16}\omega_2(\omega_1-2\varepsilon)^{\frac{k-3}{2}}\int\frac{d\omega_1}{(\omega_1^2-2\varepsilon)^{\frac{k-1}{2}}}.$$

9. Точные решения уравнения Лиувилля. Любое решение уравнения Лиувилля, инвариантное относительно подалгебры $\langle P_1+P_4\rangle$, имеет вид $u=\varphi(x_1-x_4, x_2,x_3)$. В результате получаем следующее редуцированное уравнение: $\partial^2\varphi/\partial x_2^2-\partial^2\varphi/\partial x_3^2+\lambda e^{\varphi}=0$. Отсюда вытекает, что общее решение u, инвариантное относительно $\langle P_1+P_4\rangle$, имеет вид

$$u=\ln\left\{-\frac{8}{\lambda}\frac{f_{y_2}(y_2,y_3)g_{y_4}(y_2,y_4)}{[f(y_2,y_3)+g(y_2,y_4)]^2}\right\},$$

где f, g — произвольные дифференцируемые функции, f_{y_2} — производная по аргументу y_2, g_{y_4} — производная по аргументу y_4 и $\lambda f_{y_2}g_{y_4}<0$.

Рассмотрим далее редуцированные уравнения, соответствующие анзацам $u=\varphi(\omega)+g(x)$. Используя табл. 4, получаем следующие уравнения для функции

$\varphi = \varphi(\omega)$:

$$K_{1,1}, K_{1,2}\colon\ 4\alpha^2\ddot\varphi + 4\alpha\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{1,3}\colon\ 4\ddot\varphi + 4\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{i,1}(i = 2,4,5,7)\colon\ 4(\beta^2-1)\ddot\varphi + 4(\beta+1)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{3,1}\colon\ 4\omega^2(\omega-1)\ddot\varphi + 4\omega^2\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{6,1}\colon\ -\omega^2(\omega^2+4)\ddot\varphi - 2\omega^3\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 4 = 0;$$
$$K_{7,2}\colon\ -4\ddot\varphi + 4\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{8,1}\colon\ 16(1+e^\omega)\ddot\varphi + 8e^\omega\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{9,1}\colon\ -4\beta\ddot\varphi + 4\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{10,1}\colon\ 64\ddot\varphi + 16\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{10,2}\colon\ 16(2\alpha+1)e^{-\frac{\omega}{2\alpha+1}}[2\alpha\ddot\varphi + \dot\varphi] + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{10,3}, K_{11,1}\colon\ -16\omega + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{12,1}\colon\ 4\omega^2(1-\omega)\ddot\varphi + 4\omega(1-\omega)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi = 0;$$
$$K_{13,1}\colon\ 4\omega^2(1-\omega)\ddot\varphi + 6\omega(1-\omega)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 2 = 0;$$
$$K_{14,1}\colon\ 4\omega^2(1+\omega)\ddot\varphi + 6\omega(1+\omega)\dot\varphi + \lambda\exp\varphi - 2 = 0;$$

Выпишем некоторые точные решения уравнения Лиувилля:

$$K_{2,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4C\omega_2^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{1+\lambda C\omega_1\omega_2^{-\frac{1+\alpha}{2}}};$$
$$K_{4,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4Ce^{\omega_2}}{1+\lambda C\omega_1 e^{\omega_2}};$$
$$K_{5,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4Ce^{\frac12\omega_2}}{1+\lambda C\omega_1 e^{\frac12\omega_2}};$$
$$K_{7,1}(\beta = 1)\colon\ u = \ln\frac{4C}{\omega_2+\lambda C\omega_1};$$
$$K_{10,2}(\alpha = 0)\colon\ u = \ln\frac{16\omega_1}{\lambda\omega_2 + C\omega_1^2};$$
$$K_{10,3}, K_{11,1}\colon\ u = \ln\frac{16}{\lambda}\frac{\omega_1}{\omega_2};$$
$$K_{9,1}(\beta = 0)\colon\ u = -\ln\left[\frac{\lambda}{4}(\omega_2 - \ln\omega_1)\omega_1 + C\omega_1\right].$$

1. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д., О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $R_{2,2}$. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **41**, № 8, 1122–1128.

Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, В.И. ЧОПИК

Conditional invariance of multidimensional nonlinear Schrödinger equation is investigated. It is proved, that symmetry of the nonlinear Schrödinger equation is essentially extented in the case of some nonlinear additional conditions on solutions.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$
\begin{aligned}
&i\Psi_0+\lambda\Delta\Psi+F(|\Psi|)\Psi=0;\\
&\Psi=\Psi(x_0,\boldsymbol{x}),\quad x_0\equiv t,\quad \boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n),\\
&\Psi_0=\frac{\partial\Psi}{\partial x_0},\quad \Psi=(\Psi\Psi^*)^{1/2},\quad n\in N,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$F(\Psi)$ — произвольная гладкая функция, $\lambda=\mathrm{const}$.

В [1] детально исследованы симметрийные свойства нелинейного уравнения (1).

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно следующих алгебр:*

• *для произвольной гладкой функции $F(|\Psi|)$ базисные элементы алгебры инвариантности $AG(1,n)$ имеют вид*

$$
\begin{aligned}
&P_0=\frac{\partial}{\partial x_0},\quad P_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\quad a=\overline{1,n},\quad Q=i\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi}-\Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*}\right),\\
&G_a=x_0P_a+\frac{1}{2\lambda}x_aQ,\quad J_{ab}=x_aP_b-x_bP_a,\quad b=\overline{1,n};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

• *для функции*

$$
F(|\Psi|)=\gamma|\Psi|^{-\frac{4}{\beta}},\quad \gamma=\mathrm{const},\quad \beta\in\mathbb{R}^1,
\tag{3}
$$

базисные элементы алгебры инвариантности $AG_1(1,n)$ задаются формулой (2) и оператор масштабных преобразований имеет вид

$$
D=2x_0P_0+x_aP_a+\frac{\beta}{2}I,\quad I=\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi}+\Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*};
\tag{4}
$$

• *для функции $F(|\Psi|)=\gamma|\Psi|^{4/n}$, n — число пространственных переменных, базисные элементы алгебры инвариантности уравнения (1) $AG_2(1,n)\supset AG_1(1,n)$ задаются формулами (2), (4) и оператором проективных преобразований*

$$
A=x_0^2P_0+x_0x_aP_a+\frac{\boldsymbol{x}^2}{4\lambda}Q-\frac{n}{2}x_0I.
\tag{5}
$$

В настоящей работе показано, что симметрию уравнения (1) можно существенно расширить, если воспользоваться понятием условной инвариантности (см. [2–5]).

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 4, С. 30–33.

Представим нелинейность $F(|\Psi|)$ в уравнении (1) в виде

$$F(|\Psi|) = F_1(|\Psi|) + iF_2(|\Psi|), \tag{6}$$

где F_1, F_2 — действительные функции, $i^2 = -1$.

Предположим, что в (6) $F_2 = 0$. Тогда справедлива

Теорема 2. *Уравнение (1) условно инвариантно относительно алгебры $AG(1, n)$ и оператора*

$$R = \ln\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} - \Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*}\right) + x_a P_a - \frac{\alpha}{1}I, \quad \alpha = \mathrm{const}, \tag{7}$$

если $F_1(|\Psi|)$ имеет вид

$$F_1(|\Psi|) = \gamma_1|\Psi|^{-\frac{4}{\alpha}} + \gamma_2|\Psi|^{\frac{4}{\alpha}}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^1 \tag{8}$$

и функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\lambda\Delta|\Psi| + \gamma_2|\Psi|^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha \neq 0$.

Для доказательства теоремы необходимо найти второе продолжение оператора R и подействовать им на уравнение (1).

Утверждение. *Оператор R порождает следующие конечные преобразования:*

$$\begin{aligned} &x'_0 = x_0, \qquad x'_a = \exp\{\tau\}\cdot x_a, \\ &\Psi' = \exp\left\{-\frac{\alpha\tau}{2}\right\}|\Psi|\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)^{\frac{\exp\{2\tau\}}{2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

где τ — групповой параметр.

Теорема 3. *Система уравнений*

$$\begin{aligned} &i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + \gamma_2|\Psi|^{\frac{4}{\alpha}}\Psi = 0; \\ &\lambda\Delta|\Psi| + \gamma_2|\Psi|^{\frac{4+\alpha}{\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

инвариантна относительно $AG_2(1, n)$, дополненной оператором (7), где $\alpha = n$.

Обобщенную алгебру Галилея $AG_2(1, n)$, дополненную оператором R, обозначим символом $AG_3(1, n)$.

Теорема 4. *Переопределенная система уравнений*

$$\begin{aligned} &i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + \gamma_1|\Psi|^{-\frac{4}{\alpha}}\Psi = 0; \\ &\Delta|\Psi| = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

инвариантна относительно $AG_3(1, n)$ при $\alpha = -n$.

Для доказательства этих теорем к системам уравнений (11), (12) необходимо применить алгоритм С. Ли.

Теперь предположим, что в уравнении (1) с нелинейностью (6) $F_1 \equiv 0$, т.е. $F = iF_2$. Потребуем инвариантность уравнения (1) относительно оператора

$$R^0 = \ln\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right)\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} - \Psi^*\frac{\partial}{\partial\Psi^*}\right) + x_a P_a, \tag{13}$$

получаемого из (7) при $\alpha = 0$.

Теорема 5. *Уравнение Шредингера (1) с нелинейностью (6) и $F_1 \equiv 0$ при произвольной гладкой функции $F = iF_2$ инвариантно относительно оператора R^0, если его решение Ψ удовлетворяет дополнительному условию*

$$\Delta|\Psi| = 0. \tag{14}$$

Замечание. Если потребовать условную инвариантность уравнения (1) с нелинейностью (6) при $F_1 \equiv 0$ относительно оператора (7), то получим, что $F \equiv 0$.

Теорема 6. *Система уравнений*

$$\begin{aligned} &i\Psi_0 + \lambda\Delta\Psi + i\gamma_3|\Psi|^{\frac{4}{n}}\Psi = 0; \\ &\Delta|\Psi| = 0, \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \tag{15}$$

инвариантна относительно $AG_3(1,n)$, где оператор R имеет вид (7) при $\alpha = 0$.

Итак, с помощью дополнительных условий, налагаемых на решения уравнения Шредингера, мы расширили симметрию уравнения (1).

Приведем некоторые примеры использования операторов условной симметрии для нахождения точных решений уравнения Шредингера.

Условная инвариантность уравнения (1) относительно операторов (7), (13) позволяет находить решения данного уравнения в виде

$$\Psi = f(x_0, \boldsymbol{x})\Phi_1(\omega_i)\{\Phi_2(\omega_i)\}^{ig(x_0,\boldsymbol{x})}, \tag{16}$$

где Φ_1, Φ_2 — функции от новых инвариантных переменных ω_i, которые подлежат определению. Анзац (16) редуцирует систему уравнений (11), (12), (15) к набору уравнений с меньшим числом переменных.

Если в (16) функции

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\omega_i) = \omega_1^{\frac{A}{2}} \exp\left\{\frac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1}\right\}, \\ &\Phi_2(\omega_i) = \exp\left\{\pm\frac{i}{4\lambda}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} &\omega_i = \frac{(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}} \exp\{\chi \cdot \operatorname{arctg} x_0\}}{x_i}, \\ &A = \frac{\chi \cdot n \pm i}{\chi \pm i}, \quad 2A + A^2 = 0, \qquad \chi = \text{const}, \end{aligned} \tag{18}$$

то эта формула определяет решение линейного уравнения Шредингера для случая n пространственных переменных. В (17) φ — произвольная гладкая функция от $n-1$ переменных, а функции f и g соответственно имеют вид

$$f = (x_0^2+1)^{-\frac{n}{4}} \exp\left\{\frac{ix^2}{4\lambda}\frac{x_0}{x_0^2+1} - \frac{n}{2}\chi \cdot \operatorname{arctg} x_0\right\}, \tag{19}$$

$$g = \exp\{2\chi \cdot \operatorname{arctg} x_0\}. \tag{20}$$

Частным точным решением системы (11) для случая, когда $n = 1$ является функция

$$\Psi = \left(\sqrt{\frac{-3\lambda}{4\gamma^2}} \cdot \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\pm\frac{x^2}{4\lambda(x_0^2+1)} + \frac{ix^2}{4\lambda}\frac{x_0}{x_0^2+1}\right\}. \tag{21}$$

Следует подчеркнуть, что решение (21) нелинейного уравнения Шредингера найдено за счет оператора условной симметрии R, т. е. формула (16) задает нелиевский анзац.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
2. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, L45–L48.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 9, 17–20.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики

В.И. ФУЩИЧ, В.И. ЧОПИК, П.И. МИРОНЮК

The conditional invariance of the nonlinear acoustics equations is investigated. Using the conditional symmetry the Khokhlov–Zabolotskaja equation is reduced to the differential equations with smaller dimension and its exact solutions are obtained.

1. Рассмотрим уравнение

$$u_{01} - (f(u)u_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0, \\ f(u) \neq \text{const}, \quad u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ij} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{1}$$

частным случаем которого является известное уравнение нелинейной акустики ограниченных звуковых пучков (уравнение Хохлова–Заболотской) [1]:

$$u_{01} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{2}$$

В [2] методом Ли найдена симметрия уравнения (2) и показано, что симметрия (2) есть бесконечномерная алгебра. Из этой алгебры можно выделить конечную замкнутую подалгебру с операторами

$$Q_{\mu+1} = \partial_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad Q_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad Q_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2, \\ Q_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad Q_8 x^\mu \partial_\mu, \tag{3}$$

$$Q_9 = ux_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2u\partial_u, \quad Q_{10} = x_0\partial_1 - \partial_u. \tag{4}$$

Условную инвариантность одномерного уравнения акустики вида $u_{00} = uu_{11}$ исследовано в [3].

В данной работе изучается условная симметрия уравнений (1), (2). Для этого используем понятия, введенные в [4, 5].

Сначала опишем дифференциальные уравнения первого порядка вида

$$f(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}) = 0, \tag{5}$$

которые имеют более широкую симметрию, чем алгебра, порождаемая операторами (3), (4).

Теорема 1. *Для того, чтобы уравнение (5) допускало алгебру Ли, порождаемую (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы (5) имело вид*

$$u_0 u_1 - uu_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0. \tag{6}$$

Исследуем максимальную (в смысле Ли) симметрию этого уравнения.

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 9, С. 25–28.

Теорема 2. *Уравнение (6) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры с оператором*

$$X = a^i(u)Q_i, \quad i = \overline{1,16}, \tag{7}$$

где $a^i(u)$ — произвольные гладкие функции, Q_j, $j = \overline{1,10}$, имеют вид (3), (4),

$$Q_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + 2ux_0)\partial_2, \quad Q_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2ux_0)\partial_3, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &Q_{13} = 4x_0Q_8 - a(\boldsymbol{x}, u)\partial_1, \quad Q_{14} = 2x_2Q_8 + a(\boldsymbol{x}, u)\partial_2, \\ &Q_{15} = 2x_3Q_8 + a(\boldsymbol{x}, u)\partial_3, \quad Q_{16} = 4(ux_0 + x_1)Q_8 - a(\boldsymbol{x}, u)(\partial_0 - u\partial_1), \\ &a(\boldsymbol{x}, u) \equiv 4ux_0^2 + 4x_0x_1 - x_2^2 - x_3^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство теорем проводится по схеме, изложенной в [5].

2. Перейдем к изучению условной инвариантности уравнений (2). Наложим на решения уравнения (2) дополнительное условие (6). Тогда имеет место

Теорема 3. *Уравнение (2) при дополнительном условии (6) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры с оператором*

$$X = a^iQ_i, \quad i = \overline{1,12}, \tag{10}$$

где $a^i = a^i(u)$ — произвольные гладкие функции, Q_i заданы формулами (3), (4), (8).

Для уравнения (1) справедлива

Теорема 4. *Уравнение (1) при произвольной функции $f(u)$ инвариантно относительно 8-мерной алгебры Ли с базисными операторами Q_i ($i = \overline{1,8}$) вида (3).*

Если на решения уравнения (1) наложить дополнительное условие

$$u_0u_1 - f(u)u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0, \tag{11}$$

то имеет место

Теорема 5. *Уравнение (1) при условии (11) допускает бесконечномерную алгебру Ли с оператором*

$$X = a^iR_i, \quad i = \overline{1,12},$$

где $a^i \equiv a^i(u)$ — произвольные гладкие функции, а для R_i имеем $R_j = Q_j$, $j = \overline{1,8}$ (см. (3)),

$$\begin{aligned} &R_9 = 4x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2\frac{f}{f'}\partial_u, \quad R_{10} = f'(u)x_0\partial_1 - \partial_u, \\ &R_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + 2f(u)x_0)\partial_2, \quad R_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2f(u)x_0)\partial_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Для доказательства теорем 3–5 необходимо использовать алгоритм С. Ли [5].

Замечание. Система (1), (11) заменой $v = f(u)$ сводится системе уравнений (2), (6).

3. Используя приведенные теоремы, можно провести редукцию и найти точные решения системы (2), (6) и тем самым получить решение уравнения (2).

Для примера рассмотрим оператор

$$X = \partial_0 - a(u)\partial_1, \tag{13}$$

который входит в алгебру (10) ($a(u)$ — произвольная функция). По этому оператору строим анзац [5]

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = a(u)x_0 + x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3. \tag{14}$$

Заметим, что этот анзац нельзя получить с помощью алгебры симметрии уравнения (2), поскольку это уравнение без дополнительного условия (6) неинвариантно относительно оператора (13). Подстановку (14) естественно назвать **условным анзацем** для уравнения (2). Подставляя (14) в (2), (6), получим редуцированную систему:

$$\begin{gathered} \varphi_{11}[a(\varphi) - \varphi] - \varphi_{22} - \varphi_{33} + [a'(\varphi) - 1]\varphi_1^2 = 0, \\ [a(\varphi) - \varphi]\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\varphi_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad \varphi_{ii} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i^2}, \quad i = \overline{1,3},$$

которую можно решить, конкретизируя функцию $a(u)$.

Для иллюстрации рассмотрим два случая.

Пусть $a(u) \equiv u$. Система (15) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \varphi_{22} + \varphi_{33} = 0, \\ \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Общее решение системы (16) имеет вид:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Phi(\omega_1, \omega_2 \pm i\omega_3), \tag{17}$$

где Φ — произвольная гладкая функция.

Подставляя (17) в (14), получаем решение уравнения (2)

$$u = \Phi(ux_0 + x_1, x_2 \pm ix_3). \tag{18}$$

Пусть $a(u) \equiv u + 1$. Система (15) запишется как

$$\begin{gathered} \varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} = 0, \\ \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

В [6] найдено общее решение системы (19)

$$\Psi(\varphi) = l(\varphi)\omega_1 + m(\varphi)\omega_2 + n(\varphi)\omega_3, \tag{20}$$

где $\Psi(\varphi)$ — произвольная функция, функции $l(\varphi)$, $m(\varphi)$, $n(\varphi)$ удовлетворяют условию

$$l^2(\varphi) - m^2(\varphi) - n^2(\varphi) = 0, \qquad m^2(\varphi) + n^2(\varphi) \neq 0.$$

Выразив из (20) φ и подставив в (14), получим решение уравнения (2).

Операторы Q_{11}, Q_{12} из (8) порождают следующие конечные преобразования:

$$\begin{aligned}
&x_0' = \alpha(\boldsymbol{x}, u, a), \quad \boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = \beta(\boldsymbol{x}, u, a),\\
&x_3' = \gamma(\boldsymbol{x}, u, a), \qquad u' = u.
\end{aligned} \tag{21}$$

В (21) для оператора Q_{11} выполняется

$$\begin{aligned}
&\alpha(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{1}{2\sqrt{u}} \left[\frac{x_1 + 2x_0 u}{\sqrt{u}} \operatorname{ch}(2\sqrt{u}a) + x_2 \operatorname{sh}(2\sqrt{u}a)\right] - \frac{x_1}{2u},\\
&\beta(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{x_1 + 2x_0 u}{\sqrt{u}} \operatorname{sh}(2\sqrt{u}a) + x_2 \operatorname{ch}(2\sqrt{u}a), \quad \gamma \equiv 1,
\end{aligned} \tag{22}$$

а для оператора Q_{12} соответственно

$$\begin{aligned}
&\alpha(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{1}{2\sqrt{u}} \left[\frac{x_1 + 2x_0 u}{\sqrt{u}} \operatorname{ch}(2\sqrt{u}a) + x_3 \operatorname{sh}(2\sqrt{u}a)\right] - \frac{x_1}{2u},\\
&\beta \equiv 1, \quad \gamma(\boldsymbol{x}, u, a) \equiv \frac{x_1 + 2x_0 u}{\sqrt{u}} \operatorname{sh}(2\sqrt{u}a) + x_3 \operatorname{ch}(2\sqrt{u}a).
\end{aligned} \tag{23}$$

Отметим, что уравнение (2) без дополнительного условия (6) неинвариантно относительно операторов Q_{11}, Q_{12}. Система (2), (6) инвариантна относительно преобразований (22), (23). А это значит, что справедлива следующая формула размножения решений уравнения (2): если u_1 — решение системы (2), (6), то новое решение u_2 строится согласно формуле

$$u_2 = u_1\{\alpha(\boldsymbol{x}, u_2, a), x_1, \beta(\boldsymbol{x}, u_2, a), \gamma(\boldsymbol{x}, u_2, a)\}. \tag{24}$$

В (24) $\alpha(\boldsymbol{x}, u_2, a), \beta(\boldsymbol{x}, u_2, a), \gamma(\boldsymbol{x}, u_2, a)$ имеют вид (22), (23).

1. Руденко О.В., Солуян С.И., Теоретические основы нелинейной акустики, М., Наука, 1975, 320 с.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В., Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1986, 336 с.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики, *Докл. АН УССР*, 1988, № 10, 28–33.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1988, 336 с.
6. Collins C.B., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–187.

О новой математической модели процессов теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, А.С. ГАЛИЦЫН, А.С. ПОЛУБИНСКИЙ

Для математического описания процессов теплопроводности и диффузии предложено новое дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка $Lu \equiv \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u = 0$, где $L_2 = L_1 L_1$, L_1 — классический оператор теплопроводности, инвариантное относительно группы Галилея. Установлено интегральное представление решения краевой задачи, изучены решения задачи Коши и типа бегущей волны, а также решения со степенным и степенным граничным режимом с обострением.

В настоящей статье для описания тепловых и диффузионных процессов предложено новое дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, инвариантное относительно группы Галилея. При определенном задании параметров предложенная модель более адекватно, чем классическое уравнение параболического типа, описывает эти процессы и позволяет исследовать их специальные режимы.

1. Введение. Математическая теория теплопроводности распределенных систем основана на классическом линейном уравнении параболического типа

$$L_1 u \equiv (\partial/\partial t - \varkappa^2 \nabla^2) u(x,t) = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varkappa > 0$ — физическая константа, характеризующая среду, ∇^2 — оператор Лапласа. В нем постулированы такие жесткие условия на процессы, как бесконечная скорость распространения возмущений, линейная зависимость потока от градиента поля и энергии от температуры.

При нарушении этих условий уравнение (1) не вполне корректно описывает процессы тепломассопереноса и приводит к ряду известных парадоксов [1–3]. В связи с этим для описания процессов с конечной скоростью ряд авторов предложил вместо (1) использовать уравнение гиперболического типа [2, 4]

$$(\partial/\partial t + \tau_r \partial^2/\partial t^2 - \varkappa^2 \nabla^2) u(x,t) = 0, \tag{2}$$

где τ_r — время релаксации теплового потока (малый параметр). Замена уравнения (1) на (2) является принципиальной, но трудно объяснимой с теоретико- групповой точки зрения. Дело в том, что требование инвариантности уравнения относительно той или иной группы преобразований позволяет из множества уравнений, пригодных для математического описания физического процесса, выделить только такие, которые обладают соответствующими симметрийными свойствами и, таким образом, отражают основные физические законы сохранения. В связи с этим необходимо отметить, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразований Галилея $x'_a = x_a + v_a t$, v_a, $a = 1, 2, 3,$ — скорость инерциальной системы отсчета

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 2, С. 237–245.

K' относительно системы K, а это означает, что для него выполняется фундаментальный классический принцип относительности Галилея (описанию линейных и нелинейных параболических уравнений, инвариантных относительно группы Галилея, посвящены работы [5, 6]. В то же время для гиперболического уравнения (2) должен выполнятся принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна (более подробно см., например, [5]). Однако все известные математические модели для описания процессов тепломассопереноса, основанные на дифференциальных уравнениях второго порядка по временной переменной, не инвариантны относительно преобразований Галилея, причем для большинства из них не выполняются ни принцип Галилея, ни принцип Пуанкаре–Эйнштейна.

В статье [5] указано на одно естественное обобщение уравнения (12)

$$Lu \equiv \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u = 0, \qquad L_2 = L_1 L_1, \tag{3}$$

где α_1 и α_2 — некоторые вещественные параметры.

Уравнение (3) инвариантно относительно группы Галилея $G(1,3)$ поэтому предположим, что оно может быть использовано для описания тепловых и диффузионных процессов, не зависящих от того, в каких инерциальных системах они наблюдаются.

Уравнение (3) в дальнейшем будем называть бипараболическим уранением теплопроводности.

2. Определяющие соотношения. Уравнение (3) может быть получено из уравнения сохранения энергии

$$\partial e/\partial t = \operatorname{div} \vec{q} = 0, \tag{4}$$

если задать энергию e и поток q соотношениями

$$\begin{aligned} &e = e_0 + c_v(u-u_0) + \nu\varphi(\partial u/\partial t, \nabla^2 u), \\ &\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} u - \mu \operatorname{grad}\psi(\partial u/\partial t, \nabla^2 u), \end{aligned} \tag{5}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, c_v — теплоемкость, ν и μ — отличные от нуля постоянные параметры, φ и ψ — некоторые скалярные функции. Очевидно, что при $\nu = \mu = 0$ соотношения (5) приводят к классическому уравнению (1).

Положим в (5) $\varphi = \partial u/\partial t - a\frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u$, $\psi = b\partial u/\partial t - \frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u$, $a, b = \mathrm{const} > 0$. Тогда из (4) получим эволюционное уравнение четвертого порядка по пространственным переменным и второго порядка по t

$$c_v\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\lambda}{c_v}\nabla^2 u\right) + \nu\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{a\lambda}{c_v} + \frac{b\mu}{\nu}\right)\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u + \frac{\lambda}{c_v}\frac{\mu}{\nu}\nabla^2\nabla^2 u\right] = 0. \tag{6}$$

Заданием параметров a, b, μ и ν из (6) можно получить несколько новых уравнений теплопроводности, содержащих как частный случай классическое уравнение (1). Для нас наибольший интерес представляет уравнение, следующее из (6) и принимающее вид (3), где $\varkappa^2 = \lambda/c_v$, причем $L_1 \equiv \partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2$, $L_2 \equiv (\partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2)(\partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2)$. Оно очевидно, соответствует определяющим соотношениям для энергии и потока

$$e = e_0 + c_v(u-u_0) + \nu L_1 u, \qquad \vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} u - \mu \operatorname{grad} L_1 u.$$

3. Фундаментальное решение оператора L. Фундаментальным решением бипараболического уравнения (3) назовем обобщенную функцию $G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$LG \equiv \alpha_1 L_1 G + \alpha_2 L_2 G = 4\pi\delta(\vec{R})\delta(\tau), \tag{7}$$

где δ — дельта-функция, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$, $\tau = t - t_0$, $x \in E_n$. Представляя G в виде интеграла Фурье

$$G(\vec{R},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E_n} e^{i(\vec{R}\cdot\vec{\sigma})} g(\vec{\sigma},\tau)d\sigma,$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in E_n$, из (7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\alpha_2 g'' + (2\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)g' + \varkappa^2\sigma^2(\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)g = 4\pi\delta(\tau),$$

решение которого имеет вид

$$g(\vec{\sigma},\tau) = \frac{4\pi}{\alpha_1}\left(1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\tau}\right)e^{-\varkappa^2\sigma^2\tau}\Theta(\tau),$$

где $\Theta(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. Следовательно, при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 < \infty$

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) = \frac{4\pi\Theta(\tau)}{\alpha_1}\frac{1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\tau}}{(2\varkappa\sqrt{\pi\tau})^n}e^{-\frac{R^2}{4\varkappa^2\tau}}, \tag{8}$$

а в случае, когда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$

$$G_{0,1}(\vec{R},\tau) = \frac{4\pi\Theta(\tau)}{(2\varkappa\sqrt{\pi\tau})^n}\tau e^{\frac{-R^2}{4\varkappa^2\tau}}. \tag{9}$$

Пусть $Q(\vec{R},\tau)$ — фундаментальное решение классического оператора L_1 [1]. Сравнивая его с (8) и (9), видим, что

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\tau}}{\alpha_1}Q(\vec{R},\tau), \quad G_{0,1}(\vec{R},\tau) = \tau Q(\vec{R},\tau).$$

Поскольку $\frac{1-e^{-\alpha_1\tau/\alpha_2}}{\alpha_1\tau/\alpha_2} \to 1$ при $\frac{\alpha_1\tau}{\alpha_2} \to 0$, то

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) \underset{\alpha_1\to 0}{\to} \frac{\tau}{\alpha_2}Q(\vec{R},\tau) = \frac{1}{\alpha_2}G_{0,1}(\vec{R},\tau)$$

и, кроме того,

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) \underset{\tau\to 0}{\to} G_{0,1}(\vec{R},\tau), \quad G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} Q(\vec{R},\tau).$$

Следовательно, при достаточно малых τ фундаментальное решение оператора L ведет себя по τ как фундаментальное решение оператора L_2, а для достаточно больших τ его характер определяется поведением фундаментального решения оператора L_1. Дальнейший асимптотический анализ фундаментального решения оператора L при $\tau \to \infty$ показывает, что для $\vec{R} \neq 0$

$$\lim_{\tau\to\infty} G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R},\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \operatorname{sgn}\alpha_1 = \operatorname{sgn}\alpha_2, \\ \infty, & \text{если} \quad \operatorname{sgn}\alpha_1 \neq \operatorname{sgn}\alpha_2, \end{cases}$$

причем

$$\lim_{\tau\to\infty} G_{0,1}(\vec{R},\tau) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad n=1, \\ 1/\varkappa, & \text{если} \quad n=2, \\ 0, & \text{если} \quad n=3,4,\ldots. \end{cases}$$

4. Интегральные формулы. Пусть $\Omega \in E_n$ — односвязная область с достаточно гладкой границей $\Gamma, \vec{n}$ — орт внешней конормали к Γ, $\Omega_T = \{x \in \Omega, 0 < t < T\}$ — цилиндр высоты $t > 0$ в пространстве $E_{n+1} = E_n \times (-\infty < t < \infty)$, $L_{P,t} \equiv \alpha_1 1 L_1 + \alpha_2 L_2$, $M_{P,t} = \alpha_1 \bar{L}_1 + \alpha_2 \bar{L}_2$, где $\bar{L}_2 = \bar{L}_1 \bar{L}_1$, $\bar{L}_1 = -\partial/\partial t - \varkappa^2\nabla^2$, т. е. оператор $M_{P,t}$ сопряжен в смысле Лагранжа с оператором $L_{P,t}$ (индекс P указывает на то, что оператор ∇^2 действует по координатам точки $P \in \Omega$). Обозначим через $C^{2k,k}(\bar{\Omega}_T)$, где целое число $k \geq 1$, множество всех непрерывных в Ω_T функций $u(x,t)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, у которых существуют непрерывные в Ω_T производные $\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n+l}}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}\partial t^l} u$ при всех целых неотрицательных $m_1,\ldots,m_n$ и $l, m_1+\cdots+m_n+2l \leq 2k$.

Тогда для любых $u, v \in C^{4,2}(\Omega_T)$ при $0 \leq t < T$ имеет место формула

$$\int_0^t d\tau \int_\Omega (vL_{P_0,\tau}u - uM_{P_0,\tau}v)d\omega_0 = \alpha_1 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v\frac{\partial u}{\partial\tau} + u\frac{\partial v}{\partial\tau}\right) d\omega_0 -$$
$$- \alpha_1\varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Omega (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)d\omega_0 + \alpha_2 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2}\right) d\omega_0 -$$
$$- 2\alpha_2\varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla^2 u + u\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla^2 v\right) d\omega_0 +$$
$$+ \alpha_2\varkappa^4 \int_0^t d\tau \int_\Omega \left(v\nabla^2\nabla^2 u - u\nabla^2\nabla^2 v\right) d\omega_0.$$

Интегрируя по частям и используя формулы Грина–Остроградского, получаем

$$\int_0^t d\tau \int_\Omega (vL_{P_0,\tau}u - uM_{P_0,\tau}v)d\omega_0 = \int_\Omega \Big[\alpha_1 uv + \alpha_2 \left(v\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right) +$$
$$+ 2\alpha_2\varkappa^2(\nabla u\cdot\nabla v)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} d\omega_0 - \alpha_1\varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\frac{\partial v}{\partial n_0}\right) d\gamma_0 -$$
$$- \alpha\varkappa^4 \int_0^t d\tau \int_\Gamma \nabla \left(v\nabla\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\nabla\frac{\partial v}{\partial n_0}\right) d\gamma_0 - \tag{10}$$
$$- 2\alpha\varkappa^2 \int_0^t d\tau \int_\Gamma \left[v\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau} - \varkappa^2\nabla_\Gamma^2 u\right) + u\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\partial v}{\partial\tau} + \varkappa^2\nabla_\Gamma^2 v\right)\right] d\gamma_0,$$

где ∇ — оператор Гамильтона, ∇_Γ^2 — сужение ∇^2 на границу.

Формулу (10) будем называть интегральной формулой типа Грина для бипараболического оператора L. При решении начально-граничных задач для уравнения (3) она играет ту же роль, что и аналогичная формула для оператора теплопроводности L_1 [7], к которой она сводится при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$. В частности, (10) позволяет указать корректные для оператора L граничные и начальные условия. Из формулы (10) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ сразу же вытекает соответствующая формула для оператора L_2.

5. Интегральное представление решения краевой задачи. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu(x,t) = f(x,t), \tag{11}$$

и используем формулу (10), полагая $v = G_{\alpha_1\alpha_2}(\vec{R}, t-\tau)$ (индексы при G в дальнейшем опускаем). Поскольку фундаментальное решение удовлетворяет условию причинности $G(\vec{R}, t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, то $LG(\vec{R}, t-\tau) = 0$ и $MG(\vec{R}, t-\tau) = 0$ при $t < \tau$. Кроме того, можно показать, что

$$\int_\Omega G(\vec{R},0)u(P_0,t)d\omega_0 = \int_\Omega G(\vec{R},0)\frac{\partial u(P_0,t)}{\partial \tau}d\omega_0 =$$
$$= \int_\Omega (\nabla G(\vec{R},0)\nabla u(P_0,t))d\omega_0 = 0,$$
$$\int_\Omega \frac{\partial G(\vec{R},0)}{\partial \tau}u(P_0,t)d\omega_0 = -\frac{4\pi}{\alpha_2}u(x,t).$$

В результате интегральное представление начально-граничной задачи для уравнения (11) принимает вид

$$\begin{aligned}4\pi u(x,t) = &\int_\Omega \left[\alpha_1 G(\vec{R},t)u(P_0,0) - \alpha_2\frac{\partial G(\vec{R},t)}{\partial \tau}u(P_0,0) + \right.\\
&\left. + \alpha_2 G(\vec{R},t)\frac{\partial u(P_0,0)}{\partial \tau} - 2\alpha_2\varkappa^2 G(\vec{R},t)\nabla^2 u(P_0,0)\right] d\omega_0 + \\
&+ 2a_2\varkappa^2\int_\Gamma G(\vec{R},t)\frac{\partial u(P_0,0)}{\partial n_0}d\gamma_0 + \alpha_1\varkappa^2\int_0^t d\tau\int_\Gamma \left(G\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right)d\gamma_0 + \\
&+ \alpha_2\varkappa^4\int_0^t d\tau\int_\Gamma \nabla\left(G\nabla\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\nabla\frac{\partial G}{\partial n_0}\right)d\gamma_0 + \\
&+ 2\alpha_2\varkappa^2\int_0^t d\tau\int_\Gamma \left[G\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \varkappa^2\nabla_\Gamma^2 u\right) + u\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{\partial G}{\partial \tau} + \varkappa^2\nabla_\Gamma^2 G\right)\right]d\gamma_0 + \\
&+ \int_0^t d\tau\int_\Omega f(P_0,\tau)G(\vec{R},t-\tau)d\omega_0.\end{aligned} \tag{12}$$

Из представления (12) следует, что в задаче типа Коши начальные условия для уравнения (3) задаются в виде

$$u = \varphi_0(x), \quad \partial u/\partial t - 2\varkappa^2\nabla^2 u = \varphi_1(x), \quad t = 0, \quad x \in E_n. \tag{13}$$

6. Одномерная задача типа Коши. Приняв во внимание (13), рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}&Lu \equiv \alpha_1\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0,\\
&u(x,0) = \psi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - 2\varkappa^2\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.\end{aligned} \tag{14}$$

Применив к ней преобразование Фурье, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\alpha_2\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + (2\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)\frac{d\hat{u}}{dt} + (\alpha_2\varkappa^2\sigma^2 + \alpha_1)\varkappa^2\sigma^2\hat{u} = 0, \quad t > 0,$$

с начальными данными $\hat{u}(\sigma,0)=\hat{\psi}(\sigma)$, $d\hat{u}(\sigma,0)/dt+2\varkappa^2\sigma^2\hat{u}(\sigma,0)=\hat{\varphi}(\sigma)$, где знаком “ $\hat{}$ ” обозначается образ Фурье, σ — вещественный параметр преобразования. Решение этой задачи получено в виде

$$\hat{u}(\sigma,t)=\left\{\left[1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}\right)\varkappa^2\sigma^2\right]\hat{\psi}(\sigma)+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}\right)\hat{\varphi}(\sigma)\right\}e^{-\varkappa^2\sigma^2 t}.$$

Поскольку $u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma x}\hat{u}(\sigma,t)d\sigma$, то после соответствующих вычислений получаем окончательный результат

$$\begin{gathered}u(x,t)=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'-\\-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}}{4\varkappa t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\left[1-\frac{(x-x')^2}{2\varkappa^2 t}\right]e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'.\end{gathered}\tag{15}$$

Если $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=0$, то из (15) следует известное [1, 2] решение задачи Коши для уравнения $L_1u=0$ при условии $u(x,0)=\psi(x)$

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'.\tag{16}$$

Если $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=1$, то аналогично (15) получается решение задачи типа Коши для уравнения $L_2u=0$ при условиях (14)

$$\begin{gathered}u_2(x,t)=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'+\frac{\sqrt{t}}{2\varkappa\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'-\\-\frac{1}{4\varkappa\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\left[1-\frac{(x-x')^2}{2\varkappa^2 t}\right]e^{-\frac{(x-x')^2}{4\varkappa^2 t}}dx'.\end{gathered}\tag{17}$$

Пусть $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=\begin{cases}V, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$ $V=\mathrm{const}$. Тогда точные решения, соответствующие формулам (15)–(17), примут соответственно вид

$$u(x,t)=u_1(x,t)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}V\frac{1-e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t}}{4\varkappa t\sqrt{\pi t}}\left[(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\varkappa^2 t}}+(a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\varkappa^2 t}}\right],\tag{18}$$

$$u_1(x,t)=\frac{V}{2}\left[\operatorname{erf}\frac{a-x}{2\varkappa\sqrt{t}}+\operatorname{erf}\frac{a+x}{2\varkappa\sqrt{t}}\right],\tag{19}$$

$$u_2(x,t)=u_1(x,t)-\frac{V}{2\varkappa\sqrt{\pi t}}\left[(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\varkappa^2 t}}+(a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\varkappa^2 t}}\right],\tag{20}$$

где $\operatorname{erf} z$ — функция ошибок [1, 2]. Сравнение результатов вычислений по этим формулам показало, что решения до некоторого фиксированого t_0 являются монотонно убывающими функциями по x; при $t>t_0$ для решений (18) и (20), в отличие от классического случая (19), характерно образование уединенной волны, движущейся в направлении оси x с монотонно убывающей по t амплитудой.

Отметим один новый момент, связанный с заданием начальных условий для оператора L. Решение (18) удовлетворяет неравенству $0\le u(x,t)\le V$. Если же в (14) задать вместо второго условия условие $\partial u(x,0)/\partial t=0$, то решение такой задачи будет отличаться от вида (18) лишь знаком при втором члене. В этом случае указанное неравенство не будет выполняться: существует такое t_0, что при $t > t_0$ на полуоси Ox решение принимает как положительные, так и отрицательные значения, причем $u(x,t) \to -0$ при $x \to \infty$. Это справедливо для любых сколь угодно малых значений $\alpha_2 > 0$.

7. Решения типа бегущей волны. Рассмотрим вначале одномерный вариант уравнения (3) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$

$$L_2 u \equiv (\partial/\partial t - \varkappa^2 \partial^2/\partial x^2)(\partial u/\partial t - \varkappa^2 \partial^2 u/\partial x^2) = 0 \tag{21}$$

и будем искать его автомодельные решения вида

$$u_A(x,t) = e^{\beta t}\varphi(\xi), \quad \xi = x - vt, \tag{22}$$

где v — скорость волны, β — коэффициент затухания. Функция $\varphi(\xi)$ определяется, очевидно, из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varkappa^4 \varphi^{\mathrm{IV}} + 2\varkappa^2 v \varphi^{\mathrm{III}} + (v^2 - 2\varkappa^2\beta)\varphi^{\mathrm{II}} - 2\beta v \varphi^{\mathrm{I}} + \beta^2 \varphi = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(\xi) = c_1 e^{r_1\xi} + c_2 e^{r_2\xi} + c_3 \xi e^{r_1\xi} + c_4 \xi e^{r_2\xi}, \tag{23}$$

где c_j, $j = \overline{1,4}$ — произвольные постоянные, r_1, r_2 вычисляются по формуле

$$r_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2}}{2\varkappa^2}. \tag{24}$$

Тепловой поток в рассматриваемом случае задается в виде

$$q(\xi,t) = \mu e^{\beta t}[\varkappa^2 \varphi^{\mathrm{III}}(\xi) + v\varphi^{\mathrm{II}}(\xi) - \beta\varphi^{\mathrm{I}}(\xi)].$$

Среди множества функций (23) содержатся автомодельные решения, удовлетворяющие условиям $\varphi(\xi) > 0$, $\xi < 0$; $\varphi(0) = 0$; $\beta\varphi(0) - v\varphi^{\mathrm{I}}(0) - 2x^2\varphi^{\mathrm{II}}(0) = 0$; $q(0,t) = 0$. Они обеспечивают непрерывность начальных условий, следующих из (14), и потока в точке $\xi = 0$. Поэтому существуют решения уравнения (21) со всюду непрерывным тепловым потоком, которые при каждом $t \in (0,T)$ являются финитными по x: $u_A(x,t) = 0$ при $x \geq vt$. Это означает, что уравнение (21) пригодно для описания процессов с конечной скоростью распространения возмущений. Опуская громоздкие выкладки, приводим их окончательный вид

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} c_1\left(e^{-\frac{v}{\varkappa^2}\xi} - 1 - \dfrac{v}{\varkappa^2}\xi\right), & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad \beta = 0, \end{cases} \tag{25}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} c_2\xi\left(\dfrac{4r_2\varkappa^2 + v}{4r_1\varkappa^2 + v}e^{r_1\xi} - e^{r_2\xi}\right), & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad \beta = -\dfrac{v^2}{8\varkappa^2}, \end{cases} \tag{26}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} c_3\Bigg[e^{r_2\xi} - e^{r_1\xi} + \dfrac{v(r_2 - r_1)}{4r_1\varkappa^2 + v}\xi e^{r_1\xi} + \dfrac{v\sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2}}{2\varkappa^2(v^2 + 8\beta\varkappa^2)}(\sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2} - v)\xi \times \\ \qquad \times \left(e^{r_2\xi} - \dfrac{4r_2\varkappa^2 + v}{4r_1\varkappa^2 + v}e^{r_1\xi}\right)\Bigg], & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad -\dfrac{v^2}{8\varkappa^2} < \beta < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Здесь c_s, $s = \overline{1,3}$ — произвольные постоянные, $r_{1,2}$ определяются по формуле (24). При $\xi < 0$ решения $u_A(x,t)$, построенные в виде (22) с помощью (25)–(27), являются классическими, но они могут не иметь достаточную гладкость в точках фронта волны $X(t) = vt$, где обращаются в нуль.

Аналогичным образом можно показать, что среди решений общего бипараболического уравнения (3) содержится в точности три финитных решения, описывающих распространение возмущений с конечной скоростью.

Примеры финитных решений классических нелинейных уравнений теплопроводности второго порядка, обладающих подобными свойствами, рассмотрены в [8, 9].

8. Степенной граничный режим. Будем искать решения уравнения (21) при граничном условии [8] $u(0,t) = (1+t)^\alpha$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$, вида $u_A(x,t) = (1+t^\alpha)\varphi(\xi)$, $\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}}$. Нетрудно показать, что функция $\varphi(\xi)$ должна определяться из дифференциального уравнения

$$\left(\varkappa^2\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{d}{d\xi} - (\alpha-1)\right)\left(\varkappa^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha\varphi\right) = 0,$$

общее решение которого выражается через функции Эрмита и имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) = c_1 H_{2\alpha}(i\xi/2\varkappa) + c_2 H_{2\alpha-2}(i\xi/2\varkappa) + c_3 e^{-\xi^2/4\varkappa^2} H_{-2\alpha-1}(\xi/2\varkappa) + {}\\ + c_4 e^{-\xi^2/4\varkappa^2} H_{-2\alpha+1}(\xi/2\varkappa).\end{aligned} \tag{28}$$

Используя асимптотические представления функций Эрмита [10] и требуя ограниченности $\varphi(\xi)$ при $\xi \to \infty$, устанавливаем, что $c_1 = c_2 = 0$ при $\alpha > 1$ и $c_1 = 0$ при $0 < \alpha < 1$. При выполнении этих условий имеют место два случая: 1) $\varphi(\infty) = 0$, если $\alpha \neq 1$; 2) $\varphi(\infty) = 1$, если $\alpha = 1$.

Если, следуя [8], ввести координату фронта тепловой волны $\varkappa_\Phi(t) = \xi_\Phi(t)(1+t)^{1/2}$, то для финитности решения уравнения (21) необходимо, чтобы

$$\varphi(\xi_\Phi) = q(\xi_\Phi, t) = 0, \tag{29}$$

где тепловой поток определяется формулой

$$q(\xi,t) = -\mu(1+t)^{\alpha-3/2}\left[(\alpha-1/2)\varphi'(\xi) - \frac{\xi}{2}\varphi''(\xi) - \varkappa^2\varphi'''(\xi)\right].$$

Рассмотрим указанные выше случаи отдельно.

А) Пусть $\alpha > 1$. Зафиксировав в (28) $\xi = \xi_\Phi$ при $c_1 = c_2 = 0$, для определения постоянных c_3 и c_4 получим однородную алгебраическую систему, определитель которой

$$\Delta \sim 1/2\varkappa(\xi_\Phi/\varkappa)^{-4\alpha-3}[(\xi_\Phi/\varkappa)^4 + 4(\alpha+1)(\xi_\Phi/\varkappa)^2 + 12(2\alpha+1)^2] \tag{30}$$

отличен от нуля, что следует из асимптотического представления функций Эрмита для достаточно больших $\xi_\Phi/2\varkappa$. Следовательно, для принятых условий фронт волны не может находиться в конечной точке, и уравнение (21) описывает распространение возмущений с бесконечной скоростью.

Б) Пусть $0 < \alpha < 1$. Здесь для определения постоянных c_3 и c_4 в (28) при произвольном фиксированном c_2 получается неоднородная алгебраическая система, определитель которой при достаточно больших $\xi_\Phi/2\varkappa$ имеет вид (30) и отличен от нуля. Следовательно, постоянные c_s, $s = \overline{2,4}$, можно выбрать так, чтобы удовлетворялись равенства (29), и, таким образом, построить финитное решение уравнения (21), описывающее тепловую волну с конечной скоростью распространения возмущений.

9. Степенной граничный режим с обострением. Если граничная функция неограниченно возрастает за конечный промежуток времени ($u(0,t) \to \infty$ при $t \to T^-$), то тепловой режим называется режимом с обострением [8]. Ему, например, соответствует граничное условие

$$u(0,t) = (T-t)^{-\alpha}, \qquad \alpha = \text{const} > 0. \tag{31}$$

Будем искать решение уравнения (21) в виде

$$u_A(x,t) = (T-t)^{-\alpha}\varphi(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{T-t}}. \tag{32}$$

Можно показать, что функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\left(\varkappa^2\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2}\frac{d}{d\xi} - (\alpha+1)\right)\left(\varkappa^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2}\frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha\varphi\right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) = c_1 H_{-2\alpha}(\xi/2\varkappa) + c_2 H_{-2\alpha-2}(\xi/2\varkappa) + c_3 e^{\xi^2/4\varkappa^2} H_{2\alpha-1}(i\xi/2\varkappa) +\\ + c_4 e^{\xi^2/4\varkappa^2} H_{2\alpha+1}(i\xi/2\varkappa),\end{aligned} \tag{33}$$

причем ограниченное при $\xi \to \infty$ решение получается из (33) при $c_3 = c_4 = 0$. В этом случае полуширина волны [81 определяется формулой $X = \xi_\Phi (T-t)^{1/2}$, из которой следует, что $X \to 0$ при $t \to T^-$, т.е. поступающая в среду энергия сосредотачивается в зоне с сокращающимся эффективным размером. При этом тепловой поток записывается в виде

$$q(\xi,t) = -\mu(T-t)^{-\alpha-3/2}\left[(\alpha+1/2)\varphi'(\xi) + \frac{\xi}{2}\varphi''(\xi) - \varkappa^2\varphi'''(\xi)\right].$$

Для финитного решения вида (32) уравнения (21) должны, как и ранее, выполняться условия (29), поэтому для определения постоянных c_1, и c_2, из (33) при фиксированном $\xi = \xi_\Phi$ получаем однородную алгебраическую систему, определитель которой Δ должен быть равен нулю. Однако оказывается, что если в Δ воспользоваться асимптотическими представлениями функций Эрмита при больших $\xi_\Phi/2\varkappa$ приходим к равенству $12(\alpha+1)\varkappa^2 + \xi_\Phi^2 = 0$, которое невозможно ввиду $\alpha > 0$. Следовательно, фронт тепловой волны не может находиться в конечной точке ξ_Φ, и, таким образом, в режиме с обострением уравнение (21) описывает распространение возмущений с бесконечной скоростью (см. также [8]).

1. Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, в 2 т., М., Изд-во иностр. лит., 1958, Т. 1, 930 с.

2. Лыков А.В., Теория теплопроводности, М., Высш. шк., 1967, 599 с.

3. Толубинский Е.В., Теория процессов переноса, Киев, Наук. думка, 1969, 259 с.

4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Обобщенная термомеханика, Киев, Наук. думка, 1976, 310 с.

5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–22.
6. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, 3491–3503.
7. Положий Г.Н., Уравнения математической физики, М., Высш. шк., 1964, 560 с.
8. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 477 с.
9. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А., Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур), М., Наука, 1987, 352 с.
10. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики, М., Наука, 1984, 319 с.

On superalgebras of symmetry operators of relativistic wave equations

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

It is well known that the classical Lie approach does not make it possible to describe completely the symmetry of systems of partial differential equations. Actually it gives the possibility of finding only such symmetry operators which are the first order differential operators.

Using the non-Lie approach, in which the invariance group generators may be differential operators of any order and even integro-differential operators, the new invariance groups of a number of relativistic wave equations have been found [1, 2]. It turns out that even such well studied equations as the Dirac and the Maxwell ones have more extensive symmetry then the relativistic and the conformal invariance [3]. A numerous examples of non-Lie symmetries had been collected in our book [4].

In this communication we give the description of any order symmetry operators for some class of relativistic wave equations (including the Dirac and the Kemmer–Duffin–Petiau equations) and determine superalgebraic structure of sets of symmetry operators of the Dirac and of the Maxwell equations.

Let us write an arbitrary linear system of partial differential equations in the following symbolic form

$$L\psi = 0, \tag{1}$$

where L is a linear differential operator defined on H, $\psi \in H$.

Let Q be a linear operator defined on H. We say that Q is the symmetry operator of the equation (1), if

$$L(Q\psi) = 0 \tag{2}$$

for any ψ satisfying (1).

Below we consider the symmetry operators of relativistic wave equations, the most famous of which is the Dirac one:

$$L\psi \equiv (\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0, \qquad p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3}$$

Using the equation (3) as an example we shall give the definition of the first ($Q^{(1)}$), the second ($Q^{(2)}$), the third ($Q^{(3)}$), ..., order symmetry operator as a linear differential operator which satisfies (2) and has the form

$$\begin{gathered} Q^{(1)} = a^\mu P_\mu + B, \qquad Q^{(2)} = a^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + B^\mu p_\mu + B, \\ Q^{(3)} = a^{\mu\nu\lambda} p_\mu p_\nu p_\lambda + B^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + B^\mu p_\mu + B, \end{gathered} \tag{4}$$

in Selected Topics in QFT and Mathematical Physics, Proceedings of the 5th International conference (Liblice, Czechoslovakia, June 25-30, 1989), Editors J. Niederle and J. Fisher, World Scientific, 1990, P. 385–391.

where $B, B^\mu, B^{\mu\nu}, \ldots$ are matrices depending on $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $a^\mu, a^{\mu\nu}, a^{\mu\nu\lambda}, \ldots$ are functions on x. For the Dirac equation all matrices, are 4×4 dimensional, in general the matrices dimension is determined by the number of components of wavefunction ψ.

It is well known that the complete set of first order symmetry operators of the Dirac equation is exhausted by the Poincaré group generators P_μ, $J_{\mu\nu}$

$$P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \tag{5}$$

which satisfy the commutation relations

$$\begin{gathered}[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\lambda}] = i(g_{\mu\nu}P_\lambda - g_{\mu\lambda}P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}).\end{gathered} \tag{6}$$

It means that the Poincaré invariance is the most extensive symmetry of the Dirac equation in the Lie sense [5, 6].

Using higher order symmetry operators it is possible to extend the symmetry group of the Dirac equation to the 16-parametrical Lie group which includes the Poincaré group as a subgroup [4]. Higher-order symmetry operators are useful in construction of coordinate systems in which the solutions in separated variables exist [7 ,8]. These operators may be considered also as the generators of Lie–Bäcklund groups [9].

Below we present some our general results connecting with the symmetry operators of relativistic wave equations for any spin particles.

Definition. Equation (1) is Poincaré-invariant and describes a particle of mass m and spin s, if it has 10 symmetry operators $P_\mu, J_{\mu\nu}$ which satisfy the algebra (6), and any solution ψ satisfies the conditions

$$P_\mu P^\mu \psi = m^2\psi, \qquad W_\mu W^\mu \psi = -m^2 s(s+1)\psi, \tag{7}$$

where $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$ is the Lubanski–Pauli vector.

Besides the Dirac equation the well known examples of relativistic wave equations satisfying given definition are the Kemmer–Duffin–Petiau equations for particles of spin 0 and 1 and the Rarita–Schwinger equation for a particle of spin $\frac{3}{2}$.

Theorem 1. *Any Poincaré-invariant equation for a particle of mass m and spin $s = 0$ is invariant under the algebra $ASL(2, C)$ [10].*

Proof. Let $P_\mu, J_{\mu\nu}$ be the symmetry operators of the equation (1), satisfying the commutation relations (6). Then by the definition (2) the following combinations

$$Q^\pm_{\mu\nu} = \frac{1}{m^2}[\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma \pm i(P_\mu W_\nu - P_\nu W_\mu)] \tag{8}$$

are also the symmetry operators of this equation.

Using (6), (7) and the relations $[W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma$, $[P_\mu, W_\nu] = 0$ can make sure that the operators (8) satisfy the conditions

$$\begin{gathered}[Q^\pm_{\mu\nu}, Q^\pm_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}Q^\pm_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}Q^\pm_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}Q^\pm_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}Q^\pm_{\mu\rho}), \\ Q^\pm_{\mu\nu}Q^{\pm\,\mu\nu}\psi = 2(l_0^2 - l_1^2 - 1)\psi, \qquad \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Q^{\pm\,\mu\nu}Q^{\pm\,\rho\sigma}\psi = il_0l_1\psi, \\ l_0 = s, \quad l_1 = \pm(s+1),\end{gathered}$$

and so form the basis of the finite dimensional irreducible representation $D(s, \pm(s+1))$ of the algebra $ASL(2, C)$. Thus the theorem is proved.

We see that any relativistic wave equation for a particle of nonzero spin and mass is automatically invariant under the algebra $ASL(2, C)$ basis elements of which belong to the enveloping algebra of the Lie algebra of the Poincaré group. The operators (8) form the basis of the 16-dimensional Lie algebra together with P_μ and $J_{\mu\nu}$. For the Dirac equation they take the form [4]

$$Q^{\pm}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + \frac{i}{m}(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu)(1 \pm i\gamma_4). \tag{9}$$

The operators (5), (9) generate the 16-parametrical invariance group of the Dirac equation. The corresponding finite transformations mix ψ and $\partial\psi/\partial x_\mu$ and can be easily calculated using the relation $(Q^{\pm}_{\mu\nu})^2 = 1/4$ [4].

The following statement gives the basis of any order symmetry operators for a class of relativistic wave equations of a type

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\psi = 0 \tag{10}$$

where β_μ are numerical matrices, β_0 is diagonalizable.

Theorem 2. *Any finite order symmetry operator of Poincaré-invariant equation for a particle of mass $m \neq 0$ and spin s (10) belongs to the enveloping algebra of the algebra $AP(1, 3)$.*

The proof can be carried out using the Theorem 1 and bearing in mind that the necessary conditions for the symmetry operators of the equation (10) is to be the symmetry operators of the equation (7).

Let us note that relativistic wave equations (10) also possess such additional invariance algebras which belong to the class of integro-differential operators [4] and generally speaking are not membered among the enveloping algebra of the algebra $AP(1, 3)$.

In contrast to the first order symmetry operators the higherorder ones in general do not form the basis of the Lie algebra. But as a rool the higher order symmetry operators have the structure of superalgebra. We shall demonstrated it for the Dirac and for the Maxwell equations.

Let us consider the complete set of the second order symmetry operators of the equation (3) commuting with P_μ. Using the Theorem 2 it is not difficult to find such a set in the form

$$I, \quad P_\mu, \quad \lambda_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu, \quad W_\mu = \frac{i}{4}\gamma_4(\gamma_\mu m - p_\mu), \quad W^{\mu\nu} = \gamma_4(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu), \tag{11}$$

where I is the unit matrix.

Direct verification can make sure that the operators (11) do not form the basis of the Lie algebra. But these operators together with $J_{\mu\nu}$ (5) form the Lie superalgebra with the basis elements (12)

$$\{W_\mu, W_{\mu\nu};\ J_{\mu\nu}, P_\lambda, \lambda_{\mu\nu}, I\}. \tag{12}$$

The operators W_μ, $W_{\mu\nu}$ satisfy the anticommutation relations

$$[W_\mu, W_\nu]_+ = W_\mu W_\nu + W_\nu W_\mu = \frac{1}{2}(\lambda_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} I),$$
$$[W_\mu, W_{\lambda\sigma}]_+ = i(g_{\mu\nu} P_\lambda - g_{\mu\lambda} P_\nu),$$
$$[W_{\mu\nu}, W_{\rho\lambda}]_+ = 2(g_{\mu\lambda}\lambda_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\lambda_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma}\lambda_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}\lambda_{\mu\sigma}),$$

the commutation relations W_μ, $W_{\mu\nu}$ with P_μ, $J_{\mu\nu}$, $\lambda_{\mu\nu}$, I and between P_μ, $J_{\mu\nu}$, $\lambda_{\mu\nu}$, I are obvious.

So the Dirac equation is invariant under the 27-dimensional Lie superalgebra which contains the subalgebra $AP(1,3)$. Basis elements of this superalgebra are second order symmetry operators.

Consider the Maxwell equations with currents and charges

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{H} + \vec{j}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = j_0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0. \tag{13}$$

The symmetry superalgebra of the equations (13) is formed by the set of the operators

$$\{Q^{ab};\ P_\mu, J_{\mu\nu}, \eta_{ab} = \nabla_a\nabla_b D, \eta_{abcd} = \nabla_a\nabla_b\nabla_c\nabla_d\}$$

where P_μ, $J_{\mu\nu}$ are the Poincaré group generators, a, b, c, $d = 1, 2, 3$, and Q^{ab}, D are the additional symmetry operators of the Maxwell equations [11] which act on E_a, H_a j_a and j_0 as follows

$$\begin{aligned} Q^{ab}:\quad & E_c \to q^{ab}_{cd}E_d, \quad H_c \to -q^{ab}_{cd}H_d, \\ & j_c \to q^{ab}_{cd}j_d, \quad j_0 \to (\delta_{ab}\Delta - \nabla_a\nabla_b)j_0; \\ D:\quad & E_c \to \nabla_c\nabla_d E_d, \quad H_c \to \nabla_c\nabla_d H_d, \\ & j_c \to \nabla_c\nabla_d j_d, \quad j_0 \to \Delta j_0, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} & q^{ab}_{cd} = f^{ab}_{cd} + f^{ba}_{cd} + f^{ab}_{dc} + f^{ba}_{dc}; \\ & f^{ab}_{cd} = \delta_{ad}\nabla_b\nabla_c + \frac{1}{4}\delta_{cd}(\delta_{ab}\Delta - \nabla_a\nabla_b) - \frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd} - \frac{1}{2}\delta_{ab}\nabla_c\nabla_d. \end{aligned}$$

The operators Q^{ab} satisfy the anticommutation relations

$$[Q^{ab}, Q^{a'b'}]_+ = f^{aba'b'}_{klnm}\eta_{klnm} + g^{aba'b'}_{kl}\eta_{kl},$$

where

$$\begin{aligned} f^{aba'b'}_{klnm} = {} & 2(\delta_{aa'}\delta_{kl} - \delta_{ak}\delta_{a'l})(\delta_{bb'}\delta_{nm} - \delta_{bn}\delta_{b'm}) - \\ & -(\delta_{ab}\delta_{kl} - \delta_{ak}\delta_{bl})(\delta_{a'b'}\delta_{nm} - \delta_{a'n}\delta_{b'm}) + (a \leftrightarrow b), \\ g^{aba'b'}_{kl} = {} & 2(\delta_{aa'}\delta_{bk}\delta_{b'l} - \delta_{a'b'}\delta_{ak}\delta_{bl}) \\ & +(\delta_{ab}\delta_{a'b'} - \delta_{ab'}\delta_{a'b})\delta_{kl} + (a \leftrightarrow b) + (a' \leftrightarrow b') + (a \leftrightarrow b,\ a' \leftrightarrow b'). \end{aligned}$$

The remaining commutation relations for the operators (14) can be easily calculated.

It is interesting to note that the symmetry operators Q^{ab} do not belong to the enveloping algebra of the Lie algebra of the conformal group. These and other problems connecting with the symmetry of relativistic and nonrelativistic wave equations, the description of classes of equations with given symmetry, the exact solutions of linear and nonlinear wave equations are discussed in our book [11] which will be published this year.

1. Nikitin A.G., Segeda Yu.N., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, **29**, 1976, 82 (in Russian); *Theor. Math. Phys.* 1977, **29**, 943.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, 747.
3. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1977, **19**, 347.
4. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983 (in Russian); Dordrecht, Reidel, 1987 (in English).
5. Danilov Yu.A., Preprint of Kurchatov Atomic Energy Institute IAE-1736, 1968.
6. Ibragimov N.H., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1969, **185**, 1226.
7. Shapovalov V.N., Ekle G.G., Algebraic properties of the Dirac equation, Elista, 1972.
8. Kalnins E.G., Miller W.Jr., Williams J.G., *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, 1893.
9. Zdanov R.Z., in Group-theoretical studies of equations of mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1985, 70.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 537.
11. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of equations of quantum mechanics, Moscow, Nauka, 1990.

On the new constants of motion for two- and three-particle equations

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

The new constants of motion are found for a number of relativistic and quasirelativistic two-particle equations of the Dirac–Breit and the Bethe–Salpeter type and for the Krolikowski three-particle equation.

It was first noted by Dirac [1] that the Hamiltonian of a relativistic particle of spin-$\frac{1}{2}$ in a spherically symmetric field

$$H = \gamma_0\gamma_a p_a - \gamma_0 m + V(x^2), \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$$

(where γ_0, γ_a are the Dirac matrices, $a = 1, 2, 3$, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) commuted with the operator

$$Q = \gamma_0(2S_a J_a - 1/2) \tag{1}$$

where $J_a = \varepsilon_{abc} x_b p_c$, $S_a = \frac{1}{4} i\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c$. In other words, besides the obvious motion constant and angular momentum J_a, there is the additional constant of motion (1) for the Dirac equation with spherical potential.

The Dirac motion constant plays an important role in the solution of the Dirac equation by separation of variables. It causes the decomposition of the radial equations onto non-coupled subsystems corresponding to the fixed eigenvalues of operator (1).

In this letter it is demonstrated that the additional constants of motion exist for a number of relativistic and quasirelativistic two and three-particle equations and the explicit form of these motion constants is found.

Consider the generalised Breit equation in the CM frame

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (H^{(1)} + H^{(2)} + V)\psi \tag{2}$$

where $H^{(1)}$ and $H^{(2)}$ are the single-particle Hamiltonians,

$$H^{(\alpha)} = \gamma_0^{(\alpha)}\gamma_a^{(\alpha)} p_a - \gamma_0^{(\alpha)} m_{(\alpha)}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

$\{\gamma_0^{(1)}, \gamma_a^{(1)}\}$ and $\{\gamma_0^{(2)}, \gamma_a^{(2)}\}$ are the commuting sets of the 16×16 matrices defined by the relations

$$[\gamma_\mu^{(1)}, \gamma_\nu^{(2)}]_- \equiv \gamma_\mu^{(1)}\gamma_\nu^{(2)} - \gamma_\nu^{(2)}\gamma_\mu^{(1)} = 0, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$
$$[\gamma_\mu^{(\alpha)}, \gamma_\nu^{(\alpha)}]_+ \equiv \gamma_\mu^{(\alpha)}\gamma_\nu^{(\alpha)} + \gamma_\nu^{(\alpha)}\gamma_\mu^{(\alpha)} = 2g_{\mu\nu}.$$

V is the interaction potential of the following general form

$$\begin{aligned} V = V_1 - \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}[V_2\gamma_a^{(1)}\gamma_a^{(2)} + V_3\gamma_a^{(1)} x_a\gamma_b^{(2)} x_b + V_4] + \\ + V_5\gamma_a^{(1)}\gamma_a^{(2)} + V_6\gamma_a^{(1)} x_a\gamma_b^{(2)} x_b, \quad V_k = V_k(x^2), \quad k = 1, 2, \ldots, 6, \end{aligned} \tag{3}$$

where x_a and p_a are the internal coordinates and momenta.

J. Phys. A: Math. Gen., 1990, **23**, L533–L535.

For $V_1 = V_2 = x^2 V_3 = 1/x$ and $V_4 = V_5 = V_6 = 0$ formula (3) defines the Breit potential [2, 3]. If V_k are arbitrary functions of x^2 this formula gives the generalised potential of two-particle interaction including various potentials of quark models of mesons [4–7].

The obvious motion constant of equation (2) is the angular momentum operator $\hat{J}_a$

$$\hat{J}_a = \varepsilon_{abc} x_b p_c + \hat{S}_a, \quad \hat{S}_a = S_a^{(1)} + S_a^{(2)}, \quad S_a^{(\alpha)} = \frac{1}{4} i \varepsilon_{abc} \gamma_b^{(\alpha)} \gamma_c^{(\alpha)}. \tag{4}$$

It happens, however, that as in the case of Dirac equation with spherically symmetric potential one can show the additional constant of motion for the generalised Breit equation. This motion constant has the form

$$\hat{Q} = \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)} [(\hat{S}_a \hat{J}_a)^2 - \hat{S}_a \hat{J}_a - \hat{J}_a \hat{J}_a], \tag{5}$$

where J_a and $\hat{S}_a$ are given in (4). Actually one can make sure by direct verification that the operator (5) commutes with the Hamiltonian (2). For this purpose it is convenient to represent $\hat{Q}$ in the form

$$\hat{Q} = [Q^{(1)}, Q^{(2)}]_+ - \frac{1}{2} \gamma_0^{(1)} \gamma_0^{(2)},$$

where $Q^{(\alpha)}$ are the operators obtained from (1) by the substitution $\gamma_0 \to \gamma_0^{(\alpha)}$, $S_a \to S_a^{(\alpha)}$, $J_a \to \hat{J}_a$, These operators satisfy the conditions

$$\begin{aligned}
&[Q^{(\alpha)}, S_a^{(\alpha)} p_a]_+ = \gamma_0^{(\alpha)} S_a^{(\alpha')} p_a, \\
&[Q^{(\alpha)}, S_a^{(\alpha)} x_a]_+ = \gamma_0^{(\alpha)} S_a^{(\alpha')} x_a, \\
&[Q^{(\alpha)}, S_a^{(\alpha')} p_a]_- = [Q^{(\alpha)}, S_a^{(\alpha')} x_a]_- = 0, \quad \alpha' \neq \alpha.
\end{aligned}$$

So we have found a new constant of motion for the generalised Breit equation in the form (5). This motion is also admitted by the Bethe–Salpeter equation in first approximation by e^2 and by the relativistic Barut–Komy equation [8]. Apparently it is possible to continue the list of the equations for which operator (5) is the motion constant (for instance it is the case for equation (2) with arbitrary $O(3)$ and P-invariant potential V).

One can demonstrate that the spectrum of the operator (4) is discrete and is given by the formula

$$Q\psi = \varepsilon j(j+1)\psi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad \psi \in L_2(R_4).$$

In conclusion we give the new constants of motion for the equation describing two interacting particles with spins $\frac{1}{2}$ and 1 [9] and for the three-particle equation of Krolikowski [10]. They have the form

$$Q = r[q^3 - q^2 - (7J_a J_a + S_a S_a)q + (4S_a S_a - 6)J_b J_b + 9/4]$$

where $q = 2\hat{S}_a J_a - \frac{3}{2}$, $J_a = \varepsilon_{abc} x_b p_c + \hat{S}_a$. For the two-particle equation [9]

$$r = \gamma_0(1 - 2\beta_0), \quad \hat{S}_a = i\varepsilon_{abc}\left(\frac{1}{4}\gamma_b\gamma_c + \beta_b\beta_c\right),$$

$\{\gamma_\mu\}$ and $\{\beta_\mu\}$ are the commuting sets of the Dirac and of the Kemmer–Duffin–Petiau matrices. For the three-particle equation [10]

$$r = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_0^{(3)}, \quad \hat{S}_a = \frac{1}{4} i\varepsilon_{abc}\left(\gamma_b^{(1)}\gamma_c^{(1)} + \gamma_b^{(2)}\gamma_c^{(2)} + \gamma_b^{(3)}\gamma_c^{(3)}\right),$$

$\{\gamma_\mu^{(1)}\}$, $\{\gamma_\mu^{(2)}\}$ and $\{\gamma_\mu^{(3)}\}$ are the commuting sets of the Dirac matrices.

Constants of motion for arbitrary spin particles are discussed in [11].

1. Dirac P.A.M., Principles of quantum mechanics, Oxford, Oxford University Press, 1958.
2. Breit G., *Phys. Rev.*, 1929, **34**, 553.
3. Bethe H.A., Salpeter E.E., Quantum mechanics of one- and two-electron atoms, Berlin, Springer, 1957.
4. Childers R.F., *Phys. Rev. D*, 1982, **26**, 2902.
5. Helashvili A.A., *Teor. Mat. Fiz.*, 1982, **51**, 201.
6. Krolikowski W., Rzewuski I., *Acta Phys. Pol. B*, 1976, **7**, 487.
7. Feinberg G., Sucher J., *Phys. Rev. Lett.*, 1975, **35**, 1714.
8. Barut A.O., Komy S., *Fortschr. Phys.*, 1985, **33**, 310.
9. Krolikowski W., and Turski A., *Acta Phys. Pol. B*, 1986, **17**, 75.
10. Krolikowski W., *Acta Phys. Pol. B*, 1984, **15**, 927.
11. Fushchich W.I., Nikitin A.G., Symmetries of equations of quantum mechanics, Moscow, Nauka, 1990.

Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

The conditional symmetry of the nonlinear heat conduction equation has been studied. Some exact solutions of the equations are obtained.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + u_{11} = F(u), \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $u_0 = \partial u/\partial x_0$, $u_{11} = \partial^2 u/\partial x_1^2$, $F(u)$ — гладкая функция, нелинейно зависящая от u.

В работах [1, 2] при помощи метода С. Ли [3] исследована инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности. Из результатов этих работ следует, что уравнение (1) может быть инвариантно только относительно следующих операторов:

$$\partial_0,\ \ \partial_1,\ \ G = e^{x_0}(\partial_1 + m x_1 u \partial_u),\ \ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + M(u)\partial_u,\ \ X = e^{x_0} u \partial_u, \tag{2}$$

где $m = \mathrm{const}$, $M(u)$ — некоторая заданная функция.

В настоящей работе исследована условная инвариантность (более подробно см. [4]) уравнения (1). Операторы условной инвариантности использованы для редукции исходного уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также для нахождения его точных решений.

Пусть

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{3}$$

где A, B, C — гладкие функции своих аргументов, дифференциальный оператор первого порядка, действующий на многообразии (x, u).

Теорема 1. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно (см. [4]) относительно оператора (3), если функции A, B, C удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

Случай I. $A \neq 0$ (не умаляя общности, можно положить $A = 1$).

$$\begin{aligned} &B_{uu} = 0,\ \ C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u),\ \ 3B_uF = 2(C_{1u} + B_uC) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1),\\ &CF_u - (C_u - 2B_1)F = C_0 + C_{11} + 2CB_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и везде ниже индекс внизу возле функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Случай II. $A = 0$, $B = 1$.

$$CF_u - C_uF = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}. \tag{5}$$

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 7, С. 24–27.

Теорема 2. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора (3) в предположении, что $A=1$, $B_u\neq 0$ тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$u_0+u_{11}=\lambda u^3+\lambda_1 u+\lambda_2,\quad \lambda,\lambda_1,\lambda_2=\mathrm{const}. \tag{6}$$

При этом оператор (3) имеет вид

$$Q=\partial_0+\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}u\partial_1+\frac{3}{2}(\lambda u^3+\lambda_1 u+\lambda_2)\partial_u. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 5.7.2 из [4], а теорема 2 является результатом решения системы (4) при $B_u\neq 0$.

Используем оператор (7) для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (6) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Уравнение (6) локальными преобразованиями можно свести к одному из следующих "канонических" уравнений:

$$\begin{aligned}&1.\quad u_0+u_{11}=\lambda(u^3-u), && 2.\quad u_0+u_{11}=\lambda(u^3-3u+2),\\ &3.\quad u_0+u_{11}=\lambda u^3, && 4.\quad u_0+u_{11}=\lambda(u^3+u).\end{aligned} \tag{8}$$

Анзацы, полученные при помощи оператора (7), для каждого на уравнений (8) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}&1.\quad 2\,\mathrm{arcth}\,u+\sqrt{2\lambda}x_1=\varphi(\omega),\quad \omega=-\ln(1-u^{-2})+3\lambda x_0;\\ &2.\quad -\frac{4}{9}\ln\frac{u+2}{u-1}-\frac{2}{3}(u-1)^{-1}-\sqrt{2\lambda}x_1=\varphi(\omega),\\ &\qquad \omega=\frac{2}{9}\ln\frac{u+2}{u-1}--\frac{2}{3}(u-1)^{-1}-3\lambda x_0;\\ &3.\quad \frac{2}{u}+\sqrt{2\lambda}x_1=\varphi(\omega),\quad \omega=-\frac{1}{u^2}-3\lambda x_0;\\ &4.\quad 2\,\mathrm{arctg}\,u-\sqrt{2\lambda}x_1=\varphi(\omega),\quad \omega=-\ln(1+u^{-2})-3\lambda x_0.\end{aligned} \tag{9}$$

Анзацы (9) редуцируют соответствующие уравнения (8) к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$1.\ 2\ddot\varphi=\dot\varphi^3-\dot\varphi,\quad 2.\ 2\ddot\varphi=\dot\varphi^3-3\dot\varphi+2,\quad 3.\ 2\ddot\varphi=\dot\varphi^3,\quad 4.\ 2\ddot\varphi=\dot\varphi^3+\dot\varphi. \tag{10}$$

Обратим внимание на нелинейности в правых частях уравнений (10) и сравним их с нелинейностями исходных уравнений (8). Мы видим, что анзацы (9) позволили не только редуцировать уравнения (8), но и существенно изменили их нелинейные правые части, когда вместо функции u появилась функция $\dot\varphi$. Это позволяет проинтегрировать уравнения (10) и представить их общие решения при помощи элементарных функций:

$$\begin{aligned}&1.\ \varphi(\omega)=-2\,\mathrm{arcth}\sqrt{c_1e^\omega+1}+c_2, && 2.\ \ln\left[c_1-\frac{3}{2}(\varphi+2\omega)\right]=\ln c_2-\frac{3}{2}(\varphi-\omega),\\ &3.\ \varphi(\omega)=2\sqrt{c_1-\omega}+c_2, && 4.\ \varphi(\omega)=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{c_1e^\omega-1}+c_2,\end{aligned} \tag{11}$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Используя формулы (9) и (11), находим решения уравнений (8) соответственно:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \operatorname{arcth} u + \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}c_1 e^{3\lambda x_0}+1} = \frac{1}{2}(c_2-\sqrt{2\lambda}x_1);\\
&2.\ u = -\frac{2c_2\exp\left(-\frac{9}{2}\lambda x_0+\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1\right)+9\lambda x_0+\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1+c_1-3}{c_2\exp\left(-\frac{9}{2}\lambda x_0+\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1\right)-9\lambda x_0-\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1-c_1};\\
&3.\ u = \frac{\sqrt{2/\lambda}(x_1+c_1)}{3(x_0+c_2)-\frac{1}{2}(x_1+c_1)^2};\\
&4.\ \operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}c_1 e^{-3\lambda x_0}-1} = \frac{1}{2}(c_2+\sqrt{2\lambda}x_1).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Отметим также, что и в предположении $B_u = 0$ для уравнения (1) можно найти операторы вида (3), не входящие в алгебру (2). Эти результаты представим в виде таблицы.

Таблица 1

Вид функции $F(u)$	F — решение уравнения $F''F=2$	F — решение уравнения $F''F=2(F'-1)$	$F(u)=\lambda u^3$
Оператор Q	$2\sqrt{x_0}\partial_1+F(u)\partial_u$	$x_1\partial_1+F(u)\partial_u$	$x_1^2\partial_0+3x_1\partial_1+3u\partial_u$
Анзац	$F'(u)=\varphi(x_0)+\frac{x_1}{\sqrt{x_0}}$	$F'(u)=x_1^2\varphi(x_0)+1$	$u=x_1\varphi(\omega)$, $\omega=x_0-\frac{x_1^2}{6}$
Редуцированное уравнение	$\varphi'+\frac{1}{2x_0}\varphi=2$	$\varphi'-2\varphi+2\varphi^2=0$	$\varphi''=9\lambda\varphi^3$
Решение редуцированного уравнения	$\varphi=\frac{c_1}{\sqrt{x_0}}+\frac{4}{3}x_0$	$\varphi=\frac{1}{1+c_1e^{-2x_0}}$	$\int_0^\omega\frac{d\tau}{\sqrt{c_1+\tau^4}}=$ $=\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}(\omega+c_2)$
Решение уравнения (1)	$F'(u)=\frac{x_1+c_1}{\sqrt{x_0}}+\frac{4}{3}x_0$	$F'(u)=\frac{x_1^2}{1+c_1e^{-2x_0}}+1$	$\int_0^{u/x_1}\frac{d\tau}{\sqrt{c_1+\tau^4}}=$ $=\frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\left(x_0-\frac{x_1^2}{6}+c_2\right)$

Замечание. Полученные результаты легко переносятся на случай произвольного количества переменных $x=(x_0,\boldsymbol{x})\in R_{1+n}$ в уравнений (1).

В заключение приведем некоторые результаты, полученные нами для уравнения

$$u_0+u_{11}=F(u,u_1). \tag{13}$$

Теорема 3. *Уравнение*

$$u_0+uu_1+u_{11}=\lambda(u)u_1^3, \tag{14}$$

где $\lambda(u)$ — произвольная дифференцируемая функция, Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q=\partial_0+u\partial_1. \tag{15}$$

Теорема 4. *Уравнение*

$$u_0 + u_{11} = uu_1(1 - uu_1)(2 - uu_1) \tag{16}$$

Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1 + \partial_u. \tag{17}$$

При $\lambda(u) = 0$ уравнение (14) является уравнением Бюргерса. Анзац, получаемый при помощи оператора (15),

$$x_0 u - x_1 = \varphi(u), \tag{18}$$

редуцирует уравнение (14) к уравнению

$$\ddot{\varphi} = \lambda(u). \tag{19}$$

Анзац

$$\frac{1}{2}u^2 - x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = u - x_0, \tag{20}$$

полученный при помощи оператора (17), редуцирует уравнение (16) к уравнению

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 + 1. \tag{21}$$

Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$\ln\left[\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi + \omega + c_2)\right] = -\frac{3}{2}(\varphi - \omega - c_1). \tag{22}$$

Из формул (20) и (22) находим решение уравнения (16)

$$\ln\left\{\sin\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(u+1)^2 - 2(x_0+x_1) + c_2\right]\right\} = -\frac{3}{4}\left[(u-1)^2 + 2(x_0-x_1) + c_1\right]. \tag{23}$$

1. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, *Докл. АН СССР*, 1959, **125**, № 3, 492–495.
2. Дородницын В.А., Князева И.В, Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Дифференц. уравнения*, 1983, **19**, № 7, 1215–1224.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

The conditional invariance of the nonlinear heat equation is investigated and its exact solutions are constructed.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + uu_{11} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x) \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_0 = \partial_0 u = \frac{\partial u}{\partial x_0}, u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.

Известно, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является алгебра с базисными операторами: $P_0 = \partial_0$, $P_1 = \partial_1$, $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1$, $D_2 = x_1\partial_1 + 2u\partial_u$.

В работе, следуя методам [1–3], изучена условная инвариантность уравнения (1). Операторы условной инвариантности используются для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), а также для построения его точных решений.

Рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{2}$$

действующий в пространстве $(x_0, x_1, u) \in \mathbb{R}^3$.

Теорема 1. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора (2) при $A \neq 0$ (не теряя общности, положим $A = 1$), если функции B, C удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:*

$$B_{uu} = 0, \tag{3}$$

$$uC_{uu} = 2(BB_u + uB_{u1}), \tag{4}$$

$$B_0 + uB_{11} - CBu^{-1} - 2uC_{u1} + 2BB_1 - 2B_uC = 0, \tag{5}$$

$$C_0 + uC_{11} - C^2u^{-1} + 2B_1C = 0. \tag{6}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.7.2 из [2].

Решая систему уравнений (3)–(6), находим явный вид оператора Q:

$$Q = b_1Q_1 + b_2Q_2 + b_3D_1 + b_4D_2 + b_5P_0 + b_6P_1,$$

где $b_i = \text{const}$, $i = \overline{1,6}$; $Q_1 = x_1\partial_0 + u\partial_1$, $Q_2 = x_1^2\partial_0 + 2x_1u\partial_1 + 2u^2\partial_u$.

Теорема 2. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора $Q = \partial_1 + C(x,u)\partial_u$, если $C(x,u)$ удовлетворяет условию*

$$C_0 + u(C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}) + C_1C + C^2C_u = 0. \tag{7}$$

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и тех. науки, 1990, № 11, С. 16–18.

Для того чтобы выписать оператор Q в явном виде, необходимо решить нелинейное уравнение (7). Решить это уравнение в общем случае трудно. Нам удалось найти некоторые его частные решения и, таким образом, имеем следующие операторы:

$$Q_3 = \sqrt{x_0}\partial_1 + \sqrt{2u}\partial_u, \quad Q_4 = \sqrt{2x_0}\partial_1 + L(u)\partial_u,$$
$$Q_5 = \partial_1 + \ln u\partial_u, \qquad Q_6 = x_0\partial_1 + x_1\partial_u,$$

где L_u — решение уравнения $uL'' + L' = L^{-1}$.

Теперь по операторам Q_i, $i = \overline{1,6}$ построим анзацы, с помощью которых редуцируем уравнение (1) и найдем его точные решения (табл. 1).

Таблица 1

Операторы	Анзацы	Редуцированные ОДУ
Q_1	$x_0u - \frac{1}{2}x_1^2 = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
Q_2	$\frac{2ux_0}{x_1} - x_1 = \varphi(\frac{u}{x_1})$	$\varphi'' = 0$
Q_3	$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right)^2$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
Q_4	$\int L^{-1}(u)du = \frac{x_1}{\sqrt{2x_0}} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
Q_5	$\int \frac{du}{\ln u} = x_1 + \varphi(x_0)$	$\varphi' + 1 = 0$
Q_6	$u - \frac{x_1^2}{2x_0} = \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} = 0$

Таблица 2

Операторы	Анзацы	Редуцированные уравнения
$x_a\partial_0 + nu\partial_a$	$x_0 + \frac{\boldsymbol{x}^2}{2n} = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
$\alpha_a\alpha\boldsymbol{x}\partial_0u\partial_a$	$x_0u - \frac{(\alpha\boldsymbol{x})^2}{2} = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
$\alpha_a(\alpha\boldsymbol{x})^2\partial_0 + 2(\alpha\boldsymbol{x})u\partial_a + 2\alpha_a u^2\partial_u$	$\frac{2ux_0}{\alpha\boldsymbol{x}} - \alpha\boldsymbol{x} = \varphi\left(\frac{u}{\alpha\boldsymbol{x}}\right)$	$\varphi'' = 0$
$\sqrt{x_0}\partial_a + \alpha_a\sqrt{2u}\partial_u$	$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\boldsymbol{x}}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right)^2$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
$\sqrt{2x_0}\partial_a + \alpha_a L(u)\partial_u$	$\int L^{-1}(u)du = \frac{\alpha\boldsymbol{x}}{\sqrt{2x_0}} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
$\partial_a + \alpha_a \ln u\partial_u$	$\int \frac{du}{\ln u} = \alpha\boldsymbol{x} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + 1 = 0$
$nx_0\partial_a + x_a\partial_u$	$u - \frac{\boldsymbol{x}^2}{2nx_0} = \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} = 0$
$x_0\partial_a + \alpha_a\alpha\boldsymbol{x}\partial_u$	$u - \frac{(\alpha\boldsymbol{x})^2}{2x_0} = \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} = 0$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найденную функцию φ в соответствующий анзац, получаем решения уравнения (1)

$$u = \frac{x_1^2 + a}{2x_0}, \quad \int \frac{du}{\ln u} = x_1 - x_0, \quad uL'(u) = \frac{x_1}{\sqrt{2x_0}},$$

где $Q = \mathrm{const}$.

Замечание 1. Используя лиевскую симметрию уравнения (1), можно установить формулу размножения его решений $u = \varkappa^2 f(\theta^2 x_0 + a_0, \theta\varkappa x_1 + a_1)$, где $\varkappa$, θ, a_0, a_1 — произвольные постоянные.

Замечание 2. Полученные результаты можно обобщить на случай, когда $x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$ и вместо уравнения (1) рассмотреть уравнение

$$u_0 + u\Delta u = 0. \tag{8}$$

В табл. 2 α — постоянный единичный вектор. Отметим, что операторы O_1 и Q_6 были обобщены двумя разными способами.

Аналогично, как и для одномерного уравнения, получим решения уравнения (8):

$$u = \frac{\boldsymbol{x}^2 + c}{2nx_0}, \qquad u = \frac{(\alpha\boldsymbol{x})^2 + c}{2x_0}, \qquad \int \frac{du}{\ln u} = (\alpha\boldsymbol{x}) - x_0,$$
$$uL'(u) = \frac{\alpha\boldsymbol{x}}{\sqrt{2x_0}}, \quad c = \mathrm{const}.$$

В заключение приведем следующий результат:

Теорема 3. *Уравнение*

$$u_0 + \nabla(e^u \nabla u) + \lambda e^{-u} = 0, \tag{9}$$

где $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in R^{1+n}$, инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n)$

$$\begin{aligned}
&\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\\
&J_{0a} = \left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right)\partial_a + \frac{x_a}{\lambda n}\partial_0, \qquad D = x_0\partial_0 + x_a\partial_a + \partial_u,\\
&K_0 = 2\left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right)D - \left[\left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right)^2 - \frac{x_a x_a}{\lambda n} - \frac{e^{2u}}{\lambda^2}\right]\partial_0,\\
&K_a = -2\frac{x_a}{\lambda n}D - \left[\left(x_0 + \frac{e^u}{\lambda}\right)^2 - \frac{x_a x_a}{\lambda n} - \frac{e^{2u}}{\lambda^2}\right]\partial_a, \qquad a, b = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{10}$$

при дополнительном условии

$$u_0 + \frac{n}{2}e^u(\nabla u)^2 + \frac{\lambda}{2}e^{-u} = 0. \tag{11}$$

В формулах (10) по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система уравнений (9), (11) конформно инвариантна. Локальной заменой $x_0 = (y_0 - w)/\sqrt{2}$, $x_a = \sqrt{\lambda n/2}\, y_a$, $u = \ln(\lambda w/\sqrt{2})$ данная система сводится к системе уравнений Даламбера – Гамильтона:

$$\begin{aligned}
&\Box w = \frac{n}{w},\\
&w_\nu w^\nu = 1,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $w = w(y)$, $y = (y_0, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $\nu = \overline{0, n}$, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial y_\nu}$, $w^\nu = g^{\mu\delta} w_\nu$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор с сигнатурой $(+, -, \ldots, -)$.

Поскольку система уравнений (12) конформно инвариантна (см. [4]), то теорема доказана.

1. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?, в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А.*, 1988, № 9, 17–21.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.

Merons and instantons as products of self-interaction of the Dirac–Gürsey spinor field

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN

In this letter we show that the most physically interesting solutions of the $SU(2)$ Yang–Mills equations, the well known meron and instanton solutions (and some others), are generated by corresponding solutions of nonlinear Dirac–Gürsey spinor equations.

The idea of describing particles (fields) of spin $0, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ by means of a field of spin 1/2 was put forward by Louis de Broglie in the 1930s. Later, in the 1950s it was developed by Heisenberg and Pauli in their unified field theory. Here we consider another realisation of this idea based on the possibility of constructing from a spinor field ψ, which satisfies some given equation, different bispinor densities, say scalar $u = \bar{\psi}\psi$, vector $A_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, and so on. The fruitfulness of such an approach is demonstrated by examples of meron and instanton solutions of $SU(2)$ Yang–Mills (YM) equations. We hope that it is not simply a mathematical trick but possibly reveals some important intrinsic features of merons and instantons.

It is well known that a vast class of solutions of $SU(2)$ YM equations

$$\begin{aligned} &\Box \boldsymbol{Y}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu \boldsymbol{Y}_\nu + e[(\partial_\nu \boldsymbol{Y}_\nu) \times \boldsymbol{Y}_\mu - 2(\partial_\nu \boldsymbol{Y}_\mu) \times \boldsymbol{Y}_\nu + (\partial_\mu \boldsymbol{Y}_\nu) \times \boldsymbol{Y}_\nu] + \\ &\qquad + e^2 \boldsymbol{Y}_\nu \times (\boldsymbol{Y}_\nu \times \boldsymbol{Y}_\mu) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\boldsymbol{Y}_\nu = \boldsymbol{Y}_\nu(x) = \{Y^1_\nu, Y^2_\nu, Y^3_\nu\}$ is the YM potential, $\mu, \nu = \overline{0,3}$, $x \in R(4)$ (Euclidean space), can be constructed by means of a scalar field φ which satisfies the nonlinear wave equation

$$\Box\varphi + \lambda_1\varphi^3 = 0 \tag{2}$$

(λ_1 is an arbitrary constant). In order to do this one has to use the 't Hooft–Corrigan–Fairlie–Wilczek ansatz (see, for example, [1])

$$\begin{aligned} &eY^a_0 = \mp\partial_a \ln\varphi, \quad a = 1, 2, 3, \\ &eY^a_j = (\varepsilon_{jan}\partial_n \pm \delta_{ja}\partial_0)\ln\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

The following solutions of equation (2) are of special interest

$$\varphi = \left(\lambda_1 x^2\right)^{-1/2}, \tag{4}$$

$$\varphi = \left(\frac{(a-b)^2}{\lambda_1 (x-a)^2 (x-b)^2}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{8}{\lambda_1}}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}, \tag{6}$$

J. Phys. A: Math. Gen., 1990, **23**, L517–L520.

where $(x-a) \equiv (x_\nu - a_\nu)(x_\nu - a_\nu)$ and a_ν, b_ν, α are arbitrary constants, because they give rise to the one-meron [2]

$$eY_0^a = \pm\frac{x_a}{x^2}, \quad eY_j^a = -\varepsilon_{jan}\frac{x_n}{x^2} \mp \delta_{aj}\frac{x_0}{x^2} \tag{7}$$

to the two-meron [2]

$$\begin{gathered} eY_0^a = \pm\left(\frac{(x-a)_a}{(x-a)^2} + \frac{(x-b)_a}{(x-b)^2}\right), \\ eY_j^a = -\varepsilon_{jan}\left(\frac{(x-a)_n}{(x-a)^2} + \frac{(x-b)_n}{(x-b)^2}\right) \mp \delta_{aj}\left(\frac{(x-a)_0}{(x-a)^2} + \frac{(x-b)_0}{(x-b)^2}\right) \end{gathered} \tag{8}$$

and to the instanton [3]

$$eY_0^a = \mp\frac{2x_a}{x^2+\alpha^2}, \quad eY_j^a = -\varepsilon_{jan}\frac{2x_a}{x^2+\alpha^2} \pm \delta_{aj}\frac{2x_0}{x^2+\alpha^2} \tag{9}$$

solutions of YM equations (1), respectively. We shall show that scalar fields (4)–(6) can be constructed in turn from the spinor field ψ which satisfies the Dirac–Gürsey equation

$$\left[i\gamma\partial + \lambda(\bar\psi\psi)^{1/3}\right]\psi = 0, \tag{10}$$

where γ_ν are 4×4 Dirac matrices, $\psi = \psi(x)$ is a four-component complex function (column), $\bar\psi = \psi^+\gamma_0$ and λ is an arbitrary constant. Equation (10) is conformally invariant as well as (1) and (2), but it has conformal degree 3/2 while the conformal degree of the scalar field from (2) is 1. (Detailed analysis of conformal symmetry is given in [4] where, in particular, it was pointed out that the conformal degree is an important intrinsic characteristic of a field.) So, to construct the scalar field φ from the spinor field ψ properly, we should not simply put $\varphi = \bar\psi\psi$ but

$$\varphi = (\bar\psi\psi)^{1/3}. \tag{11}$$

Further, we consider the following two solutions of equation (10) obtained by Kortel [5] and Merwe [6]

$$\psi(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{3/2}\frac{i\gamma x + \sqrt{x^2}}{(x^2)^{5/4}}\chi \tag{12}$$

and

$$\psi(x) = \left(\frac{4\alpha}{\lambda}\right)^{3/2}\frac{i\gamma x + \alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}\chi, \tag{13}$$

where χ is an arbitrary constant spinor and one can choose, without loss of generality, $\bar\chi\chi = 1$; α is an arbitrary constant. These solutions were obtained by means of the Heisenberg ansatz [7]

$$\psi(x) = [f(w) + i\gamma x g(w)]\chi, \tag{14}$$

where f and g are real scalar functions, $w = \sqrt{x^2}$ and χ is a constant spinor. One can make sure that the substitution of (12) and (13) into (11) gives rise to (4) and (6) provided $\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{\lambda_1}$ and $\lambda = \sqrt{2\lambda_1}$ respectively. It should be noted that, generally speaking, scalar field (11), constructed from spinor field (14) and satisfying equation (10), does not satisfy equation (2), but we do not know the explicit form of such solutions of equation (10).

Further we note that solution (5) of equation (2) can be obtained as a result of the following procedure of group multiplication of solutions. Applying to (4) the formulae of generating solutions by conformal transformations [4]

$$\varphi_{II}(x) = \frac{1}{\sigma(c,x)}\varphi_I(x), \quad x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(c,x)}, \quad \sigma(c,x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \tag{15}$$

where $\varphi_{II}(x)$ means a new solution, $\varphi_I(x)$ means an old one, and c_μ are arbitrary constants, then by translational transformations

$$\varphi_{II}(x) = \varphi_I(x'), \quad x'_\mu = x_\mu - a_\mu \tag{16}$$

get, letting

$$c_\mu = \frac{b_\mu - a_\mu}{(a-b)^2} \tag{17}$$

the solution (5) of equation (2). For the case of Dirac spinor field ψ, formulae analogous to those given in (15), (16) are [4, 8]

$$\psi_{II}(x) = \frac{1 - \gamma x \gamma c}{\sigma^2(x,c)}\psi_I(x'), \quad x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(c,x)} \tag{18}$$

and

$$\psi_{II}(x) = \psi_I(x'), \quad x'_\mu = x_\mu - a_\mu. \tag{19}$$

Having applied formulae (18), (19) and (17) to (12) we get a new solution of equation (10):

$$\begin{gathered}\psi = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{3/2}\left(\frac{(a-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}\right)^{3/4}\times \\ \times\left[i\frac{\gamma x - \gamma a}{\sqrt{(x-a)^2}} + \left(1 - \frac{(\gamma x - \gamma a)(\gamma b - \gamma a)}{(a-b)^2}\right)\left(\frac{(a-b)^2}{(x-b)^2}\right)^{1/2}\right]\chi, \quad \bar{\chi}\chi = 1\end{gathered} \tag{20}$$

and it is the solution which gives rise (by means of (11)) to (5) when $\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{\lambda_1}$.

So, we have shown that one-meron (7), two-meron (8) and instanton (9) solutions of YM equation (1) are actually generated by the spinor fields (12), (20) and (13), respectively, which satisfy the Dirac–Gürsey equation (10).

The procedure for obtaining a two-meron solution from the one-meron solution described above can be applied to instanton solutions (6) and (13). So, in this case, making use of formulae (15), (16), (18) and (19), choosing c_ν as in (17) and $\alpha^2 = (a-b)^2$ we get from (6) and (13) a new solution of equation (2)

$$\varphi = \left(\frac{8(a-b)^2}{\lambda_1}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{(x-a)^2 + (x-b)^2}\right) \tag{21}$$

and a new solution of the Dirac–Gürsey equation (10)

$$
\begin{aligned}
\psi = & \left(\frac{4\alpha}{\lambda}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{[(x-a)^2+(x-b)^2]^2}\right)\times \\
& \times\left[i(\gamma x-\gamma a)+\left(1-\frac{(\gamma x-\gamma a)(\gamma b-\gamma a)}{(a-b)^2}\right)\sqrt{(a-b)^2}\right]\chi, \quad \bar{\chi}\chi=1.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

The corresponding solution of YM equations (1) has the form

$$
\begin{aligned}
& eY_0^i = \pm 2\frac{(x-a)_i+(x-b)_i}{(x-a)^2+(x-b)^2}, \\
& eY_j^i = -2\varepsilon_{jin}\frac{(x-a)_n+(x-b)_n}{(x-a)^2+(x-b)^2} \mp 2\delta_{ij}\frac{(x-a)_0+(x-b)_0}{(x-a)^2+(x-b)^2}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

This new solution of YM equations is also generated by spinor field ψ satisfying the Dirac–Gürsey equation (10); now it is given by (22), according to (11) ($\lambda=\sqrt{2\lambda_1}$) and (3).

In conclusion we would like to note that all solutions of the Dirac–Gürsey equation (10) considered above (see (12), (13), (20), (22)) are non-analytic in the coupling constant λ. A great number of solutions of this equation which are analytic in λ are obtained in [4, 8]. These solutions also generate scalar fields φ which satisfy equation (2) (and therefore give rise to solutions of YM equations), but in these cases we lose the connection between coupling constants λ and λ_1, and, generally speaking, $\varphi=(\bar{\psi}\psi)^k$, $k\neq 1/3$.

It will also be noted that solutions of YM equations can be looked for in the form $Y_\mu^a=\bar{\psi}^a\gamma_\mu\psi^a$ (no sum over $a=1,2,3$), where ψ^a satisfy some nonlinear spinor equation. In the same spirit solutions of other field equations can be constructed.

We would like to express our gratitude to the referees for their useful suggestions.

1. Actor A., *Rev. Mod. Phys.*, 1979, **51**, 461–525.
2. de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., *Phys. Lett. B*, **65**, 163–166.
3. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S., *Phys. Lett. B*, 1975, **59**, 85–87.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kyiv, Naukova Dumka, 1989.
5. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 211–215.
6. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, 485–486.
7. Heisenberg W., *Z. Naturf. A*, 1954, **9**, 292–303.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.

О связи между решениями уравнений Дирака и Максвелла. Суперсимметрия уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, С.В. СПИЧАК

Formulae are obtained which allow constructing solutions of the Maxwell equations in vacuo via solutions of the Dirac equation and vice versa. The Dirac equation is shown to be invariant with respect to three different representations of the Poincaré algebra and three superalgebras. All the basic elements of these algebras and superalgebras are local.

В данной работе получены формулы, позволяющие строить по решениям безмассового уравнения Дирака (УД) решения уравнений Максвелла (УМ) для вакуума, и наоборот. Показано, что уравнение Дирака инвариантно относительно трех различных представлений алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$, соответствующих спинам $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{2};\ 1, 0;\ 1, 1$, а также относительно трех различных супералгебр. Все базисные элементы этих алгебр и супералгебр локальны, т.е. дифференциальные операторы первого порядка.

Произвольное решение УД

$$i\gamma\partial\psi = 0, \quad i(\gamma)^T\partial\tilde{\psi} = 0, \tag{1}$$

где $\gamma\partial \equiv \gamma^\nu\partial_\nu$, γ^ν — матрицы Дирака 4×4; $\nu = \overline{0,3}$; $\partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu}$, $x \in R(1,3)$, $\psi = \psi(x)$ — 4-компонентная комплекснозначная функция (столбец), $\tilde{\psi} = \gamma_0\psi^*$, представим, воспользовавшись обозначениями [1], в виде

$$\psi = \psi_{\mathrm{real}} + i\psi_{\mathrm{imag}} = \begin{pmatrix} -D_1 \\ D_3 \\ B_2 \\ -G \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} D_2 \\ -F \\ -B_1 \\ B_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Установим связь между решениями системы (1) и решениями УМ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Решения уравнения Максвелла (3) строятся по решениям (1) согласно следующим формулам:*

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t} G(\tau,x)d\tau + \boldsymbol{\nabla}\tilde{G}(t_0,x), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t} F(\tau,x)d\tau + \boldsymbol{\nabla}\tilde{F}(t_0,x), \tag{4}$$

Доклады АН УССР. Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки, 1990, № 3, С. 36–40.

где $\tilde{G}(t_0,x)$, $\tilde{F}(t_0,x)$ — решения уравнений Пуассона

$$\Delta\tilde{G} = \frac{\partial G}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t_0}, \quad \Delta\tilde{F} = \frac{\partial F}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t_0}, \tag{5}$$

t_0 — произвольная фиксированная точка, $\boldsymbol{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$, $\boldsymbol{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что УД (1) в обозначениях (2) принимает вид УМ с токами

$$\begin{gathered}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla}G, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = -\partial_t G,\\ \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{\Delta}F, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = -\partial_t F.\end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя (4) в (3), получаем, учитывая (6),

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}G - \operatorname{rot}\boldsymbol{B} \equiv 0,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \operatorname{div}\boldsymbol{D} + \int_{t_0}^{t}\Delta G(\tau,x)d\tau + \Delta\tilde{G}(t_0,x) = \operatorname{div}\boldsymbol{D} +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}d\tau + \Delta\tilde{G}(t_0,x) = \operatorname{div}\boldsymbol{D} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t_0} + \Delta\tilde{G}(t_0,x) \equiv 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что каждая компонента УД (1) удовлетворяет волновому уравнению $\Delta G(\tau,x) = \frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}$, а также равенствами (5). Аналогично доказывается справедливость теоремы для второй пары УМ (3). Теорема доказана.

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — произвольные решения УМ (3), F, G — произвольные скалярные функции, удовлетворяющие волновому уравнению*

$$\Box F = \Box G = 0. \tag{7}$$

Тогда функция (2) с компонентами F, G

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t}G(\tau,x)d\tau - \boldsymbol{\nabla}\tilde{G}(t_0,x), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{\nabla}\int_{t_0}^{t}F(\tau,x)d\tau - \boldsymbol{\nabla}\tilde{F}(t_0,x), \tag{8}$$

где $\tilde{G}(t_0,x)$ и $\tilde{F}(t_0,x)$ находятся из уравнений (5), является решением УД (1).

Доказательство. Воспользуемся эквивалентностью УД (1) и системы (6). Подставив (8) в (6) и учитывая (3), (7), (5), находим

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}G = \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}G - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\nabla}G \equiv 0,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} + \frac{\partial G}{\partial t} = \operatorname{div}\boldsymbol{E} - \int_{t_0}^{t}\Delta G(\tau,x)d\tau - \Delta\tilde{G} + \frac{\partial G}{\partial t} \equiv 0.$$

Аналогично проверяется выполнимость второй пары уравнений системы (6). Теорема доказана.

Замечание. При $F = G = 0$ из (8) следует $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$ и в этом случае решения УД (1) строятся по формуле (2) исключительно по решениям УМ (3).

Известно [2], что максимальной в смысле Ли группой инвариантности УД (1) является 23-параметрическая группа Ли G_{23}, содержащая 15-параметрическую конформную группу $C(1,3) \supset P(1,3)$ (подробно о конформной симметрии см. [3]) и 8-параметрическую группу G_8 матричных преобразований. (Отметим, что инвариантность УД (1) относительно группы $C(1,3)$ была установлена еще Дираком, а относительно G_8 — Паули и Тушеком (см., например, [4]).) Здесь уместно подчеркнуть, что когда говорят о релятивистской инвариантности (т.е. об инвариантности относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$) системы (1), то имеют в виду, что ψ-функция преобразуется по спинорному представлению

$$D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Однако оказывается, что инвариантность системы (1) относительно алгебры матричных преобразований AG_8 позволяет выделить еще два представления $AP(1,3)$, реализуемые на множестве решений этой системы:

$$D(1,0) \oplus D(0,1) \oplus D(0,0) \oplus D(0,0), \tag{10}$$

$$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Явный вид базисных элементов $AP(1,3)$ для представлений (9)–(11) соответственно, таков:

$$AP^{(k)}(1,3) = \langle P_\mu = \partial_\mu,\ J^{(k)}_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S^{(k)}_{\mu\nu}\rangle, \quad k = 1,2,3, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &S^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} [\gamma^\mu,\gamma^\nu] & \hat{O}_4 \\ \hat{O}_4 & [\gamma^\nu,\gamma^\mu]^T \end{pmatrix}, \quad S^{(2)}_{\mu\nu} = S^{(1)}_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}, \\ &S^{(3)}_{\mu\nu} = \{S^{(3)}_{01} = S^{(2)}_{01},\ S^{(3)}_{02} = S^{(2)}_{02},\ S^{(3)}_{03} = S^{(2)}_{03} - 2Q_{03},\ S^{(3)}_{12} = S^{(2)}_{12}, \\ &\qquad S^{(3)}_{13} = S^{(2)}_{13} - 2Q_{13},\ S^{(3)}_{23} = S^{(2)}_{23} - 2Q_{23}\} \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $Q_{\mu\nu} \in AG_8$ задаются матрицами

$$\begin{aligned} &Q_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & -i\gamma^0\gamma^2 \\ i\gamma^0\gamma^2 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \quad Q_{02} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & -\gamma^0\gamma^2 \\ -\gamma^0\gamma^2 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \\ &Q_{03} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\gamma_5 & \hat{O}_4 \\ \hat{O}^4 & \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} I_4 & \hat{O}_4 \\ \hat{O}^4 & -I_4 \end{pmatrix}, \\ &Q_{13} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & -\gamma^1\gamma^3 \\ -\gamma^1\gamma^3 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \quad Q_{23} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \hat{O}_4 & \gamma^1\gamma^3 \\ -\gamma^1\gamma^3 & \hat{O}^4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{14}$$

Операторы (12)–(14) действуют в пространстве 8-компонентных функций-столбцов $(\psi, \tilde{\psi})$, $\tilde{\psi} = \gamma_0\psi^*$.

Инвариантность УД (1) относительно $AP^{(2)}(1,3)$ позволяет представить его в виде (2), (6), а относительно $AP^{(3)}(1,3)$ — в виде

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial^\gamma B^\delta - \partial^\delta B^\gamma) = 0, \\ &\partial_\alpha A^\alpha = \partial_\beta B^\beta = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\psi = \psi_{\text{real}} + i\psi_{\text{imag}} = \begin{pmatrix} -A^2 \\ -B^0 \\ -B^1 \\ B^3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -A^1 \\ A^3 \\ B^2 \\ -A^0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Рассмотрим три множества операторов симметрии системы (1)

$$SA^{(k)} = \{P_\mu,\ J^{(k)}_{\mu\nu},\ \Gamma_4,\ I;\ Q_{\mu\nu}\}, \tag{17}$$

где $J^{(k)}_{\mu\nu}$ определены в (12), (13); $\Gamma_4 = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & \hat{O}_4 \\ \hat{O}_4 & \gamma^T_\mu \end{pmatrix}$, $Q_{\mu\nu}$ заданы в (14). Эти множества операторов образуют как алгебры Ли, так и супералгебры. Операторы P_μ, $J^{(k)}_{\mu\nu}$, Γ_4, I являются четными, а $Q_{\mu\nu}$ — нечетными в соответствующих супералгебрах. Для доказательства этого утверждения приведем коммутационные и антикоммутационные соотношения для операторов из $SA^{(k)}$ (17).

Операторы P_μ, $J^{(k)}_{\mu\nu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$; Γ_4, I коммутируют со всеми операторами из $SA^{(k)}$ (17). Для дальнейшего удобно ввести обозначения:

$$R_a = Q_{0a}, \quad T_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}Q_{bc}, \quad N_a = J_{0a}, \quad M_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что выполняются соотношения:

$$\{R_a, R_b\} \equiv R_aR_b + R_bR_a = \frac{1}{2}\delta_{ab}, \quad \{T_a, T_b\} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}, \quad \{R_a, T_b\} = \delta_{ab}\Gamma_4. \tag{19}$$

Операторы R_a, T_a из $SA^{(1)}$ коммутируют со всеми четными операторами $SA^{(1)}$. Для $SA^{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned} &[P_\mu, R_a] = [P_\mu, T_a] = 0, \quad [N^{(2)}_a, R_b] = [R_a, R_b] = \varepsilon_{abc}T_c, \\ &[N^{(2)}_a, T_b] = [R_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}R_c, \quad [M^{(2)}_a, R_b] = [T_a, R_b] = -\varepsilon_{abc}R_c, \\ &[M^{(2)}_a, T_b] = [T_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}T_c, \end{aligned} \tag{20}$$

Супералгебра $SA^{(3)}$ изоморфна $SA^{(2)}$. Изоморфизм достигается заменой

$$R_3 \to R'_3 = -R_3, \quad T_1 \to T'_1 = -T_1; \quad T_2 \to T'_2 = -T_2. \tag{21}$$

В заключение отметим, что в случае, когда масса частицы $m \neq 0$, аналогичный результат о дуальной пуанкаре-инвариантности УД справедлив для системы из двух УД с m и $-m$, о чем подробно будет изложено в следующей публикации.

Также отметим, что операторы симметрии из $AP^{(2)}(1,3), AP^{(3)}(1,3)$ приводят к принципиально новым анзацам для ψ-функции, отличных от анзацев для спинорного поля ψ, описанных в [3].

Пример. Нетрудно проверить, что вектора $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{H} = -2\boldsymbol{\alpha}t$, где α — произвольные постоянные, являются решением уравнения Максвелла. Выберем функции F и G в виде $F = G = 3t^2 + \boldsymbol{x}^2$. С помощью (8), (5), (2) находим решение уравнения Дирака (1):

$$\psi = \begin{pmatrix} -[(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x})_1 - 2tx_1] + i[(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x})_2 - 2tx_2] \\ [(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x})_3 - 2tx_3] - i(3t^2 + \boldsymbol{x}^2) \\ 2t(\alpha_2 + x_2) + 2it(\alpha_1 + x_1) \\ -(3t^2 + \boldsymbol{x}^2) - 2it(\alpha_3 + x_3) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\bar{\psi}\psi = \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x})^2 - 4t^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + 2\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x})$.

1. Ljolje K., Some remarks on variational formulations of physical fields, *Fortschr. Phys.*, 1988, **36**, № 1, 9–32.
2. Ибрагимов Н.Х., Об инвариантности уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1969, **185**, № 6, 1225–1228.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
4. Иваненко Д.Д. (ред.), Нелинейная квантовая теория поля, М., Изд-во иностр. лит., 1959, 464 с.

О точных решениях нелинейного уравнения для спинорного поля

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, Р.З. ЖДАНОВ

1. В настоящей работе построены широкие классы точных решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) для спинорного поля

$$[i\gamma\cdot\partial - m - \lambda(\bar{\psi}\psi)^k]\psi = 0, \tag{1}$$

где $\gamma\cdot\partial = \gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3$, $\partial_\nu = \partial/\partial x_\nu$, $\nu = \overline{0,3}$, $\psi = \psi(x)$ — 4-х компонентная функция-столбец; $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$; m, k, λ — произвольные действительные постоянные; γ_μ — матрицы Дирака 4×4

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \overline{1,3} \tag{2}$$

σ_a — матрицы Паули 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для построения многопараметрических семейств точных решений системы (1) существенно используются ее симметрийные свойства и анзатц

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{4}$$

предложенный в [1, 2]. $A(x)$ — 4×4 матрица, $\varphi(\omega)$ — 4-х компонентная функция-столбец, зависящая от инвариантных переменных $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$. Явный вид матрицы $A(x)$ в новых переменных ω находится из условий [1–4]

$$QA(x) \equiv (\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x))A(x) = 0, \tag{5}$$

$$\xi^\mu(x)\partial_\mu\omega(x) = 0, \tag{6}$$

где

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x) \tag{7}$$

($\xi^\mu(x)$ — скалярные функции, $\eta(x)$ — матрицы размерности 4×4) суть операторы симметрии уравнения (1).

Как известно, максимальной в смысле Ли группой инвариантности уравнения (1) при $m \neq 0$ является группа Пуанкаре $P(1,3)$, генераторы которой имеют вид

$$\begin{gathered} P_0 = i\partial_0, \quad P_a = -i\partial_a, \\ J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \left(S_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Современный групповой анализ: методы и приложения. Некоторые задачи современной физики, под ред. А.В. Флегонтова, Ленинград, Ленинградский институт информатики и автоматизации Академии наук СССР, 1990, С. 22–30.

При $m \neq 0$ и $k \neq 1/3$ система (1) допускает кроме операторов (8) еще и генератор масштабных преобразований

$$D = x^\mu P_\mu + \frac{i}{2k}. \tag{9}$$

А при $m = 0$, $k = 1/3$ уравнение (1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3) \supset \{P(1,3), D\}$. Генераторы конформных преобразований имеют вид

$$K_\mu = 2x_\mu D - x^2 P_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu. \tag{10}$$

2. Описание анзатцов (4) для спинорного поля $\psi(x)$ с алгеброй инвариантности (8) сводится согласно (5), (6) к решению систем

$$(a^\mu P_\mu + c^{\mu\nu} J_{\mu\nu})A(x) = 0, \tag{11}$$

$$[A^\mu P_\mu + c^{\mu\nu}(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu)]\omega(x) = 0, \tag{12}$$

a_μ, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$ — произвольные постоянные.

Не вдаваясь в подробности этих довольно громоздких вычислений, приведем сразу окончательный результат в виде таблицы.

Таблица 1

№	Алгебра	Инвариантные переменные	Анзац
1	P_0	$x_1,\ x_2,\ x_3$	$\psi(x) = \varphi(x)$
2	P_3	$x_0,\ x_1,\ x_2$	$\psi(x) = \varphi(x)$
3	$P_0 + P_3$	$x_0 + x_1,\ x_2,\ x_3$	$\psi(x) = \varphi(x)$
4	J_{12}	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2},\ x_0,\ x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x)$
5	J_{03}	$\left(x_0^2 - x_3^2\right)^{1/2},\ x_1,\ x_2$	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\}\varphi(x)$
6	$J_{02} + J_{12}$	$x_0 + x_1,\ \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2},\ x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_2}{x_0+x_1}\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\right\}\varphi(x)$
7	$\alpha J_{23} - J_{01}$	$\left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2},\ \alpha\ln(x_0 + x_1) +$ $+ \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3},\ \left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) -\right.$ $\left.- \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(x)$
8	$J_{23} -$ $- \frac{\epsilon}{2}(P_0 + P_1)$	$x_0 + x_1,\ \varepsilon(x_0 - x_1) + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3},$ $\left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\right\}\varphi(x)$
9	$J_{12} + \alpha P_0$	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2},\ x_0 + \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2},\ x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x)$
10	$J_{12} - \alpha P_3$	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2},\ x_3 + \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2},\ x_0$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}\varphi(x)$
11	$J_{01} - \alpha P_2$	$\left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2},\ x_2 + \alpha\ln(x_0 + x_1),\ x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\}\varphi(x)$
12	$J_{02} + J_{12} +$ $+ P_0 - P_1$	$x_0 - x_1 + (x_0 + x_1)x_2 + \frac{1}{6}(x_0 + x_1)^3,$ $x_2 + \frac{1}{4}(x_0 + x_1)^2,\ x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}(x_0 + x_1) \times\right.$ $\left.\times\, \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\right\}\varphi(x)$
13	$J_{02} + J_{12} -$ $- \varepsilon P_3$	$x_0 + x_1,\ \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2},$ $x_2 + \varepsilon(x_0 + x_1)x_3$	$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{x_2}{2(x_0+x_1)} \times\right.$ $\left.\times\, \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\right\}\varphi(x)$

При ее составлении мы воспользовались тем, что алгебра Пуанкаре $P(1,3)$ имеет только 13 одномерных неэквивалентных подалгебр [5, 6]. Кроме того, в [6] построены соответствующие инвариантные переменные. В таблице 1 [7] приведены $P(1,3)$-неэквивалентные анзатцы для спинорного поля.

Здесь $\alpha \neq 0$ — произвольная постоянная; $\varepsilon = \pm 1$.

Выписанные в таблице 1 анзатцы 1–13 представляют собой полный набор $P(1,3)$-неэквивалентных анзатцев для спинорного поля. Они непереводимы в друг друга с помощью операции группового размножения решений.

Подстановка анзатцев 1–13 из таблицы в уравнение (1) редуцирует его к системам ДУЧП для функции $\varphi(\omega)$, зависящей уже от 3-х переменных ω_1, ω_2, ω_3. В этих уравнениях можно совершить прямую редукцию к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или к системам ДУЧП с двумя независимыми переменными. Результат имеет вид (выписаны только некоторые из систем):

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \gamma_1\varphi_{\omega_1} + iF\varphi = 0,\\
(3) & (\gamma_0+\gamma_1)\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0,\\
(4) & \gamma_2\left(\varphi_{\omega_1} + \dfrac{1}{2\omega_1}\varphi\right) + iF\varphi = 0,\\
(5) & \dfrac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0,\\
(6) & (\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1} + \dfrac{1}{2\omega_1}\varphi\right) + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0,\\
(7) & \dfrac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi + \gamma_3\left(\dfrac{1}{2\omega_3}\varphi + \varphi_{\omega_3}\right) + iF\varphi = 0,\\
(8) & \left[\varepsilon(\gamma_0-\gamma_1) + \dfrac{\gamma_2}{\omega_3}\right]\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\left(\dfrac{1}{2\omega_3}\varphi + \varphi_{\omega_3}\right) + iF\varphi = 0,\\
(11) & \dfrac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi + [\gamma_2 + \alpha(\gamma_0+\gamma_1)]\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0,\\
(12) & \gamma_2\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0.
\end{array}
\tag{13}
$$

В (13) уравнению n (нумерация слева) соответствует анзатц № n из таблицы 1.

Для уравнений (13) нетрудно найти некоторые частные решения. Применяя к ним операцию группового размножения решений [1–4], в итоге получим следующие семейства многопараметрических решений система (1) [7]:

$$\psi(x) = \exp\{i\varkappa(\gamma\cdot a)(a\cdot y)\}\chi, \tag{14}$$

$$\psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma\cdot d)(d\cdot y)\}\chi, \tag{15}$$

$$\psi(x) = \exp\{i\varkappa(\gamma\cdot b)(b\cdot y)\}\exp\{i(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)f(a\cdot y + d\cdot y)\}\chi, \tag{16}$$

$$\psi(x) = (\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)\exp\{-[m(\gamma\cdot b)(b\cdot y) + f(a\cdot y + d\cdot y)]\}\chi, \tag{17}$$

$$
\begin{gathered}
\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right\}\exp\{i(\gamma\cdot b)g(\omega)\}\chi,\\
\omega = \left[(a\cdot y)^2 + (b\cdot y)^2\right]^{1/2},
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot d)\ln(c\cdot y + d\cdot y)\right\}\times\\
\times\exp\left\{\gamma\cdot a\left[i\varkappa + \frac{1}{2}(\gamma\cdot c + \gamma\cdot d)a\cdot y\right]\right\}\chi,
\end{gathered}
\tag{19}
$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{b\cdot y}{2(a\cdot y + d\cdot y)}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)\right\}(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)\times \\ \times\exp\{-i[m(\gamma\cdot c)c\cdot y + f(a\cdot y + d\cdot y)]\}\chi, \tag{20}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\operatorname{arctg}\frac{b\cdot y}{c\cdot y} - \frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot d)\ln(a\cdot y + d\cdot y)\right\}\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{\omega}}(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)\exp\{-im(\gamma\cdot c)\omega\}\chi, \quad \omega = \left[(b\cdot y)^2 + (c\cdot y)^2\right]^{1/2}, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\operatorname{arctg}\frac{b\cdot y}{c\cdot y}\right\}\exp\{i\gamma\cdot cg(\omega)\}\times \\ \times\exp\{i(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)f(a\cdot y + d\cdot y\}\chi, \quad \omega = \left[(b\cdot y)^2 + (c\cdot y)^2\right]^{1/2}, \tag{22}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma\cdot d)(\gamma\cdot a)\ln(a\cdot y + d\cdot y)\right\}\exp\Big\{i[(\gamma\cdot b) + \alpha(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)]\times \\ \times\left[\varkappa - \frac{i}{2}(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)\right][b\cdot y + \alpha\ln(a\cdot y + d\cdot y)]\Big\}\chi, \tag{23}$$

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{4}(\gamma\cdot a + \gamma\cdot d)(\gamma\cdot b)(a\cdot y + d\cdot y)\right\}\times \\ \times\exp\left\{i\varkappa(\gamma\cdot b)\left(b\cdot y + \frac{1}{4}(a\cdot y + d\cdot y)^2\right)\right\}\chi. \tag{24}$$

В формулах (14)–(24) введены обозначения: χ — постоянный спинор, $\varkappa = \lambda(\bar{\chi}\chi)^k + m$, $y_\mu = x_\mu + \delta_\mu$; δ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные постоянные, причем

$$a^2 \equiv a_\mu a^\mu = b^2 = c^2 = -d^2 = -1, \quad a\cdot b = b\cdot c = c\cdot d = d\cdot a = a\cdot c = b\cdot d = 0, \tag{25}$$

$f(\omega)$ — произвольная дифференциальная функция,

$$g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{k-1}(\bar{\chi}\chi)^k\omega^{1-k} + m\omega, & k \neq 1, \\ \lambda(\bar{\chi}\chi)\ln\omega + m\omega, & k = 1. \end{cases} \tag{26}$$

Отметим, что решения (14)–(24) аналитичны по m.

3. Как уже было сказано, при $m = 0$ симметрия уравнения (1) расширяется до $\tilde{P}(1,3) = \{P(1,3), D\}$. $\tilde{P}(1,3)$-неэквивалентные анзатцы (4) для спинорного поля ψ построены в [8], и с их помощью найдены многопараметрические семейства решений уравнения (1) с $m = 0$. Выпишем некоторые из них:

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b + \gamma\cdot d)(b\cdot y + d\cdot y)\right\}\times \\ \times\exp\left\{\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^k(\gamma\cdot a)\left(2a\cdot y + \theta(b\cdot y + d\cdot y)^2\right)\right\}\chi, \tag{27}$$

$$\psi(x) = \left[(a\cdot y)^2 + (b\cdot y)^2\right]^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right\}\times \\ \times\exp\left\{i\gamma\cdot b\frac{\lambda}{k-1}(\bar{\chi}\chi)^k\left[(a\cdot y)^2 + (b\cdot y)^2\right]^{\frac{k-1}{2}}\right\}\chi, \quad k \neq 1, \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\psi(x)=\left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]^{-1/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right\}\times\\ \times\exp\left\{i\lambda(\gamma\cdot b+\theta\gamma\cdot a)\left[\ln\left[(a\cdot y)^2+(b\cdot y)^2\right]+2\theta\operatorname{arctg}\frac{a\cdot y}{b\cdot y}\right]\right\}\chi,\quad k=1.\end{gathered}\tag{29}$$

В формулах (27)–(29) $y_\mu=x_\mu+\delta_\mu$, δ_μ, θ — произвольные постоянные; a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — постоянные, удовлетворяющие условиям (25).

Отметим следующую особенность семейств решений (14)–(24) и (27)–(29): они являются соответственно $P(1,3)$-, $\tilde{P}(1,3)$-неразмножаемыми (понятие неразмножаемых решений введено в работе [9]), т.е. такими, размножение которых с помощью преобразований группы симметрии не выводит из данного семейства.

4. При $k=1/3$ и $m=0$ решения уравнения (1) можно искать не только с помощью операторов (8), (9), но и с помощью операторов K_μ (10). Конформно инвариантный анзатц (4) имеет вид [3, 4]

$$\psi(x)=\frac{\gamma\cdot x}{\left(x^2\right)^2}\,\varphi\left(\frac{b\cdot x}{x\cdot x}\right).\tag{30}$$

Подстановка (30) в (1) с $m=0$ и $k=1/3$ приводит к системе ОДУ, для которой находится общее решение. Размножив его с помощью трансляций, придем к $C(1,3)$-неразмножаемому семейству решений

$$\psi(x)=\frac{\gamma\cdot y}{(y^\nu y_\nu)^2}\exp\left\{i\lambda\frac{(\bar{\chi}\chi)^{1/3}}{\beta^\nu\beta_\nu}\left(\frac{\beta\cdot y}{y^\nu y_\nu}+\theta\right)\right\},\quad \beta^\nu\beta_\nu\neq 0,\tag{31}$$

где $y_\nu=x_\nu+\delta_\nu$; δ_ν, β_ν, θ — произвольные постоянные.

Другие решения конформно инвариантного спинорного уравнения (1) можно получить, например, из (27), (28) при $k=1/3$ с помощью формул размножения [3, 4]

$$\begin{gathered}\psi_{II}(x)=\frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot c)}{\sigma^2(x,c)}\psi_I(x),\\ x'_\mu=\frac{x_\mu-c_\mu x^2}{\sigma(x,c)},\quad \sigma(x,c)=1-2cx+c^2x^2.\end{gathered}\tag{32}$$

Эти формулы означают, что $\psi_{II}(x)$ будет решением нашего уравнения, если только $\psi_I(x)$ является его решением.

Приведем еще одну формулу размножения решений уравнения (1) с $m=0$ и $k=1/2$. Для этого воспользуемся тем фактом, что редуцированное уравнение (1)

$$(\gamma_0+\gamma_3)\varphi_{\omega_1}+\gamma_1\varphi_{\omega_2}+\gamma_2\varphi_{\omega_3}+i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2}\varphi=0\tag{33}$$

обладает бесконечной симметрией. Тогда для него получаем

$$\begin{gathered}\varphi_{II}(\omega)=\Phi_0^{-1}(\omega_1)\exp\left\{\Phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0+\gamma_3)-\frac{1}{2}\dot{\Phi}_2(\omega_1)\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3)-\right.\\ \left.-\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0(\omega_1)\Phi_0(\omega_1)[\gamma_1(\omega_2+\Phi_1(\omega_1))+\gamma_2(\omega_3+\Phi_2(\omega_1))](\gamma_0+\gamma_3)\right\}\times\\ \times\varphi_1\left(\int\Phi_0(\omega_1)d\omega_1,\Phi_0^{-1}(\omega_1)(\omega_2+\Phi_1(\omega_1)),\Phi_0^{-1}(\omega_1)(\omega_3+\Phi_3(\omega_1))\right),\end{gathered}$$

где $\omega_1 = x_0 + x_3$, $\omega_2 = x_1$, $\omega_3 = x_2$; Φ_0, Φ_1, Φ_2 — произвольные дифференцируемые функции.

В заключение отметим, что приведенные в таблице 1 анзатцы не исчерпывают всех возможных анзатцев, редуцирующих уравнение (1) по независимым и зависимым переменным [10]. Так, анзатц

$$\psi(x) = \left[f(u) + ig(u)\left(\gamma_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right)\right]\chi, \tag{34}$$

где f, g и $u = u(x)$ скалярные дифференцируемые функции, χ — постоянный спинор, приводит (1) к следующей системе ДУЧП:

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{du} = gF, \quad F \equiv \lambda\left(f^2 + \varepsilon g^2\right)^k + m,\\
&\varepsilon\frac{dg}{du} = -fF - \frac{N}{u}g, \quad \varepsilon = \pm 1,
\end{aligned}$$

при этом функция u удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\frac{\partial u}{\partial x^\nu} = \varepsilon, \quad \Box u = \frac{N}{u}, \tag{35}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $N = -2, -1, 0, \ldots, 3$.

Обобщая результат Коллинза [11], выпишем решение системы (35)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = -1, \quad N = -2: \quad u(x) = \left[(ay)^2 + (by)^2 + (cy)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = -1, \quad N = -1: \quad u(x) = \left[(ay)^2 + (by)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = -1, \quad N = 0: \quad u(x) = ay + F(by + dy),\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 0: \quad u(x) = dy,\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 1: \quad u(x) = \left[(dy)^2 - (ay)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 2: \quad u(x) = \left[(dy)^2 - (ay)^2 - (by)^2\right]^{1/2},\\
&\varepsilon = 1, \quad N = 3: \quad u(x) = \sqrt{y_\nu y^\nu},
\end{aligned}$$

где $y_\mu = x_\mu + \delta_\mu$; δ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (25), F — произвольная дифференцируемая функция.

Описание решений уравнения (1) вида (34) будет посвящена отдельная работа.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., О симметриях и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
4. Fushchych W.I., Shtelen V.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continious subgroups of the fundamental groups of physics, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
6. Grundland A.M., Harnad I., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.

7. Фущич В.И., Штелень В.М., О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Теор. мат. физика*, 1987, **72**, № 1, 35–44.

8. Фущич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного поля, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 20–30.

9. Фущич В.И., О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 4–19.

10. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.

11. Collins C.B., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–187.

Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійного хвильового рівняння

В.І. ФУЩИЧ, В.А. ТИЧИНІН

Some classes of exact solutions are obtained for a nonlinear wave equation. The method is suggested to construct a new solution of the nonlinear wave equation from two knows.

Нелінійні хвильові рівняння

$$F(u) \equiv u_{x_0x_0} - (C(u)x_{x_1})_{x_1} = 0 \tag{1}$$

зустрічаються при описанні поперечних коливань струн із змінною щільністю, поздовжніх коливань стержнів із змінним модулем пружності, при описанні багатьох інших процесів [1–5]. Груповий аналіз цього рівняння зроблений в [3]. Нижче одержані деякі класи точних розв'язків рівняння (1) за допомогою нелокального перетворення його до лінійного. Крім того, запропонований спосіб побудови нового розв'язку нелінійного рівняння по двох відомих розв'язках.

Нелінійне рівняння (1) зводиться до лінійного

$$L(\varphi) \equiv \varphi_{yy} - C(y)\varphi_{\tau\tau} = 0 \tag{2}$$

за допомогою нелокального перетворення [6]

$$A: \quad \begin{array}{l} x_0 = \varphi_\tau, \quad x_1 = \varphi_y(\alpha, \beta = \tau, y), \\ u = y, \quad \delta \equiv \det \|\varphi_{\alpha\beta}\| \neq 0. \end{array} \tag{3}$$

Це перетворення переводить (1) в $PL(\varphi)$

$$F(u) \xrightarrow{A} PL(\varphi). \tag{4}$$

Оператор P має вигляд

$$\begin{aligned} P = {} & \left[\varphi_{y\tau}^3 + 2\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau}(\varphi_{yy} - C(y)\varphi_{\tau\tau}) - C(y)\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau}^2\right]\partial_\tau + \\ & + \left[C(y)\varphi_{\tau\tau}^3 - \varphi_{y\tau}^2\varphi_{\tau\tau}\right]\partial_y + (\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau\tau} - \varphi_{\tau\tau}\varphi_{y\tau\tau})(\varphi_{yy} + C(y)\varphi_{\tau\tau}) + \\ & + 2\left[C(y)\varphi_{y\tau}\varphi_{\tau\tau}\varphi_{\tau\tau\tau} - \varphi_{y\tau}^2\varphi_{y\tau\tau}\right] - C'(y)\varphi_{\tau\tau}^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Побудувавши розв'язки лінійного (2), знаходимо розв'язки нелінійного рівняння (1). Розглянемо декілька випадків.

1. Якщо $C(u) = (au+b)^{-4}$, a, b — довільні сталі, розв'язок лінійного рівняння має вигляд [2]

$$\varphi(y,\tau) = (ay+b)\left[f\left(\frac{1}{ay+b} + a\tau\right) + g\left(\frac{1}{ay+b} - a\tau\right)\right]. \tag{6}$$

Розв'язок нелінійного рівняння (1) задається виразом

$$x_0 = a(au+b)(f+g), \quad x_1 = a\left[f + g - \frac{1}{au+b}(f'+g')\right]. \tag{7}$$

Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1990, № 5, С. 32–36.

Тут f і g — довільні функції, штрих означає похідну за відповідним аргументом.

2. $C(u) = u^{-2}$, $k_i(s)$ — довільні функції параметра s $(i = 1, 2)$. За розв'язком лінійного рівняння (2) [2]

$$\varphi(y,\tau) = y^s \left[k_1(s) e^{\sqrt{s(s-1)\tau}} + k_2(s) e^{-\sqrt{s(s-1)}\tau} \right] \tag{8}$$

знаходимо розв'язок (1)

$$s^{-2} x_1^2 u^{2(1-s)} - s^1 (s-1)^{-1} x_0^2 u^{-2s} = 4k_1(s) k_2(s). \tag{9}$$

Аналогічно будуються розв'язки у випадках, коли $C(u)$ дорівнюють

$$u^k, \quad \exp u, \qquad \left(u^2+1\right)^{-2} \exp(-4 \operatorname{arctg} u),$$
$$(1+u)^{2(A-1)}(1-u)^{-2(A+1)}, \quad u^{-4} \exp\left(-2u^{-1}\right).$$

Скористаємося для побудови розв'язків (2) розділенням змінних, тобто розв'язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді

$$\varphi(y,\tau) = h(\tau) \cdot g(y). \tag{10}$$

Це призводить до таких результатів:

$$g'' - \varkappa C(y) g = 0, \tag{11}$$

$$h'' - \varkappa h = 0, \tag{12}$$

($\varkappa$ — стала, $C(y)$ — довільна функція),

$$\begin{aligned} &h^1(\tau) = C_1 \operatorname{ch} \tau\sqrt{\varkappa} + C_2 \operatorname{sh} \tau\sqrt{\varkappa}, \quad \varkappa > 0, \\ &h^2(\tau) = C_1 + C_2\tau, \quad \varkappa = 0, \\ &h^3(\tau) = C_1 \cos \tau\sqrt{|\varkappa|} + C_2 \sin \tau\sqrt{|\varkappa|}, \quad \varkappa < 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Якщо $C(u) = \lambda u^k$, де λ — довільний дійсний параметр, відповідні розв'язки лінійного рівняння такі:

1) при $k = -2$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{|4\varkappa\lambda + 1|}$

$$\begin{aligned} &g^1(y) = C_3 y^{\frac{1}{2}+r} + C_4 y^{\frac{1}{2}-r}, \quad 4\varkappa\lambda + 1 > 0, \\ &g^2(y) = C_3\sqrt{y} + C_4\sqrt{y}\ln y, \quad 4\varkappa\lambda + 1 = 0, \\ &g^3(y) = C_3\sqrt{y}\cos(r\ln y) + C_4\sqrt{y}\sin(r\ln y), \quad 4\varkappa\lambda + 1 < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\varphi^1(y,\tau) = h^3(\tau) g^1(y), \quad \lambda > 0, \quad \varkappa < 0, \tag{14а}$$

$$\varphi^2(y,\tau) = h^1(\tau) g^3(y), \quad \lambda < 0, \quad \varkappa > 0, \tag{14б}$$

$$\varphi^3(y,\tau) = h^2(\tau) g^1(y), \quad -\infty < \lambda < +\infty, \quad \varkappa = 0, \tag{14в}$$

$$\varphi^4(y,\tau) = h^3(\tau) g^2(y), \quad \lambda > 0, \quad \varkappa = -(4\lambda)^{-1}, \tag{14г}$$

$$\varphi^5(y,\tau) = h^1(\tau) g^2(y), \quad \lambda < 0, \quad \varkappa = -(4\lambda)^{-1}, \tag{14д}$$

2) при $k \neq -2$ розв'язки рівняння (11) можуть бути виражені через функції Бесселя [7] ($i^2 = -1$):

$$g(y) = \sqrt{y} Z_\beta \left(\frac{2i}{k+2} \sqrt{\varkappa\lambda} \cdot y^{\frac{k+2}{2}} \right), \quad \left(\beta = \frac{1}{k+2} \right), \tag{15}$$

C_3, C_4 — довільні сталі, $Z_\beta(x) = C_3 J_\beta + C_4 Y_\beta$ — циліндричні функції, J_β, Y_β — Бесселеві функції першого та другого роду відповідно. Розв'язки лінійного рівняння (2) мають вигляд

$$\varphi^6(y,\tau) = h^1(\tau)\sqrt{y} Z_\beta(\gamma^+), \quad \gamma^+ \equiv \frac{2i}{k+2}\sqrt{\varkappa\lambda} \cdot y^{\frac{k+2}{2}}, \tag{16а}$$

$$\varphi^7(y,\tau) = h^3(\tau)\sqrt{y} Z_\beta(\gamma^-), \quad \gamma^- \equiv \frac{-2}{k+2}\sqrt{\varkappa\lambda} \cdot y^{\frac{k+2}{2}}, \tag{16б}$$

З (14а) одержуємо такий розв'язок рівняння (1):

$$\begin{aligned}\left(C_1^2 + C_2^2\right)^2 = {} & \left[C_1 x_0 |\varkappa|^{-\frac{1}{2}} \left(g^1(u)\right)^{-1} - C_2 x_1 \left(C_3 \left(\frac{1}{2} + r\right) u^{r-\frac{1}{2}} + \right.\right. \\ & \left.\left. + C_4 \left(\frac{1}{2} - r\right) u^{-r-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right]^2 + \left[C_2 x_0 |\varkappa|^{-\frac{1}{2}} \left(g^1(u)\right)^{-1} + \right. \\ & \left. + C_1 x_1 \left(C_3 \left(\frac{1}{2} + r\right) u^{r-\frac{1}{2}} + C_4 \left(\frac{1}{2} - r\right) u^{-r-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right]^2.\end{aligned} \tag{17а}$$

Аналогічно будуються розв'язки (1) з (14б–д). За розв'язками (16а,б) лінійного рівняння (2) знаходимо такі розв'язки рівняння (1):

$$\begin{aligned}\left(C_2^2 \mp C_1^2\right)^2 = {} & \left\{ C_2 x_0 \left[\sqrt{|\varkappa| u} Z_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} \mp \right. \\ & \left. \mp C_1 x_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}} Z_\beta(\gamma^\pm) + \sqrt{u} Z'_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} \right\}^2 \mp \\ & \mp \left\{ C_1 x_0 \left[\sqrt{|\varkappa| u} Z_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} - C_2 x_1 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}} Z_\beta(\gamma^\pm) + \sqrt{u} Z'_\beta(\gamma^\pm) \right]^{-1} \right\}^2.\end{aligned} \tag{18а,б}$$

Верхній знак відповідає (16а), нижній — (16б).

Нехай $g(y) = F(y, C_3, C_4)$ — деякий розв'язок рівняння (11) з визначеним $C(y)$, тоді розв'язки відповідного нелінійного рівняння (1) будуються за формулою

$$\left(C_1^2 \pm C_2^2\right)^2 = \left[\frac{C_2 x_0}{\sqrt{|\varkappa|} F(u)} \mp \frac{C_1 x_1}{F'(u)} \right]^2 \mp \left[\frac{C_1 x_0}{\sqrt{|\varkappa|} F(u)} - \frac{C_2 x_1}{F'(u)} \right]^2, \tag{19}$$

де верхній знак відповідає $\varkappa > 0$, нижній — значенням $\varkappa < 0$. Якщо підставити $y = u$ в розв'язок лінійного рівняння (2)

$$\varphi^1(y,\tau) = \left[C_1 \operatorname{ch} \tau\sqrt{\varkappa} + C_2 \operatorname{sh} \tau\sqrt{\varkappa} \right] \cdot F(y, C_3, C_4),$$
$$\varphi^2(y,\tau) = \left[C_1 \cos \tau\sqrt{|\varkappa|} + C_2 \sin \tau\sqrt{|\varkappa|} \right] \cdot F(y, C_3, C_4),$$

і виключити потім параметр τ з одержаних рівнянь, приходимо до розв'язків (19).

Побудуємо новий розв'язок нелінійного рівняння (1) з відомих розв'язків u_1, u_2. Скористаємося для цього принципом суперпозиції розв'язків лінійного рівняння (2). В одному з простих розв'язків рівняння (1) з $C(u) = \lambda u^{-4}$ надамо параметру C значення C_1, $C_2 \neq C_1$. Одержуємо два різних розв'язки (1)

$$u_\alpha = -\lambda^{\frac{1}{4}} \left[\frac{x_0^\alpha}{x_1^\alpha} \left(1 - \lambda^{\frac{1}{2}} C_\alpha^{-1} x_0^\alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\alpha = 1, 2). \tag{20}$$

Для (20) будуємо розв'язки лінійного рівняння (2)

$$\varphi_\alpha(y, \tau) = \frac{1}{4} C_\alpha \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right]. \tag{21}$$

Тоді

$$\varphi_3(y, \tau) = k_1 \varphi_1(y, \tau) + k_2 \varphi_2(y, \tau) = \frac{1}{4} (k_\alpha C_\alpha) \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right], \tag{22}$$

k_α $(\alpha = 1, 2)$ — довільні сталі. При цьому

$$\begin{aligned} x_0^\alpha &= \varphi_{\alpha,\tau}(y, \tau) = -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} C_\alpha \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right], \\ x_1^\alpha &= \varphi_{\alpha,y}(y, \tau) = -\frac{1}{4} C_\alpha \left[y^{-2} - \lambda^{-1} \tau^2 \right], \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} x_0^3 &= -\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha) \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} y\tau + 1 \right], \\ x_1^3 &= -\frac{1}{4} (k_\alpha C_\alpha) \left[y^{-2} - \lambda^{-1} \tau^2 \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Внаслідок (3) з (24) будуємо розв'язок (1)

$$\begin{aligned} u_3 &= -\lambda^{\frac{1}{4}} \left[\frac{x_0^3}{x_1^3} \left(1 + \lambda^{\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha)^{-1} x_0^3 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\lambda^{\frac{1}{4}} \left[\frac{k_1 x_0^1 + k_2 x_0^2}{k_1 x_1^1 + k_2 x_1^2} \left(1 + \lambda^{\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha^{-1} \left(k_1 x_0^1 + k_2 x_0^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Продиференціювавши розв'язок (20) по x_1^α та розв'язавши одержану систему відносно x_0^α та x_1^α, знаходимо

$$\begin{aligned} x_1^\alpha &= -\frac{1}{2} u_\alpha \cdot (u_{\alpha, x_1^\alpha})^{-1}, \\ x_0^\alpha &= \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{1}{2}} C_\alpha \pm \left[\frac{1}{4} \lambda^{-1} C_\alpha^2 - \frac{1}{2} \lambda^{-1} C_\alpha u_\alpha^3 (u_{\alpha, x_1^\alpha})^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Тут $u_{\alpha, x_1^\alpha} \equiv \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1^\alpha}$ (підсумовування по α немає) та

$$x_0^2 = C_2 C_1^{-1} x_0^1 \equiv \theta\left(x_0^1\right), \quad x_1^2 = C_2 C_1^{-1} x_1^1 \equiv \sigma\left(x_1^1\right). \tag{27}$$

Підставляючи (26), (27) у праву частину (25), будуємо u_3

$$
\begin{gathered}
u_3\left(x_0^1, x_1^1\right) = -\lambda^{\frac{1}{4}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \left[1 + \lambda^{\frac{1}{2}} (k_\alpha C_\alpha)^{-1} \cdot \Lambda\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (-2)^{\frac{1}{2}} \times \\
\times \left[k_1 u_1\left(x_0^1, x_1^1\right) u_{1,x_1^1}^{-1}\left(x_0^1, x_1^1\right) + k_2 u_2\left(\theta\left(x_0^1\right), \sigma\left(x_1^1\right)\right) u_{2,x_1^2}^{-1}\left(\theta\left(x_0^1\right), \sigma\left(x_1^1\right)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \\
\Lambda\left(x_0^1, x_1^1\right) = \lambda^{-1} k_1 \left[\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}} C_1 \pm \left(\frac{1}{4}C_1^2 - \frac{1}{2}C_1 u_1^3(x_0^1, x_1^1) u_{1,x_1^1}^{-1}(x_0^1, x_1^1)\right)\right] + \\
+ \lambda^{-1} k_2 \left[\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}} C_2 \pm \left(\frac{1}{4}C_2^2 - \frac{1}{2}C_2 u_2^3\left(\theta\left(x_0^1\right), \sigma\left(x_1^1\right)\right) u_{2,x_1^2}^{-1}\left(\theta\left(x_0^1\right), \sigma\left(x_1^1\right)\right)\right)\right].
\end{gathered}
\tag{28}
$$

1. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. 1, New York, Acad. Press, 1965, 301 p.
2. Bluman G., Kumei S., On invariance properties of wave equations, *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, № 2, 307–318.
3. Ames W.F. Lohner R.J., Adams E., Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, in Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Editor V. Lakshmikanthan, New York, Acad. Press, 1982, 1–6
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 399 с.
5. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск, Наука, 1984, 272 с.
6. Фущич В.И., Тычинин В.А. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Киев, Институт математики АН УССР, 1982, 48 с.
7. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1971, 576 с.

Про редукцію багатовимірного нелінійного хвильового рівняння до двовимірних рівнянь

В.І. ФУЩИЧ, І.А. ЄГОРЧЕНКО

The condition of reduction of multidimensional wave equations to the two-dimensional equation is studied and the necessary conditions of compatibility and exact solutions of the resulting d'Alembert–Hamilton system are obtained.

1. Розв'язки нелінійного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} &\Box u = F(u), \\ &\Box \equiv \partial^2_{x_0} - \partial^2_{x_1} - \cdots - \partial^2_{x_n}, \quad u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

будемо шукати за допомогою анзаца [1–4]

$$u = \varphi(y, z), \tag{2}$$

де y, z — нові змінні. Підстановка (2) в (1) приводить до рівняння

$$\begin{aligned} &\varphi_{yy} y_\mu y_\mu + 2\varphi_{yz} z_\mu y_\mu + \varphi_{zz} z_\mu z_\mu + \varphi_y \Box y + \varphi_z \Box z = F(\varphi) \\ &\left(y_\mu = \frac{\partial y}{\partial x_\mu},\ \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \end{aligned} \tag{3}$$

звідки одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &y_\mu y_\mu = r(y, z), \quad y_\mu z_\mu = q(y, z), \quad z_\mu z_\mu = s(y, z), \\ &\Box y = R(y, z), \quad \Box z = S(y, z). \end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) є умовою редукції багатовимірного хвильового рівняння (1) до двовимірного рівняння (3) за допомогою анзаца (2).

Така редукція становить інтерес, тому що розв'язки двовимірних рівнянь в частинних похідних, в тому числі і нелінійних, можуть бути досліджені більш повно, ніж розв'язки багатовимірних рівнянь.

Наприклад, нехай $y_\mu y_\mu = -z_\mu z_\mu = -1$, $z_\mu y_\mu = \Box y = \Box z = 0$. Тоді (3) має вигляд

$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi).$$

Якщо $F(\varphi) = \sin\varphi$, то редуковане рівняння має солітонні розв'язки. Якщо $F(\varphi) = \exp\varphi$, воно має загальний розв'язок.

2. Сформулюємо необхідні умови сумісності системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох функцій.

Систему рівнянь (4), в залежності від знаку виразу $rs - q^2$, локальними перетвореннями можна звести до одного з чотирьох типів:

Доповіді АН УРСР. Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1990, № 8, С. 31–33.

1) еліптичний випадок: $rs - q^2 > 0$, $v = v(y,z)$ — комплекснозначна функція,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, v^*), \quad \Box v^* = V^*(v, v^*), \\ &v^*_\mu v_\mu = h(v, v^*), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad v^*_\mu v^*_\mu = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

(редуковане рівняння еліптичного типу);

2) гіперболічний випадок: $rs - q^2 < 0$, $v = v(y,z)$, $\omega = \omega(y,z)$ — дійсні функції,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, \omega), \quad \Box \omega = W(v, \omega), \\ &\omega_\mu \omega_\mu = h(v, \omega), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad \omega_\mu \omega_\mu = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

(редуковане рівняння гіперболічного типу);

3) параболічний випадок: $rs - q^2 = 0$, $r^2 + s^2 + q^2 \neq 0$, $v(y,z)$, $\omega(y,z)$ — дійсні функції,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, \omega), \quad \Box \omega = W(v, \omega), \\ &v_\mu \omega_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = \lambda \ (\lambda = \pm 1), \quad \omega_\mu \omega_\mu = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(якщо $W \neq 0$, то редуковане рівняння параболічного типу);

4) рівняння першого порядку $r = s = q = 0$: $y \to v$, $z \to \omega$

$$\begin{aligned} &v_\mu v_\mu = \omega_\mu \omega_\mu = v_\mu \omega_\mu = 0, \\ &\Box v = V(v, \omega), \quad \Box \omega = W(v, \omega). \end{aligned} \tag{8}$$

Аналіз сумісності системи Даламбера–Гамільтона

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = f(u) \tag{9}$$

в тривимірному просторі був проведений Коллінзом в [5]. Необхідні умови сумісності системи (9) для чотирьох незалежних змінних вивчались в роботі [6].

Сформулюємо необхідні умови сумісності систем (5)–(8).

Теорема 1. *Система (5) сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v, v^*) \partial_{v^*} \Phi}{\Phi}, \quad \partial_{v^*} \equiv \frac{\partial}{\partial v^*},$$

де Φ довільна функція, для якої виконується умова

$$(h \partial_{v^*})^{n+1} \Phi = 0.$$

Теорема 2. *Система (6) може бути сумісною тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v, \omega) \partial_\omega \Phi}{\Phi}, \quad W = \frac{h(v, \omega) \partial_0 \Psi}{\Psi},$$

де функції Φ, Ψ задовольняють умови

$$(h \partial_v)^{n+1} \Psi = 0, \quad (h \partial_\omega)^{n+1} \Phi = 0.$$

Теорема 3. *Система (7) сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{\lambda \partial_v \Phi}{\Phi}, \quad \partial_v^{n+1} \Phi = 0, \quad W \equiv 0.$$

Система (8) сумісна у випадку $V = W \equiv 0$.

Доведення цих теорем проводиться із застосуванням лем, наведених в [6], та відомої теореми Гамільтона–Келі, згідно з якою матриця є коренем свого характеристичного полінома.

Зауваження 1. Рівняння (5) можна переписати для пари дійсних функцій $\omega = \operatorname{Re} v$, $\sigma = \operatorname{Im} v$. Проте в цьому випадку необхідні умови сумісності мають дуже громіздкий вигляд.

Зауваження 2. Перехід від (4) до (5)–(8) зручний тільки з точки зору дослідження сумісності. Знак виразу $rs - q^2$ може змінюватись для різних y, z і перехід розглядається тільки в області, де цей знак постійний.

3. Наведемо явні розв'язки систем типу (4) і редуковані рівняння. Параметри a_μ, b_μ, c_μ, d_μ $(\mu = \overline{0,3})$ задовольняють умови

$$
\begin{aligned}
&-a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = -1 \quad (a^2 \equiv a_0^2 - a_1^2 - \cdots - a_3^2),\\
&ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0;
\end{aligned}
$$

y, z — функції від x_0, x_1, x_2, x_3.

$$
\begin{aligned}
1)\quad & y = ax, \; z = dx,\\
& \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi);\\
2)\quad & y = ax, \; z = \left((bx)^2 + (cx)^2 + (dx)^2\right)^{1/2},\\
& \varphi_{yy} - \varphi_{zz} - \frac{2}{z}\varphi_z = F(\varphi);\\
3)\quad & y = bx + \Phi(ax + dx), \; z = cx,\\
& -\varphi_{zz} - \varphi_{yy} = F(\varphi);\\
4)\quad & y = \left((bx)^2 + (cx^2)\right)^{1/2}, \; z = ax + dx,\\
& -\varphi_{yy} - \frac{1}{y}\varphi_y = F(\varphi).
\end{aligned}
$$

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Grundland A., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–807.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Collins S.B., Complex potential equations. I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–187.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.

Нелиевские анзацы и точные решения нелинейного спинорного уравнения

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

С использованием условной симметрии нелинейного уравнения Дирака получены новые анзацы для спинорного поля, редуцирующие это уравнение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Построен новый класс точных решений нелинейного уравнения Дирака, содержащий три произвольных функции.

1. В [1–3] предложено естественное обобщение лиевского подхода к построению точных решений дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Оно основано на выделении из всего множества решений таких подмножеств, которые обладают более широкой симметрией, чем множество в целом. Для этого необходимо к заданному уравнению дописать дополнительные условия (уравнения) с тем, чтобы полученная система ДУЧП обладала более широкой симметрией, чем исходное уравнение и, кроме того, была совместной.

В настоящей работе, используя эту идею, построим семейство новых точных решений следующего нелинейного спинорного уравнения

$$\{i\gamma_\mu\partial_\mu - \lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\}\psi = 0, \tag{1}$$

где $\psi = \psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — четырехкомпонентная комплексная функция-столбец, $\bar\psi = \psi^+\gamma_0$, γ_μ — матрицы Дирака размерности 4×4, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$, $\lambda, k = \mathrm{const}$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 0 до 3.

2. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\psi(x) = \exp\{f_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\}\varphi(\omega), \tag{2}$$

где $\varphi(\omega)$ — четырехкомпонентная функция-столбец; $f_{\mu\nu}(x)$ и $\omega = \omega(x)$ — скалярные действительные функции, которые выбираются так, чтобы подстановка выражения (2) в уравнение (1) приводила последнее к системе обыкновенных уравнений дифференциальных (ОДУ) для $\varphi(\omega)$.

Далее, опишем все анзацы (2), редуцирующие систему нелинейных спинорных ДУЧП (1) к ОДУ при условии, что функции $f_{\mu\nu}$, ω имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
&f_{00} = -f_{11} = -f_{22} = -f_{33} = \frac{1}{4}\theta_0(x_0+x_3, x_1, x_2),\\
&f_{01} = -f_{10} = f_{13} = -f_{31} = \frac{1}{2}\theta_1(x_0+x_3, x_1, x_2),\\
&f_{02} = -f_{20} = f_{23} = -f_{32} = \frac{1}{2}\theta_2(x_0+x_3, x_1, x_2),\\
&f_{03} = f_{30} = f_{12} = f_{21} = 0, \quad \omega = \omega(x_0+x_3, x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Подставляя анзац

$$\psi(x) = \exp\{\theta_0 + (\theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2)(\gamma_0+\gamma_3)\}\varphi(\omega) \tag{3}$$

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 7, С. 958–962.

в уравнение (1) и умножая полученное равенство слева на $\exp\{-\theta_0 - (\theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2)(\gamma_0 + \gamma_3)\}$, имеем

$$i[(\gamma_0 + \gamma_2)\partial_\xi\theta_0 + \gamma_a\partial_a\theta_0 + \gamma_a\gamma_b(\partial_a\theta_b)(\gamma_0 + \gamma_3) - 2\theta_a(\partial_a\theta_0)(\gamma_0 + \gamma_3)]\varphi + \\ + i[(\gamma_0 + \gamma_3)(\partial_\xi\omega - 2\theta_a\partial_a\omega) + \gamma_a\partial_a\omega]\dot{\varphi} - \lambda e^{\theta_0/k}(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi = 0,$$

где $\xi = x_0 + x_3$, $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 2.

Отсюда заключаем, что анзац (3) редуцирует исходное ДУЧП к ОДУ, если выполняются следующие нелинейные уравнения:

$$\begin{aligned} &1)\quad \partial_\xi\theta_0 - 2\theta_a\partial_a\theta_0 - \partial_a\theta_a = e^{\theta_0/k}f_1(\omega),\\ &2)\quad \partial_1\theta_0 = e^{\theta_0/k}f_2(\omega),\\ &3)\quad \partial_2\theta_0 = e^{\theta_0/k}f_3(\omega),\\ &4)\quad \partial_2\theta_1 - \partial_1\theta_2 = e^{\theta_0/k}f_4(\omega),\\ &5)\quad \partial_\xi\omega - 2\theta_a\partial_a\omega = e^{\theta_0/k}f_5(\omega),\\ &6)\quad \partial_1\omega = e^{\theta_0/k}f_6(\omega),\\ &6)\quad \partial_2\omega = e^{\theta_0/k}f_7(\omega). \end{aligned} \tag{4}$$

В (4) $f_1, \ldots, f_7$ — произвольные гладкие функции.

Следует отметить, что в силу произвольности $\varphi(\omega)$ при подстановке выражений

$$\omega(x), \quad \theta_\alpha(x) \tag{5}$$

и

$$h(\omega(x)), \quad \theta_\alpha + h_\alpha(\omega(x)), \tag{6}$$

где $h, h_\alpha \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\alpha = \overline{0,2}$, в формулу (3) получаем один и тот же анзац для поля $\psi(x)$. В этом смысле решения системы ДУЧП (4) вида (5), (6) эквивалентны.

Система (4) содержит семь уравнений для четырех функций ω, θ_α, т.е. является переопределенной. Именно это обстоятельство позволяет построить ее общее решение.

Теорема. *Общее решение системы нелинейных ДУЧП (4), определяемое с точностью до введенного выше отношения эквивалентности, задается одной из следующих формул:*

$$\begin{aligned} &1)\quad \theta_0 = k\ln w_1, \quad \theta_1 = (2w_1)^{-1}(\dot{w}_1x_1 + \dot{w}_2),\\ &\qquad \theta_2 = (2w_1)^{-1}((2k-1)\dot{w}_1x_2 + w_3), \quad \omega = w_1x_1 + w_2;\\ &2)\quad \theta_0 = -k\ln(x_1 + w_1),\\ &\qquad \theta_a = w_3\left[(x_1 + w_1)^2 + (x_2 + w_2)^2\right]^{k-1}(x_a + w_a) + \frac{1}{2}\dot{w}_a, \quad a = 1, 2,\\ &\qquad \omega = (x_1 + w_1)(x_2 + w_2)^{-1};\\ &3)\quad \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = R(x_1 + ix_2, x_0 + x_3) + R(x_1 - ix_2, x_0 + x_3) + w_1x_1,\\ &\qquad \theta_2 = R(x_1 + ix_2, x_0 + x_3) - R(x_1 - ix_2, x_0 + x_3) + w_2x_1, \quad \omega = x_0 + x_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь w_1, w_2, w_3 — произвольные гладкие функции от x_0+x_3, R — произвольная аналитическая по первой переменной функция.

Приведем основные этапы доказательства, опуская громоздкие промежуточные выкладки.

Вначале интегрируется переопределенная система уравнений 2, 3, 6, 7 из (4). Сделав замену $\theta = e^{-\theta_0/k}$, перепишем эту систему в виде

$$\partial_a \theta = F_a(\omega), \quad \partial_a \omega = \theta^{-1} G_a(\omega), \quad F_a, G_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1), \quad a = 1, 2. \tag{8}$$

Из необходимых и достаточных условий совместности уравнений (8) $\partial_1\partial_2\theta = \partial_2\partial_1\theta$, $\partial_1\partial_2\omega = \partial_2\partial_1\omega$ следуют такие соотношения на $F_a(\omega)$, $G_a(\omega)$:

$$\dot{F}_1 G_2 = G_1 \dot{F}_2, \quad G_2 \dot{G}_1 - G_1 F_2 = G_1 \dot{G}_1 - G_2 F_1 \tag{9}$$

(точка обозначает производную по переменной ω).

Интегрирование системы ОДУ (9) существенно облегчается, если заметить, что определенное выше отношение эквивалентности (формулы (6), (7)) индуцирует отношение эквивалентности на множестве решений уравнений (9)

$$\begin{aligned} &F_a(\omega) \sim F_a(\tilde{f}_1(\omega)) - \dot{\tilde{f}}_2(\omega) G_a(\tilde{f}_1(\omega)), \\ &G_a(\omega) \sim (\dot{\tilde{f}}_1(\omega)\tilde{f}_2(\omega))^{-1} G_a(\tilde{f}_1(\omega)), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\dot{\tilde{f}}_1 \tilde{f}_2 \neq 0$.

Интегрируя систему ДУЧП (8), (9), устанавливаем, что ее общее решение, определяемое с точностью до отношений эквивалентности (6), (7), (10), задается одной из формул вида

$$\begin{aligned} &1) \quad F_1 = G_1 = 1, \quad F_2 = G_2 = 0, \quad \theta = w_1^{-1}, \quad \omega = w_1 x_1 + w_2; \\ &2) \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = \omega, \quad G_2 = -\omega^{-2}, \quad \theta = x_1 + w_1, \\ &\qquad \omega = (x_1 + w_1)(x_2 + w_2)^{-1}; \\ &3) \quad F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad \omega = \xi, \quad \theta = 1; \\ &4) \quad F_1 = F_2 = 0, \quad G_1, G_2 \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1), \quad \omega = \xi, \\ &\qquad \theta = G_1(\xi) x_1 + G_2(\xi) x_2 + w_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь w_1, w_2, w_3 — произвольные гладкие действительные функции от ξ.

Подставляя выражения для функций $\omega(x)$, $\theta_0(x) = -k \ln \theta(x)$ в остальные уравнения системы (4), получаем четыре системы ДУЧП для определения функций $\theta_a(x)$. Интегрируя первые три из них, получаем формулы (7). Четвертая система несовместна.

Подставляя выражения (7) в формулу (3), получаем три класса анзацев для спинорного поля $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} &1) \quad \psi(x) = w_1^k \exp\left\{(2w_1)^{-1}[((2k-1)\dot{w}_1 x_2 + w_3)\gamma_2 + \right. \\ &\qquad \left. + (\dot{w}_1 x_1 + \dot{w}_2)\gamma_1](\gamma_0 + \gamma_3)\right\} \varphi(w_1 x_1 + w_2); \\ &2) \quad \psi(x) = (x_1 + w_1)^{-k} \exp\left\{ w_3 \left[(x_1 + w_1)^2 + (x_2 + w_2)^2\right]^{k-1} \gamma_a (x_a + w_a) \times \right. \\ &\qquad \left. \times (\gamma_0 + \gamma_3) + \frac{1}{2}\dot{w}_a \gamma_a (\gamma_0 + \gamma_3) \right\} \varphi\left((x_1 + w_1)(x_2 + w_2)^{-1}\right); \\ &3) \quad \psi(x) = \exp\left\{[(R + R^* + w_1 x_1)\gamma_1 + (iR - iR^* + w_2 x_1)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3)\right\} \times \\ &\qquad \times \varphi(x_0 + x_3), \end{aligned} \tag{12}$$

которые редуцируют нелинейное уравнение Дирака (1) к системам ОДУ

$$\begin{aligned} &1)\quad i\gamma_1\dot{\varphi} = \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\\ &2)\quad i(\gamma_2 - \omega\gamma_1)\dot{\varphi} = \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi;\\ &3)\quad i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Общее решение системы 1 из (13) задается следующей формулой [4]:

$$\varphi(\omega) = \exp\left\{i\lambda(\chi\bar{\chi})^{1/2k}\gamma_1\omega\right\}\chi,$$

где χ — постоянный четырехкомпонентный столбец. Подставляя это выражение в анзац 1 из (12), получаем новое семейство точных решений нелинейного спинорного уравнения (1), содержащее три произвольных функции

$$\begin{aligned} \psi(x) = w_1^k \exp\left\{(2w_1)^{-1}[(\dot{w}_1x_1 + \dot{w}_2)\gamma_1 + ((2k-1)\dot{w}_1x_2 + w_3)\gamma_2] \times\right.\\ \left.\times\,(\gamma_0+\gamma_3)\right\}\exp\left\{i\lambda\gamma_1(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(w_1x_1 + w_2)\right\}\chi. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что анзацы (12) неинвариантны относительно трехпараметрических подгрупп группы симметрии уравнения (1) (в данном случае — это расширенная группа Пуанкаре [4]) и, следовательно, не могут быть получены в рамках традиционного подхода С. Ли [5].

3. Покажем теперь, что нелиевские анзацы (12) можно построить, используя условную инвариантность нелинейного уравнения Дирака (1).

Определение. *Уравнение (1) условно-инвариантно относительно операторов*

$$Q_\tau = \xi_{\tau\mu}(x)\partial_\mu + \eta_\tau(x), \quad \tau = \overline{1,N}, \tag{15}$$

где $\xi_{\tau\nu}(x)$ — действительные скалярные функции, $\eta_\tau(x)$ — переменные (4×4)-матрицы, если система ДУЧП

$$\begin{aligned} &\left\{i\gamma_\mu\partial_\mu - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\right\} = 0,\\ &Q_\tau\psi = 0, \quad \tau = \overline{1,N}, \end{aligned} \tag{16}$$

инвариантна в смысле Ли относительно однопараметрических групп преобразований, генерируемых операторами Q_τ.

Иначе говоря, уравнение (1) обладает условной симметрией, если множество его решений содержит непустое подмножество, не совпадающее со всем множеством, которое имеет нетривиальную симметрию.

Укажем в явном виде операторы Q_τ, $\tau = \overline{1,3}$, такие, что (14) удовлетворяет системе (16). Для этого необходимо решить следующую систему алгебраических уравнений для функций $\xi_{\tau\mu}$, η_τ:

$$\begin{aligned} &\xi_{\tau\mu}(x)\partial_\mu\omega(x) = 0,\\ &\eta_\tau = -\left[\xi_{\tau\mu}(x)\partial_\mu\exp\{\theta_0(x) + \gamma_a\theta_a(x)(\gamma_0+\gamma_3)\}\right] \times\\ &\qquad\times\exp\{-\theta_0(x) - \gamma_a\theta_a(x)(\gamma_0+\gamma_3)\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь ω, θ_0, θ_1, θ_2 — скалярные функции, определяемые формулами 1 из (7), $\tau = \overline{1,3}$.

Решая уравнения (17), имеем

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_3), \quad Q_2 = w_1\partial_2 + \frac{1}{2}(1-2k)\dot{w}_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3), \\
&Q_3 = \frac{1}{2}w_1(\partial_0+\partial_3) - \dot{w}_1(x_1\partial_1 + x_2\partial_2) - \dot{w}_2\partial_2 - k\dot{w}_1 + \\
&\quad + (2w_1)^{-1}[(2\dot{w}_1\dot{w}_2 - w_1\ddot{w}_2)\gamma_1 + 2(w_3\dot{w}_1 - w_1\dot{w}_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3) + \\
&\quad + (2w_1)^{-1}(2\dot{w}_1^2 - w_1\ddot{w}_1)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2)(\gamma_0+\gamma_3).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Очевидно, что операторы Q_2, Q_3 не являются линейными комбинациями генераторов расширенной группы Пуанкаре и, следовательно, не принадлежат алгебре Ли группы симметрии уравнения (1). Подействовав первыми продолжениями операторов Q_τ на нелинейное ДУЧП (1), получаем соотношения

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Q}_1 L = 0, \\
&\tilde{Q}_2 L = 2(2k-1)\dot{w}_1\gamma_2 Q_1\psi + 2k\dot{w}_1\omega_1^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)Q_2\psi + \\
&\quad + \frac{1}{2}(2k-1)\dot{w}_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3)L, \\
&\tilde{Q}_3 L = 2w_1^{-1}[(w_1\ddot{w}_1 - 2w_1^2)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2) + (w_1\ddot{w}_2 - 2\dot{w}_1\dot{w}_2)\gamma_1 + \\
&\quad + 2(w_1\dot{w}_3 - w_3\dot{w}_1)\gamma_2]Q_1\psi + 2w_1^{-2}[(1-k)(2\dot{w}_1^2 - w_1\ddot{w}_1)x_2 + w_1\dot{w}_3 - \\
&\quad - w_3\dot{w}_1]Q_2\psi + 2\dot{w}_1 w_1^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)Q_3\psi - \{\dot{w}_1 + (2w_1)^{-1}(2\dot{w}_1^2 - w_1\ddot{w}_1)\times \\
&\quad \times(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2)(\gamma_0+\gamma_3) + (2w_1)^{-1}[(2\dot{w}_1\dot{w}_2 - w_1\ddot{w}_2)\gamma_1 + \\
&\quad + 2(w_3\dot{w}_1 - w_1\dot{w}_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3)\}L,
\end{aligned}
$$

где символом $\tilde{Q}_a$ обозначено первое продолжение оператора Q_a, $L = i\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\psi$.

Кроме того, выполнены коммутационные соотношения вида $[Q_1, Q_2] = [Q_1, Q_3] = 0$, $[Q_2, Q_3] = -2\dot{w}_1 Q_2$. Из этого следует, что нелинейное уравнение Дирака (1) условно инвариантно относительно операторов (18).

Аналогичным образом можно показать, что анзацы 2, 3 из (12) тоже получаются с использованием условной симметрии уравнения (1).

В заключение отметим, что анзацы (12) редуцируют к системам ОДУ более общие нелинейные спинорные уравнения

$$
\left\{i\gamma_\mu\partial_\mu - (\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\left[\tilde{f}_1\left(\bar{\psi}\psi(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^{-1}\right) + \tilde{f}_2\left(\bar{\psi}\psi(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^{-1}\right)\gamma_4\right]\right\}\psi = 0,
$$

где $\tilde{f}_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1)$.

1. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.

2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.* 1987, **39**, № 1, 116–123.

3. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equation with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.

4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Symmetry and exact solutions of nonlinear spinot equations, *Phys. Repts.*, 1989, **172**, № 4, 123–174.

5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

W.I. Fushchych, Scientific Works 2002, Vol. 4, 126–160.

Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ, И.В. РЕВЕНКО

Установлены необходимые и достаточные условия совместности системы двух скалярных комплексных волновых уравнений Даламбера и Гамильтона в четырехмерном пространстве Минковского. Предложен и эффективно реализован конструктивный метод интегрирования этой системы.

Введение

Настоящая работа посвящена интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП)

$$\Box u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta_3\right) u = F_1(u), \tag{1.а}$$

$$g_{\mu\nu} u_{x_\mu} u_{x_\nu} = F_2(u), \tag{1.б}$$

которую мы, следуя [1, 2] , будем в дальнейшем называть системой Даламбера–Гамилътона.

В (1) $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^2(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$, $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор пространства Минковского $M(1,3)$. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование, причем индексы, обозначенные греческими буквами μ, ν изменяются от 0 до 3, латинскими буквами a, b, c — от 1 до 3, латинскими буквами e, m, n — от 1 до 2.

Ряд важных результатов по точным решениям системы ДУЧП (1) был получен Бейтменом [3], Картаном [4], Смирновым и Соболевым [5].

Сравнительно недавно Коллинзом получены необходимые и достаточные условия совместности переопределенной системы ДУЧП (1) и построено ее общее решение в случае, когда число независимых переменных равно трем. Его подход использовал геометрические идеи и методы и существенно опирался на трехмерность пространства независимых переменных [6].

В работе [7] установлено, что при $F_2 = 0$ уравнения Даламбера–Гамильтона совместны, если и только если $F_1 = 0$. В случае, когда $F_2 \not\equiv 0$, система (1) с помощью замены зависимой переменной вида $u \to f(u)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} &\Box u = F(u), \\ &g_{\mu\nu} u_{x_\mu} u_{x_\nu} = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Оказывается, что существует довольно узкий класс функций $F(u)$, при которых система (2) имеет нетривиальные решения. Именно. из требования совместности уравнений (2) с необходимостью вытекает, что $F = F(u)$ задается одной из

Препринт 90.39, Киев, Институт математики АН УССР, 1990, 65 с.

следующих формул [1, 2]:

$$F(u) = \begin{cases} 0, \\ (u+c_1)^{-1}, \\ (u+c_1)^{-1} + (u+c_2)^{-1}, \\ (u+c_1)^{-1} + (u+c_2)^{-1} + (u+c_3)^{-1}, \end{cases} \tag{3}$$

где $c_1, \ldots, c_3$ — произвольные комплексные константы.

В данной работе установлены необходимые и достаточные условия совместности уравнений Даламбера–Гамильтона, а также предложен и эффективно реализован конструктивный метод интегрирования этих уравнений.

Следует подчеркнуть, что система (1) играет особую роль в теории пуанкаре-инвариантных скалярных ДУЧП, поскольку всякое $P(1,3)$-инвариантное уравнение о помощью подстановки

$$u(x) = \varphi(\omega), \tag{4}$$

где $\omega = \omega(x)$ — произвольное решение уравнений (1), приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) на $\varphi = \varphi(\omega)$ [8]. Например, если подставить (4) в нелинейное уравнение Даламбера

$$\Box u = F_3(u), \tag{5}$$

то для определения функции $\varphi(\omega)$ получается следующее ОДУ:

$$F_1(\omega)\dot{\varphi} + F_2(\omega)\ddot{\varphi} = F_3(\varphi).$$

Более того, в [9] была предложена подстановка, позволяющая с помощью точных решений системы Даламбера–Гамильтона строить частные решения нелинейного уравнения Дирака.

Хорошо известно, что система уравнений Даламбера–Гамильтона инвариантна относительно десятипараметрической группы Пуанкаре $P(1,3)$. Решения этой системы, которые переводятся друг в друга конечным преобразованием из группы $P(1,3)$, мы будем называть $P(1,3)$-эквивалентными ($P(1,3)$-сопряженными). Если $u(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то с помощью преобразований из группы Пуанкаре можно добиться, чтобы $\frac{\partial u}{\partial x_0} \neq 0$. Следовательно, с точностью до $P(1,3)$-эквивалентности можно считать, что при $F_2(u) \not\equiv 0$ имеет место равенство $\frac{\partial u}{\partial x_0} \neq 0$.

Приведем перечень основных обозначений, используемых в дальнейшем

$u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$;

$\|u_{\mu\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$ — матрица 4×4 с элементами $u_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$;

$\det \|u_{\mu\nu}\| \equiv |u_{\mu\nu}|$ — определитель матрицы $\|u_{\mu\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$;

$\dot{f}(x) \equiv \frac{df}{dx}$ — производная функции одной переменной;

$f_{x_\mu} \equiv \partial_{x_\mu} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ — частная производная функции f по переменной x_μ;

$x_\mu x^\mu \equiv g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ — скалярное произведение в пространстве Минковского $M(1,3)$.

§ 1. Редукция четырехмерных уравнений Даламбера–Гамильтона к уравнениям меньшей размерности

Система ДУЧП Даламбера–Гамильтона при $F_2(u) \not\equiv 0$ с помощью замены зависимой переменной

$$u \to u' = \int^u (F_3(\tau))^{-1/2} d\tau \tag{1.1}$$

приводится к виду

$$\Box u = F(u), \tag{1.2а}$$

$$u_\mu u^\mu = 1. \tag{1.2б}$$

Поэтому задача исследования совместности системы уравнений Даламбера–Гамильтона (1а,б) сводится к изучению совместности системы более простого вида (1.2). В основе нашего подхода к решению этой задачи лежит метод нелокальных преобразований [10–13].

Определение 1. *Преобразование зависимых и независимых переменных вида*

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \\ u' &= f(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \quad r \geq 1, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где f_μ, f — r-раз непрерывно дифференцируемые функции,

$$\underset{s}{u} = \left\{ \frac{\partial^s u}{\partial x_{\mu_1} \cdots \partial x_{\mu_s}} \ : \ \mu_1, \ldots, \mu_s = \overline{0,3} \right\}, \quad s = \overline{1,r}$$

называется нелокальным преобразованием порядка r.

Основная идея метода нелокальной линеаризации состоит в том, чтобы для исследуемого нелинейного ДУЧП указать в явном виде нелокальное преобразование (1.3), приводящее его к линейному. Если для преобразованного уравнения удается построить общее или частное решение, то, обращая преобразование (1.3), получаем решение исходного уравнения.

Особая роль в теории ДУЧП первого порядка принадлежит контактным преобразованиям — нелокальным преобразованиям вида

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \\ u' &= f(x, u, \underset{1}{u}), \\ u'_\mu &= g_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \end{aligned}$$

которые сохраняют условия касания первого порядка $du = u_\mu dx_\mu \Rightarrow du' - u'_\mu dx'_\mu = 0$. Этот факт объясняется тем, что всякие два скалярных ДУЧП первого порядка могут быть переведены друг в друга подходящим контактным преобразованием (С. Ли [14]).

Для уравнения $u_\mu u^\mu = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$ удается в явном виде построить контактное преобразование, приводящее его к линейному ДУЧП, что позволяет построить его общее решение в параметрическом виде [15].

Теорема 1. *Общее решение уравнения Гамильтона*

$$u_\mu u^\mu = \lambda, \quad u \neq \mathrm{const}, \tag{1.4}$$

определяемое с точностью до $P(1,3)$-сопряженности, задается одной из следующих формул:

$$1)\ \ u = x_0\sqrt{\lambda + v_a^2} + x_a v_a + \Phi(v), \tag{1.5а}$$

где $v_a = v_a(x)$ — гладкие функции, определяемые такими соотношениями:

$$x_a + x_0 v_a(\lambda + v_b^2)^{-1/2} + \Phi_{v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3}, \tag{1.5б}$$

$\Phi = \Phi(v_1, v_2, v_3) \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — *произвольная функция;*

$$2)\ \ u = x_0\sqrt{\lambda + w^2 + v_n^2} + x_n v_n + x_3 w + \Phi(v), \tag{1.6а}$$

где $v_n = v_n(x)$ — гладкие функции, определяемые такими соотношениями:

$$x_n + x_3 w_{v_n} + x_0(v_n + w w_{v_n})(1 + v_n^2 + w^2)^{-1/2} + \Phi_{v_n} = 0, \quad n = \overline{1,2}, \tag{1.6б}$$

$\Phi(v_1, v_2), w(v_1, v_2) \in C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — *произвольные функции;*

$$3)\ \ u = x_0\sqrt{\lambda + w_a^2(v)} + x_a w_a(v) + \Phi(v), \tag{1.7а}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, определяемая соотношением

$$w_a \dot{w}_a x_0(\lambda + w_b^2)^{-1/2} + x_a \dot{w}_a + \dot{\Phi} = 0, \tag{1.7б}$$

$w_a(v), \Phi(v) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — *произвольные функции, удовлетворяющие равенству*

$$w_a^2(v) = -\lambda + v^2, \quad \dot{w}_a \equiv \frac{dw_a}{dv}, \quad \dot{\Phi} \equiv \frac{d\Phi}{dv}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Из (1.4) следует, что величины $u_0, \ldots, u_3$ — функционально-зависимы, откуда

$$\det \left\| \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right\|_{\mu,\nu=0}^{3} = 0.$$

Поэтому ранг (4×4)-матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$ принимает одно из следующих значений: 1, 2, 3.

I. $\mathrm{rank}\,\|u_{\mu\nu}\| = 3$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} \right\|_{a,b=1}^{3} \neq 0. \tag{1.9}$$

Совершим в (1.4) следующее нелокальное преобразование :

$$\begin{aligned} &y_0 = x_0, \quad y_a = u_a, \\ &H(y) = x_a u_a - u, \quad H_{y_0} = -u_0, \quad H_{y_a} = x_a. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Нетрудно проверить, что (1.10) — это контактное преобразование, которое является обобщением классического преобразования Эйлера для двух независимых переменных [11–12].

В новых переменных y_μ, $H(y)$ уравнение (1.4) принимает вид

$$H_{y_0} = -\sqrt{\lambda + y_a^2},$$

т.е. замена (1.10) приводит ДУЧП (1.4) при условии (1.9) к линейному уравнению, общее решение которого задается следующей формулой:

$$H = -y_0\sqrt{\lambda + y_a^2} - \Phi(y), \tag{1.11}$$

где $\Phi(y_1, y_2, y_3) \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя (1.11) в (1.10), приходим к такому выражению для $u(x)$:

$$u(x) = x_a y_a - H = x_0\sqrt{1 + y_a^2} + x_a y_a + \Phi(y), \tag{1.12а}$$

причем функции $y_a = y_a(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_a = H_{y_a} = -x_0 y_a(\lambda + y_b^2)^{-1/2} - \Phi_{y_a}. \tag{1.12б}$$

Обозначая в (1.12) $v_a = y_a(x)$, получаем формулы (1.5).

II. $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 2$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что

$$\det\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_m}\right\|_{n,m=1}^2 \neq 0. \tag{1.13}$$

и, кроме того, существует функция $\tilde{w} \in C^1(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$ такая, что

$$\tilde{w}(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$$

и величины $\tilde{w}(u_0, u_1, u_2, u_3)$, $u_\mu u^\mu - \lambda$ — функционально-независимы.

С учетом сказанного уравнение (1.4) при условии (1.13) может быть представлено в виде

$$u_0 = \sqrt{\lambda + u_a^2}, \quad \tilde{w}(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$$

или

$$u_0 = \sqrt{\lambda + u_n^2 + w^2}, \quad u_3 = w(u_1, u_2). \tag{1.14}$$

Совершим в (1.14) следующее контактное преобразование:

$$\begin{aligned} &x_0 = y_0, \quad x_n = H_{y_n}, \quad x_3 = y_3, \quad u = y_n H_{y_n} - H, \\ &u_0 = -H_{y_0}, \quad u_n = y_n, \quad u_3 = -H_{y_3}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

Откуда

$$H_{y_0} = -\sqrt{\lambda + y_n^2 + w^2}, \quad H_{y_3} = -w(y_1, y_2). \tag{1.16}$$

Интегрируя систему линейных ДУЧП (1.16), имеем

$$H = -y_0\sqrt{\lambda + y_n^2 + w^2} - y_3 w - \Phi(y_1, y_2),$$

где $\Phi \in C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подстановка полученного результата в формулы (1.15) дает следующее выражение для функции $u(x)$:

$$u = x_n y_n - H = x_n y_n + x_0\sqrt{\lambda + y_n^2 + w^2} + x_3 w + \Phi(y_1, y_2), \tag{1.17а}$$

причем функции $y_n(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_n = -x_0(y_n + ww_{y_n})(\lambda + y_n^2 + w^2)^{-1/2} - x_3 w_{y_n} - \Phi_{y_n}, \quad n = \overline{1,2}. \tag{1.17б}$$

Обозначая в (1.17) $v_n = y_n(x)$, приходим к формулам (1.6).

III. $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 1$. Не умаляя общности, можно считать, что

а) $u_{00} \neq 0$,

б) $\exists\, w_a = w_a(u_0) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1):\ u_a = w_a(u_0), \quad a = \overline{1,3}.$

С учетом этого уравнение Гамильтона (1.4) представляется в виде

$$u_0 = \sqrt{\lambda + w_a^2(u_0)}, \quad u_a = w_a(u_0). \tag{1.18}$$

Совершим в (1.18) следующее контактное преобразование:

$$\begin{aligned} &y_0 = u_0, \quad y_a = x_a, \\ &H = x_0 u_0 - u, \quad H_{y_0} = x_0, \quad H_{y_a} = -u_a. \end{aligned} \tag{1.19}$$

В новых переменных y_μ, $H(y)$ переопределенная система ДУЧП (1.18) принимает вид

$$H_{y_a} = -w_a(y_0), \tag{1.20а}$$

$$w_a^2(y_0) = y_0^2 - \lambda. \tag{1.20б}$$

Интегрируя уравнения (1.20а), имеем

$$H = -w_a(y_0) y_a - \Phi(y_0),$$

где $\Phi(y_0) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подстановка полученного результата в (1.19) дает следующее выражение для функции $u = u(x)$:

$$u = x_0 y_0 - H = x_0\sqrt{\lambda + w_a^2(y_0)} + w_a(y_0) y_a + \Phi(y_0), \tag{1.21а}$$

причем функция $y_0 = y_0(x)$ определяется из соотношения

$$x_0 w_a \dot{w}_a (\lambda + w_b^2)^{-1/2} + \dot{w}_a y_a + \dot{\Phi} = 0 \tag{1.21б}$$

и выполнено равенство (1.20б).

Вводя в (1.20б), (1.21) обозначение $v = y_0(x)$, приходим к формулам (1.7).

Чтобы завершить доказательство, нам осталось рассмотреть вырожденный случай, когда матрица $\|u_{\mu\nu}\|$ — нулевая, т.е.

$$u_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}$$

Отсюда следует, что

$$u = c_0 x_0 + c_a x_a + c_4, \tag{1.22а}$$

причем константы c_μ, c_4 удовлетворяют соотношению

$$c_0^2 - c_a^2 = \lambda. \tag{1.22б}$$

Легко видеть, что формулы (1.22) получаются из (1.7), если положить $v = c_0$, $w_a = c_a$, $\Phi = c_4$. Теорема доказана.

Формулы (1.5)–(1.7) имеют очень прозрачный геометрический смысл при $\lambda = 1$. Рассмотрим, например, выражения (1.5). Разрешая эти соотношения относительно x_μ, имеем

$$\begin{aligned} &x_0 = (v_0 + \theta)\sqrt{1 + v_a^2}, \\ &x_a = -\Phi_{v_a} - (v_0 + \theta) v_a (1 + v_a^2)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Здесь использованы обозначения $v_0 = u$, $\theta = v_a \Phi v_a - \Phi$.

Вводя четырехвекторы

$$S = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{1 + v_a^2} \\ -\Phi_{v_b} - \theta v_b (1 + v_a^2)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + v_a^2} \\ -v_b \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

переписываем формулы (1.23) следующим образом:

$$x_\mu = S_\mu(\vec{v}\,) + v_0 n_\mu(\vec{v}\,). \tag{1.25}$$

Из (1.25) заключаем, что $x_\mu = S_\mu(\vec{v}\,)$ — это параметрическая форма записи поверхности уровня $u(x) = 0$ решения уравнения $u_\mu u^\mu = 1$, задаваемого формулами (1.5).

Непосредственный подсчет показывает, что четырехвекторы (1.24) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &n \cdot n \equiv g_{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 1, \\ &n \cdot S_{v_a} \equiv g_{\mu\nu} n_\mu \frac{\partial S_\nu}{\partial v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3} \end{aligned} \tag{1.26}$$

(точкой обозначено скалярное произведение в пространстве Минковского $M(1,3)$ с метрикой $g_{\mu\nu}$). Следовательно, $n(\vec{v}\,)$ — это единичный четырехвектор нормали к поверхности $x_\mu = S_\mu(\vec{v}\,)$.

Из всего вышесказанного можно заключить, что значение функции u, определяемой соотношениями (1.5), в точке $x \in R(1,3)$ равно расстоянию (в смысле метрики пространства $M(1,3)$) от точки x до поверхности уровня этого решения (см. также [6]).

Соотношения (1.6), (1.7) также представляются в виде (1.25), где

$$\begin{aligned} &S = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{1 + v_n^2 + w^2} \\ -\Phi_{v_n} - v_3 w_{v_n} - v_n\theta \\ v_3 - \theta w \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + v_n^2 + w^2} \\ -v_n \\ -w \end{pmatrix}, \\ &\theta = v_3(v_n w_{v_n} - w) + v_n \Phi_{v_n} - \Phi. \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned} &S = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{1 + w_n^2 + v_3^2} \\ v_n - \theta w_n \\ -\dot{\Phi} - v_n \dot{w}_n - v_3\theta \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + w_n^2 + v_3^2} \\ -w_n \\ -v_3 \end{pmatrix}, \\ &\theta = v_3\dot{\Phi} - \Phi + v_n(v_3\dot{w}_n - w_n). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Как показывает прямая проверка, четырехвекторы (1.27), (1.28) также удовлетворяют соотношениям (1.26). Следовательно, для произвольного решения уравнения $u_\mu u^\mu = 1$ значение его и точка равно расстоянию от x до поверхности уровня этого решения $u(x) = 0$.

Формулы (1.23), (1.25), (1.27), (1.28) можно рассматривать как замены переменных

$$x_\mu,\ u(x)\ \to\ v_\mu,\ u(v), \tag{1.29}$$

причем в новых переменных решение ДУЧП $u_\mu u^\mu = 1$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности имеет вид

$$u(v) = v_0. \tag{1.30}$$

При замене переменных (1.29) уравнение (1.2a) переходит в следующее ДУЧП (см., например, [16]);

$$Lu = |\tilde g|^{-1/2}\tilde g_{\mu\nu}\partial_{v_\nu}(|\tilde g|^{1/2}\partial_{v_\mu}u) = F(v_0). \tag{1.31}$$

Здесь L — оператор Лапласа–Бельтрами в криволинейных координатах $v_\mu(x)$;

$$\tilde g_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\alpha}g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\beta}, \quad \mu,\nu = \overline{0,3}, \quad |\tilde g| = \det\|\tilde g_{\mu\nu}\|. \tag{1.32}$$

Подставляя в (1.31) выражение (1.30), приходим к уравнению на $|\tilde g|$

$$\frac{1}{2}|\tilde g|^{-1}\frac{\partial|\tilde g|}{\partial v_0} = F(v_0). \tag{1.33}$$

Следовательно, с помощью замены переменных (1.25) система ДУЧП Даламбера–Гамильтона сводится к уравнению (1.33). Явный вид матричных элементов $\tilde g_{\mu\nu}$ существенно зависит от ранга матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$. Мы детально рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$, в остальных случаях рассуждения аналогичны.

При условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$ замена переменных (1.29) определяется формулами (1.23). Вычисляя из этих соотношений $\frac{\partial x_\mu}{\partial v_a}$ и подставляя полученный результат в (1.32), имеем

$$\begin{aligned}
&\tilde g_{00} = 1, \quad \tilde g_{0a} = \tilde g_{a0} = 0,\\
&\tilde g_{ab} = (v_0+\theta)^2\left((1+v_c^2)^{-1}v_av_b - \delta_{ab}\right) -\\
&\qquad - 2(v_0+\theta)\Phi_{v_av_b} - \Phi_{v_av_c}\Phi_{v_bv_c} - \theta_{v_a}\theta_{v_b},
\end{aligned} \tag{1.34}$$

где $\theta = v_a\Phi_{v_a} - \Phi$, $a,b,c = \overline{1,3}$. Следовательно,

$$|\tilde g| = \det\|\tilde g_{ab}\|_{a,b=1}^3.$$

Вычисление определителя матрицы $G = \|\tilde g_{ab}\|$ существенно упрощается, если воспользоваться тождеством (справедливость которого устанавливается прямой проверкой)

$$VG = -((v_0+\theta)I + V\Phi)^2, \tag{1.35}$$

где

$$V = \|\delta_{ab} + v_av_b\|_{a,b=1}^3, \quad I = \|\delta_{ab}\|_{a,b=1}^3, \quad \Phi = \|\Phi_{v_av_b}\|_{a,b=1}^3.$$

Так как $\det V = 1 + v_a^2 \neq 0$, то существует V^{-1}. Умножая (1.35) на V^{-1} слева, имеем следующее представление для матрицы G:

$$G = -V^{-1}((v_0+\theta)I + V\Phi)^2,$$

откуда

$$\begin{aligned}\det G &= -(1+v_a^2)^{-1}[\det((v_0+\theta)I + V\Phi)]^2 = \\ &= -(1+v_a^2)^{-1}\Big[(v_0+\theta)^3 + (v_0+\theta)^2(\Delta\Phi + v_a v_b \Phi_{v_a v_b}) + \\ &\quad + (v_0+\theta)(M_2(\Phi) + (\Delta\Phi) v_a v_b \Phi_{v_a v_b} - v_a v_b \Phi_{v_a v_c}\Phi_{v_b v_c}) + \\ &\quad + (1+v_a^2)\det\|\Phi_{V_a V_b}\|\Big]^2.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, $M_2(\Phi)$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы $\|\Phi_{v_a v_b}\|$, т.е.

$$M_2(\Phi) = \begin{vmatrix}\Phi_{v_1v_1} & \Phi_{v_1v_2} \\ \Phi_{v_1v_2} & \Phi_{v_2v_2}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\Phi_{v_2v_2} & \Phi_{v_2v_3} \\ \Phi_{v_2v_3} & \Phi_{v_3v_3}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\Phi_{v_3v_3} & \Phi_{v_1v_3} \\ \Phi_{v_1v_3} & \Phi_{v_1v_1}\end{vmatrix}.$$

Подставляя (1.36) в (1.33) и сравнивая полученное выражение для функции $F(v_0)$ с (3), заключаем, что

$$F(v_0) = (v_0+\alpha)^{-1} + (v_0+\beta)^{-1} + v_0^{-1}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}^1. \tag{1.37}$$

Расщепляя равенство (1.33), где $|\tilde g| = \det G$, $F(v_0)$ задаются формулами (1.36), (1.37), по степеням величины $v_0+\theta$, приходим к системе трех ДУЧП на функцию $\Phi = \Phi(v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{aligned}&\Delta\Phi + v_a v_b \Phi_{v_a v_b} = -3\theta + \alpha + \beta, \\ &M_2(\Phi) + (\Delta\Phi) v_a v_b \Phi_{v_a v_b} - v_a v_b \Phi_{ac}\Phi_{bc} = (\alpha-\theta)(\beta-\theta) - \theta(\alpha+\beta-2\theta), \\ &|\Phi_{v_a v_b}| = -(\alpha-\theta)(\beta-\theta)\theta(1+v_a^2)^{-1},\end{aligned} \tag{1.38}$$

где $\theta = v_a\Phi_{v_a} - \Phi$.

Таким образом, общее решение системы (1.2) при условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами (1.5), где $\lambda = 1$, $\Phi = \Phi(\vec v\,)$ — произвольное решение системы ДУЧП (1.38).

Вычисляя определитель матрицы $\|\tilde g_{\mu\nu}\|$ для случая, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 2$, имеем

$$\begin{aligned}\det\|\tilde g_{\mu\nu}\| = &-(1+v_n^2+w^2)\times \\ &\times\left[(v_0+\theta)^2 S_2 + (v_0+\theta)(1+v_n^2+w^2)S_1 + S_0\right]^2,\end{aligned} \tag{1.39}$$

где

$$\begin{aligned}S_2 &= (1+w_{v_n}^2+\tau^2)(1+v_n^2+w^2)^{-1}, \\ S_1 &= (v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})(\Phi_{v_n v_m} + v_3 w_{v_n v_m}) - \\ &\quad - [\Delta\Phi + v_n v_m\Phi_{v_n v_m} + v_3(\Delta w + v_n v_m w_{v_n v_m})](1+w_{v_n}^2+\tau^2), \\ S_0 &= \det\|\Phi_{v_n v_m} + v_3 w_{v_n v_m}\|.\end{aligned}$$

Здесь $\theta = v_3(v_n w_{v_n} - w) + v_n\Phi_{v_n} - \Phi$, $\tau = v_n w_{v_n} - w$, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Определитель (1.39) не равен нулю, так как соотношения $S_1 = S_2 = S_0 = 0$ противоречат равенствам (1.6б). Действительно, дифференцируя последние по переменной x_m, имеем (при $\lambda = 1$)

$$\left\{ x_0 \left(\sqrt{1 + v_l^2 + w^2} \right)_{v_n v_{m'}} + x_3 w_{v_n v'_m} + \Phi_{v_n v'_m} \right\} \frac{\partial v_{m'}}{\partial x_m} = -\delta_{nm}.$$

Но это равенство невозможно, так как определитель матрицы

$$\left\| x_0 \left(\sqrt{1 + v_l^2 + w^2} \right)_{v_n v_{m'}} + x_3 w_{v_n v_{m'}} + \Phi_{v_n v_{m'}} \right\|_{n,m'=1}^{2}$$

в силу условий $S_0 = S_1 = S_2 = 0$ равен нулю.

Подставляя определитель (1.39) в формулу (1.33) и сравнивая полученный результат с (3), заключаем, что функция $F(u)$ с необходимостью задается одним из следующих выражений:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad F(u) = 0, \\ &\text{II.} \quad F(u) = u^{-1}, \\ &\text{III.} \quad F(u) = u^{-1} + (u + \alpha)^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}^1. \end{aligned}$$

Расщепляя в каждом из приведенных случаев равенство (1.33) по степеням величины v_0, v_3, приходим к системам двумерных ДУЧП на функции $\Phi(v_1, v_2)$, $w(v_1, v_2)$

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 1 + w_{v_n}^2 + \tau^2 = 0, \\ & (v_n \tau + w_{v_n})(v_m \tau + w_{v_m}) \Phi_{v_n v_m} = 0, \end{aligned} \tag{1.40}$$

причем $\det \| v_3 w_{v_n v_m} + \Phi_{v_n v_m} \| \neq 0$;

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & 1 + w_{v_n}^2 + \tau^2 = 0, \quad \det \| w_{v_n v_m} \| = 0, \\ & (1 + v_n^2 + w^2) \det \| \Phi_{v_n v_m} \| = \rho \{ (v_n \tau + w_{v_n})(v_m \tau + w_{v_m}) \Phi_{v_n v_m} \}, \\ & (1 + v_n^2 + w^2)(\Delta \Phi_\Delta w - \Phi_{v_n v_m} w_{v_n v_m}) = \\ & \qquad = \tau \{ (v_n \tau + w_{v_n})(v_m \tau + w_{v_m}) \Phi_{v_n v_m} \}; \end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned} \text{III.} \quad & (\Delta w + v_n v_m w_{v_n v_m})(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2) - \\ & \qquad - (v_n \tau + w_{v_n})(v_m \tau + w_{v_m}) w_{v_n v_m} = -2\tau (1 + w_{v_n}^2 + \tau^2), \\ & \det \| w_{v_n v_m} \| = \tau^2 (1 + w_n^2 + \tau^2)(1 + v_n^2 + w^2)^{-1}, \\ & (\Delta \Phi + v_n v_m \Phi_{v_n v_m})(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2) - (v_n \tau + w_{v_n}) \times \\ & \qquad \times (v_m \tau + w_{v_m}) \Phi_{v_n v_m} = -(2\rho + \alpha)(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2), \\ & \det \| \Phi_{v_n v_m} \| = \rho(\rho + \alpha)(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2)(1 + v_n^2 + w^2)^{-1}, \\ & \Delta \Phi \Delta w - \Phi_{v_n v_m} w_{v_n v_m} = \tau (2\rho + \alpha)(1 + w_{v_n}^2 + \tau^2)(1 + v_n^2 + w^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

В формулах (1.42) использовано обозначение $\rho = v_n \Phi_{v_n} - \Phi$.

Таким образом, общее решение системы Даламбера–Гамильтона (1.2) при условии $\operatorname{rank} \| u_{\mu\nu} \| = 2$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами

(1.6), где $\lambda = 1$, $\Phi(v_1, v_2)$, $w(v_1, v_2)$ — произвольные решения одной из систем ДУЧП (1.40)–(1.42).

Проводя аналогичные вычисления для случая, когда $\mathrm{rank}\,\|u_{\mu\nu}\| = 1$, убеждаемся, что функция $F(u)$ с необходимостью задается одним из следующих соотношений:

$$\text{I.}\quad F(u) = 0,$$
$$\text{II.}\quad F(u) = u^{-1}.$$

При этом общее решение системы уравнений Даламбера–Гамильтона (1.2) задается формулами (1.7), где $\lambda = 1$, $w_a(v)$, $\Phi(v)$ — гладкие функции, удовлетворяющие системам ОДУ

$$\text{I.}\quad \dot{w}_a^2 = 1, \quad w_a^2 = v^2 - 1. \tag{1.43}$$

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} &\ddot{w}_a = (1 - \dot{w}_b^2)(v\dot{w}_a - w_a), \\ &\ddot{\Phi} = (1 - \dot{w}_b^2)(v\dot{\Phi} - \Phi), \quad w_a^2 = v^2 - 1, \end{aligned} \tag{1.44}$$

при $F(u) = 0$ и $F(u) = u^{-1}$ соответственно.

В (1.43), (1.44) точкой обозначено дифференцирование по переменной v.

§ 2. Необходимые и достаточные условия совместности системы уравнений Даламбера–Гамильтона

В этом параграфе получен критерий совместности переопределенной системы ДУЧП (1), т.е. описаны в явном виде все функции $F_1(u)$, $F_2(u)$, при которых система уравнений Даламбера–Гамильтона имеет нетривиальные решения.

Теорема 2. *Система ДУЧП (1) совместна, если и только если функции $F_1(u)$, $F_2(u)$ имеют вид*

$$\begin{aligned} &1)\quad F_1(u) = F_2(u) = 0; \\ &2)\quad F_1(u) = N\dot{f}^{-1}(f - c)^{-1} - \ddot{f}\dot{f}^{-3}, \quad F_2(u) = \dot{f}^{-2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $f = f(u) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\dot{f}(u) \not\equiv 0$; $c = \mathrm{const}$; N — дискретный параметр, принимающий одно из значений 0, 1, 2, 3.

Доказательство. Пусть $F_2 \equiv 0$, тогда согласно [1, 2, 7] система ДУЧП (1) совместна, если и только если $F_1 \equiv 0$.

Предположим теперь, что $F_2 \not\equiv 0$, тогда замена (1.1) приводит уравнения Даламбера–Гамильтона к виду (1.2). Задача исследования совместности уравнений (1.2а) и (1.2б) в предыдущем параграфе была сведена к исследованию совместности переопределенных систем ДУЧП меньшей размерности (1.38), (1.40)–(1.44). Покажем, что из требования совместности этих систем с необходимостью следует равенство $\alpha = \beta = 0$.

1. Совместность системы ДУЧП (1.38). Уравнения (1.38) существенно упрощаются, если сделать следующую локальную замену переменных:

$$z_a = v_a(1 + v_b^2)^{-1/2}, \quad p(\vec{z}) = (1 + v_b^2)^{-1/2}\Phi(\vec{v}). \tag{2.2}$$

В переменных z_a, $p(\vec{z})$ система (1.38) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \Delta p - z_a z_b p_{z_a z_b} = -(\alpha+\beta)(1-z_a^2)^{-1/2},\\
&2)\quad M_2(p) - (\Delta p) z_a z_b p_{z_a z_b} + + z_a z_b p_{z_a z_c} p_{z_b z_c} = \alpha\beta(1-z_a^2)^{-1},\\
&3)\quad \det\|p_{z_a z_b}\| = 0,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где $\Delta = \partial_{z_a}\partial_{z_a}$, $M_2(p)$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы $\|p_{z_a z_b}\|$.

Из третьего уравнения системы (2.3) следует, что матрица $\|p_{z_a z_b}\|$ является вырожденной. Поэтому ее ранг равен либо 1, либо 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

$$
A.\ \ \operatorname{rank}\|p_{z_a z_b}\| = 1. \tag{2.4}
$$

Из условия (2.4) следует существование таких функций $R_n \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, для которых

$$
p_{z_n} = R_n(p_{z_3}), \quad n = \overline{1,2}. \tag{2.5}
$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение из (2.3), видим, что его левая часть тождественно равна нулю, откуда $\alpha\beta = 0$. Следовательно, один из параметров (скажем β) равен нулю.

С учетом сказанного первое уравнение системы (2.3) представляется в виде

$$
p_{z_3 z_3}\left[1 + \dot{R}_n^2 - (z_n \dot{R}_n + z_3)^2\right] = -\alpha(1-z_a^2)^{-1/2}, \tag{2.6}
$$

где $\dot{R}_n \equiv dR_n/dp_{z_3}$.

Если $p_{z_3 z_3} = 0$, то из (2.6) с необходимостью следует, что $\alpha = 0$.

Пусть $p_{z_3 z_3} \neq 0$. Совершим в (2.6) контактное преобразование Эйлера для трех независимых переменных [17]

$$
\begin{aligned}
&y_n = z_n, \quad y_3 = p_{z_3}, \quad H(\vec{y}) = z_3 p_{z_3} - p,\\
&H_{y_n} = -P_{z_n}, \quad H_{y_3} = z_3, \quad H_{y_3 y_3} = p_{z_3 z_3}^{-1},\\
&H_{y_n y_3} = -p_{z_n z_3} p_{z_3 z_3}^{-1}, \quad H_{y_n y_m} = \begin{vmatrix} p_{z_3 z_3} & p_{z_n z_3} \\ p_{z_m z_3} & p_{z_n z_m} \end{vmatrix} p_{z_3 z_3}^{-1}, \quad n, m = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

В новых переменных y_a, $H(\vec{y})$ уравнения (2.5), (2.6) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \left[1 + \dot{R}_n^2 - (y_n \dot{R}_n + H_{y_3})^2\right] H_{y_3 y_3}^{-1} = -\alpha(1 - y_n^2 - H_{y_3}^2),\\
&2)\quad H_{y_1} = -R_1,\\
&3)\quad H_{y_2} = -R_2.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Здесь $R_n = R_n(y_3)$, $\dot{R}_n \equiv dR_n/dy_3$.

Таким образом, комбинируя локальную и нелокальную замену переменных (2.2), (2.7), мы существенно упростили систему нелинейных ДУЧП (1.38), поскольку два последних уравнений из (2.8) являются линейными. Интегрирование этих уравнений дает следующее выражение для $H = H(\vec{y})$:

$$
H = -R_n(y_3) y_n + Q(y_3), \tag{2.9}
$$

где $Q \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя (2.9) в уравнение 1) из (2.8), имеем

$$(-\ddot{R}_n y_n + \ddot{Q})^{-1}(1 + \dot{R}_n^2 - \dot{Q}^2) = -\alpha \left[1 - y_n^2 - (\dot{R}_n y_n - \dot{Q})^2\right]^{-1/2}. \tag{2.10}$$

Необходимым условием расщепления уравнения (2.10) по переменным y_1, y_2 является требование, чтобы выражение

$$1 - y_1^2 - y_2^2 - (\dot{R}_1 y_1 + \dot{R}_2 y_2 - \dot{Q})^2 \tag{2.11}$$

было точным квадратом. Предположим, что это так, т.е. $\exists\ \lambda_n(y_3)$, $\lambda_3(y_3)$, для которых

$$(\lambda_n y_n + \lambda_3)^2 = 1 - y_n^2 - (\dot{R}_n y_n - \dot{Q})^2.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях независимых переменных y_1, y_2, получаем систему нелинейных, алгебраических уравнений

$$\lambda_3^2 = 1 - \dot{Q}^2, \quad \lambda_3\lambda_n = \dot{Q}\dot{R}_n, \quad \lambda_n^2 = -1 - \dot{R}_n^2, \quad \lambda_1\lambda_2 = \dot{R}_1\dot{R}_2.$$

Несложный подсчет показывает, что эта система несовместна. Следовательно, выражение (2.11) не является точным квадратом по переменным y_1, y_2 ни при каких $R_n(y_3)$, $Q(y_3)$. Из этого заключаем, что уравнение (2.10) может иметь нетривиальные решения только при $\alpha = 0$.

$B.$ $\operatorname{rank} \|p_{z_a z_b}\| = 2.$

В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что выполнено условие

$$\det \begin{Vmatrix} p_{z_1 z_1} & p_{z_1 z_2} \\ p_{z_1 z_2} & p_{z_2 z_2} \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{2.12}$$

Следовательно, существует такая функция $R \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$, для которой

$$p_{z_3} = R(p_{z_1}, p_{z_2}). \tag{2.13}$$

С учетом равенства (2.13) система ДУЧП (2.3) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \left[1 + R_1^2 - (z_1 + z_3 R_1)^2\right] p_{z_1 z_1} + 2\left[R_1 R_2 - (z_1 + z_3 R_1)(z_2 + z_3 R_2)\right] p_{z_1 z_2} + \\
&\qquad + \left[1 + R_2^2 - (z_2 + z_3 R_2)^2\right] p_{z_2 z_2} = -(\alpha + \beta)(1 - z_a^2)^{-1/2}, \\
&2) \quad \left[(1 - z_a^2)(1 + R_n^2) + (z_3 - z_n R_n)^2\right] \begin{vmatrix} p_{z_1 z_1} & p_{z_1 z_2} \\ p_{z_1 z_2} & p_{z_2 z_2} \end{vmatrix} = \alpha\beta(1 - z_a^2)^{-1}, \\
&3) \quad p_{z_3} = R.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь мы использовали обозначение $R_n \equiv dR/dp_{z_n}$.

Совершим в (2.14) следующее контактное преобразование Эйлера:

$$\begin{aligned}
&y_n = p_{z_n}, \quad y_3 = z_3, \quad H(y) = z_n p_{z_n} - p, \quad H_{y_n} = z_n, \quad H_{y_3} = -p_{z_3}, \\
&H_{y_1 y_1} = \delta^{-1} p_{z_2 z_2}, \quad H_{y_1 y_2} = -\delta^{-1} p_{z_1 z_2}, \quad H_{y_2 y_2} = \delta^{-1} p_{z_1 z_1}, \\
&H_{y_3 y_3} = -\delta^{-1} \det\|p_{z_a z_b}\|, \quad H_{y_1 y_3} = \delta^{-1}(p_{z_1 z_2} p_{z_2 z_3} - p_{z_2 z_2} p_{z_1 z_3}), \\
&H_{y_2 y_3} = \delta^{-1}(p_{z_1 z_3} p_{z_1 z_2} - p_{z_1 z_1} p_{z_2 z_3}),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$\delta = p_{z_1z_1}p_{z_2z_2} - p^2_{z_1z_2} \neq 0.$$

В новых переменных система ДУЧП (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned}
&1)\quad \left[1 + R^2_{y_2} - (H_{y_2} + y_3R_{y_2})^2\right] H_{y_1y_1} - \\
&\qquad - 2\left(R_{y_1y_2} - (H_{y_1} + y_3R_{y_1})(H_{y_2} + y_3R_{y_2})\right) H_{y_1y_2} + \\
&\qquad + \left[1 + R^2_{y_1} - (H_{y_1} + y_3R_{y_1})^2\right] H_{y_2y_2} = \\
&\qquad = -(\alpha+\beta)\left(1 - H^2_{y_n} - y_3^2\right)^{-1/2}\left(H_{y_1y_1}H_{y_2y_2} - H^2_{y_1y_2}\right), \\
&2)\quad \left[\left(1 - y_3^2 - H^2_{y_n}\right)\left(1 + R^2_{y_n}\right) + (y_3 - R_{y_n}H_{y_n})^2\right] = \\
&\qquad = -\alpha\beta\left(1 - H^2_{y_n} - y_3^2\right)^{-1}\left(H_{y_1y_1}H_{y_2y_2} - H^2_{y_1y_2}\right), \\
&3)\quad H_{y_3} = R(y_1, y_2).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Интегрируя последнее уравнение из (2.16), имеем

$$H = -y_3R(y_1, y_2) + iQ(y_1, y_2), \tag{2.17}$$

где $Q \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подстановка выражения (2.17) в первые два уравнения системы (2.16) дает следующие соотношения для определения функций R, Q:

$$\begin{aligned}
&1)\quad -y_3f(R) + if(Q) = -(\alpha+\beta)\det\| - y_3R_{y_ny_m} + iQ_{y_ny_m}\| \times \\
&\qquad \times \left[1 - y_3^2 - (y_3R_{y_n} - iQ_{y_n})^2\right]^{-1/2}, \\
&2)\quad g(R, Q) = \alpha\beta\det\| - y_3R_{y_ny_m} + iQ_{y_ny_m}\| \left[1 - y_3^2 - (y_3R_{y_n} - iQ_{y_n})^2\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В (2.18) использованы такие обозначения:

$$f(S) = \left(1 + R^2_{y_n} + Q^2_{y_n}\right) S_{y_my_m} - (R_{y_n}R_{y_m} + Q_{y_n}Q_{y_m})S_{y_ny_m},$$
$$g(R, Q) = \left(1 + R^2_{y_n}\right)\left(1 + Q^2_{y_m}\right) - (R_{y_n}Q_{y_n})^2.$$

Первое уравнение системы (2.16) расщепляется по y_3 только при условии, что выражение

$$1 - y_3^2 - (y_3R_{y_n} - iQ_{y_n})^2$$

является точным квадратом по переменной y_3. Вычисляя его детерминант Δ, имеем

$$\Delta = -g(R, Q).$$

Если $\Delta = -g(R, Q) = 0$, то ввиду условия

$$\det\|H_{y_ny_m}\| \equiv \det\| - R_{y_ny_m}y_3 + iQ_{y_ny_m}\| \neq 0 \tag{2.19}$$

имеем из (2.18), что $\alpha\beta = 0$. Следовательно, при $\Delta = 0$ один из параметров α, β (скажем, β) равен нулю. С учетом этого факта уравнения (2.18) после расщепления по степеням переменной y_3 принимают вид

$$\begin{aligned}
&1)\quad i\alpha\det\|R_{y_ny_m}\| = \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(R), \\
&2)\quad i\alpha\det\|Q_{y_ny_m}\| = \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q), \\
&3)\quad i\alpha h(R, Q) = \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q) + \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} f(R), \\
&4)\quad g(R, Q) = 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

В (2.20) $h(R,Q) = R_{y_1y_1}Q_{y_2y_2} + R_{y_2y_2}Q_{y_1y_1} - 2R_{y_1y_2}Q_{y_1y_2}$; функции $f(R)$, $f(Q)$, $g(R,Q)$ определены выше.

Если в (2.18) $\Delta = -g(R,Q) \neq 0$, то в силу (2.19) из первого уравнения следует, что $\alpha+\beta = 0$. Расщепляя уравнения (2.18) по степеням переменной y_3 при $\beta = -\alpha$, приходим к переопределенной системе двумерных ДУЧП на функции R, Q.

$$
\begin{aligned}
&1)\quad f(R) = 0,\\
&2)\quad f(Q) = 0,\\
&3)\quad \alpha^2 \det \|R_{y_ny_m}\| = \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} g(R,Q),\\
&4)\quad \alpha^2 \det \|Q_{y_ny_m}\| = \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} g(R,Q),\\
&5)\quad \alpha^2 h(R,Q) = 2(R_{y_n}Q_{y_n})g(R,Q).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Таким образом, задача исследования совместности системы ДУЧП (2.14) с помощью нелокального преобразования (2.15) сводится к исследованию совместности систем двумерных уравнений (2.20), (2.21). Мы подробно рассмотрим случай системы (2.20), для уравнений (2.21) рассуждения аналогичны.

Продифференцировав уравнение 4) из (2.20) по переменным y_n, $n = -1, 2$, имеем следующие ДУЧП второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(1 + Q^2_{y_n}\right) R_{y_m} - (R_{y_n}Q_{y_m})Q_{y_m}\right] R_{y_my_l} +\\
&\qquad + \left[\left(1 + R^2_{y_n}\right) Q_{y_m} - (R_{y_n}Q_{y_m})R_{y_m}\right] Q_{y_my_l} = 0.
\end{aligned}
$$

Эти соотношения на множестве решений системы (2.20) переписываются в виде

$$
\tau_m \left[\left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} R_{y_my_e} - \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} Q_{y_my_e}\right] = 0,
\tag{2.22}
$$

где

$$
\tau_m = \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} R_{y_m} - \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} Q_{y_m}, \quad m = \overline{1,2}.
$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Рассматриваем уравнения (2.22) совместно с уравнением 3) из (2.20) как систему линейных алгебраических уравнений на $R_{y_1y_1}$, $R_{y_1y_2}$, $R_{y_2y_2}$

$$
\begin{aligned}
&R_{y_1y_1}Q_{y_2y_2} - 2R_{y_1y_2}Q_{y_1y_2} + R_{y_2y_2}Q_{y_1y_1} =\\
&\quad = (i\alpha)^{-1}\left[\left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q) + \left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} f(R)\right] \equiv\\
&\quad \equiv 2(i\alpha)^{-1}\left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q),\\
&\left(1 + Q^2_{y_n}\right)^{1/2} \tau_m R_{y_my_l} = \left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} \tau_m Q_{y_my_l}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

На множестве решений системы ДУЧП (2.20) определитель системы линейных алгебраических уравнений (2.23) равен

$$
\Delta = -\left(1 + Q^2_{y_n}\right) f(Q).
\tag{2.24}
$$

Далее необходимо рассматривать два случая $f(Q) \neq 0$, $f(Q) = 0$.

1. $f(Q) \neq 0$. Здесь имеется две принципиально различных возможности

а) $R_{y_n}Q_{y_n} \neq 0$, б) $R_{y_n}Q_{y_n} = 0$.

Пусть имеет место условие а). В силу уравнения 4) из (2.20)

$$\left(1+Q_{y_n}^2\right)\left(1+R_{y_m}^2\right)\neq n$$

и, следовательно, определитель системы (2.23) не равен нулю. Поэтому эта система имеет единственное решение, явный вид которого дается формулами

$$R_{y_n y_m}=\left(1+R_{y_l}^2\right)^{1/2}\left(1+Q_{y_l}^2\right)^{-1/2}Q_{y_n y_m}. \tag{2.25}$$

Из необходимых и достаточных условий совместности системы ДУЧП (2.25)

$$\frac{\partial R_{y_n y_m}}{\partial y_l}=\frac{\partial R_{y_l y_m}}{\partial y_n},\quad l,m,n=1,2.$$

следуют такие соотношения:

$$\begin{aligned}&\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2}\left(1+Q_{y_n}^2\right)^{-1/2}\det\|Q_{y_n y_m}\|\times\\&\quad\times\left[\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2}Q_{y_l}-\left(1+Q_{y_n}^2\right)^{1/2}R_{y_l}\right]=0.\end{aligned}$$

Если $\det\|Q_{y_n y_m}\|=0$, то из (2.25) заключаем, что $\det\|R_{y_n y_m}\|=h(R,Q)=0$. Но это невозможно в силу (2.19). Поэтому из необходимых и достаточных условий совместности системы (2.23) следуют такие уравнения на функции R, Q:

$$\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2}Q_{y_m}=\left(1+Q_{y_n}^2\right)^{1/2}R_{y_m},\quad m=1,2.$$

откуда $R_{y_m}\equiv Q_{y_m}$, $m=1,2$.

Подставляя этот результат в (2.20), имеем

$$\begin{aligned}&1)\quad i\alpha\det\|R_{y_n y_m}\|=-2\left(1+R_{y_n}^2\right)^{1/2}(R_{y_m}R_{y_l}R_{y_m y_l}),\\&2)\quad 1+2R_{y_n}^2=0.\end{aligned}$$

Но из второго уравнения этой системы следует, что $\det\|R_{y_n y_m}\|=0$, откуда $h(R,Q)=\det\|Q_{y_n y_m}\|=0$. Пришли к противоречию с условием (2.19).

Обратимся теперь к случаю б). Из условия $R_{y_n}Q_{y_n}=0$ в силу четвертого уравнения системы (2.20) следуют три возможных случая

$$\begin{aligned}&\text{б.1)}\quad 1+R_{y_n}^2=0,\quad 1+Q_{y_n}^2\neq 0;\\&\text{б.2)}\quad 1+R_{y_n}^2\neq 0,\quad 1+Q_{y_n}^2=0;\\&\text{б.3)}\quad 1+Q_{y_n}^2=1+R_{y_n}^2=0.\end{aligned}$$

Пусть имеет место случай б.1). Так как условие $Q=\text{const}$ противоречит (2.19), то, не умаляя общности, можно считать, что $Q_{y_2}\neq 0$. Разрешая соотношение $R_{y_n}Q_{y_n}=0$ относительно R_{y_2} и подставляя полученный результат в уравнение $1+R_{y_n}^2=0$, имеем

$$Q_{y_2}^2+R_{y_1}^2Q_{y_n}^2=0.$$

Из этого равенства следует, что $Q_{y_n}\neq 0$, откуда

$$R_{y_1}=iQ_{y_2}\left(Q_{y_n}^2\right)^{-1/2},\quad R_{y_2}=-iQ_{y_1}\left(Q_{y_n}^2\right)^{-1/2}, \tag{2.26}$$

Из необходимого и достаточного условия совместности системы (2.26) получается такое уравнение на Q:

$$Q^2_{y_n}Q_{y_my_m} - Q_{y_n}Q_{y_m}Q_{y_ny_m} = 0. \tag{2.27}$$

Но из соотношений $1 + R^2_{y_n} = 0$, $R_{y_n}Q_{y_n} = 0$ следует, что $R_{y_n}R_{y_m}Q_{y_ny_m} = 0$. Поэтому справедливо равенство

$$f(Q) \equiv \left(1 + R^2_{y_n} + Q^2_{y_n}\right) Q_{y_my_m} - (R_{y_n}R_{y_m} + Q_{y_n}Q_{y_m})Q_{y_ny_m} = 0.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию с исходным предположением $f(Q) \neq 0$.

Пусть имеет место случай б.2). Если $R = \mathrm{const}$, то определитель матрицы $\| - R_{y_ny_m} + iQ_{y_ny_m}\|$ равен нулю, что противоречит условию (2.19). Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что $R_{y_2} \neq 0$. Разрешая соотношение $Q_{y_n}R_{y_n} = 0$ относительно Q_{y_2} и подставляя полученный результат в уравнение $1 + Q^2_{y_n} = 0$, имеем

$$R^2_{y_2} + Q^2_{y_1}\left(R^2_{y_n}\right) = 0.$$

Из этого равенства следует, что $R^2_{y_n} \neq 0$, откуда

$$Q_{y_1} = iR_{y_2}\left(R^2_{y_n}\right)^{-1/2}, \quad Q_{y_2} = -iR_{y_1}\left(R^2_{y_n}\right)^{-1/2}. \tag{2.28}$$

Система (2.28) совместна, если и только если $\partial Q_{y_1}/\partial y_2 = \partial Q_{y_2}/\partial y_1$ Из этого условия вытекает следующее двумерное ДУЧП на функцию $R(y_1, y_2)$:

$$R^2_{y_n}R_{y_my_m} - R_{y_n}R_{y_m}R_{y_ny_m} = 0. \tag{2.29}$$

Но из соотношений $1 + Q^2_{y_n} = 0$, $R_{y_n}Q_{y_n} = 0$ следует, что $Q_{y_n}Q_{y_m}R_{y_nu_m} = 0$. Поэтому справедливо равенство

$$f(R) \equiv \left(1 + R^2_{y_n} + Q^2_{y_n}\right) R_{y_my_m} - (R_{y_ny_m} + Q_{y_n}Q_{y_m})R_{y_ny_m} = 0.$$

Подставляя формулы (2.28) в третье уравнение системы (2.20) при $1+Q^2_{y_n} = 0$, $f(R) = 0$, имеем $\left(1 + R^2_{y_n}\right)^{1/2} f(Q) = 0$, что противоречит исходному предположению.

Обратимся теперь к случаю б.3). Разрешая соотношения $1+R^2_{y_n} = 0$, $1+Q^2_{y_n} = 0$, $R_{y_n}Q_{y_n} = 0$ относительно R_{y_n}, имеем

$$R_{y_1} = \pm iQ_{y_2}, \quad R_{y_2} = \pm iQ_{y_1}, \quad 1 + Q^2_{y_n} = 0.$$

Отсюда вытекают равенства

$$\det \|R_{y_ny_m}\| = \det \|Q_{y_ny_m}\| = h(R, Q) = 0$$

что противоречит условию (2.19).

2. $f(Q) = 0$. Если $f(Q) = 0$, то из уравнений (2.20) в силу (2.19) следует, что $\alpha = 0$. Если же $f(R) \neq 0$, то замена

$$R \to Q, \quad Q \to R \tag{2.30}$$

сводит этот случай к уже рассмотренному (здесь используется симметрия уравнений относительно преобразования (2.30).

Таким образом, требование совместности переопределенной системы ДУЧП с необходимостью приводит к условию $\alpha = 0$. Аналогичный результат имеет место и для системы (2.21). Следовательно, из требования совместности переопределенной системы ДУЧП (2.14) с необходимостью вытекает, что $\alpha = \beta = 0$.

Суммируя вышесказанное, приходим к выводу: необходимым условием совместности системы уравнений (1.38) является равенство нулю параметров α, β.

2. Совместность системы ДУЧП (1.42). Как и в предыдущем случае, прежде чем исследовать совместность уравнений (1.42), упростим их о помощью следующей локальной замены переменных:

$$\begin{aligned} &z_n = v_n \left(1 + v_m^2 + w^2\right)^{-1/2}, \\ &G(z) = w \left(1 + v_m^2 + w^2\right)^{-1/2}, \quad P(z) = \Phi \left(1 + v_m^2 + w^2\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Замена (2.31) не определена при $w = i\left(1 + v_m^2\right)^{1/2}$, однако это равенство невозможно, поскольку в силу формул (1.15), (1.16) оно влечет за собой равенство $u_0 = 0$, что противоречит исходному предположению.

Совершив в (1.42) замену переменных (2.31), после громоздких вычислений приходим к системе двумерных ДУЧП для определения функций $G(z_1, z_2)$, $P(z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} 1)\quad &\left[1 + (1 - z_n^2)G_{z_m}^2 + 2GG_{z_n}z_n - G^2\right]\Delta G - z_n z_m G_{z_n z_m} - \\ &\quad - 2GG_{z_n}G_{z_n z_m}z_m + (z_n^2 - 1)G_{z_m}G_{z_l}G_{z_m z_l} = 0, \\ 2)\quad &\left[1 + (1 - z_n^2)G_{z_m}^2 + 2GG_{z_n}z_n - G^2\right]\Delta P - z_n z_m P_{z_n z_m} - \\ &\quad - 2GG_{z_n}P_{z_n z_m}z_m + (z_n^2 - 1)G_{z_m}G_{z_l}P_{z_m z_l} = \\ &\quad = -\alpha(1 - z_n^2 - G^2)^{-1/2}\left[1 + G_{z_n}^2 - (z_n G_{z_n} - G)^2\right], \\ 3)\quad &|G_{z_n z_m}| = 0, \\ 4)\quad &|P_{z_n z_m}| = 0, \\ 5)\quad &P_{z_1 z_1}G_{z_2 z_2} + P_{z_2 z_2}G_{z_1 z_1} - 2P_{z_1 z_2}G_{z_1 z_2} = 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где $\Delta = \frac{\partial}{\partial z_1^2} + \frac{\partial}{\partial z_2^2}$.

Из третьего и четвертого уравнений системы (2.32) следует, что существуют такие дважды непрерывно-дифференцируемые функции R, Q, для которых [12, 15]

$$G_{z_2} = R(G_{z_1}), \quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}). \tag{2.33}$$

Подставляя соотношения (2.33) в пятое уравнение из (2.32), имеем

$$P_{z_1 z_1}Q_{z_1 z_1}(\dot{R} - \dot{Q})^2 = 0. \tag{2.34}$$

Далее необходимо отдельно рассмотреть следующие возможности:

I. $P_{z_1 z_1}G_{z_1 z_1} \neq 0$.

II. $P_{z_1 z_1} = G_{z_1 z_1} = 0$.

III. $P_{z_1 z_1} = 0, \quad G_{z_1 z_1} \neq 0$.

IV. $P_{z_1 z_1} \neq 0, \quad G_{z_1 z_1} = 0$.

В случае I из (2.34) немедленно следует, что $\dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1})$. Если $\ddot{Q} \neq 0$, то в силу (2.33) имеем цепочки равенств

$$\begin{aligned}
&P_{z_1z_1} = \ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}G_{z_1z_1},\\
&P_{z_1z_2} = \dot{Q}P_{z_1z_1} = \dot{R}\ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}G_{z_1z_1},\\
&P_{z_2z_2} = \dot{Q}^2P_{z_1z_1} = \dot{R}^2\ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}G_{z_1z_1}.
\end{aligned}$$

С учетом этих соотношений система ДУЧП (2.32) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
1)\quad &\delta \equiv (1+\dot{R}^2)(1-G^2) - (z_1 + z_2\dot{R})^2 + (1-z_n^2)(\dot{R}G_{z_1} - R)^2 + \\
&\quad + 2G(z_1\dot{R} - z_2)(\dot{R}G_{z_1} - R) = 0,\\
2)\quad &\ddot{R}(\ddot{Q})^{-1}\delta G_{z_1z_1} = -\alpha(1 - z_n^2 - G^2)^{-1/2} \times \\
&\quad \times \left[1 + G_{z_1}^2 + R^2 - (z_1G_{z_1} + z_2R - G)^2\right],\\
3)\quad &G_{z_2} = R(G_{z_1}),\\
4)\quad &P_{z_2} = Q(P_{z_1}),\\
5)\quad &\dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1}).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Из первых двух уравнений системы (2.35) следует, что

$$\alpha\left[1 + G_{z_1}^2 + R^2 - (z_1G_{z_1} + z_2R - G)^2\right] \equiv \alpha\left[1 + G_{z_n}^2 - (z_nG_{z_n} - G)^2\right] = 0.$$

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$1 + G_{z_n}^2 + (z_nG_{z_n} - G)^2 = 0.$$

В переменных v_n, $w(v_1, v_2)$ это соотношение имеет вид

$$1 + w_{v_n}^2 + (v_nw_{v_n} - w)^2 = 0. \tag{2.36}$$

Подставляя равенство (2.36) в (1.42), получаем следующую систему ДУЧП на функции w, Φ:

$$\begin{aligned}
1)\quad &(v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})w_{v_nv_m} = 0,\\
2)\quad &\det\|w_{v_nv_m}\| = 0,\\
3)\quad &(v_n\tau + w_{v_n})(v_m\tau + w_{v_m})\Phi_{v_nv_m} = 0,\\
4)\quad &\det\|\Phi_{v_nv_m}\| = 0,\\
5)\quad &\Phi_{v_1v_1}w_{v_2v_2} + \Phi_{v_2v_2}w_{v_1v_1} - 2\dot{\Phi}_{v_1v_2}w_{v_1v_2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Из (2.36), (2.37) вытекает, что определитель (1.39) равен нулю. Пришли к противоречию, источником которого является предположение о том, что $\alpha \neq 0$. Следовательно, параметр α с необходимостью равен нулю.

Пусть теперь $\ddot{Q} = 0$ или $Q = \lambda_0P_{z_1} + \lambda_1$, где $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}^1$. Так как $\dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1}) = \lambda_0$, то $R = \lambda_0G_{z_1} + \lambda_2$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}^1$. Следовательно, функции P, G удовлетворяют соотношениям вида

$$P_{z_2} = \lambda_0P_{z_1} + \lambda_1, \quad G_{z_2} = \lambda_0G_{z_1} + \lambda_2. \tag{2.38}$$

Легко видеть, что при $\lambda_0 \neq \pm i$ соотношения (2.38) с помощью вращений из группы $O(2)$ могут быть приведены к виду

$$P_{z_1} = \lambda_1, \quad G_{z_1} = \lambda_2$$

или $P_{z_1z_1} = G_{z_1z_1} = 0$. Но эти равенства противоречат предположению I.

Если $\lambda_0 = i$, то общее решение системы (2.38) может быть записано в виде

$$P = \frac{1}{2}\mu_1 z^* + f(z), \quad G = \frac{1}{2}\mu_2 z^* + g(z),$$

где f, g — произвольные гладкие функции; $\mu_n = -i\lambda_n$, $z = z_1 + iz_2$, $z^* = z_1 - iz_2$.

Подставляя эти выражения в уравнения 1), 2) из (2.32), имеем

$$\begin{aligned}&\ddot{g}(z^2 + 2\mu_2 zg + \mu_2^2) = 0,\\ &\ddot{f}(z^2 + 2\mu_2 zg + \mu_2^2) = \alpha\left[1 - zz^* - \left(\frac{1}{2}\mu_2 z^* + g\right)^2\right]^{-1/2} \times\\ &\quad\times\left[1 + 2\mu_2\dot{g} - (z\dot{g} - g)^2\right].\end{aligned} \tag{2.39}$$

Так как по условию I $G_{z_1z_1} \neq 0$, то $\ddot{g} \neq 0$. Следователъно, выполнено равенство

$$z^2 + 2\mu_2 zg + \mu_2^2 = 0, \tag{2.40}$$

причем $\mu_2 \neq 0$. Разрешая (2.41) относительно функции $g(z)$, имеем

$$g(z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{z}\right). \tag{2.41}$$

Функция (2.41) тождественно удовлетворяет равенству

$$1 + 2\mu_2\dot{g} - (z\dot{g} - g)^2 = 0,$$

из которого вытекает справедливость соотношения

$$1 + G_{z_n}^2 - (z_n G_{z_n} - G)^2|_{G=\frac{1}{2}\mu_2 z^* + g(z)} = 1 + 2\mu_2\dot{g} - (z\dot{g} - g)^2 = 0.$$

Возвращаясь к переменным v_n, $w(v_1, v_2)$, переписываем это равенство в виде

$$1 + w_{v_n}^2 + (v_n w_{v_n} - w)^2 = 0.$$

Из полученного соотношения в силу уравнений (1.42) следует, что определитель (1.39) равен нулю. Пришли к противоречию.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что случай $\lambda_0 = -i$ также приводит к противоречию.

Рассмотрим теперь случай II. Подставляя в уравнения 3),4) из (2.32) равенства $P_{z_1z_1} = 0$, $G_{z_1z_1} = 0$, имеем

$$P_{z_1z_2} = G_{z_1z_2} = 0,$$

откуда

$$P = \lambda_1 z_1 + f(z_2), \quad G = \lambda_2 z_1 + g(z_2). \tag{2.42}$$

В (2.42) $f, g \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции; $\lambda_n \in \mathbb{C}^1$.

Подставляя выражения (2.42) в остальные уравнения системы (2.32), убеждаемся в том, что пятое уравнение выполняется тождественно, а первое и второе представляются в виде

$$\begin{aligned}&1)\quad \ddot{g}\left[(1 + \lambda_2^2)(1 - z_2^2) - g^2\right] = 0,\\ &2)\quad \ddot{f}\left[(1 + \lambda_2^2)(1 - z_2^2) - g^2\right] = -\alpha\left[1 - z_n^2 - (\lambda_2 z_1 + g)^2\right]^{-1/2} \times\\ &\qquad\times\left[1 + \lambda_2^2 + \dot{g}^2 - (z_2\dot{g} - g)^2\right].\end{aligned} \tag{2.43}$$

Если $\alpha \neq 0$, то необходимым условием совместности системы (2.43) является требование, чтобы правая часть уравнения 2) не зависела от z_1. Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях z_1, имеем

$$1 + \lambda_2^2 = 0, \quad g = 0.$$

Следовательно, выполнено соотношение

$$1 + G_{z_n}^2 - (z_n G_{z_n} - G)^2|_{G=\lambda_2 z_1 + g(z_2)} = 1 + \lambda_2^2 + \dot{g}^2 - (z_2\dot{g} - g)^2 = 0,$$

откуда в силу уравнений (1.42) вытекает равенство нулю определителя (1.39). Итак, мы пришли к противоречию, источником которого является предположение о том, что $\alpha \neq 0$. Следовательно, параметр α с необходимостью равен нулю.

Обратимся к случаю III. При $G_{z_1z_1} \neq 0$, $P_{z_1z_1} = 0$ из четвертого и пятого уравнений системы ДУЧП (2.32) следует, что

$$P_{z_1z_2} = P_{z_2z_2} = 0.$$

Подстановка полученных результатов в уравнение 2) из (2.32) приводит к такому соотношению

$$\alpha\left[1 + G_{z_n}^2 - (z_n G_{z_n} - G)^2\right] = 0.$$

Второй сомножитель не равен нулю, так как в противном случае определитель (1.39) равен нулю, что невозможно. Следовательно, $\alpha = 0$.

Нам осталось рассмотреть случай IV. При $G_{z_1z_1} = 0$, $P_{z_1z_1} \neq 0$ из третьего и пятого уравнений система (2.32) вытекают такие соотношения:

$$G_{z_1z_2} = G_{z_2z_2} = 0,$$

откуда

$$G = \lambda_n z_n + \lambda_0, \quad \lambda_n, \lambda_0 \in \mathbb{C}^1. \tag{2.44}$$

Кроме того, из четвертого уравнения систему (2.32) следует существование дважды непрерывно-дифференцируемой функции $Q(P_{z_1})$ такой, что

$$P_{z_2} = Q(P_{z_1}). \tag{2.45}$$

Подставляя полученные результаты в уравнения 1), 2) из (2.32), приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}\Big\{&(1+\dot{Q}^2)\left[1 - (\lambda_n z_n + \lambda_0)^2\right] - (z_1 + z_2\dot{Q})^2 + (1 - z_n^2)(\lambda_1\dot{Q} - \lambda_2)^2 + \\ &+ 2(\lambda_n z_n + \lambda_0)(z_1\dot{Q} - z_2)(\lambda_1\dot{Q} - \lambda_2)\Big\}P_{z_1z_1} = \\ &= -\alpha\left[1 - z_n^2 - (\lambda_n z_n + \lambda_0)^2\right]^{-1/2}(1 + \lambda_n^2 - \lambda_0^2),\end{aligned} \tag{2.46}$$

причем множитель $1 + \lambda_n^2 - \lambda_0^2$ отличен от нуля, так как в противном случае определитель (1.39) равен нулю, что невозможно.

Используя вращения из группы $O(2)$, выражение (2.44) можно преобразовать к виду

$$\text{a)} \quad G = \lambda z_1 + \lambda_0, \quad \text{при} \quad \lambda_n^2 \neq 0; \tag{2.47a}$$

$$\text{б)}\quad G=\lambda(z_1+i\lambda_2)+\lambda_0,\quad \text{при}\ \ \lambda_n^2=0; \tag{2.47б}$$

Пусть G задается формулой (2.47а). Подставляя $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=0$ в (2.46), имеем

$$\begin{aligned}&\Big\{(1+\dot{Q}^2)\left[1-(\lambda z_1+\lambda_0)^2\right]-(z_1+z_2\dot{Q})^2+\\&\quad+\lambda^2(1-z_n^2)\dot{Q}^2+2\lambda(\lambda z_1+\lambda_0)(z_1\dot{Q}-z_2)\dot{Q}\Big\}P_{z_1z_1}=\\&\quad=-\alpha\left[1-z_n^2-(\lambda z_1+\lambda_0)^2\right]^{-1/2}(1+\lambda^2-\lambda_0^2).\end{aligned} \tag{2.48}$$

Совершим в ДУЧП (2.45), (2.48) преобразование Эйлера [17]

$$\begin{aligned}&y_1=P_{z_1},\quad y_2=z_2,\quad H=z_1P_{z_1}P_{z_1}-P,\quad H_{y_1}=z_1,\quad H_{y_2}=-P_{z_2},\\&H_{y_1y_1}=(P_{z_1z_1})^{-1},\quad H_{y_1y_2}=-P_{z_1z_2}(P_{z_1z_1})^{-1},\\&H_{y_2y_2}=-\det\|P_{z_nz_m}\|(P_{z_1z_1})^{-1}.\end{aligned} \tag{2.49}$$

В новых переменных y_n, $H(y_1,y_2)$ уравнение (2.45) линеаризуется

$$H_{y_2}=-Q(y_1),$$

откуда

$$H=-Q(y_1)y_2+Z(y_1), \tag{2.50}$$

где $Z(y_1)\in C^2(\mathbb{C}^1,\mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя выражение (2.50) в ДУЧП (2.48), записанное в переменных y_n, $H(y_1,y_2)$, имеем

$$\begin{aligned}&(-\ddot{Q}_{y_2}+\ddot{Z})^{-1}\left[1+(1+\lambda^2-\lambda_0^2)\dot{Q}^2-\dot{Z}^2-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2\right]=\\&=-\alpha\left[1-y_2^2-(y_2\dot{Q}-\dot{Z})^2(1+\lambda^2)+2\lambda_0\lambda(y_2\dot{Q}-\dot{Z})-\lambda_0^2\right]^{-1/2}(1+\lambda^2-\lambda_0^2).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Предположим, что величина

$$\Delta=1+(1+\lambda^2-\lambda_0^2)\dot{Q}^2-\dot{Z}^2-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2$$

не равна нулю. Тогда в силу независимости функций Q, Z от y_2, необходимым условием расщепления уравнения (2.15) попеременной y_2 является требование, чтобы выражение под корнем было точным квадратом. Непосредственный подсчет показывает, что детерминант этого выражения в точности равен Δ. Следовательно, при $\Delta\neq 0$, уравнение (2.15) не имеет решений. Из этого заключаем, что необходимым условием совместности уравнения (2.51) является равенство

$$1+(1+\lambda^2-\lambda_0^2)\dot{Q}^2-\dot{Z}^2-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2=0. \tag{2.52}$$

Сравнивая (2.52) и (2.51), приходим к выводу, что $\alpha=0$.

Пусть теперь G задается формулой (2.47б). Переходя в уравнении (2.46) при $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=i\lambda$ к новым переменным y_n, $H(y_1,y_2)$ согласно формул (2.49) и подставляя в полученное соотношение выражение (2.50), имеем

$$\begin{aligned}&(-\ddot{Q}_{y_2}+\ddot{Z})^{-1}\Big[(1+\dot{Q}^2)(1-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2)-\dot{Z}^2+\\&\quad+\lambda^2(\dot{Q}-i)^2(1-\dot{Z}^2)+2\lambda(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)\dot{Q}\dot{Z}(\dot{Q}-i)\Big]=\\&\quad=-\alpha\left[1-y_2^2-(\dot{Q}_{y_2}-\dot{Z})^2-(\lambda_{y_2}(i-\dot{Q})+\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2\right]^{-1/2}(1-\lambda_0^2),\end{aligned} \tag{2.53}$$

причем $1-\lambda_0^2\neq 0$.

Предположим, что величина

$$\tilde{\Delta} = (1+\dot{Q}^2)[1-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2] - \dot{Z}^2 + \\ + \lambda^2(\dot{Q}-i)^2)(1-\dot{Z}^2) + 2\lambda(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)\dot{Q}\dot{Z}(\dot{Q}-i) \tag{2.54}$$

отлична от нуля. Тогда, в силу независимости функций Q, Z от y_2, необходимым условием расщепления уравнения (2.53) по y_2 является требование, чтобы выражение под корнем было точным квадратом. Непосредственный подсчет показывает, что детерминант этого выражения равен $\tilde{\Delta}$. Отсюда заключаем, что необходимым условием совместности уравнения (2.53) является равенство $\tilde{\Delta} = 0$. Сравнивая это соотношение с (2.53), приходим к выводу, что $\alpha = 0$.

Таким образом, доказано, что переопределенная система ДУЧП (2.32) (а, следовательно, и (1.38)) может быть совместной только тогда, когда $\alpha = 0$.

Ввиду того, что среди всех редуцированных систем уравнений (1.38), (1.40)–(1.44), только системы (1.38), (1.40) содержат числовые параметры α, β, из всего вышеизложенного вытекает следующее утверждение: необходимым условием совместности уравнений (1.2) является такое соотношение:

$$F(u) = N(u+c)^{-1}, \tag{2.55}$$

где $c \in \mathbb{C}^1$ — произвольная константа, $N = 0, 1, 2, 3$.

Но равенство (2.55) является также и достаточным условием совместности системы ДУЧП (1.2), так как последняя имеет при $F(u)$ вида (2.55) следующие решения:

$$\begin{aligned}
&N=0, \quad u = -c + x_0; \\
&N=1, \quad u = -c + \left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2}; \\
&N=2, \quad u = -c + \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}; \\
&N=3, \quad u = -c + \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Подставляя (2.55) в (2.2) и совершая замену переменных, обратную к (1.1), приходим к ДУЧП вида (1а,б), где функции $F_1(u)$, $F_2(u)$ задаются выражениями (2.1). Теорема доказана.

§ 3. Интегрирование уравнений Даламбера–Гамильтона

В основе предлагаемого нами подхода к интегрированию переопределенной системы ДУЧП (1.2) также лежит метод нелокальных (контактных) преобразований. Явный вид используемых контактных преобразований существенно зависит от ранга r матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$, поэтому следует отдельно исследовать каждый из случаев $r = 1, 2, 3$.

I. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 3$. Как было установлено в §§ 1, 2, при таком условии система (1.2) совместна, если и только если $F(u) = 3(u+c)^{-1}$, причем ее общее решение задается следующими формулами:

$$u + c = x_0(1+v_a^2)^{1/2} + x_a v_a + \Phi(v_1, v_2, v_3), \tag{3.1}$$

где $v_a = v_a(x)$ — гладкие функции, определяемые такими соотношениями

$$x_a + x_0 v_a (1+v_b^2)^{1/2} + \Phi_{v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3}, \tag{3.2}$$

а скалярная функция $\Phi(v)$ удовлетворяет переопределенной системе ДУЧП (1.38).

В предыдущем параграфе система ДУЧП (1.38) с помощью локальной замены переменных (2.2) была приведена к виду (2.3). Далее следует отдельно исследовать две возможности:

$$1)\quad \operatorname{rank}\|p_{z_a z_b}\| = 1,$$
$$2)\quad \operatorname{rank}\|p_{z_a z_b}\| = 2,$$

Пусть имеет место 1). Если $p_{z_3z_3} = 0$, то из формул (2.5) сразу же следует, что $p_{z_3z_n} = p_{z_nz_m} = 0$, $n, m = 1, 2$, откуда

$$p(z) = c_a z_a + c_0, \quad c_\mu \in \mathbb{C}^1. \tag{3.3}$$

Если $p_{z_3z_3} \neq 0$, то система (2.3) после преобразования Эйлера (2.7) переписывается в виде (2.8), причем $\alpha = 0$. Общее решение уравнений (2.8) задается формулой (2.9), где $R_n(y_3)$, $Q(y_3)$ — произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие, согласно (2.10), следующему соотношению:

$$1 + \dot{R}_n^2 - \dot{Q}^2 = 0, \tag{3.4}$$

причем функции $\ddot{R}_n$, $\ddot{Q}$ одновременно не равны нулю.

Возвращаясь по формулам (2.7) к переменным z_n, $p(z)$, имеем

$$p(z) = R_n(\tau) z_n + \tau z_3 - Q(\tau), \tag{3.5}$$

где $\tau = \tau(z_1, z_2)$ определяется из соотношения

$$z_3 + \dot{R}_n(\tau) z_n - \dot{Q}(\tau) = 0, \tag{3.6}$$

$R_n(\tau), Q(\tau) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, удовлетворяющие (3.4).

Переписывая формулы (3.3)–(3.6) в переменных v_a, $\Phi(v)$, имеем следующие классы точных решений системы (1.38):

$$\begin{aligned}
&1)\quad \Phi(v) = c_a v_a + c_0(1 + v_a^2)^{1/2};\\
&2)\quad \Phi(v) = R_n(\tau) v_n + \tau v_3 - (1 + v_a^2)^{1/2} Q(\tau),\\
&\qquad 0 = \dot{R}_n(\tau) v_n + v_3 - (1 + v_a^2)^{1/2} \dot{Q}(\tau),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $c_\mu \in \mathbb{C}^1$ — произвольные константы, $R_n(\tau)$, $Q(\tau)$ — произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие соотношению (3.4).

Пусть теперь имеет место случай 2). Тогда система ДУЧП (2.3) после преобразования Эйлера (2.15) принимает вид (2.16). Общее решение уравнений (2.16) задается формулой (2.17), где $R(y_1, y_2)$, $Q(y_1, y_2)$ — произвольные решения одной из систем ДУЧП (2.20), (2.21) при $\alpha = 0$, такие, что $\det\|iQ_{y_ny_m} - y_3 R_{y_ny_m}\| \neq 0$. В силу последнего условия величины $1 + R_{y_n}^2$, $1 + Q_{y_n}^2$ одновременно не равны нулю и, следовательно, обе системы ДУЧП (2.20), (2.21) при $\alpha = 0$ эквивалентны системе трех уравнений вида

$$\begin{aligned}
&1)\quad (1 + Q_{y_n}^2)(1 + R_{y_m}^2) - (R_{y_n} Q_{y_n})^2 = 0,\\
&2)\quad (1 + Q_{y_n}^2 + R_{y_n}^2)\Delta Q - (R_{y_n} R_{y_m} + Q_{y_n} Q_{y_m}) Q_{y_ny_m} = 0,\\
&3)\quad (1 + Q_{y_n}^2 + R_{y_n}^2)\Delta R - (R_{y_n} R_{y_m} + Q_{y_n} Q_{y_m}) R_{y_ny_m} = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя соотношение (2.22), нетрудно показать, что третье уравнение из (3.8) является следствием первых двух. Система ДУЧП

$$\begin{aligned} &1) \quad (1+Q_{y_n}^2)(1+R_{y_m}^2)-(R_{y_n}Q_{y_n})^2=0,\\ &2) \quad (1+Q_{y_n}^2+R_{y_n}^2)\Delta Q-(R_{y_n}R_{y_m}+Q_{y_n}Q_{y_m})Q_{y_ny_m}=0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

согласно теоремы Коши–Ковалевской [10, 18] находится в инволюции, и ее общее решение записывается через три произвольные функции от одной переменной.

Возвращаясь согласно формул (2.15), (2.2) к переменным v_a, $\Phi(v)$, получаем следующий класс решений системы (1.38) (при $\alpha=\beta=0$):

$$\Phi(v)=y_nv_n+R(y_1,y_2)v_3-i(1+v_a^2)^{1/2}Q(y_1,y_2), \tag{3.10}$$

где $y_n=y_n(v)$ определяются из соотношений

$$v_n+v_3R_{y_n}-i(1+v_a^2)^{1/2}Q_{y_n}=0, \tag{3.11}$$

а $R,Q\in C^2(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^1)$ — произвольные решения системы ДУЧП (3.9), удовлетворяющие условию (2.19).

Таким образом, в случае, когда ранг матрицы $\|u_{\mu\nu}\|$ равен трем, общее решение уравнений Даламбера–Гамильтона (1.2) с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается неявными формулами (3.1), (3.7), (3.10).

II. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\|=2$. Согласно результатов §§ 1, 2, система (1.2) совместна, если и только если $F(u)$ задается одной из формул

$$F(u)=N(u+c)^{-1}, \quad N=0,1,2,$$

причем ее общее решение имеет вид

$$u+c=x_0(1+v_n^2+w^2)^{1/2}+x_nv_n+x_3w+\Phi, \tag{3.12}$$

где $v_n=v_n(x)$ — гладкие функции, определяемые соотношениями

$$x_n+x_3w_{v_n}+x_0(v_n+ww_{v_n})(1+v_n^2+w^2)^{-1/2}+\Phi_{v_n}=0, \quad n=1,2, \tag{3.13}$$

а скалярные функции $w(v_1,v_2)$, $\Phi(v_1,v_2)$ удовлетворяют одной из систем ДУЧП (1.40)–(1.42).

1. $F(u)=0$. В этом случае функции $w(v_1,v_2)$, $\Phi(v_1v_2)$ удовлетворяют системе уравнений (1.40). Эта система согласно теоремы Коши–Ковалевской [10, 18] находится в инволюции, и ее общее решение выражается через три произвольные функции одной переменной.

2. $F(u)=(u+c)^{-1}$. При таком условии функции $w(v_1,v_2)$, $\Phi(v_1v_2)$ удовлетворяют переопределенной системе ДУЧП (1.41). Проинтегрируем сначала первые два уравнения этой системы, совершив в них следующую замену независимых переменных:

$$v_1=R\cos\varphi, \quad v_2=R\sin\varphi. \tag{3.14}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} &1) \quad 1+w_R^2+R^{-2}w_\varphi^2+(R_{w_R}-w)^2=c,\\ &2) \quad (R^{-1}w_{R\varphi}-R^{-2}w_\varphi)^2+w_{RR}(R^{-2}w_{\varphi\varphi}+R^{-1}w_R)=0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $w_R=\partial w/\partial R$, $w_\varphi=\partial w/\partial\varphi$ и т.д.

Дописывая к системе (3.15) два ДУЧП, который получаются из 1) дифференцированием по переменным R, φ, приходим к системе четырех уравнений на $w = w(R, \varphi)$. Исключая из этой системы функции w_φ, $w_{\varphi R}$, $w_{\varphi\varphi}$, имеем

$$\{R[R(Rw_R - w) + w_R]w_{RR}\}^2 = 0. \tag{3.16}$$

Если выполнено равенство

$$R(R_{w_R} - w) + w_R = 0,$$

то $w = \lambda(\varphi)(1 + R^2)^{1/2}$, где $\lambda(\varphi) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подстановка полученного соотношения в первое уравнение системы (3.15) дает такое условие $\lambda^2 = -1$. Но тогда $1 + v_n^2 + w^2 \equiv 1 + R^2 + \lambda^2(1 + R^2) = 0$, что невозможно.

Следовательно, ДУЧП (3.16) эквивалентно уравнению $w_{RR} = 0$, общее решение которого дается формулой

$$w = \lambda_1 R + \lambda_2, \tag{3.17}$$

где $\lambda_n = \lambda_n(\varphi) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

Подставляя (3.17) в уравнение 1) из (3.15) и расщепляя полученное соотношение по степеням R, приходим к системе ОДУ на $\lambda_n(\varphi)$

$$1 + \lambda_n^2 + \dot{\lambda}_1^2 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0.$$

Общее решение выписанной системы дается одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = i(1 + c_2^2)^{1/2} R \sin(\varphi + c_1), \quad \lambda_2 = c_2; \\ &\lambda_1 = c_1 \exp(\pm i\varphi), \quad \lambda_2 = \pm i. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Подстановка выражений (3.18) в (3.17) дает общее решение система ДУЧП (3.15), которое в исходных переменных v_n может быть представлено в виде

$$w = \lambda_n v_n + \lambda_3, \tag{3.19а}$$

где λ_n, λ_3 — произвольные комплексные постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\lambda_n^2 + \lambda_3^2 + 1 = 0. \tag{3.19б}$$

Подставляя (3.19а) в третье и четвертое уравнения системы (1.41), приходим к следующей системе ДУЧП на $\Phi(v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned} &1) \quad \left[1 + v_n^2 + (\lambda_n v_n + \lambda_3)^2\right] \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = \\ &\qquad = (v_n \Phi_{v_n} - \Phi)[(\lambda_3 v_n + \lambda_n)(\lambda_3 v_m + \lambda_m)\Phi_{v_n v_m}], \\ &2) \quad \lambda_3[(\lambda_3 v_n + \lambda_n)(\lambda_3 v_m + \lambda_m)\Phi_{v_n v_m}] = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Если справедливо равенство

$$(\lambda_3 v_n + \lambda_n)(\lambda_3 v_m + \lambda_m)\Phi_{v_n v_m} = 0,$$

то, в силу условия $1 + v_n^2 + w^2 \neq 0$, из первого уравнения системы (3.20) вытекает, что

$$\det \|\Phi_{v_n v_m}\| = 0.$$

Легко видеть, что при этом определитель (1.39) равен нулю. Пришли к противоречию. Следовательно, $\lambda_3 = 0$, и система (3.20) сводится к одному уравнению

$$\left[1 + v_n^2 + (\lambda_n v_n)^2\right] \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = (v_n \Phi_{v_n} - \Phi)\lambda_n \lambda_m \Phi_{v_n v_m}. \tag{3.21}$$

Далее необходимо отдельно рассмотреть два случая

а) $\det \|\Phi_{v_n v_m}\| = 0$,

б) $\det \|\Phi_{v_n v_m}\| \neq 0$.

В случае а) уравнение (3.21) переписывается в виде

$$\begin{aligned} &1) \quad \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = 0, \\ &2) \quad v_n \Phi_{v_n} - \Phi = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Общее решение уравнения 2) из (3.22) задается формулой

$$\Phi = (v_n^2)^{1/2} \Psi(v_1 v_2^{-1}), \tag{3.23}$$

где $\Psi \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Непосредственная проверка показывает, что функция (3.23) тождественно удовлетворяет первому уравнению системы (3.22). Следовательно, формула (3.23) определяет общее решение системы ДУЧП (3.22).

Обратимся теперь к случаю б). Используя преобразования из группы $O(2)$, уравнение (3.21) с дополнительным условием (3.19б) можно привести к виду

$$(1 + v_2^2) \det \|\Phi_{v_n v_m}\| = (\Phi - v_n \Phi_{v_n}) \Phi_{v_1 v_1}. \tag{3.24}$$

Совершим в (3.24) преобразование Лежандра [11, 12]

$$\begin{aligned} &v_n = H_{y_n}, \quad \Phi_{v_n} = y_n, \quad \Phi = y_n H_{y_n} - H, \quad H_{y_1 y_1} = \delta^{-1} \Phi_{v_2 v_2}, \\ &H_{y_2 y_2} = \delta^{-1} \Phi_{v_1 v_1}, \quad H_{y_1 y_2} = -\delta^{-1} \Phi_{v_1 v_2}, \quad \delta = \det \|\Phi_{v_n v_m}\|, \end{aligned} \tag{3.25}$$

откуда

$$1 + H_{y_2}^2 + H H_{y_2 y_2} = 0. \tag{3.26}$$

Уравнение (3.26) интегрируется, его общее решение имеет вид

$$H = \left[-y_2^2 + \Psi_1(y_1) y_2 + \Psi_2(y_1)\right]^{1/2},$$

где $\Psi_n \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

Возвращаясь согласно формул (3.25) к переменным v_n, $\Phi(v)$, получаем общее решение ДУЧП (3.24)

$$\Phi = v_n y_n - (\Psi_1 y_2 + \Psi_2 - y_2^2)^{1/2}, \tag{3.27}$$

где $y_n = y_n(v_1 v_2)$ — гладкие функции, определяемые из соотношений

$$\begin{aligned} &v_1 - \frac{1}{2}(\dot{\Psi}_1 y_2 + \dot{\Psi}_2)(\Psi_1 y_2 + \Psi_2 - y_2^2)^{-1/2} = 0, \\ &v_2 + \frac{1}{2}(2y_2 - \Psi_1)(\Psi_1 y_2 + \Psi_2 - y_2^2)^{-1/2} = 0, \end{aligned}$$

$\Psi_n(y_1) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — производные функции.

3. $F(u) = 2(u+c)^{-1}$. В этом случае функции $w(v_1 v_2)$, $\Phi(v_1, v_2)$ определяются из системы ДУЧП (2.42) при $\alpha = 0$. Последняя с помощью локальной замены переменных (2.31) приводится к виду (2.32) при $\alpha = 0$.

Далее необходимо отдельно рассмотреть такие возможности

а) $P_{z_1 z_1} G_{z_1 z_1} \neq 0$;
б) $P_{z_1 z_1} = G_{z_1 z_1} = 0$;
в) $P_{z_1 z_1} = 0, \quad G_{z_1 z_1} \neq 0$;
г) $P_{z_1 z_1} \neq 0, \quad G_{z_1 z_1} = 0$.

Согласно результатов § 2, в случае а) система (2.32) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
&1)\quad (1+\dot{R}^2)(1-G^2) - (z_1 + z_2\dot{R})^2 + (1-z_n^2)(\dot{R}G_{z_1} - R)^2 + \\
&\qquad + 2G(z_1\dot{R} - z_2)(\dot{R}G_{z_1} - R) = 0, \\
&2)\quad G_{z_2} = R(G_{z_1}), \\
&3)\quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}), \\
&4)\quad \dot{R}(G_{z_1}) = \dot{Q}(P_{z_1}),
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

причем $\ddot{Q} \neq 0$.

Проинтегрируем уравнения 1), 2) с помощью преобразования Эйлера (2.49), где вместо функции $P(z)$ следует подставить $G(z)$. В новых переменных y_n, $H(y)$ уравнение 2) принимает вид

$$H_{y_2} = -R(y_1),$$

откуда

$$H = -R(y_1)y_2 + Z(y_1). \tag{3.29}$$

В (3.29) $Z \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Переписывая первое уравнение системы (3.28) в переменных y_n, $H(y)$ и подставляя в полученное соотношение формулу (3.29), имеем

$$1 + \dot{R}^2 - \dot{Z}^2 + (y_1\dot{R} - R)^2 - (y_1\dot{Z} - Z)^2 - (\dot{R}Z - \dot{Z}R)^2 = 0. \tag{3.30}$$

Возвращаясь к переменным z_n, $G(z)$, получаем общее решение уравнений 1), 2) системы ДУЧП (3.28)

$$G = y_1 z_1 + R(y_1)z_2 - z(y_1), \tag{3.31}$$

где $y_1 = y_1(z_1, z_2)$ — гладкая функция, определяемая неявным соотношением

$$z_1 + \dot{R}(y_1)z_2 - \dot{Z}(y_1) = 0, \tag{3.32}$$

а $R, Q \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, связанные равенством (3.30). Далее, поскольку $\ddot{Q} \neq 0$, то функция $\dot{Q} = \dot{Q}(P_{z_1})$ имеет обратную, которую обозначим символом A. С учетом этого факта уравнения 3), 4) переписываются в виде

$$P_{z_1} = A(\dot{R}(G_{z_1})), \quad P_{z_2} = Q(P_{z_1}) = Q(A(\dot{R}(G_{z_1}))). \tag{3.33}$$

Необходимым и достаточным условием совместности переопределенной системы ДУЧП (3.33) является выполнение равенства

$$\partial P_{z_1}/\partial_{z_2} = \partial P_{z_2}/\partial z_1. \tag{3.34}$$

Так как, в силу уравнения 2) из (3.28), имеют место цепочки равенств

$$\begin{aligned}
\partial P_{z_1}/\partial z_2 &= \dot A(\dot R(G_{z_1}))\ddot R(G_{z_1})G_{z_1z_2} = \dot A(\dot R(G_{z_1}))\ddot R(G_{z_1})\dot R(G_{z_1})G_{z_1z_1},\\
\partial P_{z_2}/\partial z_1 &= \underbrace{\dot Q(A(\dot R(G_{z_1})))}_{\substack{||\\ \dot R(G_{z_1})}}\dot A(\dot R(G_{z_1}))\ddot R(G_{z_1})G_{z_1z_1},
\end{aligned}$$

то условие (3.34) выполнено, т.е. система ДУЧП (3.33) находится в инволюции. Ее общее решение может быть представлено в виде

$$P = \int A(\dot R(G_{z_1}))dz_1. \tag{3.35}$$

Таким образом, формулы (3.30)–(3.33), (3.35) задают общее решение системы ДУЧП (2.32) при $\alpha = 0$, $P_{z_1z_1}G_{z_1z_1} \neq 0$.

Пусть имеет место случай б), т.е. $P_{z_1z_1} = G_{z_1z_1} = 0$. Тогда функции $P(z)$, $G(z)$ имеют вид (2.42), причем $f = f(z_2)$, $g = g(z_2)$ удовлетворяют системе ОДУ (2.43) при $\alpha = 0$. Эта система имеет два класса решений:

$$\begin{aligned}
&1)\quad g = c_1z_2 + c_2, \quad f = c_3z_2 + c_4;\\
&2)\quad g = (1+\lambda_2^2)^{1/2}(1-z_2^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Здесь $f \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, $c_1, \ldots, c_4, \lambda_2$ — произвольные комплексные постоянные.

Подстановка полученных выражений в формулы (2.42) дает общее решение системы ДУЧП (2.32) при $\alpha = 0$, $G_{z_1z_1} = P_{z_1z_1} = 0$, которое задается одним из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
&1)\quad G = c_nz_n + c_3, \quad P = c_{3+n}z_n + c_6;\\
&2)\quad G = (1+c_1^2)^{1/2}(1-z_2^2)^{1/2} + c_1z_1, \quad P = c_2z_1 + f(z_2),
\end{aligned} \tag{3.36}$$

где $c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{C}^1$ — произвольные константы.

Рассмотрим теперь случаи в). Как было установлено в предыдущем параграфе функция $P(z)$ определяется таким соотношением:

$$P = c_nz_n + c_3, \quad c_a \in \mathbb{C}^1. \tag{3.37}$$

При этом уравнения 2), 4), 5) системы (2.32) удовлетворяются тождественно, а общее решение системы ДУЧП 1), 3) задается формулами (3.30)–(3.32).

Нам осталось проинтегрировать систему (2.32) при $G_{z_1z_1} = 0$, $P_{z_1z_1} \neq 0$. В этом случае функция $G(z)$ с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами (2.47а,б). Для того, чтобы получить выражение для функции $P(z)$, необходимо переписать формулу (2.50) в переменных z_n, $P(z)$ согласно (2.49).

В результате имеем

$$P = y_1z_1 + Q(y_1)z_2 - Z(y_1), \tag{3.38}$$

где $y_1 = y_1(z_1, z_2)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$z_1 + \dot{Q}(y_1)z_2 - \dot{z}(y_1) = 0,$$

а $Q, Z \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, удовлетворяющие равенству (2.52) (если $G(z)$ задается формулой (2.47а)) либо равенству

$$\begin{gathered}(1+\dot{Q}^2)\Big[1-(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)^2\Big] - \dot{Z}^2 + \lambda^2(\dot{Q}-i)^2(1-\dot{Z}^2) + \\ + 2\lambda(\lambda\dot{Z}+\lambda_0)(\dot{Q}-i)\dot{Q}\dot{Z} = 0\end{gathered} \tag{3.39}$$

(если $G(z)$ задается формулой (2.47б)).

Таким образом, мы доказали, что общее решение системы ДУЧП (2.32) при $\alpha = 0$, задается формулами ((3.31), (3.35)), (3.36), ((3.37), (3.31)), ((2.47а,б), (3.38)). Для того, чтобы получить общее решение системы (1.42), следует в этих выражениях совершить замену переменных, обратную к (2.31),

$$\begin{aligned}&v_n = z_n(1 - z_m^2 - G^2)^{-1/2},\\&w(v) = G(1 - z_m^2 - G^2)^{-1/2},\\&\Phi(v) = P(1 - z_m^2 - G^2)^{-1/2}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Мы не приводим соответствующие формулы из-за их громоздкости.

III. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 1$. Согласно результатов §§ 1, 2 система (1.2) совместна, если и только если $F(u)$ задается одной из формул

$$F(u) = N(u+c)^{-1}, \quad N = 0, 1,$$

причем ее общее решение, определяемое с точностью до $P(1,3)$-сопряженности, имеет вид

$$u(x) = x_0(1 + w_a^2(v))^{1/2} + x_a w_a(v) + \Phi(v), \tag{3.41}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, которая находится из соотношения

$$x_0 w_a \dot{w}_a (1 + w_b^2)^{-1/2} + x_a \dot{w}_a + \dot{\Phi} = 0, \tag{3.42}$$

а $\Phi = \Phi(v), w_a = w_a(v) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, удовлетворяющие одной из систем ОДУ (1.43), (1.44).

1. $F(u) = 0$. Вводя сферическую систему координат

$$\begin{aligned}&w_1 = \rho(v)\cos\varphi(v)\cos\theta(v),\\&w_2 = \rho(v)\sin\varphi(v)\cos\theta(v),\\&w_3 = \rho(v)\sin\theta(v),\end{aligned}$$

переписываем систему (1.43) в виде

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2 = -(v^2-1)^{-2},\\&\rho = (v^2-1)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Следовательно, общее решение уравнений (1.43) задается формулами

$$\begin{aligned}&w_1 = (v^2-1)^{1/2}\cos\varphi\cos\theta, \quad w_2 = (v^2-1)^{1/2}\sin\varphi\cos\theta,\\&w_3 = (v^2-1)^{1/2}\sin\theta,\end{aligned} \tag{3.43$'$}$$

где $\varphi(v)$, $\theta(v)$ — произвольные гладкие функции, связанные соотношением (3.43).

2. $F(u) = (u+c)^{-1}$. Умножая первое уравнение системы (1.44) на $\dot{w}_a$ и суммируя полученное равенство по a, приходим к ОДУ на функцию $f(v) \equiv \dot{w}_a^2(v) - 1$

$$\dot{f} + 2vf^2 = 0,$$

откуда $f(v) = (v^2 + c_0)^{-1}$, $c_0 \in \mathbb{C}^1$. С учетом этого система (1.44) перепишется в виде

$$\ddot{w}_a = -(v^2 + c_0)^{-1}(v\dot{w}_a - w_a), \quad \ddot{\Phi} = -(v^2 + c_0)^{-1}(v\dot{\Phi} - \Phi), \tag{3.44а}$$

$$\dot{w}_a^2 = (v^2 + c_0)^{-1}, \quad w_a^2 = v^2 - 1, \tag{3.44б}$$

Согласно [19], общее решение ОДУ

$$(v^2 + c_0)\ddot{h}(v) + v\dot{h}(v) - h(v) = 0,$$

задается следующими формулами:

1) $c_0 \neq 0, \quad h = c_1 v + c_2(v^2 + c_0^2)^{1/2}, \quad c_n \in \mathbb{C}^1,$
2) $c_0 = 0, \quad h = c_1 v + c_2 v^{-1}, \quad c_n \in \mathbb{C}^1,$

Пусть вначале $c_0 \neq 0$, тогда общее решение уравнений (3.44а) имеет вид

$$w_a(v) = c_a v + d_a(v^2 + c_0^2)^{1/2}, \quad \Phi(v) = \lambda_1 v + \lambda_2(v^2 + c_0^2)^{1/2}, \tag{3.45}$$

где $c_a, d_a, \lambda_n \in \mathbb{C}^1$ — произвольные постоянные. Подставляя (3.45) в соотношения (3.44б) и расщепляя полученные равенства по степеням величины v, имеем

$$c_a d_a = 0, \quad c_a^2 + d_a^2 = 1, \quad c_a^2 = 1 + c_0^{-2}. \tag{3.46}$$

Используя преобразования из группы вращений O(3), векторы $\vec{c}$, $\vec{d}$, удовлетворяющие (3.46), можно привести к виду

$$\vec{c} = c_0^{-1}(1 + c_a^2)^{1/2}(1, 0, 0), \quad \vec{d} = ic_0^{-1}(0, 1, 0). \tag{3.47}$$

Подставляя формулы (3.45), (3.47) в (3.41), (3.42), имеем

$$u(x) = (x_0 + \lambda_1)v + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2}vx_1 + i(v^2 + c_0^2)^{1/2}(x_2 - i\lambda_2 c_0)\right],$$
$$x_0 + \lambda_1 + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2}x_1 + iv(v^2 + c_0^2)^{-1/2}(x_2 - i\lambda_2 c_0)\right] = 0.$$

С помощью сдвигов по переменным x_0, x_2 это решение приводится к виду

$$u(x) = vx_0 + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2}vx_1 + i(v^2 + c_0^2)^{1/2}x_2\right], \tag{3.48}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, определяемая соотношением

$$x_0 + c_0^{-1}\left[(1 + c_0^2)^{1/2}x_1 + iv(v^2 + c_0^2)^{-1/2}x_2\right] = 0.$$

Обратимся теперь к случаю $c_0 = 0$. При таком условии общее решение системы ОДУ (3.44а) имеет вид

$$w_a = c_a v + d_a v^{-1}, \quad \Phi = \lambda_1 v + \lambda_2 v^{-1}, \tag{3.49}$$

где $c_a, d_a, \lambda_n \in \mathbb{C}^1$ — произвольные постоянные.

Подстановка полученных выражений в (3.44б) дает систему алгебраических уравнений на c_a, d_a

$$c_a^2 = 1, \quad c_a d_a = -\frac{1}{2}, \quad d_a^2 = 0.$$

Общее решение этих соотношений о точностью до $O(3)$-сопряженности можно представить в виде

$$\vec{c} = (1, 0, 0), \quad \vec{d} = -\frac{1}{2}(1, i, 0). \tag{3.50}$$

Подставляя формулы (3.49), (3.50) в (3.41), (3.42), получаем следующий класс решений системы ДУЧП (1.2):

$$u(x) = (x_0 + x_1 + \lambda_1)v - \frac{1}{2}v^{-1}(x_1 + ix_2 - 2\lambda_2),$$
$$x_0 + x_1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}v^{-2}(x_1 + ix_2 - 2\lambda_2) = 0.$$

С помощью сдвигов по переменным x_0, x_2 это решение приводится к виду

$$u(x) = (x_0 + x_1)v - \frac{1}{2}v^{-1}(x_1 + ix_2), \tag{3.51}$$

где $v = v(x)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$x_0 + x_1 + \frac{1}{2}(x_1 + ix_2)v^{-2} = 0.$$

Таким образом, при условии $\operatorname{rank}\|u_{\mu\nu}\| = 1$ общее решение системы ДУЧП (1.2) с точностью до $P(1,3)$-сопряженности задается формулами (3.43′), (3.48), (3.51).

Нами получено полное описание решений системы ДУЧП Даламбера–Гамильтона (1.2). В ряде случаев удается разрешить неявные соотношения, с помощью которых задаются решения, относительно функции $u(x)$ и тем самым построить решение уравнений (1.2) в явном виде.

В качестве примера рассмотрим решение системы ДУЧП (1.2), определяемое неявными формулами (3.1), (3.2), (3.7). Подставляя выражение $\Phi = c_a v_a + c_0(1 + v_b^2)^{1/2}$ в равенства (3.1), (3.2), имеем

$$u + c = \tilde{x}(1 + v_a^2)^{1/2} + \tilde{x}_a v_a, \quad \tilde{x}_a + \tilde{x}_0(1 + v_b^2)^{-1/2} = 0, \tag{3.52}$$

где $\tilde{x}_\mu = x_\mu + c_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$.

Разрешая последние три уравнения этой системы относительно функций $v_a = v_a(x)$, имеем

$$v_a(x) = -\tilde{x}_a(\tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu)^{-1/2}, \quad a = \overline{1,3}.$$

Подставляя полученный результат в первое уравнение из (3.52), приходим к точному решению системы ДУЧП Даламбера–Гамильтона

$$u + c = (\tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu)^{1/2} \equiv \left[(x_\mu + c_\mu)(x^\mu + c^\mu)\right]^{1/2},$$

которое удовлетворяет уравнениям (1.2) при $F(u) = 3(u + c)^{-1}$.

Ниже приводятся некоторые другие классы точных решений системы уравнений Даламбера–Гамильтона, полученные аналогичным образом,

$$\underline{F(u) = 3(u+c)^{-1}}:$$
$$(u+c)^2 - \tilde{x}_\mu \tilde{x}^\mu = (\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3) w\left((\tilde{x}_0+\tilde{x}_3)(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2)^{-1}\right) - $$
$$- (\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2) \int^{(\tilde{x}_0+\tilde{x}_3)(\tilde{x}_1+i\tilde{x}_2)^{-1}} z\dot{w}(z)dz,$$
$$\left[\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \left(1 + i\left((u+c)^2 + \tilde{x}_3^2\right)^{1/2}\right)^2\right]^{1/2} =$$
$$= \tilde{x}_1 \cos\left\{\left[\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \left(1 + i\left((u+c)^2 + \tilde{x}_3^2\right)^{1/2}\right)^2\right]^{1/2} - \tilde{x}_0\right\} -$$
$$- \tilde{x}_2 \sin\left\{\left[\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \left(1 + i\left((u+c)^2 + \tilde{x}_3^2\right)^{1/2}\right)^2\right]^{1/2} - \tilde{x}_0\right\};$$

$$\underline{F(u) = 2(u+c)^{-1}}:$$
$$(u+c)^2 = \tilde{x}_0 - \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2, \quad -(u+c)^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2;$$

$$\underline{F(u) = (u+c)^{-1}}:$$
$$(u+c)^2 = [\tilde{x}_0 + w_1(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2)]^2 - [\tilde{x}_3 + w_2(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2)]^2,$$
$$-(u+c)^2 = [\tilde{x}_1 + w_1(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3)]^2 + [\tilde{x}_2 + w_2(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3)]^2,$$

$$\underline{F(u) = 0}:$$
$$i(u+c) = \tilde{x}_1 \cos w_1(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3) + \tilde{x}_2 \sin w_1(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3) + w_2(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_3),$$
$$\tilde{x}_1 \sin w(u + c + \tilde{x}_0) + \tilde{x}_2 \cos w(u + c + \tilde{x}_0) + i\tilde{x}_3 = 0,$$
$$\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 \sin w_1(i(u+c) + \tilde{x}_3) + \tilde{x}_2 \cos w_1(i(u+c) + \tilde{x}_3) + w_2(i(u+c) + \tilde{x}_3) = 0.$$

Здесь $\tilde{x}_\mu = x_\mu + c_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$; $c_\mu \in \mathbb{C}^1$ — произвольные постоянные; $w, w_1, w_2 \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

В заключение кратко остановимся на геометрических свойствах решений систему ДУЧП Даламбера–Гамильтона (1.2). Для этого нам понадобятся следующие обозначения: $S(u) = \{x \in R(1,3) : u(x) = 0\}$ — поверхность уровня решения $u = u(x)$ системы (1.2); $U = \|g_{\mu\nu} u_{x_\mu} x_\nu\|^3_{\mu,\nu=0}$; $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x)$, $\mu = \overline{0,3}$ — собственное значение матрицы U.

Поскольку определитель матрицы U равен нулю, то одно из ее собственных значений (скажем λ_0) равно нулю. Исходя из общей теории поверхностей, можно сказать, что величины λ_1, λ_2, λ_3 — это главные кривизны поверхности $S(u)$ (см., например, [7]).

Замечательным является то обстоятельство, что в рассматриваемом случае эти кривизны вычисляются в явном виде. Согласно [1, 2], на решениях системы (1.2) тождественно выполнены следующие равенства:

$$\operatorname{Tr} U^a = (-1)^{a-1}[(a-1)!]^{-1} F^{(a-1)}(u), \quad a = \overline{1,3}, \tag{3.53}$$

где $F^{(r)} \equiv d^r F/du^r$.

Подставляя в (3.53) выражение $F(u) = N(u+c)^{-1}$, имеем

$$\operatorname{Tr} U^a = N(u+c)^{-a}, \quad a = \overline{(1,3)}. \tag{3.54}$$

С другой стороны, из общей теории матриц известно, что собственные значения матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lambda_0^a + \lambda_1^a + \lambda_2^a + \lambda_3^a = \operatorname{Tr} U^a, \quad a = \overline{1,3}. \tag{3.55}$$

Из формул (3.54), (3.55) заключаем, что главные кривизны λ_a поверхности $S(u)$, удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\lambda_1^a + \lambda_2^a + \lambda_3^a = Nc^{-a}, \quad a = \overline{1,3}.$$

общее решение которых задается формулами

$$\begin{aligned}
&1) \quad N = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\\
&2) \quad N = 1, \quad \lambda_1 = c^{-1}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\\
&3) \quad N = 2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = c^{-1}, \quad \lambda_3 = 0;\\
&4) \quad N = 3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = c^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Таким образом, главные кривизны поверхностей уровня решений системы ДУЧП Даламбера–Гамильтона постоянны и задаются формулами (3.56).

Следовательно, с геометрической точки зрения имеется четыре неэквивалентных типа решений системы (1.2).

1. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.
2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3-4, 113–115.
3. Бейтмен Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, М., Физматгиз, 1958, 179 с.
4. Картан Э., Семейства изопараметрических поверхностей в пространствах постоянной кривизны, Собр. соч., т. 2, 1431–1445.
5. Соболев С.Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, *Труды физико-математического ин-та им. В.А. Стеклова*, 1934, **5**, 259–264.
6. Collins C.B., Complex potential equations. I. A tecknique for solution, *Proc. Camb. Ph. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.
7. Cieciura G., Grundland A., A certain class of solutions of the nonlinear wave equation, *Math. Phys.*, 1984, **25**, № 12, 3460–3469.
8. Фущич В.И., Жданов Р.З., Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения, Киев, Наук., думка, 1991, 250 с.
9. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On the reduction and some new exact solutions of the non-linear Dirac and Dirac–Klein–Gordon equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, **21**, № 1, L5–L9.
10. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, в 2 т., М.–Л., ГИТТЛ, 1951, 476 с., 544 с.
11. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, New York, Acad. Press, 1965, V. 1, 511 p., 1972, V. 2, 301 p.
12. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 53 с.

13. Жданов Р.З., О линеаризации и общем решении двухмерных нелинейных уравнений Дирака–Гейзенберга и Максвелла–Дирака, *Мат. физика и нелин. мех.*, 1989, вып. II, 43–46.

14. Lie S., Vorlesungen über continuerliche Gruppen, Leipzig, Teubner, 1893, 805 s.

15. Жданов Р.З., Об общем решении многомерного уравнения Монжа–Ампера, в сб. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 13–16.

16. Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, М., Наука, 1976, 285 с.

17. Фущич В.И., Тычинин В.А., Жданов Р.З., Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа–Ампера, Дирака, Препринт № 85.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 27 с.

18. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск, 1984, 270 с.

19. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.

20. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., Наука, 1967, 575 с.

Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, И.О. ПАРАСЮК

Известно, что нелинейное трехмерное уравнение Шредингера со степенной нелинейностью допускает редукцию к набору обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе исследована задача о существовании и асимптотическом поведении ограниченных на полуоси решений этих уравнений. На основе такого подхода описаны семейства решений уравнения Шредингера. обладающих разнообразными свойствами: квазипериодические, сферически симметрические, убывающие на бесконечности по пространственным переменным, неограниченно растущие во времени.

В [1, 2] проведена редукция трехмерного нелинейного уравнения Шредингера

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\lambda|\Psi|^k\right)\right)\Psi=0, \tag{1}$$
$$\Psi:\ R_t\times R_x^3\to\mathbb{C},\quad m>0,\quad \lambda\in R,\quad k=4/3,$$

к набору обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$a_2(\tau)\ddot z(\tau)+a_1(\tau)\dot z(\tau)+a_0(\tau)|z(\tau)|^kz(\tau)=0, \tag{2}$$

где $z:R_\tau\to\mathbb{C}$, $a_n(\tau)=P_n(\tau)/Q_n(\tau)$, P_n и Q_n — полиномы второй степени, $n=0,1,2$.

Явный вид анзацев, редуцирующих (1) к (2), приведен в [1, 2].

В настоящей работе на основе качественного анализа редуцированных уравнений описаны некоторые семейства ограниченных на множестве $[t_0,\infty)\times R_x^3$ решений уравнения (1) и исследованы их асимптотики.

1. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=t^{-3/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z(\tau),$$

где $\tau=t^{-1}\alpha\cdot x$. Здесь и в дальнейшем $\alpha\in R^3$, $\alpha^2=1$, и редуцированное уравнение (см. (II) в [1], $\tau=\omega_1$) имеет вид

$$\ddot z+a|z|^{4/3}z=0,\quad a=2\lambda n. \tag{3}$$

Утверждение 1. *Если $a>0$, то общее решение уравнения (3) является квазипериодической функцией*

$$z=Z(\nu_1\tau+\varphi_1,\nu_2\tau+\varphi_2), \tag{4}$$

Укр. матем. журн., 1990, **42**, № 10, С. 1344–1349.

где $Z(\varphi_1,\varphi_2) : T^2 \to \mathbb{C}$, T^2 — стандартный двухмерный тор, $T^2 = \{(\varphi_1,\varphi_2) \in R^2 \mid \operatorname{mod} 2\pi\}$; ν_1, ν_2, φ_1, φ_2 — вещественные параметры (произвольные постоянные).

Доказательство. Уравнение (3) в координатах $q_1 = \operatorname{Re} z$, $q_2 = \operatorname{Im} z$ представляет собой лагранжеву систему с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2\right) - \frac{3a}{10}\left(q_1^2 + q_2^2\right)^{5/3},$$

описывающую движение частицы в центральном поле. Если $a > 0$, то потенциальная энергия является положительно определенной функцией. Известно (см., например, [3]), что в этом случае совместная поверхность уровня полной энергии и кинетического момента, являющихся интегралами движения, компактна и, следовательно, является двухмерным тором. Общее решение уравнения (3) является квазипериодической функцией, частоты которой ν_1, ν_2 можно считать независимыми параметрами.

2. Рассмотрим анзац "бегущая волна"

$$\Psi(t,x) = z(\alpha\cdot x - lt), \quad l \in R.$$

и редуцированное уравнение для функции $z(\tau)$ (см. (VII), (IX) в [1])

$$\ddot z - 2ik\dot z + a|z|^{4/3}z = 0, \quad k = lm, \quad a = 2\lambda m. \tag{5}$$

Утверждение 2. *Если $a > 0$, то уравнение (5) имеет квазипериодическое общее решение вида (4). Если $a < 0$, то наряду с квазипериодическими решениями вида (4) уравнение (5) имеет семейство асимптотически периодических решений вида*

$$z = r(\tau+\xi)\exp\left(i\left(k\tau + \int_0^\tau \mu r^{-2}(s+\xi)ds + \theta\right)\right),$$

где μ, ξ, θ — вещественные параметры, функция $r(\tau) : R \to R$ удовлетворяет при некоторых положительных γ, r^* оценке

$$|r(\tau) - r^*| = O(\exp(-\gamma|\tau|)), \quad \tau \to \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Уравнение (5) отличается от уравнения (3) наличием "гироскопического члена" — $2ik\dot z$. Естественно поэтому положить $z = r\exp(i\varphi)$. Тогда для вещественных переменных r и φ получим систему

$$\begin{aligned} &\ddot r - r\dot\varphi^2 + 2k\dot\varphi + ar^{7/3} = 0,\\ &r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi - 2k\dot r = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Умножив второе уравнение на r, будем иметь

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot\varphi) = k\frac{d}{d\tau}(r^2), \quad \dot\varphi = k + \mu r^{-2}, \tag{8}$$

где μ — произвольная постоянная.

С учетом (8) первое уравнение (7) примет вид

$$\ddot r - \mu^2 r^{-3} + k^2 r + ar^{7/3} = 0. \tag{9}$$

Это уравнение движения консервативной системы с одной степенью свободы, потенциальная энергия которой имеет вид

$$\Pi(r) = 2^{-1}(\mu^2 r^{-2} + k^2 r^2) + 3 \cdot 10^{-1} a r^{10/3}.$$

Если $a > 0$, то ситуация та же, что и в п. 1 (случай потенциальной ямы).

Если $a < 0$, то, уменьшая μ, можно добиться того, чтобы график $\Pi(r)$ имел локальный минимум в точке $r_* > 0$ и локальный максимум в точке $r^* > r_*$. На фазовой плоскости $(r, \dot{r})$ линии уровня интеграла энергии $2^{-1}\dot{r} + \Pi = E$ для $\Pi(r_*) < E < \Pi(r^*)$ в окрестности точки $(r_*, 0)$ замкнуты. Таким значениям соответствуют квазипериодические решения уравнения (5). Линия уровня для значения $E = \Pi(r^*)$ является петлей сепаратрисы седла $(r^*, 0)$. Ей соответствует однопараметрическое семейство решений уравнения (9) $r = r(\tau + \xi)$, удовлетворяющее оценке (6). Осталось воспользоваться формулой (7).

Замечание. Результаты данного пункта остаются справедливыми для уравнения Шредингера с нелинейностью более общего вида $\Phi(|\Psi|)\Psi$. При этом если $\Phi(0) < 0$ и $\Phi(r)$ принимает положительные значения для достаточно больших r, то уравнение может иметь решения типа “уединенная бегущая волна”.

3. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-3/4} z(t^{-1/2}\alpha \cdot x)$$

и редуцированное уравнение (см. (IV), (V) в [1], $\tau = \omega_1$)

$$\ddot{z} - im\tau\dot{z} - \frac{3}{2} imz + a|z|^{4/3} z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Уравнение (10) имеет семейство ограниченны на всей оси решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, причем $Z(\tau, c) = Z(-\tau, c)$ и $Z(\tau, c) = O(\tau^{-3/2})$ при $\tau \to \infty$.*

Доказательство. Положим $s = 2^{-1}\tau^2$. Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \left(-im + \frac{1}{2s}\right)\frac{dz}{ds} - \frac{3im}{4s} z + \frac{a}{2s}|z|^{4/3} z = 0.$$

Стандартной заменой убираем член с производной

$$z = v \exp\left(\frac{1}{2}\int\left(im - \frac{1}{2s}\right) ds\right) = v s^{-1/4} \exp\left(\frac{ims}{2}\right). \tag{11}$$

Получим

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s} + \frac{3}{16s^2}\right) v + \frac{a}{2} s^{-4/3} |v|^{4/3} v = 0. \tag{12}$$

Исследуем соответствующее линейное уравнение ($a = 0$). Для него $s = 0$ — регулярная особая точка. Определяющее уравнение $\rho^2 - \rho + 3/16 = 0$ имеет два корня: $\rho_1 = 1/4$, $\rho_2 = 3/4$. Поэтому для любого решения уравнения (12) при $a = 0$ существует конечный предел

$$\lim_{s \to 0} v(s) s^{-1/4} < \infty. \tag{13}$$

Исследуем поведение решений при $s \to \infty$. Для корней уравнения

$$\rho^2 + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s}\right) = 0$$

справедливо асимптотическое разложение

$$\rho_\pm(s) = \pm i\sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{im}{2s}} = \pm\left(\frac{im}{2} + \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right).$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\rho_1(s) - \rho_2(s)) \neq 0$, то уравнение (12) при $a = 0$ имеет фундаментальную систему решений $v_+(s)$, $v_-(s)$, вронскиан которых равен 1 и для которых имеет место асимптотика [4]

$$v_\pm(s) = \left(\exp\int_{s_0}^{s} \rho_\pm(s_1)ds_1\right)(c_\pm + o(1)) = O\left(s^{\pm 1/2}\right). \tag{14}$$

Кроме того, для этих решений выполнено условие (13).

Теперь задача об ограниченных на $[0,\infty)$ решениях уравнения (12) стандартным образом с помощью метода вариации произвольных постоянных сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(s) = v_-(s)\left(c + \frac{a}{2}\int_1^s v_+(\theta)\theta^{-4/3}|v(\theta)|^{4/3}v(\theta)d\theta\right) + \\ + \frac{a}{2}v_+(s)\int_s^\infty v_-(\theta)\theta^{-4/3}|v(\theta)|^{4/3}v(\theta)d\theta \stackrel{\text{def}}{=} A[v], \end{aligned} \tag{15}$$

где c — комплексный параметр.

Нетрудно показать, что оператор A на полном метрическом пространстве B_K непрерывных функций $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |f(s) - g(s)|$ и таких, что

$$|f(s)| \leq \begin{cases} Ks^{1/4}, & s \in [0,1]; \\ Ks^{-1/2}, & s \in (1,\infty) \end{cases} \tag{16}$$

при всех достаточно малых $|c|$ и $K > 0$ является оператором сжатия. Действительно, условия (13), (14) гарантируют существование константы $K_1 > 0$, не зависящей от c и K, такой, что

$$|A[f]| \leq \begin{cases} K_1\left(|c| + K^{7/3}\right)s^{1/4}, & s \in [0,1]; \\ K_1\left(|c| + K^{7/3}\right)s^{-1/2}, & s \in (1,\infty), \end{cases}$$
$$\rho(A[f], A[g]) \leq K_1K^{4/3}\rho(f,g),$$

если $f, g \in B_K$. Теперь ясно, что уменьшением $|c|$ и K можно добиться выполнения условий сжатия:

$$K_1\left(|c| + K^{7/3}\right) \leq K, \quad K_1K^{4/3} < 1.$$

Отсюда следует, что уравнение (16) для всех достаточно малых c имеет решение $v(s,c)$, удовлетворяющее условию (13) и имеющее асимптотику $v(s,c) = O\left(s^{-1/2}\right)$ при $s \to \infty$. Осталось подставить это решение в формулу (11).

4. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x) = t^{-3/2} \exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z\left(\frac{x^2}{t^2}\right)$$

и редуцированное уравнение (см. (II) в [1], $\tau = \omega_2$)

$$\ddot{z} + \frac{3}{2\tau}\dot{z} + \frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z = 0, \quad a = \frac{\lambda m}{2}. \tag{17}$$

Утверждение 4. *Если $a > 0$, то уравнение (17) имеет семейство решений вида $z = \exp(i\theta)r(\tau,c)$, где θ, c — вещественные параметры, а $r(\tau,c)$ при фиксированном c является ограниченной на полуоси $[0,\infty)$ функцией класса $C^1[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to 0} \ddot{r}(\tau,c)\cdot\tau < \infty, \quad r(\tau,c) = O\left(\tau^{-3/10}\right) \quad \textit{при} \quad \tau \to \infty.$$

Замечание 1. В силу первого условия анзац является классическим решением уравнения (1) в области $(0,\infty) \times R^3_x$.

Доказательство. Положим $z = \exp(i\theta)r$, где $\theta \in R$ — параметр, а $r = r(\tau)$ — вещественное решение уравнения

$$\ddot{r} + \frac{3}{2\tau}\dot{r} + \frac{a}{\tau}r^{7/3} = 0. \tag{18}$$

Выполняя затем подстановку $r = \tau^{-1/2}p$, получаем

$$\ddot{p} + \frac{1}{2\tau}\dot{p} + a\tau^{-5/3}p^{7/3} = 0.$$

Производная функции

$$V(\tau,p,\dot{p}) = 2^{-1}(\dot{p})^2 + 3\cdot 10^{-1}a\tau^{-5/3}p^{10/3}$$

в силу этого уравнения удовлетворяет оценке

$$\dot{V} = -\tau^{-1}\left(2^{-1}(\dot{p})^2 + 2^{-1}a\tau^{-5/3}p^{10/3}\right) \le -\tau^{-1}V.$$

Значит, $V(\tau,p(\tau),\dot{p}(\tau)) = O\left(\tau^{-1}\right)$, а тогда $p^{10/3}(\tau) = O\left(\tau^{2/3}\right)$, $p(\tau) = O\left(\tau^{1/5}\right)$, и, следовательно, $r(\tau) = O\left(\tau^{-3/10}\right)$ для любого решения (18).

Покажем теперь, что уравнение (18) имеет однопараметрическое семейство решений $r(\tau,c)$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{\tau\to+0} r(\tau,c) < \infty$.

Положим $\tau = e^{-s}$. Уравнение (18) примет вид

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dr}{ds} + ae^{-s}r^{7/3} = 0. \tag{19}$$

Это уравнение имеет для любого достаточно малого c решение с асимптотикой [5]

$$r = \tilde{r}(s,c) = c + o(1), \quad s \to \infty.$$

Положим $r(\tau,c)=\tilde{r}(-\ln\tau,c)$. При фиксированном c эта функция непрерывна и ограничена по τ на полуоси $[0,\infty)$. Так как для $\tau>0$ она удовлетворяет уравнению (17), то справедливо представление

$$\dot{r}(\tau,c)=-a\tau^{-3/2}\int_0^\tau \tau_1^{1/2}r^{7/3}(\tau_1,c)d\tau_1.$$

Из этой формулы легко выводятся требуемые свойства функции $r(\tau,c)$.

Замечание 2. Можно показать, что если $a<0$, то уравнение (17) имеет семейство решений с асимптотикой $O\left(\tau^{-3/4}\right)$, $\tau\to\infty$. Однако ли такое решение имеет особенность при типа $\tau=0$ типа $\tau^{-3/4}$.

5. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=t^{-3/4}z\left(x^2t^{-1}\right)$$

и редуцированное уравнение (см. (VI) [1], $\tau=\omega_2$)

$$\ddot{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\tau}-im\right)\dot{z}-\frac{3im}{8\tau}z+\frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z=0,\quad a=\frac{\lambda m}{2}. \tag{20}$$

Утверждение 5. *Уравнение (20) имеет семейство решений $z=Z(\tau,c)$, где c — комплексный параметр, а $Z(\tau,c)$ при фиксированном c является ограниченной на полуоси $[0,\infty)$ функцией класса $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\tau\to0}\ddot{Z}(\tau,c)\tau<\infty$ и $Z(\tau,c)=O\left(\tau^{-3/4}\right)$ при $\tau\to\infty$ (см. замечание 1 п. 4).*

Доказательство. Подставляя

$$z=\exp\left(-\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{\tau}-im\right)d\tau\right)v=\exp\left(\frac{im\tau}{4}\right)\tau^{-3/4}v$$

в уравнение (20), имеем

$$\ddot{v}+\left(\frac{m^2}{16}+\frac{3}{16\tau^2}\right)v+\frac{a}{\tau^2}|v|^{4/3}v=0. \tag{21}$$

Любое решение этого уравнения, для которого $v(\tau_0)$ достаточно мало, где $\tau_0>0$, ограничено на полуоси $[\tau_0,\infty)$. Значит, малые решения уравнения (20) имеют асимптотику $O\left(\tau^{-3/4}\right)$ при $\tau\to\infty$. Теперь нужно среди таких решений выбрать семейство решений, остающихся ограниченными при подходе к точке $\tau=0$. После подстановки $\tau=e^{-s}$ доказательство существования этого семейства проводится аналогично п. 4.

Замечание. Утверждение остается в силе на полуоси $(-\infty,0]$.

6. Рассмотрим анзац

$$\Psi(t,x)=\left(1-t^2\right)^{3/4}\exp\left(-\frac{im}{2}\frac{tx^2}{1-t^2}\right)z\left(\frac{x^2}{1-t^2}\right)$$

и соответствующее редуцированное уравнение (см. (I) в [1], $\tau=\omega_2$)

$$\ddot{z}+\frac{3}{2\tau}\dot{z}+\frac{m^2}{4}z+\frac{a}{\tau}|z|^{4/3}z=0,\quad a=\frac{\lambda m}{2}. \tag{22}$$

Утверждение 6. *Уравнение (22) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau, c)$ обладает свойствами, указанными в утверждении 5.*

Доказательство. Выполним подстановку $z = \tau^{-3/4} v$. Уравнение для v имеет вид

$$\dot{v} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{3}{16\tau^2}\right) v + \frac{a}{\tau^2} |v|^{4/3} v = 0. \tag{23}$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в п. 5.

Для интерпретации результата данного пункта нам понадобится следующее его уточнение: для любого $\delta > 0$ можно указать такое $c_0(\delta) > 0$, что если $|c| < c_0(\delta)$, то

$$|Z(\tau, c)| \le \delta \min\left(1, \tau^{-3/4}\right) \quad \forall\, \tau \in [0, \infty). \tag{24}$$

Это уточнение легко получается из теорем [5], использованных в пп. 4, 5.

7. В заключение отметим, что рассмотренные выше решения моделируют процессы самоорганизации в системе, описываемой уравнением (1). Например, рассмотрим решение, получаемое в соответствии с утверждением 6. Покажем, что равномерно малое в момент $t = 0$ решение п. 6 при $t \to 1$ локализуется в окрестности точки $x = 0$, причем в самой точке оно неограниченно растет.

Действительно, в соответствии с оценкой (24), если $|c| < c_0(\delta)$, то в начальный момент $t = 0$ имеем

$$|\Psi(0, x)| \le \delta \min\left(1, \|x\|^{-3/2}\right), \quad \|x\| = \sqrt{x^2}.$$

Для $0 < t < 1$ в силу (24) получаем

$$|\Psi(t, x)| \le \delta \left(1 - t^2\right)^{-3/4} \min\left(1, \left(1 - t^2\right)^{3/4}, \|x\|^{-3/2}\right) \tag{25}$$

и

$$|\Psi(0, x)| = \left(1 - t^2\right)^{-3/4} |\Psi(0, 0)|. \tag{26}$$

Из (25) получаем оценку

$$|\Psi(t, x)| \le \delta \|x\|^{-3/2},$$

а из (26) следует неограниченный рост решения в точке $x = 0$ при $t \to 1$. Таким образом, рассмотренное решение моделирует характерный режим с обострением [6]. Аналогичное поведение демонстрируют решения пп. 4, 5 при $t \to t_*$, если предварительно преобразовать $t \to t - t_*$.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, 929–933.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Арнольд В.И., Математические методы классической механики, М., Наука, 1974, 432 с.
4. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 216 с.
5. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970, 720 с.
6. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 480 с.

Редукция и точные решения уравнения эйконала

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

С использованием подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала, построены анзацы, редуцирующие данное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены широкие классы точных решений уравнения эйконала.

Релятивистским аналогом классического уравнения Гамильтона является уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2=1. \qquad (*)$$

Установлено [1], что максимальной алгеброй инвариантности уравнения $(*)$ является алгебра $AC(1,4)$, являющаяся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. Симметрийная редукция уравнения $(*)$ по подалгебрам алгебры $AP(1,4)$ исследовалась в [2]. Некоторые точные решения этого уравнения с использованием одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,2)$ определены в [3, 4].

В настоящей статье находятся вещественные решения уравнения эйконала с помощью анзацев, редуцирующих уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Большинство из полученных таким образом дифференциальных уравнений удается проинтегрировать и тем самым построить решения исходного уравнения. Для построения анзацев используются подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$. Исследуется также зависимость между уравнением эйконала и уравнением Гамильтона–Якоби

$$u_t+\frac{1}{2m}(\nabla u)=0, \qquad (**)$$

где $u=u(t,\vec{x}\,)$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, m — постоянная (масса частицы).

1. Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала является конформная алгебра $AC(1,4)$, обладающая базисом

$$P_\alpha=\partial_\alpha,\quad J_{\alpha\beta}=g^{\alpha\nu}x_\nu\partial_\beta-g^{\beta\nu}x_\nu\partial_\alpha,\quad D=-x^\alpha\partial_\alpha,$$
$$K_\alpha=-2(g^{\alpha\beta}x_\beta)D-(g^{\beta\nu}x_\beta x_\nu)\partial_\alpha,$$

где $g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=-g_{44}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$ $(\alpha,\beta,\nu=0,1,\dots,4)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1,4)=\langle P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\rangle\oplus AO(1,4)$,

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 4, С. 461–474.

где $AO(1,4) = \langle J_{\mu\nu} \,|\, \mu,\nu = 0,1,\ldots,4\rangle$, расширенную алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = AP(1,4) \oplus \langle D\rangle$, а также оптическую алгебру $AOpt(3)$, обладающую базисом

$$S_1 + T_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_4 + K_0 - K_4), \quad Z_1 = -J_{04} - D, \quad C_1 = J_{04} - D,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(P_0 + P_4), \quad M_1 = P_0 - P_4, \quad P_a, \quad H_a = J_{0a} + J_{a4}, \quad J_{ab}\ (a,b = 1,2,3).$$

Алгебра $AP(1,4)$ содержит расширенную алгебру Галилея $A\tilde{G}(3)$, порожденную генераторами

$$P_a, \quad J_{ab}, \quad G_a = J_{0a} - J_{a4}, \quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_4), \quad M = P_0 + P_4 \ \ (a,b = 1,2,3).$$

В данной статье подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$ используются для редукции и поиска точных решений уравнения $(*)$. Если L — одна из таких подалгебр, $\omega'(x,u)$, $\omega(x,u)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение $(*)$ к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$. Каждому решению $\varphi = \varphi(\omega)$ редуцированного уравнения соответствует L-инвариантное решение $u = u(x)$ исходного уравнения $(*)$. Для классификации всех таких решений следует описать с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$. При этом две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются $C(1,4)$-эквивалентными, если с точностью до $C(1,4)$-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами.

Так как мы ищем только вещественные решения уравнения $(*)$, то необходимо исключить из рассмотрения те подалгебры алгебры $AC(1,4)$, которые с точностью до эквивалентности содержат $P_0 + P_2$ или P_0. Действительно, пусть L — подалгебра алгебры $AC(1,4)$, содержащая $P_0 + P_2$. Если решение $u - u(x) = 0$ уравнения эйконала инвариантно относительно L, то $u = u(x_0 - x_2, x_1, x_3)$. Но тогда

$$(\nabla u)^2 = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2,$$

откуда

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1,$$

и мы приходим к противоречию. Аналогично рассматривается случай $P_0 \in L$.

Используя классификацию с точностью до $C(1,4)$-сопряженности подалгебр конформной алгебры $AC(1,4)$ [4], получаем с учетом изложенного выше требуемый перечень $C(1,4)$-неэквивалентных подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$.

Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1,4)$:

1) $L_1 = \langle J_{01} - D, J_{02} - J_{21} + P_4, P_3\rangle$; 2) $L_2 = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$;

3) $L_3 = \langle J_{01}, P_2, P_3\rangle$; 4) $L_4 = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02}, P_3\rangle$;

5) $L_5 = \langle J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23}, J_{03}\rangle$; 6) $L_6 = \langle J_{01}, D, P_3\rangle$;

7) $L_7 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D\rangle$; 8) $L_8 = \langle J_{01} - J_{12} + P_0 - P_2, J_{02} - 2D, P_3\rangle$;

9) $L_9 = \langle J_{01} + P_4, P_2, P_3\rangle$; 10) $L_{10} = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02} + P_4, P_3\rangle$;

11) $L_{11} = \langle J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23}, J_{03} + P_4\rangle$;

12) $L_{12} = \langle J_{01} - J_{13} + P_4, J_{02} - J_{23} + \alpha P_2 + \beta P_4, J_{03} - D\rangle$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$;

13) $L_{13} = \langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$; 14) $L_{14} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$;
15) $L_{15} = \langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$; 16) $L_{16} = \langle J_{14}, P_2, P_3\rangle$;
17) $L_{17} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, P_3\rangle$; 18) $L_{18} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}\rangle$;
19) $L_{19} = \langle J_{04} - J_{41}, P_2, P_3\rangle$; 20) $L_{20} = \langle J_{01} - J_{13}, J_{02} - J_{23}, J_{04} - J_{43} - J_{12}\rangle$;
21) $L_{21} = \langle J_{04} - J_{41}, J_{02} - J_{21} - P_2, P_3\rangle$; 22) $L_{22} = \langle J_{03}, J_{14}, D\rangle$;
23) $L_{23} = \langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 24) $L_{24} = \langle J_{02} + \alpha D, J_{01} - J_{12}, J_{04} - J_{42}\rangle$, $\alpha \neq 0$;
25) $L_{25} = \langle J_{03} + \alpha D, J_{12} + \beta D, J_{04} - J_{43}\rangle$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 0$;
26) $L_{26} = \langle J_{04}, J_{12} + \alpha D, J_{03} - J_{34}\rangle$, $\alpha > 0$;
27) $L_{27} = \langle J_{12} + \alpha J_{03}, J_{04} - J_{43}, D\rangle$, $\alpha > 0$;
28) $L_{28} = \langle J_{04} - J_{42}, J_{02} + \alpha D, P_3\rangle$, $\alpha \neq 0$;
29) $L_{29} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24} J_{03} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$;
30) $L_{30} = \langle P_2, P_3, J_{01} + D + P_0 + P_1\rangle$;
31) $L_{31} = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02} + D + P_0 + P_2, P_3\rangle$;
32) $L_{32} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, J_{03} + D + P_0 + P_3\rangle$;
33) $L_{33} = \langle J_{03} + D + P_0 + P_3, J_{12} + \alpha(P_0 + P_3), J_{04} - J_{43}\rangle$, $\alpha > 0$;
34) $L_{34} = \langle J_{03} - J_{32} + P_0 - P_2, J_{14}, J_{02} - 2D\rangle$;
35) $L_{35} = \langle J_{03} + D, J_{12} + P_0 + P_3, J_{04} - J_{43}\rangle$;
36) $L_{36} = \langle J_{04} - J_{41} + P_0 - P_1, P_2, P_3\rangle$; 37) $L_{37} = \langle J_{14} + \alpha D, P_2, P_3\rangle$;
38) $L_{38} = \langle J_{12} + \alpha J_{04}, D, P_3\rangle$ $\alpha > 0$; 39) $L_{39} = \langle J_{14} + P_0, P_2, P_3\rangle$;
40) $L_{40} = AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \gamma M_1\rangle$, $\gamma < 0$; 41) $L_{41} = \langle S_1 + T_1, J_{12}, Z_1\rangle$;
42) $L_{42} = AO(3) \oplus \langle S_1 + T_1 + \alpha Z_1\rangle$; 43) $L_{43} = \langle S_1 + T_1, J_{12}, Z_1, H_1 + P_2\rangle$;
44) $L_{44} = \langle S_1 + T_1 + 2J_{12} + \gamma M_1, H_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, H_2 - P_1 - \sqrt{2}H_3\rangle$, $\gamma < 0$;
45) $L_{45} = \langle \alpha Z_1 + S_1 + T_1 + 2J_{12}, H_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, H_2 - P_1 - \sqrt{2}H_3\rangle$, $\alpha \in R$;
46) $L_{46} = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34}\rangle$;
47) $L_{47} = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$; 48) $L_{48} = AO(3) \oplus \langle P_0 + K_0\rangle$;
49) $L_{49} = \langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 0$;
50) $L_{50} = \langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03}, -P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}$,
$P_0 + K_0 - 4J_{23}\rangle$;
51) $L_{51} = \langle 2J_{12} + J_{34}, 2J_{13} + 2J_{24} - \sqrt{3}(K_4 - P_4), 2J_{23} - 2J_{14} + \sqrt{3}(K_3 - P_3)\rangle$.

2. Анзацы вида $u = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$, $\omega = \omega(x)$. В настоящем пункте для построения анзацев, редуцирующих уравнение $(*)$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям, используются подалгебры L_1–L_{12}. Рассмотрим, например, подалгебру L_1. Ее полный набор основных инвариантов состоит из функций

$$\omega' = \frac{(x_0 - x_1)u - x_2}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}}, \quad \omega = x_0 - x_1.$$

Поэтому алгебре L_1 соответствует анзац $\omega' = \varphi(\omega)$, который можно записать в следующем виде:

$$u = \frac{\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}}{x_0 - x_1}\varphi(\omega) + \frac{x_2}{x_0 - x_1}, \quad \omega = x_0 - x_1.$$

Аналогично получаем анзацы и для остальных подалгебр

$$L_2: \quad u=\varphi(\omega), \quad \omega=x_0; \qquad L_3: \ u=\varphi(\omega), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2};$$
$$L_4: \quad u=\varphi(\omega), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2};$$
$$L_5: \quad u=\varphi(\omega), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2};$$
$$L_6: \quad u=x_2\varphi(\omega), \quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2}{x_2^2};$$
$$L_7: \quad u=x_3\varphi(\omega), \quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{x_3^2};$$
$$L_8: \quad u=\left[(x_0-x_2)^2-4x_1\right]\varphi(\omega), \quad \omega=3\ln\left[(x_0-x_2)^2-4x_1\right]-$$
$$-2\ln\left[6(x_0+x_2)-6x_1(x_0-x_2)+(x_0-x_2)^3\right];$$
$$L_9: \quad u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_1), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2};$$
$$L_{10}: \quad u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_2), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2};$$
$$L_{11}: \quad u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_3), \quad \omega=\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2};$$
$$L_{12}: \quad u=-\left(x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_3}{x_0-x_3+\alpha}x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}\varphi(\omega)+$$
$$+\frac{\beta x_2}{x_0-x_3+\alpha}+\frac{x_1}{x_0-x_3}, \quad \omega=x_0-x_3.$$

Анзац, соответствующий подалгебре L_1, редуцирует уравнение $(*)$ к уравнению

$$2\varphi\dot\varphi-\omega^{-1}\varphi^2-\omega^{-1}(1+\omega^2)=0. \tag{1}$$

Общим решением уравнения (1) является функция $\varphi=(\omega^2+C\omega-1)^{1/2}$. В этом случае

$$u=(x_0-x_1)^{-1}\left\{x_2+\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2}\left[(x_0-x_1)^2+C(x_0-x_1)-1\right]^{1/2}\right\}.$$

Выпишем редуцированные уравнения, соответствующие всем остальным подалгебрам L_2–L_{12}. Редуцированному уравнению присвоим номер той алгебры L_j, $2\le j\le 12$, которой оно соответствует:

$$\dot\varphi^2-1=0, \tag{2–5}$$

$$4\omega\dot\varphi^2-(\varphi-2\omega\dot\varphi)^2-1=0, \tag{6–7}$$

$$144(e^\omega-1)\dot\varphi^2-96\varphi\dot\varphi-16\varphi^2-1=0, \tag{8}$$

$$\dot\varphi^2-\frac{2}{\omega}\dot\varphi-1=0, \tag{9–11}$$

$$2\omega\varphi\dot\varphi+\varphi^2-\omega^{-2}-\beta^2(\omega+\alpha)^{-2}-1=0. \tag{12}$$

Найдем общие решения редуцированных уравнений (2–12) и укажем соответствующие им точные решения уравнения эйконала. Общим решением редуцированного уравнения (2) является $\varphi=\pm\omega+C$. Следовательно, получаем такие решения уравнения эйконала:

$$u=\pm\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_l^2\right)^{1/2}+C, \quad l=1,2,3; \quad u=\pm x_0+C.$$

Общим решением уравнения (6) является

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\omega^{1/2}\right)\left\{\lambda(\omega)+\lambda(\omega)^{-1}\right\}-\lambda(\omega)^{-1},$$

где $\lambda(\omega)=C$ или $\lambda(\omega)=\pm\left(\omega^{1/2}-1\right)^{1/2}\left(\omega^{1/2}+1\right)^{-1}$. В первом случае

$$u=\frac{C^2+1}{2C}\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2}+\frac{C^2-1}{2C}x_2, \quad C\in R$$

а во втором —

$$u=\pm\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2}.$$

Алгебре L_7 соответствуют такие решения уравнения эйконала.

$$u=\frac{C^2+1}{2C}\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2}+\frac{C^2-1}{2C}x_3, \quad u=\pm\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}.$$

Общим решением уравнения (9) является

$$\varphi=\ln|\omega|\pm\left\{\sqrt{1+\omega^2}+\ln|\sqrt{1+\omega^2}-1|-\ln|\omega|\right\}+C.$$

Следовательно, получаем решения уравнения эйконала

$$u=\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2}-1}{x_0-x_l}\right|+C,$$

$$u=-\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2}+1}{x_0-x_l}\right|+C,$$

где $l=1,2,3$.

Интегрируя уравнение (12), находим

$$\varphi=-\left\{\frac{\omega^3+(C+\alpha)\omega^2+(C\alpha-\beta^2-1)\omega-\alpha}{\omega^2(\omega+\alpha)}\right\}^{1/2}.$$

Соответствующее ему решение уравнения эйконала имеет вид

$$u=\left(x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_3}{x_0-x_3+\alpha}x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left\{\frac{(x_0-x_3)^3+(C+\alpha)(x_0-x_3)^2+(C\alpha-\beta^2-1)(x_0-x_3)-\alpha}{(x_0-x_3)^2(x_0-x_3+\alpha)}\right\}^{1/2}+$$
$$+\frac{\beta x_2}{x_0-x_3+\alpha}+\frac{x_1}{x_0-x_3}.$$

3. Анзацы вида $u^2=f(x)\varphi(\omega)+g(x)$, $\omega=\omega(x)$. Для построения анзацев указанного вида используем подалгебры L_{13}–L_{35}. В результате несложных вычислений получаем следующие анзацы:

$$L_{13}:\quad u^2=\varphi(\omega)+x_0^2,\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2};$$

$$L_{14}:\quad u^2=\varphi(\omega)+x_0^2,\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2};$$

$$L_{15}:\quad u^2=\varphi(\omega)+x_0^2-x_3^2,\quad \omega=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2};$$

$$L_{16}:\quad u^2=\varphi(\omega)-x_1^2,\quad \omega=x_0;$$
$$L_{17}:\quad u^2=\varphi(\omega)-x_1^2-x_2^2,\quad \omega=x_0;$$
$$L_{18}:\quad u^2=\varphi(\omega)-x_1^2-x_2^2-x_3^2,\quad \omega=x_0;$$
$$L_{19}:\quad u^2=\varphi(\omega)+x_0^2-x_1^2,\quad \omega=x_0-x_1;$$
$$L_{20}:\quad u^2=\varphi(\omega)+x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2,\quad \omega=x_0-x_3;$$
$$L_{21}:\quad u^2=\varphi(\omega)+x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_1}{x_0-x_1-1}x_2^2,\quad \omega=x_0-x_1;$$
$$L_{22}:\quad u^2=x_2^2\varphi(\omega)-x_1^2,\quad \omega=\frac{x_0^2-x_3^2}{x_2^2};$$
$$L_{23}:\quad u^2=x_0^2\varphi(\omega)-x_3^2,\quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_0^2};$$
$$L_{24}:\quad u^2=-x_3^2\varphi(\omega)+x_0^2-x_1^2-x_2^2,\quad \omega=\frac{1+\alpha}{\alpha}\ln x_3-\ln(x_0-x_2);$$
$$L_{25}:\quad u^2=-\left(x_1^2+x_2^2\right)\varphi(\omega)+x_0^2-x_3^2,$$
$$\omega=(1+\alpha)\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\ln(x_0-x_3)-2\beta\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};$$
$$L_{26}:\quad u^2=-\left(x_1^2+x_2^2\right)\varphi(\omega)+x_0^2-x_3^2,\quad \omega=\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};$$
$$L_{27}:\quad u^2=-\left(x_1^2+x_2^2\right)\varphi(\omega)+x_0^2-x_3^2,$$
$$\omega=2\ln(x_0-x_3)-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};$$
$$L_{28}:\quad u^2=-x_1^2\varphi(\omega)+x_0^2-x_2^2,\quad \omega=\alpha\ln(x_0-x_2)-(1+\alpha)\ln x_1;$$
$$L_{29}:\quad u^2=\left(x_0^2-x_3^2\right)\varphi(\omega)-x_1^2-x_2^2,$$
$$\omega=(1+\alpha)\ln(x_0+x_3)+(1-\alpha)\ln(x_0-x_3);$$
$$L_{30}:\quad u^2=(x_0-x_1)\varphi(\omega),\quad \omega=x_0+x_1+\ln(x_0-x_1);$$
$$L_{31}:\quad u^2=(x_0-x_2)\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{x_0-x_2}+\ln(x_0-x_2);$$
$$L_{32}:\quad u^2=(x_0-x_3)\varphi(\omega)-x_1^2-x_2^2,\quad \omega=x_0+x_3+\ln(x_0-x_3);$$
$$L_{33}:\quad u^2=-(x_0-x_3)\varphi(\omega)+(x_0-x_3)\left[\ln(x_0-x_3)+2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right]+x_0^2-x_3^2,$$
$$\omega=\frac{x_0-x_3}{x_1^2+x_2^2};$$
$$L_{34}:\quad u^2=\left[(x_0-x_2)^2-4x_3\right]^2\varphi(\omega)-x_1^2,\quad \omega=3\ln\left[(x_0-x_2)^2-4x_1\right]-$$
$$-2\ln\left[6(x_0+x_2)-6x_1(x_0-x_2)+(x_0-x_2)^3\right];$$
$$L_{35}:\quad u^2=-(x_0-x_3)\varphi(\omega)+2(x_0-x_3)\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+x_0^2-x_3^2,\quad \omega=\frac{x_0-x_3}{x_1^2+x_2^2}.$$

Выпишем редуцированные уравнения, соответствующие указанным анзацам:

$$\dot\varphi^2+4\varphi=0, \tag{13–15}$$

$$\dot\varphi^2-4\varphi=0, \tag{16–18}$$

$$\omega\dot\varphi-\varphi=0, \tag{19–21}$$

$$(\omega-\omega^2)\dot\varphi^2+2\omega\varphi\dot\varphi-\varphi^2-\varphi=0, \tag{22}$$

$$(\varphi-\omega\dot\varphi)^2-\omega\dot\varphi^2-\varphi=0, \tag{23}$$

$$\gamma^2\dot\varphi^2-4(1-\gamma\varphi)\dot\varphi+4(\varphi^2-\varphi)=0, \quad \gamma=\alpha^{-1}(1+\alpha), \tag{24}$$

$$\{(1+\alpha)^2+\beta^2\}\dot\varphi^2+2\{(1+\alpha)\varphi-\alpha\}\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0, \tag{25}$$

$$(1+\alpha^2)\dot\varphi^2+2\varphi\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0, \tag{26}$$

$$(1+\alpha^2)\dot\varphi^2-2\varphi\dot\varphi+2\dot\varphi^2+\varphi^2-\varphi=0, \tag{27}$$

$$(1+\alpha)^2\dot\varphi^2+4\{\alpha-(1+\alpha)\varphi\}\dot\varphi+4\varphi(\varphi-1)=0, \tag{28}$$

$$(1-\alpha^2)\dot\varphi^2+2\varphi\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0, \tag{29}$$

$$\dot\varphi^2+\varphi\dot\varphi-\varphi=0, \tag{30–32}$$

$$\omega^3\dot\varphi^2+\omega\dot\varphi+\omega\alpha^2-1=0, \tag{33}$$

$$144(e^\omega-1)\dot\varphi^2-96\varphi\dot\varphi-16\varphi^2-1=0, \tag{34}$$

$$\omega^2\dot\varphi^2+\dot\varphi+1=0. \tag{35}$$

Общим решением уравнения (13) является $\varphi=-(\omega+C)^2$. Таким образом, получаем следующие решения уравнения эйконала:

$$u^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-2C\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}-C^2;$$
$$u^2=x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2-2C\left(x_1^2+\cdots+x_l^2\right)^{1/2}, \quad l=2,3.$$

Решая уравнение (16), получаем такие решения уравнения эйконала:

$$u^2=x_0^2-x_1^2-\cdots-x_l^2+2Cx_0+C^2, \quad l=1,2,3.$$

Так как $\varphi=C\omega$ является общим решением уравнения (19), то уравнение эйконала имеет такие решения:

$$u^2=C(x_0-x_1)+x_0^2-x_1^2, \quad u^2=C(x_0-x_3)+x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2;$$
$$u^2=C(x_0-x_1)+x_0^2-x_1^2-\frac{x_0-x_1}{x_0-x_1-1}x_2^2.$$

Рассмотрим уравнение (24). Если $\gamma=2$, то $\varphi=-Ce^{-\omega}$ или $\varphi=1-Ce^{\omega}$. Получаем решение эйконала

$$u^2=C(x_0-x_2)+x_0^2-x_1^2-x_2^2-\delta x_3^2, \quad \delta=0,1.$$

Если $\gamma=1$, то $\varphi=-C^2e^{-2\omega}+2Ce^{-\omega}$, $C\in R$, а потому

$$u^2=C(x_0-x_2)^2-2Cx_3(x_0-x_2)+x_0^2-x_1^2-x_2^2.$$

Если $\gamma=0$, то $\varphi=-Ce^{-\omega}(1-Ce^{-\omega})^{-1}$. Соответствующим решением уравнения $(*)$ является

$$u^2=\left\{\frac{x_3^2}{1-C(x_0-x_2)}+x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right\}.$$

Если $\gamma \neq 0, 1, 2$, то φ задается неявно

$$\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}-\gamma+1\right|^{\gamma-1}\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}+1\right| = e^{-\omega+C},$$
$$\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}+\gamma-1\right|^{\gamma-1}\left|\{1-(2\gamma-\gamma^2)\varphi\}^{1/2}-1\right| = e^{-\omega+C}.$$

Подставляя вместо φ выражение $\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-u^2\right)x_3^{-2}$, получаем уравнения, которые в некоторых областях пространства $R_{1,4}$ задают u как неявную функцию от x_0, x_1, x_2, x_3.

Уравнение (25) имеет частные решения $\varphi = 1$ и $\varphi = 0$. Им соответствуют решения

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad \text{и} \quad u^2 = x_0^2 - x_3^2.$$

Если $\alpha = -1$, $\beta = 0$, то

$$\varphi = Ce^{\omega/2}(Ce^{\omega/2}-1)^{-1}.$$

В этом случае

$$u^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 - C(x_0 - x_3)} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то $\varphi = -Ce^{-\omega/2}$ или $\varphi = 1 - Ce^{-\omega/2}$. Имеем такие решения уравнения $(*)$:

$$u^2 = C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_3^2, \quad u^2 = C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Уравнение (27) распадается на два уравнения. Общее решение первого уравнения задается соотношением

$$2\ln\left|\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2} - 1 + \varphi\right| - \ln|1-\varphi| +$$
$$+ 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}}{\alpha(1-\varphi)} = \omega + C,$$

а общее решение второго уравнения — соотношением

$$2\ln\left|\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2} + 1 - \varphi\right| - \ln|1-\varphi| -$$
$$- 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}}{\alpha(1-\varphi)} = \omega + C.$$

Уравнение (28) имеет при $\alpha^2 \neq 1$ такие решения:

$$\alpha\ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}-\alpha\right| + \ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}+1\right| = \omega + C,$$
$$\alpha\ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}+\alpha\right| + \ln\left|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}-1\right| = \omega + C.$$

Если $\alpha = 1$, то $\varphi = Ce^{\omega}$ или $\varphi = 1 + Ce^{\omega}$. Во втором случае получаем решение

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - C(x_0 - x_2).$$

При $\alpha = -1$ имеем $\varphi = (1 - Ce^{\omega})^{-1}$ и, соответственно,

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \frac{Cx_1^2}{C - (x_0 - x_2)}.$$

Общим решением уравнения (29) при $\alpha = 1$ является $\varphi = 1 + Ce^{-\omega/2}$. Соответствующим ему решением уравнения $(*)$ будет

$$u^2 = C(x_0 + x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Уравнение (30) распадается на два уравнения, которые имеют соответственно такие общие решения:

$$\ln\left|\frac{\psi - 1}{\psi + 1}\right| - \frac{2}{\psi + 1} = \omega + C, \quad \ln\left|\frac{\psi + 1}{\psi - 1}\right| + \frac{2}{\psi - 1} = \omega + C,$$

где $\psi = ((\varphi + 4)/\varphi)^{1/2}$.

Интегрируя уравнение (33), находим, что при $\alpha \neq 0$

$$\varphi = \frac{1}{2\omega} \pm \left\{\frac{1 - \lambda(\omega)}{4\omega} + 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\lambda(\omega) - 1}{2\alpha\omega} + \right.$$
$$\left. + \ln\left|\frac{\lambda(\omega) - 1 - 2\omega}{\omega}\right| + \frac{(1 + \alpha^2)\omega}{\lambda(\omega) - 1 - 2\omega}\right\} + C,$$

где $\lambda(\omega) = (-4\alpha^2\omega + 4\omega + 1)^{1/2}$, а при $\alpha = 0$

$$\varphi = \frac{1}{2\omega} \pm \left\{\ln\left|\frac{(4\omega + 1)^{1/2} - 1}{(4\omega + 1)^{1/2} + 1}\right| - \frac{(4\omega + 1)^{1/2}}{2\omega}\right\} + C.$$

Уравнение (35) распадается на два уравнения, которые имеют такие общие решения соответственно:

$$\varphi = -\frac{2\omega}{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1} - 2 \operatorname{arctg}\frac{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1}{2\omega} - C,$$
$$\varphi = -\frac{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1}{2\omega} + 2 \operatorname{arctg}\frac{(1 - 4\omega^2)^{1/2} - 1}{2\omega} - C.$$

Получаем следующие решения уравнения эйконала:

$$u^2 = (x_0 - x_3)\left(\frac{1}{z} + 2 \operatorname{arctg} z + 2 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + x_0 + x_3 + C\right),$$
$$u^2 = (x_0 - x_3)\left(\frac{1}{z} - 2 \operatorname{arctg} z + 2 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + x_0 + x_3 + C\right),$$

где

$$z = \frac{\left\{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 4(x_0 - x_3)^2\right\}^{1/2} - \left(x_1^2 + x_2^2\right)}{2(x_0 - x_3)}.$$

4. Неявные анзацы. Используя подалгебры L_{36}–L_{50}, получаем анзацы вида $\omega'(x, u) = \varphi(\omega(x, u))$, где ω' и ω зависят от u. Такие анзацы задают в некоторых областях пространства $R_{1,4}$ u как неявную функцию от x_0, x_1, x_2, x_3 и потому мы их называем неявными анзацами:

$$L_{36}: \quad u = \frac{1}{4}\varphi(\omega) + \frac{1}{4}(x_0 - x_1)^2, \quad \omega = 6(x_0 - x_1) - (x_0 - x_1)^3 - 6(x_0 + x_1);$$

$$L_{37}: \quad u^2 = x_0^2\varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = \ln\left(x_1^2 + u^2\right) - 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1};$$

$$L_{38}: \quad u^2 = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)\varphi(\omega) + x_0^2, \quad \omega = 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - \ln\frac{x_0 - u}{x_0 + u};$$

$$L_{39}: \quad u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = x_0 + \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1};$$

$$L_{40}: \quad x_0 - u - \frac{(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{(x_0+u)^2+1} - 2\gamma \operatorname{arctg}(x_0+u) = \sqrt{2}\varphi(\omega),$$

$$\omega = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+u)^2};$$

$$L_{41}: \quad x_0 - u - \frac{(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{(x_0+u)^2+1} = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+u)^2+1}\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2};$$

$$L_{42}: \quad -x_0 - u + \frac{(x_0-u)\left[(x_0+u)^2+1\right]}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \varphi(\omega),$$

$$\omega = \ln\frac{(x_0+u)^2+1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} - 2\alpha \operatorname{arctg}(x_0+u);$$

$$L_{43}: \quad \frac{(x_0-u)\left[(x_0+u)^2+1\right]}{x_3^2} - 2\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)(x_0+u)+x_1x_2\left[(x_0+u)^2-1\right]}{(x_0+u)^2+1} -$$

$$-(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right) = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{\left[x_1+(x_0+u)x_2\right]^2}{\left[(x_0+u)^2+1\right]x_3};$$

$$L_{44}: \quad \frac{x_0-u}{2} - (x_0+u)\omega^2 - \left\{\frac{(x_0+u)\left[(x_0+u)^2-3\right]}{2\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}\left(x_1^2-x_2^2\right) + \right.$$

$$+\frac{1-3(x_0+u)^2}{\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}x_1x_2 - \frac{\sqrt{2}}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3 -$$

$$\left. -\frac{\sqrt{2}(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3\right\} - \gamma \operatorname{arctg}(x_0+u) = \varphi(\omega),$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1 + \sqrt{2}\left[(x_0+u)^2-1\right]x_2 + \left[(x_0+u)^2+1\right]x_3}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^{3/2}};$$

$$L_{45}: \quad \frac{x_0-u}{2} - (x_0+u)\omega^2 - \left\{\frac{(x_0+u)\left[(x_0+u)^2-3\right]}{2\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}\left(x_1^2-x_2^2\right) + \right.$$

$$+\frac{1-3(x_0+u)^2}{\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}x_1x_2 - \frac{\sqrt{2}}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3 -$$

$$\left. -\frac{\sqrt{2}(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3\right\} - \gamma \operatorname{arctg}(x_0+u) = \varphi(\ln\omega + d\operatorname{arctg}(x_0+u)),$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1 + \sqrt{2}\left[(x_0+u)^2-1\right]x_2 + \left[(x_0+u)^2+1\right]x_3}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^{3/2}};$$

$$L_{46}: \quad \frac{(\vec{x}^{\,2}-1)^2 - 4\left(x_1^2+x_2^2\right)}{(\vec{x}^{\,2}+1)^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_0(\vec{x}^{\,2}-1)+2x_1x_3+2x_2u}{(\vec{x}^{\,2}+1)^2};$$

$$L_{47}: \quad \frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{(\vec{x}^{\,2}+1)^2}{x_1^2+x_2^2};$$

$$L_{48}: \quad \frac{u^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{\vec{x}^{\,2}+1}{u};$$

$$L_{49}: \quad \frac{4u^2+(\vec{x}^{\,2}+1)^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha \operatorname{arctg}\frac{2x_0}{\vec{x}^{\,2}-1} + \operatorname{arctg}\frac{\vec{x}^{\,2}+1}{2u};$$

$$L_{50}: \quad u^2 = -\frac{1}{12}\frac{x_2}{\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3}\varphi(u) - \frac{1}{12}\frac{\left[\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3\right]^2}{x_2^2} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2(x_0+u)+2\sqrt{3}(x_0-u)x_3+(x_0-u)^3}{x_2^2\left[\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3\right]} - 1.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение эйконала к следующим уравнениям:

$$9\varphi\dot\varphi^2+4=0; \tag{36}$$

$$(\varphi-\alpha^2)\dot\varphi^2+4\varphi^2\dot\varphi+4\varphi^3-4\varphi^2=0; \tag{37}$$

$$(4+\alpha^2\varphi^2)\dot\varphi^2+\varphi^4-\varphi^3=0; \tag{38}$$

$$(\varphi-1)\dot\varphi^2-4\varphi^2=0; \tag{39}$$

$$2\dot\omega\varphi^2+\omega+2\gamma=0; \tag{40}$$

$$2\omega(\omega+1)^2\dot\varphi^2+2\varphi^2+1=0; \tag{41}$$

$$2\dot\varphi^2-(4\varphi+2\sqrt{2}\alpha)\dot\varphi+2\varphi^2+1=0; \tag{42}$$

$$(\omega+\omega^2)\dot\varphi^2-2\omega\varphi\dot\varphi+\varphi^2+4\omega+1=0; \tag{43}$$

$$3\dot\varphi^2+12\omega^2+4\gamma=0; \tag{44}$$

$$12+12\varphi^2+(4\alpha+12\varphi)\dot\varphi+3\dot\varphi^2=0; \tag{45}$$

$$(16\omega^2-1)\dot\varphi^2+2(5\varphi-1)\omega\dot\varphi+16\varphi(\varphi-1)=0; \tag{46}$$

$$(\omega^2+4)\dot\varphi^2-4\omega\varphi\dot\varphi-4\varphi-4\varphi^2=0; \tag{47}$$

$$(4+\omega\varphi)\dot\varphi^2+4\omega\varphi\dot\varphi+4\varphi^2(\varphi+1)=0; \tag{48}$$

$$(-\alpha^2\varphi+\varphi+4)\dot\varphi^2+\varphi^2(\varphi+4)^2=0; \tag{49}$$

$$-9[\varphi^2-256(\omega^2+1)^2]\dot\varphi^2+6\omega\varphi\dot\varphi-\omega^2-1=0. \tag{50}$$

Общим решением уравнения (36) является $\varphi=-(\omega+C)^{2/3}$. Ему соответствует решение

$$4u+\left[6(x_0-x_1)u-(x_0-x_1)^3-6(x_0+x_1)+C\right]^{2/3}-(x_0-x_1)^2=0$$

уравнения $(*)$.

По решениям уравнения (37) находим следующие решения уравнения эйконала:

$$\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2x_0}}{\alpha x_0} + \\ + \ln\left|\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2x_0}-x_0\right| - \alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{x_1}+C=0,$$

$$-\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2x_0}}{\alpha x_0} + \\ + \ln\left|\sqrt{(1+\alpha^2)\left(x_1^2+u^2\right)-\alpha^2x_0}+x_0\right| - \alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{x_1}+C=0.$$

Уравнение (38) имеет решения $\varphi = 0$, $\varphi = 1$ и

$$-2\alpha\left\{\alpha\left(\frac{1-\varphi}{1+\alpha^2\varphi}\right)^{1/2}\right\} + \ln\left|\frac{(1-\varphi)^{1/2} - (1+\alpha^2\varphi)^{1/2}}{(1-\varphi)^{1/2} + (1+\alpha^2\varphi)^{1/2}}\right| = \pm\omega + C.$$

Если $\varphi = 0$, то $u = \pm x_0$.

Общим решением уравнения (39) является

$$\sqrt{\varphi - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\varphi - 1} + C = \pm\omega.$$

Следовательно, получаем решение уравнения эйконала

$$\sqrt{x_1^2 + u^2 - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x_1^2 + u^2 - 1} \pm \left(x_0 + \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1}\right) + C = 0.$$

По решениям редуцированных уравнений (40)–(50) находим следующие решения уравнения эйконала:

$$\begin{gathered} -x_0 + u + \frac{(x_0+u)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{(x_0+u)^2+1} + 2\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u) \pm \\ \pm\gamma\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\gamma\left[(x_0+u)^2+1\right]}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\gamma\left[(x_0+u)^2+1\right]\right)}}{\gamma\left[(x_0+u)^2+1\right]}\right] = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -u + \sqrt{2}(x_0+u)\omega^2 + \frac{(x_0+u)\left[(x_0+u)^2-3\right]}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}\left(x_1^2-x_2^2\right) + \\ + \frac{\sqrt{2}\left[1-3(x_0+u)^2\right]}{\left[(x_0+u)^2+1\right]^2}x_1x_2 - \frac{2}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3 - \frac{2(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3 + \\ + \sqrt{2}\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u) \pm 2\sqrt{2}\arcsin\sqrt{\frac{3}{|\gamma|}}\omega + C = 0, \end{gathered}$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1 + \sqrt{2}\left[(x_0+u)^2-1\right]x_2 + \left[(x_0+u)^2+1\right]x_3}{\sqrt{2}\left[(x_0+u)^2+1\right]^{3/2}}.$$

5. О связи между уравнениями эйконала и Гамильтона–Якоби. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (**) является конформная алгебра $AC(1,4)$ [5], обладающая базисом

$$\hat{J}_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad \hat{P}_a = \partial_a, \quad \hat{P}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + m\partial_u),$$

$$\hat{P}_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 - m\partial_u), \quad \hat{D} = -(t\partial_0 + x^a\partial_a + u\partial_u),$$

$$\hat{J}_{04} = t\partial_0 - u\partial_u, \quad \hat{J}_{0a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$

$$J_{a4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\partial_0 + \left(t - \frac{1}{m}u\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$

$$K_0 = -\sqrt{2}\left[\left(t^2 + \frac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)x^a\partial_a + \left(\frac{m}{2}\vec{x}^{\,2} + \frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$

$$K_4=\sqrt{2}\left[\left(t^2-\frac{\vec{x}^{\,2}}{2}\right)\partial_0+\left(t-\frac{1}{m}u\right)x^a\partial_a+\left(\frac{m}{2}\vec{x}^{\,2}-\frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$
$$K_a=-2x_aD+\left(\frac{2}{m}tu-\vec{x}^{\,2}\right)P_a,$$

где $\vec{x}^{\,2}=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $a,b=1,2,3$.

Чтобы установить связь между уравнениями $(*)$ и $(**)$, рассмотрим пространства $X_t\times V$ и $X\times U$, где $X=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\}$ и $X_t=\{(t,x_1,x_2,x_3)\}$ — пространства, представляющие независимые переменные, а $U=\{u\}$ и $V=\{v\}$ — пространства зависимых переменных. Отображение θ: $(t,\vec{x},v)\to(x_0,\vec{x},u)$, определенное с помощью формул

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{v}{m}\right),\quad x_a=x_a,\quad u=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{v}{m}\right),$$

является отображением пространства $X_t\times V$ на пространство $X\times V$. В предположении, что $\partial u/\partial x_0+1\neq 0$, подстановка θ переводит уравнение $(*)$ в уравнение $(**)$. Аналогично, отображение θ_1: $(x_0,\vec{x},u)\to(t,\vec{x},v)$, определенное с помощью формул

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+u),\quad x_a=x_a,\quad v=\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0-u),$$

является отображением пространства $X\times U$ на пространство $X_t\times V$ и если $m+v_t\neq 0$, то подстановка θ_1 переводит уравнение $(**)$ в $(*)$. Так как $\theta\theta_1$ — тождественное преобразование пространства $X\times U$, а $\theta_1\theta$ — тождественное преобразование пространства $X_t\times V$, то $\theta_1=\theta^{-1}$.

Исследуем зависимость между уравнениями $(*)$ и $(**)$ более подробно. С этой целью рассмотрим пространства $X_t\times V\times V^{(1)}$ и $X\times U\times U^{(1)}$, координаты которых представляют независимые переменные, зависимые переменные и производные первого порядка от зависимых переменных. Выделим в $X_t\times V\times V^{(1)}$ открытое подпространство M_1 состоящее из тех векторов (t,x,v,v_0,v_1,v_2,v_3), У которых $v_0+m\neq 0$, а в $X\times U\times U^{(1)}$ — открытое подпространство M_2, состоящее из тех векторов $(x_0,\vec{x},u,u_0,u_1,u_2,u_3)$, у которых $u_0+1\neq 0$. Покажем, что отображение $\theta: X_t\times V\to X\times U$ можно продолжить до отображения $\hat{\theta}$: $M_1\to M_2$.

Возьмем произвольную функцию $v=f(t,\vec{x})$ и пусть

$$\Gamma_f=\{(t,\vec{x},f(t,\vec{x})\,|\,(t,\vec{x})\in\omega\}\subset X_t\times V$$

— ее график, где ω — область определения функции f. Отображение θ переводит Γ_f в

$$\theta\cdot\Gamma_f=\{(x_0,\vec{x},u)=\theta(t,\vec{x},v)\,|\,((t,\vec{x},v)\in\Gamma_f\}.$$

Множество $\theta\cdot\Gamma_f$ в общем случае не является графиком какой-либо однозначной функции $u=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Однако, поскольку $m+v_t\neq 0$, то результат преобразования $\theta\cdot\Gamma_f=\Gamma_{\hat{f}}$ является графиком некоторой однозначной гладкой функции $u=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Докажем это. Действительно, имеем

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(x_0-u)-v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+u),x_1,x_2,x_3\right)=0. \tag{51}$$

Найдем производную по u:

$$-\frac{m}{\sqrt{2}} - v_t\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(m+v_t).$$

По условию $m+v_t \neq 0$. Поэтому уравнение (51) определяет в некоторой окрестности точки (x_0, x_1, x_2, x_3, u) u как однозначную неявную функцию $\hat{f}$ от x_0, x_1, x_2, x_3. Функция $\hat{f}$ называется образом f при отображении θ и обозначается $\hat{f} = \theta \cdot f$. Отметим также, что если $v_t = 0$, то уравнение Гамильтона–Якоби не имеет вещественных решений. Поэтому следует предполагать, что $v_t \neq 0$ и $m + v_t \neq 0$. При таком предположении $u_0 + 1 \neq 0$. Продолжение $\hat{\theta}$: $M_1 \to M_2$ отображения θ определяется так, что оно преобразует производные функции $v = f(t, \vec{x})$ в соответствующие производные преобразованных функций $u = \hat{f}(x_0, \vec{x})$. Продолженное действие отображения θ определено корректно. Действительно, пусть $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3)$ — заданная точка в M_1. Выберем произвольную гладкую функцию $v = f(t, \vec{x})$, определенную в окрестности точки $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, график которой лежит в M_1 и которая имеет данные производные v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3 в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$. Преобразованная функция $\theta \cdot f$ определена в окрестности соответствующей точки $(x^0_0, \vec{x}^{\,0}, u) = \theta(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0)$. Определим теперь действие продолженного преобразования $\hat{\theta}$ на точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3)$, вычисляя производные преобразованной функции $\theta \cdot f$ в точке $(x^0_0, \vec{x}^{\,0})$. Пользуясь цепным правилом, получаем, что это определение зависит лишь от производных функции f в точке $(t^0, \vec{x}^{\,0})$, т.е. от самой точки $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3)$, и следовательно, не зависит от выбора функции f, представляющей точку $(t^0, \vec{x}^{\,0}, v^0, v^0_0, v^0_1, v^0_2, v^0_3)$.

Пусть Δ_1 и Δ_2 — многообразия, определяющиеся уравнениями $(*)$ и $(**)$ соответственно, M_1 — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_1, для которых $u_0 + 1 \neq 0$, а M_2 — множество, состоящее из всех точек многообразия Δ_2, для которых $v_t + m \neq 0$. Очевидно, $M_1 = M_1 \cap \Delta_1$, $M_2 = M_2 \cap \Delta_2$ и в силу изложенного выше $\hat{\theta}$ отображает M_1 на M_2. Инвариантность уравнения $(*)$ относительно группы $G_1 = \exp AC(1,4)$ означает, что многообразие Δ_1 инвариантно относительно действия продолженной группы $\tilde{G}_1$. Аналогично, многообразие Δ_2 инвариантно относительно продолженной группы $\tilde{G}_2$, где $G_2 = \exp \hat{A}C(1,4)$. Отсюда вытекает, что если $g_1 \in \tilde{G}_1$, то $\hat{\theta} g_1 \hat{\theta}_1 \in G_2$ и, обратно, если $g_2 \in \tilde{G}_2$, то $\hat{\theta}_1 g_2 \hat{\theta} \in G_1$. Значит, отображение θ индуцирует изоморфизм φ_θ: $X \to \theta X \theta_1$ алгебры $AC(1,4)$ на алгебру $\hat{A}C(1,4)$, который действует следующим образом:

$$P_0 \to -\hat{P}_0, \quad P_4 \to -\hat{P}_4, \quad J_{ab} \to J_{ab}, \quad J_{a4} \to -\hat{J}_{a4}, \quad J_{04} \to -\hat{J}_{04},$$
$$J_{0a} \to -\hat{J}_{0a}, \quad K_0 \to -\hat{K}_0, \quad K_4 \to -\hat{K}_4, \quad K_a \to \hat{K}_a.$$

Докажем, например, что $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$. Действительно, пусть $f(x_0, \vec{x}, u)$ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда

$$\theta_1 f(x_0, \vec{x}, u) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{u}{m}\right), \vec{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{u}{m}\right)\right)$$

и значит, $P_0 \theta_1 f(x_0, \vec{x}, u) = -\frac{\partial f}{\partial x_0}$. Следовательно, $\theta P_0 \theta_1 = -\frac{\partial}{\partial x_0} = -\hat{P}_0$, а потому $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$.

Пусть H — произвольная подалгебра алгебры $AC(1,4)$, тогда $\varphi_\theta(H) = \hat{H}$ является подалгеброй алгебры $\hat{A}C(1,4)$, причем ранги алгебр H и $\hat{H}$ совпадают. Из предыдущих результатов вытекает, что если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — полная система инвариантов алгебры H, то $\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_s)$ — полная система инвариантов алгебры H. Анзац $\omega_s = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$, соответствующий подалгебре H, редуцирует уравнение $(*)$ к дифференциальному уравнению $F(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, содержащему только переменные $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$, функцию φ и частные производные $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ от φ по переменным $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$ соответственно. Анзац $\theta(\omega_s) = \varphi(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1})) = 0$, соответствующий подалгебре $\hat{H}$, редуцирует уравнение $(**)$ к дифференциальному уравнению $F(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}), \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, имеющему тот же вид, что и предыдущее. Это утверждение вытекает из равенства

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1 = -\frac{4m}{(m+v_t)^2}\left(v_t + \frac{1}{2m}(\Delta v)^2\right)$$

и соотношений

$$u_0 = \frac{m - v_t}{m + v_t}, \quad u_a = -\frac{\sqrt{2}}{m + v_t} v_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

которые связывают производные функций $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $v = \theta_1 u$.

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lettere al Nuovo Cimento*, 1982, **34**, № 16, 498–502.

2. Фущич В.И., Федорчук В.М., Федорчук И.М., Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений, Препринт № 86.27, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 36 с.

3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, P. 3645–3656.

4. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт № 88.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 48 с.

5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

Связные подгруппы конформной группы $C(1,4)$

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Предложен метод описания максимальных подалгебр ранга r, $1 \le r \le 4$, конформной алгебры $AC(1,4)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала. С помощью этого метода проведена классификация с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности всех максимальных подалгебр L ранга 1, 2, 3 и 4 алгебры $AC(1,4)$, удовлетворяющих условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, где V — пространство трансляций.

Введение. Уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

инвариантно относительно конформной группы $C(1,4)$ пространства Минковского $R_{1,4}$ с метрикой $x_0^2 - x_1^2 - x_3^2 - x_4^2$, где $x_4 = u$ [1]. Применение методов группового анализа для построения точных решений уравнения (1) связано с задачей выделения в группе $C(1,4)$ связных подгрупп, удовлетворяющих заданным требованиям. Изучение связных подгрупп группы $C(1,4)$ сводится к изучению подалгебр соответствующей алгебры Ли $AC(1,4)$. Систематическое изучение подалгебр алгебр преобразований квантовой механики начато в основополагающей работе Патеры, Винтериитца и Цассенхауза [2], в которой предложен метод для описания относительно определенной сопряженности классов подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом и, в частности, с нетривиальным абелевым идеалом.

Этим методом проведена классификация подалгебр произвольных вещественных трех- и четырехмерных алгебр Ли [3] и таких алгебр: $AP(1,3)$ [2], $A\tilde{P}(1,3)$ [4], $A\tilde{P}(1,2)$ [5], $AE(3)$ [6], $AO(1,4)$ [7], $AO(2,3)$ [8], $AOpt(1,2)$ [8], $AOpt(1,3)$ [9], $AP(1,4)$ [10–13]. Подалгебры конформной алгебры $AC(1,4)$ изучены с точностью до $C(1,4)$-сопряженности в работе [14].

В настоящей работе предложен новый метод для классификации подалгебр алгебры инвариантности $AC(1,4)$ уравнения (1). Он основан на том, что подалгебры алгебры $AC(1,4)$ изучаются с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности. Две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1,4)$ называются эквивалентными, если для некоторого $g \in C(1,4)$ подалгебры gL_1g^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами. Классификацию всех подалгебр конформной алгебры проводим по рангам. Две максимальные подалгебры L_1, L_2 данного ранга r эквивалентны тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 $C(1,4)$-сопряжены. Таким образом, в классе всех подалгебр алгебры $AC(1,4)$, эквивалентных между собой, существует с точностью до $C(1,4)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра. В работе предложен метод, с помощью которого подалгебры данного рода можно полностью описать.

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 7–8, С. 870–884.

Указанный метод основан на разложении пространства трансляций в ортогональную сумму подпространств и на разбиении множества всех подалгебр алгебры $AC(1,4)$ на классы, каждый из которых характеризуется изотропным рангом. В ходе решения задачи получено также описание максимальных подалгебр расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$ и решена задача о конформной сопряженности подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

2. Конформная группа $C(1,4)$ и ее алгебра Ли. Пусть $R_{1,4}$ — пространство Минковского с метрикой $g_{\alpha\beta}$, где $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4$, $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{44} = 1$. Отображение $x_i = x_i(y_0, y_1, \ldots, y_4)$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, области $U \subset R_{1,4}$ в U называется конформным, если

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} g^{kl} \frac{\partial x_l}{\partial y_\beta} = \lambda(x) g_{\alpha\beta},$$

где $\lambda(x) \neq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_4)$. Множество всех конформных преобразований пространства $R_{1,4}$ образует группу $C(1,4)$.

Пусть $O(2,5)$ — группа изометрий псевдоевклидова пространства $R_{2.5}$ с метрикой ρ_{ab}, где $\rho_{ab} = 0$ при $a \neq b$, $a, b = 1, 2, \ldots, 7$, $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \cdots = -\rho_{77} = 1$. Известно (см., например [14]), что существует гомоморфизм φ: $O(2,5) \to C(1,4)$, сопоставляющий матрице $C \in O(2,5)$ конформное преобразование φ_C пространства $R_{1,4}$. Ядро гомоморфизма φ состоит из $\pm E_7$, где E_7 — единичная матрица порядка 7. Поэтому часто отождествляют $C(1,4)$ с $O(2,5)$.

Гомоморфизм φ: $O(2,5) \to C(1,4)$ индуцирует изоморфизм f алгебры $AO(2,5)$ на алгебру $AC(1,4)$. Если отождествить алгебры $AO(2,5)$ и $AC(1,4)$, то группа $O(2,5)$-автоморфизмов алгебры $AO(2,5)$ совпадает с группой $C(1,4)$-автоморфизмов алгебры $AC(1,4)$. Выпишем изоморфизм f в явном виде. Пусть I_{ab} — матрица порядка 7, имеющая единицу на пересечении a-й строки и b-го столбца и нули на всех остальных местах ($a, b = 1, \ldots, 7$). Базис алгебры $AO(2,5)$ образуют матрицы $\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}$, $\Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ab}$, $a < b$; $a, b = 3, \ldots, 7$, $\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}$, $i = 1, 2$; $a = 3, \ldots, 7$. Они связаны такими коммутационными соотношениями:

$$[\Omega_{ab}\Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac}, \quad a, b, c, d = 1, \ldots, 7.$$

Базис алгебры $AC(1,4)$ составляют генераторы псевдовращений $J_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4$, трансляций (сдвигов) P_α, нелинейных конформных преобразований K_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, 4$, и дилатации D. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям [14]

$$\begin{gathered}
[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\gamma}, \quad [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} P_\gamma - g_{\alpha\gamma} P_\beta, \\
[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} K_\gamma - g_{\alpha\gamma} K_\beta, \quad [K_\alpha, K_\beta] = 0, \\
[D, P_\alpha] = P_\alpha, \quad [D, K_\alpha] = -K_\alpha, \quad [D, J_{\alpha\beta}] = 0, \quad [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta} D - J_{\alpha\beta}),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, 4$.

Изоморфизм f: $AO(2,5) \to AC(1,4)$ задается таким образом:

$$\begin{aligned}
&f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}) = J_{\alpha\beta}, \quad f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,7}) = P_\alpha, \\
&f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,7}) = K_\alpha, \quad f(\Omega_{17}) = -D, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем отождествлять прообраз с образом при изоморфизме f. В связи с этим получаем два набора обозначений для одного и того же базиса, а именно:

$$\begin{aligned}&\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha),\\&\Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha), \quad \Omega_{17} = -D, \quad \alpha,\beta = 0,1,\dots,7; \quad \alpha<\beta.\end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $Q_1,\dots,Q_7$ — ортонормированный базис псевдоевклидова пространства $R_{2,5}$ с метрикой

$$\rho(X,X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_5^2, \quad X = x_iQ^i.$$

Нормализатор одномерного вполне изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_7\rangle$ в алгебре $AO(2,5)$ совпадает с расширенной алгеброй Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4) = \langle P_0, P_1, \dots, P_4\rangle \oplus (AO(1,4) \oplus \langle D\rangle)$, а нормализатор двумерного изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6\rangle$ совпадает с алгеброй

$$AOpt(1,4) = \langle M, P_1, P_2, P_3, G_1, G_2, G_3\rangle \oplus (AO(3) \oplus \langle C,S,T,Z\rangle),$$

где

$$\begin{aligned}&AO(1,4) = \langle J_{\alpha\beta} \,|\, \alpha,\beta = 0,1,\dots,4\rangle, \quad AO(3) = \langle J_{\alpha\beta} \,|\, a,b = 1,2,3\rangle,\\&M = P_0 + P_4, \quad G_a = J_{0a} - J_{a4}, \quad a = 1,2,3, \quad C = -(J_{04} + D),\\&Z = J_{04} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_4), \quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_4).\end{aligned}$$

Алгебра $AOpt(1,4)$ называется оптической алгеброй пространства $R_{1,4}$.

Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2). Генераторы алгебры $AOpt(1,4)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}&[G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [P_a, G_b] = \delta_{ab}M,\\&[G_a, M] = [P_a, M] = [J_{ab}, M] = 0. \quad [C,S] = 2S, \quad [C,T] = -2T, \quad [T,S] = C,\\&[Z,M] = -2M, \quad [Z,G_a] = -G_a, \quad [Z,P_a] = -P_a,\\&[Z,C] = [Z,S] = [Z,T] = 0, \quad [C,G_a] = G_a, \quad [C,P_a] = -P_a, \quad [C,M] = 0,\\&[S,G_a] = 0, \quad [S,P_a] = -G_a, \quad [S,M] = 0, \quad [T,G_a] = P_a, \quad [T,P_a] = 0,\\&[T,M] = 0, \quad a,b,c = 1,2,3.\end{aligned}$$

3. Алгебра инвариантности уравнения эйконала. В работе [1] доказано, что максимальной алгеброй инвариантности уравнений эйконала (1) является алгебра Ли $AC(1,4)$ конформной группы $C(1,4)$ пространства Минковского $R_{1,4}$ с метрикой $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, где $x_4 = u$. Базис алгебры $AC(1,4)$ составляют такие векторные поля:

$$\begin{aligned}&P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_\beta - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_\alpha, \quad D = -x^\alpha\partial_\alpha,\\&K_\alpha = -2(g^{\alpha\beta}x_\beta)D - (g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma)\partial_\alpha,\end{aligned}$$

где $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha,\beta,\gamma = 0,1,2,3,4$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $C(1,4)$. Вещественная функция $f(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_4)$, определенная на некоторой области U пространства $R_{1,4}$ и не являющаяся тождественно постоянной, называется инвариантом группы G, если $f(x)$ постоянна на G-орбите каждой точки $x \in U$. Функцию $f(x)$ называют также инвариантом алгебры Ли AG группы G. Пусть $r_* = r_*(\xi)$ — общий ранг касательного отображения ξ группы G [15]. Число $r_*(AG) = r_*$ называется рангом алгебры AG. Пусть L_1 и L_2 — подалгебры алгебры $AC(1,4)$. Если для некоторого $g \in C(1,4)$ подалгебры gL_1g^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то L_1 и L_2 будем называть $C(1,4)$-эквивалентными.

Множество подалгебр алгебры $AC(1,4) = AO(2,5)$ разобьем на три класса: 1) подалгебры, не имеющие в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств; 2) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 1; 3) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$, инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 2 и не имеющее в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств размерности один. Подалгебры второго класса являются подалгебрами расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$. Подалгебры третьего класса являются подалгебрами оптической алгебры $AOpt(1,4)$ и не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Основная трудность — в задаче классификации подалгебр расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$. Решение такой задачи опирается на следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга r алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, не содержащихся в $AP(1,4)$ [16].

1. Для максимальной подалгебры $K \subset AP(1,4)$ ранга $r-1$ находим ее нормализатор в алгебре $A\tilde{P}(1,4)$. Пусть, например. $\mathrm{Nor}_{A\tilde{P}(1,4)}K = K + \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — подалгебра.

2. Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{N}$ всех одномерных подалгебр алгебры $\mathfrak{N}$ с ненулевой проекцией на $\langle D\rangle$.

3. Если $\langle D_1 + X_1\rangle, \ldots, \langle D_t + X_t\rangle$ — все одномерные подалгебры алгебры $\mathfrak{N}$, то $K \oplus \langle D_1 + X_1\rangle, \ldots, K \oplus \langle D_t + X_t\rangle$ — все расширения ранга r подалгебры K алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, содержащие подалгебру K.

В настоящей работе используются следующие обозначения: $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle$ — пространство трансляций расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$; $\hat{\pi}_0$, $\hat{\pi}$, $\hat{\omega}$ — проектирования $A\tilde{P}(1,4)$ на $\langle J_{04}\rangle$, $\langle D\rangle$, $AO(3)$, $AO(1,4)$ соответственно; $\hat{\psi}$, $\hat{\tau}$ — проектирования $AOpt(1,4)$ на $AO(3)$ и $\langle D, S, T, Z\rangle$ соответственно.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $AC(1,4)$. Если $P_0 \in L$ или $P_0 + P_4 \in L$, то уравнение (1) не имеет вещественных решений, инвариантных относительно L. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые подалгебры $L \subset AC(1,4)$ удовлетворяют условию $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$.

4. Подалгебры класса 0 алгебры $AC(1,4)$. Подалгебру $F \subset AO(2,5)$ отнесем к классу 0, если она не имеет в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств. Используя описание неприводимых подалгебр алгебр $AO(2,1)$, $AO(2,3)$ и $AO(2,2)$, а также соотношения (3), доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть F — подалгебра класса 0 алгебры $AC(1,4)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если F — максимальная подалгебра ранга 1, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12}\rangle,\quad \alpha > 0,\ \alpha \neq 2; \quad 2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0\rangle;$$

$$3)\ F_3 = \langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} + \beta J_{34}\rangle,\quad 0 < \alpha \leq \beta,\ \alpha, \beta \neq 2;$$

b) если F — максимальная подалгебра ранга 2, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0, J_{12}\rangle; \quad 2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0, J_{12} + \alpha J_{34}\rangle, \quad 0 < \alpha \le 1;$$
$$3)\ F_3 = \langle J_{12} + \alpha(P_0 + K_0), J_{34} + \beta(P_0 + K_0)\rangle, \quad \alpha > 0,\ \beta \ge 0,$$
$$2\alpha \ne 1 \text{ при } \beta = 0;$$

c) если F — максимальная подалгебра ранга 3, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34}\rangle;$$
$$2)\ F_2 = AO(3) \oplus \langle P_0 + K_0\rangle; \quad 3)\ F_3 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}\rangle;$$
$$4)\ F_4 = \langle P_0 - K_0 - \alpha(K_4 - P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle, \quad \alpha > 0,\ \alpha \ne 1;$$

d) если F — максимальная подалгебра ранга 4, то она сопряжена с одной из таких алгебр:

$$1)\ F_1 = \langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24}\rangle;$$
$$2)\ F_2 = \langle P_0 + K_0 - 4J_{23}, P_2 + K_2\sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03},$$
$$-P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, K_4 - P_4\rangle;$$
$$3)\ F_3 = \langle J_{12} - J_{34} + \alpha(P_0 + K_0)\rangle \oplus$$
$$\oplus \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle, \quad \alpha > 0;$$
$$4)\ F_4 = \langle P_0 + K_0\rangle \oplus AO(3) \oplus \langle K_4 - P_4\rangle;$$
$$5)\ F_5 = \langle P_0 + K_0\rangle \oplus \langle 2J_{12} + J_{34},$$
$$J_{13} + J_{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}(K_4 - P_4), J_{23} - J_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}(K_3 - P_3)\rangle;$$
$$6)\ \langle P_0 + K_0\rangle \oplus AO(4);$$
$$7)\ \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3, K_4 - P_4\rangle;$$
$$8)\ \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle;$$
$$9)\ \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}\rangle \oplus \langle K_3 - P_3, K_4 - P_4, J_{34}\rangle.$$

5. Одномерные подалгебры алгебры $\boldsymbol{A\tilde{P}(1,4)}$. Пусть $V = \langle P_0, P_1, \ldots, P_4\rangle$ — пространство трансляций алгебры Пуанкаре $AP(1,4)$. Подалгебра $L \subset AO(1,4)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AO(1,4)$ относится к классу 1 или имеет изотропный ранг 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства V, инвариантного относительно L, равен 1. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра алгебры $AO(1,4)$ имеет изотропный ранг 0 или 1. Аналогично определяются эти понятия и для подалгебры алгебры $AO(1,4)$.

Пусть L — подалгебра класса 0 алгебры $AO(1,4)$. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых L — подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \ldots, P_{k_0}\rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0+1}, \ldots, P_{k_0+k_1}\rangle$, $\ldots$, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \cdots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = 4$, $k_0 \ge 0$, $k_i \ge 1$, $i = 1, \ldots, s$. Здесь V_0

— псевдоевклидово пространство типа $(1, k_0)$, если $k_0 \neq 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i, $i = 1, \ldots, s$. Естественно возникает задача определения подобного разложения для подалгебры L класса 1 алгебры $AO(1,4)$. Всегда можно предполагать, что такая подалгебра L оставляет инвариантным подпространство $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$. Пространство $V_{(1)}$ с точностью до $O(1,4)$-сопряженности является прямой ортогональной суммой L-инвариантных подпространств U и W, удовлетворяющих двум условиям [16]:

a) пространство U изотропно и является ортогональной суммой $U = U_1 + \cdots + U_s$ L-инвариантных подпространств $U_1 = \langle P_0 + P_4\rangle \oplus V_1$, …, $U_s = \langle P_0 + P_4\rangle \oplus V_s$, где $V_1 = \langle P_1, \ldots, P_{k_1}\rangle$, …, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s}\rangle$, $\sigma = k_1 + \cdots + k_{s-1}$; каждое из подпространств U_1 содержит только следующие L-инвариантные подпространства: 0, $\langle P_0 + P_4\rangle$, U_i;

b) пространство W невырождено и является прямой ортогональной суммой подпространств $W_1 = \langle P_{l_0+1}, \ldots, P_{l_0+l_1}\rangle$, …, $W_t = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+l_t}\rangle$, $t \geq 0$, $l_0 = \sigma + k_s$, $\delta = l_0 + \cdots + l_{t-1}$, $\sigma + l_t = 3$; каждое из подпространств W_i неприводимо и инвариантно относительно L.

Отметим, что максимальная подалгебра класса 1 алгебры $AO(1,4)$, оставляющая $V_{(1)}$ инвариантным, совпадает с алгеброй $\langle G_1, G_2, G_3\rangle \oplus (AO(3) \oplus \langle J_{04}\rangle)$, где $G_a = J_{0a} - J_{a4}$, $AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $a = 1, 2, 3$.

Применим эти результаты к задаче классификации максимальных подалгебр данного ранга алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. В настоящем пункте рассматривается классификация одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

Теорема 2. *С точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности одномерные подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ исчерпываются следующими алгебрами:*

1) $L_1 = \langle J_{12}\rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12} + P_0\rangle$; 3) $L_3 = \langle J_{12} + P_0 + P_4\rangle$;
4) $L_4 = \langle J_{12} + P_3\rangle$; 5) $L_5 = \langle J_{12} + \alpha J_{34}\rangle$, $0 < \alpha \leq 1$;
6) $L_6 = \langle J_{12} + \alpha J_{34} + P_0\rangle$; 7) $L_7 = \langle G_1\rangle$; 8) $L_8 = \langle G_1 + P_2\rangle$;
9) $L_9 = \langle G_1 + P_0 - P_4\rangle$; 10) $L_{10} = \langle J_{12} + G_3\rangle$;
11) $L_{11} = \langle J_{12} + G_3 + P_0 - P_4\rangle$; 12) $L_{12} = \langle J_{04}\rangle$;
13) $L_{13} = \langle J_{04} + P_1\rangle$; 14) $L_{14} = \langle J_{12} + cJ_{04}\rangle$, $c > 0$;
15) $L_{15} = \langle J_{12} + cJ_{04} + P_3\rangle$, $c > 0$; 16) $L_{16} = \langle J_{12} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$;
17) $L_{17} = \langle J_{12} + J_{34} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$;
18) $L_{18} = \langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha D\rangle$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 19) $L_{19} = \langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$;
20) $L_{20} = \langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha D\rangle$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 21) $L_{21} = \langle G_3 + D\rangle$;
22) $L_{22} = \langle J_{12} + G_3 + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$; 23) $L_{23} = \langle J_{04} + D + M\rangle$;
24) $L_{24} = \langle J_{12} + \alpha(J_{04}) + D + M)\rangle$, $\alpha > 0$; 25) $L_{25} = \langle D\rangle$;
26) $L_{26} = \langle P_1\rangle$.

Доказательство. Пусть одномерная подалгебра L содержится в $AP(1,4)$ и относится к классу 0. Тогда пространство V является прямой суммой неприводимых L-подпространств. С точностью до $O(1,4)$-сопряженности $V = \langle P_0\rangle \oplus \langle P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3, P_4\rangle$. Следовательно, $L = \langle J_{12} + \alpha_{34} + \beta P_0\rangle$. Если $\beta \neq 0$, то автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} tD)$ отображает L на $\langle J_{24} + \alpha J_{34} + \varepsilon P_0\rangle$, $\varepsilon = \pm 1$. Так как автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}[-1,1,1,1,1]$, отображает алгебру $\langle J_{12} + \alpha J_{34} - P_0\rangle$

на алгебру $\langle J_{12}+\alpha_{34}+P_0\rangle$, то в рассматриваемом случае L сопряжена либо с L_5, либо с L_6.

Пусть далее одномерная подалгебра L, являющаяся подалгеброй алгебры $AP(1,4)$, относится к классу 1 и $\hat{\pi}_0(L)=0$. Если $V_{(1)}=\langle P_0+P_4\rangle\oplus\langle P_1,P_2\rangle\oplus\langle P_3\rangle$, то $\omega(L)=\langle J_{12}\rangle$. Поэтому $L=\langle J_{12}+X\rangle$, где $X\in\langle P_0,P_3,P_4\rangle$. В силу теоремы Витта существует такая изометрия пространства $\langle P_0,P_3,P_4\rangle$, которая отображает X в один из генераторов αP_0, αP_3, $\alpha(P_0+P_4)$. Рассмотрим, например, алгебру $\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$, $\alpha\neq 0$. Автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} tD)$ отображает ее на алгебру $\langle J_{12}+\varepsilon P_0\rangle$, $\varepsilon=\pm 1$. Если $\varepsilon=-1$, то автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}[-1,1,1,1,1]$, отображает алгебру $\langle J_{12}+P_0\rangle$ на алгебру $\langle J_{12}+P_0\rangle$. В двух других случаях показываем, что L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с алгебрами $\langle J_{12}+P_3\rangle$ и $\langle J_{12}+P_0+P_4\rangle$ соответственно. Аналогично, если пространство $V_{(1)}$ допускает разложение $V_{(1)}=\langle P_0+P_4,P_1\rangle\oplus\langle P_2\rangle\oplus\langle P_3\rangle$, то получаем алгебры $\langle G_1\rangle$, $\langle G_1+P_2\rangle$ и $\langle G_1+P_2\rangle$ и $\langle G_1+P_0-P_4\rangle$, а если $V_{(1)}=\langle P_0+P_4,P_3\rangle\oplus\langle P_1,P_2\rangle$, — то алгебры $\langle J_{12}+G_3\rangle$, $\langle J_{12}+G_3+P_0-P_4\rangle$.

Пусть L является подалгеброй алгебры $AP(1,4)$ и $\hat{\pi}(L)=\langle J_{04}\rangle$. Допустим, например, что $V_{(1)}=\langle P_0+P_4\rangle\oplus\langle P_1,P_2\rangle\oplus\langle P_3\rangle$. Тогда с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности $L=\langle J_{12}+cJ_{04}+X\rangle$, $X=\alpha P_3$, $c\neq 0$. Автоморфизм, соответствующий, матрице $\operatorname{diag}[1,T,1,1]$,

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

отображает L на $\langle J_{12}-cJ_{04}+\alpha P_3\rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $c>0$. Как и выше, нетрудно убедиться, что $\alpha=1$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда проекция L на $\langle D\rangle$ совпадает с $\langle D\rangle$. Тогда $L=\langle D+X\rangle$, где $X\in AP(1,4)$. Поэтому задача сводится к исследованию всех случаев, изложенных выше. Если $X=J_{12}+cJ_{34}+\beta P_0$, то очевидно, алгебра L сопряжена с алгеброй $\langle J_{12}+cJ_{34}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Теорема доказана.

Так как каждая одномерная подалгебра является максимальной подалгеброй ранга 1, то доказанная теорема дает полную классификацию максимальных подалгебр ранга 1 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности.

6. Подалгебры ранга 2 алгебры $\boldsymbol{A\tilde{P}(1,4)}$. В настоящем пункте проводим классификацию максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ с точностью до $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности, используя одномерные подалгебры алгебры $AP(1,4)$, классификация которых изложена в п. 5. Указанная задача решается в три этапа.

а) Подалгебры класса 0 алгебры $AP(1,4)$. Все максимальные подалгебры ранга 2, относящиеся к классу 0, описываются следующим предложением.

Предложение 1. *Пусть F — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу 0, и $F\cap V\subset\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$. Тогда она $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1=\langle J_{12},J_{34}\rangle$; 2) $F_2=\langle J_{12}+P_0,J_{34}+\delta P_0\rangle$, $\delta\geq 0$;

3) $F_3=\langle J_{03},J_{04},J_{34}\rangle$.

Доказательство. Пусть F — максимальная подалгебра ранга 2, относящаяся к классу 0, и $F\cap V=0$. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых F-подпространств. Допустим, например, что $V = \langle P_0\rangle \oplus \langle P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3, P_4\rangle$. Из условия $F \cap V = 0$ вытекает, что $F = \langle J_{12} + \alpha P_0, J_{34} + \beta P_0\rangle$. Если $\alpha = \beta = 0$, то получаем алгебру $F = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$. В случае $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ можно предполагать, что $\alpha \neq 0$. С помощью автоморфизма вида $\exp(\operatorname{ad} tD)$ алгебру F отображаем на алгебру $F' = \langle J_{12}+\varepsilon P_0, J_{34}+\beta' P_0\rangle$, где $\varepsilon = \pm 1$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}[-1, 1, 1, 1, 1]$, отображает F' на $F'' = \langle J_{12}+P_0, J_{34}+\beta'' P_0\rangle$. Всегда можно считать, что $\beta^2 \geq 0$. Разложению $V = \langle P_1\rangle \oplus \langle P_2\rangle \oplus \langle P_0, P_3, P_4\rangle$ пространства V соответствует подалгебра F_3 предложения 1. Предложение доказано.

b) Подалгебры класса 1 алгебры $AP(1, 4)$. Вначале проведем классификацию подалгебр алгебры $AP(1, 4)$, проекция которых на $\langle J_{04}\rangle$ равна 0. Описывает такие подалгебры следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть K — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1, 4)$, относящаяся к классу 1, $\hat{\pi}_0(K) = 0$ и $K \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда K $\tilde{P}(1, 4)$-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $K_1 = \langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_2 + \beta P_3\rangle,\ \alpha > 0\ \vee\ \alpha = 0,\ \beta \geq 0$;

2) $K_2 = \langle G_1, G_2 + P_2\rangle$; 3) $K_3 = \langle G_1 + P_0 - P_4, P_2\rangle$;

4) $K_4 = \langle G_1 + P_2, P_3\rangle$; 5) $K_5 = \langle G_1, P_3\rangle$; 6) $K_6 = \langle G_3, J_{12}\rangle$;

7) $K_7 = \langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}\rangle$; 8) $K_8 = \langle P_2, P_3, J_{23}\rangle$; 9) $K_9 = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$;

10) $K_{10} = \langle J_{12} + P_0 + P_4, G_3 + \alpha(P_0 - P_4)\rangle,\ \alpha \geq 0$;

11) $K_{11} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 12) $K_{12} = \langle J_{12}, P_3\rangle$;

13) $K_{13} = \langle J_{12} + P_0 + P_4, P_3\rangle$; 14) $K_{14} = \langle J_{12} + P_3, P_4\rangle$;

15) $K_{15} = \langle J_{12} + P_0, P_3\rangle$.

Доказательство. Пусть K — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1, 4)$, $K \cap V = 0$ и $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$ – разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям п. 5. Тогда $K = \langle G_1, G_2, G_3\rangle \oplus AO(3)$, где $AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$. Однако ранг алгебры K равен 3, что противоречит условию предложения. Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$. В этом случае $G_1, G_2 \in K$. В силу максимальности K имеем $J_{12} \in K$, а потому $K = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$, и алгебра K относится к типу 9 предложения 2.

Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1\rangle \oplus \langle P_0 + P_4, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$. Если проекция K на $\langle P_3\rangle$ равна 0, то с точностью до $\tilde{P}(1, 4)$-сопряженности K обладает базисом G_1, $G_2 + P_2$ и потому относится к типу 2 предложения 2. Пусть проекция K на $\langle P_3\rangle$ отлична от нуля. Тогда K относится к типу 1 предложения 2.

Пусть $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_3\rangle \oplus \langle P_1, P_2\rangle$. Алгебра K содержит генераторы $G_3 + \beta(P_0 - P_4)$ и $J_{12} + \delta(P_0 + P_4)$. В результате алгебра K относится к типам 6, 7, 10 предложения 2.

Случай $K \cap V = \langle P_3\rangle$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AP(1, 4)$, $\hat{\pi}_0(L) = \langle J_{04}\rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1, 4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{04}, P_1\rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12} + cJ_{04}, P_3\rangle,\ c > 0$; 3) $L_3 = \langle J_{04}, P_{12}\rangle$;

4) $L_4 = \langle G_3, J_{12} + cJ_{04}\rangle,\ c > 0$; 5) $L_5 = \langle J_{04} + P_2, P_1\rangle$;

6) $L_6 = \langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3\rangle,\ \delta \geq 0$; 7) $L_7 = \langle J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$;

8) $L_8 = \langle G_3, J_{04} + P_1 \rangle$.

Доказательство. Согласно алгоритму, изложенному в п. 2, классификация всех максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, удовлетворяющих предложению 3, сводится к нахождению всех неэквивалентных расширений одномерных подалгебр F ранга 1, для которых $\hat{\pi}_0(F) = 0$, с помощью одномерных подалгебр вида $\langle J_{04} + X \rangle$, $X \in AP(1,4)$.

1°. Алгебра $F = \langle J_{12} \rangle$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,4)} F_1$ алгебры F_1 в $AP(1,4)$ совпадает с алгеброй $F_1 \oplus AP(1,2)$, где $AP(1,2) = \langle P_0, P_3, P_4, J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle$. Поэтому задача свелась к нахождению всех одномерных подалгебр алгебры $AP(1,2)$ с точностью до $P(1,2)$-сопряженности. Алгебра $AP(1,2)$ содержит только такие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{04} \rangle$: $\langle J_{04} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha P_3 \rangle$, $\alpha > 0$. Таким образом, получаем следующие расширения ранга 2 алгебры F_1: $\langle J_{12}, J_{04} \rangle$, $\langle J_{12}, J_{04} + \alpha P_3 \rangle$, $\alpha > 0$.

2°. Алгебра $F_2 = \langle J_{12} + P_3 \rangle$. Очевидно, $\mathrm{Nor}_{AP(1,4)} F_2 = F_2 \oplus \langle P_0, P_3, P_4, J_{04} \rangle$. Алгебра $\langle P_0, P_3, P_4, J_{04} \rangle$ содержит следующие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{04} \rangle$: $\langle J_{04} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha P_3 \rangle$, $\alpha \geq 0$. В результате получаем такие максимальные подалгебры ранга 2: $\langle J_{12} + P_3, J_{04} \rangle$, $\langle J_{12} + P_3, J_{04} + \alpha P_3 \rangle$. Последняя подалгебра сопряжена с алгеброй $\langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3 \rangle$, $\delta \geq 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

c) Максимальные подалгебры ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Используя классификацию подалгебр, изложенную в пп. 6a) и 6b), получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) F_1–F_3 предложения 1; 2) K_1–K_{15} предложения 2;
3) L_1–L_8 предложения 3; 4) $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$;
5) $\langle J_{12}, J_{04} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$; 6) $\langle J_{12}, G_3 + D \rangle$; 7) $\langle J_{12}, D \rangle$;
8) $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, D \rangle,\ 0 \leq \alpha \leq 1$; 9) $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{12} + \beta D \rangle,\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ \beta \geq 0$;
10) $\langle G_3, D \rangle$; 11) $\langle G_3, J_{04} + D + M \rangle$; 12) $\langle G_3, J_{04} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$;
13) $\langle G_3, J_{12} + \beta D \rangle,\ \beta > 0$; 14) $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle,\ c > 0,\ a > 0$;
15) $\langle J_{12} + M, J_{04} + D \rangle$; 16) $\langle J_{12} + \alpha M, J_{04} + D + M \rangle,\ \alpha \geq 0$;
17) $\langle G_1 + P_2, J_{04} - D \rangle$; 18) $\langle G_1 + P_0 - P_4, J_{04} - 2D \rangle$; 19) $\langle J_{04}, D \rangle$;
20) $\langle J_{04}, J_{12} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$; 21) $\langle J_{12} + cJ_{04}, D \rangle,\ c > 0$;
22) $\langle J_{12} + cJ_{04}, J_{04} + \alpha D \rangle,\ c > 0,\ \alpha > 0$; 23) $\langle P_3, D \rangle$;
24) $\langle P_3, J_{12} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$; 25) $\langle P_3, J_{04} + \alpha D \rangle,\ \alpha > 0$;
26) $\langle P_3, J_{12} + cJ_{04} + \alpha D \rangle,\ c > 0,\ \alpha > 0$; 27) $\langle P_3, G_1 + D \rangle$;
28) $\langle P_3, J_{04} + D + M \rangle$; 29) $\langle P_3, J_{12} + c(J_{04} + D + M) \rangle$;
30) $\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2D) \rangle,\ c > 0$.

Теорема доказывается с использованием алгоритма, изложенного в п. 3.

7. Подалгебры ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Классификацию максимальных подалгебр ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ проводим по схеме, изложенной в п. 3. Вначале находим максимальные подалгебры ранга 3, относящиеся к классу 0.

a) Подалгебры класса 0 алгебры $AP(1,4)$. Описывает все максимальные подалгебры класса 0 следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть F — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $AP(1,4)$ и $F \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда F $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1 = \langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 2) $F_2 = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$;
3) $F_3 = \langle J_{12} + P_0, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 4) $F_4 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
5) $F_5 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$;

Предложение 4 доказывается аналогично предложению 1.

b) Подалгебры класса 1 алгебры $AP(1,4)$. Докажем следующее предложение.

Предложение 5. *Пусть K — максимальная подалгебра ранга* 3 *алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу* 1, *$\hat{\pi}_0(K) = 0$ и $K \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда K $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1 = \langle G_1, G_2, J_{12}, P_3\rangle$; 2) $K_2 = \langle G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
3) $K_3 = \langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 4) $K_4 = \langle G_3 + 2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
5) $K_5 = \langle G_1, G_2 + P_2, P_3\rangle$; 6) $K_6 = \langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
7) $K_7 = \langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3\rangle$, $\lambda > 0$; 8) $K_8 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4\rangle$.

Доказательство. Пусть $K \cap V = 0$ и $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle \oplus \langle P_3\rangle$ — разложение пространства $V_{(1)}$, удовлетворяющее условиям п. 3. Тогда $G_1, G_2 \in K$ и в силу максимальности K имеем $J_{12} \in K$. Следовательно, $K_1 = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle \subset K$ и потому $K = K_1 \oplus K'$. С учетом $K \cap V = 0$ отсюда получаем, что $K' = 0$. Однако, ранг алгебры K_1 равен 2, что противоречит условию. Если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$, то получаем $K = \langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$. Если $V_{(1)} = \langle P_0 + P_4, P_1\rangle \oplus \langle P_0 + P_4, P_2\rangle \oplus \langle P_0 + P_4, P_3\rangle$, то $K = \langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3\rangle$.

Случаи $K \cap V = \langle P_3\rangle$, $K \cap V = \langle P_1, P_2\rangle$ рассматриваются аналогично. Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга* 3 *алгебры $AP(1,4)$, относящаяся к классу* 1, *$\hat{\pi}_0(L) = \langle J_{04}\rangle$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $L_1 = \langle J_{04}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 2) $L_2 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$;
3) $L_3 = \langle J_{04} + P_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 4) $L_4 = \langle J_{04} + P_2, G_1, P_3\rangle$;
5) $L_5 = \langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04} + P_3\rangle$; 6) $L_6 = \langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$.

Предложение 6 доказывается аналогично предложению 3.

c) Максимальные подалгебры ранга 3 алгебры $AP(1,4)$. Используя классификацию подалгебр, изложенную в пп. 7a) и 7b), а также классификацию максимальных подалгебр ранга 2 алгебры $AP(1,4)$, изложенную в п. 6, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга* 3 *алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) F_1–F_5 предложения 4; 2) K_1–K_8 предложения 5;

3) L_1–L_6 предложения 6; 4) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$;

5) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$; 6) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;

7) $\langle G_1+P_3, G_2+\alpha P_2+\beta P_3, J_{04}-2D\rangle$, $\alpha>0 \vee \alpha=0$, $\beta>0$;

8) $\langle G_1, G_2+P_2, J_{04}-D\rangle$; 9) $\langle G_1+P_0-P_4, P_2, J_{04}-2D\rangle$;

10) $\langle G_1+P_2, P_3, J_{04}-D\rangle$; 11) $\langle G_1, P_3, D\rangle$; 12) $\langle G_1, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;

13) $\langle G_1, P_3, J_{04}+D+M\rangle$; 14) $\langle G_3, J_{12}, D\rangle$; 15) $\langle G_3, J_{12}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;

16) $\langle G_3, J_{12}, J_{04}+D+M\rangle$; 17) $\langle G_3+P_0-P_4, J_{12}, J_{04}-2D\rangle$;

18) $\langle P_2, P_3, J_{23}, D\rangle$; 19) $\langle P_2, P_3, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;

20) $\langle P_2, P_3, J_{23}, J_{04}+D+M\rangle$; 21) $\langle G_1, G_2, J_{12}, D\rangle$; 21) $\langle G_1, G_2, J_{12}, D\rangle$;

22) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha\neq 0$; 23) $\langle G_1, G_2, J_{04}+D+M\rangle$;

24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{33}, D\rangle$; 25) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;

26) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+D+M\rangle$; 27) $\langle J_{12}, P_3, D\rangle$;

28) $\langle J_{12}, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$; 29) $\langle J_{12}, P_3, J_{04}+D+M\rangle$;

30) $\langle J_{12}+M, P_3, J_{04}+D\rangle$; 31) $\langle J_{12}+\alpha M, P_3, J_{04}+D+M\rangle$, $\alpha>0$;

32) $\langle J_{04}, P_1, D\rangle$; 33) $\langle J_{12}+cJ_{04}, P_3, D\rangle$, $c>0$;

34) $\langle J_{12}+cJ_{04}, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle$, $c>0$, $\alpha>0$; 35) $\langle J_{04}, J_{12}, D\rangle$;

36) $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}, D\rangle$, $c>0$; 37) $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $c>0$, $\alpha\neq 0$.

Доказательство. Если $L\subset AP(1,4)$, то справедливость теоремы вытекает из предложений 4–6. Проведем классификацию максимальных подалгебр ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, проекция которых на $\langle D\rangle$ совпадает с $\langle D\rangle$. Согласно алгоритму, изложенному в п. 3, для каждой максимальной подалгебры ранга 2 алгебры $AP(1,4)$ необходимо найти все ее неэквивалентные расширения ранга 3 в алгебре $A\tilde{P}(1,4)$. Все вычисления приведены в таблице. Теорема доказана.

8. Подалгебры ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Классификацию максимальных подалгебр ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ проводим по схеме, изложенной в п. 3. В результате получим следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $L\cap V\subset\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Тогда L $\tilde{P}(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $AO(1,4)$; 2) $AO'(1,3)\oplus\langle P_3\rangle$, где $AO'(1,3)=\langle J_{\alpha\beta}\,|\,\alpha,\beta=0,1,2,4)$;

3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 4) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$;

5) $\langle J_{12}, P_3, P_4, J_{34}, D\rangle$; 6) $\langle J_{01}, J_{03}, J_{13}, P_4, D\rangle$; 7) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D\rangle$;

8) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 9) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, D\rangle$;

10) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, D\rangle$; 11) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$;

12) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$; 13) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, D\rangle$;

14) $\langle J_{04}, P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$; 15) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D\rangle$;

16) $\langle J_{04}, J_{12}, P_3, D\rangle$; 17) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;

18) $\langle G_1, G_2, J_{12}, P_3, J_{04}+D+M\rangle$;

19) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$; 20) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}, J_{04}+D+M\rangle$;

21) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D\rangle$, $\alpha\neq 0$;

№ п/п	Максимальные подалгебры ранга 2 алгебры $AP(1,4)$	Нормализатор подалгебры в $A\tilde{P}(1,4)$	Одномерные подалгебры нормализатора с нулевой проекцией на $\langle D\rangle$
1	$F_1 = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$	$F_1 \oplus \langle P_0, D\rangle$	$\langle D\rangle$
2	$F_3 = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$	$F_2 \oplus \langle P_1, P_2, J_{12}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{12} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$
3	$K_1 = \langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_2 + \beta P_3\rangle$	$K_1 \oplus \langle P_0 + P_4, J_{04} - 2D\rangle$	$\langle J_{04} - 2D\rangle$
4	$K_2 = \langle G_1, G_2 + P_2\rangle$	$K_2 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04} - D\rangle$	$\langle J_{04} - D\rangle$
5	$K_3 = \langle G_1 + P_0 - P_4, P_2\rangle$	$K_3 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04} - 2D\rangle$	$\langle J_{04} - 2D\rangle$
6	$K_4 = \langle G_1 + P_2, P_3\rangle$	$K_4 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04} - D\rangle$	$\langle J_{04} - D\rangle$
7	$K_5 = \langle G_1, P_3\rangle$	$K_5 \oplus \langle P_2, P_0 + P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
8	$K_6 = \langle G_3, J_{12}\rangle$	$K_6 \oplus \langle P_0 + P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
9	$K_7 = \langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}\rangle$	$K_7 \oplus \langle P_0 + P_4, J_{04} - 2D\rangle$	$\langle J_{04} - D\rangle$
10	$K_8 = \langle P_2, P_3, J_{23}\rangle$	$K_8 \oplus \langle P_0, P_1, P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
11	$K_9 = \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$	$K_9 \oplus \langle P_3, P_0 + P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
12	$K_{11} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$	$K_{11} \oplus \langle P_0, P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
13	$K_{12} = \langle J_{12}, P_3\rangle$	$K_{12} \oplus \langle P_0, P_4, J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
14	$K_{13} = \langle J_{12} + M, P_3\rangle$	$K_{13} \oplus \langle P_0, P_4, J_{04} + D\rangle$	$\langle J_{04} + D\rangle$, $\langle J_{04} + D + M\rangle$
15	$L_1 = \langle J_{04}, P_1\rangle$	$L_1 \oplus \langle P_2, P_3, D\rangle$	$\langle D\rangle$
16	$L_2 = \langle J_{12} + cJ_{04}, D\rangle$	$L_2 \oplus \langle J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$
17	$L_3 = \langle J_{04}, J_{12}\rangle$	$L_3 \oplus \langle P_3, D\rangle$	$\langle D\rangle$
18	$L_4 = \langle G_3, J_{12} + cJ_{04}\rangle$	$L_4 \oplus \langle J_{04}, D\rangle$	$\langle D\rangle$, $\langle J_{04} - \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$

22) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$;
23) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha D\rangle$, $\alpha > 0$;
24) $\langle G_3 + P_0 - P_4, P_1, P_2, J_{12}, J_{04} - 2D\rangle$;
25) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + D + M\rangle$; 26) $\langle G_1, G_2 + P_2, P_3, J_{04} - D\rangle$;
27) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4, D\rangle$; 28) $\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \lambda P_3, J_{04} - D\rangle$, $\lambda > 0$;
29) $\langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$.

9. Конформная сопряженность подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. В пп. 5–8 проведена классификация максимальных подалгебр ранга 1, 2, 3 и 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ с точностью до группы G_1 $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизмов. Все эти автоморфизмы оставляют инвариантным вполне изотропное подпространство $\bar{V}_{(1)} = \langle Q_1 + Q_7\rangle$. Полученное множество подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ обозначим через $\mathfrak{U}$. Две подалгебры $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ могут быть сопряжены с помощью некоторого $C(1,4)$-автоморфизма, не входящего в G_1. Следовательно, на втором этапе выделяется задача классификации подалгебр из множества $\mathfrak{U}$ с точностью до $C(1,4)$-сопряженности. Отметим, что если $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ $C(1,4)$-сопряжены, то подалгебры $\hat{\omega}(L_1)$ и $\hat{\omega}(L_2)$ относятся одновременно либо к классу 0, либо к классу 1. Рассмотрим вначале случай, когда $\hat{\omega}(L_1)$ и $\hat{\omega}(L_2)$ относятся к классу 0. Обозначим через C_1 и C_2 матрицы $\mathrm{diag}\,[1,1,1,1,1,1,-1]$ и $\mathrm{diag}\,[1,1,1,1,1,-1,1]$ соответственно. Пусть φ_i — $C(1,4)$-автоморфизм алгебры $AC(1,4)$, определяемый матрицей C_i, $i = 1, 2$. Полное решение задачи о сопряженности подалгебр $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ будет опираться на следующее предложение.

Предложение 7. *Пусть* $L \in \mathfrak{U}$ *— подалгебра алгебры* $A\tilde{P}(1,4)$ *и* $\hat{\omega}(L)$ *относится к классу* 0. *Если* W *—* L*-инвариантное вполне изотропное подпространство* V*, то существует такой* $\tilde{P}(1,4)$*-автоморфизм* f *алгебры* $A\tilde{P}(1,4)$*, что* $f(L) = L$ *и* $f(W) = \langle Q_1 + \varepsilon Q_7\rangle$*, где* $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда $L \cap V = 0$. Случай $L \cap V \subset \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ рассматривается аналогично. Так как $\hat{\omega}(L)$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $AO(1,4)$, то она либо полупроста, либо $O(1,4)$-сопряжена с алгеброй $AO(1,2) \oplus \langle J_{34}\rangle$. Если $\hat{\omega}(L)$ полупроста, то она имеет только расщепляемые расширения в алгебре $AP(1,4)$, а потому L сопряжена либо с алгеброй $AO(1,k)$, $2 \le k \le 4$, либо с алгеброй $AO(1,k) \oplus \langle D\rangle$. В случае $k = 4$ $W \subset \langle Q_1, Q_7\rangle$, а потому $W = \langle Q_1 + \varepsilon Q_7\rangle$. Пусть $k = 3$, тогда $W \subset \langle Q_1, Q_6, Q_7\rangle$. Образующий вектор Q пространства W запишем в виде $Q = \alpha(Q_1 + Q_7) + \beta(Q_1 - Q_7) + \gamma Q_6$. Так как Q — изотропный вектор, то $\gamma^2 - 4\alpha\beta = 0$. Подействовав на вектор Q автоморфизмом, определяемым элементом $\exp(\mathrm{ad}\, tP_6)$, получим

$$\exp(-tP_6) Q \exp(tP_6) = (\alpha + \gamma t + \beta t^2)(Q_1 - Q_7) + (\gamma + 2\beta t) Q_6.$$

Если $\beta = 0$, то $\gamma = 0$, а потому $W = \langle Q_1 + Q_7\rangle$. Допустим, что $\beta \ne 0$. Положим $\gamma + 2\beta = 0$, тогда $\alpha + \gamma t + \beta t^2 = 0$. Следовательно, $W = \langle Q_1 - Q_7\rangle$. Случай $k = 2$ рассматривается аналогично.

Алгебра $AO(1,2) \oplus \langle J_{34}\rangle$ аннулирует в пространстве V только нулевое подпространство. Следовательно, она имеет только расщепляемые расширения в алгебре $AP(1,4)$ и потому L сопряжена либо с алгеброй $AO(1,2) \oplus \langle J_{34}\rangle$, либо с алгеброй $AO(1,2) \oplus \langle J_{34} + \alpha D\rangle$. Таким образом, этот случай аналогичен случаю $L = AO(1,4)$. Предложение доказано.

Пусть теперь f — $C(1,4)$-автоморфизм, отображающий алгебру $L_1 \in \mathfrak{U}$ на алгебру $L_2 \in \mathfrak{U}$. Подпространство $f^{-1}(V_{(1)})$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L_1. В силу предложения 7 существует $P(1,4)$-автоморфизм ψ, отображающий $\langle Q_1 - Q_7 \rangle$ на $f^{-1}(V_{(1)})$, причем $\psi(L_1) = L_1$. Автоморфизм $f\psi$ отображает L_1 на L_2, а $\langle Q_1 - Q_7 \rangle$ на $V_{(1)}$. Таким образом, можно предполагать, что $f(L_1) = L_2$ и $f(\langle Q_1 - Q_7 \rangle) = V_{(1)}$. Автоморфизм $f\varphi_1$ отображает $V_{(1)}$ на $V_{(1)}$ и потому $f\varphi_1 = f_1$, где f_1 — некоторый $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм. Отсюда $f = f_1\varphi_1$. Последнее соотношение дает возможность проверить, будут ли сопряжены алгебры $L_1 \in \mathfrak{U}$ и $L_2 \in \mathfrak{U}$ с помощью некоторого $C(1,4)$-автоморфизма, не входящего в G_1. С этой целью действуем на алгебру L_1 автоморфизмом φ_1 и получаем алгебру $\varphi(L_1)$. Если L_1 и L_2 сопряжены, то выполняется условие $\varphi_1(L_1) \subset A\tilde{P}(1,4)$. При выполнении этого условия остается проверить алгебры $\varphi_1(L_1)$ и L_2 на сопряженность относительно группы $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизмов, а эта задача решена в предыдущих пунктах.

Пусть далее $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ $C(1,4)$-сопряжены и $\hat{\omega}(L_1)$, $\hat{\omega}(L_2)$ относятся к классу 1. Вполне изотропное подпространство $V_{(2)} = \langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6 \rangle$ инвариантно относительно каждой из подалгебр L_1, L_2. Цепочка подпространств $0 \subset V_{(1)} \subset V_{(2)}$ является композиционным рядом каждого из L_i-модулей $V_{(2)}$, $i = 1,2$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 8. *Пусть $L \in \mathfrak{U}$ — подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $\hat{\omega}(L)$ относится к классу 1. Если W — максимальное вполне изотропное подпространство V, инвариантное относительно L, и K — композиционный ряд L-модуля W, то существует такой $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм f алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, что $f(L) = L$, $f(W) = \langle Q_1 + \varepsilon_1 Q_7, Q_2 + \varepsilon_2 Q_6 \rangle$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1,2$, а композиционный ряд $f(K)$ модуля $f(W)$ имеет один из следующих видов: a)* $0 \subset \langle Q_1 + \varepsilon_1 Q_7 \rangle \subset f(W)$; *b)* $0 \subset \langle Q_2 + \varepsilon_2 Q_6 \rangle \subset f(W)$.

Предложение 8 доказывается аналогично предложению 7.

Покажем, как практически применить данное предложение к задаче сопряженности двух подалгебр $L_1, L_2 \in \mathfrak{U}$ относительно группы $C(1,4)$-автоморфизмов. Допустим, что L_1 и L_2 $C(1,4)$-сопряжены и f — автоморфизм, отображающий L_1 на L_2. Подпространство $f^{-1}(V_{(2)})$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L_1. В силу предложения 8 существует $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм ψ, отображающий $\langle Q_1 + \varepsilon_1 Q_7, Q_2 + \varepsilon_2 Q_6 \rangle$ на $f^{-1}(V_{(2)})$, и $\psi(L_1) = L_1$. Кроме того, автоморфизм ψ отображает композиционный ряд K одного из видов a), b) предложения 8 на композиционный ряд модуля $V_{(2)}$. Будем считать, что K имеет такой вид: $0 \subset \langle Q_2 + Q_6 \rangle \subset \langle Q_1 + Q_7, Q_2 + Q_6 \rangle$. Обозначим через θ автоморфизм, определяемый матрицей $\operatorname{diag}[T,1,1,1,T]$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Автоморфизм θ отображает K, на композиционный ряд $0 \subset V_{(1)} \subset V_{(2)}$. Нетрудно убедиться, что $f = f_1$, где f_1 — некоторый $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Отсюда вытекает, что если L_1 и L_2 $C(1,4)$-сопряжены, то $\theta(L_1) \subset A\tilde{P}(1,4)$ и подалгебры $\theta(L_1)$ и L_2 $\tilde{P}(1,4)$-сопряжены. Автоморфизм θ обладает такими свойствами:

$$\theta(G_a) = P_a, \quad \theta(P_a) = -G_a, \quad \theta(J_{04}) = -D, \quad \theta(D) = -J_{04}, \quad \theta(M) = M.$$

Из изложенного выше вытекает, что дальнейшее упрощение подалгебр из множества $\mathfrak{U}$ достигается за счет автоморфизмов вида $f\theta$, $f\psi\theta$, $f\varphi$, где $\varphi \in \{\varphi_1, \varphi_2\}$, f — $\tilde{P}(1,4)$-автоморфизм. В результате получаем следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 1 алгебры $AP(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_1\rangle$; 2) $\langle J_{12}\rangle$; 3) $\langle J_{12}+cJ_{34}\rangle,\ 0<c\le 1$; 4) $\langle J_{04}\rangle$;
5) $\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle,\ c>0$; 6) $\langle J_{12}+P_0\rangle$; 7) $\langle J_{12}+P_3\rangle$; 8) $\langle J_{12}+M\rangle$;
9) $\langle J_{12}+J_{34}+P_0\rangle$; 10) $\langle J_{12}+cJ_{34}+P_0\rangle,\ 0<c<1$; 11) $\langle J_{04}+P_1\rangle$;
12) $\langle J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle,\ c>0$; 13) $\langle G_3+P_1\rangle$; 14) $\langle G_3+2T\rangle$;
15) $\langle G_3-J_{12}+2T\rangle$; 16) $\langle J_{12}+cJ_{34}+\alpha D\rangle,\ 0<c\le 1,\ \alpha>0$;
17) $\langle J_{04}+\alpha D\rangle,\ 0<\alpha\le 1$; 18) $\langle J_{12}+cJ_{04}+\alpha D\rangle,\ 0<c\le\alpha$;
19) $\langle J_{04}-D+2T\rangle$; 20) $\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T)\rangle$.

Теорема 7. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, удовлетворяющая условию $L\cap V\subset\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_2,P_3,J_{23}\rangle$; 2) $\langle J_{12},P_3\rangle$; 3) $\langle J_{04},P_1\rangle$; 4) $\langle J_{12}+cJ_{04},P_3\rangle,\ c>0$;
5) $\langle G_3,P_1\rangle$; 6) $\langle J_{12},J_{34}\rangle$; 7) $\langle J_{04},J_{12}\rangle$; 8) $\langle G_3,J_{12}+cJ_{04}\rangle,\ c>0$;
9) $\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$; 10) $\langle J_{03},J_{04},J_{34}\rangle$; 11) $\langle J_{12}+P_0,P_3\rangle$; 12) $\langle J_{14}+P_3,P_2\rangle$;
13) $\langle J_{12}+M,P_3\rangle$; 14) $\langle J_{04}+P_2,P_1\rangle$; 15) $\langle G_3+P_2,P_1\rangle$;
16) $\langle G_3+2T,P_1\rangle$; 17) $\langle J_{12}+P_0,J_{34}+\delta_0P_0\rangle,\ \delta\ge 0$;
18) $\langle J_{04}+P_3,J_{12}+\delta P_3\rangle,\ \delta\ge 0$; 19) $\langle J_{04},J_{12}+P_3\rangle$;
20) $\langle J_{12}+M,G_3+\delta T\rangle,\ \delta=0;\ 2$; 21) $\langle J_{12},G_3+2T\rangle$;
22) $\langle G_1+P_3,G_2+\mu P_2+\delta P_3\rangle,\ \mu>0,\ \delta\ge 0$; 23) $\langle G_3,J_{04}+P_1\rangle$;
24) $\langle J_{12}+J_{34},D\rangle$; 25) $\langle J_{12}+cJ_{34},D\rangle,\ 0<c<1$; 26) $\langle J_{04},D\rangle$;
27) $\langle J_{12}+cJ_{04},D\rangle,\ c>0$; 28) $\langle J_{04}+\alpha D,P_1\rangle,\ \alpha>0$;
29) $\langle J_{12}+cJ_{04}+\beta D,P_3\rangle,\ c>0,\ \beta>0$;
30) $\langle J_{12}+\alpha D,J_{34}+\beta D\rangle,\ \alpha>0,\ \beta\ge 0$;
31) $\langle J_{04}+\alpha D,J_{12}+\beta D\rangle,\ \alpha>0,\ \beta\ge 0$; 32) $\langle J_{04},J_{12}+\alpha D\rangle$;
33) $\langle P_1,J_{04}-D+2T\rangle$; 34) $\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T),P_3\rangle,\ c>0$;
35) $\langle J_{04}+D+M,J_{12}+\alpha M\rangle,\ \alpha\ge 0$; 36) $\langle J_{04}+D,J_{12}+M\rangle$;
37) $\langle J_{04}-2D,G_3+2T\rangle$; 38) $\langle J_{04}-D,G_3+P_1\rangle$;
39) $\langle J_{12}+c(J_{04}-2D),G_3+2T\rangle,\ c>0$.

Теорема 8. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle J_{04},P_1,P_2,J_{12}\rangle$; 2) $\langle J_{04},J_{12},P_3\rangle$; 3) $\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle$;
4) $\langle J_{04}+P_3,P_1,P_2,J_{12}\rangle$; 5) $\langle J_{04}+\alpha D,P_1,P_2,J_{12}\rangle,\ \alpha\ne 0$;
6) $\langle J_{04},D,P_1\rangle$; 7) $\langle J_{12}+cJ_{04},DP_3\rangle,\ c>0$; 8) $\langle J_{04},J_{12},D\rangle$;
9) $\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}+\alpha D\rangle$; 10) $\langle J_{04}+D+M,J_{12}+\alpha M,P_3\rangle,\ \alpha\ge 0$;
11) $\langle J_{04}+D,J_{12}+M,P_3\rangle$; 12) $\langle P_1,P_2,P_4,J_{12},J_{14},J_{24}\rangle$;
13) $\langle J_{12},P_3,P_4,J_{34}\rangle$; 14) $\langle G_3,J_{04},P_1\rangle$; 15) $\langle J_{12},J_{13},J_{23},P_4\rangle$;
16) $\langle G_3,J_{04},J_{12}\rangle$; 17) $\langle G_1,G_2,J_{12},J_{04}\rangle$; 18) $\langle J_{03},J_{04},J_{34},J_{12}\rangle$;

19) $\langle J_{12}+P_0, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 20) $\langle J_{12}+\alpha D, P_3, P_4, J_{34}\rangle$;
21) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D\rangle$; 22) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D\rangle$, $\alpha>0$;
23) $\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 24) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle$;
25) $\langle G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 26) $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
27) $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$; 28) $\langle G_3+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
29) $\langle G_1, G_2-P_2, P_3\rangle$; 30) $\langle G_3, J_{04}+P_2, P_1\rangle$; 31) $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}+P_3\rangle$;
32) $\langle J_{04}+\alpha D, J_{12}+\beta D, P_3\rangle$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$; 33) $\langle G_3, J_{04}+\alpha D, P_1\rangle$;
34) $\langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 35) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1\rangle$; 36) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1\rangle$;
37) $\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$; 38) $AO(4)$.

Теорема 9. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 4 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $(1,4)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$; 2) $\langle J_{04}, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
3) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
4) $AO'(1,3)\oplus\langle P_3\rangle$, где $AO'(1,3)=\langle J_{\alpha\beta}\,|\,\alpha,\beta=0,1,2,4\rangle$; 5) $AO(1,4)$;
6) $\langle J_{12}, D, P_3, P_4, J_{34}\rangle$; 7) $\langle D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
8) $\langle J_{04}, D, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 9) $\langle J_{04}+\alpha D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
10) $\langle J_{04}, J_{12}, D, P_3\rangle$; 11) $\langle G_3+\alpha D, J_{04}+\beta D, P_1, P_2, J_{12}\rangle$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$;
12) $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3\rangle$; 13) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_2, D\rangle$; 14) $AO(4)\oplus\langle D\rangle$;
15) $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D\rangle$; 16) $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D\rangle$; 17) $AO'(1,3)\oplus\langle D\rangle$;
18) $\langle J_{04}-D+2T, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
19) $\langle J_{04}-2D, G_3+2T, P_1, P_2, J_{12}\rangle$; 20) $\langle J_{04}+D+M, G_3, P_1, P_2, J_{12}\rangle$;
21) $\langle J_{04}-D, G_1, G_2+P_2, P_3\rangle$.

10. Подалгебры оптической алгебры $AOpt(1,4)$. Целью настоящего пункта является описание подалгебр алгебры $AOpt(1,4)$, не имеющих в $R_{2,5}$ инвариантных вполне изотропных подпространств размерности 1. Подалгебры алгебры $AOpt(1,4)$, имеющие в $R_{2,5}$ инвариантное вполне изотропное подпространство размерности 1, сопряжены с подалгебрами расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$ и их классификация по рангам изложена в пп. 5–9.

Пусть L — подалгебра алгебры $AOpt(1,4)$. Если $\hat{\tau}(L)\subset\langle C, T, Z\rangle$, то L $C(1,4)$-сопряжена с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ [14]. Учитывая это, доказываем следующие теоремы.

Теорема 10. *Одномерные подалгебры алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженные с подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, исчерпываются с точностью до $C(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

1) $\langle S+T\rangle$; 2) $\langle S+T\pm M\rangle$; 3) $\langle J_{12}+\alpha(S+T)\rangle$, $\alpha>0$;
4) $\langle S+T+\alpha Z\rangle$, $\alpha>0$; 5) $\langle J_{12}+\alpha(S+T)\pm M\rangle$;
6) $\langle J_{12}+S+T+G_1+P_2\rangle$; 7) $\langle J_{12}+\alpha(S+T)+\beta Z\rangle$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

Теорема 11. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 2 алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с* *одной из следующих алгебр:*

1) $\langle S+T+J_{12}, G_1+P_2\rangle$; 2) $\langle J_{12}, S+T\rangle$; 3) $\langle S+T+J_{12}+M, G_1+P_2\rangle$;
4) $\langle S+T, Z\rangle$; 5) $\langle S+T+\alpha J_{12}, Z\rangle$, $\alpha>0$;
6) $\langle S+T+J_{12}+\lambda Z, G_1+P_2\rangle$, $\lambda>0$; 7) $\langle J_{12}+\alpha Z, S+T+\beta Z\rangle$, $\alpha>0$;
8) $\langle J_{12}, S+T+\alpha Z\rangle$, $\alpha>0$; 9) $\langle J_{12}+M, S+T+\gamma M\rangle$;
10) $\langle J_{12}, S+T+M\rangle$.

Теорема 12. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга 3 или 4 алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{P}(1,4)$. Тогда она $C(1,4)$-сопряжена с одной из таких алгебр:*

1) $AO(3)\oplus(S+T+\gamma M\rangle$, $\gamma<0$; 2) $\langle S+T, J_{12}, Z\rangle$;
3) $AO(3)\oplus\langle S+T+\alpha Z\rangle$; 4) $\langle S+T+J_{12}, Z, H_1+P_2\rangle$;
5) $\langle S+T+2J_{12}+\gamma M, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$, $\gamma<0$;
6) $\langle \alpha Z+S+T+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$, $\alpha\in R$;
7) $\langle Z, S+T+2J_{12}, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle$;
8) $AO(3)\oplus\langle S+T, Z\rangle$.

1. Fushchych W.I., Shfelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.
2. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
3. Patera J., Winternitz P., Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 7, 1449–1456.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
5. Patera J., WinternUz P., Sharp R.T., Zassenhaus H., Subgroups of the similitudre Group of three-dimensional Minkowski space, *Gan. J. Phys.*, 1976, **54**, № 9, 950–961.
6. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–93.
7. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in de Sitter space, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 5, 717–728.
8. Patera J., Sharp R.T., Winternltz P., Zassenhaus H., Continuous groups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
9. Burdet G., Patera J., Perrin H., Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
10. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717–722.
11. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
12. Федорчук В.М., Фущич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, Тр. Междунар. семинара “Теоретико-групповые методы в физике” (Звенигород, 1979), М., Наука, 1980, Т. 1, 61–66.
13. Fushchych W.I., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, 2893–2899.
14. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт 88.34, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988, 48 с.

15. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
16. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.

Редукция многомерного Пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям

А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Изучена структура инвариантов расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0, n-1)$, являющейся подалгеброй алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$. С использованием этих результатов проведена классификация максимальных подалгебр ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. По подалгебрам ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ построены анзацы, редуцирующие уравнение $\Phi(\Box u, (\nabla u)^2, u) = 0$ к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных.

1. Введение. Настоящая статья посвящена редукции нелинейного волнового уравнения

$$\Phi\left(\Box u, (\nabla u)^2, u\right) = 0 \tag{1}$$

в пространстве Минковского $R_{1,n}$ к двумерным уравнениям. Здесь $u = u(x)$ — скалярная функция от переменной x, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R_{1,n}$,

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

$$(\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Симметрийные свойства уравнения (1) при $n \leq 3$ изучались в [1], а для произвольного n — в [2, 3]. Частным случаем уравнения (1) являются уравнения Клейна–Гордона, Даламбера, Лиувилля, Гамильтона–Якоби, уравнение синус-Гордона и другие. Их изучению посвящены работы [1–8]. Для уравнения (1) важной является проблема редукции. Суть ее состоит в том, что вводятся новые переменные $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, являющиеся функциями от x и обладающие тем свойством, что анзац $u = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от меньшего числа переменных $\omega_1, \ldots, \omega_k$. В частном случае, когда $k = 1$, указанный анзац редуцирует уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi = \varphi(\omega_1)$. Построение всех анзацев для уравнения (1) является очень трудной задачей. Эту трудность в значительной мере можно преодолеть в случае, когда $\omega_1, \ldots, \omega_k$ являются инвариантными переменными.

Уравнение (1) инвариантно относительно группы преобразований Пуанкаре $P(1,n)$ пространства $R_{1,n}$. Функции $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$ называются инвариантными переменными, если они образуют полную систему инвариантов некоторой подгруппы группы $P(1,n)$. Построение инвариантных переменных тесно связано с

Укр. матем. журн., 1991, **43**, № 10, 1311–1323.

задачей классификации связных подгрупп группы $P(1,n)$, которая сводится к задаче классификации подалгебр соответствующей алгебры Ли $AP(1,n)$. В работе [3] описаны максимальные подалгебры ранга n алгебры $AP(1,n)$ с точностью до $P(1,n)$-сопряженности. Это позволило выделить семь анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В этой же работе построены все анзацы, редуцирующие уравнение (1) к дифференциальным уравнениям от двух и трех инвариантных переменных в пространствах Минковского $R_{1,2}$ и $R_{1,3}$. По редуцированным уравнениям найдены некоторые классы точных решений уравнений Клейна–Гордона, синус-Гордона и других уравнений.

Настоящая статья является продолжением исследований, выполненных в [7, 8]. В ней полностью изучена структура инвариантов расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n-1)$, являющейся подалгеброй алгебры $AP(1,n)$. Показано, что инварианты алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$ получаются из инвариантов ортогональной алгебры $AO(n-1)$, если в последних провести нелинейную замену переменных, явный вид которой определяется структурой инвариантного подпространства для подалгебры алгебры $AO(n-1)$. Результаты, относящиеся к инвариантам алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$, позволили дать классификацию максимальных подалгебр рачга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. По подалгебрам ранга $n-1$ построены анзацы, редуцирующие уравнение (1) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2. Подалгебры ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$ можно использовать для редукции нелинейных уравнении Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Эйконала в пространстве Минковского $R_{1,n}$.

2. Алгебра инвариантности уравнения (1). Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$, базис которой составляют такие векторные поля:

$$\begin{aligned}&P_\mu=\partial_\mu,\quad J_{0a}=x_0\partial_a+x_a\partial_0,\quad J_{ab}=x_b\partial_a-x_a\partial_b,\\&\mu=0,1,\dots,n;\quad a,b=1,2,\dots,n.\end{aligned}\tag{2}$$

Они связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}&[J_{\alpha\beta},J_{\gamma\delta}]=g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}J_{\alpha\beta}-g_{\beta\gamma}J_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\&[P_a,J_{\beta\gamma}]=g_{\alpha\beta}P_\gamma-g_{\alpha\gamma}P_\beta,\quad [P_\alpha,P_\beta]=0,\end{aligned}\tag{3}$$

где $g_{00}=-g_{11}=\cdots=-g_{nn}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta=0,1,\dots,n$. Алгебра $AP(1,n)$ содержит ортогональную алгебру $AO(n)=\langle J_{ab}\mid a,b=1,\dots,n\rangle$, псевдоортогональную алгебру $AO(1,n)=\langle J_{\mu\nu}\mid \mu,\nu=0,1,\dots,n\rangle$, коммутативную алгебру $V=\langle P_0,P_1,\dots,P_n\rangle$. Важной подалгеброй алгебры $AP(1,n)$ является расширенная специальная алгебра Галилея $A\tilde{G}(2,n-1)=\langle M,T,P_1,\dots,P_{n-1},G_1,\dots,G_{n-1}\rangle\oplus(AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$, где $M=P_0+P_n$, $T=\frac{1}{2}(P_0-P_n)$, $G_a=J_{0a}-J_{an}$, $a=1,\dots,n-1$, $AO(n-1)=\langle J_{ab}\mid a,b=1,\dots,n-1\rangle$. Ее можно определить как нормализатор изотропного пространства $\langle P_0+P_n\rangle$ в алгебре $AP(1,n)$. Алгебра $A\tilde{G}(2,n-1)$ содержит расширенную изохронную алгебру Галилея $A\tilde{G}(0,n-1)=\langle M,P_1,\dots,P_{n-1},G_1,\dots,G_{n-1}\rangle\oplus AO(n-1)$.

Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $AP(1,n)$ следует описать подалгебры алгебры $AP(1,n)$ с точностью до $P(1,n)$-эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $AP(1,n)$ называются $P(1,n)$-эквивалентными, если для некоторого $g\in P(1,n)$ алгебры gK_1g^{-1} и K_2 обладают одними и теми же инвариантами. Две максимальные подалгебры K_1 и K_2 данного ранга r эквивалентны тогда и только тогда, когда K_1 и K_2 $P(1,n)$-сопряжены. Таким образом, в классе всех подалгебр алгебры $AP(1,n)$ эквивалентных между собой, существует с точностью до $P(1,n)$-сопряженности только одна максимальная подалгебра. В настоящей статье предложен метод, с помощью которого подалгебры такого рода можно полностью описать.

Пусть K — некоторая подалгебра алгебры $AP(1,n)$. Если $P_0 \in K$, то любое решение $u = u(x)$ уравнения (1), инвариантное относительно K, не зависит от x_0 и потому является решением уравнения

$$\Phi\left(-\Box u, -(\nabla u)^2, u\right) = 0 \tag{4}$$

в евклидовом пространстве E_n, где

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad (\nabla u)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2.$$

Уравнение (4) инвариантно относительно алгебры Евклида $AE(n) = \langle P_1, \ldots, P_n, J_{12}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle$, генераторы которой имеют вид (2). Аналогично, если $P_0 + P_n \in K$, то любое решение уравнения (1), инвариантное относительно K, имеет вид $u = u(x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ и потому является решением уравнения (4) в евклидовом пространстве E_{n-1}. Таким образом, случаи $P_0, P_0 + P_n \in K$ свелись к задаче классификации подалгебр алгебр Евклида $AE(n)$ и $AE(n-1)$ и мы их рассмотрим отдельно.

В работе будут использованы следующие обозначения:

$$AO[r,s] = \langle J_{ab} \mid a, b = r, \ldots, s\rangle, \quad r \le s;$$
$$AE[r,s] = \langle P_r, \ldots, P_s\rangle \oplus AO[r,s], \quad r \le s;$$
$$AE_1[r,s] = \langle G_r, \ldots, G_s\rangle \oplus AO[r,s] \quad r \le s;$$

π_0, ω, φ — проектирование $A\tilde{G}(2,n-1)$ на $\langle J_{0n}\rangle$, $AO[1,n-1]$ и $\langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$ соответственно; ω_0 — проектирование $A\tilde{P}(1,n)$ на $AO(1,n)$; $\mathfrak{M}[r,s] = \langle G_r, \ldots, G_s, P_r, \ldots, P_s\rangle$ — векторное пространство над R, натянутое на $G_r, \ldots, G_s, P_r, \ldots, P_s$.

3. Инварианты расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0, n-1)$. При изучении структуры инвариантов произвольной подалгебры алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$ используется понятие примарной части подалгебры ортогональной алгебры $AO(n-1)$, введенное в работе [9].

Предложение 1. *Пусть $l = q_1 d_1$, $m_0 \ge 0$, $L = (L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]) \subset\!\!\!\!\!\!+ F$ — полупрямая сумма подалгебры $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$, и примарной алгебры $F \subset AO[m_0+1, m_0+l]$, являющейся подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[m_0+1, m_0+d_1]$, $AO[m_0 d_1+1, m_0+2d_1]$,..., $AO[m_0+(q_1-1)d_1+1, m_0+q_1 d_1]$. Если P_0, $P_0+P_n \notin L$, $L \cap V = 0$ и $\varphi(L) = \langle G_{m_0+1}, \ldots, G_{m_0+q_1 d_1}\rangle$, то L сопряжена с алгеброй $\mathfrak{N}_1 \oplus F$, где $\mathfrak{N}_1$ обладает базисом*

$$\begin{array}{l} G_{m_0+1} + \gamma_1 P_{m_0+1}, \ldots, G_{m_0+d_1} + \gamma_1 P_{m_0+d_1}, \\ G_{m_0+d_1+1} + \gamma_2 P_{m_0+d_1+1}, \ldots, G_{m_0+2d_1} + \gamma_2 P_{m_0+2d_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \gamma_{q_1} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots, G_{m_0+q_1 d_1} + \gamma_{q_1} P_{m_0+q_1 d_1}. \end{array} \tag{5}$$

Если $P_0, P_0 + P_n \notin L$*,* $L \cap V = 0$ *и* $\varphi(L) = \langle G_{m_0+1}, \ldots, G_{m_0+(q_1-1)d_1}\rangle$*, то* L *сопряжена с алгеброй* $\mathfrak{N}_2 \oplus F$*, где* $\mathfrak{N}_2$ *обладает базисом*

$$\begin{gathered}
G_{m_0+1} + \gamma_1 P_{m_0+1} + \lambda_1 P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots, G_{m_0+d_1} + \gamma_1 P_{m_0+d_1} + \lambda_1 P_{m_0+q_1d_1},\\
G_{m_0+d_1+1} + \gamma_2 P_{m_0+d_1+1} + \lambda_2 P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots,\\
G_{m_0+2d_1} + \gamma_2 P_{m_0+2d_1} + \lambda_2 P_{m_0+q_1d_1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_{m_0+(q_1-2)d_1+1} + \gamma_{q_1-1} P_{m_0+(q_1-2)d_1+1} + \lambda_{q_1-1} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots,\\
G_{m_0+(q_1-1)d_1} + \gamma_{q_1-1} P_{m_0+(q_1-1)d_1} + \lambda_{q_1-1} P_{m_0+q_1d_1}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. В силу условия $P_0 + P_n \notin L$ подалгебра $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$ коммутативная. Поэтому первая часть предложения 1 вытекает из работы [10]. Пусть далее $\varphi(L) = \langle G_{m_0+1}, \ldots, G_{m_0+(q_1-1)d_1}\rangle$. Тогда можно предполагать, что $L\cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$ есть подпрямая сумма алгебры $\langle G_{m_0+1}+\delta_1 P_{m_0+1}, \ldots, G_{m_0+(q_1-1)d_1} +\delta_{(q_1-1)d_1} P_{m_0+(q_1-1)d_1}\rangle$ и алгебры $\langle P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots, P_{m_0+q_1d_1}\rangle$. при этом $\delta_1 = \cdots = \delta_{d_1}$, $\delta_{d_1+1} = \cdots = \delta_{2d_1}, \ldots, \delta_{(q_1-2)d_1+1} = \cdots = \delta_{(q_1-1)d_1}$.

Алгебра $L \cap \mathfrak{M}[m_0+1, m_0+l]$ является прямой суммой алгебр $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{q-1}$, где $\mathfrak{M}_j$ — алгебра, обладающая базисом

$$\begin{gathered}
G_{m_0+(j-1)d_1+1} + \gamma_j P_{m_0+(j-1)d_1+1} + \delta^j_{11} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \cdots + \delta^j_{1d_1} P_{m_0+q_1d_1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_{m_0+jd_1} + \gamma_j P_{m_0+jd_1} + \delta^j_{d_11} P_{m_0+(q_1-1)d_1+1} + \cdots + \delta^j_{d_1d_1} P_{m_0+q_1d_1},\\
j = 1, \ldots, q_1 - 1.
\end{gathered}$$

Связывающая матрица

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} \delta^j_{11} & \cdots & \delta^j_{1d_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta^j_{d_11} & \cdots & \delta^j_{d_1d_1}\end{pmatrix}$$

сплетает представления неприводимой части алгебры F в пространствах $\langle G_{m_0+(j-1)d_1+1}, \ldots, G_{m_0+jd_1}\rangle$ и $\langle P_{m_0+(q_1-1)d_1+1}, \ldots, P_{m_0+q_1d_1}\rangle$. Поэтому $\Delta_j = \mu_j C_j$, где μ_j — вещественное число, а C_j — ортогональная матрица. $O(n)$-автоморфизм, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} E_{d_1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & C_j & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & E_{d_1}\end{pmatrix}$$

оставляет неизменным F, $\mathfrak{M}_l$ при $l \neq j$ и преобразует пространство $\mathfrak{M}_j$ в пространство, которому соответствует связывающая матрица $\mu_j E_{d_1}$. Предложение доказано.

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$, обладающая ненулевой проекцией $\omega(L)$ на $AO(n-1)$, P_0, $P_0 + P_n \notin L$. Обозначим через $A_1, \ldots, A_t$ примарные части $\omega(L)$. Тогда алгебра $L \cap \mathfrak{M}[1, n-1]$ коммутативна и инвариантна относительно $\omega(L)$. Согласно работе [11] она является прямой суммой

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \oplus \widetilde{W}, \tag{7}$$

подалгебр W_i, $i = 1, \ldots, t$, $\widetilde{W}$, удовлетворяющих соотношениям $[W_i, A_i] = [A_i, W] = W_i$, $[A_j, W_i] = 0$ при $j \neq i$, $\widetilde{W} = \{y \in W[L, y] = 0\}$. Изучим структуру инвариантов алгебр $L_i = W_i \oplus A_i$, $i = 1, \ldots, t$, так как они в значительной мере определяют структуру инвариантов алгебры L. Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением алгебры L_1. Ее примарная часть совпадает с A_1 и является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1, d_1]$, $AO[d_1 + 1, 2d_1]$,. . . ,$AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1 d_1]$. Инварианты алгебры L_1 будем рассматривать в пространстве функций от переменных $x_0 - x_n, x_1, \ldots, x_{q_1 d_1}$. Если $W_1 \neq 0$, то всегда можно предполагать, что $\varphi(L_1) = \langle G_1, \ldots, G_{q' d_1} \rangle$, где $1 \leq q' \leq q_1$. В зависимости от значения q' рассмотрим три случая.

a) Случай $q' = q_1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью до $O(n - 1)$-сопряженности обладает базисом (5) (если положить $m_0 = 0$). Так как ранг алгебры W_1 равен $q_1 d_1$, то она имеет два основных инварианта. В качестве этих инвариантов можно взять функции $x_0 - x_n$ и

$$\sigma = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{q_1} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \gamma_i} \left(x_{(i-1)d_1+1}^2 + \cdots + x_{id_1}^2 \right) + x_n^2.$$

Так как каждая из них является инвариантом алгебры A_1, то система функций $x_0 - x_n$, σ образует полную систему инвариантов алгебры L_1.

b) Случай $q' = q_1 - 1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью до $O(n - 1)$-сопряженности обладает базисом (6) (если положить $m_0 = 0$). Так как ранг алгебры W_1 равен $(q_1 - 1)d_1$, то ее полная система инвариантов состоит из $d_1 + 2$ функций. Очевидно, инвариантами W_1 являются функции $x_0 - x_n$ и

$$\sigma = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \gamma_i} \left(x_{(i-1)d_1+1}^2 + \cdots + x_{id_1}^2 \right) + x_n^2.$$

Эти инварианты функционально независимы. Найдем остальные d_1 функционально независимых инварианта алгебры W_1, которые дополняют систему двух инвариантов $x_0 - x_n$ и σ алгебры W_1 до полной системы инваиантов W_1. Легко убедиться, что инвариантом алгебры W_1 является функция

$$y_1 = \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d_1+1}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q_1-1)d_1+1}. \tag{8}$$

Подействовав на нее генератором $J_{1j} + J_{d_1+1, d_1+j} + \cdots + J_{(q_1-1)d_1+1, (q_1-1)d_1+j}$, $j = 2, \ldots, d_1$, получим такой инвариант алгебры W_1:

$$y_j = \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{\lambda_i x_{(i-1)d_1+j}}{x_0 - x_n + \gamma_i} - x_{(q_1-1)d_1+j}. \tag{9}$$

Мы нашли d_1 функционально независимых инварианта $y_1, \ldots, y_{d_1}$ алгебры W_1, которые вместе с инвариантами $x_0 - x_n$ и σ образуют полную систему инвариантов алгебры W_1. Запишем генераторы примарной алгебры B, являющейся подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1]$, $AO[d_1 + 1, 2d_1]$,. . . , $AO[(q_1 - 1)d_1 + 1, q_1 d_1]$ в новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{d_1}$. Рассмотрим, например, генератор

$$\tilde{J}_{ab} = J_{ab} + J_{d_1+a, d_1+b} + \cdots + J_{(q_1-1)d_1+a, (q_1-1)d_1+b}, \quad a < b,\ 1 \leq a,\ b \leq d_1.$$

Используя формулы (7) и (8), получаем, что в переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{d_1}$ генератор $\tilde{J}_{ab}$ принимает вид $\tilde{J}_{ab} = y_a \frac{\partial}{\partial y_b} - y_b \frac{\partial}{\partial y_a}$. Отсюда вытекает, что A_1 можно рассматривать как подалгебру ортогональной алгебры $A\tilde{O}(d_1) = \langle \tilde{J}_{12}, \ldots, \tilde{J}_{d_1-1,d_1} \rangle$, действующую в евклидовом пространстве $\tilde{E}_d$, состоящем из d_1-мерных векторов $(y_1, y_2, \ldots, y_{d_1})$.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1, в пространстве функций от $y_1, y_2, \ldots, y_{d_1}$ состоит из $d_1 - r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1, \ldots, \theta_{d_1-r}$. Используя эти функции, легко находим полную систему инвариантов алгебры L_1. Она состоит из функций $x_0 - x_n$, σ, $\theta_1, \ldots, \theta_{d_1-r}$, где вместо $y_1, \ldots, y_{d_1}$ подставлены из выражения (7) и (8).

c) Случай $q' < q_1 - 1$. Аналогично случаю b) A_1 можно рассматривать как подалгебру примарной алгебры B, являющейся подпрямой суммой ортогональных алгебр $A\tilde{O}[1, d_1]$, $A\tilde{O}[d_1+1, 2d_1]$,..., $A\tilde{O}[(q_1-q')d_1 - d_1 + 1, (q_1-q')d_1]$. Генераторы этих алгебр записаны в переменных $y_1, \ldots, y_{d_1}, \ldots, y_{(q_1-q')d_1}$, которые являются инвариантами алгебры W_1, не зависящими от u.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от переменных $y_1, \ldots, y_{(q_1-q')d_1}$, состоит из $(q_1 - q')d_1 - r$ функций $\theta_1, \ldots, \theta_{(q_1-q')d_1-r}$. Используя их, получаем, что полная система инвариантов алгебры L состоит из функций $x_0 - x_n$, σ, $\theta_1, \ldots, \theta_{(q_1-q')d_1-r}$.

Результаты, изложенные в настоящем пункте, сводят задачу построения инвариантов произвольной подалгебры алгебры $AP(1,n)$ к задаче построения инвариантов неприводимых подалгебр ортогональной алгебры $AO(k)$ для всех $k \leq n$. Известно [12], что неприводимая подалгебра L либо полупроста, либо является полупрямой суммой $L = S \oplus \mathfrak{Z}(L)$ полупростого идеала S и одномерного центра $\mathfrak{Z}(L)$ Задача построения инвариантов полупростой алгебры в общем случае неразрешима в квадратурах. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем предполагать, что если, например, $_1$ — примарная часть алгебры $\omega(L)$, то она является подпрямой суммой алгебр $AO[1, d_1]$, $AO[d_1+1, 2d_1]$,..., $AO[(q_1-1)d_1+1, q_1d_1]$, т. е. рассматриваются лишь те неприводимые подалгебры алгебры $AO[(i-1)d_1+1, id_1]$, которые совпадают с $AO[(i-1)d_1+1, id_1]$, $i = 1, \ldots, q_1$. Этому условию удовлетворяют, очевидно, все разрешимые подалгебры алгебры $AP(1,n)$. Однако класс подалгебр алгебры $AP(1,n)$, который выделяется с помощью данного условия, является более широким, чем класс разрешимых подалгебр.

4. Максимальные подалгебры ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Используя результаты, изложенные в пп. 2 и 3, найдем максимальные подалгебры ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$. Пусть $d_1, \ldots, d_t$ — натуральные числа, удовлетворяющие соотношениям $0 = d_0 < d_1 < \cdots < d_t = m$. Для любых двух натуральных чисел r и s, $r \leq s$, положим

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \ldots, G_s + \gamma P_s \rangle \oplus AO[r, s], \qquad \gamma \in R.$$

Теорема 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0, n-1)$ и P_0, $P_0 + P_n \notin L$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $B_1 = \Phi(d_0+1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-2]$;

2) $B_2 = L_1 \oplus \Phi(d+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-1]$, где $L_1 = W_1 \oplus A_1$, W_1 обладает базисом (6) при $m_0 = 0$, $l = d$, A_1 — диагональ в $AO[1, d_1] \oplus \cdots \oplus AO[(q-1)d_1+1, q_1d_1]$;

3) $B_3 = AO[1,d] \oplus \Phi(d+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-1]$, $d = 1, \ldots, n-2$, $m = d+1, , \ldots, n-1$, $n \geq 4$;

4) $B_4 = L_1 \oplus AE[m+1, n-1]$, *где* $L_1 = W_1 \oplus A_1$, W_1 *обладает базисом (6) при* $m_0 = 0$, $l = m$, A_1 *— диагональ в* $AO[1,d_1] \oplus \cdots \oplus AO[(q_1-1)d_1+1, q_1 d_1]$, $m = 2, \ldots, n-1$, $n \geq 4$;

5) $B_5 = L_1 \oplus AE[m+1, n-1]$, *где* $L_1 = W_1 \oplus A_1$, W_1 *обладает базисом (6) при* $m_0 = 0$, $l = m = 2q_1$, $A_1 = \langle J + \alpha M\rangle$, *а* $J = J_{12} + \cdots + J_{l-1,l}$, $m = 2, \ldots, n-1$, $n \geq 4$;

6) $B_6 = L_1 \oplus \Phi(d+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-1]$, *где* $L_1 = W_1 \oplus \langle J + \alpha M\rangle$, W_1 *обладает базисом (6) при* $m_0 = 0$, $l = d = 2q_1$, $J = J_{12} + \cdots + J_{d-1,d}$, $m = d+1, \ldots, n-1$;

7) $B_7 = AO[1,m] \oplus AE[m+1, n-1]$, $m = 1, \ldots, n-1$; $n \geq 2$;

8) $B_8 = \langle J_{12} + \alpha P_0\rangle \oplus AE[3,n]$, $\alpha > 0$, $n \geq 2$;

9) $B_9 = \langle J_{12} + M\rangle \oplus AE[3, n-1]$, $n \geq 3$;

10) $B_{10} = \langle J_{12} + \alpha P_3\rangle \oplus AE[4,n]$, $\alpha > 0$, $n \geq 3$.

Доказательство. При доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $L \cap V = 0$. Пусть $\omega(L) \neq 0$, $A_1, \ldots, A_t$ — примарные части алгебры $\omega(L)$, $W_1, \ldots, W_t$ — подпространства алгебры $L \cap \mathfrak{M}[1, n-1]$, определяемые разложением (7). По определению A_1 является подпрямой суммой алгебр $AO[1,d_1]$, $AO[d_1+1, 2d_1]$,..., $AO[(q_1-1)d_1+1, q_1, d_1]$. В зависимости от структуры пространства W_1 рассмотрим три случая.

а) Случай $\varphi(W_1) = \langle G_1, \ldots, G_{q_1 d_1}\rangle$. В силу предложения 1 можно считать, что W_1 обладает базисом (5), где $m_0 = 0$. Поэтому полная система инвариантов алгебры W_1 состоит из функций $x_0 - x_n$, σ, $x_{q_1 d_1 + 1}, \ldots, x_{n-1}$. Следовательно, любой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(x_0 - x_n, \sigma, x_{q_1 d_1+1}, \ldots, x_{n-1})$. В силу максимальности L отсюда вытекает, что $AO[1, d_1] \subset L$, а значит, $q_1 = 1$. Таким образом, алгебра $W_1 \oplus A_1$ совпадает с алгеброй $\Phi(d_0+1, d_1, \gamma_1)$ и выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = \Phi(d_0+1, d_1, \gamma_1) \oplus L'$. Через конечное число шагов t_1, $t_1 \leq t$, выделим в качестве прямых слагаемых все подалгебры $W_i \oplus A_i$ указанного вида, т.е.

$$L = \Phi(d_0+1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t_1-1}+1, d_{t_1}, \gamma_{t_1}) \oplus \overline{L}.$$

Если $\overline{L} = 0$, то, очевидно $d_{t_1} = n-2$ и мы получаем алгебру типа 1 теоремы 1.

Пусть $\omega(\overline{L}) = 0$ и $\overline{L} \neq 0$. Так как $\overline{L} \cap V = 0$, то с точностью до $P(1,n)$-сопряженности $\varphi(\overline{L}) = \langle G_{m+1}, \ldots, G_{n-2}\rangle$, где $m = d_{t_1}$. Поэтому алгебра $\overline{L}$ обладает либо базисом $G_{m+1} + \gamma_{m+1} P_{m+1}, \ldots, G_{n-2} + \gamma_{n-2} P_{n-2}$, либо базисом $G_{m+1} + \gamma_{m+1} P_{m+1} + \lambda_{m+1} P_{n-1}, \ldots, G_{n-2} + \gamma_{n-2} P_{n-2} + \lambda_{n-2} P_{n-1}$, где $\lambda_{m+1}^2 + \cdots + \lambda_{n-2}^2 \neq 0$. В первом случае $\overline{L} = \Phi(m+1, m+1, \gamma_{m+1}) \oplus \cdots \oplus \Phi(n-2, n-2, \gamma_{n-2})$ и потому алгебра L, относится к типу 1 теоремы. Во втором случае алгебра L относится к типу 2 теоремы.

Пусть далее $\omega(\overline{L}) \neq 0$. Тогда примарными частями алгебры $\overline{L}$ являются алгебры $A_{t_1+1}, \ldots, A_t$. Алгебра A_{t_1+1} является подпрямой суммой алгебр $AO[m+1, m+d]$, $AO[m+d+1, m+2d]$,..., $AO[m+(q-1)d+1, m+qd]$, где $m = d_{t_1}$. Допустим, что $W_{t_1+1} = \cdots = W_t = 0$. Если $q > 1$, то инвариантами алгебры A_{t_1+1}, а значит, и алгебры L являются функции $\varphi_1 = x_{m+1}^2 + \cdots + x_{m+d}^2$, $\varphi_2 = x_{m+d+1}^2 + \cdots + x_{m+d}^2$. так как инварианты $x_0 - x_n$, φ_1 и φ_2 алгебры L функционально независимы, то они образуют полную систему инвариантов алгебры L. Следовательно, любой другой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(x_0 - x_n, \varphi_1, \varphi_2)$ и потому $P_0 + P_n \in L$. Последнее соотношение противоречит предположению относительно алгебры L. Значит, $q = 1$. Аналогично доказываем, что $t_1 + 1 = t$. Следовательно, $L = \Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t_1-1} + 1, t_{t_1}, \gamma_{t_1}) \oplus AO[m + 1, m + d] \oplus \overline{L}'$, где $\omega(\overline{L}') = 0$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(\overline{L}') = \langle G_{m+d+1}, \ldots, G_{n-1}\rangle$ и потому $\overline{L}'$ обладает базисом $G_{m+d+1} + \gamma_{m+d+1}P_{m+d+1}, \ldots, G_{n-1} + \gamma_{n-1}P_{n-1}$. это означает, что алгебра L относится к типу 3 теоремы.

Допустим, что $W_{t_1+1} \neq 0$. Тогда $\varphi(W_{t_1+1}) = \langle G_{m+1}, \ldots, G_{m+q'd}\rangle$, где $1 \leq q' \leq q - 1$. В силу результатов п. 3 инвариантами алгебры $L_{t_1+1} = W_{t_1+1} \oplus A_{t_1+1}$ являются функции $x_0 - x_n$, $\theta_1, \ldots, \theta_{(q-q')d-r}$ (см. п. 3c). Они функционально независимы и каждая из них является инвариантом алгебры L. Отсюда вытекает, что если $q' < q - 1$, то $(q - q')d - r \geq 3$ и потому полная система инвариантов алгебры L состоит более чем из трех функций. Это противоречит предположению относительно алгебры L. Таким образом, $q' = q-1$ и потому в силу предложения 1 W_{t_1+1} обладает базисом (6). Но тогда инвариантами алгебры L_{t_1+1}, а значит, и алгебры L являются функции x_0-x_n, $y^2_{m+1}+\cdots+y^2_{m+d}$, где $y_{m+1}, \ldots, y_{m+d}$ заданы выражениями (8) и (9). Докажем, что $t_1 + 1 = t$. Действительно, пусть $t_1 + 1 < t$ Примарная алгебра A_{t_1+2} является подпрямой суммой алгебр $AO[m_1 + 1, m_1 + d_1]$, $AO[m_1 + d_1 + 1, m_1 + 2d_1], \ldots$, $AO[m_1 + (q_1 - 1)d_1 + 1, m_1 + q_1 d_1]$, где $m_1 = (q-1)d$. Если $W_{t_1+2} = 0$, то инвариантом алгебры A_{t_1+2}, а значит, и алгебры L является функция $x^2_{m_1+1} + \cdots + x^2_{m_1+d_1}$. Следовательно, полная система инвариантов алгебры L состоит из функций $x_0 - x_n$, $y^2_{m+1} + \cdots + y^2_{m+d}$, $x^2_{m_1+1} + \cdots + x^2_{m_1+d_1}$. Но тогда $P_0 + P_n \in L$, что противоречит предположению относительно алгебры L. Полученное противоречие доказывает, что если $t_1 + 1 < t$, то $W_{t_1+2} \neq 0$. Аналогично, как и выше, доказываем, что $\varphi(W_{t_1+2}) = \langle G_{m_1+1}, \ldots, G_{m_1+(q_1-1)d_1}\rangle$. Но тогда инвариантом алгебры $L_{t_1+2} = W_{t_1+2} \oplus A_{t_1+2}$ является функция $y^2_{m_1+1} + \cdots + y^2_{m_1+d_1}$, где $y_{m_1+1}, \ldots, y_{m_1+d_1}$ заданы выражениями (8) и (9), если положить $x_{(i-1)d_1+1} = x_{m_1+(i-1)d_1+1}$. Таким образом, мы нашли три функционально независимых инварианта x_0-x_n, $y^2_{m+1}+\cdots+y^2_{m+d}$, $y^2_{m_1+1}+\cdots+y^2_{m_1+d_1}$ алгебры L. Отсюда следует, что $P_0 + P_n \in L$ и мы снова приходим к противоречию. Следовательно, $t_1 + 1 = t$ и потому алгебра L относится к типу 2 или 6 теоремы.

b) Случай $\varphi(W_1) = \langle G_1, \ldots, G_{q'd_1}\rangle$, $1 \leq q' < q_1$. Из рассуждений, изложенных выше, вытекает, что $q' = q_1 - 1$ и потому W_1 обладает базисом (6) при $m_0 = 0$. Исключая алгебры, рассмотренные в п. a), доказываем далее, что $t = 1$. Таким образом, алгебра L относится к одному из типов 4, 5 теоремы.

c) Случай $\varphi(W_1) = 0$. Исключая алгебры, рассмотренные в пп. a) и b), получаем $W_2 = \cdots = W_t = 0$. Следовательно, $t = 1$ и потому алгебра L относится к типу 7 или 9 теоремы. Теорема доказана.

Опишем далее максимальные подалгебры ранга $n - 2$ алгебры $A\tilde{G}(2, n - 1)$ с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$. Каждая такая подалгебра представляется в виде полупрямой суммы $L \subset\!\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + X\rangle$, где L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$, а $X \in A\tilde{G}(0, n - 1)$.

Предложение 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n - 3$ алгебры $A\tilde{G}(0, n - 1)$, для которой существует элемент вида $J_{0n} + X$, $X \in A\tilde{G}(0, n - 1)$, содержащийся в нормализаторе алгебры L. Если $P_0, P_0 + P_n \notin L$, то L $P(1, n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$;

2) $AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]$, $d = 1,\dots,n-3$; $m = d+2,\dots,n-2$; $n \geq 4$;

3) $AE_1[1,d_1] \oplus AO[d_1+1,d_2] \oplus AO[d_2+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$, $d_1 = 1,\dots,n-3$; $d_2 = d_1+1,\dots,n-2$; $m = d_2+1,\dots,n-1$; $n \geq 4$;

4) $AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]$, $m = 1,\dots,n-2$; $n \geq 3$;

5) $AO[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$, $d = 1,\dots,n-2$; $m = d+1,\dots,n-1$; $n \geq 3$.

Доказательство. Пусть $\omega(L) \neq 0$, $A_1,\dots,A_t$ — примарные части $\omega(L)$ и A_1 является подпрямой суммой алгебр $AO[1,d_1], AO[d_1+1,2d_1],\dots,AO[(q_1-1)d_1+q_1d_1]$. Допустим, что $W_1 \neq 0$. Тогда из условия $[J_{0n}+X,L] \subset L$ вытекает $W_1 = \langle G_1,\dots,G_{q'd_1}\rangle$, где $q' \geq 1$. В силу максимальности L имеем $AO[1,d_1] \subset L$ и потому $q' = 1$. Таким образом, алгебра $W_1 \oplus A_1$ совпадает с $AE_1[1,d_1]$ и выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = AE_1[1,d_1] \oplus L'$. Если $L' = 0$, то $d_1 = n-3$ и алгебра L относится к типу 1 предложения 2. Пусть далее $L' \neq 0$. При этом условии $\omega(L') \neq 0$ и алгебры $A_2,\dots,A_t$ являются примарными частями алгебры $\omega(L')$. Из условия $[J_{0n}+X,L] \subset L$ и максимальности L вытекает $W_2 = \dots = W_t = 0$. Так как ранг алгебры L равен $n-3$, то $t \leq 3$. Рассмотрим случай $t = 2$. Нетрудно убедиться, что A_2 — ортогональная алгебра, совпадающая с $AO[d_1+1,n-1]$. Если $d_1+1 = n-2$, то $AO[d_1+1,n-1] = \langle J_{n-2,n-1}\rangle$ и потому $L = AE_1[1,d_1] \oplus \langle J_{n-2,n-1}+\alpha M\rangle$. Используя соотношение $[J_{0n}+X,L] \subset L$, получаем $\alpha = 0$. Таким образом, алгебра L относится к типу 2 предложения 2. Если $d_1+1 < n-2$, то $AO[d_1+1,n-1] \subset L$ и потому $L = AE_1[1,d_1] \oplus AO[d_1+1,n-1]$. Если $t = 3$, то аналогичными рассуждениями доказываем, что L относится к типу 3 предложения.

Допустим далее, что $W_1 = \dots = W_t = 0$. Если $t = 1$, то, очевидно, $L = AO[1,n-2]$. Если $t = 2$, то $L = AO[m+1,n-1]$.

Пусть $\omega(L) = 0$. В этом случае $L = \langle G_1\rangle$ и, значит, $n = 3$, т.е. получаем алгебру типа 1 предложения 2. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(2,n-1)$, $\pi_0(L) = \langle J_{0n}\rangle$, $L \cap V \subset \langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$;

2) $L_2 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]) \oplus \langle J_{0n}+\alpha P_{n-1}\rangle$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;

3) $L_3 = (AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]) \oplus \langle J_{n-2,n-1}+cJ_{0n}\rangle$, $m = 1,\dots,n-3$; $n \geq 4$; $c > 0$;

4) $L_4 = (AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $d = 1,\dots,n-3$; $m = d+1,\dots,n-2$; $n \geq 4$;

5) $L_5 = (AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n}+\alpha P_{n-1}\rangle$, $d = 1,\dots,n-3$; $m = d+1,\dots,n-2$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;

6) $L_6 = (AE_1[1,d_1] \oplus AO[d_1+1,d_2] \oplus AO[d_2+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $d_1 = 1,\dots,n-3$; $d_2 = d_1+1,\dots,n-2$, $m = d_2+1,\dots,n-1$; $n \geq 5$;

7) $L_7 = (AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n}\rangle$, $m = 1,\dots,n-2$; $n \geq 3$;

8) $L_8 = (AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n}+\alpha P_{n-1}\rangle$, $m = d+1,\dots,n-2$; $n \geq 4$; $\alpha > 0$;

9) $L_9 = (AO[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$*,* $d = 1,\ldots,n-2$*;* $m = d+1,\ldots,n-1$*;* $n \geq 3$.

Доказательство. Классификация всех максимальных подалгебр ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(2,n-1)$, удовлетворяющих условию теоремы 2, сводится к нахождению всех неэквивалентных расширений максимальных подалгебр F ранга $n-3$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle J_{0n} + X \rangle$, $X \in A\tilde{G}(0,n-1)$.

1°. Алгебра $F_1 = AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-3]$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,n)} F_1$ алгебры F_1 в $AP(1,n)$ совпадает с алгеброй $F_1 \oplus K$, где $K = \langle P_0 + P_n, P_{n-2}, P_{n-1}, J_{n-2,n-1}, J_{0n} \rangle$. Поэтому задача свелась к нахождению всех одномерных подалгебр алгебры K с точностью до сопряженности относительно группы внутренних автоморфизмов. Алгебра K содержит только такие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n} \rangle$: $\langle J_{0n} \rangle$, $\langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$, $\langle J_{n-2,n_1} + cJ_{0n} \rangle$, $c > 0$. Таким образом, получаем следующие расширения ранга $n-2$ алгебры F_1: $F_1 \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $F_1 \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$, $F_1 \oplus \langle J_{n-2,n_1} + cJ_{0n} \rangle$, $c > 0$.

2°. Алгебра $F_2 = AE_1[1,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1,n-2]$. Нормализатор $\mathrm{Nor}_{AP(1,n)} F_2$ алгебры F_2 в $AP(1,n)$ совпадает с алгеброй $F_2 \oplus K$, где $K = \langle P_0 + P_n, P_{n-1}, J_{0n} \rangle$. Алгебра K содержит следующие одномерные подалгебры с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n} \rangle$: $\langle J_{0n} \rangle$, $\langle J_{0n} + \alpha J_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$. В результате получаем такие максимальные подалгебры ранга $n > 2$, содержащие F_2: $F_2 \oplus \langle J_{0n} \rangle$, $F_2 \oplus \langle J_{0n} + \alpha J_{n-1} \rangle$, $\alpha > 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* L *— максимальная подалгебра ранга* $n-1$ *алгебры* $A\tilde{G}(2,n-1)$ *и* $L \cap V \subset \langle P_1,\ldots,P_n \rangle$*. Тогда* L $P(1,n)$*-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $AE[1,n-1]$*;*

2) $AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]$*,* $m = 1,\ldots,n-1$*;* $n \geq 2$*;*

3) $AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle$*,* $m = 2,\ldots,n-1$*;* $n \geq 3$*;*

4) $\langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2,n-1]$*,* $n \geq 2$*;*

5) $(AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-2]) \oplus \langle J_{0n} \rangle$*,* $m = 1,\ldots,n-2$*;* $n \geq 3$*;*

6) $\Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{t-1}+1,m,\gamma_1) \oplus AE[m+1,n-1]$*,* $m = 1,\ldots,n-1$*;* $n \geq 2$*;*

7) $\langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle \oplus AE[2,n-1]$*,* $n \geq 2$*;* $\alpha > 0$*;*

8) $(AE_1[1,m] \oplus \langle J_{0n} + \alpha P_{m+1} \rangle) \oplus AE[m+2,n-1]$*,* $m = 1,\ldots,n-2$*;* $\alpha > 0$*;* $n \geq 3$.

Доказательство. При доказательстве теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $L \cap V = 0$. Если $\pi_0(L) = \langle J_{0n} \rangle$, то L является полупрямой суммой $K \niplus \langle J_{0n} + X \rangle$ максимальной подалгебры K ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$ и одномерной подалгебры $\langle J_{0n} + X \rangle \subset A\tilde{G}(2,n-1)$. Используя описание максимальных подалгебр ранга $n-2$ алгебры $A\tilde{G}(0,n-1)$, изложенное в теореме 1, и доказательство теоремы 2, легко проводим классификацию подалгебр, удовлетворяющих указанным требованиям.

Если $\pi_0(L) = 0$, то доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1. Теорема доказана.

5. Максимальные подалгебры ранга $n-2$ и $n-1$ алгебры $AP(1,n)$. Подалгебра $L \subset AP(1,n)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L.

Теорема 4. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$, относящаяся к классу 0, и $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1 = AO[0,m] \oplus AE[m+1, n-2]$, $m = 2, \ldots, n-2$; $n \geq 4$;

2) $F_2 = AO[1,m] \oplus AE[m+1, n-1]$, $m = 1, \ldots, n-1$; $n \geq 3$;

3) $F_3 = \langle J_{12} + \alpha P_0, J_{34} + \beta P_0 \rangle \oplus AE[5,n]$, $n \geq 4$;

4) $F_4 = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle \oplus AO[3,m] \oplus AE[m+1,n]$, $m = 3, \ldots, n$; $n \geq 3$;

5) $F_5 = AO[0,m] \oplus AE[m+1, n-3] \oplus \langle J_{n-2,n-1} + \alpha P_n \rangle$, $m = 2, \ldots, n-3$; $\alpha > 0$; $n \geq 5$;

6) $F_6 = AO[0,d_1] \oplus AO[d_1+1, d_2] \oplus AO[d_2+1, m] \oplus AE[m+1, n]$, $d_1 = 2, \ldots, n-2$; $d_2 = d_1 + 1, \ldots, n-1$; $m = d_2 + 1, \ldots, n$; $n \geq 4$;

7) $F_7 = AO[0,d] \oplus AO[d+1,m] \oplus AE[m+1, n-1]$, $d = 2, \ldots, n-2$; $m = d+1, \ldots, n-1$; $n \geq 4$;

8) $F_8 = AO[0,m] \oplus AO[m+1,d] \oplus AE[d+1,n]$, $m = 1, \ldots, n-1$; $d = m+1, \ldots, n$; $n \geq 2$.

Доказательство. Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$, $L \cap V = 0$ и подалгебра $\omega_0(L)$ относится к классу 0. Тогда пространство V является прямой ортогональной суммой неприводимых L-подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_s$, каждое из которых невырождено. По теореме Витта можно предполагать, что $V_0 = \langle P_0, P_1, \ldots, P_{k_0} \rangle$, $V_1 = \langle P_{k_0}, \ldots, P_{k_0+k_1} \rangle$, …, $V_s = \langle P_{\sigma+1}, \ldots, P_{\sigma+k_s} \rangle$, где $\sigma = k_0 + k_1 + \cdots + k_{s-1}$, $\sigma + k_s = n$, $k_0 \geq 0$, $k_1 \geq 1$, $i = 1, \ldots, s$. Здесь V_0 — псевдоевклидово пространство типа $(1, k_0)$, если $k_0 \neq 0$, V_i — евклидово пространство размерности k_i, $i = 1, \ldots, s$. Если $k_0 = 0$, то $V_0 = \langle P_0 \rangle$. Отсюда вытекает, что алгебра $\omega_0(L)$ является подпрямой суммой подалгебр $A_1 = AO[1, k_1]$, …, $A_s = AO[\sigma+1, \sigma+k_s]$. Пусть $A_1 \neq 0$, а $A_2 = \cdots = A_s = 0$. Тогда $k_1 = n-1$ и потому L относится к типу 2 или 4 теоремы 4. Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, а $A_3 = \cdots = A_s = 0$. Нетрудно убедиться, что алгебра L относится к одному из типов 3, 8 теоремы 4. Если $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$, то вследствие максимальности L имеем $P_0 \in L$, что противоречит предположению.

Пусть далее $k_0 \neq 0$. Тогда $k_0 \geq 2$ и алгебра $\omega_0(L)$ является подпрямой суммой алгебр $A_0 = AO[1, k_0]$, $A_1 = AO[k_0+1, k_0+k_1]$, …, $A_s = AO[\sigma+1, \sigma+k_s]$. Если $A_1 = \cdots = A_s = 0$, то, очевидно, $k_0 = n-2$ и L относится к типу 1 теоремы 4. Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 = \cdots = A_s = 0$. Если допустить, что $k_1 > 3$, то $L = AO[0,k_0] \oplus AO[k_0+1, n-1]$. Если $k_1 = 2$, то $1 + k_0 = n-2$, т.е. $k_0 = n-3$. Следовательно, получаем такие алгебры: $AO[0,k_0] \oplus AO[k_0+1, n-1]$, $AO[0, n-3] \oplus \langle J_{n-2,n-1} + \alpha P_n \rangle$, $\alpha > 0$.

Пусть $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A_3 = \cdots = A_s = 0$. Тогда $k_0 + k_1 + k_2 = 3$ и алгебра L относится к типу 6 теоремы. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-2$ алгебры $AP(1,n)$ и $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) B_1–B_{10} *теоремы 1;*

2) F_1–F_8 *теоремы 4;*

3) L_2, L_3, L_5, L_7–L_9 *теоремы 2.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что каждая из подалгебр F_i теоремы 4, $i = 1, \ldots, 7$, максимальна в алгебре $AP(1,n)$. Исследуем на максимальность алгебры, представленные в теореме 2. Если алгебра L теоремы 2 не является максимальной в алгебре $AP(1,n)$, то она содержится в некоторой максимальной подалгебре L' ранга $n-2$, относящейся к классу 0. Так, для алгебры L_1 соответствующей максимальной подалгеброй L является алгебра $\langle J_{01},\dots,J_{0m},J_{1n},\dots,J_{mn},\ J_{0n}\rangle \oplus AE[m+1,n-3]$, которая сопряжена с алгеброй $AO[0,m+1]\oplus AE[m+2,n-2]$. Аналогично исследуются алгебры L_4, L_6. Все остальные алгебры теоремы 2, отличные от L_1, L_4 и L_6, максимальны в алгебре $AP(1,n)$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Тогда L $P(1,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AE[1,n-1]$;

2) $L_2 = AO[1,m]\oplus AE[m+1,n]$, $m=1,\dots,n$; $n\ge 2$;

3) $L_3 = AE_1[1,m]\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\ge 2$;

4) $L_4 = AO[1,m]\oplus AE[m+1,n-1]\oplus\langle J_{0n}\rangle$, $m=1,\dots,n-1$; $n\ge 3$;

5) $L_5 = AO[0,m]\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=2,\dots,n-1$; $n\ge 3$;

6) $L_6 = AO[0,m]\oplus AO[m+1,q]\oplus AE[q+1,n]$, $m=2,\dots,n-1$; $q=m+1,\dots,n$; $n\ge 3$;

7) $L_7 = \langle G_1+P_0-P_n\rangle\oplus AE[2,n-1]$, $n\ge 2$;

8) $L_8 = \Phi(d_0+1,d_1,\gamma_1)\oplus\cdots\oplus\Phi(d_{t-1}+1,m,\gamma_t)\oplus AE[m+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-1$; $n\ge 3$;

9) $L_9 = \langle J_{0n}+\alpha P_1\rangle\oplus AE[2,n-1]$, $n\ge 2$; $\alpha>0$;

10) $L_{10} = (AE_1[1,m]\oplus\langle J_{0n}+\alpha P_{m+1}\rangle)\oplus AE[m+2,n-1]$, $m=1,\dots,n-2$; $\alpha>0$; $n\ge 3$;

11) $L_{11} = \langle J_{13}+\alpha P_0\rangle\oplus AE[3,n]$, $n\ge 2$; $\alpha>0$.

Теорема 6 доказывается аналогично доказательству теорем 4 и 5.

6. Редукция по подалгебрам алгебры $AP(1,n)$. В настоящем пункте проводим редукцию уравнения (1) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1, ω_3. Для проведения указанной редукции используем максимальные подалгебры L ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$, удовлетворяющие условию $L\cap V\subset\langle P_1,\dots,P_n\rangle$. Отдельно рассмотрим случай, когда $L\cap V$ изотропно или $L\cap V=\langle P_0\rangle$.

Пусть L — некоторая подалгебра алгебры $AP(1,n)$. Если $P_0\in L$ или $P_0+P_n\in L$, то, как показано в п. 2, любое решение уравнения (1), инвариантное относительно L, является решением уравнения (4) в евклидовом пространстве E_n. Таким образом, случаи $P_0, P_0+P_n\in L$ свелись к задаче классификации подалгебр Евклида $AE(n)$ и $AE(n-1)$.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-3$ алгебры Евклида $AE[1,n-1]$. Тогда L $E[1,n-1]$-сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $F_1 = AO[1,m]\oplus AE[m+1,n-2]$, $m=1,2,\dots,n-2$; $n\ge 4$;

2) $F_2 = AO[1,m]\oplus AO[m+1,d]\oplus AE[d+1,n-1]$, $m=1,\dots,n-2$; $d=m+1,\dots,n-1$; $n\ge 4$;

3) $F_3 = \langle J_{12}+\alpha P_3\rangle\oplus AE[4,n-1]$, $\alpha>0$; $n\ge 4$.

Предложение 3 доказывается аналогично доказательству теоремы 4.

Подалгебрам F_1–F_3 предложения 3 соответствуют такие анзацы:

$$
\begin{aligned}
&F_1: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+\dots+x_m^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=x_{n-1};\\
&F_2: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+\dots+x_m^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\left(x_{m+1}^2+\dots+x_d^2\right);\\
&F_3: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}+x_3.
\end{aligned}
$$

Анзац $u=\varphi(\omega_1,\omega_2)$ редуцирует уравнение (4) к дифференциальному уравнению от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2:

$$
\begin{aligned}
&F_1: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}-\frac{m-1}{\omega_1}\varphi_1-\varphi_{22},-\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;\\
&F_2: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}-\frac{m-1}{\omega_1}\varphi_1-\varphi_{22}-\frac{d-m-1}{\omega_2}\varphi_2,-\varphi_1^2-\varphi_2^2,\varphi\right)=0;\\
&F_3: \quad \Phi\left(-\varphi_{11}-\frac{1}{\omega_1}\varphi_1-\alpha^2\varphi_{22}+\frac{\alpha}{\omega_2}\varphi_2,-\varphi_1^2-(\alpha^2+1)\varphi_2^2,\varphi\right)=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Используя далее подалгебры ранга $n-2$ алгебры $AE(n)$, изложенные в предложении 3 (если вместо $n-1$ положить n), редуцируем уравнение (4) к дифференциальным уравнениям от двух инвариантных переменных ω_1 и ω_2. Все эти редуцированные уравнения имеют вид (10).

Проведем редукцию уравнения (1) по подалгебрам L_i, представленными в теореме 6. Этим подалгебрам соответствуют следующие анзацы:

$$
\begin{aligned}
&L_1: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x_0, \quad \omega_2=x_n;\\
&L_2: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x_0, \quad \omega_2=\left(x_1^2+\dots+x_m^2\right)^{1/2};\\
&L_3: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x_0-x_n, \quad \omega_2=\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2};\\
&L_4: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+\dots+x_m^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\left(x_0^2-x_n^2\right)^{1/2};\\
&L_5: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_1^2\dots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=x_{m+1};\\
&L_6: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_1^2\dots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2},\\
&\qquad \omega_2=\left(x_{m+1}^2+\dots+x_q^2\right)^{1/2};\\
&L_7: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=(x_0-x_n)^2-4x_1,\\
&\qquad \omega_2=(x_0-x_n)^2-6x_1(x_0-x_n)+6(x_0+x_n);\\
&L_8: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_2=x_0-x_n,\\
&\qquad \omega_1=x_0^2-\sum_{i=1}^{t}\frac{(d_i-d_{i-1})(x_0-x_n)}{x_0-x_n+\gamma_i}\left(x_{d_{i-1}+1}^2+\dots+x_{d_i}^2\right)+x_n^2;\\
&L_9: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_n^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=\alpha\ln(x_0+x_n)-x_1;\\
&L_{10}: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_0^2-x_1^2-\dots-x_m^2-x_n^2\right)^{1/2},\\
&\qquad \omega_2=\alpha\ln(x_0-x_n)+x_{m+1};\\
&L_{11}: \quad u=\varphi(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2=x_0+\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}.
\end{aligned}
$$

Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от двух инвариантных переменных ω_2 и ω_2:

$$L_1: \quad \Phi\left(\varphi_{11} - \varphi_{22}, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_2: \quad \Phi\left(\varphi_{11} - \varphi_{22} + \frac{1-m}{\omega_2}\varphi_2, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_3: \quad \Phi\left(2\varphi_{11} + \frac{2\omega_1}{\omega_2}\varphi_{12} + \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_2}\varphi_2, 2\varphi_1^2 + \frac{2\omega_1}{\omega_2}\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_4: \quad \Phi\left(-\varphi_{11} + \varphi_{22} + \frac{1-m}{\omega_1}\varphi_1 + \frac{1}{\omega_2}\varphi_2, -\varphi_1^2 + \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_5: \quad \Phi\left(\varphi_{11} - \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_1}\varphi_1, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_6: \quad \Phi\left(\varphi_{11} - \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_1}\varphi_1 + \frac{m+1-q}{\omega_2}\varphi_2, \varphi_1^2 - \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_7: \quad \Phi\left(-\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{22}, -\varphi_1^2 + 4\omega_1\varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_8: \quad \Phi\left(\varphi_{11} + \frac{2\omega_2}{\omega_1}\varphi_{12} + \frac{1}{\omega_1}\left[1 + \sum_{i=1}^{t}\frac{(d_i - d_{i-1})\omega_2}{\omega_2 + \gamma_i}\right]\varphi_1, \right.$$
$$\left. \varphi_1^2 + \frac{2\omega_2}{\omega_1}\varphi_1\varphi_2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_9: \quad \Phi\left(\varphi_{11} + \frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_{12} - \varphi_{22} + \frac{1}{\omega_1}\varphi_1, \varphi_1^2 + \frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_{10}: \quad \Phi\left(\varphi_{11} + \frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_{12} - \varphi_{22} + \frac{m+1}{\omega_1}\varphi_1, \varphi_1^2 + \frac{2\alpha}{\omega_1}\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2^2, \varphi\right) = 0;$$

$$L_{11}: \quad \Phi\left(-\varphi_{11} + \frac{\omega_1^2 - 1}{\omega_1^2}\varphi_{22} - \frac{1}{\omega_1}\varphi_1, -\varphi_1^2 + \frac{\omega_1^2 - 1}{\omega_1^2}\varphi_2^2, \varphi\right) = 0.$$

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
3. Grundland A.M., Harnad J., Winlernilz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically equations, *J. Math. Pnys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
5. Фущич В.И., Баранник А.Ф., О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера в пространстве Минковского $R_{1,n}$, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1990, № 6, 31–34.
6. Баранник Л.Ф., Симметрийная редукция и точные решения уравнения Лиувилля, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1988, № 12, 3–5.
7. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 11, 1552–1559.
8. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 12, 1693–1700.

9. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, **38**, № 1, 67–72.

10. Barannik L.F., Fushchych W.I., On continuous subgroups of the generalired Schrödinger group, *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, № 1, 31–40.

11. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подалгебры обобщенной алгебры Галилея, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 39–43.

12. Гото М., Гроссханс Ф., Полупростые алгебры Ли, М., Мир, 1981, 336 с.

О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера

А.Ф. БАРАННИК, В.А. МАРЧЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

С использованием канонического разложения произвольной подалгебры ортогональной алгебры $AO(n)$ описаны максимальные подалгебры ранга n и $n-1$ расширенной изохронной алгебры Галилея, а также максимальные подалгебры ранга n обобщенной расширенной классической алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,n)$, расширенной специальной алгебры Галилея $A\tilde{G}(2,n)$ и расширенной полной алгебры Галилея $A\tilde{G}(3,n)$. По подалгебрам ранга п построены анзацы, редуцирующие многомерные уравнения Шредингера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены точные решения уравнений Шредингера.

With the help of the canonical decomposition of an arbitrary subalgebra of the orthogonal algebra $AO(n)$ the rank n and $n-1$ maxima] subalgebras of the extended isochronous Galileo algebra, the rank n maximal subalgebras of the generalized extended classical Galileo algebra $A\tilde{G}(1,n)$, the extended special Galileo algebra $A\tilde{G}(2,n)$ and the extended whole Galileo algebra $A\tilde{G}(3,n)$ are described. By using the rank n subalgebras, ansätze reducing the many dimensional Schrödinger equations to ordinary differential equations is found. With the help of the reduced equation solutions exact solutions of the Schrödinger equation are constructed.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=k\Delta\psi+V(x,\psi,\psi^*), \tag{1}$$

где V — произвольная дифференцируемая функция, $\psi=\psi(t,x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, k — ненулевое вещественное число. Это уравнение при $n=3$ и $V=0$ превращается в свободное уравнение Шредингера.

Симметрийные свойства уравнения (1) с использованием методов С. Ли [1–5] при $n=3$ изучены в [4–9], а для произвольного n — в [5, 10, 11]. В настоящей работе уравнение (1) исследуется для случаев $V=\psi F(|\psi|)$, где F — произвольная гладкая функция, $V=\lambda\psi|\psi|^q$, λ — произвольное комплексное число, а q — вещественное число, и $V=\lambda\psi|\psi|^{4/n}$. Для каждого из указанных случаев мы выделяем в алгебре инвариантности уравнения (1) все максимальные подалгебры, редукция по которым приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Такие подалгебры имеют ранг n. Их описание получено из полного описания максимальных подалгебр ранга n и $n-1$ расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n)$ и основано на каноническом разложении произвольной подалгебры ортогональной алгебры $AO(n)$ [12]. По решениям редуцированных уравнений найдены точные решения уравнения (1).

Теор. и мат. физика, 1991, **87**, № 2, С. 220–234.

1. Алгебра инвариантности уравнения Шредингера

Если $V = \psi F(|\psi|)$, где F — произвольная гладкая функция, то уравнение (1) инвариантно относительно обобщенной расширенной классической алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,n)$ [5], базис которой составляют такие векторные поля:

$$P_a = -\partial_a, \quad J_{ab} = x_b\partial_b - x_b\partial_a, \quad G_a = t\partial_a + \frac{x_a}{2ki}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}),$$
$$T = \partial_t, \quad M = \frac{1}{2ki}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) \quad (a, b = 1, 2, \ldots, n).$$

Они связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} &[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, P_b] = [G_a, G_b] = 0, \\ &[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b, \\ &[T, J_{ab}] = 0, \quad [T, P_a] = 0, \quad [T, G_a] = -P_a, \quad [G_a, P_b] = \delta_{ab}M, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где M — центральный элемент, $\delta_{ab} = 0$, если $a \neq b$, $\delta_{ab} = 1$, если $a = b$. Алгебра $A\tilde{G}(1,n)$ содержит ортогональную алгебру $AO(n) = \langle J_{12}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle$ и расширенную изохронную алгебру Галилея $AG(0,n) = \langle M, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n\rangle \subset\!\!\!\!\!+ AO(n)$ ($\subset\!\!\!\!\!+$ — знак полупрямой суммы).

Если $V = \lambda\psi|\psi|^q$, где λ — произвольное комплексное число, q — произвольное вещественное число, то уравнение (1) инвариантно относительно расширенной специальной алгебры Галилея $A\tilde{G}(2,n)$, получаемой из алгебры $A\tilde{G}(1,n)$ в результате присоединения генератора дилатации

$$D = 2t\partial_t + x^a\partial_a - \frac{2}{q}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}).$$

Генераторы алгебры $A\tilde{G}(2,n)$, удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1) и таким соотношениям:

$$[D, J_{ab}] = 0, \quad [D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a, \quad [D, T] = -2T. \tag{1.2}$$

Если $V = \lambda\psi|\psi|^{4/n}$, где λ — произвольное комплексное число, то уравнение (1) инвариантно относительно расширенной полной алгебры Галилея $A\tilde{G}(1,n)$ [11], получаемой из алгебры $A\tilde{G}(1,n)$ в результате присоединения генераторов

$$D = 2t\partial_t + x^a\partial_a - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$
$$S = t^2\partial_t + tx^a\partial_a + \frac{|x|^2}{4ki}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \frac{n}{2}t(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Генераторы алгебры $A\tilde{G}(3,n)$ связаны коммутационными соотношениями (1.1), (1.2) и следующими соотношениями:

$$[S, J_{ab}] = 0, \quad [S, P_a] = G_a, \quad [S, G_a] = 0, \quad [D, S] = 2S, \quad [T, S] = D.$$

Максимальную локальную группу инвариантности соответствующего уравнения Шредингера обозначим через $\tilde{G}(l,n)$ $(l = 1, 2, 3)$. Ее алгебра Ли совпадает с алгеброй $A\tilde{G}(l,n)$. Для проведения редукции уравнения (1) по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ $(l = 1, 2, 3)$ следует описать подалгебры алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ с точностью до $\tilde{G}(l,n)$-эквивалентности. Две подалгебры K_1, K_2 алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ называются

$\tilde{G}(l,n)$-эквивалентными, если для некоторого $g \in \tilde{G}(l,n)$ алгебры gK_1g^{-1} и K_2 обладают одними и теми инвариантами. Если функции $f_\delta(x)$ $(\delta = 1,\ldots,s)$ являются инварианта ненулевой подалгебры K алгебры $A\tilde{G}(l,n)$, то K будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций. Для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ существует максимальная алгебра ивариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций. Нетрудно доказать, что подалгебры K_1 и K_2 алгебры $A\tilde{G}(l,n)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда максимальные алгебры инвариантности полных систем инвариантов подалгебр K_1 и K_2 $\tilde{G}(l,n)$-сопряжены. В силу этого в классе всех подалгебр, эквивалентных между собой, естественно выделить и изучить максимальные подалгебры, поскольку такие подалгебры определяются однозначно с точностью до $\tilde{G}(l,n)$-сопряженности.

Пусть K — некоторая подалгебра алгебры $A\tilde{G}(l,n)$. Если $M \in K$, то $\psi\psi^* = \mathrm{const}$, и мы получаем линейное уравнение. При $T \in K$ инварианты не зависят от t. В связи с этим будем предполагать, что все рассматриваемые подалгебры не содержат M и T.

В работе будут использоваться следующие обозначения: $V'[r,s] = \langle G_r,\ldots,G_s\rangle$ $(r \le s)$; $V = \langle P_1,\ldots,P_n\rangle$; τ, ω, φ — проектирования $A\tilde{G}(3,n)$ на $\langle D,T,S\rangle$, $AO(n)$, $\langle G_1,G_2,\ldots,G_n\rangle$, соответственно; $AO[r,s] = \langle J_{ab}\,|\,a,b = r,\ldots,s\rangle$; $AO(n) = AO[1,n]$; $\mathfrak{M}[r,s] = \langle M,G_r,\ldots,G_s,P_r,\ldots,P_s\rangle$ — алгебра Ли над R с генераторами $M,G_r,\ldots, G_s,P_r,\ldots,P_s$.

2. Каноническое разложение подалгебры ортогональной алгебры $AO(n)$

Пространство $V' = \langle G_1,\ldots,G_n\rangle$ можно рассматривать как евклидово пространство с ортонормированным базисом $G_1,\ldots,G_n$. Группу $O(n)$ будем отождествлять с группой изометрий пространства V'.

Пусть $\Gamma : X \to X$ — тривиальное представление алгебры $F \subset AO(n)$. Тогда Γ $O(n)$-эквивалентно $\mathrm{diag}\,[\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m]$, где Γ_j — неприводимое подпредставление $(j = 1,\ldots,m)$. Можно предполагать, что алгебра $F_j = \{\mathrm{diag}\,[0,\ldots,\Gamma_j(X),\ldots,0]\,|\, X \in F\}$ является неприводимой подалгеброй ортогональной алгебры $AO(U_j)$, где $U_j = V'[k_{j-1}+1,k_j]$ $(k_0 = 0;\ k_m = n;\ j = 1,\ldots,m)$. Если $F_j \ne 0$, то алгебру F_j будем называть неприводимой частью алгебры F. Хорошо известно, что если представления Δ и Δ алгебры Ли L кососимметрическими матрицами эквивалентны над R, то $C\Delta(X)C^{-1} = \Delta'(X)$ для некоторой ортогональной матрицы C $(X \in L)$. Отсюда заключаем, что если Γ_r, и Γ_s, суть эквивалентные представления, то можно предполагать, что для любого $X \in F$ имеет место равенство $\Gamma_r(X) = \Gamma_s(X)$. Объединив эквивалентные ненулевые неприводимые подпредставления, мы получим ненулевые попарно дизъюнктные подпредставления $\Delta_1,\ldots,\Delta_l$ представления Γ. Алгебру

$$A_j = \{\mathrm{diag}\,[0,\ldots,\Delta_j(X),\ldots,0]\,|\,X \in F\} \quad (j = 1,\ldots,l)$$

будем называть примарной частью алгебры F. Очевидно, F является под прямой суммой своих примарных частей. Разложение F в подпрямую сумму своих примарных частей будем называть каноническим разложение алгебры F. Если F совпадает со своей примарной частью, то F называется примарной алгеброй.

Предложение 1. *Пусть $n = ld$, $L = (L \cap \mathfrak{M}[1,n]) \subset\!\!\!\!+ F$ — полупрямая сумма подалгебры $L \cap \mathfrak{M}[1,n]$ и примарной алгебры $F \subset AO(n)$, являющейся подпря-*

мой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1,d], AO[d+1,2d],\ldots,AO[(l-1)d+1,ld]$. Если $M\notin L$, $L\cap V=0$ и $\varphi(L)=\langle G_1,\ldots,G_{ld}\rangle$, то L сопряжена с алгеброй $W_1 \Subset F$, где W_1 обладает базисом

$$\begin{aligned}
&G_1+\gamma_1P_1,\ldots,G_d+\gamma_1P_d,\\
&G_{d+1}+\gamma_2P_{d+1},\ldots,G_{2d}+\gamma_2P_{2d},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_{(l-1)d+1}+\gamma_lP_{(l-1)d+1},\ldots,G_{ld}+\gamma_lP_{ld}.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Если $M\notin L$, $L\cap V=0$ и $\varphi(L)=\langle G_1,\ldots,G_{(l-1)d}\rangle$, то L сопряжена с алгеброй $W_1\Subset F$, где W_1 обладает базисом

$$\begin{aligned}
&G_1+\gamma_1P_1+\lambda_1P\lambda_{(l-1)d+1},\ldots,G_d+\gamma_1P_d+\lambda_1P_{ld},\\
&G_{d+1}+\gamma_2P_{d+1}+\lambda_2P_{(l-1)d+1},\ldots,G_{2d}+\gamma_2P_{2d}+\lambda_2P_{ld},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_{(l-2)d+1}+\gamma_{l-1}P_{(l-2)d+1}+\lambda_{l-1}P_{(l-1)d+1},\ldots,G_{(l-1)d}+\gamma_{l-1}P_{(l-1)d}+\lambda_{l-1}P_{ld}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Доказательство. В силу условия $M\notin L$ подалгебра $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ коммутативная. Поэтому первая часть предложения вытекает из работы [13]. Пусть, далее, $\varphi(L)=\langle G_1,\ldots,G_{(l-1)d}\rangle$. Тогда можно предполагать, что $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ есть подпрямая сумма алгебры $\langle G_1+\delta_1P_1,\ldots,G_{(l-1)d}+\delta_{(l-1)d}P_{l-1d}\rangle$ и алгебры $\langle P_{(l-1)d+1},\ldots,P_{ld}\rangle$, при этом $\delta_1=\cdots=\delta_d$, $\delta_{d+1}=\cdots=\delta_{2d},\ldots,\delta_{(l-2)d+1}=\cdots=\delta_{(l-1)d}$.

Алгебра $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ является прямой суммой алгебр $\mathfrak{N}_1\ldots,\mathfrak{N}_{l-1}$, где $\mathfrak{N}_j$ — алгебра, обладающая базисом

$$\begin{aligned}
&G_{(j-1)d+1}+\gamma_jP_{(j-1)d+1}+\delta^j_{11}P_{(l-1)d+1}+\cdots+\delta^j_{1d}P_{ld},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_{jd}+\gamma_jP_{jd}+\delta^j_{d1}P_{(l-1)d+1}+\cdots+\delta^j_{dd}P_{ld}\quad(j=1,\ldots,l-1).
\end{aligned}$$

Связывающая матрица

$$\Delta_j=\begin{pmatrix}\delta^j_{11}&\cdots&\delta^j_{1d}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \delta^j_{d1}&\cdots&\delta^j_{dd}\end{pmatrix}$$

сплетает представления неприводимой части алгебры F в пространствах $\langle G_{(j-1)d+1},\ldots,G_{jd}\rangle$ и $\langle P_{(l-1)d+1},\ldots,P_{ld}\rangle$. Поэтому $\Delta_j=\lambda_jC_j$, где λ_j — вещественное число, а C_j — ортогональная матрица. $O(n)$-автоморфизм, соответствующий матрице

$$\begin{bmatrix}E_d&&&&\\&\ddots&&0&\\&&C_j&&\\&0&&\ddots&\\&&&&E_d\end{bmatrix}$$

оставляет неизменным F, $\mathfrak{N}_j$, при $i\neq j$ и преобразует пространство $\mathfrak{N}_j$ в пространство, которому соответствует связывающая матрица λ_jE_d. Предложение доказано.

3. Инварианты расширенной изохронной алгебры Галилея $A\tilde{G}(0,n)$

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $A\tilde{G}(0,n)$, обладающая нулевой проекцией $\omega(L)$ на $AO(n)$, и $M \notin L$. Обозначим через $A_1,\dots,A_p$ примерные части $\omega(L)$. Подалгебра $L\cap\mathfrak{M}[1,n]$ коммутативна и инвариантна относительно $\omega(L)$. Согласно работе [14] она является прямой суммой

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_p \oplus \tilde{W}$$

подалгебр W_j $(j=1,\dots,p)$, $\tilde{W}$, удовлетворяющих соотношениям $[W_j, A_j] = [A_j, W] = W_j$, $[A_r, W_j] = 0$ при $r\neq j$, $\tilde{W} = \{y\in W\,|\,[L,Y]=0\}$. Изучим структуру инвариантов алгебр $L_j = W_j \supsetplus A_j$ $(j=1,\dots,p)$, так как они в значительной мере определяют структуру инвариантов алгебры L. Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением алгебры L_1. Ее npi часть совпадает с A_1 и является подпрямой суммой неприводимых алгебр соответственно алгебр $AO[1,d], AO[d+1,2d],\dots,AO[(l-1)d+1,ld]$. Инварианты алгебры L_1 будем рассматривать в пространстве функции переменных $t,\psi,x_1,\dots,x_{ld}$. Всегда можно предполагать, что $\varphi(L_1) = \langle G_1,\dots,G_{l_1 d}\rangle$, где $1\le l_1\le l$. В зависимости от значения l_1 рассмотрим три случая.

А. Случай $l_1 = l$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью $O(n)$-сопряженности обладает базисом (2.1). Так как ранг алгебры W_1 равен ld, то она имеет два основных инварианта. В качестве этих инвариантов можно взять функции t и

$$\sigma = \psi\exp\left[\frac{i}{4k}\sum_{j=1}^{l}\frac{x^2_{(j-1)d+1}+\dots+x^2_{jd}}{t-\gamma_j}\right]. \tag{3.1}$$

Так как каждая из них является инвариантом алгебры A_j, то система функций t, σ образует полную систему инвариантов алгебры L_1.

Б. Случай $l_1 = l-1$. В силу предложения 1 алгебра W_1 с точностью $O(n)$-сопряженности обладает базисом (2.2). Так как ранг алгебры W_1 равен $(l-1)d$, то ее полная система инвариантов состоит из $d+2$ функций. Очевидно, инвариантами W_1 являются функции t и

$$\sigma = \psi\exp\left[\frac{i}{4k}\sum_{j=1}^{l-1}\frac{x^2_{(j-1)d+1}+\dots+x^2_{jd}}{t-\gamma_j}\right].$$

Эти инварианты функционально независимы. Найдем остальные d функционально независимых инвариантов алгебры W_1, которые дополняют систему двух инвариантов t и σ алгебры W_1 до полной системы инвариантов W_1. Легко убедиться, что инвариантом алгебры W_1 является функция

$$\begin{aligned} y_1 = \sum_{s=1}^{l-1}\lambda_s(t+\gamma_1)\cdots(t+\gamma_{s-1})(t+\gamma_{s+1})\cdots(t+\gamma_{l-2})x_{(s-1)d+1} - \\ - \prod_{s=1}^{l-1}(t+\gamma_s)x_{(l-1)d+1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подействовав на нее генератором $J_{1j}+J_{d+1,d+j}+\cdots+J_{(l-1)d+1,(l-1)d+j}$ $(j=2\ldots,d)$, получаем такой инвариант алгебры W_1:

$$\begin{aligned} y_j=\sum_{s=1}^{l-1}\lambda_s(t+\gamma_1)\cdots(t+\gamma_{s-1})(t+\gamma_{s+1})\cdots(t+\gamma_{l-2})x_{(s-1)d+j}+\\ +\prod_{s=1}^{l-1}(t+\gamma_s)x_{(l-1)d}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Мы нашли d функционально независимых инвариантов $y_1,\ldots,y_d$ алгебры W_1, которые вместе с инвариантами t и σ образуют полную систему инвариантов алгебры W_1. Запишем генераторы примарной алгебры, являющейся подпрямой суммой алгебр $AO[1,d],AO[d+1,2d],\ldots,AO[(l-1)d+1,ld]$ в новых переменных $y_1,y_2,\ldots,y_d$. Рассмотрим, например, генератор $\tilde{J}_{12}=J_{12}+J_{d+1,d+2}+\cdots+J_{(l-1)d+1,(l-1)d+2}$. Используя формулы (3.2) и (3.3), получаем, что в переменных $y_1,y_2,\ldots,y_d$ генератор $\tilde{J}_{12}$ принимает вид $\tilde{J}_{12}=y_1\frac{\partial}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial}{\partial y_1}$.Отсюда вытекает, что A_1 можно рассматривать как подалгебру ортогональной алгебры $A\tilde{O}(d)=\langle\tilde{J}_{12},\ldots,\tilde{J}_{d-1,d}\rangle$ действующую в евклидовом пространстве $\tilde{E}_d$, состоящем из d-мерных векторов $(y_1,y_2,\ldots,y_d)$.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от $y_1,y_2,\ldots,y_d$ состоит из $d-r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1,\ldots,\theta_{d-r}$. Используя эти функции, мы без труда находим полную систему инвариантов алгебры L_1. Она состоит из функций t, σ, $\theta_1,\ldots,\theta_{d-r}$, где вместо $y_1,\ldots,y_d$ подставлены их выражения (3.2) и (3.3).

В. Случай $l_1<l-1$. Аналогично случаю Б A_1 можно рассматривать как подалгебру примарной алгебры B, являющейся подпрямой суммой ортогональных алгебр $A\tilde{O}[1,d],A\tilde{O}[d+1,2d],\ldots,A\tilde{O}[(l-l_1)d-d+1,(l-l_1)d]$. Генераторы этих алгебр записаны в переменных $y_1,\ldots,y_d,\ldots,y_{(l-l_1)d}$, которые являются инвариантами алгебры W_1 не зависящими от ψ.

Допустим, что ранг алгебры A_1 равен r. Тогда полная система инвариантов алгебры A_1 в пространстве функций от переменных $y_1,\ldots,y_{(l-l_1)d}$ состоит из $(l-l_1)d-r$ функций. Пусть это будут функции $\theta_1,\ldots,\theta_{(l-l_1)d-r}$. Используя их, получаем, что полная система инвариантов алгебры L_1 состоит из функций t, σ, $\theta_1,\ldots,\theta_{(l-l_1)d-r}$ где σ задается формулой (3.1), в которой $l=l_1$.

4. Максимальные подалгебры ранга n и $n-1$ флгебры $A\tilde{G}(0,n)$

Здесь и в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\Phi(d_0,d_1,\gamma_1)=\langle G_{d_0}+\gamma_1P_{d_0},\ldots,G_{d_1}+\gamma_1P_{d_1}\rangle \mathbin{⨭} AO[d_0,d_1];\\ &AE(n-m)=\langle P_{m+1},\ldots,P_n\rangle \mathbin{⨭} AO[m+1,n]\quad(0\le m\le n-1);\\ &AE(n-n)=AE(0)=0;\\ &AE_1(n-m)=\langle G_{m+1},\ldots,G_n\rangle \mathbin{⨭} AO[m+1,n]\quad(0\le m\le n-1);\\ &AE_1(n-n)=AE_1(0)=0. \end{aligned}$$

Пусть $d_1,\ldots,d_p$ — натуральные числа, удовлетворяющие соотношение $d_0=1<d_1<\cdots<d_p\le n$.

Предложение 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(0,n)$, $M \notin L$ и $L \cap V = 0$. Тогда L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с алгеброй $\Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \Phi(d_1 + 1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p)$, $d_p = n$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_p$.*

Доказательство. Пусть $\omega(L) = 0$. Так как $M \notin L$, то L является коммутативной подалгеброй алгебры $\mathfrak{M}[1,n]$. Следовательно, алгебра L $O(n)$-сопряжена с алгеброй $\langle G_1 + \gamma_1 P_1, \ldots, G_n + \gamma_n P_n\rangle$ [13]. Если, например, $\gamma_1 = \gamma_2$, то $J_{12} \in L$, а потому $\omega(L) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$.

Пусть $\omega(L) \neq 0$ и $A_1, \ldots, A_p$ — примарные части алгебры $\omega(L)$. По определению A_1 является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO[1,d_1], AO[d_1+l, 2d_1], \ldots, AO[(l-1)d_1+1, ld_1]$. Допустим, что $W_1 = 0$. Тогда инвариантами алгебры A_1, а значит, и алгебры L являются функции t, $\varphi_1 = x_1^2 + \cdots + x_{d_1}^2$, …, $\varphi_l = x_{(l-1)d_1+1}^2 + \cdots + x_{ld_1}^2$. Так как по условию полная система инвариантов алгебры L состоит из двух инвариантов, то $l = 1$. Любой другой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(t, \varphi_1)$ и потому $M \in L$, что противоречит условию. Таким образом $W_1 \neq 0$. В силу результатов п. 2 и предложения 1 можно считать, что W_1 обладает базисом (2.1). Поэтому полная система инвариантов алгебры W_1 состоит из функций t, σ, $x_{ld_1+1}, \ldots, x_n$. Следовательно, любой инвариант J алгебры L является функцией $J = J(t, \sigma, x_{ld_1+1}, \ldots, x_n)$. В силу максимальности L отсюда вытекает, что $AO[1,d_1] \subset L$, а значит, $l = 1$. Мы доказали, что алгебра $\Phi(1,d_1,\gamma_1)$ выделяется прямым слагаемым в алгебре L, т.е. $L = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus L'$.

Алгебра $\omega(L')$ является подпрямой суммой примарных частей $A_2, \ldots, A_p$. Применяя к ней предыдущие рассуждения, доказываем, что $L' = \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_2) \oplus L''$. Через p шагов получаем, что $L = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus L_0$, где L_0 — нулевая либо коммутативная подалгебра, содержащаяся в $\mathfrak{M}[d_p, n]$. Если $L_0 = 0$, то все доказано. Если $L_0 \neq 0$, то $\omega(L_0) = 0$, а этот случай уже рассмотрен. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(0,n)$ и $M \notin L$. Тогда L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $F_1 = AE(n)$;

2) $F_2 = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p)$ $(d_p = n)$;

3) $F_3 = \Phi(1,d_1,\gamma_1) \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_2) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$ $(d_p = m;\ 1 \leq m \leq n)$.

Предложение 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0,n)$ и $M \notin L$. Тогда L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1 = \langle J_{12} + \delta M\rangle \oplus AE(n-2)$ $(n \geq 2)$;

2) $K_2 = AO(m) \oplus AE(n-m)$ $(1 \leq m \leq n)$;

3) $K_3 = AO[1,d] \oplus \Phi(d+1, d_1, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$ $(d_p = m;$ $m \leq n)$;

4) $K_4 = L_1 \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \Subset A_1$, W_1 *обладает базисом* (2.2), *а* A_1 — *диагональ в* $AO[1,d] \oplus \cdots \oplus AO[(l-1)d+1, ld]$ $(m = ld;\ m \leq n)$;

5) $K_5 = L_1 \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \Subset \langle J + \alpha M\rangle$, W_1 *обладает базисом* (2.2) *при* $m = 2l$, $d = 2$, *а* $J = J_{12} + \cdots + J_{m-1,m}$ $(m \leq n;\ \alpha > 0)$;

6) $K_6 = L_1 \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_1) \oplus \cdots \oplus \Phi(d_p+1, m, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \Subset A_1$, W_1 *обладает базисом* (2.2) *при* $n = d_1$, *а* A_1 — *диагональ в* $AO[1,d_1] \oplus \cdots \oplus AO[(l-1)d_1+1, ld_1]$ $(m \leq n)$;

7) $K_7 = L_1 \oplus \Phi(d_1+1, d_2, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_p+1, m, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$, *где* $L_1 = W_1 \subset\!\!\!+ \langle J + \alpha M \rangle$, W_1 *обладает базисом (2.2) при* $n = d_1$, $d = 2$, *а* $J = J_{12} + \dots + J_{d_1-1, d_1}$ $(\alpha \neq 0)$.

5. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(1, n)$

В настоящем пункте мы проводим редукцию уравнения (1) при $V = \psi F(|\psi|)$, где F — произвольная гладкая функция, по максимальным подалгебрам ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$. Все такие подалгебры, содержащиеся в $A\tilde{G}(0, n)$, описаны в предложении 2. Для нахождения максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(0, n)$, воспользуемся следующим предложением.

Предложение 4. *Пусть* L *— максимальная подалгебра ранга* n, *алгебры* $A\tilde{G}(1, n)$, *не содержащаяся в* $A\tilde{G}(0, n)$. *Тогда* $L = K \subset\!\!\!+ \langle S \rangle$, *где* K *— максимальная подалгебра ранга* $n-1$ *алгебры* $A\tilde{G}(0, n)$, *а* $S = T + X$, $X \in A\tilde{G}(0, n)$.

Справедливость предложения вытекает из теоремы об универсальном инварианте [1]. Из предложения 4 вытекает, что построение максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(0, n)$, сводится к нахождению всех расширений максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0, n)$ с помощью одномерных подалгебр вида $\langle T + X \rangle$, $X \in A\tilde{G}(0, n)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть K — произвольная максимальная подалгебра ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(1, n)$. Допустим, что $\mathrm{Nor}_{A\tilde{G}(1,n)}$, где $\mathfrak{N}$ — подпространство. Следовательно, максимальная подалгебра L ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, содержащая K, представляется в виде $L = K \subset\!\!\!+ \langle T + X \rangle$, где $T + X \in \mathfrak{N}$. Пусть $L' = K \subset\!\!\!+ \langle T + X' \rangle$ $(T + X' \in \mathfrak{N})$ — какая-нибудь другая максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$. Тогда имеет место следующее

Предложение 5. *Две подалгебры* $L = K \subset\!\!\!+ \langle T + X \rangle$ *и* $L' = K \subset\!\!\!+ \langle T + X' \rangle$ $\tilde{G}(1, n)$-*сопряжены тогда и только тогда, когда* $\langle T + X \rangle$ *и* $\langle T + X' \rangle$ *сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры* $K \oplus \mathfrak{N}$.

Из предложений 4 и 5 вытекает следующий алгоритм построения максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(0, n)$.

1. Для максимальной подалгебры $K \subset A\tilde{G}(0, n)$ находим ее нормализатор в алгебре $A\tilde{G}(1, n)$. Пусть, например, $\mathrm{Nor}_{A\tilde{G}(1,n)} K = K \oplus \mathfrak{N}$.

2. Проводим классификацию с точностью до группы внутренних автоморфизмов алгебры $K \oplus \mathfrak{N}$ всех одномерных подалгебр пространства $\mathfrak{N}$ с ненулевой проекцией на $\langle T \rangle$.

3. Если $\langle T + X_1 \rangle, \dots, \langle T + X_s \rangle$ — все одномерные подалгебры пространства $\mathfrak{N}$, то $K_1 = K \subset\!\!\!+ \langle T + X_1 \rangle$, …, $K_s = K \subset\!\!\!+ \langle T + X_s \rangle$ — все расширения ранга n алгебры $A\tilde{G}(1, n)$, содержащие подалгебру K.

Отметим, что алгоритм построения подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(l, n)$ $(l = 2, 3)$, не содержащихся в $A\tilde{G}(1, n)$, формулируется аналогично.

Используя указанный алгоритм, доказываем следующую теорему

Теорема 1. *Пусть* L *— максимальная подалгебра ранга* n *алгебры* $A\tilde{G}(l, n)$ *и* $M, T \notin L$. *Тогда* L $\tilde{G}(1, n)$-*сопряжена с одной из следующих, алгебр:*

1) $F_1 = AE(n)$;

2) $F_2 = \Phi(1, d_1, \gamma_1) \oplus \dots \oplus \Phi(d_{p-1}+1, d_p, \gamma_p) \oplus AE(n-m)$ $(d_p = m;\ 1 \leq m \leq n)$;

3) $F_3 = \langle T + \gamma M, J_{12} + \delta M \rangle \oplus AE(n-2)$ $(\gamma, \delta \in R;\ \gamma \neq 0)$;

4) $F_4 = \langle T + \gamma M \rangle \oplus AE(n-1)$;

5) $F_5 = \langle T + \alpha G_1 \rangle \oplus AE(n-1)$;
6) $F_6 = \langle T + \gamma M \rangle \oplus AO[1,m] \oplus AE(n-m)$ ($\gamma \in R$; $\gamma \neq 0$; $3 \leq m \leq n$).

Для подалгебр F_1–F_6 получаем такие анзацы:

$$F_1: \quad \psi = \varphi(\omega), \quad \omega = t;$$

$$F_2: \quad \psi = \exp\left[-\frac{i}{4k}\sum_{j=1}^{p}\frac{x_{d_{j-1}+1}^2 + \cdots + x_{d_j}^2}{t-\gamma_j}\right]\varphi(\omega), \quad \omega = t;$$

$$F_3: \quad \psi = \exp\left(-\frac{i\gamma}{2k}t + \frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(\omega), \quad \omega = x_1^2 + x_2^2;$$

$$F_4: \quad \psi = \exp\left(-\frac{i\gamma}{2k}t\right)\varphi(\omega), \quad \omega = x_1;$$

$$F_5: \quad \psi = \exp\left(\frac{i\alpha^2}{6k}t^3 - \frac{i\alpha t}{2k}x_1\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \alpha t^2 - 2x_1;$$

$$F_6: \quad \psi = \exp\left(-\frac{i\gamma}{2k}t\right)\varphi(\omega), \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} x_j^2.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение (1) в случае $V = \psi F(|\psi|)$ обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$F_1: \quad i\dot{\varphi} - \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_2: \quad \dot{\varphi} + \frac{\varphi}{2}\sum_{j=1}^{p}\frac{d_j - d_{j-1}}{\omega - \gamma_j} + i\varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_3: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + 4k\dot{\varphi} - \left(\frac{\gamma}{2k} + \frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_4: \quad k\ddot{\varphi} - \frac{\gamma}{2k}\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_5: \quad 4k\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{4k}\omega\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0;$$

$$F_6: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + 2mk\dot{\varphi} - \frac{\gamma}{2k}\varphi + \varphi F(|\varphi|) = 0.$$

6. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(2,n)$

В этом пункте мы рассматриваем уравнение Шредингера (1) при $V = \lambda\psi|\psi|^q$, где λ — произвольное комплексное число, а q — произвольное вещественное число. Для редукции данного уравнения мы используем максимальные подалгебры ранга n алгебры $A\tilde{G}(2,n)$, которые не сопряжены с подалгебрами алгебры $A\tilde{G}(1,n)$. Учитывая, что каждая из таких подалгебр L удовлетворяет условию $D \in \tau(L)$ и используя алгоритм описания таких подалгебр, изложенный в п. 5, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(2,n)$, не сопряженная с подалгеброй алгебры $A\tilde{G}(1,n)$. Если $D \in \tau(L)$, $M, T \notin L$, то L $\tilde{G}(2,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $L_1 = AO(m) \oplus AE(n-m) \oplus \langle D + \delta M\rangle$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$;

2) $L_2 = AO(m) \oplus AE_1(l-m) \oplus AE(n-1) \oplus \langle D + \delta M\rangle$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1;$ $l = m+1, \ldots, n)$;

3) $L_3 = \langle J_{12} + \alpha M, D + \delta M\rangle \oplus AE(n-2)$ $(\alpha \geq 0)$;

4) $L_4 = \langle J_{12} + \alpha M, D + \delta M\rangle \oplus AE_1(m-2) \oplus AE(n-m)$ $(\alpha \geq 0,\ m = 3, \ldots, n)$.

Подалгебрам L_1–L_4 соответствуют такие анзацы:

$$L_1: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t\right]\varphi(\omega), \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} x_j^2/t;$$

$$L_2: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t - \frac{i}{4kt}\sum_{j=m+1}^{l} x_j^2\right]\varphi(\omega), \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} x_j^2/t;$$

$$L_3: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t + \frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right]\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t};$$

$$L_4: \quad \psi = \exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t + \frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} - \frac{i}{4kt}\sum_{j=3}^{m} x_j^2\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение (1) в случае $V = \lambda\psi|\psi|^q$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям с неизвестной функцией $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$L_1: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (2km + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{\delta}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0;$$

$$L_2: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (2km + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{i(l-m)}{2} - \frac{\delta}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0;$$

$$L_3: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (4k + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{\delta}{4k} - \frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0;$$

$$L_4: \quad 4k\omega\ddot{\varphi} + (4k + i\omega)\dot{\varphi} + \left(\frac{i}{q} - \frac{\delta}{4k} - \frac{i(m-2)}{2} - \frac{\delta}{4k} - \frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^q = 0.$$

7. Редукция по подалгебрам алгебры $A\tilde{G}(3, n)$

В данном пункте речь пойдет о симметрийной редукции уравнения Шредингера (1) при $V = \lambda\psi|\psi|^{4/n}$, где λ — произвольное комплексное число. Поскольку это уравнение является частным случаем уравнений, рассмотренных в п. 5, 6, то при изучении симметрийной редукции его можно ограничиться теми подалгебрами, которые не сопряжены с подалгебрами алгебр $A\tilde{G}(1, n)$ и $A\tilde{G}(2, n)$. Таковыми являются те и только те подалгебры алгебры $A\tilde{G}(3, n)$, проекции которых на $\langle D, S, T\rangle$ совпадают с $\langle S + T\rangle$ или с $\langle D, S, T\rangle$. Но поскольку мы исключаем случаи, когда подалгебр; содержит T, то следует ограничиться подалгебрами, чьи проекции на $\langle D, S, T\rangle$ совпадают с $\langle S + T\rangle$. Нетрудно убедиться, что для таких подалгебр L $\omega(L)=0$ или $\omega(L)$ — примарная алгебра. Используя описание максимальных подалгебр ранга $n-1$ алгебры $A\tilde{G}(0,n)$ и алгоритм, изложенный в п. 5, можно получить полное описание максимальных подалгебр ранга n алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, чьи проекции на $\langle D,S,T\rangle$ совпадают с $\langle S+T\rangle$. Так как операторы этих подалгебр имеют громоздкий вид, то мы выпишем лишь подалгебры L, у которых примарная алгебра $\omega(L)$ является подпрямой суммой не более трех неприводимых алгебр.

Теорема 3. *Пусть L — максимальная подалгебра ранга n алгебры $A\tilde{G}(3,n)$, $\tau(L)=\langle S+T\rangle$ и $\omega(L)$ — примарная алгебра, являющаяся подпрямой суммой не более трех неприводимых алгебр. Если $M,T\notin L$, то L $\tilde{G}(0,n)$-сопряжена с одной из следующих алгебр:*

1) $K_1=AO(n)\oplus\langle S+T+\alpha M\rangle$;

2) $K_2=\langle G_1+P_{d+1},G_2+P_{d+2},\dots,G_d+P_{2d}\rangle \subset\!\!\!\!\!+ (K\oplus\langle J\rangle)$, *где K — диагональ в $AO[1,d]\oplus AO[d+1,2d]$, а* $J=S+T+\sum\limits_{a=1}^{d}J_{a,a+d}+\alpha M$ $(n=2d;\ d>1)$;

3) $K_3=\langle S+T+\beta M,J_{12}+\alpha M\rangle\oplus AE(n-2)$;

4) $K_4=\langle G_a+\frac{1}{\sqrt3}P_a+\frac{2}{\sqrt3}P_{2d+a},G_{d+a}-\frac{1}{\sqrt3}P_{d+a}+\frac{2}{\sqrt3}P_{2d+a}\mid a=1,\dots,d\rangle \subset\!\!\!\!\!+ (K\oplus\langle J\rangle)$ $(n=3d,\ d>1)$, *где K — диагональ в $AO[1,d]\oplus AO[d+1,2d]\oplus AO[2d+1,3d]$, а* $J=S+T+\frac{2}{\sqrt3}\sum\limits_{a=1}^{d}(J_{a,d+a}+J_{a,2d+a}+J_{d+a,2d+a})+\beta M$;

5) $K_5=\langle G_1+P_3,G_2+P_4\rangle \subset\!\!\!\!\!+ (\langle J_{12}+J_{34}+\beta M\rangle\oplus\langle J\rangle)$, $J=S+T+J_{13}+J_{24}+\alpha M$;

6) $K_6=\langle G_a+\frac{1}{\sqrt3}P_a+\frac{2}{\sqrt3}P_{4+a},G_{2+a}-\frac{1}{\sqrt3}P_{2+a}+\frac{2}{\sqrt3}P_{4+a}\mid a=1,2\rangle \subset\!\!\!\!\!+ (\langle J_{12}+J_{34}+J_{56}+\beta M\rangle\oplus\langle J\rangle)$, *где* $J=S+T+\frac{2}{\sqrt3}(J_{13}+J_{24}+J_{15}+J_{35}+J_{26}+J_{46})+\alpha M$.

Алгебрам K_1–K_6 соответствуют такие анзацы:

$$K_1:\quad \psi=\exp\left[\frac{it\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2}{4k(t^2+1)}-\frac{n}{4}\ln(t^2+1)-\frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}t\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=\sum_{j=1}^{n}x_j^2/(t^2+1);$$

$$K_2:\quad \psi=\exp\left[-\frac{d}{2}\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\omega\frac{t^2-1}{t}+\sum_{a=1}^{d}\frac{x_a^2}{t}+2\alpha\operatorname{arctg}t\right)\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=(t^2+1)^{-2}\sum_{a=1}^{d}(x_a+tx_{d+a})^2;$$

$$K_3:\quad \psi=\exp\left[-\frac12\ln(t^2+1)+\frac{it(x_1^2+x_2^2)}{4k(t^2+1)}-\frac{i\beta}{2k}\operatorname{arctg}t+\frac{i\alpha}{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{t^2+1};$$

$$K_4:\quad \psi=\exp\left[-\frac{3d}{4}\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(4\omega t\frac{t^2-3}{3t^2-3}+\right.\right.$$

$$+\sum_{a=1}^{d}\left(\frac{x_a^2}{t-\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{x_{d+a}^2}{t+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+2\beta\operatorname{arctg}t\Bigg)\Bigg]\varphi(\omega),$$

$$\omega=(t^2+1)^{-3}\sum_{a=1}^{d}\left[\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_a+\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_{d+a}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)x_{2d+a}\right]^2;$$

$$K_5:\quad \psi=\exp\left[-\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\omega\frac{t^2-1}{t}+\frac{x_1^2+x_2^2}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\alpha\operatorname{arctg}t-2\beta\operatorname{arctg}\frac{x_1+tx_3}{x_2+tx_4}\right)\right]\varphi(\omega),$$

$$\omega=(t^2+1)^{-2}\left[(x_1+tx_3)^2+(x_2+tx_4)^2\right];$$

$$K_6:\quad \psi=\exp\left[-\ln(t^2+1)-\frac{i}{4k}\left(\omega\frac{t^2-1}{t}+\frac{x_1^2+x_2^2}{t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\alpha\operatorname{arctg}t-2\beta\frac{y_1}{y_2}\right)\right]\varphi(\omega),$$

$$y_1=\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_1+\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)x_5,$$

$$y_2=\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_2+\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x_4+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)x_6,$$

$$\omega=(t^2+1)^{-2}(y_1^2+y_2^2).$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение (1) в случае $V=\lambda\psi|\psi|^{4/n}$ к следующим уравнениям:

$$K_1:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}+2nk\dot{\varphi}-\left(\frac{\alpha}{2k}+\frac{\omega}{4k}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/n}=0;$$

$$K_2:\quad -\frac{1}{k}\left(\omega+\frac{\beta}{2}\right)\varphi+2kd\dot{\varphi}+4k\omega\ddot{\varphi}+\lambda\varphi|\varphi|^{2/d}=0;$$

$$K_3:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}+4k\dot{\varphi}-\left(\frac{\beta}{2k}+\frac{\omega}{4k}+\frac{\alpha^2}{4k}\omega^{-1}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^2=0;$$

$$K_4:\quad 2k\omega\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}kd\dot{\varphi}-\frac{1}{k}\left(3\omega+\frac{\beta}{2}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3d}=0;$$

$$K_5:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}-\frac{1}{k}\left(\omega+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta^2}{4\omega}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|=0;$$

$$K_6:\quad 4k\omega\ddot{\varphi}-\frac{1}{k}\left(3\omega+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta^2}{4\omega}\right)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{2/3}=0.$$

8. Точные решения уравнений Шредингера

Редуцированное уравнение, соответствующее подалгебре F_j будем обозначать $(5.j)$ $(j = 1, \dots, 7)$. Аналогично редуцированное уравнение, соответствующее подалгебре L_j обозначим $(6.j)$ $(j = 1, \dots, 4)$. Найдем решения уравнения Шредингера (1) в случае $V = \psi F(|\psi|)$. Уравнение (5.2) имеет общее решение

$$\varphi = C \prod_{j=1}^{p} (t-\gamma_j)^{-\frac{1}{2}(d_j-d_{j-1})} \int F\left(\prod_{j=1}^{p} (t-\gamma_j)^{-\frac{1}{2}(d_j-d_{j-1})} \right) dt.$$

Следовательно, решением уравнения Шредингера (1) является функция

$$\psi = \exp\left[-\frac{i}{4k} \sum_{j=1}^{p} \frac{x^2_{d_{j-1}+1} + \dots + x^2_{d_j}}{t-\gamma_j} \right] \varphi(t). \tag{8.1}$$

Найдем решения уравнения (1), соответствующие решениям редуцированного уравнения (5.4), в предположении, что $F(|\psi|)$ — вещественная функция. Пусть $\varphi(\omega) = \rho(\omega)\exp(i\theta(\omega))$, где $\rho(\omega)$, $\theta(\omega)$ — вещественные функции. Нетрудно получить, что

$$\omega = \pm \int \frac{d\rho}{\sqrt{-\frac{kC^2}{\rho^2} + \frac{\gamma}{2k}\rho^2 - 2\rho \int F(\rho) d\rho}}, \quad \theta = \frac{C}{\rho^2}.$$

Уравнение (5.6) при $F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^q$ и $\gamma = 0$ имеет решение

$$\varphi = \left[\frac{2k}{\lambda q \omega} \left(m - 2 + \frac{2}{q} \right) \right]^{1/q}.$$

Следовательно, решением уравнения Шредингера (1) является функция

$$\psi = \left[\frac{2k}{\lambda q \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2} \left(m - 2 + \frac{2}{q} \right) \right]^{1/q}. \tag{8.2}$$

Уравнение (5.3) при $F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^q$ и $\gamma = 0$ имеет решение

$$\varphi = \left[\frac{1}{\lambda\omega} \left(\frac{4k}{q^2} - \frac{\alpha^2}{4k} \right) \right]^{1/q}. \tag{8.3}$$

Ему соответствует такое решение уравнения Шредингера (I):

$$\psi = \exp\left(\frac{i\alpha}{2k} \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right) \left[\frac{1}{\lambda(x_1^2 + x_2^2)} \left(\frac{4k}{q^2} - \frac{\alpha^2}{4k} \right) \right]^{1/q}. \tag{8.4}$$

Уравнение (5.2) при $F(|\varphi|) = \lambda|\varphi|^q$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p$ имеет решения

$$\varphi = C\omega^{-m/2} \exp\left(\frac{iC^q}{1 - mq/2} \omega^{1-mq/2} \right), \quad mq \neq 2;$$

$$\varphi = C\omega^{-1/q} \exp(iC^q \ln|\omega|), \quad mq = 2.$$

Им соответствуют следующие решения уравнения Шредингера (1):

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{4k(t-\gamma_1)}\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right) Ct^{-m/2}\exp\left(\frac{iC^q}{1-mq/2}t^{1-mq/2}\right), \ mq \neq 2; \qquad (8.5)$$

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{4k(t-\gamma_1)}\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right) Ct^{-1/q}\exp\left(iC^q \ln|t|\right), \ mq = 2. \qquad (8.6)$$

Уравнение (6.1) обладает решением $\varphi = C$, где

$$|C|^q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{4k} - \frac{i}{q}\right).$$

В результате получаем такое решение уравнения (1):

$$\psi = C\exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t\right]. \qquad (8.7)$$

Аналогичное уравнение (6.2) обладает решением $\varphi = C$, где

$$|C|^q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{4k} + \frac{i(l-m)}{2} - \frac{i}{q}\right).$$

Ему соответствует решение

$$\psi = C\exp\left[-\left(\frac{1}{q} + \frac{i\delta}{4k}\right)\ln t - \frac{i}{4kt}\sum_{j=m+1}^{l} x_j^2\right]. \qquad (8.8)$$

уравнения (1).

Итак, формулы (8.1)–(8.7) определяют многопараметрические семейства точных решений уравнения (1) с нелинейностями $V = \psi F(|\psi|)$ и $V = \lambda\psi|\psi|^q$. Эти решения могут быть размножены, если воспользоваться инвариантностью уравнения (1) относительно $G(1,n)$ и $G(2,n)$. Действительно, если $\psi_1(t,x)$ есть решение, то новые решения строятся по формулам

$$\psi_2 = \psi_1\left(\frac{t}{1-\theta t}, \frac{x}{1-\theta t}\right) + \frac{ix^2}{4k}\frac{\theta}{1-\theta t},$$

$$\psi_3 = \psi_1(t, x+vt) + \frac{iv^2}{4k}t + \frac{i}{2k}vx,$$

где θ, v — параметры группы $G(1,n)$.

1. Овсянников Д.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
2. Ибрагимов И.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
3. Олвер П., Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1986.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1987, **20**, 929.
5. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989.

6. Баранник Л.Ф., Марченко В.А., в сб. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1988.
7. Gagnon L., Winternitz P., Preprint CRM-1528, Centre de recherches mathematiques, 1988.
8. Gagnon L., Winternitz P., Preprint CRM-1544, Centre de recherches mathematiques, 1988.
9. Gagnon L., Grammaticos B., Ramanl, Winternits P., Preprint CRM-1555, Centre de recherches mathematiques, 1988.
10. Fushchych W.I., Cherniha R.M., *J. Phys. A*, 1985. **18**, 3491.
11. Фущич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986.
12. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., *УМЖ*, 1986, **38**, 67.
13. Barannik L.F., Fushchych W.J., *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, 31.
14. Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985.

Про електромагнітну структуру мас елементарних частинок

О. БЕДРІЙ, В.І. ФУЩИЧ

Formulas are suggested for masses of elementary particles depending on the volume and intensity of fields.

Проблема походження мас елементарних частинок на сьогодні відкрита. Вона не вирішена не тільки на кількісному, а й на якісному рівні. Вперше Дж.Дж. Томпсон у 1893 р. [1] висунув ідею про електромагнітну природу маси електрона. Пізніше ця ідея обговорювалася з різних точок зору багатьма авторами в зв'язку з різними конкретними моделями електрона (М. Абрагам, Г. Лоренц та ін.).

У повідомленні запропоновані формули для мас елементарних частинок, які залежать від об'єму V_0, потенціалу (неелектромагнітного і негравітаційного походження) V_g, електромагнітного поля $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$. Ці поля за припущенням створюються складовими частинками елементарних частинок, структура і властивості яких нам невідомі.

Будемо припускати, що маса частинок m є деякою функцією, вказаних величин

$$m = F(V_0, V_g, \boldsymbol{DE}, \boldsymbol{DB}, \boldsymbol{DH}, \boldsymbol{BE}, \boldsymbol{HE}, \boldsymbol{BH}). \tag{1}$$

Оскільки m — скалярна величина, F — інваріантна відносно просторових поворотів векторів $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$. Це означає, що (1) має вигляд

$$m = F(V_0, V_g, \boldsymbol{DE}, \boldsymbol{DH}, \boldsymbol{DB}, \boldsymbol{BE}, \boldsymbol{HE}, \boldsymbol{BH}, \boldsymbol{D}^2, \boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{B}^2, \boldsymbol{H}^2). \tag{2}$$

Якщо вимагати масштабну інваріантність (2) відносно перетворень

$$\boldsymbol{D} \to \lambda \boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{E} \to \lambda \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} \to \lambda \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{H} \to \lambda \boldsymbol{H}, \tag{3}$$

λ — масштабний параметр, то (2) набуває вигляду

$$m = F\left(V_0, V_g, \frac{\boldsymbol{DE}}{\boldsymbol{DH}}, \frac{\boldsymbol{DE}}{\boldsymbol{BE}}, \dots\right). \tag{4}$$

Виходячи з розмірностей m, V_0, V_g, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, можна одержати найпростіші формули типу (2) для мас елементарних частинок. Наведемо деякі з них

$$m = V_0 \frac{\boldsymbol{DE}}{V_g}, \tag{5}$$

$$m = V_0 \frac{\boldsymbol{BH}}{V_g}, \tag{6}$$

$$m = g_1 V_0^{n_1} V_g^{n_2} (\boldsymbol{EH})^{n_3}, \tag{7}$$

Доповіді АН України, 1991, № 2, С. 38–40.

$$m = g_2 V_0^{k_1} V_g^{k_2} (\boldsymbol{BD})^{k_3}, \tag{8}$$

$$m = g_3 V_0^{l_1} V_g^{l_2} (\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{D}^2)^{l_3}, \tag{9}$$

$$m = g_4 V_0^{r_1} V_g^{r_2} (\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2)^{r_3}, \tag{10}$$

де n_1, n_2, n_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3, r_1, r_2, r_3 — дійсні числа, g_1, g_2, g_3, g_4 — розмірні константи, які можуть бути визначені з теорії розмірностей.

Варто зауважити, що формули (7)–(10), якщо V_0 і V_g — постійні величини, інваріантні не тільки відносно просторових поворотів, а інваріантні також відносно групи Лоренца.

Наведемо тепер числові значення V_0, V_g, $|\boldsymbol{D}|$, $|\boldsymbol{E}|$, $|\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{H}|$, які дають, згідно з формулами (5), (6), експериментальні значення мас електрона і протона.

Для електрона

$$V_0 = 4,44043 \cdot 10^{-41}, \quad V_g = 8,98775 \cdot 10^{16}, \quad B = 4,81346 \cdot 10^{10},$$
$$H = 3,83043 \cdot 10^{16}, \quad D = 1,27769 \cdot 10^{8}, \quad E = 1,44304 \cdot 10^{19},$$
$$m_e = 9,10938 \cdot 10^{-31}.$$

Для протона

$$V_0 = 1,07583 \cdot 10^{-36}, \quad V_g = 1,29308 \cdot 10^{15}, \quad B = 3,32551 \cdot 10^{9},$$
$$H = 6,04608 \cdot 10^{14}, \quad D = 1,68136 \cdot 10^{7}, \quad E = 1,19569 \cdot 10^{17},$$
$$m_p = 1,67262 \cdot 10^{-27}.$$

Числові значення наведені в таких одиницях:

$$[m] = \text{кг}, \quad [V_0] = \text{м}^3, \quad [B] = \text{вебер} \cdot \text{м}^{-2}, \quad [D] = \text{кулон} \cdot \text{м}^{-2},$$
$$[E] = \text{вольт} \cdot \text{м}^{-1}, \quad [H] = \text{ампер} \cdot \text{м}^{-1}, \quad [V_g] = \text{джоуль} \cdot (\text{кг})^{-1}.$$

При обчисленні мас електрона і протона за формулами (5), (6)

$$\boldsymbol{DE} = |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{E}|\cos\varphi, \quad \boldsymbol{BH} = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{H}|\cos\varphi \tag{11}$$

ми вибрали $\varphi = 0$. Очевидно, що кутовий параметр φ можна вибрати довільно, що приведе до інших значень $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, якщо зафіксувати значення V_0, V_g.

Наведені нами найпростіші формули для обчислення експеримен тальних значень мас, якщо відоме електромагнітне поле, можна роз глядати як одну з можливих кількісних реалізацій глибокої ідеї Дж.Дж. Томпсона.

1. Thomson J.J., Recent researches on electricity and magnetism, Oxford, 1893, 250 p.

Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Представлен обзор результатов по исследованию условной симметрии нелинейных уравнений математической и теоретической физики: волнового уравнения, уравнений Шредингера, Буссинеска, Кортевега-де Фриза, Максвелла, Дирака. Построены семейства точных решений, которые не могут быть получены в классическом подходе Ли.

1. Введение. В настоящей статье будут представлены некоторые результаты по исследованию условной симметрии нелинейных уравнений математической и теоретической физики, полученные в Институте математики АН Украины.

Термин и концепция “условная симметрия уравнения” или “условная инвариантность” введены в [1–10]. Под условной симметрией уравнения мы понимаем симметрию некоторого подмножества решений. Очевидно, такое общее определение условной симметрии требует детализации, в противном случае оно неэффективно. Конкретизация этого понятия означает следующее: аналитически описать условия на решения уравнения, при которых некоторое подмножество решений имеет более широкие (или другие) симметрийные свойства, чем все множество решений. Если такое описание осуществлено, то мы можем получить такие решения уравнения, которые невозможно получить в классическом подходе Ли, в котором, как известно, редукция многомерного дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП) к уравнениям с меньшим числом переменных проводится с использованием симметрии всего множества решений.

Эйлер, Ли, Бейтмен (1914), В. Смирнов и Л. Соболев (1932) и многие другие классики использовали в неявном виде симметрию подмножеств решений линейных уравнений Д’Аламбера, Лапласа для построения точных решений.

Сравнительно недавно Блумен, Коул [11] предложили “неклассический метод решений, инвариантных относительно группы” для линейного теплового уравнения.

Олвер и Розенау (1986) [12] построили решения одномерного нелинейного уравнения акустики

$$u_{00} = uu_{11}, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

которые не могут быть получены с помощью метода Ли. Кларксон и Крускал (1989) [13] предложили “новый метод инвариантной редукции уравнения Буссинеска”

$$u_{00} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{2}$$

Вывод 1. Если воспользоваться концепцией “условная симметрия ДУЧП”, то все перечисленные результаты получаются с помощью единого симметрийного подхода.

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 11, С. 1456–1470.

Вывод 2. Большинство линейных и нелинейных уравнений математической и теоретической физики: Д'Аламбера, Максвелла, Шредингера, Дирака, Буссинеска, нелинейной теплопроводности и акустики обладают условной симметрией.

Замечание 1. Все решения уравнения Буссинеска (2), построенные Кларксоном и Крускалом, получены на основе концепции условной симметрии независимо в работах Леви и Винтерница [14] и В. Фущича и Н. Серова [10].

Рассмотрим некоторую систему ДУЧП

$$L(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},\ldots,\underset{s}{u})=0, \tag{3}$$

$u=u(x)$, $x\in R(n+1)$, $u\in R$; $\underset{n}{u}$ — совокупность всевозможных производных n-го порядка.

Согласно Ли уравнение (3) инвариантно относительно оператора первого порядка

$$X=\xi^{\mu}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

если X — s-раз продолженный оператор удовлетворяет условию

$$\underset{s}{X}\,L=\lambda L, \quad \text{или} \quad \underset{s}{X}\,L\Big|_{L=0}=0, \tag{5}$$

где $\lambda=\lambda(x,u,\underset{1}{u},\ldots)$ — некоторое дифференциальное выражение.

Обозначим через символ $Q=\{Q_1,\ldots,Q_k\}$ совокупность операторов, не принадлежащих алгебре инвариантности (AI) уравнения (3), т.е. $Q_l\notin AI$, $l=1,2,\ldots,k$.

Определение 1 [2, 5]. *Уравнение (3) назовем условно инвариантным относительно оператора Q, если существует нетривиальное дополнительное условие на решение уравнения*

$$L_1(x,u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{s}{u})=0, \tag{6}$$

при котором уравнение (3) вместе с уравнением (6) инвариантно относительно операторов Q. При этом предполагается, что уравнения (3) и (6) совместны.

Дополнительное условие (6) выделяет из всего множества решений уравнения (3) некоторое подмножество. Оказывается, что для многих важных нелинейных уравнений математической физики эти подмножества имеют симметрию более широкую, чем все множество решений. Именно такие подмножества необходимо научиться выделять.

Пусть действие оператора Q на уравнение (3) задается формулой

$$\underset{s}{Q}\,L=\lambda_0L+\lambda_1L_1, \tag{7}$$

или

$$\underset{s}{Q}\,L\Big|_{\substack{Lu=0\\ L_1u=0}}=0$$

$\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$ — некоторые дифференциальные выражения, зависящие от x, u, $\underset{1}{u}$, $\ldots$, $\underset{s}{u}$, $\underset{s}{Q}$ — s-раз продолженный оператор из Q. В наиболее простейшем случае условие инвариантности уравнений (3) и (6) означает, что

$$\underset{s}{Q} L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1, \tag{8}$$

где λ_2, λ_3 — некоторые дифференциальные выражения.

Главная проблема нашего подхода описать в явном виде дополнительные уравнения вида (6), которые расширяют симметрию уравнения (3).

Эта общая и трудная проблема существенно упрощается, если в качестве дополнительного условия (6) выбрать такое нелинейное уравнение первого порядка

$$Qu = 0, \tag{9}$$

где

$$Q = J^{\mu}(x,u)\partial_{\mu} + Z(x,u)\partial_u, \quad \partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}, \quad \partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}. \tag{10}$$

При этом условие инвариантности уравнений (3), (9) имеют вид

$$\underset{s}{Q} L = \lambda_0 L + \lambda_1 (Qu). \tag{11}$$

Определение 2. *Будем говорить, что уравнение (3) Q-условно инвариантно, если система (3), (9) инвариантна относительно оператора (10).*

Остановимся теперь на простейшем одномерном нелинейном уравнении акустики (1).

2. Условная симметрия уравнения (2).

Теорема 1 [8]. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора (10), если коэффициентные функции*

$$J^0 \equiv A(x), \quad J^1 \equiv B(x), \quad Z = h(x)u + q(x), \quad x = (x_0, x_1)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям.

Случай 1: $A \neq 0$, $B \neq 0$; $h = 2\left(B_1 - A_0 + \frac{B}{A}A_1\right)$, $q = 2\frac{B}{A}B_0$;

$$\begin{aligned}
&h_{00} + \frac{2h}{A}h_0 - \left[\frac{h}{A}A_{00} + \frac{2h}{A}A_{00} + 2\left(\frac{h}{A}\right)_1 B_0\right] = q_{11} - \left[\frac{q}{A}A_{11} + 2\left(\frac{q}{A}\right)_1 A_1\right],\\
&h_{11} = \frac{h}{A}A_{11} + 2\left(\frac{h}{A}\right)_1 A_1,\\
&h_{00} + 2\frac{q}{A}q_0 - - \left[\frac{q}{A}A_{00} + 2\left(\frac{q}{A}\right)_1 B_0\right] = 0,\\
&B_{11} - 2h_1 - \left[\frac{B}{A}A_{11} + 2\left(\frac{B}{A}\right)_1 A_1 + 2\frac{h}{A}A_1\right] = 0,\\
&B_{00} + 2\frac{B}{A}h_0 - \left[\frac{B}{A}A_{00} + 2\left(\frac{B}{A}\right)_1 B_0\right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Индексы внизу означают соответствующую производную.

Случай 2: $A = 0$, $B \neq 0$. *Не умаляя общности, можно положить* $B = 1$;

$$\begin{aligned} &h_0 = 0, \quad h_{11} + 3hh_1 + h^3 = 0, \\ &q_{11} + hg_1 + (3h_1 + 2h^2)q = 0, \quad q_{00} - qq_1 - hq^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Случай 3: $A_1 = 1$, $B = 0$;

$$\begin{aligned} &h_1 = 0, \quad h_{00} + hh_0 - h^3 = q_{11}, \\ &q(q_0 + hq) = 0, \quad q_{00} + h_0 q - h^2 q = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Итак, задача об Q-условной симметрии уравнения (2) свелась к построению частных или общих решений уравнений (12)–(14). Подчеркнем, что коэффициентные функции $J^\mu(x,u)$, $Z(x,u)$ оператора Q, в отличие от коэффициентных функций ξ^μ, η (4), являются решениями нелинейных уравнений. Это обстоятельство существенно затрудняет задачу об описании условной симметрии заданных уравнений. Однако, широкие классы частных решений таких уравнений можно построить.

Решая систему (12)–(14), мы нашли 12 типов неэквивалентных операторов условной симметрии уравнения (2). Два из них имеют вид

$$Q_1 = x_0^2 x_1 \partial_1 + \left(x_0^2 u + 3x_1^2 + b_5 x_0^5 + b_6\right)\partial_u, \tag{15}$$

$$Q_2 = \partial_1 + [W(x_0)x_1 + f(x_0)\partial_u], \quad W'' = W^2, \quad f'' = Wf, \tag{16}$$

W — функция Вейерштрасса.

Оператор (15) порождает анзац

$$U = x_1\varphi(x_0) + 3x_0^{-2}x_1 - b_5 x_0^3 + b_6 x_0^{-2}. \tag{17}$$

Анзац (17) редуцирует нелинейное уравнение (2) к линейному ОДУ

$$x_0^2\varphi''(x_0) = 6\varphi. \tag{18}$$

Оператор (16) порождает анзац

$$u = \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 + f(x_0)x_1 + \varphi(x_0). \tag{19}$$

Анзац (19) редуцирует уравнение (2) к линейному ОДУ с потенциалом Вейерштрасса W

$$\varphi''(x_0) = W\varphi(x_0). \tag{20}$$

Замечание 2. Аналогичным методом построены семейства точных решений многомерного уравнения [8]

$$u_{00} = u\Delta u. \tag{21}$$

Вывод 3. Анзацы, порождаемые операторами условной симметрии, во многих случаях редуцируют исходное нелинейное уравнение к линейному уравнению. Лиевская редукция, как правило, не меняет нелинейную структуру уравнения.

3. Условная симметрия уравнения Д'Аламбера. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Box u = F_1(u), \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{22}$$

$F_1(u)$ — произвольная гладкая функция. Максимально широкой симметрией уравнения (22) является конформная группа $C(1,3)$, в том и только в том случае, когда $F_1(u)=0$ или $F_1(u)=\lambda u^3$. Наложим на решение (22) пуанкаре-инвариантное условие эйконального типа

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu}=F_2(u), \tag{23}$$

где $F_2(u)$ — гладкая функция.

Теорема 2 [14]. *В том случае, когда $F_1=F_2=0$, уравнение (22) при условии (23) инвариантно относительно бесконечно-мерной алгебры, коэффициенты оператора (4) имеют вид*

$$\xi^\mu(x,u)=c^{00}(u)x^\mu+c^{\mu\nu}(u)x^\nu+d^\mu(u),\quad \eta(x,u)=\eta(u),$$

где $c^{00}(u)$, $c^{\mu\nu}(u)$, $\eta(u)$ — произвольные гладкие функции, зависящие только от u.

Из этой теоремы видно, что дополнительное условие (23) ($F_2=0$) выделяет из множества всех решений линейного уравнения Д'Аламбера ($F_1=0$) подмножество с уникальными симметрийными свойствами. Кроме того, система (22), (23) ($F_1=F_2=0$) обладает тем свойством, что произвольная гладкая функция от решения будет снова решением.

Теорема 3 [9]. *Система (22), (23) инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$ тогда и только тогда, когда*

$$F_1=3\lambda(u+c)^{-1},\quad F_2=\lambda, \tag{24}$$

где $\lambda, c=\mathrm{const}$.

Итак, дополнительное условие эйконального типа (23) расширяет класс нелинейных волновых уравнений, инвариантных относительно конформной группы. Это означает, что мы можем построить широкие классы точных решений уравнения (22), используя подгруппы конформной группы.

Замечание 3. Система (22), (23) [15] полностью проинтегрирована.

Рассмотрим лоренц-неинтегрированное волновое уравнение [4]

$$Lu\equiv\Box u+F(x,u,\underset{1}{u})=0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}F=-\left(\frac{\lambda_0}{x_0}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\lambda_1}{x_1}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\\ +\left(\frac{\lambda_2}{x_2}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\lambda_3}{x_3}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2,\quad x_\mu\neq 0.\end{aligned} \tag{26}$$

Максимальной группой инвариантности уравнения (25), (26) является двухпараметрическая группа

$$x_\mu\to x_\mu=e^a x_\mu,\quad u\to u'=u+b,$$

a и b — произвольные параметры группы.

Дополнительное условие типа (6) к уравнению (25) выберем в виде

$$I_{\mu\nu}u(x) = 0, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \quad \nu,\mu = 0,1,2,3. \tag{27}$$

Непосредственной проверкой условий инвариантности (7) можно убедиться, что уравнения (25), (27) инвариантны относительно группы Лоренца $O(1,3)$. Это означает, что лоренц-инвариантный анзац

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{28}$$

редуцирует нелинейное волновое уравнение (25) к ОДУ

$$\omega\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + 2\frac{d\varphi}{d\omega} + \lambda^2\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)^2 = 0, \quad \lambda^2 = \lambda_\mu\lambda^\mu = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2.$$

Решением этого уравнения являются функции

$$\varphi(\omega) = 2(-\lambda^2)^{-1/2}\tan^{-1}[\omega(-\lambda^2)^{-1/2}], \quad \lambda^2 < 0,$$

$$\varphi(\omega) = -(\lambda^2)^{-1/2}\ln\left\{\frac{(\lambda^2)^{1/2}+\omega}{(\lambda^2)^{1/2}-\omega}\right\}, \quad \lambda^2 > 0,$$

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega} + c^2, \quad \lambda^2 = 0.$$

c_1, c_2 — константы.

Таким образом, условие (27) выделяет из множества решений лоренц- неинвариантного уравнения (25) подмножество, которое инвариантно относительно шестипараметрической группы Лоренца. Такое существенное расширение симметрии дает возможность построить широкие классы точных решений нелинейного волнового уравнения (25).

4. Условная симметрия нелинейного уравнения Шредингера. Рассмотрим нелинейное уравнение вида

$$Su + F(|u|)u = 0, \quad S \equiv i\frac{\partial}{\partial x_0} + \lambda_1\Delta. \tag{29}$$

Уравнение (29) при произвольной функции $F(|u|)$ инвариантно относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$ с базисными элементами

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a, \quad a,b = \overline{1,n}, \\ &G_a = x_0P_a + \frac{1}{2\lambda_1}x_aR_1, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$R_1 = i\left(u\frac{\partial}{\partial u} + u^*\frac{\partial}{\partial u^*}\right).$$

Среди множества нелинейных уравнений (29) только два уравнения имеют более широкую симметрию, чем уравнение (29) [16, 17]:

$$Su + \lambda_2|u|^r u = 0, \tag{31}$$

$$Su + \lambda_3|u|^{4/n}u = 0, \tag{32}$$

где λ_2, λ_3, r — произвольные действительные параметры, n — число пространственных переменных в уравнении (29).

Уравнение (31) инвариантно относительно расширений алгебры Галилея $AG_1(1,n) = \langle AG(1,n), D\rangle$ с базисными элементами $AG(1,n)$ (30) и оператора масштабных преобразований

$$D = 2x_0P_0 + x_aP_a + \frac{2}{r}R_2, \tag{33}$$

где единичный оператор

$$R_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + u^*\frac{\partial}{\partial u^*}.$$

Уравнение (32) инвариантно относительно обобщенной алгебры Галилея $AG_2(1,n) = \langle AG_1(1,n), A\rangle$ с базисными элементами (30), (33) и оператора проективных преобразований

$$A = x_0^2P_0 + x_0x_aP_a + \frac{x^2}{4\lambda_3}R_1 - \frac{n}{2}x_0R_2.$$

Теорема 4 [18]. *Уравнение Шредингера (23) условно инвариантно относительно оператора*

$$Q_1 = \ln\left(\frac{u}{u^*}\right)R_1 + x_aP_a - cR_2, \quad c = \text{const}, \tag{34}$$

если

$$F(|u|) = \lambda_4|u|^{-4/r} + \lambda_5|u|^{4/r},$$

λ_4, λ_5, r *— произвольные параметры, а модуль функции и удовлетворяет уравнению*

$$\lambda_1\Delta|u| + \lambda_6|u|^{\frac{r+4}{r}} = 0. \tag{35}$$

Теорема 5 [18]. *Уравнение (32) вместе с уравнением (35) инвариантно относительно алгебры $AG_2(1,n)$ и оператора Q_1 (34).*

Итак, налагая на решения линейного уравнения (29) дополнительные условия (35), мы расширили его симметрию.

5. Условная симметрия нелинейных уравнений теплопроводности. Для описания нелинейных процессов тепломассопереноса широко используются одномерные уравнения вида

$$u_0 + u_{11} = F(u), \tag{36}$$

$$u_0 + uu_{11} = 0, \tag{37}$$

где $F(u)$ — гладкая функция.

Будем искать оператор условной симметрии в виде

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{38}$$

A, B, C — гладкие функции.

Теорема 6 [19]. *Уравнение (36) Q-условно инвариантно относительно оператора (38), если функции A, B, C удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений.*

Случай 1; $A = 1$;

$$\begin{aligned} &B_{uu} = 0, \quad C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u), \\ &3B_uF = 2(C_{1u} + B_uC) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1), \\ &CF_u - (C_u - 2B_1)F = C_0 + C_{11} + 2CB_1. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь и ниже индекс внизу возле функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу (x_0, x_1, u).

Случай 2; $A = 0, B = 0$;

$$CF_u - C_uF = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}, \tag{40}$$

Если построить общие решения нелинейных систем (39), (40), тогда мы опишем Q-условную симметрию уравнения (36).

Теорема 7 [19]. *Уравнение (36) Q-условно инвариантно относительно оператора (38)* $(A = 1,\ B_u \neq 0)$ *тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$u_0 + u_{11} = b_3u^3 + b_1u + b_0, \quad b_0, b_1, b_3 = \text{const}. \tag{41}$$

оператор (38) имеет вид

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2b_3}u\partial_1 + \frac{3}{2}(b_3u^3 + b_1u - b_0)\partial_u. \tag{42}$$

Уравнение (41) можно свести к одному из четырех канонических уравнений

$$u_0 + u_{11} = \lambda u(u^2 - 1), \tag{43}$$

$$u_0 + uu_{11} = \lambda(u^3 - 3u + 2), \tag{44}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3, \tag{45}$$

$$u_0 + uu_{11} = \lambda u(u^2 + 1). \tag{46}$$

Анзацы, построенные с помощью оператора (42) для уравнений (43)–(46), соответственно имеют вид

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}u + \sqrt{2\lambda}x_1, \quad \omega = -\ln(1 - u^{-2}) + 2\lambda x_0; \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(\omega = -\frac{4}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - \sqrt{2\lambda}x_1, \\ &\omega = \frac{2}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - 3\lambda x_0; \end{aligned} \tag{48}$$

$$\varphi(\omega) = 2u^{-1} + \sqrt{2\lambda}x_1, \quad \omega = -u^{-2} - 3\lambda x_0; \tag{49}$$

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}u - \sqrt{2\lambda}x_1, \quad \omega = -\ln(1 + u^{-2}) - 3\lambda x_0. \tag{50}$$

Анзацы (47)–(50) редуцируют уравнения (43)–(46) к ОДУ

$$2\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - 1)\dot{\varphi}, \quad 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 - 3\dot{\varphi} + 2, \tag{51}$$

$$2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3, \quad 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}(\dot{\varphi}^2 + 1). \tag{52}$$

Из редуцированных уравнений (51), (52) видно, что анзацы, порожденные оператором условной инвариантности (42), существенно изменили нелинейные правые части. Это позволило построить общие решения (51), (52) в элементарных функциях

$$\varphi(\omega) = -2\tan^{-1}\left(\sqrt{c_1 \exp\omega + 1}\right) + c_2, \tag{53}$$

$$\ln\left[c_1 - \frac{3}{2}(\varphi + 2\omega)\right] = \ln c_2 - \frac{3}{2}(\varphi - \omega), \tag{54}$$

$$\varphi(\omega) = 2\sqrt{c_1 - \omega} + c_2, \tag{55}$$

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{c_1 \exp\omega - 1}\right) + c_2, \tag{56}$$

где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$.

Итак, подставляя (53)—(56) в (47)—(50), получаем семейство точных решений уравнений (43)—(46). Эти решения не могут быть получены с помощью метода Ли.

Теорема 8 [20]. *Уравнение (37) условно инвариантно относительно оператора (38) $A = 1$, если коэффициентные функции B, C удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$uC_{uu} = 2(BB_u + uB_{u1}), \quad B_{uu} = 0, \tag{57}$$

$$B_0 + uB_{11} - CBU^{-1} - 2uC_{u1} + 2BB_1 - 2B_uC = 0, \tag{58}$$

$$C_0 + uC_{11} - C^2u^{-1} + 2B_1C = 0. \tag{59}$$

Решая систему уравнений (57)–(59), находим явный вид оператора (38)

$$\begin{aligned} &Q = b_1Q_1 + b_2Q_2 + b_3D_1 + b_4D_2 + b_5\partial_0 + b_6\partial_1, \\ &Q_1 = x_1\partial_0 + u\partial_1, \quad Q_2 = x_1^2\partial_0 + 2x_1u\partial_1 + 2u^2\partial_u, \end{aligned} \tag{60}$$

$$D_1 = 2_0\partial_0 + x_1\partial_1, \quad D_2 = x_1\partial_1 + 2u\partial u, \quad b_i = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1,6}. \tag{61}$$

Теорема 9 [20]. *Уравнение (37) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = \partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{62}$$

если $C(x,u)$ удовлетворяет условию

$$C_0 + u\left(C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}\right) + C_1C + C^2C_u = 0. \tag{63}$$

Построив частные или общие решения уравнения (63), получаем явные выражения для операторов условной симметрии. Некоторые из таких операторов (62) имеют вид

$$Q_3 = \sqrt{x_0}\partial_1 + \sqrt{2u}\partial_u, \tag{64}$$

$$Q_4 = \sqrt{2x_0}\partial_1 + R(u)\partial_u, \tag{65}$$

$$Q_5 = \partial_1 + \ln u\partial_u, \tag{66}$$

$$Q_6 = x_0\partial_1 + x_1\partial_u, \tag{67}$$

где $R(u)$ — решения дифференциального уравнения

$$u\ddot{R}(u) + \dot{R}(u) = R^{-1}.$$

Приведем несколько анзацев, которые порождают операторы Q_1, Q_2, Q_3

$$x_0u - \frac{1}{2}x_1^2 = \varphi(u), \tag{68}$$

$$\frac{2ux_0}{x_1} - x_1 = \varphi\left(\frac{u}{x_1}\right), \tag{69}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right)^2. \tag{70}$$

Редуцированные уравнения имеют весьма простой вид:

$$\ddot{\varphi}(u) = 0 \quad \text{для анзаца (68)},$$

$$\ddot{\varphi}\left(\frac{u}{x_1}\right) = 0 \quad \text{для анзаца (69)},$$

$$2x_0\dot{\varphi}(x_0) + \varphi = 0 \quad \text{для анзаца (70)}, \quad x_0 \neq 0.$$

Итак, анзацы (68)–(70) редуцируют нелинейное уравнение теплопроводности к линейным ОДУ.

6. Уравнение типа Кортевега-де Фриза. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_0 + F(u)u_1^k + u_{111} = 0, \tag{71}$$

$u_{111} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, k — произвольный действительный параметр. При $F(u) = u$, $k = 1$ (1) совпадает с классическим уравнением КдФ.

Теорема [23]. *Уравнение Q-условно инвариантно относительно оператора галилеевского типа*

$$Q = x_0^r\partial_1 + H(x,u)\partial_u, \tag{72}$$

r — произвольный действительный параметр, если

$$1)\quad F(u) = \lambda_1 u^{\frac{2-k}{k}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}, \quad H(x,u) = \left(\frac{k\lambda_1}{2}\right)^{-1/k} u^{1/2}; \tag{73}$$

$$2)\quad F(u) = (\lambda_1 \ln u)^{1-k}, \quad H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k}u; \tag{74}$$

$$\begin{aligned} 3)\quad & F(u) = (\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}}, \\ & H(x_1 u) = (k\lambda_1)^{-1/k}(1-u^2)^{1/2}; \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} 4)\quad & F(u) = (\lambda_1 \operatorname{Arsh} u + \lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}}, \\ & H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k}(1+u^2)^{1/2}; \end{aligned} \tag{76}$$

$$5)\quad F(u) = \lambda_1 u, \quad H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k}; \tag{77}$$

где $r \neq k^{-1}$, $k \neq 0$, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

С помощью операторов условной инвариантности (72) редуцируем (71) к ОДУ и построим следующие точные решения:

$$u = \left\{ \frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-1/k} + \lambda x_0^{-1/k} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\}^2,$$

когда $F(u)$ имеет вид (73);

$$u = \exp\left\{ -\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k}x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\},$$

при $k \neq -2$, $F(u)$ имеет вид (74); когда $k = 2$

$$u = \exp\left\{ -(2\lambda_1)^{-3/2} x_0^{-1/2} \ln x_0 + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2}x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\},$$

$$u = \sin\left\{ \frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k}x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\}, \quad k \neq 2,$$

$$u = \sin\left\{ (2\lambda_1)^{-3/2} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2}x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\}, \quad k = 2,$$

когда $F(u)$ имеет вид (75);

$$u = \operatorname{sh}\left\{ -\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-3/k+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k}x_1 \right\}, \quad k \neq 2,$$

$$u = \operatorname{sh}\left\{ -(2\lambda_1)^{-3/2} x_0^{-1/2} \ln x_0 + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2}x_1 \right\}, \quad k = 2,$$

когда $F(u)$ имеет вид (76). Во всех формулах λ — произвольный параметр. Итак, изучив условную симметрию уравнения (1), мы построим нетривиальные классы точных решений.

7. Нелинейное волновое уравнение. Уравнение вида

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0 \tag{78}$$

широко применяется для описания нелинейных волновых процессов. Групповые свойства (78) методом Ли детально исследованы в [24]. В зависимости от явного вида функции $F(u)$ уравнение (78) обладает широкой условной симметрией.

Теорема [25]. *Уравнение (78) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + H(x,u)\partial_u,$$

если функции $A(x,u)$, $B(x,u)$, $H(x,u)$, $F(u)$ удовлетворяют следующей системе уравнений.

Случай 1; $A = 1$, $D = F - B^2$;

$$\begin{aligned}
&(B_u D^{-1})_u = 0,\\
&F(H_1 D^{-1})_1 - (H_0 D^{-1})_0 - H^2(H_u D^{-1})_u - H(H_0 D^{-1})_u - H(H_u D^{-1})_0 +\\
&\qquad + D^2\{2F(B_0 D_1 - B_1 H_0 + H[B_u H_1 - B_1 H_u]) - BHH_1 F\} = 0,\\
&D^2 H_{uu} + D\{(H\dot{F})_u + 2B(B_u H_u - B_{uu} H) - 2FB_{1u} - 2BB_{0u}\} -\\
&\qquad - HD_4^2 + 2BB_0 D_u + 2BB_1(B\dot{F} - 2B_u F) = 0;\\
&D\{B_{00} + 2(B_0 H)_u - 2(BH_{0u} - B_u H_0) + 2(H_1 F)_u -\\
&\qquad - B_{11}F + B_{uu}H^2 + 2BHH_{uu}\} - D_u\{B_0 H + B_u H^2 + 2BHH_u\} +\\
&\qquad + B\{B_1 H\dot{F} + 2B_0^2 + 2B_0 B_u H + 4BB_0 H_u + 4B_1 H_u F - 2B_1^2 F\} = 0.
\end{aligned}$$

Случай 3; $A = 1, B = F^{1/2}$;

$$\begin{aligned}
&1)\ \ \dot{B}H + 2BH_u = 0, \quad H_0 + HH_u - BH_1 = 0;\\
&2)\ \ \dot{B}H + 2BH_u \neq 0, \quad H_0 + HH_u - BH_1 = 0;\\
&[\ddot{B}H^2 + 2\dot{B}(BH_1 + HH_u) + 2B(H_{0u} + HH_{uu} + BH_{1u})] =\\
&\qquad = (H_0 + HH_u - HH_1) - [H_{00} + H^2 H_{uu} - B^2 H_{11} + 2HH_{0u} - 2\dot{B}HH_1] \times\\
&\qquad \times (\dot{B}H + 2BH_u) = 0.
\end{aligned}$$

Случай 3; $A = 0, B = 1$

$$H_{00} - H^3\dot{F} - (3HH_1 + 2H^2 H_u)\dot{F} - (H_{11} + 2HH_{1u})F = 0.$$

Решая эти системы, при конкретных выборах функции $F(u)$ построены явные виды операторов Q. Приведем только некоторые из полученных операторов и анзацев:

$$\begin{aligned}
F(u) = \exp u, \quad & Q_1 = x_1\partial_1 + \partial_u, \quad u = \ln x_1 + \varphi(x_0),\\
& Q_2 = \partial_0 + 2\operatorname{tg} x_0 \partial_u, \quad \exp u = \varphi(x_1)\cos^{-2} x_0;\\
F(u) = u^k, \quad & Q_1 = \partial_0 + \exp\left(\frac{u}{2}\right)\partial_1 - 4x_0^{-1}\partial_u,\\
& Q_2 = (k+1)x_1\partial_1 + u\partial_u;\\
& x_0 \exp\left(\frac{u}{2}\right) + x_1 + \varphi\left(x_0^2 \exp\frac{u}{2}\right) = 0;\\
& u^{k+1} = x_1\varphi^{k+1}(x_0);\\
F(u) = u^{-1/2}, \quad & Q_1 = \partial_0 + x_1 u^{1/2}\partial_u,\\
& Q_2 = x_1^2\partial_0 + (4x_0 + a_1 x_1^5)u^{1/2}\partial_u;\\
& 2u^{1/2} = x_0 x_1 + \varphi(x_1),\\
& u^{1/2} = x_0^2 x_1^{-2} + \frac{a_1}{2}x_0 x_1^3 + \varphi(x_1),
\end{aligned}$$

a_1, a_2, a_3 — постоянные.

Наиболее простые решения уравнения (78), построенные с помощью анзацев, имеют вид

$$\exp u = (x_1^2 + a_1)\cos^{-2} x_0, \quad \exp u = x_1 \exp x_0, \quad \text{если} \quad F(u) = \exp u;$$
$$u^{k+1} = x_0^{k+1} x_1, \quad \text{если} \quad F(u) = u^k;$$
$$u = x_0 x_1 + \frac{x_0^4}{12} + a_1, \quad u = W(x_0) x_1^2, \quad \text{если} \quad F(u) = u;$$
$$u^{1/2} = W(x_1) x_0^2, \quad 2u^{1/2} = x_0 x_1 + \frac{x_1^4}{24} + a_1,$$
$$u^{1/2} = x_0^2 x_1^{-2} + 3a_1 x_0 x_1^3 + \frac{a_1^2}{6} x_1^8 + a_2 x_1^{-1} + a_3 x_1^2, \quad \text{если} \quad F(u) = u^{-1/2}.$$

Итак, нами проведена классификация и редукция нелинейных волновых уравнений (78), обладающих условной симметрией.

8. Трехмерное нелинейное уравнение акустики. Ограниченные звуковые пучки описывают нелинейным уравнением вида

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{79}$$

В том случае, когда $F(u) = u$, оно совпадает с уравнением Хохлова–Заболотской

$$u_{01} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{80}$$

Положим на решение (79) дополнительное условие в виде нелинейного уравнения первого порядка

$$u_0 u_1 - F(u) u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 0. \tag{81}$$

Теорема [26]. *Уравнение (80) при условии (81) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры с оператором*

$$X = a_i(u) R_i, \quad i = \overline{1, 12}, \tag{82}$$

где $a_i(u)$ — произвольные гладкие функции зависимой переменной u,

$$R_{\mu+1} = \partial_\mu, \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad R_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3,$$
$$R_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2, \quad R_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad R_8 = x^\mu \partial_\mu,$$
$$R_9 = 4x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2\frac{F(u)}{F'(u)}\partial_u, \quad R_{10} = F'(u) x_0 \partial_1 - \partial_u,$$
$$R_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + F(u)x_0)\partial_2, \quad R_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2F(u)x_0)\partial_3,$$

Операторы $\langle R_1, \ldots, R_8 \rangle$ являются лиевскими операторами симметрии уравнения (80), $\langle R_9, \ldots, R_{12} \rangle$ операторы условной симметрии уравнения (79). Воспользовавшись операторами условной симметрии уравнения (79) $\langle R_9, \ldots, R_{12} \rangle$ можно построить широкие классы точных решений. Так, например, оператор $X = \partial_0 + a(u)\partial_1$, порождает следующие анзацы:

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = a(u)x_0 + x_3, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3. \tag{83}$$

Анзац (83) редуцирует четырехмерное уравнение (79), (81) к трехмерному

$$
\begin{aligned}
&(a(\varphi)-\varphi)\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_{33}+\left(\frac{da(\varphi)}{d\varphi}-1\right)\varphi_1^2=0,\\
&(a(\varphi)-\varphi)\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2=0 \quad \varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad i=\overline{1,3}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Конкретизируя функцию $a(u)$, в некоторых случаях можно построить общее решение (84). Пусть $a(u)=u+1$, тогда имеем систему

$$\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_{33}=0, \tag{85}$$

$$\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2=0. \tag{86}$$

Систему (85) естественно назвать уравнением Бейтмена (1914 г.) — Соболева — Смирнова (1932–1933гг.), поскольку именно они детально изучали ее. Уравнение (85) имеет общее решение и задается формулой Соболева–Смирнова

$$\varphi=c_1(\varphi)\omega_1+c_2(\varphi)\omega_2+c_3(\varphi)\omega_3, \tag{87}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$c_1^2-c_2^2-c_3^2=0, \quad c_2^2+c_3^2\neq 0.$$

Таким образом, формула (87) задает класс точных решений трехмерных нелинейных уравнений (85), (86).

Итак, анзацы (68)–(70) редуцирует нелинейное уравнение теплопроводности (37) к линейным ОДУ.

9. Условная симметрия уравнения Дирака. Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака

$$\{\gamma_\mu p^\mu-\lambda(\bar\Psi\Psi)\}\Psi(x)=0 \tag{88}$$

и наложим на его решение условие $\bar\Psi\Psi=1$. Тогда (71) становится линейным уравнением с нелинейным дополнительным условием

$$(\gamma_\mu p^\mu-\lambda)\Psi=0, \quad \bar\Psi\Psi=1. \tag{89}$$

Система (72) условно инвариантна относительно операторов [9]

$$Q_1=p_0-\lambda\gamma_0, \quad Q_2=p_3-\lambda\gamma_3. \tag{90}$$

В рассматриваемом случае уравнение типа (6) имеет вид

$$Q_1\Psi=0 \quad \text{и} \quad Q_2\Psi=0. \tag{91}$$

Оператор Q_1 порождает анзац

$$\Psi(x)=\exp(-i\lambda\gamma_0x_0)\varphi(x_1,x_2,x_3), \tag{92}$$

где $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ — четырехкомпонентная вектор-функция, зависящая только от трех переменных.

10. Условная симметрия уравнений Максвелла. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \vec{H}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, \vec{E}. \tag{93}$$

Можно непосредственно проверить, что система (93) не инвариантна относительно преобразований Лоренца. Однако, если добавить к системе (93) известные дополнительные условия

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\, \vec{H} = 0,$$

то система (93), (94) становится лоренц-инвариантной. Приведенная точка зрения на уравнения Максвелла [1–10, 21] указывает на естественность термина “условная симметрия” и физическую важность этой концепции для широкого класса уравнений математической физики [22].

Заключение. Исследование условий симметрии ДУЧП только началось. Приведенные результаты говорят о том, что на этом пути следует ожидать качественно нового понимания симметрии уравнения, симметрийной классификации ДУЧП, редукции многомерных нелинейных уравнений к уравнениям с меньшим числом переменных, процесса линеаризации нелинейных уравнений.

Одним из наиболее фундаментальных законов физики, механики, гидромеханики, биофизики является принцип относительности, т.е. равноправие всех инерциальных систем отсчета. На математическом языке этот принцип означает инвариантность уравнения движения либо относительно преобразований Галилея, либо преобразований Лоренца, ДУЧП, не удовлетворяющие этому принципу, обычно не рассматриваются в физических теориях, поскольку они несовместимы с принципом относительности. Такие уравнения не могут быть использованы для математического описания движения реальных физических систем.

Понятие условной инвариантности дает возможность существенно расширить классы уравнений, удовлетворяющих принципу относительности. Уравнения, которые не совместимы, в обычном смысле, с принципом относительности могут условно удовлетворять ему. Т.е. существуют нетривиальные условия на решения таких уравнений, выделяющие подмножества решений исходного уравнения, инвариантные либо относительно преобразований Галилея, либо преобразований Лоренца. Описание и детальное изучение классов уравнений, условно инвариантных относительно групп Галилея, Пуанкаре и их подгрупп, представляется автору весьма важной задачей математической физики.

Условная симметрия, например, скалярного уравнения дает возможность строить такие анзацы, которые увеличивают (антиредукция) число зависимых переменных. Она позволяет провести не только редукцию по числу независимых переменных, но при этом увеличить число зависимых переменных. Подчеркнем, что такие анзацы существенно меняют структуру нелинейностей исходного уравнения. И, конечно, они не могут быть построены в рамках классической схемы Ли. Процесс линеаризации, например, нелинейной системы Навье–Стокса в нашем подходе следует рассматривать как замену нелинейного уравнения на линейную систему

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = 0, \quad \mathrm{div}\, \vec{u} = 0, \tag{94}$$

при нелинейном дополнительном условии

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = 0, \quad \text{или} \quad \{(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}\}^2 = 0. \tag{95}$$

Линейное уравнение Навье–Стокса при нелинейном дополнительном условии обладает нетривиальной условной симметрией. Очевидно, в качестве дополнительного условия к нелинейному ураанеяию Навье–Стокса можно выбрать и такие уравнения:

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = 0.$$

Детальному изучению условной линеаризации нелинейных ДУЧП будут посвящены отдельные публикации.

1. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
2. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений, в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equation with broken symmetry, *J. Phys. A*, 1987, **20**, 45–48.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publ., 1987, 214 p.
6. Fushchych W.I, Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Inst. for Math. and its Appls., Univ. of Minnesota, 1988.
7. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 9, 17–21.
8. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики, *Докл. АН УССР, Сер. А*, № 10, 27–31.
9. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations, *Phys. Rep.*, 1989, **46**, № 2, 325–365.
10. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска, в сб. Симметрия и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 95–102.
11. Bluman G., Cole J., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.*, 1969, **18**, 1025–1042.
12. Olver P., Rosenau Ph., The construction of special solutions to partial differential equations, *Phys. Lett. A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
13. Clarkson P., Kruskal M., New similarity reductions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, № 10, 2201–2213.
14. Levi D., Winternitz P., Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A*, 1989, **22**, 2915–2924.
15. Шульга М.В., Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической-физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.
16. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 67 с.
17. Fushchych W.I., Serov N., On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A*, 1987, **20**, L929–L933.

18. Фущич В.И., Чопик В.И., Условная инвариантность нелинейного уравнения Шредингера, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 4, 30–33.

19. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 7, 24–28.

20. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К., Условная инвариантность уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 11, 16–21.

21. Фущич В.И., Об одном обобщении метода С. Ли, в сб. Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 4–9.

22. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

23. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К., Об условной симметрии обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1991, № 12, 28–30.

24. Ames W.F., Lohner R.I., Adams E., Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, *Intern. J. Non-Linear Mech.*, 1981, **16**, № 5/6, 439–447.

25. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1991, № 5, 29–34.

26. Фущич В.И., Чопик В.И., Миронюк П.П., Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 9, 25–28.

Условная симметрия и точные решения уравнения нелинейной акустики

В.И. ФУЩИЧ, П.И. МИРОНЮК

1. Рассматривается нелинейное уравнение

$$u_{01}-(uu_1)_1-u_{22}-u_{33}-f(u)=0, \tag{1}$$

$u_i\equiv\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, $f(u)$ — гладкая функция, частным случаем которого есть уравнение нелинейной акустики ограниченных звуковых пучков (уравнение Хохлова–Заболотской) [1]

$$u_{01}-(uu_1)_1-u_{22}-u_{33}=0. \tag{1$'$}$$

Групповые свойства уравнения (1) описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Максимальной (в смисле Ли) группой инвариантности уравнения (1) при произвольной функции $f(u)$) есть 7-параметрическая группа — ядро основних групп (ЯОГ). Базисные оператори алгебры Ли ЯОГ имеют вид: $X_{j+1}=\partial_j$, $j=\overline{0,3}$, $X_5=x_3\partial_2-x_2\partial_3$, $X_6=x_2\partial_1+2x_0\partial_2$, $X_7=x_3\partial_1+2x_0\partial_3$.*

Расширение ЯОГ возможно лишь при таких специализациях функции $f(u)$:

1) $f(u)=\pm e^{ku}$, $\quad k\neq0$, $\quad k=\mathrm{const}$.

К ЯОГ прибавляется оператор $X_8=kx^l\partial_l+2(x_0\partial_1-\partial_u)$, $x^l=x_l$ (здесь и ниже по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 0 к 3, а по греческим — от 0 к 4).

2) $f(u)=\pm(u^m)^k$, $\quad k\neq0$, $\quad k,m=\mathrm{const}$.

К ЯОГ прибавляется оператор $X_8=kx^l\partial_l+2(mx_0-x_1)\partial_1-x_2\partial_2-x_3\partial_3-2(u+m)\partial_u$.

3) $f(u)=\lambda$, $\quad \lambda\in\{0;1;-1\}$

В этом случае уравнение (1) инвариантно относительно бесконечноизмеримой алгебры Ли, базис которой можно задать в таком виде:

$$Y_{1,2}=5\int p_{1,2}(x_0)\partial_0+p_{1,2}(x_0)\left[\frac{3}{4}\left(x_2^2+x_3^2\right)\partial_1-x_1\partial_u\right]+$$
$$+p_{1,2}(x_0)\left[x_1\partial_1+3x_2\partial_2+3x_3\partial_3-\left(4u+\frac{3}{4}\lambda\left(x_2^2+x_3^2\right)\right)\partial_u\right],$$

где $p_{1,2}$ — линейно независимые решения уравнения $p''=\lambda p$,

$$\begin{aligned}&Y_3=\partial_0,\quad Y_4=x_3\partial_2-x_2\partial_3,\quad Y_5=2x_1\partial_1+x_2\partial_2+x_3\partial_3+2u\partial_u,\\&Y_6(A)=A'x_2\partial_1+2A\partial_2-A''x_2\partial_u,\quad Y_7(B)=B'x_3\partial_1+2B\partial_3-B''x_3\partial_u,\\&Y_8(C)=C\partial_1-C'\partial_u,\end{aligned}\tag{2}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 6, С. 23–29.

A, B, C — произвольные гладкие функции x_0, штрихами обозначены соответственные производные.

Заметим, что операторы Y_3, Y_4, $Y_6\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y_7\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y_8(1)$, $Y_6(x_0)$, $Y_7(x_0)$ дают ЯОГ.

В [2] построены операторы условной инвариантности и на их основании получены точные решения уравнения ($1'$) при дополнительном условии

$$u_0 u_1 - u u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \varkappa, \tag{3}$$

если $\varkappa = 0$.

Ниже исследуется условная инвариантность уравнения ($1'$) дополнительным условием (3) при $\varkappa = \pm 1$, а также рассматривается вопрос Q-условной инвариантности этого уравнения (о условной и Q-условной симметрии см. [3, 4]). При помощи операторов уссловной инвариантности проводится редукция уравнения ($1'$) к уравнению с меньшим числом независимых переменных, а также строятся точные решения этого уравнения.

2. Исследуем сначала симметрию дополнительного условия (3).

Теорема 2. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (3) при $\varkappa = 1$ — 21-параметрическая группа. Базисные операторы соответственной алгебры Ли имеют вид:*

$$\begin{aligned}
&X_{\mu+1} = \partial_\mu,\ \mu = \overline{0,3}, \quad X_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad X_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2,\\
&X_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad X_8 = x_0\partial_1 - \partial_u, \quad X_9 = x_0x_2\partial_1 + \left(u + x_0^2\right)\partial_2 - x_2\partial_u,\\
&X_{10} = x_0x_3\partial_1 + \left(u + x_0^2\right)\partial_3 - x_3\partial_u, \quad X_{11} = \left(u - x_0^2\right)\partial_1 + 2x_0\partial_u,\\
&X_{12} = x_0\partial_0 + \left(\frac{2}{3}x_0^3 - 2ux_0 - x_1\right)\partial_1 - 2x_0^2\partial_u,\\
&X_{13} = x_2\partial_0 + x_2\left(x_0^2 - u\right)\partial_1 + 2\left(x_1 + ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_2 - 2x_0x_2\partial_u,\\
&X_{14} = x_3\partial_0 + x_3\left(x_0^2 - u\right)\partial_1 + 2\left(x_1 + ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_3 - 2x_0x_3\partial_u,\\
&X_{15} = \left(u + x_0^2\right)\partial_0 - \left(2x_0x_1 + u^2 + 2ux_0^2 - \frac{1}{3}x_0^4\right)\partial_1 + 2\left(x_1 - \frac{2}{3}x_0^3\right)\partial_u,\\
&X_{16} = \left(2x_1 + ux_0 - \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + \left(u + x_0^2\right)\partial_u,\\
&X_{17} = 4x_0^2\partial_0 + \left(x_2^2 + x_3^2 + {}+x_0^4 + u^2 - 6x_0^2u\right)\partial_1 + 4x_0(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) +\\
&\qquad + 4x_0\left(u - x_0^2\right)\partial_u,\\
&X_{18} = x_0\left(u + x_0^2\right)\partial_0 + \left[\left(u - x_0^2\right)\partial_1 + \frac{1}{2}x_0\left(x_2^2 + x_3^2 - u^2\right) - \frac{5}{3}x_0^3u + \frac{1}{6}x_0^5\right]\partial_1 +\\
&\qquad + \left(u + x_0^2\right)(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) + \left[2x_0x_1 + x_0^2u - \frac{1}{2}\left(x_2^2 + x_3^2 - u^2\right) - \frac{5}{6}x_0^4\right]\partial_u,\\
&X_{19} = x_0x_2\partial_0 + x_2\left(x_1 - ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_1 +\\
&\qquad + \left[2x_0x_1 + \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_3^2 - u^2\right) + ux_0^2 + \frac{1}{6}x_0^4\right]\partial_2 + x_2x_3\partial_3 + \left(u - x_0^2\right)\partial_u,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$X_{20} = x_0x_3\partial_0 + x_3\left(x_1 - ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)\partial_1 + x_2x_3\partial_2 +$$
$$+ \left[2x_0x_1 - \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_3^2 + u^2\right) + ux_0^2 + \frac{1}{6}x_0^4\right]\partial_3 + \left(u - x_0^2\right)x_3\partial_u,$$
$$X_{21} = \left(x_2^2 + x_3^2 + u^2 + 2ux_0 + x_0^4\right)\partial_0 + \left[4x_1^2 + 4ux_0x_1 - \frac{4}{3}x_0^3x_1 - u^3 -\right.$$
$$\left. - x_0^2u^2 - \frac{5}{3}x_0^4u + \frac{1}{9}x_0^6 + \left(x_0^2 - u\right)\left(x_2^2 + x_3^2\right)\right]\partial_1 +$$
$$+ 4\left(x_1 + ux_0 + \frac{1}{3}x_0^3\right)(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) +$$
$$+ \left[4ux_1 + 4x_0^2x_1 + \frac{4}{3}x_0^3u - 2x_0\left(x_2^2 + x_3^2 - u^2\right) - \frac{2}{3}x_0^5\right]\partial_u.$$

Доказательство теорем проводится методом Ли [4].

Как известно [4], максимальной локальной группой инвариантности эйконального уравнения

$$v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 1, \tag{5}$$

$v = v(y^0, y^1, y^2, y^3)$, $v_l = \frac{\partial v}{\partial y^l}$, $l = \overline{0,3}$ есть 21-параметрическая конформная группа $C(1,4)$, базисные элементы алгебри Ли $AC(1,4)$ которой имеют вид

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = y_\alpha P_\beta - y_\beta P_\alpha, \quad D = y^\alpha P_\alpha, \tag{6}$$

$$K_\alpha = 2y_\alpha D - s^2 P_\alpha, \tag{7}$$

где $\alpha, \beta = \overline{0,4}$, $y^4 = v$, $y_\alpha = g_{\alpha\beta}y^\beta$, $g_{\alpha\beta} = (1, -1, \ldots, -1)\delta_{\alpha\beta}$, $s^2 = y^\alpha y_\alpha \equiv y_0^2 - y_1^2 - y_3^2 - y_4^2$, и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [P_\alpha, J_{\beta\rho}] = g_{\alpha\beta}P_\rho - g_{\alpha\beta}P_\beta, \quad [P_\alpha, D] = P_\alpha,\\
&[J_{\alpha\beta}, J_{\rho\sigma}] = g_{\alpha\sigma}J_{\beta\rho} + g_{\beta\rho}J_{\alpha\sigma} - g_{\alpha\rho}J_{\beta\sigma} - g_{\beta\sigma}J_{\alpha\rho}, \quad [J_{\alpha\beta}, D] = 0,\\
&[K_\alpha, K_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\rho}] = g_{\alpha\beta}K_\rho - g_{\alpha\rho}K_\beta,\\
&[P_\alpha, K_\beta] = 2(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}), \quad [D, K_\alpha] = K_\alpha.
\end{aligned} \tag{8}$$

Выясним вопрос о взаимосвязи алгебр (4) и (6), (7).

Теорема 3. *Алгебра (4) изоморфная конформной алгебре* $AC(1,4)$*, заданной соотношениями (6)–(8).*

Доказательство. Положим в (6), (7)

$$\begin{aligned}
&y^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^2 = x_2, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 \equiv v = u + x_0^2;
\end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_1 + 2x_0\partial_u\right],\\
&P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 + \frac{1}{2}\right)\partial_1 + 2x_0\partial_u\right],\\
&P_2 = -\partial_2, \quad P_3 = -\partial_3, \quad P_4 = x_0\partial_1 - \partial_u.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Вычисляя по формулам (6), (7) операторы $J_{\alpha\beta}$, D, K_α, легко убедиться, что они есть линейными комбинациями операторов X_i (4), и наоборот, а также, что выполняются коммутационные соотношения (8).

Следствие 1. *Уравнение (3) при $\varkappa = 1$ заменой (9) сводится к уравнению (5).*

Действительно, используя (9), имеем

$$
u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v - x_0^2\right) = \frac{\partial v}{\partial y^l}\frac{\partial y^l}{\partial x_1} = \sqrt{2}x_0(v_0 - v_1)u_1 + \sqrt{2}(v_0 - v_1),
$$

$v_l = \frac{\partial v}{\partial y^l}$, откуда $u_1 = \frac{\sqrt{2}(v_0 - v_1)}{1+\sqrt{2}(v_1 - v_0)x_0}$. Аналогично вычисляя u_0, u_2, u_3, после подстановки в (3) и упрощений получаем (5).

Аналогично теоремам 1–3 доказывается

Теорема 4. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (3) при $\varkappa = -1$ — 21-параметрическая конформная группа $C(2,3)$.*

Аналог операторов (4) вследствие громоздкости приводить не будем. Базис алгебры Ли $AC(2,3)$ имеет вид (6), (7), причем соответственные преобразования (9), (10) задаются формулами

$$
\begin{aligned}
&y^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3\right),\\
&y^2 = x_2, \quad y^3 = x^3, \quad y^4 \equiv v = u - x_0^2;
\end{aligned}
\tag{9$'$}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 - \frac{1}{2}\right)\partial_1 - 2x_0\partial_u\right],\\
&P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\partial_0 + \left(u - x_0^2 + \frac{1}{2}\right)\partial_1 - 2x_0\partial_u\right],\\
&P_2 = -\partial_2, \quad P_3 = -\partial_3, \quad P_4 = x_0\partial_1 - \partial_u.
\end{aligned}
\tag{10$'$}
$$

$g_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру $(+---+)$.

Следствие 2. *Уравнение (3) при $\varkappa = -1$ заменой (9$'$) сводится уравнению*

$$
v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = -1. \tag{5$'$}
$$

3. Теорема 5. *Уравнение (1$'$) при дополнительном условии (3) инвариантно относительно 16-параметрической группы, изоморфной группе $\tilde{P}(1,4)$ при $\varkappa = 1$ и $\tilde{P}(2,3)$ при $\varkappa = -1$, ($\tilde{P}(1,4)$, $\tilde{P}(2,3)$ — расширенные группы Пуанкаре в 5-измеримом пространстве). Базисные элементы алгебр Ли $A\tilde{P}(1,4)$ и $A\tilde{P}(2,3)$ имеют соответственно вид (6), (9), (10) и (6), (9$'$), (10$'$).*

Заметим, что алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ и $A\tilde{P}(2,3)$ есть максимальными (в смысле Ли) алгебрами инвариантности системы (1′), (3) с $\varkappa = \pm 1$.

Следствие 3. *Система (1′), (3) заменой (9) при* $\varkappa = 1$ *((9′) при* $\varkappa = -1$*) сводится к системе:*

$$\begin{aligned} &v_{00} - v_{11} - v_{22} - v_{33} = 0, \\ &v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = \varkappa. \end{aligned} \tag{11}$$

Действительно, вычисляя $u_{\alpha\beta}$ через $v_{\alpha\beta}$, v_α, v, y^α при помощи формул (9) или (9′) и подставляя в (1′), после упрощений получим уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A}(v_{00} - v_{11} - v_{22} - v_{33}) + \frac{1}{A^3}\bigg[2x_0^2(v_{00} - 2v_{01} + v_{11}) + \\ &\qquad + 2\sqrt{2}Ax_0\left(\frac{\partial}{\partial y^0} - \frac{\partial}{\partial y^1}\right)\bigg]\left(v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - \varkappa\right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

где $A \equiv 1 + \sqrt{2x_0}(v_1 - v_0)$, x_0 выражается через (y^α, v) по формула (9) или (9′). С (12) видно, что при выполнении дополнительного условия (3) получаем систему (11).

Замечание 1. С уравнения (12) получается еще другое дополнительное условие $v_0 - v_1 = 0$, которое также сводит (12) к уравнению д'Аламбера. Этому условию в пространстве (x, u) соответствует условие $u_1 = 0$.

Замечание 2. Операторы X_9–X_{16} с (4) не входят в алгебру инвариантности уравнения (1′), они есть операторами симметрии этого уравнения лишь при выполнении дополнительного условия (3). Это означает, что уравнение (1′) без дополнительного условия (3) не инвариантно относительно группы $\tilde{P}(1,4)$ или $\tilde{P}(2,3)$, поэтому для решений уравнения (1′) не выполняется принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна. С теоремы 5 следует, что из множества всех решений уравнения (1′) дополнительным условием (3) выделяется подмножество, для элементов которого указанный принцип выполняется.

Замечание 3. Используя теоремы 2, 3 работы [2], можно получить замену

$$\begin{aligned} &y^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + 2x_1 + 2ux_0), \quad y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - 2x_1 - 2ux_0), \\ &y^2 = x_2, \quad y^3 = x_3, \quad y^4 \equiv v = u, \end{aligned} \tag{13}$$

при помощи которой уравнение (3) при $\varkappa = 0$ сводится к уравнению $v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 0$, а соответственная система (1′), (3) — к системе (11) с $\varkappa = 0$.

4. Исследуем Q-условную инвариантность уравнения (1′) в классе операторов первого порядка

$$Q = \xi^l(x,u)\partial_l + \eta(x,u)\partial_u, \tag{14}$$

$l = \overline{0,3}$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Теорема 6. *Уравнение (1′) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = 3\partial_1 + (a - bx_1)\partial_u, \tag{15}$$

если функции $a = a(x_0, x_2, x_3)$, $b = b(x_0, x_2, x_3)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$b_{22} + b_{33} = b^2, \quad a_{22} + a_{33} + b_0 - ab = 0. \tag{16}$$

Никаких других операторов Q-условной инвариантности класса (4) (кроме операторов вида $R = f(x,u)X$, где $f(x,u)$ — некоторая функция, X — оператор симметрии уравнения (1′)) уравнение Хохлова–Заболотской (1′) не имеет.

Теорема 6 доказывается по схеме, приведенной в [4]. Заметим, что в ходе доказательства теоремы 6 кроме оператора Q-условной инвариантности (15) получаются и все операторы (2) лиевской симметрии уравнения (1′).

5. Перейдем к построению точных решений уравнения (1′). Учитывая следствие 3 и замечание 3, получаем, что произвольное точное решение системы (11) в пространстве переменных (y, v) порождает соответственное точное решение системы (1′), (3) (а значит, и уравнения Хохлова–Заболотской (1′)).

Система типа (11) играет важную роль в теории пуанкаре-инвариантных дифференциальных уравнений в частных производных [5], поэтому вопросы ее совместности и построения точных решений детально изучены (см. [5] и цитированную там литературу).

В [6] показано, что произвольное решение системи (11) при $\varkappa = 0$ (как комплексное, так й действительное) можно получить из формулы Бейтмена–Смирнова–Соболева

$$\psi(v) = \varphi_i(v) y^i, \tag{17}$$

где $\psi(v)$ — произвольная гладкая функция, $\varphi_i(v) = \varphi^j(v) g_{ij}$, $g_{ij} = (1, -1, -1, -1)\delta_{ij}$, $\varphi^j(v)$ — гладкие функции, удовлетворяющие условию $\varphi_j(v)\varphi^j(v) = 0$, а также в виде

$$v = F(a_i y^i, b_i y^i), \tag{18}$$

где $a_i = a^j g_{ij}$, $b_i = b^j g_{ij}$, a^j, b^j — постоянные, удовлетворяющие условиям $a_j b^j = a_j a^j = b_j b^j = 0$, F — произвольная гладкая функция.

Переходя в (17), (18) к переменным (x, u), по формулам (13) получим классы точных решений (1′), заданных в неявном виде.

Заметим, что в классе, заданном формулой (17), содержатся как действительные, так и комплексные решения, а в классе (18) действительные решения исчерпываются формулой $v = \Phi(a_i y^i)$, $a_i a^i = 0$, Φ — произвольная гладкая функция; все остальные решения этого класса являются комплексными.

В [5] построено в параметрическом виде общее решение системы (11) при $\varkappa = \pm 1$. Там же рассмотрен ряд случаев, когда решения этой системы можно задать в явном или неявном виде. Для примера приведем два класса точных решений системы (1′), (3) при $\varkappa = -1$ и $\varkappa = 1$.

1) $\varkappa = -1$.

$$u = x_0^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3 + c_1\right)\cos\varphi(z) + x_2 \sin\varphi(z) + \psi(z),$$

где $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3\right) + x_3 + c_2$; c_1, c_2 — произвольные постоянные; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные гладкие функции.

2) $\varkappa = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 + 2x_1 + 2ux_0 + \frac{2}{3}x_0^3 + c_1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0 - 2x_1 - 2ux_0 - \frac{2}{3}x_0^3 + c_2\right) \times \\ \times \sin\varphi(z) + (x_1 + c_3)\cos\varphi(z) + \psi(z) = 0,$$

$z = i\left(u + x_0^2\right) + x_3 + c_4$, $i^2 = -1$, $c_j = \mathrm{const}$, $j = \overline{1,4}$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные гладкие функции.

Широкий класс точных решений уравнения $(1')$ можно построить при помощи оператора Q-условной инвариантности (15). Этому оператору соответствует анзац [4]

$$u = \frac{1}{3}a(x_0, x_2, x_3)x_1 - \frac{1}{6}b(x_0, x_2, x_3)x_1^2 + \varphi(x_0, x_2, x_3). \tag{19}$$

Подставляя (19) в $(1')$, после упрощений получаем на функции a, b, φ систему уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} &b_{22} + b_{33} = b^2, \quad a_{22} + a_{33} + b_0 - ab = 0, \\ &\varphi_{22} + \varphi_{33} - \frac{1}{3}b\varphi - \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{9}a^3 = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

решив которую, получим согласно (19) точное решение уравнения $(1')$.

Характерной особенностью анзаца (19) является то, что при его помощи проводится редукция по независимым и антиредукция по зависимым переменным (от одного уравнения в пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3, u) переходим к системе трех уравнений в пространстве $(x_0, x_2, x_3, a, b, \varphi)$). Понятно, что построить точные решения системы (20) проще, нежели уравнения $(1')$, поскольку практически только первое уравнение в (20) нелинейное, а переменная x_0 фактически играет роль параметра. В [7] исследована симметрия и построены точные решения уравнения $b_{22} + b_{33} = b^k$. Подставив полученные там решения во второе уравнение системы (20), будем иметь линейное уравнение для нахождения функции $a(x_0, x_2, x_3)$, решив которое (построив частные решения), для φ получаем также линейное уравнение.

Классы точных решений системы (20) можно построить и на основании ее симметрии, которая описывается следующей теоремой.

Теорема 7. *Максимальной группой инвариантности системы (20) является бесконечнопараметрическая группа, базисные операторы алгебры Ли которой имеют вид:*

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_0, \quad X_2 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3, \quad X_3 = x_0\partial_0 - a\partial_a - 2\varphi\partial_\varphi, \\ &X_4 = x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - 2b\partial_b + 2\varphi\partial_\varphi, \\ &X_5 = \frac{5}{12}x_0^2\partial_0 + \frac{1}{2}x_0(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) - x_0b\partial_b - \\ &\qquad - \left[\frac{5}{6}ax_0 - \frac{1}{8}\left(x_2^2 + x_3^2\right)b + \frac{1}{2}\right]\partial_a - \left[\frac{2}{3}x_0\varphi + \frac{1}{24}\left(x_2^2 + x_3^2\right)a\right]\partial_\varphi, \\ &X(A) = 2A\partial_2 + A'x_2b\partial_a - \left(\frac{1}{3}A'x_2a + A''x_2\right)\partial_\varphi, \\ &X(B) = 2B\partial_3 + B'x_3b\partial_a - \left(\frac{1}{3}B'x_3a + B''x_3\right)\partial_\varphi, \end{aligned} \tag{21}$$

$$X(C) = Cb\partial_a - \left(\frac{1}{3}Ca + C'\right)\partial_\varphi,$$

где A, B, C — произвольные функции от x_0, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial a}$, $\partial_b = \frac{\partial}{\partial b}$, $\partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Построив по операторам (21) соответственные анзацы [4], редуцируем систему (20) к системе трех уравнений с двумя независимыми переменными.

Приведем для иллюстрации решения уравнения ($1'$) вида

$$u = -\frac{1}{6}W(x_i)x_1^2 + \varphi(x_0, x_2, x_3), \tag{22}$$

где $W(x_i)$, $i = 2, 3$ — функция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения $\frac{d^2W(x_i)}{dx_i^2} = W^2$, а φ — решением линейного уравнения $\varphi_{22} + \varphi_{33} - \frac{1}{3}W(x_i)\varphi = 0$, в котором переменная x_0 является параметром. Эти решения неинвариантны относительно алгебры инвариантности уравнения ($1'$), поэтому их нельзя получить классическим методом Ли.

1. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В., Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков, *Акуст. журн.*, 1969, **15**, № 1, С. 40–47.
2. Фущич В.И., Чопик В.И., Миронюк П.И., Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 9, 24–27.
3. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений д'Аламбера й Гамильтона, Препринт № 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.
6. Еругин Н.П., О функционально-инваринтных решениях, *Докл. АН СССР*, 1944, **52**, № 9, 3–4.
7. Жданов Р.З., Лагно В.И., О точных решениях нелинейного уравнения д'Аламбера, содержащих произвольные функции, в сб. Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 34–39.

Качественный анализ семейств ограниченных решений многомерного нелинейного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, И.О. ПАРАСЮК

Установлено существование семейств ограниченных по пространственным переменным решений нелинейного многомерного уравнения Шредингера, а также изучены их асимптотические свойства. Исследование включает два этапа. Вначале исходное уравнение с помощью анзацев специального вида редуцируется к набору обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем проводится качественный анализ каждого такого уравнения.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1].

Рассмотрим многомерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_t\Psi + 1/(2m)\Delta\Psi + \lambda|\Psi|^k\Psi = 0, \tag{1}$$

где $\Psi : R_t \times R_x^n \to \mathbb{C}$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n}(\partial_{x_j})^2$, $m > 0$, $k > 0$, $\lambda \in R$. В [1] это уравнение изучалось в случае, когда $k = 4/n, n = 3$ (при таком k уравнение (1) обладает наиболее широкой группой симметрии [2, 3]). В настоящей работе, следуя [1], изучим ограниченные решения уравнения (1) при произвольном n и более широком диапазоне значений k. Для этой цели с помощью анзацев [2, 3] редуцируем уравнение (1) к набору обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем проведем качественный анализ этих уравнений.

1. Анзац $\Psi(t,x) = t^{-1/k}z(\tau)$, где $\tau = t^{-1/2}\alpha\cdot x$ (здесь и в дальнейшем $\alpha \in R^n$, $\alpha^2 = 1$), редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot z - im\tau\dot z - 2imk^{-1}z + a|z|^k z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{2}$$

Утверждение 1. *Если $k \neq 4$, то уравнение (2) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau, c)$ при фиксированном c ограничена на всей оси R_τ и удовлетворяет условиям*

$$Z(-\tau, c) = Z(\tau, c) \quad \text{и} \quad Z(\tau, c) = O\left(\tau^{-|1/2-2/k|-1/2}\right), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение более общего вида чем (2):

$$\ddot z \pm im\tau\dot z + imbz + a|z|^k z = 0, \quad b \in R. \tag{3}$$

Сделаем замену независимой переменной $s = \tau^2/2$:

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left(\pm im + \frac{1}{2s}\right)\frac{dz}{ds} + \frac{imb}{2s}z + \frac{a}{2s}|z|^k z = 0.$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 6, С. 821–828.

Выполнив подстановку

$$z = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\pm im + \frac{1}{2s}\right)ds\right)v = s^{-1/4}\exp(\pm ims/2)v,$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im}{2s} + \left(b \pm \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16s^2}\right)v + \frac{a}{2s^{1+k/4}}|v|^k v = 0. \tag{4}$$

Вначале исследуем линейное уравнение вида

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im\nu}{s} + \frac{3}{16s^2}\right)v = 0, \tag{5}$$

где $\nu = |b \pm 1/2|/2$. Для него $s = 0$ является регулярной особой точкой с определяющим уравнением $\rho^2 - \rho + 3/16 = 0$, которое имеет пару корней $\rho_1 = 1/4$ и $\rho_2 = 3/4$. Поэтому для любого решения $v(s)$ уравнения (5) существует конечный предел

$$\lim_{s\to 0} s^{-1/4}v(s) < \infty. \tag{6}$$

Для исследования асимптотики решений (5) при $s \to \infty$ в соответствии с [4] рассмотрим уравнение

$$\rho^2 + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im\nu}{s}\right) = 0.$$

Для его корней имеет место представление

$$\rho_\pm(s) = \pm i\sqrt{m^2/4 + im\nu/s} = \pm im/2 \pm \nu/s + O\left(s^{-2}\right).$$

Предположим, что $\nu \neq 0$. Тогда уравнение (5) имеет пару решений

$$v_\pm(s) = \left(\exp\int_{s_0}^{s}\rho_\pm(s_1)ds_1\right)(c_\pm + o(1)) = O\left(s^{\pm\nu}\rho\right), \tag{7}$$

вронскиан которых равен 1. Для этих решений выполняется условие (6). Очевидно, что аналогичный результат справедлив и в случае, когда $\nu = -|b \pm 1/2|/2$, поэтому полагаем $\nu > 0$.

Теперь задачу об ограниченных на полуоси $[0,\infty)$ решениях уравнения (4) сведем к интегральному уравнению

$$v(s) = v_-(s)\left(c + \frac{a}{2}\int_0^s v_+(\theta)\theta^{-1-k/4}|v(\theta)|^k v(\theta)|d\theta\right) + \\ + \frac{a}{2}v_+(s)\int_s^\infty v_-(\theta)\theta^{-1-k/4}|v(\theta)|^k v(\theta)d\theta \stackrel{\text{def}}{=} A[v](s),$$

где c — комплексный параметр. Покажем, что оператор A на полном метрическом пространстве B_L непрерывных функций $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |f(s) - g(s)|$ таких, что

$$|f(s)| \leq L\min\left(s^{1/4}, s^{-\nu}\right), \quad L > 0, \tag{8}$$

при всех достаточно малых $|c|$ и L является оператором сжатия. Действительно. для любой $f \in B_L$ из оценок

$$\int_0^1 |v_\pm(\theta)|\theta^{-1-k/4}|f(\theta)|^{k+1}d\theta \le c_1 L^{k+1}\int_0^1 \theta^{1/4-1-k/4+(k+1)/4}d\theta \le c_2 L^{k+1};$$

$$\int_1^\infty |v_+(\theta)|\theta^{-1-k/4}|f(\theta)|^{k+1}d\theta \le c_3 L^{k+1}\int_1^\infty \theta^{\nu-1-k/4-(k+1)\nu}d\theta \le c_4 L^{k+1};$$

$$\int_s^\infty |v_-(\theta)|\theta^{-1-k/4}|f(\theta)|^{k+1}d\theta \le c_5 L^{k+1}\int_s^\infty \theta^{-\nu-1-k/4-(k+1)\nu}d\theta \le$$

$$\le c_6 L^{k+1}s^{-(k+2)\nu-k/4}, \quad s \ge 1,$$

следует оценка

$$|A[f](s)| \le c_7\left(|c| + L^{k+1}\right)\min\left(s^{1/4}, s^{-\nu}\right),$$

причем константа c_7 не зависит ни от $|c|$, ни от L. Значит, $A : B_L \to B_L$, как только малостью L и $|c|$ будет обеспечено выполнение условия $c_7\left(|c| + L^{k+1}\right) \le L$.

Выясним условия сжатия. Для любых $f, g \in B_L$ из оценок

$$\int_0^1 |v_\pm(\theta)|\theta^{-1-k/4}||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)|d\theta \le$$

$$\le \int_0^1 |v_\pm(\theta)|\theta^{-1-k/4}(|f(\theta)|^k f(\theta) - g(\theta)| + (|f(\theta)|^k - |g(\theta)|^k)|)d\theta \le$$

$$\le c_8 L^k\left(\int_0^1 \theta^{1/4-1-k/4+k/4}d\theta\right)\rho(f,g) \le c_9 L^k\rho(f,g);$$

$$\int_1^s |v_+(\theta)|\theta^{-1-k/4}||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)|d\theta \le$$

$$\le c_{10}L^k\left(\int_1^s \theta^{\nu-1-k/4-k\nu}d\theta\right)\rho(f,g) \le$$

$$\le c_{11}L^k\left(s^{\nu-k/4-k\nu} + 1\right)\rho(f,g), \quad s \ge 1;$$

$$\int_s^\infty |v_-(\theta)|\theta^{-1-k/4}||f(\theta)^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)|d\theta \le$$

$$\le c_{12}L^k\left(\int_s^\infty \theta^{-\nu-1-k/4-k\nu}d\theta\right)\rho(f,g) \le c_{13}L^k s^{-\nu-k/4-k\nu}, \quad s \ge 1,$$

следует оценка

$$\rho(A[f], A[g]) \le c_{14}L^k\rho(f,g)$$

причем c_{14} не зависит ни от c, ни от L. Выполнение условия сжатия $c_{14}L^k < 1$ также можно добиться малостью L.

Таким образом, уравнение (4) при условии $\nu = 0$, обладает семейством решений, зависящих от параметра c и удовлетворяющих условию (8).

Вернемся теперь к уравнению (2), которое соответствует (3) при $b = -2/k$ и знаке "$-$". Для него $\nu = |1/2 - 2/k|/2 \ne 0$. Тогда, учитывая связь между v и z, получаем искомое семейство $z = Z(\tau, c)$. Утверждение доказано.

В случае $k = 4$ имеет место утверждение, аналогичное доказанному выше, с той лишь разницей, что семейство ограниченных на всей оси и убывающих на бесконечности с асимптотикой $O(\tau^{-1/2})$ решений будет зависеть от двух комплексных параметров.

2. Анзац

$$\Psi(t,x) = t^{-1/k}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z(\tau), \quad \tau = t^{-1/2}\alpha\cdot x,$$

редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} + im\tau\dot{z} + im\left(n - \frac{2}{k}\right)z + a|z|^k z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{9}$$

Утверждение 2. *Если $k \neq 4/(2n-1)$, то уравнение (9) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau,c)$ при фиксированном c ограничена на всей оси R_τ и удовлетворяет условиям*

$$Z(-\tau,c) = Z(\tau,c); \quad Z(\tau,c) = O\left(\tau^{-|n-2/k-1/2|-1/2}\right).$$

Доказательство. Уравнение (9) имеет вид (3) при $b = n-2/k$ в знаке “+”. К нему применимо доказательство утверждения 1 для случая $\nu = |n-2/k-1/2|$, поскольку $\nu \neq 0$ в силу условия, наложенного на k. Утверждение доказано.

Случай $k = 4/(2n-1)$ аналогичен случаю $k = 4$ из предыдущего пункта.

3. Анзац $\Psi(t,x) = t^{-n/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z(\tau)$, $\tau = t^{-1}\alpha\cdot x$, редуцирует (1) при $k = 4/n$ к уравнению

$$\ddot{z} + a|z|^{4/n}z = 0, \quad a = 2\lambda m,$$

которое исследовано в [1].

4. Анзац $\Psi(t,x) = t^{-1/k}z(\tau)$, $\tau = t^{-1}x^2$, редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} + (n/(2\tau) - im/2)\dot{z} - imz/(2k\tau) + a|z|^k z/\tau = 0, \quad a = \lambda m/2. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Пусть $l_1(n) < k < l_2(n)$, где $l_1(n) = (2-n+\sqrt{n^2+12n+4})/(2n)$, а $l_2(n) = \infty$ при $n = 1,2$ и $l_2(n) = 4/(n-2)$ при $n \geq 3$. Тогда уравнение (10) имеет семейство решений $z = Z(\tau,c)$, где c — комплексный параметр, а $Z(\tau,c)$ при фиксированном c является функцией класса $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\cdot\ddot{Z}(\tau,c) < \infty, \quad Z(\tau,c) = O\left(\tau^{-\nu}\right), \quad \tau\to\infty,$$

где $\nu = \min(1/k, n/2 - 1/k)$.

Доказательство. Сначала исследуем линеаризованное уравнение, соответствующее (10) ($a = 0$). Справедлива такая лемма.

Лемма. *Уравнение*

$$\ddot{z} + (n/2\tau) - im/2)\dot{z} + imz/(2k\tau) = 0 \tag{11}$$

при выполнении условий утверждения 3 имеет фундаментальную систему решений $z_1(\tau)$ *и* $z_2(\tau)$*, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{\tau\to 0} z_1(\tau) = 1, \quad z_2(\tau) = (1+o(1))\int \tau^{-n/2}(1+o(1))d\tau, \quad \tau\to 0; \tag{12}$$

$$z_j(\tau) = O\left(\tau^{-\nu}\right), \quad \dot{z}_j(\tau) = O\left(\tau^{-\nu}\right), \quad j=1,2, \quad \tau\to\infty. \tag{13}$$

Вронскиан этих решений равен $\exp(im\tau/2)\tau^{-n/2}$.

Доказательство. Существование решения $z_1(\tau)$, удовлетворяющего (12), следует из того, что $\tau = 0$ — регулярная особая точка уравнения (11) с определяющим уравнением $\rho((\rho-1)+n/2) = 0$, откуда $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1-n/2$. Решение $z_2(\tau)$ и выражение для вронскиана получаются из формулы Остроградского–Лиувилля.

Для исследования асимптотики $z_j(\tau)$ при $\tau\to\infty$ выполним подстановку

$$z = \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{n}{2\tau}-\frac{im}{2}\right)d\tau\right)\right)v = \tau^{-n/4}\exp(im\tau/2)v. \tag{14}$$

Получим уравнение

$$\ddot{v} + \left(\frac{m^2}{16}+\frac{im}{2\tau}\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{k}\right)+\frac{4n-n^2}{16\tau^2}\right)v = 0. \tag{15}$$

Исследуется оно так же, как и (5). Если $k\neq 4/n$, то в этом случае $\rho_{1,2}(\tau) = 1\mp im/4 \pm (n/4-1/k)\tau^{-1} + O\left(\tau^{-2}\right)$ и (15) имеет пару линейно независимых решений

$$v_{1,2}(\tau) = O\left(\tau^{\pm(n/4-1/k)}\right). \tag{16}$$

Если же $k = 4/n$, то (15) имеет пару решений с асимптотикой $v_{1,2}(\tau) = O(1)$, которая формально также удовлетворяет (16). Такую же асимптотику имеет $\dot{v}_{1,2}(\tau)$. В обоих случаях соответствующее решение $z_j(\tau)$ с учетом (14) удовлетворяет (13). Лемма доказана.

Задачу об ограниченных решениях уравнения (10) сведем к интегральному уравнению

$$\begin{gathered} z(\tau) = z_1(\tau)\left(c + a\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\theta^{n/2-1}z_2(\theta)|z(\theta)|^k z(\theta)d\theta\right) - \\ - az_2(\tau)\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\theta^{n/2-1}z_1(\theta)|z(\theta)|^k z(\theta)d\theta \stackrel{\text{def}}{=} A[z](\tau). \end{gathered} \tag{17}$$

Применим к (17) принцип сжимающих отображений. Рассмотрим полное метрическое пространство B_L непрерывных функций $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$|f(\tau)| \le L\min\left(1,\tau^{-\nu}\right), \quad L>0, \tag{18}$$

с метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{\tau\in[0,\infty)} |f(\tau)-g(\tau)|$.

Покажем, что $A : B_L \to B_L$ при всех достаточно малых $|c|$ и L. Пусть $f \in B_L$. Тогда, учитывая (12), имеем

$$|A[f](\tau)| \le c_1 \left(|c| + L^{k+1} \int_0^\tau \theta^{n/2-1} \left(\int \theta^{-n/2} d\theta \right) d\theta + \right.$$
$$\left. + L^{k+1} \left(\int \tau^{-n/2} d\tau \right) \int_0^\tau \theta^{n/2-1} d\theta \right) \le c_2 \left(|c| + L^{k+1} \right), \quad \tau \in [0,1]. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что условия утверждения 3 гарантируют выполнение неравенства

$$n/2 - (k+2)\nu < 0. \tag{20}$$

А тогда, учитывая (13), имеем

$$|A[f](\tau)| \le c_3 \left(|c| + L^{k+1} \right) \tau^{-\nu} + c_4 \tau^{-\nu} L^{k+1} \int_1^\tau \theta^{n/2-1-(k+2)\nu} d\theta \le$$
$$\le c_5 \left(|c| + L^{k+1} \right) \tau^{-\nu}, \quad \tau \in (1, \infty). \tag{21}$$

(Здесь и ниже константы c_i не зависят ни от c, ни от L.) Значит, $A[f](\tau)$ будет удовлетворять условию (18), как только $c_5 \left(|c| + L^{k+1} \right) < L$.

Перейдем к исследованию условий сжатия. Для $f, g \in B_L$ получаются оценки

$$|A[f](\tau) - A[g](\tau)| \le c_6 L^k \rho(f,g), \quad \tau \in [0,1];$$
$$|A[f](\tau) - A[g](\tau)| \le c_7 \tau^{-\nu} L^k \left(1 + \int_1^\tau \theta^{n/2-1-(k+1)\nu} d\theta \right) \rho(f,g) \le$$
$$\le c_8 L^k \left(1 + \tau^{n/2-(k+2)\nu} \right) \rho(f,g) \le 2c_8 L^k \rho(f,g), \quad \tau \in (1,\infty),$$

на основании которых находим условие сжатия $\max(c_6, 2c_8) L^k < 1$. Из принципа сжимающих отображений следует существование решения $z(\tau) = Z(\tau, c)$ уравнения (17), удовлетворяющего условию (18).

Для того чтобы закончить доказательство, найдем из (17)

$$\dot z(\tau) = \frac{d}{d\tau} A[z](\tau) = \dot z_1(\tau) \left(c + a \int_0^\tau \exp(-im\theta/2) \theta^{n/2-1} z_2(\theta) |z(\theta)|^k z(\theta) d\theta \right) -$$
$$- \dot z_2(\tau) \int_0^\tau \exp(-im\theta/2) \theta^{n/2-1} z_1(\theta) |z(\theta)|^k z(\theta) d\theta. \tag{22}$$

С помощью формулы Остроградского–Лиувилля получаем $\dot z_2(\tau) = (1 + o(1)) z_2(\tau)$ $+ (1 + o(1)) \tau^{-n/2}$. А тогда с учетом представления

$$\int_0^\tau \exp(-im\theta/2) \theta^{n/2-1} z_1(\theta) |z(\theta)|^k z(\theta) d\theta =$$
$$= \tau^{n/2} \int_0^1 \exp(-ims\tau/2) s^{n/2-1} z_1(s\tau) |z(s\tau)|^k z(s\tau) ds$$

и (22) заключаем, что $z(\tau) \in C^1[0, \infty)$.

Свойство для $\ddot Z(\tau, c)$ вытекает непосредственно из уравнения (10). Утверждение доказано.

Замечание. Случай $n = 1$ при менее жестких ограничениях на параметр k фактически исследован в п. 1.

5. Анзац

$$\Psi(t,x) = t^{-n/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right)z(\tau), \quad \tau = t^{-2}x^2,$$

редуцирует уравнение (1) при $k = 4/n$ к уравнению

$$\ddot{z} + n\dot{z}/(2\tau) + a|z|^{4/n}z/\tau = 0, \quad a = \lambda m/2. \tag{23}$$

Утверждение 4. *Если $n \geq 2$, $a > 0$, то уравнение (23) имеет семейство решений вида $z = \exp(i\theta)r(\tau,c)$, где θ, c — вещественные параметры, а $r(\tau,c)$ при фиксированном c является функцией класса $C^1[0,\infty)\cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$r(0,c) = c; \quad \lim_{\tau\to 0}\ddot{r}(\tau,c)\tau < \infty, \tag{24}$$

$$r(\tau,c) = \begin{cases} O(\tau^{-1/6}), & n = 2, \\ O(\tau^{-n/(2n+4)}), & n \geq 3, \end{cases} \quad \tau\to\infty, \tag{25}$$

Доказательство. Подстановка $z = \exp(i\theta)r$ в (23) приводит к уравнению

$$\ddot{r} + n\dot{r}/(2\tau) + ar^{4/n+1/}\tau = 0. \tag{26}$$

Для того чтобы показать существование семейства решений (26), удовлетворяющих (24) при малых $\tau \geq 0$, следуя [5], запишем (26) в виде

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{r}\tau^{n/2}) = -a\tau^{n/2-1}r^{4/n+1}, \tag{26$'$}$$

откуда с учетом требования непрерывности $\dot{r}$ при $\tau = 0$ имеем представление

$$\dot{r}(\tau) = -a\tau^{-n/2}\left(\int_0^\tau \tau_2^{n/2-1}r^{4/n+1}(\tau_2)d\tau_2\right).$$

Следовательно, искомое семейство удовлетворяет интегральному уравнению

$$r(\tau) = c - a\int_0^\tau \tau_1^{-n/2}\int_0^{\tau_1}\tau_2^{n/2-1}r^{4/n+1}(\tau_2)d\tau_2.$$

При каждом фиксированном $c \in R$ локальная (при малых τ) разрешимость этого уравнения легко доказывается с помощью принципа сжимающих отображений.

Теперь докажем, что всякое решение из семейства $r(\tau,c)$ продолжимо на полуось $[0,\infty)$ и обладает асимптотикой (25). Заметим, что (26$'$) — это известное уравнение Эдмена–Фаулера. Его качественный анализ проведен, например, в [4]. К сожалению, в [4] не выписаны в явном виде формулы асимптотик в рассматриваемом здесь случае.

Пусть $n = 2$. Положим $\tau = e^s$, $r = \exp(-s/6)p$. Получим

$$\ddot{p}(1/3)\dot{p} + (1/36)p + ap^3\exp(2s/3) = 0 \quad \left(\dot{p} = \frac{dp}{ds}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим функцию

$$V(s,p,\dot p) = \dot p^2/2 + (1/72)p^2 + (c/4)p^4\exp(2s/3).$$

В силу (27) имеем

$$\dot V = (2/3)\left(\dot p^2/2 + (a/4)p^4\exp(2s/3)\right) \le (2/3)V.$$

Отсюда $V = O(\exp(2s/3))$ и $p = O(1)$ при $s \to \infty$. Значит, $r = O\left(\tau^{-1/6}\right)$.

Пусть $n \ge 3$. Положим $r = \tau^{(2-n)/2}p$. Получим

$$\ddot p + (4-n)\dot p/(2\tau) + a\tau^{4/n-3}p^{4/n+1} = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию

$$W(\tau,p,\dot p) = \dot p^2/2 + a(4/n+2)^{-1}\tau^{4/n-3}p^4.$$

Ввиду (28) получим

$$\dot W = \tau^{-1}\left[(n-4)\dot p^2/2 + a(4/n-3)(4/n+2)^{-1}\tau^{4/n-3}p^{4/n+2}\right] \le (n-4)\tau^{-1}W.$$

Отсюда $W = O\left(\tau^{n-4}\right)$. Следовательно,

$$p^{4/n+2} = O\left(\tau^{n-4}\right), \quad p = O\left(\tau^{(n^2-n-4)/(2n+4)}\right),$$
$$r = O\left(\tau^{(2-n)/2+(n^2-n-4)/(2n+4)}\right) = O\left(\tau^{-n/(2n+4)}\right).$$

Утверждение доказано.

Замечание. Случай $n = 1$ сводится к п. 3.

6. Анзац

$$\Psi(t,x) = (1-t^2)^{-n/4}\exp\left(-\frac{im}{2}\frac{tx^2}{1-t^2}\right)z(\tau), \quad \tau = x^2/\left(1-t^2\right),$$

редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot z + n\dot z/(2\tau) + m^2z + a|z|^{4/n}z/\tau = 0, \quad a = \lambda m/2. \tag{29}$$

Утверждение 5. *Уравнение (29) имеет семейство решений $z = Z(\tau,c)$, где c — комплексный параметр и функция $Z(\tau,c)$ при фиксированном c принадлежит классу $C^1[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\ddot Z(\tau,c) < \infty, \quad Z(\tau,c) = \left(\tau^{-n/4}\right), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Линеаризованное уравнение (29) ($a = 0$) обладает фундаментальной системой решений $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, удовлетворяющих условиям (12), (13) при $\nu = n/4$. Это утверждение, а также последующие рассуждения повторяют схему доказательства в п. 4. Соответствующее интегральное уравнение отличается от (17) лишь отсутствием экспонент под знаком интеграла. Осталось заметить, что неравенство (20) при $\nu = n/4$, $k = 4/n$ выполняется.

1. Парасюк И.О., Фущич В.И., Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 10, 1344–1350.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of three-dimensional non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 929–933.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
4. Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 216 с.
5. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 480 с.

Точные решения некоторых уравнений газовой динамики и нелинейной акустики

В.И. ФУЩИЧ, В.К. РЕПЕТА

New non-Lie ansätze used to construct exact solutions of some gas dynamics equations and nonlinear acoustics equations are suggested.

Предложены анзацы, с помощью которых построены некоторые классы точных решений уравнений газовой динамики: Линя–Рейснера–Циня и “коротких волн”, а также нелинейной акустики.

1. Для описания нестационарных потенциальных течений газа с околозвуковыми скоростями используется уравнение Линя–Рейснера–Циня [1]

$$2u_{01} + u_1 u_{11} - u_{22} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, x_1, x_2) \in R^3$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, 2}$.

В работе [2] показано, что локальная группа симметрии уравнения (1) бесконечномерна и порождается операторами

$$\begin{gathered} X_1 = 2x_0\partial_0 + x_2\partial_2 - 2u\partial_u, \quad X_2 = h(x_0)\partial_u, \quad X_3 = m(x_0)x_2\partial_u, \\ X_4 = \gamma\partial_1 + \left[2\dot\gamma x_1 + 2\ddot\gamma x_2^2\right]\partial_u, \quad X_5 = \dot\beta x_2\partial_1 + \beta\partial_2 + \left[2\ddot\beta x_1 x_2 + \frac{2}{3}\dddot\beta\, x_2^3\right]\partial_u, \\ X_6 = 3\alpha x_0\partial_0 + \left[\dot\alpha x_1 + \ddot\alpha x_2^2\right]\partial_1 + 2\dot\alpha x_2\partial_2 + \\ + \left[-\alpha u + \ddot\alpha x_1^2 + 2\,\dddot\alpha\, x_1 x_2^2 + \frac{\alpha^{(4)}}{3}x_2^4\right]\partial_u. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\alpha(x_0)$, $\beta(x_0)$, $\gamma(x_0)$, $m(x_0)$, $h(x_0)$ — произвольные функции от x_0.

Решения уравнения (1) будем искать в виде

$$\text{а)}\quad u = \int \varphi^1(x_1, x_2)dx_1 + \varphi^2(x_0, x_2) + \varphi^3(x_0, x_2)x_1, \tag{3}$$

$$\text{б)}\quad u = v^1(x_0, x_2) + v^2(x_0, x_2)\varphi(\omega), \quad \omega = v^3(x_0, x_2)x_1 + v^4(x_0, x_2). \tag{4}$$

Подставляя анзац (3) в уравнение (1), получаем

$$\varphi^2_{22} = 2\varphi^3_0 + \varphi^1\varphi^1_1 - \int \varphi^1_{22}dx_1 + \varphi^3\varphi^1_1 - \varphi^3_{22}x_1. \tag{5}$$

Наложим на φ дополнительные условия

$$\varphi^1_{22} - (\varphi^1\varphi^1_1)_1 = \lambda, \tag{6}$$

$$\varphi^3\varphi^1_{11} - \varphi^3_{22} = \lambda \quad (\lambda = \text{const}). \tag{7}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 8, С. 39–45.

Тогда правая часть уравнения (5) является функцией только двух переменных x_0 и x_2.

В работе [3], используя условную симметрию [4, 5], построены точные решения нелинейного волнового уравнения (6) при $\lambda = 0$. Обобщая результаты [3] на случай произвольного значения параметра λ, приходим к следующим решениям уравнения (6):

$\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
&\varphi^1 = W(x_2)x_1^2 + \Lambda(x_2), \quad \varphi^1 = 1 + \sqrt{1 + 2(x_1 - x_2)},\\
&\varphi^1 = \frac{1}{2}\left(x_2^2 - 2x_1 + x_2\left(x_2^2 - 4x_1\right)^{1/2}\right), \quad \varphi^1 = x_2 x_1^{1/2},\\
&\varphi^1 = x_1^2 x_2^{-2} + x_1^{1/2}\left(a_1 x_2^{5/2} + a_2 x_2^{-3/2}\right);
\end{aligned} \tag{8}$$

$\lambda \in R^1$

$$\varphi^1 = x_1x_2 + \frac{x_2^4}{12} + \frac{\lambda x_2^2}{4} + a_1x_2 + a_2,$$

$$\varphi^1 = x_1^2x_2^{-2} + 3a_1x_2^3x_1 + \frac{a_1^2x_2^8}{6} + a_2x_2^{-1} + a_3x_2^2 + \frac{\lambda}{3}x_2^2\ln x_2.$$

Решения уравнения (7), соответствующее (8), имеют вид

$\lambda = 0$

$$\varphi^3 = \Lambda(x_2), \quad \varphi^3 = 0;$$

$\lambda \in R^1$

$$\begin{aligned}
&\varphi^3 = \frac{\lambda}{2}x_2^2 + b(x_0)x_2 + c(x_0),\\
&\varphi^3 = b_1(x_0)x_2^2 + b_2(x_0)x_2^{-1} + \frac{\lambda}{3}x_2(\ln x_2 - 1).
\end{aligned} \tag{9}$$

Проинтегрировав уравнение (5) с учетом (8), (9) и подставив значения функций φ^1, φ^2, φ^3 в (3), получим точные решения уравнения

$$\begin{aligned}
&u = W(x_2)\frac{x_1^3}{3} + 2\Lambda(x_2)x_1 + H,\\
&u = \frac{x_1^3x_2^{-2}}{3} + \frac{2}{3}x_1^{3/2}\left(a_1x_2^{5/2} + a_2x_2^{-3/2}\right) + \frac{a_1^2}{84}x_2^7 + \frac{a_2^2}{4}x_2^{-1} + \frac{a_1a_2}{6}x_2^3 + H,\\
&u = x_1 + \frac{1}{3}[1 + 2(x_1 - x_2)]^{3/2} - \frac{x_2^2}{2} + H, \quad u = \lambda x_2x_1^{3/2} + \frac{3}{48}\lambda^2x_2^4 + H,\\
&u = -\frac{x_2^4}{12} + \frac{1}{2}\left[x_1x_2^2 - x_1^2 - \frac{x_2}{6}\left(x_2^2 - 4x_1\right)^{3/2}\right] + H,\\
&u = \frac{x_1^2x_2}{2} + x_1\left[\frac{x_2^4}{12} + (a_1 - b)x_2 + a_2 - c\right] + \frac{x_2^7}{504} +\\
&\qquad + (a_1 - b)\frac{x_2^4}{12} + \frac{1}{6}(a_2 - c - 2\dot{b})x_2^3 - \dot{c}x_2^3 + H,\\
&u = \frac{1}{3}x_1^3x_2^{-2} + \frac{3}{2}a_1x_1^2x_2^3 + x_1\left[\frac{a_1^2}{6}x_2^8 + (a_2 - b_2)x_2^{-1} + (a_3 + b_1)x_2^2\right] +\\
&\qquad + \frac{a_1}{2}\left[\frac{a_1^2}{156}x_2^{13} + \frac{a_3 + b_1}{7}x_2^7\right] + \frac{2\dot{b}_2 + 3a_1(b_2 + a_2)}{12}x_2^4 +\\
&\qquad + 2\dot{b}_2x_2(\ln x_2 - 1) + H.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $W(x_2)$ — функция Вейерштрасса, т.е. решение уравнения $W'' = 6W^2$; $\Lambda(x_2)$ — решение уравнения Ламе $\Lambda'' = 2W\Lambda$; $H = h^1(x_0)x_2 + h^2(x_0)$; a, b, c, b_1, b_2, h^1, h^2 — произвольные функции от x_0. Точкой обозначено дифференцирование по x_0.

Во втором случае, подставляя анзац (4) в уравнение (1), придет к соотношению

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}\left[2v^2v^3\left(v_0^3x_1+v_0^4\right)-v^2\left(v_2^3x_1+v_2^4\right)^2\right]+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}(v^2)^2(v^3)^3-v_{22}^1-\varphi v_{22}^2+\\+\dot{\varphi}\left[2(v^2v^3)_0-2v_2^2(v_2^3x_1+v_2^4)-v^2(v_{22}^3x_1+v_{22}^4)\right]=0.\end{aligned} \tag{11}$$

При некоторых условиях на функции v^i, $i=\overline{1,4}$ (11) сводится обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) для $\varphi(\omega)$. Рассмотрим несколько случаев:

Случай 1.

$$v^2=v^3=1,\quad 2v_0^4-(v_2^4)^2=\lambda,\quad v_{22}^4=0,\quad v_{22}^1=\lambda_1,\quad \lambda_1\neq 0. \tag{12}$$

Уравнение (11) при выполнении (12) будет иметь вид

$$\ddot{\varphi}\lambda+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-\lambda_1=0. \tag{13}$$

Решая (12) и (13), получаем точное решение уравнения (1)

$$u=\frac{\lambda_1}{2}x_2^2\pm\frac{1}{3\lambda_1}[\lambda_2+2(\lambda_1\omega+\lambda_2)]^{3/2}-\lambda\omega+H, \tag{14}$$

где $\omega = x_1 + x_0\frac{\lambda+(\lambda_2)^2}{2} + \lambda_2 x_2$, λ_2 — произвольная константа.

Случай 2. Положим в (11) $\varphi=\omega^{3/2}$. Тогда функции v^i, $i=\overline{1,4}$ удовлетворяют системе уравнений

$$v_{22}^2=0,\quad 2v_0^4-(v_2^4)^2=0,\quad v_{22}^1=\frac{9}{8}(v^2)^2,\quad 2v_0^2-2v_2^2v_2^4-v^2v_{22}^4=0. \tag{15}$$

Решая систему уравнений (15), по формуле (4) получаем решения уравнения (1)

$$u=\frac{3}{32}\frac{(g^1x_2+g^2)^4}{(g^1)^2}+(g^1x_2+g^2)\omega^{3/2}+H, \tag{16}$$

где функции g^1, g^2 и ω принимают вид

$$1)\quad g^1=\lambda_1x_0^{-3/2},\quad g^2=\lambda_2x_0^{-2},\quad \omega=x_1-\frac{x_2^2}{2x_0},$$

$$2)\quad g^1=\mathrm{const},\quad g^2=-g^1x_0+\lambda_3,\quad \omega=x_1+\frac{x_0}{2}-x_0.$$

Полученные результаты обобщаются на уравнение $2u_{01}+u_1u_{11}-u_{22}-u_{33}=0$. Для этого в формулах (10), (14), (16) необходимо x_2 заменить на $\alpha_1x_2+\alpha_2x_3$ $(\alpha_1^2+\alpha_2^2=1)$.

Замечание 1. Решения уравнения (1) можно размножить с помощью операторов (2). Формула размножения, построенная по операторам X_1–X_5 для известного решения $u=f(x_0,x_1,x_2)$, имеет вид

$$\begin{aligned}u=\theta_1^2f(\theta_1^2x_0,\gamma\theta_3+x_2\theta_4+x_1,\theta_1(x_2+\beta\theta_4))-\theta_2m(x_2+\beta\theta_1)-h\theta_5-\\-\theta_3\left[2\dot{\gamma}(x_2\theta_4+x_1)+2\ddot{\gamma}(x_2+\beta\theta_4)^2\right]-2\ddot{\beta}x_1x_2\theta_4-\frac{2}{3}\dddot{\beta}\,x_2^2\theta_4,\end{aligned}$$

где θ_i — групповые параметры, $i=\overline{1,5}$.

Укажем формулы размножения для некоторых конкретных значений функции $\alpha(x_0)$

$\alpha = \mathrm{const}$

$$u = (x_0 + \theta, x_1, x_2);$$

$\alpha = x_0$

$$u = \theta^2 f(\theta^3 x_0, \theta x_1, \theta^2 x_2),$$

$\alpha = x_0^n$, $n \neq 0;\ 1$

$$u = f\left((qa+p)^{1/(1-n)}, (qa+p)^{n/q}\left(x_1^{-n/p} - \frac{b_1}{q}F(-1)\right),\right.$$

$$x_2\left(\frac{q}{p}a + 1\right)^{2n/q}\Bigg)(qa+p)^{n/q} + \frac{1}{q}\Bigg(n(n-1)b_2F(-1) -$$

$$\left. - b_1 b_2 n F(-2) + b_1^2 F(-3)\left[\frac{n}{3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\right]\right) p^{-n/q},$$

где $q = 3(1-n)$, $p = x_0^{1-n}$, $b_1 = n(n-1)x_1^2 p$, $b_2 = x_1 x_0^{-n/q} + \frac{b_1}{qp}$, $F(k) = (qa+p)^k - p^k$; θ, a — групповые параметры.

2. В теории “коротких волн” в газовой динамике используется система уравнений

$$\begin{aligned} &w_2 - 2v_1 - 2(v - x_1)v_1 - 2kv = 0, \\ &v_2 + w_1 = 0, \quad (k = 0;\ 1), \end{aligned} \tag{17}$$

которая представляет собой некоторую аппроксимацию уравнений введенную в работе [6].

Замена $w = u_2$, $v = -u_1$ сводит (17) к уравнению

$$2u_{01} - 2(x_1 + u_1)u_{11} + u_{22} + 2ku_1 = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18), также как и система (17), допускает бесконечную группу точечных преобразований [7, 8].

Для отыскания решений уравнения (18) используем анзацы вид (4) и

$$u = x_1^{3/2}\varphi^1(x_0, x_2) + x_1^2\varphi^2(x_0, x_2) + \varphi^3(x_0, x_2). \tag{19}$$

Подставляя (19) в уравнение (18), получим

$$x_1^{3/2}\varphi^1_{22} + x_1^2\varphi^2_{22} + x_1^{1/2}\left(\varphi^1_0 - \varphi^1\left(3\varphi^2 - k + \frac{1}{2}\right)\right) +$$

$$+ x_1\left(\varphi^2_0 - 2(\varphi^2)^2 - \varphi^2(1-k)\right) + \varphi^3_{22} - \frac{9}{4}(\varphi^1)^2 = 0.$$

Итак, уравнение (18) при помощи анзаца (18) редуцируется к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi^1_{22} = \varphi^1_{22} = 0, \quad \varphi^3_{22} = \frac{9}{4}(\varphi^1)^2, \\ &\varphi^1_0 = \varphi^1\left[3\varphi^2 - k + \frac{1}{2}\right], \quad \varphi^2_0 = 2(\varphi^2)^2 + \varphi^2(1-k). \end{aligned} \tag{20}$$

Интегрируя (20) и подставляя полученные значения функций φ^1, φ^2, φ^3 в (19), получаем точные решения уравнения (18)

$k=0$

$$u = x_1^{3/2}e^{-x_0}(c_1x_2+c_2) - \frac{x_1^2}{2} + e^{-2x_0}H_1, \quad u = x_1^{3/2}e^{x_0/2}(c_1x_2+c_2) + e^{x_0}H_1,$$

$$u = x_1^{3/2}e^{x_0/2}(1-2ce^{x_0})^{-3/2}(c_1x_2+c_2) + \\ + x_1^2e^{x_0}c(1-2ce^{x_0})^{-1} + e^{x_0}(1-2ce^{x_0})^{-3}H_1,$$

$k=1$

$$u = x_1^{3/2}e^{-x_0/2}(c_1x_2+c_2) + e^{-x_0}H_1,$$

$$u = x_1^{3/2}e^{-x_0/2}(2x_0+c)^{-3/2}(c_1x_2+c_2) - \frac{x_1^2}{2x_0+c} + e^{-x_0}H_1.$$

Здесь c, c_1, c_2 — произвольные постоянные; $H_1 = \frac{3}{16c_1^2}(c_1x_2+c_2)^4 + h^3(x_0)x_2 + h^4(x_0)$; $h^3(x_0)$, $h^4(x_0)$ — произвольные функции.

Анзац (4) при $v^2 = \mathrm{const}$, $v^3 = \mathrm{const}$ (не ограничивая общности можно положить $v^2 = v^3 = 1$) приводит уравнение (18) к виду

$$2\dot\varphi\ddot\varphi + 2\left[x_1 - v_0^4 - \frac{(v_2^4)^2}{2}\right]\ddot\varphi - \dot\varphi[2k + v_{22}^4] - v_{22}^1 = 0. \tag{21}$$

Требуя, чтобы (21) сводилось к ОДУ для $\varphi(w)$, получаем на функции v^1 и v^2 систему уравнений

$$v_{22}^1 = \lambda_1, \quad v_0^4 + \frac{(v_2^4)^2}{2} + v^4 = \lambda, \quad v_{22}^4 = -2k + \lambda_2, \tag{22}$$

где λ, λ_1, λ_2 — постоянные.

При условии (22) уравнение (21) принимает вид

$$2\dot\varphi\ddot\varphi + 2\ddot\varphi(\omega - \lambda) - \dot\varphi\lambda_2 - \lambda_1 = 0. \tag{23}$$

Система уравнений (22) имеет решения

$\lambda_2 = 2k$

$$v^4 = e^{-x_0}(\lambda_3x_2 + \lambda_4) + \frac{\lambda_3^2}{2}e^{-2x_0} + \lambda, \quad v^1 = \frac{\lambda_1}{2}x_2^2 + H;$$

$\lambda_2 = 2k-1$

$$v^4 = -\frac{x_2^2}{2} + \lambda_3e^{-x_0} + \lambda_4x_2 - \frac{\lambda_4^2}{2}, \quad v^1 = \frac{\lambda_1}{2}x_2^2 + H.$$

Таким образом, в первом случае

$$w = x_1 + e^{-x_0}(\lambda_3x_2 + \lambda_4) + \frac{\lambda_3^2}{2}e^{-2x_0} + \lambda, \tag{24}$$

а во втором

$$w = x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \lambda_3e^{-x_0} + \lambda_4x_2\frac{\lambda_4^2}{2} + \lambda. \tag{25}$$

Решения уравнения (23) представляются в параметрическом виде

$\lambda_2 = 0$:

$$\varphi = c_3 e^{2t/\lambda_1}\left(\frac{2t}{\lambda_1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(-t^2 - \lambda_5 + \lambda\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{2}\right),$$

$$w = \frac{2c_3}{\lambda_1}e^t - t + \lambda - \frac{\lambda_1}{2};$$

$\lambda_2 = -1$:

$$\varphi = (-t + \lambda_1)^{-2}\left(c_3(2t - \lambda_1) - \frac{t^4}{3} + \frac{2}{3}\lambda_1 t^3 - t^2(\lambda_5 + \lambda\lambda_1)\right],$$

$$\omega = (-t + \lambda_1)^{-2}\left[c_3 - \frac{2}{3}t^3 + t^2(\lambda + \lambda_1) - 2t\lambda\lambda_1 - \lambda_1\lambda_5\right]; \tag{26}$$

$\lambda_2 = 2$:

$$\varphi = t^2\left(4c_3 - \frac{1}{4}\right) + \frac{\lambda_1}{4}t - \frac{1}{4}(4\lambda_1 c_3 + \lambda\lambda_1 + \lambda_4) + \frac{1}{8}(4t^2 - \lambda_1^2)\ln(2t + \lambda_1),$$

$$w = t(8c_3 - 1) + \frac{1}{2}(2t + \lambda_1)\ln(2t + \lambda_1)\ln(2t + \lambda_1) + \lambda + 4\lambda_1 c_3;$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\varphi = c_3(t + \lambda_1)^2(2t - \lambda_1) - t^2 + \frac{1}{3}(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda - \lambda_5),$$

$$w = 3c_3(t + \lambda_1)^2 - 2t + \lambda - \lambda_1.$$

Подставляя (24)–(26) в (4), получим точные решения уравнения (18).

3. Построим новые решения, отличные от [3], уравнения нелинейной акустики

$$u_{00} - (uu_1)_1 = 0. \tag{27}$$

Следуя [3–5, 9], можно показать, что уравнение (27) Q-условно инвариантно относительно операторов

$$Q_1 = \partial_0 - 2x_0\partial_1 + 8x_0\partial_0,$$

$$Q_2 = x_0\partial_0 - \left(6x_0^5 + x_1\right)\partial_1 + 2\left[u - 3\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + 2x_1x_0^3 - 24x_0^8\right)\right]\partial_u,$$

$$Q_3 = 2x_0\partial_0 + \left(x_1 - 3x_0^2\right)\partial_1 - 2\left(u + 3x_1 - 9x_0^2\right)\partial_u,$$

$$Q_4 = 2W\partial_0 + \dot{W}x_1\partial_1 - \dot{W}\left[2u - Wx_1^2\right]\partial_u,$$

$$Q_5 = x_0\partial_0 - 3x_0^2\partial_1 + \left[u + 27x_0^4\right]\partial_u.$$

Здесь $W(x_0)$ — решение уравнения $\ddot{W} = W^2$.

Используя операторы Q_1–Q_5 находим анзацы

$$u = 4x_0^2 + \varphi(w), \quad w = x_1 + x_0^2,$$

$$u = 30x_0^2\varphi(w) + \left(\frac{x_1}{x_0} + bx_0^4\right)^2, \quad w = x_0\left(x_1 + x_0^5\right),$$

$$u = -2\left(x_0^2 - x_1\right) + x_0^{-1}\varphi(w), \quad w = x_0^{-1/2}\left(x_1 + x_0^2\right), \tag{28}$$

$$u = W^{-1}\varphi(w) + \frac{1}{6}Wx_1^2, \quad w = W^{-1/2}x_1,$$

$$u = 9x_0^4 + x_1\varphi(w), \quad w = x_1 + x_0^3,$$

которые редуцируют уравнение (27) к ОДУ

$$\begin{aligned}
&2\varphi - \varphi\dot{\varphi} + 8w = 0, \quad \varphi\dot{\varphi} - \varphi - 2w - \lambda = 0,\\
&\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\left(\varphi - \frac{w^2}{4}\right) - \frac{7}{4}w\dot{\varphi} - 2\varphi = 0,\\
&\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\varphi - \frac{\lambda}{2}[\ddot{\varphi}w^2 + 7w\dot{\varphi} + 8\varphi] = 0, \quad \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\varphi - 12\varphi - 108w + \lambda = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Решая уравнения (29) и используя формулы (28), находим точные решения уравнения (27). Приведем некоторые из них

$$\begin{aligned}
&\left[u - 4\left(x_1 + 2x_0^2\right)\right]^2 \left(u + 2\left(x_1 - x_0^2\right)\right) = c,\\
&\left(\frac{u}{6x_0} - 3x_1 - \frac{9}{2}x_0^3\right)^3 \left(\frac{u}{6x_0} - \frac{x_0^2}{2} + x_1\right) = c,\\
&\left(u - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 72x_1x_0^3 - 96x_0^8 - 30\lambda x_0^2\right)^2 \times\\
&\qquad \times \left(u - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 18x_1x_0^3 - 6x_0^8 + 15\lambda x_0^2\right) = cx_0^4
\end{aligned} \tag{30}$$

(c, λ — произвольные постоянные).

Известно, что заменой $v = u^{1/2}$ уравнение (27) приводится к уравнению $v_{11} - \left(v^{-1/2}v_0\right)_0 = 0$.

Таким образом, меняя в (30) местами x_1 и x_0, и заменяя u на $u^{1/2}$, получим точные решения уравнения $u_{00} - \left(u^{-1/2}u_1\right)_1 = 0$.

Замечание 2. Операторы Q_2–Q_4 впервые были найдены при изучении условной симметрии уравнения Буссинеска в работе [9].

Замечание 3. Отметим, что анзац $u = 9x_0^4 + 12x_0\varphi\left(x_1 + x_0^2\right)$ редуцирует уравнение $u_{00} = uu_{11}$ к ОДУ $\varphi\ddot{\varphi} - \dot{\varphi} = \frac{3}{4}$.

1. Lin C.C. Reissner E. Tslen H.S., Non-steady motion of a slender body in a compressible fluid, *J. of Math. and Phys.*, 1948, **27**, № 3.
2. Мамонтов Е.В., Некоторые вопросы теории нестационарных околозвуковых течений, *Динамика сплошной среды*, Новосибирск, 1969, 61–75.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР*, 1991, № 5, 29–34.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И.. Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
6. Рыжов О.С., Христанович С.А., О нелинейном отражении слабых ударных волн, *Прикл. математика и механика*, 1958, **22**, № 3, 586–599.
7. Кухарчик П., Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике, *Бюллетень Польской АН, Сер. техн. наук*, 1965, **13**, № 5, 469–477.
8. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.
9. Фушич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска, в сб. Симметрия и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 96–103.

Условная инвариантность нелинейного волнового уравнения

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Установлена условная инвариантность нелинейного волнового уравнения относительно бесконечномерной, конформной и Пуанкаре алгебр.

Введение. Рассмотрим уравнение

$$u_{00} - \nabla[f(u)\nabla u] = F(x, u, \underset{1}{u}), \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in R_{1+n}$, f и F гладкие функции своих аргументов, $f(u) > 0$, $\underset{1}{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, $u_\mu = \partial u/\partial x_\mu$, $u_{00} = \partial^2 u/\partial x_0^2$, $\mu = \overline{0, n}$.

Уравнение (1) используется для описания нелинейных волновых процессов. В работе [1] методом Ли изучены групповые свойства уравнения (1) при $F = 0$. Бесконечная алгебра инвариантности уравнения (1) с дополнительным условием

$$u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2 = m, \quad m = \text{const}. \tag{2}$$

при $f = 1$, $F = m = 0$, найдена в [2].

В настоящей работе исследована условная инвариантность (подробно об этом понятии см. [3–7] уравнения (1), а также лиевская инвариантность уравнения (2).

1. Симметрия уравнения (2). Изучим симметрийные свойства уравнения (2) методом С. Ли (см., например, [8, 9]).

1. Рассмотрим сначала случай $m = 0$, т.е. уравнение

$$u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2 = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Максимальной, в смысле С. Ли, группой инвариантности уравнения (3) является бесконечномерная группа $C^\infty(1, n) \times C^\infty$, порождаемая операторами*

$$\begin{aligned} X = \left\{-b_\mu[x_0^2 f(u) - x_a x_a] + 2x_\mu[b_0 x_0 f(u) - b_a x_a] + c_{00}x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu\right\}\partial_\mu +\\ + \eta\left(-\frac{f'}{2f}x_0\partial_0 + \partial_u\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где b_μ, c_{00}, $c_{\mu\nu}$, d_μ, η — произвольные гладкие функции аргумента u, $c_{a0} = c_{0a}f(u)$, $c_{ab} = -c_{ba}$; $\mu, \nu = \overline{0, n}$; $\mu \neq \nu$, $a, b = \overline{1, n}$.

Доказательство. Уравнение (3) заменой

$$y_0 = x_0\sqrt{f(u)}, \quad y_a = x_a, \quad v = u \tag{5}$$

приводится к уравнению

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y_a}\frac{\partial v}{\partial y_a} = 0. \tag{6}$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 3, С. 394–399.

Инвариантность уравнения (6) относительно бесконечномерной группы установлена в § 1.2 из [7]. Используя эти результаты и замену (5), получаем формулы (4).

2. Пусть $m = 1$. Тогда имеем уравнение

$$u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2 = 1. \tag{7}$$

Симметрия уравнения (7) существенно зависит от размерности пространства независимых переменных ($n = 1$ или $n \geq 2$). Рассмотрим эти случаи отдельно.

2.1. *Одномерный случай.* В этом случае $x = (x_0, x_1) \in R_2$ а уравнение (7) имеет вид

$$u_0^2 - f(u)u_1^2 = 1. \tag{8}$$

С помощью метода С. Ли [8, 9] доказываются следующие утверждения.

Теорема 2. *Максимальная алгебра инвариантности (МАИ) уравнения (8) задается следующими базисными элементами:*

$$\partial_0 = \partial/\partial x_0, \quad \partial_1 = \partial/\partial x_1, \tag{9}$$

если $f(u)$ — произвольная гладкая функция;

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad D = x_0\partial_0 + \frac{k+2}{2}x_1\partial_1 + u\partial_u, \tag{10}$$

если $f(u) = \lambda u^k$, (λ, k — произвольные постоянные).

Если $f(u) = z^{-2}$, где $z(u)$ — решение уравнения

$$z'' = \lambda_1 z, \quad \lambda_1 = \mathrm{const}, \tag{11}$$

то уравнение (8) обладает самой широкой алгеброй инвариантности, состоящей из десяти операторов. Причем в зависимости от значений постоянной λ_1 возможны четыре неэквивалентных случая. Ниже мы приведем их в виде отдельных утверждений.

Теорема 3. *МАИ уравнения*

$$u_0^2 - u^{-2}u_1^2 = 1 \tag{12}$$

является конформная алгебра $AC(1,2)$, базисные операторы которой имеют вид

$$\begin{gathered}
p_0 = \partial_0, \quad p_1 = -u^{-1}\sin x_1\partial_1 + \cos x_1\partial_u, \quad p_2 = u^{-1}\cos x_1\partial_1 + \sin x_1\partial_u, \\
J_{01} = x_0p_1 + u\cos x_1 p_0, \quad J_{02} = x_0p_2 + u\sin x_1 p_0, \quad J_{12} = \partial_1, \\
D = x_0\partial_0 + u\partial_u, \quad K_0 = 2x_0D - (x_0^2 - u^2)p_0, \\
K_1 = 2u\cos x_1 D + (x_0^2 - u^2)p_1, \quad K_2 = 2u\sin x_1 D + (x_0^2 - u^2)p_2,
\end{gathered} \tag{13}$$

Теорема 4. *МАИ уравнения*

$$u_0^2 - e^{2u}u_1^2 = 1 \tag{14}$$

является конформная алгебра $AC(1,2)$ с базисными операторами

$$\begin{aligned}
&p_0 = e^{-u}(\operatorname{ch} x_0\partial_0 - \operatorname{sh} x_0\partial_u), \quad p_1 = \partial_1, \quad p_2 = e^{-u}(-\operatorname{sh} x_0\partial_0 + \operatorname{ch} x_0\partial_u),\\
&J_{01} = e^u\operatorname{sh} x_0 p_1 + x_1 p_0, \quad J_{02} = \partial_0, \quad J_{12} = x_1 p_2 - e^u\operatorname{ch} x_0 p_1,\\
&D = x_1\partial_1 + \partial_u, \quad K_0 = 2e^u\operatorname{sh} x_0 D + \left(x_1^2 + e^{2u}\right) p_0,\\
&K_1 = 2x_1 D - \left(x_1^2 + e^{2u}\right) p_1, \quad K_2 = 2e^u\operatorname{ch} x_0 D - \left(x_1^2 + e^{2u}\right) p_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 5. *МАИ уравнения*

$$u_0^2 - \operatorname{ch}^{-2} u u_1^2 = 1 \tag{16}$$

является алгебра Лоренца $AO(2,3)$ с базисными операторами

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} u\partial_0 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u\partial_1 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} u\partial_u,\\
&Q_2 = \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} u\partial_0 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u\partial_1 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} u\partial_u,\\
&Q_3 = \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} u\partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u\partial_1 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} u\partial_u,\\
&Q_4 = \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} u\partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch}^{-1} u\partial_1 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} u\partial_u,\\
&Q_5 = \operatorname{sh} x_0 \operatorname{sh} u\partial_0 + \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} u\partial_u, \quad Q_6 = \operatorname{ch} x_0 \operatorname{sh} u\partial_0 + \operatorname{sh} x_0 \operatorname{ch} u\partial_u,\\
&Q_7 = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{th} u\partial_1 - \operatorname{ch} x_1\partial_u, \quad Q_8 = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{th} u\partial_1 - \operatorname{sh} x_1\partial_u,\\
&Q_9 = \partial_0, \quad Q_{10} = \partial_1.
\end{aligned} \tag{17}$$

Теорема 6. *МАИ уравнения*

$$u_0^2 - \cos^{-2} u u_1^2 = 1 \tag{18}$$

является алгебра Лоренца с базисными операторами вида (17), где x_0, x_1, u нужно заменить соответственно на ix_0, ix_1, iu.

Наличие широкой симметрии в уравнений (12), (14), (16), (18) наводит на мысль, что эти уравнения могут быть локально эквивалентными уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)^2 = 1, \quad v = v(y_0, y_1), \tag{19}$$

МАИ которого является конформная алгебра $AC(1,2)$ (см. [7], § 1.2). Действительно уравнения (12) и (14) приводятся к уравнению (19), если перейти к цилиндрическим координатам

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = u\cos x_1, \quad v = u\sin x_1 \tag{20}$$

и

$$y_0 = e^u \operatorname{sh} x_0, \quad y_1 = x_1, \quad v = e^u \operatorname{sh} x_0 \tag{21}$$

соответственно. Уравнение (16) приводится к уравнению (19) с помощью сферических координат

$$y_0 = e^{x_0} \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} u, \quad y_1 = e^{x_0} \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} u, \quad v = e^{x_0} \operatorname{sh} u. \tag{22}$$

Уравнение (18) приводится к уравнению (16), если в нем заменить (x_0, x_1, u) на (ix_0, ix_1, iu).

2.2. *Многомерный случай.* При $n \geq 2$ уравнения (12), (16) и (18) не обладают симметрийными свойствами, описанными в теоремах 3, 5, 6. Только уравнение (14), которое в многомерном случае имеет вид

$$u_0^2 - e^{2u}(\nabla u)^2 = 1, \tag{23}$$

конформно инвариантно. Как и предыдущие утверждения, методом С. Ли доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *МАИ уравнения (7) задается базисными операторами:*

$$\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \ a, b = \overline{1, n} \tag{24}$$

если $f(u)$ — произвольная гладкая функция:

$$\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad D = x_0\partial_0 + \frac{k+2}{2}x_a\partial_a + u\partial_u, \tag{25}$$

если $f(u) = \lambda u^k$,(λ, k — произвольные постоянные);

$$\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad D = x_0\partial_0 + u\partial_u, K_0 = 2x_0 D - (x_0^2 - u^2)\partial_0, \tag{26}$$

если $f(u) = e^{2u}$;

$$\begin{aligned}
&p_0 = e^{-u}(\operatorname{ch} x_0\partial_0 - \operatorname{sh} x_0\partial_u), \quad p_a = \partial_a, \quad p_{n+1} = e^{-u}(-\operatorname{sh} x_0\partial_0 + \operatorname{ch} x_0\partial_u),\\
&J_{0a} = e^u \operatorname{sh} x_0 p_a + x_a p_0, \quad J_{0n+1} = \partial_0, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\\
&J_{an+1} = x_a p_{n+1} - e^u \operatorname{ch} x_0 p_a, \quad D = x_a\partial_a + \partial_u,\\
&K_0 = 2e^u \operatorname{sh} x_0 D + \left(x^2 + e^{2u}\right) p_0, \quad K_a = 2x_a D - \left(x^2 + e^{2u}\right) p_a,\\
&K_{n+1} = 2e^u \operatorname{ch} x_0 D + \left(x^2 + e^{2u}\right) p_{n+1},
\end{aligned} \tag{27}$$

если $f(u)=e^{2u}$. Причем операторы (27) образуют конформную алгебру $AC(1,n+1)$.

Замечание 1. С помощью обобщенных цилиндрических координат

$$y_0 = e^u \operatorname{sh} x_0, \quad y_a = x_a, \quad v = e^u \operatorname{ch} x_0, \quad a = \overline{1, n} \tag{28}$$

уравнение (23) приводится к уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y_a}\frac{\partial v}{\partial y_a} = 1. \tag{29}$$

Замечание 2. Уравнение (2) $m \neq 0; 1$ локально эквивалентно уравнению (7). В этом нетрудно убедиться, если заменить в нем x на $x/\sqrt{m}$.

2. Условная нвариантность уравнения (1). Покажем, что симметрия уравнения (1) значительно расширяется, если его рассматривать в системе с дополнительным условием (2). Это означает, что уравнение (1) имеет подмножества решений, обладающие более широкой симметрией, чем все множество решений данного уравнения.

Теорема 8. *Уравнение (1), в котором $F(x, u, u_1) = 0$, при условии (3) инвариантно относительно бесконечномерной группы Ли $\tilde{P}_\infty(1, n)$, порождаемой операторами (4) при $b_\mu = 0$.*

Доказательство данной теоремы заключается в проверке выполнения условий [7]

$$\tilde{X}S\Big|_{\substack{S=0\\S_1=0}} = 0, \quad \tilde{X}S_1\Big|_{S_1=0} = 0, \tag{30}$$

где

$$S = u_{00} - \nabla[f(u)\nabla u], \quad S_1 = u_0^2 - f(u)(\nabla u)^2, \tag{31}$$

$\tilde{X}$ — продолжение оператора (4).

Аналогично теореме 8 доказываются следующие утверждения.

Теорема 9. *Уравнение*

$$u_{00} - \partial_1\left(u^{-2}u_1\right) = -u^{-1} \tag{32}$$

при условии (12) инвариантно относительно расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,2)$, базисными операторами которой являются операторы p_0, p_1, p_2, J_{01}, J_{02}, J_{12}, D, заданные формулами (13).

Теорема 10. *Уравнение*

$$u_{00} - \partial_1\left(u^{-2}u_1\right) = u^{-2}u_1 \operatorname{ctg} u_1 \tag{33}$$

при условии (12) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1,1)$, состоящей из операторов p_0, p_1, J_{01}, D, K_0, K_1 алгебры (13).

Теорема 11. *Уравнение*

$$u_{00} - \partial_1\left(\operatorname{ch}^{-2}u u_1\right) = 2\operatorname{sh}^{-1}2u \tag{34}$$

при условии (16) инвариантно относительно алгебры Лоренца $AO(2,2)$, состоящей из операторов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_9, Q_{10} алгебры (17).

Теорема 12. *Уравнение*

$$u_{00} - \partial_1\left(\operatorname{ch}^{-2}u u_1\right) = -(u_0 + \operatorname{th} u) \tag{35}$$

при условии (16) инвариантно относительно расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1,2)$ с базисными элементами $Q_3 - Q_1$, $Q_4 - Q_2$, $Q_6 - Q_5$, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10} где $Q_1, \ldots, Q_{10}$ — операторы алгебры (17).

Теорема 13. *Уравнение*

$$u_{00} - \partial_1\left(\cos^{-2} u u_1\right) = 2\sin^{-1} 2u \tag{36}$$

при условии (18) инвариантно относительно алгебры Лоренца с базисными операторами Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_9, Q_{10} алгебры (17), в которых вместо (x_0, x_1, u) необходимо положить (ix_0, ix_1, iu).

В уравнениях (32)–(36) функция u зависит от двух переменных (x_0, x_1). Для многомерного уравнения (1) справедливы следующие результаты.

Теорема 14. *Уравнение*

$$u_{00} - \nabla\left(e^{2u}\nabla u\right) = 0 \tag{37}$$

при условии (28) инвариантно относительно расширенной алгебры Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n+1)$ *с базисными элементами* p_0, p_a, p_{n+1}, J_{0a}, J_{0n+1}, J_{ab}, J_{an+1}, D, *заданными формулами (27).*

Теорема 15. *Уравнение*

$$u_{00} - \nabla\left(e^{2u}\nabla u\right) = n(u_0 \operatorname{th} x_0 + 1) \tag{38}$$

при условии (28) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n)$ *с базисными операторами* p_0, p_a, J_{0a}, J_{ab}, D, K_0, K_a *алгебры (27).*

Замечание 3. Наличие бесконечномерной алгебры инвариантности в уравнения

$$u_{00} - \nabla[f(u)\nabla u] = 0 \tag{39}$$

при условии (3) позволяет получить следующую формулу размножения решений. Если $u = W(x_0, x)$ — решение системы уравнений (3), (39), то

$$\Phi(u) = \tau\left(x_0 f^{1/2}(u), \boldsymbol{x}\right) \tag{40}$$

— также решение данной системы при произвольной гладкой функции $\Phi(u)$, где функция $\tau(y_0, x)$ находится из уравнения

$$\tau = W\left(y_0 f^{-1/2}(\tau), \boldsymbol{x}\right), \tag{41}$$

а $y_0 = x_0 f^{1/2}(u)$.

Например, $u = (\boldsymbol{\alpha x})^{-1}(\alpha_0 x_0 - 1)$ — решение системы (3), (39) при $\alpha_0^2 = \boldsymbol{\alpha}^2$ и $f(u) = u^{-2}$. Из уравнения $\tau = (\boldsymbol{\alpha x})^{-1}(\alpha_0 y_0 \tau - 1)$ находим $\tau = (\alpha_0 x_0 - \alpha x)^{-1}$. Тогда $\Phi(u) = u(\alpha_0 x_0 - u\boldsymbol{dx})^{-1}$ или $\varphi(u) = \alpha_0 x_0 - u\boldsymbol{dx}$ — решение системы уравнений (3), (39) ($f(u) = u^{-2}$) при произвольной гладкой функции $\varphi(u)$.

1. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, *J. Non-Linear Mechanics*, 1981, **16**, № 5–6, 439–447.
2. Шульга М.В., Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.
3. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 9, 17–20.
6. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1988, № 10, 28–33.
7. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
9. Olver P., Application of Lie groups to differential equations, New York, Springer, 1986, 497 p.

Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Non-group symmetry of some nonlinear wave equations is investigated. These symmetries are used to construct formulas of generating solutions of equations in question.

К настоящему времени детально исследована симметрия линейных и нелинейных волновых уравнений относительно непрерывных групповых (лиевских) преобразований (см. [1–3] и цитированную там литературу). Однако указанные выше преобразования далеко не исчерпывают всевозможные преобразования инвариантности дифференциальных уравнений. Так, например, преобразования C-, P-, T-инвариантности линейных волновых уравнений квантовой механики, найденные в [3], не являются непрерывными. В [4] отмечено, что волновое уравнение

$$\Box u + \lambda (x_\nu x^\nu)^{-1} u = 0 \tag{1}$$

инвариантно относительно преобразований инверсии

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-1}, \quad u \to u' = u x_\nu x^\nu; \quad \mu, \nu = \overline{0,3}, \tag{2}$$

не образующих группу. В формулах (1), (2) и везде ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Преобразования (2), как и лиевские, дают возможность размножать решения уравнения (1). Это свойство очень важно для нелинейных уравнений, для которых не имеет место принцип линейной суперпозиции. Следует отметить, что негрупповая и дискретная симметрия нелинейных дифференциальных уравнений мало изучена.

В данной работе исследованы негрупповые и дискретные симметрии уравнений Монжа–Ампера, эйконала, Борна–Инфельда, Лиувилля, Гамильтона–Якоби, нелинейных уравнений теплопроводности, акустики, д'Аламбера и Шредингера. Найденные преобразования использованы для размножений решений данных уравнений.

Рассмотрим сначала одномерное уравнение Монжа–Ампера

$$u_{00} u_{11} - u_{01}^2 = 0, \tag{3}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\mu}$; $\mu, \nu = 0, 1$.

Теорема 1. *Уравнение (3) инвариантно относительно дробно-линейных преобразований вида*

$$\begin{aligned} x_0 \to x'_0 &= \frac{\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 u + \beta_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}, \\ x_1 \to x'+_1 &= \frac{\gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 u + \gamma_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}, \end{aligned} \tag{4}$$

Доклады Академии наук УССР, 1991, № 9, С. 45–49.

$$u \to u' = \frac{\delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 u + \delta_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}$$

где $\alpha = (\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$*,* $\beta = (\beta_0, \boldsymbol{\beta})$*,* $\gamma = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$*,* $\delta = (\delta_0, \boldsymbol{\delta})$ *— произвольные постоянные линейно независимые векторы.*

Доказательство теоремы сводится к проверке соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}\right)^2 = \lambda \left[\frac{\partial^2 u'}{(\partial x_0')^2}\frac{\partial^2 u'}{(\partial x_1')^2} - \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x_0' \partial x_1'}\right)^2\right],$$

где $\lambda = \lambda(x_0', x_1', u', \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — некоторая функция.

Очевидно, что преобразования (4) содержат в качестве подмножества лиевские преобразования [5]. Кроме того, они содержат преобразования $R(x_0, x_1, u)$

$$\begin{aligned}
&R_0: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_1: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_2: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_3: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = -u;\\
&R_4: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = u;\\
&R_5: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = -u;\\
&R_6: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = -u;\\
&R_7: \quad x_0 \to x_0' = -x_0, \quad x_1 \to x_1' = -x_1, \quad u \to u' = -u;
\end{aligned} \tag{5}$$

преобразования годографа $H(x_0, x_1, u)$

$$\begin{aligned}
&H_0: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = u;\\
&H_1: \quad x_0 \to x_0' = x_1, \quad x_1 \to x_1' = x_0, \quad u \to u' = u;\\
&H_2: \quad x_0 \to x_0' = u, \quad x_1 \to x_1' = x_1, \quad u \to u' = x_0;\\
&H_3: \quad x_0 \to x_0' = x_0, \quad x_1 \to x_1' = u, \quad u \to u' = x_1;\\
&H_4: \quad x_0 \to x_0' = u, \quad x_1 \to x_1' = x_0, \quad u \to u' = x_1;\\
&H_5: \quad x_0 \to x_0' = x_1, \quad x_1 \to x_1' = u, \quad u \to u' = x_0;
\end{aligned} \tag{6}$$

преобразования инверсии

$$\begin{aligned}
&J_0: \quad x_0 \to x_0' = \frac{1}{x_0}, \quad x_1 \to x_1' = \frac{x_1}{x_0}, \quad u \to u' = \frac{u}{x_0};\\
&J_1: \quad x_0 \to x_0' = \frac{x_0}{x_1}, \quad x_1 \to x_1' = \frac{1}{x_1}, \quad u \to u' = \frac{u}{x_1};\\
&J_2: \quad x_0 \to x_0' = \frac{x_0}{u}, \quad x_1 \to x_1' = \frac{x_1}{u}, \quad u \to u' = \frac{1}{u}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Не сложно убедиться в том, что преобразования (5) и (6) образуют дискретные группы, а преобразования (7) группу не образуют.

Все результаты, полученные выше, обобщаются на случай многомерного уравнения Монжа–Ампера

$$\det \|u_{\mu\nu}\| = 0, \tag{8}$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0,\boldsymbol{x})\in R_{1+n}$, $u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$; $\mu,\nu=\overline{0,n}$.

Теорема 2. *Уравнение (8) инвариантно относительно преобразований вида*

$$x_A \to x'_A = \frac{\beta_{AB}x_B}{\alpha_C x_C}, \tag{9}$$

где $A=\overline{0,n+1}$; $B,C=\overline{0,n+2}$; $x_{n+1}\equiv u$, $x_{n+2}\equiv 1$, $\beta_A=\{\beta_{A0},\beta_{A1},\dots,\beta_{An+2}\}$, $\alpha=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+2}\}$ *— произвольные постоянные векторы образующие базис в пространстве* R_{n+3}.

Ради краткости результаты, относящиеся к другим уравнениям, приведены в табл. 1, где λ, m — произвольные постоянные, HR — группа, состоящая из преобразований R,H и их суперпозиций, $F_i(x_0,u)$ — произвольные гладкие функции, $i=\overline{1,7}$.

Таблица 1

Уравнение	Преобразование инвариантности
$1-u_\nu u^\nu=0$	$x'_A=x_A(x_Bx^B)^{-1}$
$u_0+\frac{1}{2m}(\nabla u)^2=0$	$x'_0=\dfrac{\sqrt{2}x_0}{\sigma}$, $\boldsymbol{x}'=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\sigma}$, $u'=\dfrac{\sqrt{2}u}{m\sigma}$, $\sigma=\dfrac{x_0u}{m}-\boldsymbol{x}^2$
$\Box u=\lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$, $n\neq 1$	$x'_\mu=x_\mu(x_\nu x^\nu)^{-1}$,$u'=u(x_\nu x^\nu)^{\frac{n-1}{2}}$
$u_{00}-u_{11}=\lambda\exp u$	$x'_\mu=x_\mu(x_\nu x^\nu)^{-1}$, $u'=u+2\ln x_\nu x^\nu$, $\mu,\nu=0,1$
$u_{00}=x_0^{-2}\Delta u+\lambda u^{-3}$	$x'_0=x_0^{-1}$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$, $u'=ux_0^{-1}$
$u^4u_{00}=\Delta u+\lambda u$	$x'_0=x_0^{-1}$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$, $u'=ux_0^{-1}$
$u_{00}=\nabla(u^{-4}\nabla u)+\lambda u^{-3}$	$x'_0=x_0^{-1}$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$, $u'=ux_0^{-1}$
$u_{00}=u^{\frac{4}{2-n}}\Delta u$, $n\neq 2$	$x'_0=x_0$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2)^{-1}$, $u'=u(\boldsymbol{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
$iu_0+\frac{\Delta u}{2M(u)}=0$, $M=m\lvert u\rvert^{\frac{4}{n-2}}$	$x'_0=x_0$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2)^{-1}$, $u'=u(\boldsymbol{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
$u_0=\nabla\left(u^{-\frac{4}{n+2}}\nabla u\right)$	$x'_0=x_0$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2)^{-1}$, $u'=u(\boldsymbol{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
$1+u_\nu u^\nu=0$	$R(x_0,\boldsymbol{x},u)$, $H(x_0,u)$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$u_0+\frac{1}{2m}(\nabla u)^2=0$	$R(x_0,\boldsymbol{x},u)$, $H(x_0,u)$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$1-u_\nu u^\nu=0$	$R(x_0,\boldsymbol{x},u)$, $H(\boldsymbol{x},u)$, $HR(\boldsymbol{x},u)$
$(1-u_\nu u^\nu)\Box u+u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}=0$	$R(x_0,\boldsymbol{x},u)$, $H(\boldsymbol{x},u)$, $HR(\boldsymbol{x},u)$
$u_\nu u^\nu=F_1(x_0,u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$u_0+F_2(x_0,u)\Delta u=F_3(x_0,u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$iu_0+F_4(x_0,u)\Delta u=F_5(x_0,u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$
$u_{00}+F_6(x_0,u)\Delta u=F_7(x_0,u)$	$R(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x})$, $HR(\boldsymbol{x})$

В справедливости результатов, приведенных в табл. 1, можно убедиться непосредственной проверкой. Например, при $x_A\to x'_A=x_A(x_Bx^B)^{-1}$

$$1-\frac{\partial u}{\partial x_\nu}=\sigma^{-1}\left[1-\frac{\partial u'}{\partial x'_\nu}\frac{\partial u'}{\partial (x^\nu)'}\right],$$

где $\sigma=x'_A(x^A)'-2u'\left(x'_\nu\frac{\partial u'}{\partial x_\nu}-u'\right)$.

Преобразования инвариантности, полученные выше, мы применили для размножения решений соответствующих уравнений. Все эти результаты сведены в табл. 2, где $f(x)$ — известное, а $u = u(x)$ — новое решения указанных уравнений. Кроме формул, приведенных в табл. 2, справедливы формулы размножения решений при помощи преобразований из групп R, H, HR. Например,

$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, -x_1, x_2, x_3),$$
$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, x_1, x_3),$$
$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, -x_1, x_3).$$

Таблица 2

Уравнение	Формула размножения решений
$\det \lVert u_{\mu\nu} \rVert = 0$	$\dfrac{\beta_{n+1B}x_B}{\alpha_C x_C} = f\left(\dfrac{\beta_{\mu B}x_B}{\alpha_C x_C}\right)$
$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$\dfrac{u}{x_\nu x^\nu - u^2} = f\left(\dfrac{x}{x_\nu x^\nu - u^2}\right)$
$u_0 + \frac{1}{2m}(\nabla u)^2 = 0$	$\dfrac{\sqrt{2}u}{m\sigma} = f\left(\dfrac{\sqrt{2}x_0}{\sigma}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)$, $\sigma = \dfrac{x_0 u}{m} - \boldsymbol{x}^2$
$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$, $n \neq 1$	$u = (x_\nu x^\nu)^{\frac{1-n}{2}} f\left(\dfrac{x}{x_\nu x^\nu}\right)$
$u_{00} - u_{11} = \lambda \exp u$	$u = f\left(\dfrac{x}{x_\nu x^\nu}\right) - 2\ln x_\nu x^\nu$
$u^4 u_{00} = \Delta u + \lambda u$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \boldsymbol{x})$
$u_{00} = \nabla(u^{-4}\nabla u) + \lambda u^{-3}$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \boldsymbol{x})$
$u_{00} = u^{\frac{4}{2-n}}\Delta u$, $n \neq 2$	$u = (\boldsymbol{x}^2)^{\frac{2-n}{2}} f\left(x_0, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2}\right)$
$iu_0 + \frac{\Delta u}{2M(u)} = 0$, $M = m\lvert u\rvert^{\frac{4}{n-2}}$	$u = (\boldsymbol{x}^2)^{\frac{2-n}{2}} f\left(x_0, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2}\right)$
$u_0 = \nabla\left(u^{\frac{4}{n+2}}\nabla u\right)$	$u = (\boldsymbol{x}^2)^{-\frac{n+2}{2}} f\left(x_0, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2}\right)$
$u_{00} = x_0^{-2}\Delta u + \lambda u^{-3}$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \boldsymbol{x})$

1. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel, 1987, 214 p.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.

Об условной симметрии обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

Lie symmetry of the generalized Korteweg-de Vries equation is studied under $k \neq 1$ as well as conditional symmetry under $\forall\ k \neq 0$. The obtained operators of conditional symmetry are used to find ansätze reducing the equation to ordinary differential equations and to construct exact solutions.

Обобщим уравнение Кортевега-де Фриза (КДФ)

$$u_0 + uu_1 + u_{111} = 0$$

следующим образом:

$$u_0 + f(u)u_1^k + u_{111} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x)$, (x_0, x_1), $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \partial_\mu u$, $\mu = 0, 1$, $u_{111} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}$, $k = \mathrm{const}$.

Групповые свойства уравнения (1) при $k = 1$ хорошо известны (см., напр., [1]). В сообщении исследована лиевская симметрия уравнения (1) при $k \neq 1$, а также условная симметрия уравнения (1) при произвольном k. Полученные операторы условной инвариантности используются для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), а также для построения точных решений.

Лиевская симметрия.

Теорема 1. *Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности (МАИ) уравнения (1) при $k \neq 1$ состоят из следующих операторов:*

$$\begin{array}{ll}
\forall\ k \neq 1,\ \forall\ f(u): & \langle P_0 = \partial_0, P_1 = \partial_1\rangle; \\
k = 3,\ \forall\ f(u): & \langle P_0, P_1, D_1 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1\rangle; \\
\forall\ k \neq 1,\ f(u) = u^{-2}: & \langle P_0, P_1, D_2 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u\rangle; \\
\forall\ k \neq 1,\ f(u) = e^u: & \langle P_0, P_1, D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + (k-3)\partial_u\rangle; \\
\forall\ k \neq 1,\ f(u) = \lambda = \mathrm{const}: & \langle P_0, P_1, \partial_u, D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \dfrac{k-3}{k-1}u\partial_u\rangle; \\
k = 3,\ f(u) = u^{-2}: & \langle P_0, P_1, D_1 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \\
 & \qquad D_2 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u\rangle.
\end{array}$$

Доказательство этой теоремы проводится методом Ли [2].

Условная инвариантность.

Теорема 2. *Уравнение (1) $k = 1$ Q-условно инвариантно относительно оператора Галилея*

$$Q = x_0\partial_1 + \Phi(x_1, u)\partial_u, \tag{2}$$

Доклады Академии наук УССР, 1991, № 12, С. 15–18.

если

$$f(u)=\lambda_1\sqrt{u}+\lambda_2,\quad \Phi(u)=\frac{2}{\lambda_1}\sqrt{u};\quad f(u)=\lambda_1\ln u,\quad \Phi(u)=\frac{u}{\lambda_1};$$

$$f(u)=\lambda_1\arcsin u+\lambda_2,\quad \Phi(u)=\frac{\sqrt{1-u^2}}{\lambda_1};\quad f(u)=\lambda_1\operatorname{Arsh} u+\lambda_2,$$

$$\Phi(u)=\frac{\sqrt{1+u^2}}{\lambda_1};\quad f(u)=\lambda_1 u,\quad \Phi(u)=\frac{1}{\lambda_1},$$

где λ_1, λ_2 *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Уравнение (1) при $k=1$ условно инвариантно относительно оператора (2), если

$$\overset{3}{\widetilde{Q}}[u_0+f(u)u_1+u_{111}\Big|_{\substack{u_0+f(u)u_1+u_{111}=0\\ Qu=0}}\equiv 0, \tag{3}$$

где $\overset{3}{\widetilde{Q}}$ — третье продолжение оператора Q, $Q_u=x_0u_1-\Phi$. Расщепив (3) до различным степеням x_0, получим систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned}
&f\Phi_1+\Phi_{111}0,\\
&-\Phi+3\Phi\Phi_{u11}+3\Phi_1\Phi_{u1}+f'\Phi^2=0,\\
&3\Phi^2\Phi_{uu1}+3\Phi\Phi_u\Phi_{u1}+3\Phi\Phi_1\Phi_{uu}=0,\\
&\Phi^3\Phi_{uuu}+3\Phi^2\Phi_u\Phi_{uu}=0.
\end{aligned}\tag{4}$$

Исследование системы (4) показало, что можно считать $\Phi=\Phi(u)$. Тогда система (4) принимает вид

$$f'\Phi=1,\quad (\Phi^3\Phi'')'=0. \tag{5}$$

Решение системы (5) задается формулами

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \Phi(u)=\lambda_1\sqrt{u}+\lambda_2;\quad f(u)=\frac{2\sqrt{u}}{\lambda_1};\\
&\text{б)}\quad \Phi(u)=(c_1u^2+c_2)^{1/2};\quad f(u)=\int(c_1u^2+c_2)^{-1/2}du+c_3,
\end{aligned}\tag{6}$$

где λ_1, λ_2, c_i, $i=\overline{1,3}$ — произвольные постоянные.

Вычисляя интеграл в формулах (6) в зависимости от постоянных c_1, c_2, получим утверждение теоремы.

Если рассматривать оператор галилеевского типа

$$Q=x_0^m\partial_1+\Phi(x_1,u)\partial_u,\quad m=\mathrm{const}, \tag{7}$$

то справедлива более общая

Теорема 3. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора (7) если*

$$1)\quad f(u)=\lambda_1 u^{\frac{2-k}{2}}+\lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}},\quad \Phi(u)=\left(\frac{k\lambda_1}{2}\right)^{-\frac{1}{k}}\sqrt{u};$$

$$2)\quad f(u)=(\lambda_1\ln u)u^{1-k},\quad \Phi(u)=(k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}}u;$$

$$3)\quad f(u)=(\lambda_1\arcsin u+\lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}},\quad \Phi(u)=(k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}}\sqrt{1-u^2};$$

$$4)\quad f(u)=(\lambda_1\operatorname{Arsh} u+\lambda_2)(1+u^2)^{\frac{1-k}{2}},\quad \Phi(u)=(k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}}\sqrt{1+u^2};$$

$$5)\quad f(u)=\lambda_1 u,\quad \Phi(u)=(k\lambda_1)^{-\frac{1}{k}},$$

где $m=\frac{1}{k}$, $k\neq 0$, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

6) При $k=3$ уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q=(3\lambda x_0)^{\frac{1}{3}}\partial_1+\Phi(u)\partial_u,\quad \lambda=\mathrm{const},$$

если $f(u)=F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F(u)$ определяется выражением $F'=\frac{\lambda}{\Phi}-(\Phi\Phi')''$, $\Phi(u)$ — произвольная функция.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Операторы условной инвариантности из теоремы 3 используем для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к ОДУ. Эти результаты сведены в таблицу.

	$f(u)$	Анзацы	Редуцированные ОДУ
1	$\lambda_1 u^{\frac{2-k}{2}}+\lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}$	$u=\left[\frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-\frac{1}{k}}+\varphi(x_0)\right]^2$	$\dot\varphi+\frac{\varphi}{kx_0}+\frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0}=0$
2	$(\lambda_1\ln u)u^{1-k}$	$u=e^{\varphi(x_0)+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1}$	$\dot\varphi+\frac{\varphi}{kx_0}+\frac{1}{(k\lambda_1 x_0)^{3/k}}=0$
3	$(\lambda_1\arcsin u+\lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}}$	$u=\sin\left[\varphi(x_0)+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1\right]$	$\dot\varphi+\frac{\varphi}{kx_0}+\frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0}-$ $-\frac{1}{(k\lambda_1 x_0)^{3/k}}=0$
4	$(\lambda_1\operatorname{Arsh} u+\lambda_2)(1+u^2)^{\frac{1-k}{2}}$	$u=\operatorname{sh}\left[\varphi(x_0)+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1\right]$	$\dot\varphi+\frac{\varphi}{kx_0}+\frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0}+$ $+\frac{1}{(k\lambda_1 x_0)^{3/k}}=0$
5	$\lambda_1 u$	$u=\varphi(x_0)+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1$	$\dot\varphi+\frac{\varphi}{kx_0}=0$
6	$F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F'=\frac{\lambda}{\Phi}-(\Phi\Phi')''$	$\psi(u)=\frac{x_1+\varphi(x_0)}{(3\lambda x_0)^{\frac{1}{3}}}$, где $\psi'(u)=\frac{1}{\Phi(u)}$	$\dot\varphi=c_1(3\lambda x_0)^{-\frac{2}{3}}$ $c_1=\mathrm{const}$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найденую функцию φ в соответствующий анзац, получим точное решение уравнения (1) с соответствующей нелинейностью f

$$1)\quad u=\left[\frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-\frac{1}{k}}+\lambda x_0^{-\frac{1}{k}}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]^2;$$

$$2)\quad u=\exp\left[-\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2}x_0^{-\frac{3}{k}+1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\lambda x_0^{-\frac{1}{k}}+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1\right],\ k\neq 2,$$

$$u = \exp\left[-(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} x_0^{-\frac{1}{2}} \ln x_0 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + (2\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \ k = 2;$$

3) $$u = \sin\left[\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \ k \neq 2,$$

$$u = \sin\left[(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + (2\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{2}} x_1\right], \ k = 2;$$

4) $$u = \operatorname{sh}\left[-\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}} x_1\right], \ k \neq 2,$$

$$u = \operatorname{sh}\left[-(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + (2\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{2}} x_1\right], \ k = 2;$$

5) $$u = \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + x_1 (k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}};$$

6) $$\psi(u) = x_1 (3\lambda x_0)^{-\frac{1}{3}} + c,$$

где λ, c — произвольные постоянные.

1. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решена нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989.

Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, В.К. РЕПЕТА

Conditional invariance is studied and the classes of exact solutions of nonlinear wave equation $u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0$ are constructed. The results are generalized for n-dimensional case.

Рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1$, $F(u)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства уравнения (1) методом С. Ли детально исследованы в [1]. Ниже исследуется условная инвариантность уравнения (1). Операторы условной симметрии [2–4] использованы для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Это позволило найти некоторые семейства точных решений уравнения (1).

Теорема. *Уравнение (1) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{2}$$

если функции $A(x,u)$, $B(x,u)$, $C(x,u)$ и $F(u)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

Случай 1. $A \neq 0$, $D \equiv F - B^2$. Не умаляя общности можно положить $A = 1$.

$$\begin{aligned}
&(B_u D^{-1})_u = 0,\\
&F(C_1 D^{-1})_1 - (C_0 D^{-1})_0 - C^2 (C_u D^{-1})_u - C(C_0 D^{-1})_u - C(C_u D^{-1})_0 +\\
&\quad + D^{-2}\{2F(B_0 C_1 - B_1 C_0 + C[B_u C_1 - B_1 C_u]) - BCC_1 F\} = 0,\\
&D^2 C_{uu} + D\{(C\dot F)_u + 2B(B_u C_u - B_{uu} C) - 2FB_{1u} - 2BB_{0u}\} -\\
&\quad - CD_u^2 + 2BB_0 D_u + 2BB_1(B\dot F - 2B_u F) = 0,\\
&D\{B_{00} + 2(B_0 C)_u + 2(BC_{0u} - B_u C_0) + 2(C_1 F)_u - B_{11} F +\\
&\quad + B_{uu} C^2 + 2BCC_{uu}\} - D_u\{B_0 C + B_u C^2 + 2BCC_u\} +\\
&\quad + B\{B_1 C\dot F + 2B_0 B_u C + 4BB_0 C_u + 4B_1 C_u F - 2B_1^2 F\} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Случай 2. $A = 1$, $B = F^{1/2}$

$$\text{а)}\quad \dot B C + 2BC_u = 0, \quad C_0 + CC_u - BC_1 = 0; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\text{б)}\quad &BC + 2BC_u \neq 0, \quad C_0 + CC_u - BC_1 = 0,\\
&[\ddot B C^2 + 2\dot B(BC_1 + CC_u) + 2B(C_{0u} + CC_{uu} + BC_{1u})] \times\\
&\quad \times (C_0 + CC_u - BC_1) =\\
&\quad = [C_{00} + C^2 C_{uu} - B^2 C_{11} + 2CC_{0u} - 2BCC_1](\dot B C + 2BC_u).
\end{aligned} \tag{5}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 5, С. 29–34.

Случай 3. $A = 0$, $B = 1$

$$C_{uu} = 0, \quad C_{0u} = 0,$$
$$C_{00} - C^3\ddot{F} - (3CC_1 + 2C^2C_u)\dot{F} - (C_{11} + 2CC_{1u})F = 0. \tag{6}$$

Доказательство теоремы основано на использовании критерия Q-условной инвариантности дифференциальных уравнений, описаного в [2–4]. Ввиду громоздкости выкладок доказательство теоремы не приводим.

Общее решение системы (3)–(6), за исключением случая (4), нам найти не удалось. При конкретных значениях функции $F(u)$ построены частные решения этих систем, которым соответствуют операторы Q. В табл. 1 приведены явные виды операторов Q, анзацы, редуцированные уравнения.

В табл. 1 и ниже введены следующие обозначения $P_2(z) = a_1z^2 + a_2z + a_3$ — произвольный многочлен второй степени; $h(z)$ — решение уравнения $h'' = \lambda_1 h^{k+1}$; $W(z)$ — функция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения $W'' = 6W^2$; $\Lambda(z)$ — функция Ламе, удовлетворяющая уравнению $\Lambda = W\Lambda$; $\gamma(z)$ — эллиптическая функция, удовлетворяющая уравнению $\gamma'' = 2\gamma^3$; $\beta(u)$ — решение уравнения Риккати $\beta' + \lambda_3\beta^2 = \lambda_3 F$; $H^4(u)$ — функция которая определяется из условия

а) $H^{-1} + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{arcth}\,\sqrt{\lambda}H = a_0u + a_2, \quad \lambda = \dfrac{a_1}{a_0} > 0;$

б) $H^{-1} + \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{-\lambda}H = a_0u + a_2, \quad \lambda < 0;$

$\omega_1 = (a_0x_0 + a_1x_1)\exp\left\{-\int H(u)(a_0 + a_1H^2(u))du\right\}$; φ — новая неизвестная функция; λ_i, a_i, k — произвольные постоянные, $\lambda_3 \neq 0$, $k \neq -1$, $i = \overline{0,3}$.

Интегрируя редуцированные уравнения и подставляя найденную функцию φ в соответствующий анзац, получим решение уравнения (1), которые приведены в табл. 2.

Здесь $\psi(z) = \frac{\sigma(z\pm\alpha)}{\sigma(z)}\exp\{\mp z\zeta(\alpha)\}$, где α определяется из условия $W(\alpha) = 0$; σ, ζ — функция Вейерштрасса.

Замечание. Найденные решения можно размножить используя операторы лиевской инвариантности уравнения (1). Формулы размножения решений в зависимости от вида функции $F(u)$ будут следующее:

а) $F(u)$ — произвольная гладкая функция
$$u = f(\theta_1x_0 + a_0, \theta_1x_1 + a_1);$$

б) $F(u) = e^u$
$$u = f(\theta_1x_0 + a_0, \theta_2(\theta_1x_1 + a_1)) - 2\ln\theta_2;$$

в) $F(u) = u^k$
$$u = \theta_2^{-k} f(\theta_1x_0 + a_0, \theta_2^k(\theta_1x_1 + a_1));$$

г) $F(u) = u^{-4/3}$
$$u = (1 - ax_1)^{-3}\theta_2^{-2} f\left(\theta_1x_0 + a_0, \frac{\theta_1x_1 + a_1}{\theta_2^{4/3} - a(\theta_1x_1 + a_1)}\right); \tag{7}$$

д) $F(u) = u^{-4}$
$$u = (1 - ax_0)^{-1}\theta_2^{-2} f\left(\frac{\theta_1x_0 + a_0}{\theta_2^4 - a(\theta_1x_0 + a_0)}, \theta_1x_1 + a_1\right),$$

Таблица 1

$F(u)$	Оператор	Анзац	Редуцированные уравнения
$F(u)\in C^1(R)$	$\partial_0+(F(u))^{1/2}\partial_1$	$(F(u))^{1/2}x_0-x_1+\varphi(u)=0$	$0=0$
	$\partial_0+\beta(u)\partial_1$	$\beta(u)x_0-x_1+\varphi(u)=0$	$\dot\varphi=a_1(F-\beta^2)$
	$\partial_0+(F(u))^{1/2}\partial_1+\lambda_1[(F(u))^{1/2}+\lambda_2]^{-1}\partial_u$	$\lambda_1x_0-\int((F(u))^{1/2}+\lambda_2)du-$ $-\varphi\left(\lambda_1x_1-\int(F(u)+\lambda_2(F(u))^{1/2})du\right)=0$	$\dot\varphi=\lambda_2^{-1}$
e^u	$x_1\partial_1+\partial_u$	$u=\ln x_1+\varphi(x_0)$	$\ddot\varphi=0$
	$\partial_0+2\operatorname{tg}x_0\partial_u$	$e^u=\varphi(x_1)\cos^{-2}x_0$	$\ddot\varphi=2$
	$\partial_0-2\operatorname{cth}x_0\partial_u$	$e^u=\varphi(x_1)\operatorname{sh}^{-2}x_0$	$\ddot\varphi=2$
	$P_2(x_1)\partial_1+P_2'(x_1)\partial_u$	$e^u=e^{\varphi(x_0)}P_2(x_1)$	$\ddot\varphi=P_2''e^\varphi$
	$\partial_0+e^{u/2}\partial_1+\operatorname{tg}\frac{x_0}{4}\partial_u$	$\sin\frac{x_0}{2}e^{u/2}-\frac{x_1}{2}=\varphi\left(\cos^2\frac{x_0}{4}e^{u/2}\right)$	$\dot\varphi=0$
	$\partial_0+e^{u/2}\partial_1-\operatorname{cth}\frac{x_0}{4}\partial_u$	$e^{u/2}\operatorname{sh}\frac{x_0}{2}+\frac{x_1}{2}=\varphi\left(e^{u/2}\operatorname{sh}^2\frac{x_0}{4}\right)$	$\dot\varphi=0$
u^k	$\partial_0+e^{u/2}\partial_1-4x_0^{-1}\partial_u$	$x_0e^{u/2}+x_1+\varphi\left(x_0^2e^{u/2}\right)=0$	$\dot\varphi=0$
	$(k+1)x_1\partial_1+u\partial_u$	$u^{k+1}=x_1\varphi^{k+1}(x_0)$	$\ddot\varphi=0$
	$h(x_0)\partial_0+h'(x_0)u\partial_u$	$u^{k+1}=h^{k+1}(x_0)\varphi(x_1)$	$\ddot\varphi=\lambda_1\varphi^{1/(k+1)}$
	$\partial_0+u^{k/2}\partial_1-4u(kx_0)^{-1}\partial_u$	$x_1+u^{k/2}x_0+\varphi(x_0^4u^k)=0$	$\dot\varphi=0$
u	$\partial_1+x_0\partial_u$	$u=x_0x_1+\varphi(x_0)$	$\ddot\varphi=x_0^2$
	$\partial_1+[2W(x_0)x_1+\Lambda(x_0)]\partial_u$	$u=x_1^2W(x_0)+\Lambda(x_0)x_1+\varphi(x_0)$	$\ddot\varphi-2W\varphi-\Lambda^2=0$
	$2x_1\partial_1+[u+3W(x_0)x_1^2]\partial_u$	$u=x_1^2W(x_0)+x_1^{1/2}\varphi(x_0)$	$4\ddot\varphi-15W\varphi=0$
	$x_0^2\partial_1+[2x_1+a_1x_0^5]\partial_u$	$u=x_0^{-2}x_1^2+a_1x_0^3x_1+\varphi(x_0)$	$x_0^2\ddot\varphi-2\varphi=a_1^2x_0^8$
	$W(x_0)\partial_0+W'(x_0)u\partial_u$	$u=W(x_0)\varphi^{1/2}(x_1)$	$\ddot\varphi=12\varphi^{1/2}$
	$2x_0^2x_1\partial_1+[ux_0^2+3x_1^2]\partial_u$	$u=x_0^{-2}x_1^2+x_1^{1/2}\varphi(x_0)$	$4x_0^2\ddot\varphi-15\varphi=0$
$u^{-1/2}$	$\partial_0+x_1u^{1/2}\partial_u$	$2u^{1/2}=x_0x_1+\varphi(x_1)$	$2\ddot\varphi=x_1^2$
	$W(x_1)\partial_1+2W'(x_1)u\partial_u$	$u^{1/2}=W(x_1)\varphi^{1/2}(x_0)$	$\ddot\varphi=12\varphi^{1/2}$
	$\partial_0+4W(x_1)x_0u^{1/2}\partial_u$	$u^{1/2}=x_0^2W(x_1)+\varphi(x_1)$	$\ddot\varphi-2W\varphi=0$
	$x_1^2\partial_0+[4x_0+a_1x_1^5]u^{1/2}\partial_u$	$u^{1/2}=x_0^2x_1^{-2}+\frac{a_1}{2}x_0x_1^3+\varphi(x_1)$	$4x_1^2\ddot\varphi-8\varphi=a_1^2x_1$

Продолжение табл. 1

$F(u)$	Оператор	Анзац	Редуцированные уравнения
$u^{-2/3}$	$x_0x_1^2\partial_0 + [u^{1/2}x_1^2 + 3x_0^2]u^{1/2}\partial_u$	$u^{1/2}x_1^2 = x_0^{1/2}(x_0^{3/2} + \varphi(x_1))$	$4x_1^2\ddot{\varphi} - 15\varphi = 0$
	$x_1\partial_0 + 3u^{2/3}\partial_u$	$u^{1/3} = x_0x_1^{-1} + \varphi(x_1)$	$x_1^2\ddot{\varphi} - 2\varphi = 0$
	$\partial_0 + \gamma(x_1)u^{2/3}\partial_u$	$u^{1/3} = x_0\gamma(x_1) + \varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi} - 2\gamma^2\varphi = 0$
	$\gamma(x_1)\partial_1 - 3\gamma'(x_1)u\partial_u$	$u^{1/3} = \gamma^{-1}(x_1)\varphi^{1/3}(x_0)$	$\ddot{\varphi} = a\varphi^{1/3}$
u^{-1}	$\partial_1 + u\,\mathrm{tg}\,\frac{x_1}{2}\partial_u$	$u = \varphi(x_0)\cos^{-2}\frac{x_1}{2}$	$\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}$
	$\partial_1 - u\,\mathrm{cth}\,\frac{x_1}{2}\partial_u$	$u = \varphi(x_0)\,\mathrm{sh}^{-2}\frac{x_1}{2}$	$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}$
	$P_2(x_0)\partial_0 + P_2'(x_0)u\partial_u$	$u = P_2(x_0)e^{\varphi(x_1)}$	$\ddot{\varphi} = 2a_1e^{\varphi}$
u^2	$x_0\partial_1 + \partial_u$	$u = x_0^{-1}x_1 + \varphi(x_0)$	$x_0^2\ddot{\varphi} - 2\varphi = 0$
	$\partial_1 + \gamma(x_0)\partial_u$	$u = \gamma(x_0)x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - 2\gamma^2\varphi = 0$
	$\partial_0 + u\partial_1 + x_0\partial_u$	$ux_0 - x_1 - \frac{x_0^3}{3} = \varphi(2u - x_0^2)$	$\dot{\varphi} = 0$
$e^u + \lambda^2$	$(x_1 \pm \lambda x_0)\partial_1 + \partial_u$	$e^u = (x_1 \pm \lambda x_0)e^{\varphi(x_0)}$	$\ddot{\varphi} = 0$
	$(x_1 \pm \lambda x_0)\partial_1 + 2\partial_u$	$e^u = (x_1 \pm \lambda x_0)^2e^{\varphi(x_0)}$	$\ddot{\varphi} = 2e^{\varphi}$
$u^{-4/5}$	$2W(x_1)\partial_1 - 5W'(x_1)u\partial_u$	$u^{1/5} = \varphi^{1/5}(x_0)W^{-1/2}(x_1)$	$\ddot{\varphi} = a_1\varphi^{1/5}$
u^4	$-2W(x_0)\partial_0 + W'(x_0)u\partial_u$	$u^5 = W^{-5/2}(x_0)\varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi} = a_1\varphi^{1/5}$
$u^{-4/3}$	$\partial_0 + u^{-2/3}\partial_1 - 3x_1^{-1}u^{1/3}\partial_u$	$x_0 + x_1u^{2/3} + \varphi(x_1u^{1/3}) = 0$	$0 = 0$
u^{-4}	$\partial_0 + u^{-2}\partial_1 + x_0^{-1}u\partial_u$	$x_0 + x_1u^2 + \varphi(ux_0^{-1})u^2 = 0$	$0 = 0$
$H^4(u)$	$(a_0x_0 + a_1x_1)[H(u)\partial_0 + H^3(u)\partial_1] + \partial_u$	$x_0 - \omega_1\int H(u)\exp\left\{\int H(u)(a_0 + a_1H^2(u))du\right\}du = \varphi(\omega_1)$	$0 = 0$

Таблица 2

$F(u)$	Решение уравнения
$F(u)\in C^1(R)$	$\int F(u)du-\lambda_2^2u+\lambda_1(\lambda_2x_0-x_1)=0$, $\beta(u)=x_0^{-1}x_1$, $F^{1/2}(u)x_0-x_1+\varphi(u)=0$
e^u	$e^u=e^{x_0}x_1$, $e^u=(x_1^2+a_1)\cos^{-2}x_0$, $e^u=(x_1^2+a_1)\operatorname{sh}^{-2}x_0$
u^k	$u^{k+1}=x_0^{k+1}x_1$
u	$u=x_0x_1+\frac{x_0^4}{12}+a_1$, $u=W(x_0)x_1^2$, $u=x_0^{-2}x_1^2+x_1^{1/2}(a_1x_0^{5/2}+a_2x_0^{-3/2})$,
	$u=x_0^{-2}x_1^2+3a_1x_1x_0^3+\frac{a_1^2}{6}x_0^8+a_2x_0^{-1}+a_3x_0^2$, $u=W(x_0)x_1^2+\psi(x_0)$
$u^{-1/2}$	$u^{1/2}=W(x_1)x_0^2$, $2u^{1/2}=x_0x_1+\frac{x_1^4}{24}+a_1$, $u^{1/2}=W(x_1)x_0^2+\psi(x_1)$,
	$u^{1/2}=x_0^{1/2}x_1^{-2}(x_0^{3/2}+a_1x_1^{5/2}+a_2x_1^{-3/2})$,
	$u^{1/2}=x_0^2x_1^{-2}+3a_1x_0x_1^3+\frac{a_1^2}{6}x_1^8+a_2x_1^{-1}+a_3x_1^2$
$u^{-2/3}$	$u^{1/3}=x_0x_1^{-1}+x_1^2$, $u^{1/3}=x_0\gamma(x_1)$
u^{-1}	$u=(x_0^2+a_1)\cos^{-2}x_1$, $u=e^{x_1}x_0$, $u=(-x_0^2+a_1)\operatorname{sh}^{-2}x_1$
u^2	$u=x_0^{-1}x_1+x_0^2$, $u=\gamma(x_0)x_1$, $u=x_1^{1/3}$
$e^u+\lambda^2$	$e^u=e^{x_0}(x_1\pm\lambda x_0)$, $2e^u=(x_1\pm\lambda x_0)^2\cos^{-2}x_0$, $2e^u=(x_1\pm\lambda x_0)^2\operatorname{sh}^{-2}x_0$
$u^{-4/5}$	$u=[W(x_1)]^{-5/2}x_0$
u^4	$u^5=[W(x_0)]^{-5/2}x_1$
$u^{-4/3}$	$x_0+x_1u^{2/3}+\varphi(x_1u^{1/3})=0$
u^{-4}	$x_0+x_1u^2+\varphi(x_0^{-1}u)u^2=0$
$H^4(u)$	$x_0-\omega_1\int H(u)\exp\left\{\int H(u)(a_0+a_1H^2(u))du\right\}du=\varphi(\omega_1)$

где a, a_0, a_1, θ_1, θ_1 — произвольные групповые параметры, $\theta_1\neq 0$, $\theta_2\neq 0$, $f(x_0,x_1)$ — известное решение уравнения (1).

Результаты, приведенные выше, обобщены на случай произвольного количества независимых переменных $x=(x_0,\boldsymbol{x})\in R_{1,n}$ в уравнении (1), т.е. для уравнения

$$u_{00}-\nabla[F(u)\nabla u]=0. \tag{8}$$

Операторы вида

$$Q=\partial_1+C(x_0,x_1,u)\partial_u,\quad Q=\partial_0+(F(u))^{1/2}\partial_1+C(x_0,x_1,u)\partial_u \tag{9}$$

приведенные в табл. 1, обобщаются следующим образом:

$$Q_a=\partial_a+\alpha_aC(x_0,\boldsymbol{\alpha x},u)\partial_u,\quad Q_a=\alpha_a[\partial_0+C(x_0,\boldsymbol{\alpha x},u)\partial_u]+(F(u))^{1/2}\partial_a,$$

где $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ — произвольный постоянный единичный вектор; $a=\overline{1,n}$. В анзацах, соответствующих операторам (9), нужно заменить x_1 на $\boldsymbol{\alpha x}$. Редуцированные уравнения при этом не изменяются.

Анзацы, полученные при помощи операторов $Q=\partial_0+C(x_0,x_1,u)\partial_u$ для многомерного уравнения (8) имеют вид

$$\int F(u)du=f(x_0)\varphi(\boldsymbol{x})+g(x_0,\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

где $f(x_0)$ и $g(x_0,\boldsymbol{x})$ — заданные функции, $\varphi(\boldsymbol{x})$ — новая неизвестная функция. Подставляя (10) в (8), имеем

$$\Delta\varphi=\frac{1}{f}\left[-\Delta g+F^{-1}(\ddot{f}\varphi+g_{00})-\dot{F}F^{-3}(\dot{f}\varphi+g_0)^2\right]. \tag{11}$$

Если правая часть уравнения (11) является функцией только от φ и $\boldsymbol{x}$, то уравнение принимает вид

$$\Delta\varphi = G(\boldsymbol{x}, \varphi) \tag{12}$$

и становится редуцированным для уравнения (8). В частности, при

а) $F(u) = u^k$, $k \neq -1$, $f(x_0) = h^{k+1}(x_0)$, $g(x_0, \boldsymbol{x}) = 0$, редуцированное уравнение будет нелинейным уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi^{1/(k+1)}; \tag{13}$$

б) $F(u) = u^{-1}$, $f(x_0) = 1$, $g(x_0, \boldsymbol{x}) = \ln v(x_0)$, $v(x_0)$ — решение уравнения $\ddot{v} = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$. В этом случае (12) — уравнение Лиувилля

$$\Delta\varphi = \lambda \exp\varphi; \tag{14}$$

в) $F(u) = \exp u$, $f(x_0) = \exp w(x_0)$, $g(x_0, \boldsymbol{x}) = 0$, $w(x_0)$ — решение уравнения $\ddot{w} = \lambda \exp w$, редуцированное уравнение — линейное уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda. \tag{15}$$

Интересно отметить, что анзац

$$u^{1/3} = u^1(\boldsymbol{x}) + u^2(\boldsymbol{x})x_0, \tag{16}$$

где $u^1(\boldsymbol{x})$ и $u^2(\boldsymbol{x})$ — новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{00} = \nabla\left(u^{-2/3}\nabla u\right) \tag{17}$$

к системе двух уравнений

$$\Delta u^1 = 2u^1(u^2)^2, \quad \Delta u^2 = 2(u^2)^3, \tag{18}$$

а анзац

$$u^{1/2} = u^1(\boldsymbol{x}) + u^2(\boldsymbol{x})x_0 + u^3(\boldsymbol{x})\frac{x_0^2}{2!}, \tag{19}$$

$u^1(\boldsymbol{x})$, $u^2(\boldsymbol{x})$, $u^3(\boldsymbol{x})$ — новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{00} = \nabla\left(u^{-1/2}\nabla u\right) \tag{20}$$

к системе трех уравнений

$$\Delta u^1 = u^1u^3 + (u^2)^2, \quad \Delta u^2 = 3u^2u^3, \quad \Delta u^3 = 3(u^3)^2. \tag{21}$$

Анзацы (16) и (19) осуществляют редукцию (уменьшение) уравнений (17) и (20) по независимым переменным и антиредукцию (увеличение числа функций) по зависимым функциям. Очевидно, что такие анзацы не могут быть получены при помощи операторов лиевской или условной симметрии.

1. Ames W.F. Lohner R.I. Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, **16**, № 5/6, 439–447.

2. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.* 1987, **39**, № 1, 116–123.

3. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений, в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–6.

4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнении газовой динамики

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, В.К. РЕПЕТА

The method for investigation of the non-Lie symmetry of gas dynamics is suggested. The non-Lie ansätzes are used to construct exact solutions of the equations. The local symmetry of nonlinear wave equation $u_{00} = F_3(x_1)(G(u)u_1)_1$ is studied.

1. Нелиевская (нелокальная) симметрия линейных уравнений математической физики изучена довольно подробно [1–3]. Термин “нелиевская симметрия”, введенный в [2], означает симметрию уравнения, которая не может быть вычислена по классическому алгоритму С. Ли. Нелокальная симметрия нелинейных уравнений математической физики мало изучена. Это связано с тем, что только в редких случаях алгоритм С. Ли дает возможность эффективно вычислять высшие симметрии.

В настоящей работе предложен метод исследования нелиевской симметрии и построения нелиевских анзацев для уравнений газовой динамики.

В лагранжевых переменных одномерное адиабатическое движение газа описывается системой уравнений (см., напр., [4] и цитированную там литературу)

$$u^1_0 - u^2_1 = 0, \quad u^2_0 - u^3_1 = 0, \quad u^3_0 - F(u^1, u^3)u^2_1 = 0. \tag{1}$$

Здесь $u^i_j = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,1}$, $F(u^1, u^3) = \frac{\partial S/\partial u^1}{\partial S/\partial u^3}$, S — энтропия, $(u^1)^{-1} \equiv \rho$ — плотность, u^2 — скорость, $u^3 \equiv p$ — давление.

Локальная и квазилокальная симметрия (1) изучена в [4].

2. Для исследования системы (1) поступим следующим образом. Во-первых, с помощью нелокальной замены

$$u^1 = w_{11}, \quad u^2 = w_{01}, \quad u^3 = w_{00} \tag{2}$$

приведем систему (1) к одному скалярному уравнению третьего порядка

$$w_{000} - F(w_{11}, w_{00})w_{011} = 0. \tag{3}$$

Во-вторых, полученное уравнение (3) преобразуем при некоторых выборах функции F к нелинейному волновому уравнению второго порядка. В-третьих, используя локальную симметрию волнового уравнения, строим нелиевские анзацы для исходной системы (1). В дальнейшем будем следовать этому алгоритму.

Для конкретной реализации нашего алгоритма рассмотрим несколько случаев.

Случай I. Пусть в (3) $F = \dot{F}_1(w_{11})$ является производной от произвольной гладкой функции F_1 относительно w_{11}. Интегрируя уравнение (3) по переменной x_0, а затем дифференцируя дважды по переменной x_1, получаем

$$w_{0011} - [F_1(w_{11})]_{11} = 0. \tag{4}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 11, С. 27–33.

Полагая $v = w_{11}$, приходим к нелинейному волновому уравнению

$$v_{00} - (\dot{F}_1(v)v_1)_1 = 0. \tag{5}$$

Случай II. Пусть в (3) $F = F_2(w_{00})$ — произвольная гладкая функция w_{00}. Дифференцируя уравнение (3) по переменной x_0 и положив $v = w_{00}$, приходим к уравнению

$$v_{11} - \left(F_2^{-1}(v)v_0\right)_0 = 0. \tag{6}$$

Случай III. Пусть $F = r\frac{w_{00}}{w_{11}}$, r — произвольное действительное число. Интегрируя (3) по переменной x_0, а затем дифференцируя дважды по x_1 получаем уравнение четвертого порядка

$$w_{0011} - (F_3^r w_{11}^r)_{11} = 0, \tag{7}$$

Замена $vF_3^{-1} = w_{11}$ приводит (7) к уравнению второго порядка

$$v_{00} - F_3(x_1)(v^r)_{11} = 0. \tag{8}$$

Итак, если уравнения (5), (6), (8) обладают нетривиальной локальной симметрией, то эта симметрия будет, вообще говоря, нелокальной для исходной системы уравнений (1). Используя локальную симметрию уравнений (5), (6), (8), построим нелиевские анзацы для уравнений (1), которые редуцируют двумерную систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Лиевская и условная симметрия уравнения (5), (6), (8) изучена в [5–7].

3. Нелиевские анзацы для системы (1), полученные по указанной схеме, имеют следующий вид.

Случай I. Пусть $F = u^1$. Решение системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} &u^1 = \varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 + ax_0, \quad u^2 = a\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0),\\ &u^3 = a^2\varphi^1(\omega) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^2(x_0), \end{aligned} \tag{9}$$

a — произвольный действительный параметр;

$$\begin{aligned} &u^1 = \ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = x_1x_0^{-1}, \quad u^2 = \dot{\varphi}^1(\omega) - \omega\ddot{\varphi}^1(\omega) + \varphi^2(x_0),\\ &u^3 = 2\varphi^1(\omega) - 2\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \ddot{\varphi}^1(\omega)\omega^2 + x_1\dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = x_1^2\varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{1}{3}x_1^3\dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0),\\ &u^3 = \frac{1}{12}x_1^4\ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = x_1^{1/2}\varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{2}{3}x_1^{3/2}\dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0),\\ &u^3 = \frac{4}{15}x_1^{5/2}\ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &u^1 = x_0x_1 + \varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \dot{\varphi}^1(x_0)x_1 + \varphi^2(x_0),\\ &u^3 = \frac{1}{2}x_1^2\ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = x_1^2 x_0^{-2} + x_1^{1/2}\varphi^1(x_0), \quad u^2 = -\frac{2}{3}x_1^3 x_0^{-3} + \frac{2}{3}x_1^{3/2}\dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0),\\
&u^3 = \frac{1}{2}x_1^4 x_0^{-4} + \frac{4}{15}\ddot\varphi^1(x_0) + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0);
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = \dot\varphi^1(\omega) + 4x_0^2, \quad \omega = x_1 + x_0^2, \quad u^2 = 2x_0\dot\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0) + 8x_0x_1,\\
&u^3 = 4x_0^2\dot\varphi^1(\omega) + 2\varphi^1(\omega) + 4x_1^2 + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0);
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = 9\left(x_0\dot\varphi^1(\omega) + x_0^4\right), \quad \omega = x_1 + x_0^3,\\
&u^2 = 9\left(\varphi^1(\omega) + 3x_0^3\dot\varphi^1(\omega) + 4x_0^3x_1 + \varphi^2(x_0)\right),\\
&u^3 = 9\left(9x_0^5\dot\varphi^1(\omega) + 12x_0^2\varphi^1(\omega) + 6x_0^2x_1^2 + x_1\dot\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)\right);
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^1 = x_0^2\dot\varphi^1(\omega) + \left(x_1x_0^{-1} + 6x_0^4\right), \quad \omega = x_0x_1 + x_0^6,\\
&u^2 = \varphi^1(\omega) + \dot\varphi^1(\omega)\left(x_0x_1 + 6x_0^6\right) - \frac{2}{3}x_1^3x_0^3 + 288x_1x_0^7 + 18x_1^2x_0^2 + \varphi^2(x_0),\\
&u^3 = \dot\varphi^1(\omega)\left(x_1 + 6x_0^5\right)^2 + 30x_0^4\varphi^1(\omega) + \frac{1}{2}x_1^4x_0^{-4} +\\
&\qquad + 12x_1^3x_0 + 1008x_0^6x_1^2 + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Анзацы (9)–(17) редуцируют систему (1) к следующим системам ОДУ:

$$
\begin{cases}
a^3\dot\varphi^1 + \lambda_1\omega - \dot\varphi^1\varphi^1 a + \lambda_2 = 0,\\
\ddot\varphi^2 = \lambda_1,\\
\dot\varphi^3 - a\lambda_1x_0 = \lambda_2;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dddot\varphi^1(\ddot\varphi^1 + \omega^2) + \lambda_2\omega^{-1} + \lambda_1 = 0,\\
\ddot\varphi^2 = \lambda_1x_0^{-2},\\
\dot\varphi^3 = \lambda_2x_0^{-1};
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot\varphi^1 = 6(\varphi^1)^2 + \lambda,\\
\ddot\varphi^2 = 0,\\
\dot\varphi^3 = 0;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dddot\varphi^1 = 0,\\
\ddot\varphi^2 - \dot\varphi^1\varphi^1 = 0,\\
\dot\varphi^3 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dddot\varphi^1 = 2x_0,\\
\ddot\varphi^2 = x_0\dot\varphi^1 + \varphi^1,\\
\dot\varphi^3 = \dot\varphi^1\varphi^1;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
4x_0^3\,\dddot\varphi^1 - 15x_0\dot\varphi^1 + 30\varphi^1 = 0,\\
\ddot\varphi^2 = \dot\varphi^1\varphi^1,\\
\dot\varphi^3 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot\varphi^1(\ddot\varphi^1 - 2) + 16\omega + \lambda = 0,\\
\ddot\varphi^2 + 32x_0^2 = 0,\\
\dot\varphi^3 + 2\lambda x_0 = 0;
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
3(\dot\varphi^1)^2 - 8\varphi^1 - 4\omega^2 = 0,\\
\ddot\varphi^2 - 60x_0^4 = 0,\\
\dot\varphi^3 - 84x_0^7 = 0;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(\dot\varphi^1)^2 - 60\varphi^1 - 1800\omega^2 - 2\lambda = 0,\\
\ddot\varphi^2 = 24552x_0^{10},\\
\dot\varphi^3 = 24768x_0^{15} + 4\lambda x_0^3.
\end{cases}
$$

Здесь и ниже λ, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

Случай II. Пусть $F = (u^1)^k$. Решение системы ищем с помощью анзацев

$$
\begin{aligned}
&u^1 = x_1^\alpha\varphi^1(x_0), \quad u^2 = \frac{1}{\alpha+1}x_1^{\alpha+1}\dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0),\\
&u^3 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}x_1^{\alpha+2}\ddot\varphi^1(x_0) + \dot\varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Подставляя (18) в (1), получаем редуцированные системы ОДУ

$$\alpha = \frac{1}{k+1},\ k \neq -1: \quad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^k \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2}{k},\ k \neq -1;\ -2: \quad \begin{cases} k^2 \dddot{\varphi}^1 - 2(k+1)(k+2)(\varphi^1)^k \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0. \end{cases}$$

Для конкретных значений степени k укажем еще некоторые анзацы и соответствующие им редуцированные системы ОДУ

$k = 2$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_0^{-1} x_1 + \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= -\frac{1}{2} x_1^2 x_0^{-2} + \dot{\varphi}^1(x_0) x_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= \frac{1}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}^1(x_0) x_1^2 + \\ &\quad + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} x_0^3 \dddot{\varphi}^1 - 2x_0 \dot{\varphi}^1 + 4\varphi^1 = 0, \\ x_0^2 \ddot{\varphi}^2 - 2x_0 \dot{\varphi}^1 \varphi^1 + (\varphi^1)^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 - (\varphi^1)^2 \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases}$$

$k = -2$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= -x_1^{-1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= -\ln x_1 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 - (\varphi^1)^{-1} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases}$$

$k = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= -x_1^{-1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= -\ln x_1 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^{-3/2} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases}$$

$k = -1$

$$\begin{aligned} u^1 &= x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 &= \ln x_1 \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 &= x_1(\ln x_1 - 1) \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0), \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^{-2} \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0. \end{cases}$$

Случай III. Пусть $F = (u^3)^{-1}$. Анзацы получаются из (9)–(17) круговой заменой: $x_0 \to x_1$, $x_1 \to x_0$, $u^1 \to u^3$, $u^3 \to u^1$. Соответствующие системы редуцированных уравнений имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 \varphi^1 - a^2 \dot{\varphi}^1 - \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = \lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - \omega^2) - \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 x_1 = \lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\varphi}^1 - 6(\varphi^1)^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^1 = 0, \\ 2\dot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\varphi}^1 = x_1^2, \\ \dot{\varphi}^2 = x_1 \varphi^1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 \ddot{\varphi}^1 - 15\varphi^1 = 0, \\ 2\dot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - 2) - 8\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 8x_1^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\dot{\varphi}^1 \ddot{\varphi}^1 - 4\dot{\varphi}^1 - 4\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 12x_1^5 - 3\lambda x_1^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\varphi}^1\ddot{\varphi}^1 - 30\dot{\varphi}^1 - 1800\omega + \lambda = 0,\\ \dot{\varphi}^2 = -1368x_1^{11} - \lambda x_1^5.\end{cases}$$

Все приведенные анзацы можно представить в общем виде

$$\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{\varphi} + b\dot{\boldsymbol{\varphi}} + C\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{D},$$

где $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, u^3)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)^T$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ — соответственно первая и вторая производные от $\boldsymbol{\varphi}$ по своему аргументу, A, B, C, D — некоторые переменные матрицы размерности 3×3.

4. Большинство из полученных редуцированных ОДУ можно проинтегрировать в явном виде. Приведем некоторые точные решения, системы (1).

Случай I. $F = u^1$

$$u^1 = x_1^2 x_0^{-2},$$
$$u^2 = -\frac{2}{3}x_1^2 x_0^{-3} + \lambda x_0 + \lambda_1,$$
$$u^3 = \frac{1}{12}x_1^4 x_0^{-4} + \lambda x_1 + \lambda_2;$$

$$u^1 = x_1^{1/2}(\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 x_0 + \lambda_3),$$
$$u^3 = \frac{2}{3}x_1^{3/2}(2\lambda_1 x_0 + \lambda_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{5}x_0^5 + \frac{1}{3}(\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3)x_0^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\lambda_1\lambda_2 x_0^4 + \lambda_2\lambda_3 x_0^2 + (\lambda_3^2 + \lambda_5)x_0 + \lambda_6\right),$$
$$u^3 = \frac{8}{15}x_1^{5/2}\lambda_1 + \frac{x_1}{2}(\lambda_1^2 x_0^4 + x_0^2(\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3) + \lambda_1\lambda_2 x_0^3 +$$
$$+ 2\lambda_2\lambda_3 x_0 + \lambda_3^2 + \lambda_5 + \lambda_4).$$

Случай II. $F = (u^1)^2$

$$u^1 = x_1 x_0^{-1} + \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 x_0^2 \ln x_0,$$
$$u^2 = -\frac{1}{2}x_1^2 x_0^{-2} + x_1(2\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0(2\ln x_0 + 1)) +$$
$$+ \lambda_3 x_0 + \lambda + \frac{1}{4}x_0^4\left(\left(\lambda_1 + \lambda_2\left(\ln x_0 - \frac{1}{4}\right)\right)^2 + \frac{\lambda_2^2}{16}\right),$$
$$u^3 = \frac{1}{3}x_1^3 x_0^{-3} + \frac{1}{2}x_1^2(2\lambda_1 + \lambda_2(2\ln x_0 + 3)) +$$
$$+ x_0^6(\lambda_1 + \lambda_2\ln x_0)^3 + x_1(x_0^3(\lambda_1 + \lambda_2\ln x_0)^2 + \lambda_5).$$

Случай III. $F = (u^3)^{-1}$

$$u^1 = \frac{1}{2}x_0^4 x_1^{-4} + \lambda_1 x_1^{1/2} + \lambda_2 x_1^{-7/2} + \frac{x_0}{2}(\lambda_1^2 x_1^5 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 + \lambda_2^2 x_1^{-3}) + \varphi^3(x_1),$$
$$u^2 = -\frac{2}{3}x_0^3 x_1^{-3} + \frac{1}{3}x_0^{3/2}\left(5\lambda_1 x_1^{3/2} - 3\lambda_2 x_1^{-5/2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{6}x_1^6 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 x_1^{-2} + \lambda_1\lambda_2 x_1^2\right) + \lambda_3,$$
$$u^3 = x_0^2 x_1^{-2} + x_0^{1/2}\left(\lambda_1 x_1^{5/2} + \lambda_2 x_1^{-3/2}\right);$$

$$u^1 = \frac{1}{2}x_0^2x_1^2 + x_0\left(\frac{x_1^5}{12} + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1\right) + \varphi^3(x_1),$$

$$u^2 = \frac{1}{2}x_0^2 + x_0\left(\frac{1}{3}x_1^3 + \lambda_1\right) + \frac{1}{72}x_1^6 + \frac{1}{3}\lambda_1 x_1^3 + \frac{1}{2}\lambda_2 x_1^2 + \lambda_3,$$

$$u^3 = x_0x_1 + \frac{1}{12}x_1^4 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2.$$

5. Изучим групповые свойства нелинейного волнового уравнения

$$u_{00} - F_3(x_1)(G(u)u_1)_1 = 0 \tag{19}$$

для $F_3 \neq \text{const}$, $G \neq \text{const}$. Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. *Ядро основных групп уравнения (19) соответствует одномерной алгебре инфинитезимальных операторов с базисом* $X_1 = \partial_0$.

Теорема 2. *Уравнение (19) допускает расширение ядра основных групп только при таких специализациях функций* F_3 *и* G*:*

1) G — *произвольная*

а) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1, \quad X_2 = (2-n)x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1, \quad X_3 = nx_0\partial_0 - 2\partial_1;$

2) $G = e^{\lambda u}$

а) F_3 — *произвольная* $\quad X_1, \quad X_4 = \lambda x_0\partial_0 + 2x_1\partial_u;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1, \quad X_3, \quad X_4;$

в) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1, \quad X_2, \quad X_4;$

г) $F_3 = x_1^3$ $\quad X_1, \quad X_2, \quad X_4, \quad X_5 = \lambda x_1^2\partial_1 + x_1\partial_u;$

3) $G = u^k$

а) F_3 — *произвольная* $\quad X_1, \quad X_6 = nx_0\partial_0 - 2u\partial_u;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1, \quad X_3, \quad X_6;$

в) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1, \quad X_2, \quad X_6;$

г) $F_3 = x_1^{\frac{3k+4}{k+1}}$ $\quad X_1, \quad X_2, \quad X_6, \quad X_7 = (k+1)x_1^2\partial_1 + x_1u\partial_u;$

4) $G = u^{-4}$

а) F_3 — *произвольная* $\quad X_1, \quad X_6, \quad X_8 = x_0^2\partial_0 + x_0u\partial_u;$

б) $F_3 = e^{nx_1}$ $\quad X_1, \quad X_3, \quad X_6, \quad X_8;$

в) $F_3 = x_1^n$ $\quad X_1, \quad X_2, \quad X_6, \quad X_8;$

г) $F_3 = x_1^{8/3}$ $\quad X_1, \quad X_2, \quad X_6, \quad X_7, \quad X_8;$

5) $G = u^{-1}$, $F_3 = e^{nx_1}$

$$X_1, \quad X_3, \quad X_9 = x_0\partial_0 + 2u\partial_u, \quad X_{10} = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + nx_1u\partial_u.$$

Теоремы 1 и 2 доказаны с помощью метода Ли [8].

Полученные результаты могут быть использованы для построения точных решений системы уравнений (1).

1. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистского уравнения движения, *Теорет. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
2. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
4. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х., Основные типы инвариантных уравнений одномерной газовой динамики, Препринт N 49, ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, М., 1988, 26 с.
5. Ames W.F., Lohner R.I., Adams E., Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, in Non-linear phenomena in mathematical sciences, Editor V. Lakshmikanthan, N.Y., Academic Press, 1982, 1–6.
6. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР*, 1991, № 5, 29–34.
7. Фущич В.И., Репета В.К., Точные решения некоторых уравнений газовой динамики и нелинейной акустики, *Докл. АН УССР*, 1991, № 8, 35–42.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

Чи інваріантні рівняння Максвелла щодо перетворень Галілея?

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

It is shown that Maxwell equations for vacuum are invariant about the Galilei transformations $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t$, $t' = t$. The corresponding transformations of electromagnetic field turn out to be nonlocal ones unlike the Lorentz transformations. Analogous results are obtained for the Dirac and Klein–Gordon–Fock equations.

Показано, що рівняння Максвелла (РМ) для вакууму інваріантні щодо перетворень Галілея: $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t$, $t' = t$. При цьому, однак, відповідні перетворення для полів $\boldsymbol{E}$ та $\boldsymbol{H}$ виявляються, на відміну від перетворень Лоренца, нелокальними. Аналогічний результат одержано для рівняння Дірака і рівняння Клейна–Гордона–Фока.

З часів Лоренца, Пуанкаре, Ейнштейна на сформульоване в заголовку питання існує негативна відповідь. За наш час добре відомо, що РМ

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H}, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{H} = 0, \tag{1}$$

інваріантні щодо перетворень Лоренца і нсінваріантні щодо перетворень Галілея

$$x'_a = x_a + v_a t, \quad t' = t, \quad a = 1, 2, 3, \tag{2}$$

де v_a — довільні постійні (швидкість інерціальної системи відліку). Якщо ми неявно припускаємо, що поля $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$ при переході від однієї інерціальної системи до іншої перетворюються локальним чином, тобто перетворені поля $\boldsymbol{E}'$ та $\boldsymbol{H}'$ залежать тільки від $\boldsymbol{E}$ та $\boldsymbol{H}$, (і, звичайно, від параметрів v_a), але не залежать від похідних від $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$, то випливає негативна відповідь на обговорюване питання. Якщо припустити, що перетворення полів можуть бути нелокальними, то одержимо позитивну відповідь.

Теорема 1. *Рівняння Максвелла (1) інваріантні щодо перетворень Галілея (2) при умові, що електромагнітне поле* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ *перетворюється згідно закону*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + O\left(v^2\right), \\ \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + O\left(v^2\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Доведення. Впевнимося в правильності теореми безпосередньою перевіркою. Із (2) випливає, що

$$\nabla' = \nabla, \quad \partial_{t'} = \partial_t - \boldsymbol{v}\cdot\nabla. \tag{4}$$

Підставляючи формули (3), (4) у “штриховані” рівняння системи (1) і нехтуючи членами квадратичними по v, знаходимо

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{E})' &= \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}' = \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) - \mathrm{div}\,[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}] = \\ &= \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0. \end{aligned}$$

Доповіді АН УРСР, 1991, № 3, С. 22–26.

Тут використано тотожності

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\\
&\operatorname{div}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Далі

$$\begin{aligned}
&(\partial_t\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H})' = (\partial_t - \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}' - \operatorname{rot}\boldsymbol{H}' = \dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{H}} -\\
&\quad - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) - \operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]
\end{aligned}$$

(крапкою позначено диференціювання по t). Враховуючи тотожності

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) = -(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E},\\
&\operatorname{rot}[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E}
\end{aligned}\tag{6}$$

і використовуючи рівняння (1), отримуємо

$$\begin{aligned}
&(\dot{\boldsymbol{E}} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H})' = \dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\times\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} +\\
&\quad + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E} =\\
&\quad = \dot{\boldsymbol{E}} - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times(\dot{\boldsymbol{H}} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\operatorname{rot}(\dot{\boldsymbol{H}} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0.
\end{aligned}$$

Цілком аналогічно доводиться інваріантність решти рівнянь системи (1) щодо перетворень (2), (3).

Теорема доведена.

Порівнюючи перетворення (2), (3) з інфінітезимальними перетвореннями Лоренца

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + O\left(v^2\right), \quad t' = t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + O\left(v^2\right), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + O\left(v^2\right), \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} + O\left(v^2\right), \tag{8}$$

одразу видно, що простота геометричних перетворень (2) тягне за собою складний (нелокальний) характер перетворень для полів (3). Для того щоб вияснити смисл одержаного результату, запишемо РМ (1) у еквівалентному вигляді [1]

$$\begin{aligned}
&i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, \quad \mathcal{H} = i\hat{\sigma}_2(\boldsymbol{S}\cdot\nabla),\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}\tag{9}$$

де

$$\psi = \text{стовпчик}\,(E_1\ E_2\ E_3\ H_1\ H_2\ H_3), \quad \hat{\sigma}_2 = i\begin{pmatrix}\hat{0} & -I_3\\ I_3 & \hat{0}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

I_3, $\hat{0}$ — одинична та нульова матриці розмірності 3×3,

$$S_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Неважко впевнитися, що система (9) інваріантна щодо наступних алгебр Пуанкаре:

$$\begin{aligned}
&P^{\mathrm{I}}_\mu = P_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad (x_0 \equiv t),\\
&J^{\mathrm{I}}_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + i\varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} S_c & \hat{0} \\ \hat{0} & S_c \end{pmatrix}, \quad J^{\mathrm{I}}_{0a} = x_0 P_a - x_a P_0 + \hat{\sigma}_2 S_a
\end{aligned} \tag{12}$$

і

$$\begin{aligned}
&P^{\mathrm{II}}_0 = -i\mathcal{H} = \hat{\sigma}_2(\boldsymbol{S}\cdot\nabla), \quad P^{II}_a = P^{\mathrm{I}}_a, \quad J^{\mathrm{II}}_{ab} = J^{\mathrm{I}}_{ab},\\
&J^{\mathrm{II}}_{0a} = tP_a - \frac{i}{2}(\mathcal{H}x_a + x_a\mathcal{H}) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_2 S_a.
\end{aligned} \tag{13}$$

Оператори J^{I}_{0a} породжують добре відомі перетворення Лоренца. В той же час оператори J^{II}_{0a}, будучи неліївськими, очевидно, приводять до цілком інших перетворень. Щоб знайти ці перетворення можна скористатися формулами, запропонованими в [2–4], згідно з якими

$$t' = \exp(t\boldsymbol{v}\cdot\nabla)t\exp(-\boldsymbol{v}\cdot\nabla) = t, \quad \boldsymbol{x}' = \exp(t\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{x}\exp(-\boldsymbol{v}\cdot\nabla) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \tag{14}$$

$$\psi'(x') = \exp\{t\boldsymbol{v}\cdot\nabla\}\exp\{-t\boldsymbol{v}\cdot\nabla + \hat{\sigma}_2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\nabla)\}\psi(x), \tag{15}$$

де функція $\psi(x)$ визначена в (10).

Інфінітезимальні перетворення (3), як легко впевнитися, випливають з (15) в першому порядку по v. Кінцеві геометричні перетворення (14) збігаються з галілеївськими перетвореннями (2). Зауважимо, що зображення алгебри Пуанкаре, задані формулами (12), (13), взагалі кажучи, нееквівалентні, але на множині розв'язків рівнянь Максвелла (9) вони збігаються, оскільки

$$J^{\mathrm{I}}_{0a}\psi = J^{\mathrm{II}}_{0a}\psi, \quad (J^{\mathrm{I}}_{0a})^2\psi = (J^{\mathrm{II}}_{0a})^2\psi, \quad \ldots, \tag{16}$$

де ψ — довільний розв'язок РМ. Це говорить про те, що перетворення Лоренца і (14), (15) на розв'язках РМ еквівалентні. Інваріантність РМ щодо перетворень Галілея стала можливою за рахунок нелокальності перетворень електромагнітного поля. Ідею дуальності просторово-часової симетрії релятивістських рівнянь вперше розглянуто в роботах [5, 6].

Важливим застосуванням перетворень (14), (15) є можливість коректного впровадження наближеної галілеївської інваріантності (з єдиним абсолютним часом) РМ. Очевидно, що перетворення (2), (3) можна розглядати як наближені галілеївські перетворення РМ. Формула (15) дозволяє вирахувати явний вигляд перетворень Галілея для електромагнітного поля в будь-якому порядку по v. Наприклад, друге наближення має вигляд

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} - \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}v^2 t\right)\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\big[v^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}) +{}&\\
+ (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}) + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})^2\Delta\boldsymbol{E}\big] + O\left(v^3\right),&\\
\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}v^2 t\right)\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\big[v^2\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H}) +{}&\\
+ (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} - 2\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}) + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})^2\Delta\boldsymbol{H}\big] + O\left(v^3\right),&
\end{aligned} \tag{17}$$

Перетворення Лоренца з точністю до v^2 задаються формулами

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) + O\left(v^3\right),\\
&t' = t + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}v^2 t + O\left(v^3\right),\\
&\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\left[v^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\right] + O\left(v^3\right),\\
&\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left[v^2\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})\right] + O\left(v^3\right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Порівнюючи формули (2), (17) з (18), бачимо, що перетворення (17) відрізняються від лоренцівських перетворень для електромагнітного поля (18) лише членами, в які входять похідні від $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$. Геометричні перетворення $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'$, $t\to t'$ (18) суттєво відрізняються від перетворень Галілея (2) навіть в першому порядку по v. Час t у формулі (18) змінюється при переході рухомої системи відліку.

Сформулюємо аналогічний результат для рівняння Дірака та рівняння Клейна–Гордона–Фока.

Запишемо рівняння Дірака у вигляді

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, \quad \mathcal{H} = -i\gamma_0\gamma_a\partial_a + \gamma_0 m, \tag{19}$$

де γ_μ — матриці Дірака 4×4, $\psi=\psi(x)$ — 4-х компонентна комплексна функція (стовпчик), m — довільна постійна. Рівняння (19) інваріантне щодо операторів [6]

$$J_{0a}^{\mathrm{II}} = t\partial_a - \frac{i}{2}(\mathcal{H}x_a + x_a\mathcal{H}), \tag{20}$$

що породжують перетворення [2–4]

$$\begin{aligned}
&t' = t, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t,\\
&\psi'(x') = \exp\{t\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\exp\left\{-t\boldsymbol{v}\cdot\nabla + \frac{i}{2}(\mathcal{H}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\mathcal{H})\right\}\psi(x) =\\
&\qquad = \exp\left\{\left(\frac{v}{2}\operatorname{cth}\frac{v}{2} - 1\right)t\boldsymbol{v}\cdot\nabla + \frac{i}{2}(\mathcal{H}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}\mathcal{H} + v^2 t\mathcal{H})\right\}\psi,
\end{aligned} \tag{21}$$

де $v = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}$.

Розглянемо рівняння Клейна–Гордона–Фока

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \tag{22}$$

і запишемо його в еквівалентному вигляді [6]

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathcal{H}\Phi, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa}\left[\left(E^2 + \varkappa^2\right)\sigma_1 + \left(E^2 - \varkappa^2\right)i\sigma_2\right], \tag{23}$$

де $E = m^2 - \Delta$, $\Phi = \Phi(x)$ — 2-х компонентна функція

$$\Phi = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \frac{i}{\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \Phi_2 = \varphi, \tag{24}$$

$\varkappa \neq 0$ — довільна постійна, σ_1, σ_2 — матриці Паулі 2×2. Рівняння (23) інваріантне щодо оператора вигляду (20), який призводить до перетворень (21).

Відзначимо, що на відміну від рівняння Дірака оператори (20) для рівняння (23) нелокальні навіть на множині його розв'язків, де вони мають вигляд

$$J_{0a} = i\partial_a + x_a\partial_t + \frac{i}{2\varkappa}(\sigma_1 + i\sigma_2)\partial_a.$$

Оператори (25) породжують перетворення Лоренца для t і $\boldsymbol{x}$, а функція Φ перетворюється як

$$\Phi'(x') = \frac{1}{2}\left[(\sigma_0 + \sigma_3)\operatorname{ch}\theta + \sigma_0 - \sigma_3 - \frac{i}{\varkappa}(\sigma_1 + i\sigma_2)\operatorname{sh}\theta\frac{\boldsymbol{\theta}\cdot\nabla}{\theta}\right]\Phi,$$

де σ_0 — одинична матриця 2×2, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ — довільні постійні, $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On nonlocal transformations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1985, **44**, № 1, 40–42.
3. Штелень В.М., Нелиевская симметрия й нелокальные преобразования, Препринт № 87.6, Киев, 1987, 28 с.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелиненных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Fushchych W.I., On additional invariance of Dirac and Maxwell equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 10, 508–511.
6. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнений Клейна–Гордона–Фока, *Докл. АН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570–573.

Reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN, S.L. SLAVUTSKY

We construct a complete set of $\tilde{G}(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1 for the Navier–Stokes (NS) field which reduce the ns equations to systems of ordinary differential equations (ODE). Having solved these ODEs we thereby obtain solutions of the NS equations. Formulae of group multiplication of solutions are given. Several non-Lie ansätze are discussed.

1. Introduction

The NS equations

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.1}$$

where $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = \{u^1, u^2, u^3\}$ is the velocity field of a fluid, $p = p(x)$ is the pressure, $x = \{t, \boldsymbol{x}\} \in R(4)$, $\nabla = \{\partial/\partial x_a\}$, $a = 1, 2, 3$, Δ is Laplacian, are basic equations of hydrodynamics which describe motion of an incompressible viscous fluid. The problem of finding exact solutions of nonlinear equations (1.1) is an important but rather complicated one. Considerable progress in solving this problem can be achieved by making use of a symmetry approach. Equations (1.1) have non-trivial symmetry properties; it is well known (see, e.g. Birkhoff [3]) that they are invariant under the extended Galilei group $\tilde{G}(1,3)$ generated by operators

$$\begin{gathered}\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad G_a = t\partial_a + \partial_{u^a}, \\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a} - 2p\partial_p,\end{gathered} \tag{1.2}$$

where $\partial_{u^a} \equiv \partial/\partial u^a$, $\partial_p \equiv \partial/\partial p$. Recently it was shown (Ovsyannikov [12], Lloyd [11]) that the maximal, in the sense of Lie invariance algebra, of the NS equations (1.1) is the direct sum of eleven-dimensional $A\tilde{G}(1,3)$ (1.2) and infinite-dimensional algebra A^∞ with basis elements

$$Q = f^a\partial_a + \dot{f}^a\partial_{u^a} - x_a\ddot{f}^a\partial_p, \quad R = g\partial_p, \tag{1.3}$$

where $f^a = f^a(t)$ and $g = g(t)$ are arbitrary differentiable functions of t; dot means differentiation with respect to t.

In this paper we systematically use symmetry properties of (1.1) to find their exact solutions. In section 2 we describe the complete set of $\tilde{G}(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1

$$u^a(t,\boldsymbol{x}) = f^{ab}(x)\varphi^b(\omega) + g^a(x), \quad p(x) = F(x)\varphi(\omega), \tag{1.4}$$

where the functions f^{ab}, g^a and F, and new variable $\omega = \omega(x)$ are determined by means of operators of three-dimensional subalgebras of $A\tilde{G}(1,3)$ (1.2). We consider

J. Phys. A: Math. Gen., 1991, **24**, P. 971–984.

three-dimensional subalgebras of $A\tilde{G}(1,3)$ because an ansatz of the form (1.4), invariant under such a subalgebra, reduces (1.1) to a system of ODE immediately. As a rule reduced systems of ode can be solved by a standard method. (In most cases we find the general solutions of these reduced systems of ODE). Ansätze of the type (1.4), which are obtained by means of Lie symmetry operators, we shall call Lie ansätze. The method of finding exact solutions of PDE used here is based on Lie's ideas of invariant solutions and it is described in full detail in Fushchych et al [9].

Starting from solutions of the reduced systems of ODE (which are, of course, solutions of the NS equations) one can construct multiparameter families of solutions for the NS equations. To do this one has to use formulae of group multiplication of solutions which are given at the end of section 2.

In section 3 we consider some non-Lie ansätze for the NS field. These ansätze cannot be obtained within the framework of the local Lie approach used in section 2.

2. $\tilde{G}(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1 for the NS field and exact solutions of the NS equations (1.1)

Let $\langle Q_j\rangle \equiv \langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle$ be a three-dimensional subalgebra of $A\tilde{G}(1,3)$ (1.2). It follows from (1.2) that the general form of operator Q_j is

$$Q_j = \xi_j^\nu(x)\partial_\nu + \eta_j^a(\boldsymbol{u})\partial_{u^a} + \tilde{\eta}_j(p)\partial_p, \tag{2.1}$$

where $\nu=\overline{0,3}$, $\partial_0 \equiv \partial/\partial t$; ξ_j^ν, η_j^a, $\tilde{\eta}_j$ are linear functions of x, $\boldsymbol{u}$, p. The explicit form of an ansatz (1.4) is determined as the solution of the following equations

$$\begin{aligned} &\xi_j^\nu(x)\partial_\nu\omega(x) = 0,\\ &Q_j[u^a - f^{ab}(x)\varphi^b(\omega) - g^a(x)] = 0,\\ &Q_j[p - F(x)\varphi(\omega)] = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Equations (2.2) can be solved rather easily. All three-dimensional $\tilde{G}(1,3)$-inequivalent subalgebras of $A\tilde{G}(1,3)$ are found in Fushchych et al [6] and Barannik and Fushchych [1] with the help of the method developed by Patera et al [13]. In table 1 we list these three-dimensional subalgebras and give corresponding invariant ansätze of the form (1.4) obtained as solutions of equations (2.2).

In this table f, g, h, φ are differentiable functions of corresponding invariant variable ω; $\alpha\neq 0$ is an arbitrary constant.

Let us substitute ansätze from table 1 into the ns equations (1.1). As a result we obtain the following systems of ODE:

1°. $\dot f = 0, \quad \dot g = 0, \quad \dot h = 0.$

2°. $h\dot f - \ddot f = 0, \quad h\dot g - \ddot g = 0, \quad h\dot h - \ddot h + \dot\varphi = 0, \quad \dot h = 0.$

3°. $g + h\dot f - \ddot f = 0, \quad h\dot g - \ddot g = 0, \quad h\dot h - \ddot h + \dot\varphi = 0, \quad \dot h = 0.$

4°. $\dot f h + 2\ddot f = 0, \quad \dot g h + 2\ddot g = 0, \quad 1 - 2h\dot h - 4\ddot h - 2\dot\varphi = 0, \quad \dot h = 0.$

5°. $1 + h\dot f - \ddot f = 0, \quad g\dot h - \ddot g = 0, \quad h\dot h - \ddot h + \dot\varphi = 0, \quad \dot h = 0.$

6°. $g - 2h\dot f - 4\ddot f = 0, \quad h\dot g + 2\ddot g = 0, \quad 1 - 2h\dot h - 4\ddot h - 2\dot\varphi = 0, \quad \dot h = 0.$

7°. $(\alpha f - h)\dot f - 2(\alpha^2+1)\ddot f + \alpha\dot\varphi = 0, \quad (\alpha f - h)\dot g - 2(\alpha^2+1)\ddot g = 0,$
$(\alpha f - h)\dot h - 2(\alpha^2+1)\ddot h - \dot\varphi + \frac12 = 0, \quad \alpha\dot f - \dot h = 0.$

8°. $-\dot f(h-\alpha g) + g - (\alpha^2+1)\ddot f = 0, \quad -\dot g(h-\alpha g) + \alpha\dot\varphi - (\alpha^2+1)\ddot g = 0,$
$1 - \dot h(h-\alpha g) - \dot\varphi - (\alpha^2+1)\ddot h = 0, \quad \dot h - \alpha\dot g = 0.$

Table 1. $\tilde{G}(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1 for the NS field

N	Algebra	Invariant variable ω	Anzatz
1	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3$	t	$u^1 = f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
2	$\partial_t,\ \partial_1,\ \partial_2$	x_3	$u^1 = f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
3	$\partial_t,\ \partial_1,\ G_1 + G_2$	x_3	$u^1 = x_2 + f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = h(\omega),$ $p = \varphi(\omega)$
4	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_t + G_3$	$t^2 - 2x_3$	$u^1 = f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = t + h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
5	$\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_t + G_1$	x_3	$u^1 = t + f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
6	$\partial_1,\ \partial_2 + G_1,$ $\partial_t + G_3$	$t^2 - 2x_3$	$u^1 = x_2 + f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = t + h(\omega),$ $p = \varphi(\omega)$
7	$\partial_1 + \alpha\partial_3,\ \partial_2,$ $\partial_t + G_3$	$t^2 + 2\alpha x_1 - 2x_3$	$u^1 = f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = t + h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
8	$\partial_1,\ \partial_t + G_3,$ $G_1 + \partial_2 + \alpha\partial_3$	$\alpha x_2 - x_3 + (t^2/2)$	$u^1 = x_2 + f(\omega),\ u^2 = g(\omega),\ u^3 = t + h(\omega),$ $p = \varphi(\omega)$
9	$\partial_t,\ \partial_3,\ J_{12}$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	$u^1 = x_1 f(\omega) - x_2 g(\omega),\ u^2 = x_1 g(\omega) + x_2 f(\omega),$ $u^3 = h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
10	$\partial_t + G_3,\ \partial_3,\ J_{12}$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	$u^1 = x_1 f(\omega) - x_2 g(\omega),\ u^2 = x_1 g(\omega) + x_2 f(\omega),$ $u^3 = t + h(\omega),\ p = \varphi(\omega)$
11	$\partial_t,\ \partial_3,\ D$	x_1/x_2	$u^1 = (1/x_2) f(\omega),\ u^2 = (1/x_2) g(\omega),$ $u^3 = (1/x_2) h(\omega),\ p = (1/x_2^2)\varphi(\omega)$
12	$\partial_t,\ \partial_3,\ J_{12} + \alpha D$	$\ln(x_1^2 + x_2^2) +$ $2\alpha \tan^{-1}(x_1/x_2)$	$u^1 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(x_1 f(\omega) - x_2 g(\omega)),$ $u^2 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(x_1 g(\omega) + x_2 f(\omega)),$ $u^3 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} h(\omega),\ p = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}\varphi(\omega)$
13	$\partial_t,\ J_{12},\ D$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}/x_3$	$u^1 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(x_1 f(\omega) - x_2 g(\omega)),$ $u^2 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(x_1 g(\omega) + x_2 f(\omega)),$ $u^3 = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} h(\omega),\ p = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}\varphi(\omega)$
14	$\partial_3,\ J_{12},\ D$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}/t$	$u^1 = (1/t)(x_1 f(\omega) - x_2 g(\omega)),$ $u^2 = (1/t)(x_1 g(\omega) + x_2 f(\omega)),$ $u^3 = (1/\sqrt{t}) h(\omega),\ p = (1/t)\varphi(\omega)$
15	$G_3,\ J_{12},\ D$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}/t$	$u^1 = (1/t)(x_1 f(\omega) - x_2 g(\omega)),$ $u^2 = (1/t)(x_1 g(\omega) + x_2 f(\omega)),$ $u^3 = (1/\sqrt{t}) h(\omega) + (x_3/t),\ p = (1/t)\varphi(\omega)$
16	$\partial_t,\ \partial_2,\ D$	$x_3/\sqrt{t}$	$u^1 = (1/\sqrt{t}) f(\omega),\ u^2 = (1/\sqrt{t}) g(\omega),$ $u^3 = (1/\sqrt{t}) h(\omega),\ p = (1/t)\varphi(\omega)$
17	$\partial_t,\ D,\ G_2 + \alpha G_1$	$x_3/\sqrt{t}$	$u^1 = (1/\sqrt{t}) f(\omega) + (\alpha x_2/t),$ $u^2 = (1/\sqrt{t}) g(\omega) + (x_2/t),$ $u^3 = (1/\sqrt{t}) h(\omega),\ p = (1/t)\varphi(\omega)$
18	$G_1,\ G_2,\ D$	$x_3/\sqrt{t}$	$u^1 = (1/\sqrt{t}) f(\omega) + (x_1/t),$ $u^2 = (1/\sqrt{t}) g(\omega) + (x_2/t),$ $u^3 = (1/\sqrt{t}) h(\omega),\ p = (1/t)\varphi(\omega)$
19	$\partial_1,\ G_2,\ D$	$x_3/\sqrt{t}$	$u^1 = (1/\sqrt{t}) f(\omega),\ u^2 = (1/\sqrt{t}) g(\omega) + (x_2/t),$ $u^3 = (1/\sqrt{t}) h(\omega),\ p = (1/t)\varphi(\omega)$

$$
\begin{aligned}
&9^\circ. && f^2-g^2+\omega f\dot f+\frac{1}{\omega}\dot\varphi=\frac{3}{\omega}\dot f+\ddot f,\quad 2fg+\omega f\dot g=\frac{3}{\omega}\dot g+\ddot g,\\
& && \omega f\dot h=\ddot h+\frac{1}{\omega}\dot h,\quad 2f+\omega\dot f=0.\\
&10^\circ. && f^2-g^2+\omega f\dot f+\frac{1}{\omega}\dot\varphi=\frac{3}{\omega}\dot f+\ddot f,\quad 2fg+\omega f\dot g=\frac{3}{\omega}\dot g+\ddot g,\\
& && 1+\omega f\dot h=\ddot h+\frac{1}{\omega}\dot h,\quad 2f+\omega\dot f=0.\\
&11^\circ. && f\dot f-g(f+\omega\dot f)+\dot\varphi=2(1+\omega)f+\omega(2\dot f+\omega\ddot f),\\
& && f\dot g-g(g+\omega\dot g)-\omega\dot\varphi=2(1+\omega)g+\omega(2\dot g+\omega\ddot g),\\
& && f\dot h-g(h+\omega\dot h)=2(1+\omega)h+\omega(2\dot h+\omega\ddot h),\quad \dot f-(g+\omega\dot g)=0.\\
&12^\circ. && -\tfrac12(f^2+g^2)+(f-\alpha g)\dot f-\varphi+\dot\varphi=2(-f-\dot f+\alpha\dot g+(\alpha^2+1)\ddot f),\\
& && -(f-\alpha g)\dot g+\alpha\dot\varphi=2[g+\dot g+\alpha\dot f-(\alpha^2+1)\ddot g],\\
& && -fh+2(f-\alpha g)\dot h=h-4\dot h+4(\alpha^2+1)\ddot h,\quad \dot f-\alpha\dot g=0.\\
&13^\circ. && -f^2-g^2+\omega f\dot f-\omega^2h\dot f-2\varphi+\omega\dot\varphi=\omega(-f+\omega\ddot f)+\omega^3(2\dot f+\omega\ddot f),\\
& && f\dot g-\omega^2h\dot g=\omega(-g+\omega\ddot g)+\omega^3(2\dot g+\omega\ddot g),\\
& && f(-h+\omega\dot h)-\omega^2h\dot h-\omega^2\dot\varphi=h-\omega\dot h+\omega^2\ddot h+\omega^3(2\dot h+\omega\ddot h),\\
& && \dot f-\omega\dot h=0.\qquad\qquad (2.3)\\
&14^\circ. && f^2-g^2+2\omega f\dot f+2\dot\varphi=4(2\dot f+\omega\ddot f),\\
& && g+\omega\dot g-2f(g+\omega\dot g)=-(2\dot g+\omega\ddot g),\\
& && -\left(\tfrac12 h+\omega\dot h\right)+2\omega f\dot h=4(\dot h+\omega\ddot h),\quad f+\omega\dot f=0.\\
&15^\circ. && f^2-g^2+2\omega f\dot f+2\dot\varphi=4(2\dot f+\omega\ddot f),\\
& && g+\omega\dot g-2f(g+\omega\dot g)=-4(2\dot g+\omega\ddot g),\\
& && -\left(\tfrac12 h+\omega\dot h\right)+2\omega f\dot h+h=4(\dot h+\omega\ddot h),\quad f+\omega\dot f+\tfrac12=0.\\
&16^\circ. && -\tfrac12(f+\omega\dot f)+h\dot f=\ddot f,\quad -\tfrac12(g+\omega\dot g)+h\dot g=\ddot g,\\
& && -\tfrac12(h+\omega\dot h)+h\dot h+\dot\varphi=\ddot h,\quad \dot h=0.\\
&17^\circ. && -\tfrac12(f+\omega\dot f)+h\dot f+\alpha g=\ddot f,\quad -\tfrac12(g+\omega\dot g)+h\dot g+g=\ddot g,\\
& && -\tfrac12(h+\omega\dot h)+h\dot h+\dot\varphi=\ddot h,\quad \dot h+1=0.\\
&18^\circ. && \tfrac12(f-\omega\dot f)+h\dot f=\ddot f,\quad \tfrac12(g-\omega\dot g)+h\dot g=\ddot g,\\
& && -\tfrac12(h+\omega\dot h)+h\dot h=\ddot h,\quad \dot h+2=0.\\
&19^\circ. && -\tfrac12(f+\omega\dot f)+h\dot f=\ddot f,\quad \tfrac12(g-\omega\dot g)+h\dot g=\ddot g,\\
& && -\tfrac12(h+\omega\dot h)+h\dot h+\dot\varphi=\ddot h,\quad \dot h+1=0.
\end{aligned}
$$

Equations 1°–19° in (2.3) correspond to that of ansatze in table 1; dot means differentiation with respect to corresponding ω.

Equations 1°–10° (2.3) can easily be solved and their general solutions are as follows:

$$1^\circ.\quad f=c_1,\quad g=c_2,\quad h=c_3,\quad \varphi=\varphi(\omega)$$

(here and in what follows, c with a subscript denotes an arbitrary constant; $\varphi=\varphi(\omega)$ means that φ is an arbitrary differentiable function of ω).

$$
\begin{aligned}
2^\circ.\quad & f=\begin{cases}\dfrac{c_1}{c_3}e^{c_3\omega}+c_2, & c_3\neq 0,\\ c_1\omega+c_2, & c_3=0,\end{cases}\\
& g=\begin{cases}\dfrac{c_4}{c_3}e^{c_3\omega}+c_5, & c_3\neq 0,\\ c_4\omega+c_5, & c_3=0,\end{cases}\\
& h=c_3,\quad \varphi=c_6.\\
3^\circ.\quad & f=\begin{cases}c_1+c_2e^{c_3\omega}+\dfrac{c_4}{c_3^2}\left(\omega-\dfrac{1}{c_3}\right)e^{c_3\omega}-\dfrac{c_5}{c_3}\omega, & c_3\neq 0,\\ c_1+c_2\omega+\dfrac{1}{6}c_4\omega^3+\dfrac{1}{2}c_5\omega^2, & c_3=0,\end{cases}\\
& g=\begin{cases}\dfrac{c_4}{c_3}e^{c_3\omega}+c_5, & c_3\neq 0,\\ c_4\omega+c_5, & c_3=0,\end{cases}\\
& h=c_3,\quad \varphi=c_6.\\
4^\circ.\quad & f=\begin{cases}\dfrac{c_1}{c_3}\exp\left(-\dfrac{1}{2}c_3\omega\right)+c_2, & c_3\neq 0,\\ c_1+c_2\omega, & c_3=0,\end{cases}\\
& g=\begin{cases}\dfrac{c_4}{c_3}\exp\left(-\dfrac{1}{2}c_3\omega\right)+c_5, & c_3\neq 0,\\ c_4\omega+c_5, & c_3=0,\end{cases}\\
& h=c_3,\quad \varphi=\frac{1}{2}\omega+c_6.\\
5^\circ.\quad & f=\begin{cases}-\dfrac{1}{c_3}\omega+\dfrac{c_1}{c_3^2}e^{c_3\omega}+c_2, & c_3\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}\omega^2+c_1\omega+c_2, & c_3=0,\end{cases}\\
& g=\begin{cases}\dfrac{c_4}{c_3}e^{c_3\omega}+c_5, & c_3\neq 0,\\ c_4\omega+c_5, & c_3=0,\end{cases}\\
& h=c_3,\quad \varphi=c_6.\\
6^\circ.\quad & f=\begin{cases}c_1+c_2\exp\left(-\dfrac{1}{2}c_3\omega\right)+\dfrac{c_5}{2c_3}\omega- \\ \qquad -\dfrac{c_4}{c_3^2}\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{1}{c_3}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{2}c_3\omega\right), & c_3\neq 0,\\ \dfrac{1}{4}\left(c_1+c_2\omega+\dfrac{1}{2}c_5\omega^2+\dfrac{1}{6}c_4\omega^3\right), & c_3=0,\end{cases}\\
& g=\begin{cases}\dfrac{c_4}{c_3}\exp\left(-\dfrac{1}{2}c_3\omega\right)+c_5, & c_3\neq 0,\\ c_4\omega+c_5, & c_3=0,\end{cases}\\
& h=c_3,\quad \varphi=\frac{1}{2}\omega+c_6.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$7^\circ.\quad f = \begin{cases} c_1 \exp\left(\dfrac{c\omega}{2(\alpha^2+1)}\right) + c_2 - \dfrac{\alpha\omega}{2(\alpha^2+1)c}, & c \neq 0, \\[2mm] \dfrac{\alpha\omega^2}{2[2(\alpha^2+1)]^2} + c_1\omega + c_2, & c = 0, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} c_3 \exp\left(\dfrac{c\omega}{2(\alpha^2+1)}\right) + c_4, & c \neq 0, \\[2mm] c_3\omega + c_4, & c = 0, \end{cases}$$

$$h = \alpha f - c, \quad \varphi = \frac{\omega}{2(\alpha^2+1)} + c_5.$$

$$8^\circ.\quad f = \begin{cases} \dfrac{\alpha\omega^2}{2c^2(\alpha^2+1)} + \dfrac{\omega}{c}\left(\dfrac{\alpha}{c^2} - c_4\right) + \left[\dfrac{c_3}{c}\left(\omega - \dfrac{\alpha^2+1}{c}\right) + c_1\right] \times & \\[2mm] \quad \times \exp\left(\dfrac{c\omega}{\alpha^2+1}\right) + c_2, & c \neq 0, \\[2mm] (\alpha^2+1)^{-1}\left(\dfrac{\alpha\omega^4}{24(\alpha^2+1)^2} + \dfrac{c_3}{6}\omega^3 + \dfrac{c_4}{2}\omega^2 + c_1\omega + c_2\right), & c = 0, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} \dfrac{-\alpha\omega}{c(\alpha^2+1)} + c_3 \exp\left(\dfrac{c\omega}{\alpha^2+1}\right) + c_4, & c \neq 0, \\[2mm] \dfrac{\alpha}{2(\alpha^2+1)}\omega^2 + c_3\omega + c_4, & c = 0, \end{cases}$$

$$h = \alpha g - c, \quad \varphi = \frac{\omega}{\alpha^2+1} + c_6.$$

$$9^\circ.\quad f = \frac{c}{\omega^2}, \quad = c_1\omega^c + \frac{c_2}{\omega^2}, \quad h = c_3\omega^c + c_4,$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{c_1^2}{2(c+1)}\omega^{2(c+1)} + \dfrac{2c_1c_2}{c}\omega^c - \dfrac{c^2+c_2^2}{2\omega^2} + c_5, & c \neq -1,\ 0, \\[2mm] c_1^2 \ln\omega - \dfrac{2c_1c_2}{\omega} - \dfrac{c_2^2+1}{2\omega^2} + c_5, & c = -1, \\[2mm] \dfrac{1}{2}c_1^2\omega^2 + 2c_1c_2\ln\omega - \dfrac{c_2^2}{2\omega^2} + c_5, & c = 0. \end{cases}$$

10°. f, g and φ are the same as in the previous case 9°,

$$h = \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{2(2-c)} + c_3\omega^c + c_4, & c \neq 2,\ 0, \\[2mm] \dfrac{\omega}{4} - c_3\ln\omega + c_4, & c = 0, \\[2mm] \dfrac{\omega^2}{2}\ln\omega - \dfrac{\omega^2}{4} + c_3\omega^2 + c_4, & c = 2. \end{cases}$$

For 11° (2.3) we did not find solutions. A particular solution of 12° (2.3) is

$$12^\circ.\quad f = c, \quad g = 0, \quad \varphi = 2c - \frac{c^2}{2},$$

$$h = \begin{cases} c_1e^{\lambda_1\omega} + c_2e^{\lambda_2\omega}, & \dfrac{c^2}{4} > \alpha^2(1+c), \\[2mm] e^{\lambda\omega}(c_1 + c_2\omega), & \dfrac{c^2}{4} = \alpha^2(1+c), \\[2mm] e^{\lambda\omega}(c_1\cos\beta\omega + c_2\sin\beta\omega), & \dfrac{c^2}{4} < \alpha^2(1+c), \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+(c/2)\pm\sqrt{(c^2/4)-\alpha^2(1+c)}}{2(1+\alpha^2)}, \quad \lambda = \frac{1+(c/2)}{2(1+\alpha^2)},$$
$$\beta = \frac{\sqrt{\alpha^2(1+c)-(c^2/4)}}{2(1+\alpha^2)}.$$

A particular solution of 13° (2.3) is

$$13^\circ. \quad f = c_1, \quad g = c_2, \quad h = 0, \quad \varphi = -\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2). \tag{2.4}$$

Consider system 14° (2.3). The last equation of 14° (2.3) immediately gives

$$f = c/\omega \tag{2.5}$$

(as before, c is an arbitrary constant). Substituting (2.5) into the remaining equations of 14° (2.3) we get

$$4\frac{d^2}{d\omega^2}(\omega g) + \left(1 - \frac{2c}{\omega}\right)\frac{d}{d\omega}(\omega g) = 0 \tag{2.6}$$

and

$$4\omega\ddot{h} + (\omega + 4 - 2c)\dot{h} + \frac{1}{2}h = 0. \tag{2.7}$$

Equation (2.6) can be easily integrated and the result is

$$g(\omega) = \frac{c_1}{\omega}\int^\omega x^{c/2}e^{-x/4}dx + \frac{c_2}{\omega}. \tag{2.8}$$

In particular, when $c = 0$, the general solution of equation (2.6) takes the form

$$g(\omega) = \frac{c_1}{\omega}e^{-\omega/4} + \frac{c_2}{\omega}. \tag{2.9}$$

Equation (2.7) is in itself an equation for a degenerate hypergeometric function and it can be rewritten in standard Whittaker form

$$4x^2\ddot{w} - (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)w = 0, \tag{2.10}$$

where $w = w(k, m, x)$; k, m are parameters, by the substitution

$$h(\omega) = \omega^{(c-2)/4}e^{-\omega/8}w\left(\frac{c}{4}, -\frac{c}{4}, \frac{\omega}{4}\right). \tag{2.11}$$

When $c = 0$, the substitution

$$h(\omega) = e^{-\tau}\tilde{Z}_0(\tau), \quad \tau = \frac{\omega}{8} \tag{2.12}$$

reduces (2.7) to the modified Bessel equation of null order, that is

$$\tau\ddot{\tilde{Z}}_0 + \dot{\tilde{Z}}_0 - \tau\tilde{Z}_0 = 0. \tag{2.13}$$

Summarizing results (2.5)–(2.12) we can write down the general solution of 14° (2.3) as follows

$$14^\circ.\quad f=\frac{c}{\omega},\quad g=\frac{c_1}{\omega}\int^{\omega}x^{c/2}e^{-x/4}dx+\frac{c_2}{\omega},$$
$$h=\omega^{(c-2)/4}e^{-\omega/8}w\left(\frac{c}{4},-\frac{c}{4},\frac{\omega}{4}\right),\quad \varphi=-\frac{c^2}{2\omega}+\frac{1}{2}\int^{\omega}g^2(y)dy+c_3. \tag{2.4}$$

(We continue to numerate solutions of reduced NS equations 1°–19° (2.3) as n° (2.4), where $n^\circ=1^\circ$–19° indicates the corresponding ansatz of table 1.) When $c=0$ we get from 14° (2.4) the following particular solution of 14° (2.3)

$$14^{\circ\circ}.\quad f=0,\quad g=\frac{c_1}{\omega}e^{-\omega/4}+\frac{c_2}{\omega},\quad h=e^{-\omega/8}\tilde{Z}_0(\omega/8),$$
$$\varphi=-\frac{c_2^2}{2\omega}+\frac{c_1^2}{2}\int^{\omega}\frac{e^{-y/2}}{y^2}dy+c_1c_2\int^{\omega}\frac{e^{-y/2}}{y^2}dy+c_3, \tag{2.4}$$

where $\tilde{Z}_0$ is modified Bessel function satisfying equation (2.12).

Consider system 15° (2.3). The last equation in it gives

$$f=\frac{c}{\omega}-\frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

The rest equations of 15° (2.3) take the form

$$2\frac{d^2}{d\omega^2}(\omega g)+\left(1-\frac{c}{\omega}\right)\frac{d}{d\omega}(\omega g)=0, \tag{2.14}$$

$$2\dot{\varphi}=\left(\frac{c}{\omega}\right)^2+g^2-\frac{1}{4}, \tag{2.15}$$

$$\omega\ddot{h}+\left(\frac{1}{2}\omega+1-\frac{c}{2}\right)\dot{h}-\frac{1}{8}h=0. \tag{2.16}$$

Equations (2.14), (2.15) can be easily integrated and the result is as follows

$$g=\frac{c_1}{\omega}\int^{\omega}x^{c/2}e^{-x/2}dx+\frac{c_2}{\omega}, \tag{2.17}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\int^{\omega}g^2(y)dy-\frac{c^2}{2\omega}-\frac{1}{8}\omega. \tag{2.18}$$

Equation (2.16) is reduced to the Whittaker equation (2.10) by the substitution

$$h(\omega)=\omega^{(c-2)/4}e^{-\omega/4}w\left(\frac{c-3}{4},-\frac{c}{4},\frac{\omega}{2}\right). \tag{2.19}$$

Note, when $c=3$, function $w\left(0,-\frac{3}{4},\frac{\omega}{2}\right)$ is reduced to the modified Bessel function $\tilde{Z}_{-3/4}(\omega/4)$. The general relation is (Bateman and Erdelyi [2])

$$w(0,m,x)=\sqrt{x}\tilde{Z}_m(x/2). \tag{2.20}$$

So, we can write down the general solution of reduced ns equations 15° (2.3) in the form

$$15^\circ.\quad f=\frac{c}{\omega}-\frac{1}{2},\quad g=\frac{c_1}{\omega}\int^{\omega}x^{c/2}e^{-x/2}dx+\frac{c_2}{\omega},$$
$$h=\omega^{(c-2)/4}e^{-\omega/4}w\left(\frac{c-3}{4},-\frac{c}{4},\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi=\frac{1}{2}\int^{\omega}g^2(y)dy-\frac{c^2}{2\omega}-\frac{1}{8}\omega, \tag{2.4}$$

where w satisfies the Whittaker equation (2.10).

Consider system 16° (2.3). The two last equations of it give rise to

$$h=c,\quad \varphi=\frac{c\omega}{2}+c_1. \tag{2.21}$$

Taking into account (2.21) we can rewrite the rest equations of system 16° (2.3) as follows

$$\ddot f+\left(\frac{1}{2}\omega-c\right)\dot f+\frac{1}{2}f=0, \tag{2.22}$$

$$\ddot g+\left(\frac{1}{2}\omega-c\right)\dot g+\frac{1}{2}g=0. \tag{2.23}$$

By substituting

$$f(\omega)=F(\tau),\quad \tau=\frac{1}{2}\omega-c \tag{2.24}$$

into (2.22), we obtain the following equation:

$$\frac{d^2F}{d\tau^2}+2\tau\frac{dF}{d\tau}+2F=0. \tag{2.25}$$

The general solution of (2.25) is

$$F(\tau)=e^{-\tau^2}\left(c_2+c_3\int^{\tau}e^{y^2}dy\right). \tag{2.26}$$

Summarizing results (2.21)–(2.26) we write down the general solution of equations 16° (2.3):

$$16^\circ.\quad f=\exp\left[-\left(\frac{\omega}{2}-c\right)^2\right]\left(c_2+c_3\int^{(\omega/2)-c}e^{y^2}dy\right),$$
$$g=\exp\left[-\left(\frac{\omega}{2}-c\right)^2\right]\left(c_4+c_5\int^{(\omega/2)-c}e^{y^2}dy\right), \tag{2.4}$$
$$h=c,\quad \varphi=\frac{c\omega}{2}+c_1.$$

In the same way we find solutions of reduced equations 17°–19° (2.3). The solutions are as follows

$$
\begin{aligned}
17^\circ.\quad & \alpha = 1,\\
& f = g = \left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^2\right] \times\\
& \qquad \times w\left[-\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^2\right],\\
& h = \omega + c, \quad \varphi = \frac{3}{2}c\omega - \omega^2 + c_1,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

where $w(\cdot,\cdot,\cdot)$ is solution of the Whittaker equation (2.10). The above solution 17° (2.4) is a particular solution of equations 17° (2.3) with $\alpha = 1$. When α is an arbitrary constant, the general solution of 17° (2.3) has the form

$$
\begin{aligned}
17^{\circ\circ}.\quad & g = \left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^2\right] \times\\
& \qquad \times w\left[-\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^2\right],\\
& h = \omega + c, \quad \varphi = \frac{3}{2}c\omega - \omega^2 + c_1
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

and f satisfies the ODE

$$
\ddot{f} + \left(\frac{3}{2}\omega - c\right)\dot{f} + \frac{1}{2}f - \alpha g = 0.
$$

The general solution of 18° (2.3) is

$$
\begin{aligned}
18^\circ.\quad & f = g = \left(\frac{5}{2}\omega - c\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}\omega - c\right)^2\right] \times\\
& \qquad \times w\left[-\frac{27}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}\omega - c\right)^2\right],\\
& h = -2\omega + c, \quad \varphi = \frac{5}{2}c\omega - 3\omega^2 + c_1.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

The general solution of 19° (2.3) is

$$
\begin{aligned}
19^\circ.\quad & f = g = \left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^2\right] \times\\
& \qquad \times w\left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\omega - c\right)^2\right],\\
& h = -\omega + c, \quad \varphi = \frac{3}{2}c\omega - \omega^2 + c_1.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

In 17°–19° (2.4) $w(\cdot,\cdot,\cdot)$ is an arbitrary solution of the Whittaker equation (2.10).

Remark 1. The solutions of reduced ns equations 1°–19° (2.3) given in 1°–19° (2.4) should be considered together with the corresponding ansatze of table 1; then one gets solutions of the NS equations (1.1).

The solutions of the ns equations (1.1) obtained above can be used in a basic way to construct multiparameter families of solutions. A procedure for generating new solutions from a known one is based on the well known fact of Lie theory according to which symmetry transformations transform any solution of a given differential equation into another solution. For example, if transformations

$$x_\mu \to x'_\mu = f_\mu(x,\theta), \quad (\mu = \overline{0, n-1}\,),$$
$$u(x) \to u'(x') = R(x,\theta)u(x) + B(x,\theta),$$

where the θ are parameters, $u = \text{column}\,(u^1, u^2, \dots, u^k)$, $R(x,\theta)$ is a non-singular matrix $k \times k$, $R(x,0) = I$, f_μ, B (column) are some smooth functions, $f_\mu(x,0) = x_\mu$, $B(x,0) = 0$ leave considered PDEs invariant, then the function

$$u_{\rm II}(x) = R^{-1}(x,\theta)[u_{\rm I}(x') - B(x,\theta)] \tag{2.27}$$

will be a new solution of the equation provided $u_{\rm I}(x)$ is any given solution. Formulae like (2.27) we call formulae of group multiplication of solutions (GMS) (Fushchych et al [9]). So, to construct the formulae of GMS for the NS equations one has to find, first of all, the final transformations generated by symmetry operators (1.2), (1.3) and then, according to (2.27), construct the formulae. The results of this is given in the table 2.

Note that in 1–11 $p'(x') = p(x)$ and therefore $p_{\rm II} = p_{\rm I}(x')$. In this table δ_0, δ_a, α_a, θ_a, β, ε, κ are arbitrary constants, $\alpha = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}$; $\boldsymbol{f}$ and g are arbitrary differentiable functions of t. The formulae of GMS stated above allow to construct new solutions $\boldsymbol{u}_{\rm II}(x)$ of the NS equations (1.1) starting from a known one $\boldsymbol{u}_{\rm I}(x)$.

Table 2. Final symmetry transformations and the corresponding formulae of GMS for the NS equations (1.1)

N	Operator	Final transformations			Formulas of GMS
			$x \to x'$	$u(x) \to u'(x')$	
1	∂_t	$t' = t + \delta_0$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{u}'(x') = \boldsymbol{u}(x)$	$\boldsymbol{u}_{\rm II}(x) = \boldsymbol{u}_{\rm I}(x')$
2–4	∂_a	$t' = t$	$x'_a = x_a + \delta_a$	$\boldsymbol{u}'(x') = \boldsymbol{u}(x)$	$\boldsymbol{u}_{\rm II}(x) = \boldsymbol{u}_{\rm I}(x')$
5–7	J_{ab}	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cos\alpha + {}$ $+ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\alpha})\frac{\sin\alpha}{\alpha} + {}$ $+ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}$	$u'^a(x') = \Big(\delta_{ab}\cos\alpha + {}$ $+\varepsilon_{abc}\alpha_c\frac{\sin\alpha}{\alpha} + {}$ $+ \alpha_a\alpha_b\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\Big)u^b(x)$	$u^a_{\rm II}(x) = \Big(\delta_{ab}\cos\alpha + {}$ $+\varepsilon_{abc}\alpha_c\frac{\sin\alpha}{\alpha} + {}$ $+ \alpha_a\alpha_b\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\Big)u^b_{\rm I}(x')$
8–10	G_a	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}t$	$\boldsymbol{u}'(x') = \boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{u}_{\rm II}(x) = \boldsymbol{u}_{\rm I}(x') - \boldsymbol{\theta}$
11	D	$t' = e^{2\beta}t$	$\boldsymbol{x}' = e^\beta\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{u}'(x') = e^{-\beta}\boldsymbol{u}(x)$ $p'(x') = e^{-2\beta}p(x)$	$\boldsymbol{u}_{\rm II}(x) = e^\beta\boldsymbol{u}_{\rm I}(x')$ $p_{\rm II}(x) = e^{2\beta}p_{\rm I}(x)$
12	Q	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{f}(t)$	$\boldsymbol{u}'(x') = \boldsymbol{u}(x) + \varepsilon\dot{\boldsymbol{f}}(t)$ $p'(x') = p(x) - \varepsilon\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{f}}(t)$	$\boldsymbol{u}_{\rm II}(x) = \boldsymbol{u}_{\rm I}(x') - \varepsilon\dot{\boldsymbol{f}}(t)$ $p'_{\rm II}(x) = p_{\rm I}(x') + \varepsilon\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{f}}(t)$
13	R	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{u}'(x') = \boldsymbol{u}(x)$ $p'(x') = p(x) + \kappa g(t)$	$\boldsymbol{u}_{\rm II}(x) = \boldsymbol{u}_{\rm I}(x')$ $p'_{\rm II}(x) = p_{\rm I}(x') - \kappa g(t)$

Remark 2. It will be noted that operator Q given in (1.3) generates transformations (N 12 in table 2) which can be considered as an invariant transition to a frame of reference which is moved arbitrarily: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{ref}} = \varepsilon \boldsymbol{f}(t)$.

Let us give some examples of the application of formulae of GMS. Having applied formulae 5–7 of table 2 to solution 16° (2.4) we get a new multiparameter solution for the NS equations (1.1)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{e^{-\tau^2}\left[\boldsymbol{a}\left(\alpha_1 + \alpha_2\int^{\tau} e^{s^2}ds\right) + \boldsymbol{b}\left(\alpha_3 + \alpha_4\int^{\tau} e^{s^2}ds\right)\right] + \boldsymbol{c}\right\},\\ \tau = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}}{2\sqrt{t}} - 1, \quad p(x) = \frac{1}{t}\left(\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}}{2\sqrt{t}} + \alpha_5\right),\end{gathered} \tag{2.28}$$

where $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ are arbitrary constants, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ are arbitrary orthonormal constant vectors

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 = 1, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0. \tag{2.29}$$

Further application of the formulae of GMS N 8–10 to (2.28) gives rise to the following solution of the NS equations

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{e^{-y^2}\left[\boldsymbol{a}\left(\alpha_1 + \alpha_2\int^{y} e^{s^2}ds\right) + \boldsymbol{b}\left(\alpha_3 + \alpha_4\int^{y} e^{s^2}ds\right)\right] + \boldsymbol{c}\right\} - \boldsymbol{\theta},\\ y = \frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}t)}{2\sqrt{t}} - 1, \quad p(x) = \frac{1}{t}\left(\frac{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}t)}{2\sqrt{t}} + \alpha_5\right),\end{gathered} \tag{2.30}$$

where the $\boldsymbol{\theta}$ are arbitrary constants, the rest are the same as in (2.28).

The procedure of generating solutions by means of symmetry transformations can be continued until one gets an ungenerative family of solutions, that is the family which is invariant (up to transformation of constant parameters) with respect to the total GMS procedure. Without doubt, the reader can carry out this procedure by analogy with the above examples, for any solution 1°–19° (2.4) of the NS equations.

3. Examples of non-Lie ansätze for the NS field

Ansätze collected in table 1, of course, do not exhaust all possible ansätze which reduce the NS equations. Here we consider several examples of ansätze which do not have the form (1.4). More complete consideration of this question will be given in our next paper.

Because all ansätze obtained within the framework of the Lie approach have form (1.4), it is natural to call other ansätze non-Lie. Our first example of this is the well known ansatz

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi, \tag{3.1}$$

where $\varphi = \varphi(x)$ is a scalar function. If satisfies the Hamilton–Jacobi and Laplace equations

$$\varphi_t + (\nabla\varphi)^2 + p = 0, \quad \Delta\varphi = 0 \tag{3.2}$$

then the function $\boldsymbol{u}$ (3.1) automatically satisfies the NS equations (1.1). It is an example of non-local component reduction.

Ansatz

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\varphi(t, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}), \tag{3.3}$$

where $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ are constant vectors satisfying (2.29), reduces (1.1) to the two-dimensional heat equation

$$\varphi_t - \Delta_2\varphi = 0, \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega_2^2}, \quad \omega_1 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}, \quad \omega_2 = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}, \tag{3.4}$$

Ansatz

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}\varphi(x), \quad p = p(x) \tag{3.5}$$

reduces equations (1.1) to the system of pde for two scalar functions φ and p

$$\boldsymbol{x}(\varphi_t + \Delta\varphi) + \nabla(\varphi + p) = 0, \quad \varphi + (\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\varphi = 0. \tag{3.6}$$

New ansätze and solutions of the NS equations (1.1) obtained within the framework of conditional symmetry will be given in our next paper. The concept and the term conditional invariance was firstly introduced by Fushchych [5] (see also Fushchych and Nikitin [7]). Further development and applications of this concept are contained in Fushchych et at [9], Fushchych and Serov [8], Levi and Winternitz [10].

Let us make some concluding remarks. It will be noted that the question of what spin is carried by the NS field has a rather strange answer (Fushchych [4]): the NS field carries not only spin 1 but all possible integer spins $s = 0, 1, 2, \ldots$. It is due to the fact that the space of solutions of the ns equations can be decomposed into an infinite direct sum of subspaces invariant under operators $S_{ab} = u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}$ from algebra $AO(3)$, and these subspaces are not invariant under operators G_a from (1.2) because of the unboundedness of operators ∂_{u^a}.

In hydrodynamics the linearized NS equations are sometimes used

$$\boldsymbol{u}_t - \Delta\boldsymbol{u} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{3.7}$$

The maximal invariance algebra of (3.7) is the seven-dimensional Lie algebra with basis elements

$$\begin{gathered}\partial_t, \quad \partial_a, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a, \quad I = u^a\partial_{u^a}, \\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}.\end{gathered} \tag{3.8}$$

It should be pointed out that (3.7) are not Galilei invariant and therefore they fail in adequately describing real hydrodynamics processes.

Acknowledgments. We would like to express our gratitude to the referees for their useful suggestions.

1. Barannik L.F., Fushchych W.I., *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, 280–290.
2. Bateman H., Erdelyi A., Higher transcendental functions, Vol. 1, New York, McGraw-Hill, 1953.
3. Birkhoff G., Hydrodynamics — A study in logic, fact and similitude, Princeton, Princeton University Press, 1950.
4. Fushchych W.I., in Theoretic-Algebraic Methods in Problems of Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1983, 4–23.

5. Fushchych W.I., How to extend the symmetry of differential equations, in Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1987, 4–16.
6. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Continuous subgroups of the generalized Galilei group, Preprint N 85.19, Kiev, Institute of Mathematics, 1985.
7. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Reidel, 1987.
8. Fushchych W.I., Serov N., in Symmetry and Solutions of Equations of Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1989, 95–102.
9. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989 (Engl. transl. Dordrecht, Kluwer, in press).
10. Levi D., Winternitz P., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1989, **22**, 2915–2924.
11. Lloyd S.P., *Acta Mechanica*, 1981, **38**, 85–98.
12. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978 (Engl. transl. New York, Academic, 1982).
13. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1989, **16**, 1597–1624.

On the connection between solutions of Dirac and Maxwell equations, dual Poincaré invariance and superalgebras of invariance and solutions of nonlinear Dirac equations

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN, S.V. SPICHAK

The connection between solutions of massless Dirac and Maxwell equations is established. It is shown that the massless Dirac equation is invariant under three different representation of the Poincaré algebra corresponding to spins $\frac{1}{2}$ and 1 and 0, and under three superalgebras. All generators of these symmetry algebras and superalgebras are local (differential operators of first order). A system of two Dirac equations with masses m and $-m$ has analogous symmetry properties. Invariant nonlinear generalizations of this system are described. We construct the complete set of $P(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1 for all representations of Poincaré algebra discused. These ansätze are used for reduction and finding exact solutions of some nonlinear Dirac equations.

1. Introduction

It is well known that the Dirac equation describes a particle with spin-$\frac{1}{2}$, or a fermionic field, because it is invariant with respect to the representation $D(\frac{1}{2},0)\oplus D(0,\frac{1}{2})$ of the Poincaré algebra $AP(1,3)$. In this paper we will show that the massless Dirac equation as well as the system of two coupled Dirac equations with masses m and $-m$ are invariant not only with respect to the spin-$\frac{1}{2}$ representation of $AP(1,3)$ but also under integer spin representations of $AP(1,3)$. This means that Dirac equations describe not only fermionic fields but also bosonic ones.

In section 2 we obtain formulae of connection between solutions of the massless Dirac equation and Maxwell equations for a vacuum, so that one can construct solutions of the Dirac equation knowing solutions of the Maxwell equations and vice versa. Further, we show that the massless Dirac equation is invariant under three different representations of the Poincaré algebra $AP(1,3)$ and under three superalgebras. All generators of these symmetries are differential operators of first order and belong to the maximal in the sense of Lie invariance algebra of the equation. We shall call invariance of an equation, with respect to different representations of the Poincaré algebra, dual Poincaré invariance.

In section 3 we study dual Poincaré invariance of the Dirac equation with non-zero mass and prove that the system of two coupled Dirac equations with masses m and $-m$ possesses this symmetry. It is worthwhile to note that the same Dirac system was studied by Fushchych [1, 2] and by Petroni et al [12, 13]. Fushchych [1, 2] had shown that the most symmetric (including discrete symmetries) spinor representation of the Poincaré algebra is realized only on the system of two coupled Dirac equations and such a realization is impossible on a single Dirac equation with non-zero mass. We prove that the Dirac system under study is also invariant under two superalgebras. Nonlinear dual Poincaré invariant generalizations of the equations are considered.

J. Phys. A: Math. Gen., 1991, **24**, P. 1683–1698.

In section 4 we construct the complete set of the $P(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1 for all representations of $AP(1,3)$ discussed in the previous sections. These ansätze reduce corresponding Poincaré invariant equation to a system of ordinary differential equations (ODEs). Here we essentially used results on the subalgebraic classification of $AP(1,3)$ of Patera et al [11] and Grundland et al [7]. It will be noted that the $P(1,3)$-inequivalent ansätze of codimenions 1 and 3 for the spin-$\frac{1}{2}$ Dirac field are fully described in Fushchych and Zhdanov [5], Fushchych and Shtelen [4] and Fushchych et al [6]. Using ansätze constructed, we make reductions and find exact solutions of some nonlinear Dirac equations. An example solution of a linear Dirac equation is considered. This solution is obtained by making use of the vector representation of $AP(1,3)$ of the coupled Dirac equations. It has an unusual structure and can be obtained as the invariant solution of the non-Lie symmetry operator of second order. In conclusion we give operators which transform the fermionic ansätze into bosonic ones.

The massless Dirac equation and Maxwell equations

Consider the massless Dirac equation

$$i\gamma\partial\psi \equiv i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0, \tag{2.1}$$

where $\psi = \psi(x)$ is a four-component complex function (column), $x = \{x^0 = t, \boldsymbol{x}\} \in R(1,3)$, $\mu = \overline{0,3}$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ and γ^μ are 4×4 Dirac matrices,

$$\begin{gathered}\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

There is a connection between solutions of (2.1) and the Maxwell equations for a vacuum [15]:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}} &\equiv \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0,\\ \dot{\boldsymbol{H}} &\equiv \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

where $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ and $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ are vectors of electric and magnetic field. To establish this connection let us decompose an arbitrary solution of (2.1) intoreal and imaginary parts using the notation of Ljolje [9]:

$$\psi = \psi_{\text{real}} + i\psi_{\text{imag}} = \begin{pmatrix} -D_1\\ D_3\\ -B_2\\ -G\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} D_2\\ -F\\ -B_1\\ B_3\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Theorem 1. *Let ψ defined by (2.4) be an arbitrary solution of the massless Dirac equation (2.1). Then the functions*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{D} + \nabla \int_{t_0}^{t} G(\tau, \boldsymbol{x}) d\tau + \nabla \tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{B} + \nabla \int_{t_0}^{t} F(\tau, \boldsymbol{x}) d\tau + \nabla \tilde{F}(t_0, \boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

where $\tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x})$ and $\tilde{F}(t_0, \boldsymbol{x})$ satisfy the Poisson equations

$$\Delta \tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial G(\tau, \boldsymbol{x})}{\partial \tau}\right|_{\tau = t_0}, \quad \Delta \tilde{F}(t_0, \boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial F(\tau, \boldsymbol{x})}{\partial \tau}\right|_{\tau = t_0}, \tag{2.6}$$

t_0 is an arbitrary constant, are solutions of the Maxwell equations (2.3).

Prof. First of all we note that after substitution of (2.4) into (2.1) and separation into real and imaginary parts we get Maxwell equations with currents

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{D}} - \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\nabla G, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = -\dot{G}, \\ &\dot{\boldsymbol{B}} + \operatorname{rot} \boldsymbol{D} = -\nabla F, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = -\dot{F}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

where $\boldsymbol{D} = (D_1, D_2, D_3)$, $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ and the dot means differentiation with respect to t. So, the Dirac equation (2.1) and the system (2.7) are fully equivalent. Therefore, taking into account (2.7) and the well known fact that every component of the ψ-function (2.4) obeying (2.1) satisfies the wave equation $\Box \psi = 0$ (in particular, $\Delta G(\tau, \boldsymbol{x}) = \partial^2 G(\tau, \boldsymbol{x}) / \partial \tau^2$) we find after substitution of (2.5) into (2.3)

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{E}} - \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dot{\boldsymbol{D}} + \nabla G - \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{D} + \int_{t_0}^{t} \Delta G(\tau, \boldsymbol{x}) d\tau + \Delta \tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}) = \\ &\qquad = \operatorname{div} \boldsymbol{D} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 G(\tau, \boldsymbol{x})}{\partial \tau^2} d\tau + \Delta \tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}) = \\ &\qquad = \operatorname{div} \boldsymbol{D} + \dot{G} - \left.\frac{\partial G(\tau, \boldsymbol{x})}{d\tau}\right|_{\tau = t_0} + \Delta \tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}) = 0. \end{aligned}$$

In the last equality we have used (2.6). In the same spirit one can prove the validity of the theorem for the second pair of Maxwell equations (2.3). Thus, the theorem is proved. ■

The inverse statement also holds true.

Theorem 2. *Let there be given a solution* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ *of the Maxwell equations (2.3) and two solutions F and G of the scalar wave equation*

$$\Box F = \Box G = 0. \tag{2.8}$$

Then the ψ-function (2.4) witn components F, G and

$$\begin{aligned} D_a &= E_a - \partial_a \left(\int_{t_0}^{t} G(\tau, \boldsymbol{x}) d\tau + \tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}) \right), \\ B_a &= H_a - \partial_a \left(\int_{t_0}^{t} F(\tau, \boldsymbol{x}) d\tau + \tilde{F}(t_0, \boldsymbol{x}) \right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

where $a = 1, 2, 3$, $\tilde{G}(t_0, x)$ and $\tilde{F}(t_0, x)$ are determined from (2.6), is a solution of the massless Dirac equation (2.1).

Proof. Let us use the equivalence between the Dirac equation (2.1) and the system (2.7). Having substituted (2.9) into (2.7) and taking into account (2.3), (2.8) and (2.6), we get

$$\dot{\boldsymbol{D}} - \operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \nabla G = \dot{\boldsymbol{E}} - \nabla G + \nabla G - \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} + \dot{G} = \operatorname{div}\boldsymbol{E} + \int_{t_0}^{t} \Delta G(\tau, \boldsymbol{x}) d\tau - \Delta\tilde{G}(t_0, \boldsymbol{x}) + \dot{G} = 0.$$

Analogously one has to act to prove the theorem for the rest of the equations of system (2.7).

Theorem 2 has an important corollary: choosing $F = G = 0$ we get from (2.9) $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$, and in this case formula (2.4) takes the particularly simple form

$$\psi = \begin{pmatrix} -E_1 + iE_2 \\ E_3 \\ -H_2 - iH_1 \\ iH_3 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

So, if $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ satisfy the Maxwell equations (2.3), then ψ given by (2.10) automatically satisfies the Dirac equation (2.1), and one can consider relation (2.10) as a representation of the spinor field ψ by an electromagnetic field $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$. It is appropriate to note that if $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ are transformed under Lorentz boost as an electromagnetic Maxwell field, then the ψ-function (2.10) is not transformed like a Dirac spinor (this point will be discussed in detail below). It will be also noted that, according to theorem 1, the procedure of obtaining solutions of the vacuum Maxwell equations (2.3) from those of the massless Dirac equation (2.1) and the associated Poisson equations (2.6) is unique to within a gauge transformation, whereas the inverse procedure, Maxwell $\to$ Dirac, involves ambiguities due to the arbitrary choice of additional scalar fields F and G satisfying (2.8). When we construct solutions of Maxwell equations via solutions of the massless Dirac equation using formulae (2.5), then we have arbitrariness in determining $\tilde{F}$ and $\tilde{G}$. But this arbitrariness can be considered as gauge transformetions $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \nabla f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \nabla g(\boldsymbol{x})$ (f and g are arbitrary scalar functions satisfying the Laplace equation $\Delta f = \Delta g = 0$), which leave invariant the Maxwell equations (2.3). An analogous situation is when considering the inverse procedure (formulae (2.9), Dirac equation in the form (2.7)).

Consider an example. Let us take solutions of the Maxwell equations (2.3) and wave equations (2.8) in the form

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{H} = -2\boldsymbol{\alpha} t, \quad F = G = 3t^2 + \boldsymbol{x}^2, \quad (\boldsymbol{\alpha} = \text{const}).$$

Then, by means of (2.9) and (2.4) one easily finds the following solution of the Dirac equation (2.1):

$$\psi = \begin{pmatrix} -[(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{x})_1 - 2tx_1] + i[(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{x})_2 - 2tx_2] \\ [(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{x})_3 - 2tx_3] - i(3t^2 + \boldsymbol{x}^2) \\ 2t(\alpha_2 + x_2) + 2it(\alpha_1 + x_1) \\ -(3t^2 + \boldsymbol{x}^2) - 2it(\alpha_3 + x_3) \end{pmatrix}.$$

In terms of $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, F, G from (2.4)

$$\bar{\psi}\psi = \boldsymbol{D}^2 - \boldsymbol{B}^2 + F^2 - G^2 \tag{2.11}$$

and in the case of solution ψ considered above we have

$$\bar{\psi}\psi = \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})^2 - 4t^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + 2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}).$$

Let us make up a four-component ψ-function as

$$\psi = i\gamma\partial \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

where $\varphi_0, \ldots, \varphi_3$ are arbitrary solutions of the wave equation, that is $\Box\varphi_\mu = 0$. Since $(i\gamma\partial)^2 = \Box$, then the ψ-function (2.12) automatically satisfies the Dirac equation (2.1) for any set of φ_μ, $\Box\varphi_\mu = 0$. So, (2.12) and (2.4), (2.5) give the following chain of solutions: scalar wave equation $\to$ massless Dirac equation $\to$ vacuum Maxwell equations.

It will be noted that Shtelen [14] and Fushchych et al [6] described a simple prescription for obtaining solutions of linear partial differential equations with nontrivial symmetry. It consists of the following. Let there be given a solution u of the wave equation ($\Box u = 0$). Then the functions

$$u_1 = \mathcal{K}u, \qquad u_2 = \mathcal{K}u_1, \quad \ldots \tag{2.13}$$

where $\mathcal{K} = 2\boldsymbol{cxx}\partial - \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{c}\partial + 2\boldsymbol{cx}$ (generator of conformal transformations) and c_μ are arbitrary constant, will be also solutions $u = 1$ we get from (2.13)

$$u_1 = \boldsymbol{cx}, \quad u_2 = (\boldsymbol{cx})^2 - \frac{1}{4}\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{x}^2, \quad u_3 = (cx)^3 - \frac{1}{2}(cx)c^2x^2, \quad \ldots \tag{2.14}$$

For further analysis it is convenient to consider the Dirac equation (2.1) together with its conjugation and write it uniformly as

$$i\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0, \tag{2.15}$$

where $\Psi = \Psi(x) = \text{column}\,(\Psi\tilde{\Psi})$, $\tilde{\Psi} = \gamma_0\Psi^*$, Γ^μ are 8×8 matrices,

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0_4 \\ 0_4 & -(\gamma^\mu)^T \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

γ^μ are Dirac matrices (2.2), 0_4 is a 4×4 zero matrix.

Symmetry properties of (2.15) were studied first by Dirac who showed that the equation is conformally invariant. Later, Pauli and Touschhek found that this equation also admits an eight-parameter group, G_8, of component transformations. And, finally, Ibragimov [8] proved that a 23-parameter group, $G_{23} = C(1,3)\otimes G_8$, is the maximal in the sence of the Lie invariance group of the equation. Relativistic invariance of (2.15) is usually understood as invariance with respect to the spinor representation

$$D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus D\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right) \tag{2.17}$$

of the Poincaré group $P(1,3)$ (it means that Ψ is transformed under the Lorentz boost as a spinor). However, the invariance of (2.15) under the Pauli–Touschek eight-parameter group allows two additional representations of $AP(1,3)$, which are realized on the set of solutions of (2.15), namely

$$D(1,0)\oplus D(0,1)\oplus D(0,0)\oplus D(0,0) \tag{2.18}$$

and

$$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{2.19}$$

The explicit form of basis elements of $AP(1,3)$ for representations (2.17)–(2.19) is

$$AP^{(k)}(1,3)=\left\langle P_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu},\ J^{(k)}_{\mu\nu}=x_\mu P_\nu-x_\nu P_\mu+S^{(k)}_{\mu\nu}\right\rangle, \tag{2.20}$$

where $k=1,2,3$ corresponds to (2.17)–(2.19), respectively;

$$x_\mu=g_{\mu\nu}x^\nu,\quad g_{\mu\nu}=\{1,-1,-1,-1\}\delta_{\mu\nu}$$

and matrices $S^{(k)}_{\mu\nu}$ are

$$\begin{gathered}S^{(1)}_{\mu\nu}=-\frac{1}{4}[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu],\quad S^{(2)}_{\mu\nu}=S^{(1)}_{\mu\nu}+Q_{\mu\nu},\quad S^{(3)}_{01}=S^{(2)}_{01},\quad S^{(3)}_{02}=S^{(2)}_{02},\\ S^{(3)}_{03}=S^{(2)}_{03}-2Q_{03},\quad S^{(3)}_{12}=S^{(2)}_{12},\quad S^{(3)}_{13}=S^{(2)}_{13}-2Q_{13},\quad S^{(3)}_{23}=S^{(2)}_{23}-2Q_{23}.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Here Γ_μ are the same as in (2.16); $Q_{\mu\nu}$ are six basis elements of the Pauli–Touschek algebra, they are 8×8 matrices of the form

$$\begin{gathered}Q_{01}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0_4 & -i\gamma^0\gamma^2\\ -i\gamma^0\gamma^2 & 0_4\end{pmatrix},\quad Q_{02}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0_4 & -\gamma^0\gamma^2\\ -\gamma^0\gamma^2 & 0_4\end{pmatrix},\\ Q_{03}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\gamma_5 & 0\\ 0_4 & \gamma_5\end{pmatrix},\quad Q_{12}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}I_4 & 0_4\\ 0_4 & -I_4\end{pmatrix},\\ Q_{13}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0_4 & -\gamma^1\gamma^3\\ -\gamma^1\gamma^3 & 0_4\end{pmatrix},\quad Q_{23}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0_4 & \gamma^1\gamma^3\\ -\gamma^1\gamma^3 & 0_4\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{2.22}$$

where

$$\gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}0_2 & I_2\\ I_2 & 0_2\end{pmatrix}$$

I_2, I_4 are 2×2 and 4×4 unit matrices. It will be noted that the action of operators (2.20) is defined in the space of the eight-component function introduced in (2.15).

Invariance of (2.15) under $AP^{(2)}(1,3)$ results in the possibility of representing this equation in the form (2.7), and invariance of (2.15) under $AP^{(3)}(1,3)$ allows us to rewrite it as [9]

$$\begin{gathered}\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial^\rho B^\sigma-\partial^\sigma B^\rho)=0,\\ \partial_\nu A^\nu=\partial_\nu B^\nu=0,\end{gathered} \tag{2.23}$$

where

$$\psi = \psi_{\text{real}} + i\psi_{\text{imag}} = \begin{pmatrix} -A^2 \\ -B^0 \\ -B^1 \\ B^3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -A^1 \\ A^3 \\ B^2 \\ -A^0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Now consider the following three sets of symmetry operators of (2.15):

$$SA^{(k)} = \langle P_\mu, J^{(k)}_{\mu\nu}, \Gamma_4, I; Q_{\mu\nu} \rangle, \tag{2.25}$$

where P_μ, $J^{(k)}_{\mu\nu}$ and $Q_{\mu\nu}$ are defined in (2.20) and (2.22), Γ_μ are given in (2.16), $\Gamma_4 = \Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3$. There sets of operators form Lie algebra as well as superalgebras. Operators P_μ, $J^{(k)}_{\mu\nu}$, Γ_μ, I are even and $Q_{\mu\nu}$ are odd in corresponding superalgebras. To prove this statement we write down commutation and anticommutation relations for these operators.

Operators P_μ and $J^{(k)}_{\mu\nu}$ satisfy standard commutation relations of the Poincaré algebra $AP(1,3)$

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\sigma, J_{\mu\nu}] = g_{\sigma\mu}P_\nu - g_{\sigma\nu}P_\mu, \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

Γ_4 and I commute with all elements of $SA^{(k)}$. Further, it is convenient to introduce the notation

$$R_a = Q_{0a}, \quad T_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}Q_{bc}, \quad N^{(k)}_a = J^{(k)}_{0a}, \quad M^{(k)}_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J^{(k)}_{bc}. \tag{2.27}$$

It is easy to check that

$$\begin{aligned} &\{R_a, R_b\} \equiv R_aR_b + R_bR_a = \frac{1}{2}\sigma_{ab}, \\ &\{T_a, T_b\} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}I, \quad \{R_aT_b\} = \delta_{ab}\Gamma_4. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Operators R_a, T_a from $SA^{(1)}$ commute with all even operators of $SA^{(1)}$. For $SA^{(2)}$ we have

$$\begin{aligned} &[P_\mu, R_a] = [P_\mu, T_a] = 0, \quad [N^{(2)}_a, R_b] = [R_a, R_b] = \varepsilon_{abc}T_c, \\ &[N^{(2)}_a, T_b] = [R_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}R_c, \quad [M^{(2)}_a, R_b] = [T_a, R_c] = -\varepsilon_{abc}R_c, \\ &[M^{(2)}_a, T_b] = [T_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}T_c. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Subalgebra $SA^{(3)}$ is isomorphis to $SA^{(2)}$. The isomorphism is achived by means of the transformations

$$R_3 \to R'_3 = -R_3, \quad T_1 \to T'_1 = -T_1, \quad T_2 \to T'_2 = -T_2. \tag{2.30}$$

So, the structure of superalgebras (2.25) is fully described. The superalgebras (2.25) do not belong to the semi-simple family, but the quotient by their radical is simply $SO(1,3)$.

3. Dirac equations with non-zero mass possessing dual Poincaré invariance

The Dirac equation for a massive particle (field)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{3.1}$$

where γ^μ are given in (2.2) and m is an arbitrary real constant (mass of the particle), is invariant under a 14-parameter group only [8], which includes the Poincaré group, and identical, phase and two charge-type transformations. As always, we are factoring out an infinite-demensional ideal, present for any linear equation, and corresponding to the linear superposition principle. It is to be emphasized that we are considering group action on the field of real numbers, and therefore identical $\psi' = e^\alpha \psi$ (α is an arbitrary real constant) and phase transformations $\psi' = e^{i\alpha}\psi$ should be distinguished.

The above-mentioned four-parameter group of component transformations is not sufficient to construct a non-spinor representation of $AP(1,3)$, as was done in the case of the massless field. The situation can be improved by considering the system of two Dirac equations

$$(i\gamma\partial - m)\Psi_- = 0, \quad (i\gamma\partial + m)\Psi_+ = 0. \tag{3.2}$$

The full information on Lie symmetry of this system gives the following statement.

Theorem 3. *The maximal in the sense of the Lie invariance algebra of system (3.2) is a 26-dimensional Lie algebra $A_{26} = AP^{(1)}(1,3) \oplus A_{16}$, with basis elements having the form*

$$\begin{aligned} &AP^{(1)}(1,3) = \left\langle P_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ \hat{J}^{(k)}_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + \hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} \right\rangle, \\ &A_{16} = \left\langle \text{matrices } 16\times 16 \text{ of the form } \begin{pmatrix} \Lambda & \Sigma \\ \tilde{\Sigma} & \tilde{\Lambda} \end{pmatrix} \right\rangle, \end{aligned} \tag{3.3}$$

where

$$\begin{aligned} &\hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\hat{\Gamma}_\mu, \hat{\Gamma}_\nu], \quad \hat{\Gamma}_\mu = \begin{pmatrix} \Gamma_\mu & 0_8 \\ 0_8 & -\Gamma_\mu \end{pmatrix}, \quad \langle \Lambda, \tilde{\Lambda}\rangle = \langle I, Q_{01}, Q_{02}, Q_{03}\rangle, \\ &\langle \Sigma, \tilde{\Sigma}\rangle = \langle Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}, \Gamma_4\rangle, \quad \Gamma_4 = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

(matrices 8×8 Γ_μ and $Q_{\mu\nu}$ are defined in (2.16)), and acting in the space of 16-component functions

$$\hat{\Psi} = \text{column } (\Psi_- \Psi_+) \equiv \text{column } (\Psi_-, \tilde{\Psi}_- = \gamma_0\Psi_-^*, \Psi_+, \tilde{\Psi}_+ = \gamma_0 \Psi_+^*). \tag{3.5}$$

Proof. First of all we write system (3.2) together with its conjugation as

$$(i\hat{\Gamma}^\mu \partial_\mu - m)\hat{\Psi} = 0, \tag{3.6}$$

where $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(x)$ is defined in (3.5). To prove the theorem is to find the general form of infinitesimal operator of invariance

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x), \tag{3.7}$$

where $\xi^\mu(x)$ are scalar functions and $\eta(x)$ is a 16×16 matrix. It can be done by means of the standard Lie algorithm (see [10]), but the simplest way is to use the invariance condition in the form

$$[L, Q] = \lambda(x)L, \tag{3.8}$$

where L is the operator of (3.6), $L \equiv i\hat{\Gamma}^\mu\partial_\mu - m$ and $\lambda(x)$ is some scalar smooth function. Starting from (3.8) one gets, after some simple but tedious calculations, the proof of the theorem. ■

Invariance of the system (3.6) with respect to the matrix algebra A_{16} (3.3) allows a vector representation of $AP(1,3)$, which can be realized on the set of solutions of this system. This representation is

$$\mathcal{L}(D(1,0) \oplus D(0,1)) \oplus 4D(0,0). \tag{3.9}$$

It is defined by the basis elements

$$AP^{(2)}(1,3) = \langle P_\mu, \hat{J}^{(2)}_{\mu\nu} = \hat{J}^{(1)}_{\mu\nu} + \hat{Q}_{\mu\nu}\rangle, \tag{3.10}$$

where P_μ and $\hat{J}^{(1)}_{\mu\nu}$ are given in (3.3),

$$\hat{Q}_{\mu\nu} = \begin{cases} \begin{pmatrix} Q_{\mu\nu} & 0_8 \\ 0_8 & Q_{\mu\nu} \end{pmatrix}, & \text{if } (\mu\nu) = \langle (0,1), (0,2), (1,2)\rangle, \\ \begin{pmatrix} 0_8 & Q_{\mu\nu} \\ Q_{\mu\nu} & 0_8 \end{pmatrix}, & \text{if } (\mu\nu) = \langle (0,3), (1,3), (2,3)\rangle \end{cases} \tag{3.11}$$

and matrices 8×8 $Q_{\mu\nu}$ are given in (2.22). Invariance of (3.6) with respect to $AP^{(2)}(1,3)$ (3.10) means that (3.6) describes not only spinor particles(fermionic fi-elds) but also a coupled system of vector and scalar particles (bosonic fields).

Now consider the following two sets of symmetry operators of equation (3.6):

$$SA^{(i)} = \langle P_\mu, \hat{J}^{(i)}_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_4, I; \hat{Q}_{\mu\nu}\rangle, \quad i = 1, 2, \tag{3.12}$$

where

$$\hat{\Gamma}_4 = \begin{pmatrix} 0_8 & \Gamma_4 \\ \Gamma_4 & 0_8 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

Γ_4 is givel in (3.4). These sets of operators form Lie algebras as well as superalgebras. Superalgebras (3.12) are isomorphic to those from (2.25). The isomorphism is achieved by means of the transformations

$$P_\mu \to P_\mu, \quad J^{(i)}_{\mu\nu} \to \hat{J}_{\mu\nu}, \quad \Gamma_4 \to \hat{\Gamma}_4, \quad I \to I, \quad Q_{\mu\nu} \to \hat{Q}_{\mu\nu}. \tag{3.14}$$

In conclusion of this section let us consider a nonlinear generalization of (3.6) possessing dual Poincaré invariance.

Theorem 4. *The equation*

$$[i\hat{\Gamma}^\mu\partial_\mu - F(\bar{\Psi}\hat{\Psi}, \Psi M\hat{\Psi})]\hat{\Psi} = 0, \tag{3.15}$$

where $\hat{\Psi}$ *is defined in (3.5),*

$$\bar{\Psi} = \mathrm{row}\,(\bar{\Psi}_- \Psi_-^T \bar{\Psi}_+ \Psi_+^T), \quad M = \begin{pmatrix} 0_8 & I_8 \\ I_8 & 0_8 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

and F is an arbitrary smooth function, is invariant under the two Poincaré algebras (3.3) and (3.10).

Proof. One can make sure that the operator $i\hat{\Gamma}^\mu\partial_\mu$ commutes with all generators of the considered Poincaré algebras. Further, the quantities $\bar{\Psi}\hat{\Psi}$, $\bar{\Psi}M\hat{\Psi}$ are absolute invariants of these Poincaré algebras. Thus, the theorem is proved.

It will be noted that

$$\bar{\Psi}\hat{\Psi} = 2(\bar{\Psi}_-\Psi_- + \bar{\Psi}_+\Psi_+), \quad \bar{\Psi}M\hat{\Psi} = 2(\bar{\Psi}_-\Psi_+ + \bar{\Psi}_+\Psi_-), \tag{3.17}$$

where Ψ_-, Ψ_+ are four-component functions, $\bar{\Psi}_\pm = (\Psi_\pm)^+\gamma_0$. ■

4. $P^{(i)}(1,3)$-inequivalent ansätze, reduction and solutions of nonlinear Dirac equations

The nonlinear equation (3.15), as we have shown, is dual Poincaré invariant and therefore it unites fermionic and bosonic fields. Such unification opens new ways to solve the general problem of unification forces and fields.

It is important to find exact solutions of (3.15). Of course, we shall be looking for classical solutions, but these solutions may be very useful as basic ones in the corresponding quantum theory. It is to be emphasized that the standard procedure of quantization, when the complete set of solutions of a given equation is quantized according to bosonic or fermionic rules, may be misleading because our equation may have bosonic and fermionic subsets of solutions simultaneously (the simplest example is the massless Dirac equation considered in section 2). Therefore, it is more preferable to quantize separate families of solutions, having established beforehand what representation of the Poincaré algebra is realized on them.

To fing exact solutions of equations of the (3.15) we construct $P^{(i)}(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1. These ansätze reduce a given equation to ODEs. The general form of such an anzatz is

$$\hat{\Psi}(x) = A(x)\phi(\omega), \tag{4.1}$$

where $A(x)$ is 16×16 matrix, ϕ is 16-component function (column) depending on the new variable ω. Matrix $A(x)$ and the new independent variable ω are determined from the equations [3]

$$\begin{aligned} &Q_kA(x) \equiv (\xi_k^\nu(x)\partial_\nu + \eta_k(x))A(x) = 0, \\ &\xi_k^\nu(x)\partial_\nu\omega(x) = 0, \quad k = 1,2,3, \end{aligned} \tag{4.2}$$

where $\langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle$ is a three-dimensional subalgebra of $AP(1,3)$. The full description of subalgebras of $AP(1,3)$ is given in [11] and [7]. Fushchych and Shtelen [4]) (see also [6]) have used one-dimensional subalgebras of $AP(1,3)$ to construct ansätze of codimension 3 for the Dirac spinor field. Ansätze of codimension 1 for the Dirac spinor field are fully described in [5]. We present the complete set of $P^{(i)}(1,3)$-inequivalent ansätze of codimension 1 for a 16-component field (3.5) in table 1. Basis elements of $AP^{(i)}(1,3)$ are given in (3.3) and (3.10).

In table 1 α and β are arbitrary non-zero constants,

$$G_k^{(i)} = \hat{j}_{0k}^{(i)} + j_{3k}^{(i)} = (x_0+x_3)P_k + x_k(P_0 - P_3) + \hat{S}_{0k}^{(i)} + \hat{S}_{3k}^{(i)}, \tag{4.3}$$

$\hat{S}_{\mu\nu}^{(1)}$ are given in (3.4) and $\hat{S}_{\mu\nu}^{(2)} = \hat{S}_{\mu\nu}^{(1)} + \hat{Q}_{\mu\nu}$ see (3.10) and (3.11).

Table 1. $P^{(i)}(1,3)$-inequivalent ansätze (4.1) of codimension 1 for field (3.5).

N	Algebra	$A(x)$	ω
1	$P_0,\ P_1,\ P_2$	1	x_3
2	$P_1,\ P_2,\ P_3$	1	x_0
3	$P_0-P_3,\ P_1,\ P_2$	1	x_0+x_3
4	$\hat J_{03}^{(i)},\ P_1,\ P_2$	$\exp[-\hat S_{03}^{(i)}\ln(x_0+x_3)]$	$x_0^2-x_3^2$
5	$\hat J_{03}^{(i)},\ P_1,\ P_0-P_3$	$\exp[-\hat S_{03}^{(i)}\ln(x_0+x_3)]$	x_2
6	$\hat J_{03}^{(i)}+\alpha P_2,\ P_0,\ P_3$	$\exp\left(-\frac{x_2}{\alpha}\hat S_{03}^{(i)}\right)$	x_1
7	$\hat J_{03}^{(i)}+\alpha P_2,\ P_0-P_3,\ P_1$	$\exp\left(-\frac{x_2}{\alpha}\hat S_{03}^{(i)}\right)$	$\alpha\ln(x_0+x_3)-x_2$
8	$\hat J_{12}^{(i)},\ P_0,\ P_3$	$\exp\left(\hat S_{12}^{(i)}\tan^{-1}\frac{x_1}{x_2}\right)$	$x_1^2+x_2^2$
9	$\hat J_{03}^{(i)}-\alpha P_0,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left(\frac{x_0}{\alpha}\hat S_{12}^{(i)}\right)$	x_3
10	$\hat J_{12}^{(i)}+\alpha P_3,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left(-\frac{x_3}{\alpha}\hat S_{12}^{(i)}\right)$	x_0
11	$\hat J_{12}^{(i)}-P_0+P_3,\ P_1,\ P_2$	$\exp\left(-\frac{1}{2}(x_3-x_0)\hat S_{12}^{(i)}\right)$	x_0+x_3
12	$G_1^{(i)},\ P_0-P_3,\ P_2$	$\exp\left[-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat S_{01}^{(i)}+S_{31}^{(i)})\right]$	x_0+x_3
13	$G_1^{(i)},\ P_0-P_3,\ P_1+\alpha P_2$	$\exp\left[\frac{x_2-\alpha x_1}{\alpha(x_0+x_3)}(\hat S_{01}^{(i)}+S_{31}^{(i)})\right]$	x_0+x_3
14	$G_1^{(i)}+P_2,\ P_1,\ P_0-P_3$	$\exp\left[-x_2(\hat S_{01}^{(i)}+S_{31}^{(i)})\right]$	x_0+x_3
15	$G_1^{(i)}-P_0,\ P_2,\ P_0-P_3$	$\exp\left[(x_0+x_3)(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})\right]$	$2x_1+(x_0+x_3)^2$
16	$G_1^{(i)}-P_0,\ P_0-P_3,$ $P_1+\alpha P_2$	$\exp\left[(x_0+x_3)(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})\right]$	$2(x_2-\alpha x_1)-\alpha(x_0+x_3)^2$
17	$\hat J_{03}^{(i)}+\alpha\hat J_{12}^{(i)},\ P_0,\ P_3$	$\exp\left[\frac{1}{\alpha}(\hat S_{03}^{(i)}+\alpha\hat S_{12}^{(i)})\tan^{-1}\frac{x_1}{x_2}\right]$	$x_1^2+x_2^2$
18	$\hat J_{03}^{(i)}+\alpha\hat J_{12}^{(i)},\ P_1,\ P_2$	$\exp\left[-(\hat S_{03}^{(i)}+\alpha\hat S_{12}^{(i)})\ln(x_0+x_3)\right]$	$x_0^2-x_3^2$
19	$G_1^{(i)},\ G_2^{(i)},\ P_0-P_3$	$\exp\Big\{-\frac{1}{x_0+x_3}[x_1(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})+$ $+x_2(\hat S_{02}^{(i)}+\hat S_{32}^{(i)})]\Big\}$	x_0+x_3
20	$G_1^{(i)}+P_2,\ G_2^{(i)}+\alpha P_1+$ $+\beta P_2,\ P_0-P_3$	$\exp\Big[\frac{\alpha x_2-x_1(x_0+x_3+\beta)}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha}(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})+$ $+\frac{x_1-x_2(x_0+x_3)}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha}(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{32}^{(i)})\Big]$	x_0+x_3
21	$G_1^{(i)},\ G_2^{(i)}+P_1+\beta P_2,$ P_0-P_3	$\exp\Big[-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})-$ $-\frac{x_2}{x_0+x_3+\beta}(\hat S_{02}^{(i)}+\hat S_{32}^{(i)})+$ $+\frac{x_2}{(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)}(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})\Big]$	x_0+x_3
22	$G_1^{(i)},\ G_2^{(i)}+P_2,\ P_0-P_3,$	$\exp\Big[-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})-$ $-\frac{x_2}{x_0+x_3+1}(\hat S_{02}^{(i)}+\hat S_{32}^{(i)})\Big]$	x_0+x_3
23	$G_1^{(i)},\ \hat J_{03}^{(i)},\ P_2$	$\exp\left[-\frac{x_1}{x_0+x_3}(\hat S_{01}^{(i)}+\hat S_{31}^{(i)})\right]\times$ $\times\exp[-\hat S_3^{(i)}\ln(x_0+x_3)]$	$x_0^2-x_1^2-x_3^2$

Table 1. (continued)

N	Algebra	$A(x)$	ω
24	$J_{03}^{(i)} + \alpha P_1 + \beta P_2$, $\hat{G}_1^{(i)}$, $P_0 - P_3$	$\exp\left[\frac{\alpha\ln(x_0+x_3)-x_1}{x_0+x_3}(\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)})\right] \times$ $\times \exp[-\hat{S}_{03}^{(i)}\ln(x_0+x_3)]$	$x_2 - \beta\ln(x_0+x_3)$
25	$\hat{J}_{12}^{(i)} - P_0 + P_3$, $G_1^{(i)}$, $G_2^{(i)}$	$\exp\left\{-\frac{1}{x_0+x_3}[x_1(\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)}) + \right.$ $\left. + x_2(\hat{S}_{02}^{(i)} + \hat{S}_{32}^{(i)})\right\} \times$ $\times \exp\left(\frac{x\cdot x}{2(x_0+x_3)}(\hat{S}_{12}^{(i)}\right)$	$x_0 + x_3$
26	$\hat{J}_{03}^{(i)} + \alpha\hat{J}_{12}^{(i)}$, $G_1^{(i)}$, $G_2^{(i)}$	$\exp\left\{-\frac{1}{x_0+x_3}[x_1(\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)}) + \right.$ $\left. + x_2(\hat{S}_{02}^{(i)} + \hat{S}_{32}^{(i)})]\right\} \times$ $\times \exp[-(\hat{S}_{03}^{(i)} + \alpha\hat{S}_{12}^{(i)})\ln(x_0+x_3)]$	$x \cdot x$

Let us substitute ansätze (4.1) from table 1 info (3.15). As a result we obtain the following reduced ODEs:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \hat{\Gamma}^2\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(2) \quad \hat{\Gamma}^0\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(3) \quad (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(4) \quad -(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\hat{S}_{03}^{(i)}\phi + [\omega(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3) + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)]\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(5) \quad -(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\hat{S}_{03}^{(i)}\phi + \hat{\Gamma}^2\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(6) \quad -\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}_2\hat{S}_{03}^{(i)}\hat{\Gamma}^1\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(7) \quad -\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}_2\hat{S}_{03}^{(i)}\phi + [\alpha(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)e^{\omega/\alpha} - \hat{\Gamma}^2]\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(8) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}}\hat{\Gamma}_1\hat{S}_{12}^{(i)}\phi + 2\sqrt{\omega}\hat{\Gamma}^2\phi + iR\phi = 0,\\
&(9) \quad \frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}_0\hat{S}_{12}^{(i)}\phi + \hat{\Gamma}^3\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(10) \quad -\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^3\hat{S}_{12}^{(i)}\phi + \hat{\Gamma}^0\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(11) \quad -\frac{1}{2}(\hat{\Gamma}_0 - \hat{\Gamma}^3)\hat{S}_{12}^{(i)}\phi + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(12) \quad -\frac{1}{\omega}\hat{\Gamma}_1(\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)})\phi + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(13) \quad \frac{1}{\alpha\omega}(\hat{\Gamma}_2 - \alpha\hat{\Gamma}^1)(\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)})\phi + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(14) \quad -\hat{\Gamma}^2(\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)})\phi + (\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(15) \quad (\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)})(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\phi + 2\hat{\Gamma}^1\dot{\phi} + iR\phi = 0,\\
&(16) \quad (\hat{S}_{01}^{(i)} + \hat{S}_{31}^{(i)})(\hat{\Gamma}^0 + \hat{\Gamma}^3)\phi + 2(\hat{\Gamma}^2 - \alpha\hat{\Gamma}^1)\dot{\phi} + iR\phi = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(17)\quad -\frac{1}{\alpha\sqrt{\omega}}\hat\Gamma_1(\hat S^{(i)}_{03}+\alpha\hat S^{(i)}_{12})\phi+2\sqrt{\omega}\hat\Gamma^2\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(18)\quad -(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)(\hat S^{(i)}_{03}+\alpha\hat S^{(i)}_{12})\phi+[\omega(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)+(\hat\Gamma^0-\hat\Gamma^3)]\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(19)\quad -\frac{1}{\omega}[\hat\Gamma_1(\hat S^{(i)}_{01}+\hat S^{(i)}_{31})+\hat\Gamma^2(\hat S^{(i)}_{02}+\hat S^{(i)}_{32})]\phi+(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(20)\quad [\omega(\omega+\beta)-\alpha]^{-1}\{[\alpha\hat\Gamma^2-(\omega+\beta)\hat\Gamma^1](S^{(i)}_{01}+S^{(i)}_{31})+\\
&\qquad\quad +(\hat\Gamma^1-\omega\hat\Gamma^2)(\hat S^{(i)}_{02}+\hat S^{(i)}_{32})\}\phi+(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(21)\quad [(-\hat\Gamma^1+(\omega+\beta)^{-1}\hat\Gamma^2)\omega^{-1}(\hat S^{(i)}_{01}+\hat S^{(i)}_{31})-\\
&\qquad\quad -(\hat\Gamma^2(\omega+\beta)^{-1}(\hat S^{(i)}_{02}+\hat S^{(i)}_{32})]\phi+(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\phi+iR\phi=0,\qquad\qquad (4.4)\\
&(22)\quad \left[-\frac{1}{\omega}\hat\Gamma^1(\hat S^{(i)}_{01}+\hat S^{(i)}_{31})-\frac{\hat\Gamma^2}{\omega+1}(\hat S^{(i)}_{02}+\hat S^{(i)}_{32})\right]\phi+(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(23)\quad -[(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\hat S^{(i)}_{03}+\hat\Gamma^1(\hat S^{(i)}_{31}+\hat S^{(i)}_{31})]\phi+[\omega(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)+\hat\Gamma^0-\hat\Gamma^3]\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(24)\quad -[(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\hat S^{(i)}_{03}+\hat\Gamma^1(\hat S^{(i)}_{31}+\hat S^{(i)}_{31})]\phi+[\hat\Gamma^2-\beta(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)]\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(25)\quad \left[2\hat S^{(i)}_{03}(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\omega^{-1}+\frac{1}{2}\hat S^{(i)}_{12}(\hat\Gamma^0-\hat\Gamma^3)\right]\phi+(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\dot\phi+iR\phi=0,\\
&(26)\quad -[(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\hat S^{(i)}_{03}+(\hat S^{(i)}_{01}+\hat S^{(i)}_{31})\hat\Gamma^1+(\hat S^{(i)}_{02}+\hat S^{(i)}_{32})\hat\Gamma^2]\phi+\\
&\qquad\quad +[(\hat\Gamma^0+\hat\Gamma^3)\omega+(\hat\Gamma^0-\hat\Gamma^3)]\dot\phi+iR\phi=0.
\end{aligned}
$$

Enumerations (1)–(26) in (4.4) correspond to those of the ansätze in table 1; the dot denotes differentiation with respect to the corresponding ω and $R=F(\bar\phi\phi,\bar\phi M\phi)$.

Below we obtain some solutions of reduces ODEs (4.4) in the case of a non-standard representation of $AP(1,3)$ realized by matrices $\hat S^{(2)}_{\mu\nu}=\hat S^{(1)}_{\mu\nu}+\hat Q_{\mu\nu}$ (see (3.4), (3.10) and (3.11)). The cases with $\hat S^{(1)}_{\mu\nu}$ are analogous to those considered in [3, 4, 5, 6].

First of all we note that the condition of compatability for equations (3), (12)–(14), (19) and (22) in (4.4) results in $R\equiv F(\bar\phi\phi,\bar\phi M\phi)=0$ and therefore such cases are rather trivial.

Consider equation (5) in (4.4), choosing

$$
R=\lambda\rho^{1/2k},\quad \rho\equiv\bar\phi\phi, \tag{4.5}
$$

where $\lambda, k\neq 0$ are arbitrary real constants. From equation (5) we find as a corollary (or condition of compatibility)

$$
\frac{d^2\rho}{d\omega^2}=4\lambda\rho^{1/2k}\left(\frac{2\lambda k}{1+2k}\rho^{1+1/2k}+c_0\right),\quad k\neq-\frac{1}{2}, \tag{4.6}
$$

c_0 is an arbitrary real constant. A particular solution of (4.6) is

$$
\rho(\omega)=\left(c-\frac{2\lambda}{1+2k}\omega\right)^{-2k}, \tag{4.7}
$$

c is an arbitrary real constant. Let us go back to equation (5) in (4.4). Using (4.7) we obtain a linear ODE and its general solution has the form

$$\begin{aligned}\phi = \exp\left[-\frac{i(1-2k)}{2}\hat{\Gamma}^2 \ln\left(c - \frac{2\lambda\omega}{1+2k}\right)\right] \exp\left\{-\frac{1+2k}{4\lambda}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{S}_{03} \times\right. \\ \times\left[\hat{\Gamma}^2\left(\frac{[c-2\lambda\omega/(1+2k)]^{2k+2}}{2k+2} - \frac{[c-2\lambda\omega/(1+2k)]^{-2k}}{2k}\right)\times\right. \\ \left.\left. + i\left(\frac{[c-2\lambda\omega/(1+2k)]^{2k+2}}{2k+2} + \frac{1}{2k[c-2\lambda\omega/(1+2k)]^{2k}}\right)\right]\right\}\chi,\end{aligned} \tag{4.8}$$

where χ is an arbitrary 16-component constant column satisfying the conditions

$$\bar{\chi}\chi = 0, \quad \bar{\chi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\hat{Q}_{03}\hat{\Gamma}^2\chi = -i\bar{\chi}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3), \quad \bar{\chi}\hat{Q}_{03}\chi = \frac{2\lambda k}{1+2k}. \tag{4.9}$$

Let us write down the general solution of equation (5) in (4.4) in the case of the spinor representation ($i=1$). It can be found without difficulty and has the form

$$\phi = \exp\left\{\omega\hat{\Gamma}^2\left[\frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3) + i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\right]\right\}\chi, \tag{4.10}$$

where χ is an arbitrary 16-component column.

Consider equation (15) in (4.4). In this case, by analogy with (5) in (4.4) considered above, we find

$$\frac{d^2\rho}{d\omega^2} = \lambda\rho^{1/2k}\left(\frac{2\lambda k}{1+2k}\rho^{1+1/2k} + c_0\right), \quad k \neq -\frac{1}{2}$$

and then

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = \exp[i\hat{\Gamma}^1\beta(\omega)]\exp\left[\frac{1}{2}\hat{\Gamma}^1(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})(\Gamma^0+\Gamma^3)\times\right. \\ \left.\times\left(\int^\omega \cosh\beta(y)dy + i\hat{\Gamma}^1\int^\omega \sinh\beta(y)dy\right)\right]\chi,\end{aligned} \tag{4.11}$$

where

$$\bar{\chi}\chi = 0,$$
$$\bar{\chi}\hat{\Gamma}^1(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\chi = i\bar{\chi}(\hat{Q}_{01}+\hat{Q}_{31})(\hat{\Gamma}^0+\hat{\Gamma}^3)\chi = \frac{2\lambda k}{1+2k},$$
$$\beta(\omega) = -(1+2k)\ln\left(c - \frac{\lambda\omega}{1+2k}\right).$$

Analogously, in the case of equation (16) in (4.4) we have

$$\frac{d^2\rho}{d\omega^2} = \frac{\lambda}{1+\alpha^2}\rho^{1/2k}\left(\frac{2\lambda k}{1+2k}\rho^{1+1/2k} + c\right)$$

and

$$\phi(\omega) = \exp\left(\frac{i\beta(\omega)}{2(1+\alpha^2)}(\hat\Gamma^2 - \alpha\hat\Gamma^1)\right)\times$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2(1+\alpha^2)}(\hat Q_{01} + \hat Q_{31})(\hat\Gamma^0 + \hat\Gamma^3)\times\right. \tag{4.12}$$
$$\left.\left((\hat\Gamma^1 - \alpha\hat\Gamma^2)\int^\omega \cosh\frac{\beta(y)}{\sqrt{1+\alpha^2}}dy + i\sqrt{1+\alpha^2}\int^\omega \sinh\frac{\beta(y)}{\sqrt{1+\alpha^2}}dy\right)\right]\chi,$$

where

$$\beta(\omega) = -(1+2k)\ln\left(c - \frac{\lambda\omega}{(1+2k)\sqrt{1+\alpha^2}}\right),$$
$$\bar\chi\chi = 0,$$
$$\bar\chi(\hat Q_{03} + \hat Q_{31})(\hat\Gamma^0 + \hat\Gamma^3)(\hat\Gamma^1 - \alpha\hat\Gamma^2)\chi =$$
$$= i\sqrt{1+\alpha^2}\bar\chi(\hat Q_{01} + \hat Q_{31})(\hat\Gamma^0 + \hat\Gamma^3)\chi = \frac{2k\lambda(1+\alpha^2)}{1+2k}.$$

Now consider an example of obtaining an exact solution of the standard Dirac equation with non-zero mass

$$(i\gamma\partial - m)\Psi_- = 0 \tag{4.13}$$

using symmetry $AP^{(2)}(1,3)$ (3.10) of system (3.2) (or, to be more exact, of the equivalent system (3.6). Let us take a two-dimensional subalgebra $\langle \hat J^{(2)}_{23}, P_0 - P_1\rangle$ of $AP^{(2)}(1,3)$. The corresponding ansatz for (3.5) has the form

$$\hat\Psi(x) = \exp\left(\hat S^{(2)}_{23}\tan^{-1}\frac{x_2}{x_3}\right)\phi(\omega),$$
$$\omega = \{\omega_1,\omega_2\},\quad \omega_1 = x_0 + x_1,\quad \omega_2 = (x_2^2 + x_2^2)^{1/2}. \tag{4.14}$$

Taking into account the identities

$$\hat S^{(2)}_{23} = \hat S^{(1)}_{23} + \hat Q_{23},\quad [\hat S^{(1)}_{23}, Q_{23}] = 0$$

we find from (4.14) the ansatz for Ψ_-:

$$\Psi_-(x) = \frac12\left(1 + \frac{1}{\omega^2}(x_3 - \gamma_2\gamma_3x_2)\right)\varphi_-(\omega) -$$
$$-\frac{i}{2}\left(\gamma_2 + \frac{1}{\omega_2}(\gamma_3x_2 - \gamma_2x_3)\right)\gamma_1\varphi_+(\omega). \tag{4.15}$$

Further, it is convenient to introduce the notation

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\omega_2}\varphi_- + \frac{i}{2\omega_2}\gamma_2\gamma_1\varphi_+,\quad H(\omega) = \frac12(\varphi_- - i\gamma_2\gamma_1\varphi_+). \tag{4.16}$$

By means of (4.16) we rewrite (4.15) as

$$\psi_- = (x_3 - \gamma_2\gamma_3x_2)Z + H. \tag{4.17}$$

After substitution of (4.17) into (4.13) we get the following system of reduced equations

$$
\begin{aligned}
&2\gamma_3 Z + (\gamma_0+\gamma_1)\frac{\partial H}{\partial \omega_1} + \gamma_3\omega_2\frac{\partial Z}{\partial \omega_2} = -imH,\\
&(\gamma_0+\gamma_1)\omega_2^2\frac{\partial Z}{\partial \omega_1} + \gamma_3\omega_2\frac{\partial H}{\partial \omega_2} = -im\omega_2^2 Z.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

We shall look for solutions of this system in the form

$$
\begin{aligned}
&Z = \omega_2^{-2}A(\omega_2)\exp[i(\gamma_0+\gamma_1)f(\omega_1)],\\
&H = B(\omega_2)\exp[i(\gamma_0+\gamma_1)f(\omega_1)],
\end{aligned}
$$

where A and B are some 4×4 matrices and f is an arbitrary differentiable function. Now one can easy solve (4.18) and write down the solution of (4.13),

$$
\psi_-(x) = \left[\frac{1}{\omega_2}(\gamma_2 x_2+\gamma_3 x_3)J_1(im\omega_2)\right]\exp[i(\gamma_0+\gamma_1)f(\omega_1)]_x,
\tag{4.19}
$$

where J_1 and J_0 are Bessel functions and χ is a four-component constant.

It is noteworthy that ansatz (4.15) has, due to its construction, a vector rather than spinor nature and therefore solution (4.19) of the Dirac equation (4.13) cannot be obtained within the framework of local symmetry of (4.13). Indeed, ansatz (4.15) (and therefore solution (4.19)) is invariant with respect to operators P_0-P_3 and $J_{23}^2+\frac{1}{4}$, ($J_{23}=x_2P_3-x_3P_2-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3$), the latter being a non-Lie one (differentional oprator of second order).

In conclusion, let use note that there is a simple connection between $P^{(2)}(1,3)$-invariant ansätze and $P^{(1)}(1,3)$ invariant ones. Since

$$
\hat{S}^{(2)}_{\mu\nu} = \hat{S}^{(1)}_{\mu\nu} + \hat{Q}_{\mu\nu}
$$

(see (3.4), (3.10) and (3.11)), we can write

$$
\hat{\Psi}^{(2)}(x) = \exp(f(x)Q)\Psi^{(1)}(x),
\tag{4.20}
$$

where $f(x)$ is some smooth function, Q is an element of six-dimensional Pauli–Touschek algebra (3.11). It is natural to consider relation (4.20) as a conection between bosonic and fermionic fields.

Acknowledgments. We would like to express our gratitude to the referees for their useful suggestions.

1. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321–330.
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, 133–137.
3. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Teoret. i Mat. Fizika*, 1987, **72**, 35–44.
5. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *Phys. Rep.*, 1989, **172**, 123–174.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear of equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989.
7. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–806.
8. Ibragimov N.H., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, **185**, 1225–1228.

9. Ljolje K., *Fortschr. Phys.*, 1988, **36**, 9–32.

10. Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, Berlin, Springer, 1986.

11. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, **16**, 1597–1624.

12. Petroni N.C., Guert P., Vigier G.P., Kiprianidis A., *Phys. Rev. D*, 1985, **31**, 3157–3164.

13. Petroni N.C., Guert P., Vigier G.P., Kiprianidis A., *Phys. Rev. D*, 1986, **33**, 1674–1680.

14. Sntelen W.M., in Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics, Ed. W.I. Fushchych, Kiev, Institute of Mathematics, 1987, 31–36.

15. Sntelen W.M., in Symmetry and Solutions of Equations of Mathematical Physics, Ed. W.I. Fushchych, Kiev, Institute of Mathematics, 1989, 110–113.

Редукция и решения нелинейного уравнения для векторного поля

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

Substitutions reducing the non-linear system of equations for the vector potential

$$p_\nu p_\nu A_\mu - p_\mu p_\nu A_\nu = A_\mu F(A_\nu A_\nu, x_\nu A_\nu)$$

to the ordinary differential equations are considered. The families of exact solutions of this system are constructed.

Рассматривается задача редукции многомерной нелинейной системы уравнений для вектора потенциала

$$p_\nu p_\nu A_\mu - p_\mu p_\nu A_\nu = A_\mu F(A_\nu A_\nu) \tag{1}$$

к двумерным и одномерным системам. Здесь $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $A_\nu = A_\nu(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, F — произвольная дважды дифференцируемая функция. Операторы p_μ, имеют вид $p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$, где $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В [1] найдены семейства точных решений уравнения (1)

$$A_\mu = a_\mu \varphi(bx), \quad A_\mu = b_\mu \varphi(ax), \tag{2}$$

где $a^2 = -b^2 = 1$, $ab = 0$ ($a^2 \equiv a_\mu a_\nu = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$).

Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$. В [2] построены анзацы и проведена редукция (1) по неэквивалентным трехмерным подалгебрам алгебры $AP(1,3)$. Однако в результате такой редукции получаются нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, неразрешимые в квадратурах и весьма сложные для исследования. Поэтому представляет интерес построение анзацев более общей структуры, чем (2), редуцирующих (1) к уравнениям для одной функции.

Будем рассматривать анзац

$$A_\mu = z_\mu \varphi(z, \omega), \tag{3}$$

где z и ω — некоторые функции от x, $z_\mu \equiv \frac{\partial z}{\partial x_\mu}$. Подставляя (3) в (1), получаем уравнение

$$\begin{aligned} &z_\mu\{\varphi_{22}\omega_\nu\omega_\nu + \varphi_2\Box\omega + \varphi_{12}z_\nu\omega_\nu\} - \omega_\mu\varphi_2\Box z - z_\nu\omega_{\mu\nu}\varphi_2 + \\ &\quad + z_{\mu\nu}\omega_\nu\varphi_2 - z_\nu z_\nu\omega_\mu\varphi_{12} - \omega_\mu\omega_\nu z_\nu\varphi_{22} = z_\mu\varphi F(z_\nu z_\nu \varphi^2), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\varphi_1 \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\varphi_2 \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$, ω и z должны быть независимы, $\varphi_2 \not\equiv 0$.

Доклады АН Украины, 1991, № 4, 23–25.

Выпишем условия на z и ω, при которых (4) приводится к паре уравнений в частных производных на функцию φ.

$$\begin{aligned}&\omega_\nu\omega_\nu = \tau_1(z,\omega), \quad \Box\omega = \tau_2(z,\omega), \quad z_\nu z_\nu = \tau_3(z,\omega),\\ &\Box z = \tau_4(z,\omega), \quad z_\nu\omega_\nu = \tau_5(z,\omega),\\ &z_{\mu\nu}\omega_\nu = \omega_\mu\tau_6(z,\omega) + z_\mu\tau_7(z,\omega), \quad z_\nu\omega_{\mu\nu} = \omega_\mu\tau_8(z,\omega) + z_\mu\tau_9(z,\omega).\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь τ_i — функции, удовлетворяющие условиям: $\frac{\partial}{\partial\omega}\tau_5 = \tau_6 + \tau_8$, $\frac{\partial}{\partial z}\tau_5 = \tau_7 + \tau_9$.

Отметим, что исследование совместности и решение систем типа (5) представляет собой сложную задачу. Проще задать, например, z и затем искать ω, удовлетворяющие системе (5). Рассмотрим в качестве примера анзац

$$A_\mu = x_\mu\varphi(x^2,\omega). \tag{6}$$

Если заменить $\varphi \to 2\varphi'$, то это анзац типа (3), $z = x^2$. Система (5) тогда имеет вид

$$\omega_\nu x_\nu = h(x^2,\omega), \quad \omega_\nu\omega_\nu = \tau_1(x^2,\omega), \omega_\nu x_\nu = \tau_2(x^2,\omega). \tag{7}$$

Анзацы вида (6) эквивалентны относительно замены $\omega \to \tilde\omega(x^2,\omega)$, что дает возможность привести (7) к виду

$$\omega_\nu\omega_\nu = \lambda \quad (\lambda = 0, \pm1), \quad \Box\omega = \tau(x^2,\omega), \quad \omega_\nu x_\nu = h(x^2,\omega). \tag{8}$$

Если $\tau = \tau(\omega)$, то можно воспользоваться результатами работы [3], откуда $\tau = \frac{\lambda N}{\omega}$, $N = 0, 1, 2, 3$. В этом случае легко показать, что $h(\omega) \equiv \omega$.

Таким образом, ω определяется из уравнений

$$\omega_\nu\omega_\nu = \lambda \quad (\lambda = 0, \pm1), \quad \Box\omega = \frac{\lambda N}{\omega} \quad (N = 0, 1, 2, 3), \quad \omega_\mu x_\mu = \omega. \tag{9}$$

Общее решение первых двух уравнений для $\lambda \neq 0$ приведено в [3]. Приведем несколько примеров решений системы (9).

$$\begin{aligned}&\omega = by + k(ay + dy), \quad \lambda = -1, \ N = 0;\\ &\omega = ((ay)^2 - (dy)^2)^{1/2}, \quad \lambda = 1, \ N = 1;\\ &\omega = ((by)^2 + (cy)^2)^{1/2}, \quad \lambda = -1, \ N = 1;\\ &\omega = ((ay)^2 - (by)^2 - (cy)^2 - (dy)^2)^{1/2}, \quad \lambda = 1, \ N = 3;\\ &\omega = ay + dy, \quad \lambda = 0, \ N = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $a^2 = -b^2 = -c^2 = -d^2 = 1$, $ab = bc = cd = ac = ad = bd = 0$, $y_\nu = x_\nu + l_\nu$; $k, l_\nu = \mathrm{const}$.

Анзац (6), где w удовлетворяет системе (9), редуцирует уравнение (1) к паре уравнений для φ

$$\lambda\varphi_{22} + 2\omega\varphi_{12} + \frac{N}{\omega}\varphi_2 = \varphi F(x^2\varphi^2), \tag{11}$$

$$\omega\varphi_{22} + 2x^2\varphi_{12} + 3\varphi_2 = 0. \tag{12}$$

Требование совместности редуцированной системы накладывает условия и на функцию F. Анзацы вида (3) оказываются применимыми только для некоторых классов нелинейных уравнений.

Общее решение (12) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{x^2}\Phi\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right), \tag{13}$$

тогда из (11) получаем $\left(\Phi = \Phi(\tau),\ \dot\Phi = \frac{d\Phi}{d\tau}\right)$

$$(\lambda - \tau^2)\ddot\Phi + \frac{\lambda N - 3\tau^2}{\tau}\dot\Phi = x^2\Phi F\left(\frac{\Phi}{x^2}\right). \tag{14}$$

Уравнение (14) будет уравнением только на Φ, если $F(\theta) = B\theta$, $B = \text{const}$. Тогда (14) приобретает вид

$$(\lambda - \tau^2)\ddot\Phi + \frac{1}{\tau}(\lambda N - 3\tau^2)\dot\Phi = B\Phi^3. \tag{15}$$

Если $\lambda = 0$, то заменой $\Phi = yR(y)$, $\tau = y^{1/2}$ (15) приводится к уравнению Эмдена–Фаулера

$$\ddot R + \frac{2}{y}\dot R + BR^3 = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение для векторного потенциала A_μ

$$p_\nu p_\nu A_\mu - \bar p_\mu p_\nu A_\nu = A_\mu F(A_\nu A_\nu, x_\nu A_\nu). \tag{16}$$

Анзац (6), (13) приводит (16) к следующему уравнению для Φ:

$$(\lambda - \tau^2)\ddot\Phi + \frac{\lambda N - 3\tau^2}{\tau}\dot\Phi = x^2\Phi F\left(\frac{\Phi^2}{x^2}, \Phi\right). \tag{17}$$

Если $F(\theta_1, \theta_2) = \theta_1\psi(\theta_2)$, то (17) имеет вид

$$(\lambda - \tau^2)\ddot\Phi + \frac{1}{\tau}(\lambda N - 3\tau^2)\dot\Phi = \Phi^3\psi(\Phi). \tag{18}$$

Если $\psi = \frac{B}{\theta_2^2}$, $B = \text{const}$, то (18) — линейное уравнение. Таким образом, при

$$F = \frac{BA_\mu A_\mu}{(x_\mu A_\mu)^2}, \tag{19}$$

посредством анзаца (6), (13) мы редуцируем нелинейное уравнение к линейному.

При $\lambda = 0$ получаем семейство точных решений системы (16), (19):

$$A_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}\left[C_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right)^{\beta_1} + C_2\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right)^{\beta_2}\right].$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, β_1, β_2 — корни уравнения $\beta(\beta+2) - B = 0$.

При $\lambda = 1$, $N = 0$

$$A_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}\frac{u\left(\frac{\omega}{\sqrt{x^2}}\right)}{\sqrt{\omega^2 - x^2}}.$$

Функция $u = u(\tau)$ определяется в зависимости от знака $B+1$ (она является решением уравнения $(\tau^2-1)\ddot{u} + \tau\dot{u} - (B+1)u = 0$ [4])

1) $B+1 = \alpha^2 > 0$,
$$u = \begin{cases} C_1 \exp(\alpha \operatorname{arch}|\tau|) + C_2 \exp(-\alpha \operatorname{arch}|\tau|), & |\tau| > 1, \\ C_2 \cos(\alpha \arccos \tau) + C_2 \cos(\alpha \arcsin \tau), & |\tau| < 1; \end{cases}$$

2) $B+1 = -\alpha^2 < 0$,
$$u = \begin{cases} C_1 \cos(\alpha \operatorname{arch}|\tau|) + C_2 \sin(\alpha \operatorname{arch}|\tau|), & |\tau| > 1, \\ C_1 \exp(\alpha \arccos \tau) + C_2 \exp(-\alpha \arccos \tau), & |\tau| < 1; \end{cases}$$

3) $B = -1$,
$$u = C_1 \ln\left|\tau + \sqrt{|\tau^2 - 1|}\right| + C_2;$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные, ω определяются из уравнений (9) для соответствующих λ, N.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Егорченко И.А., Симметрийные свойства нелинейных уравнений для комплексного векторного поля, Препринт № 89.48, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 39 с.
3. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт № 90.31, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 67 с.
4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.

Нелиевские анзацы и условная симметрия нелинейного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

Предложен новый подход к построению анзацев, редуцирующих многомерное нелинейное уравнение Шредингера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом, кроме известных решений, получаемых с помощью лиевской симметрии, найдены решения, порождаемые операторами условной инвариантности уравнения Шредингера.

Введение и постановка задачи. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$L = 2iu_t + \Delta u - uF(|u|) = 0. \tag{1}$$

Здесь u — комплекснозначная функция, $u = u(t, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $|u| = \sqrt{uu^*}$, звездочка обозначает комплексное сопряжение, F — произвольная функция;

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_a \equiv \frac{\partial u}{\partial x_a}, \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_a}.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование,

$$x_a x_a \equiv x_a x^a = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Галилея с базисными операторами

$$\begin{gathered}\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \\ G_a = t\partial_a + ix_a(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad a, b = 1, \dots, n, \quad M = i(u\partial_u - u\partial_{u^*})\end{gathered} \tag{2}$$

для произвольной функции F.

В [1–3] построены точные решения уравнения (1) методом редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При этом использована лиевская симметрия уравнения (1), т.е. инвариантность (1) относительно алгебры (2).

Далее будет предложен способ редукции уравнения (1), не использующий в явном виде его симметрию, к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Этот способ позволяет построить такие решения уравнения (1), которые не могут быть получены, если использовать только лиевскую симметрию. В дальнейшем, для краткости изложения, будем подробно рассматривать построение тех решений, которые могут быть получены с использованием лиевской симметрии.

Для редукции уравнения (1) используем следующую подстановку:

$$u = \exp\{if(t, \vec{x}\,)\}\varphi(\omega), \tag{3}$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 12, 1620–1628.

где f, ω — некоторые неизвестные действительные функции от t и $\vec{x}$. Выражение (3) будет анзацем для (1), если эта подстановка сведет уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции, зависящей только от новой переменной ω.

Из этого следуют условия на функции f и ω:

$$\begin{gathered} 2f_t + f_a f_a = R(\omega), \quad \Delta f = Q(\omega), \\ f_a\omega_a + \omega_t = S(\omega), \quad \Delta\omega = V(\omega), \quad \omega_a\omega_a = T(\omega), \end{gathered} \tag{4}$$

где R, Q, S, V, T — произвольные достаточно гладкие функции, зависящие только от переменной ω.

Таким образом, задача о редукции уравнения (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям сводится к построению в явном виде функций f и ω, удовлетворяющих системе нелинейных уравнений (4). Если f и ω являются решениями системы (4), то уравнение (1) посредством анзаца (3) редуцируется к уравнению

$$2iS(\omega)\varphi' - R(\omega)\varphi + iQ(\omega)\varphi + \varphi' V(\omega) + \varphi'' T(\omega) = \varphi F(|\varphi|). \tag{5}$$

Сначала кратко изложим основные результаты, полученные в работе.

1. Новые анзацы для уравнения Шредингера. Для $n = 2$, $n = 3$ найдены общие решения системы (4) с точностью до эквивалентности относительно подстановок вида (3).

При $n = 2$ найден следующий анзац вида (3), который не может быть получен из операторов симметрии уравнения (1):

$$\omega = t, \quad f = \frac{1}{2}\frac{x_1^2(t+B_1) + 2B_3x_1x_2 + x_2^2(t+B_2)}{(t+B_1)(t+B_2) - B_3^2}, \tag{6}$$

где B_1, B_2, B_3 — произвольные постоянные.

При $B_3 = 0$ анзац (3), (6) сводится к известному, для которого

$$f = \frac{x_1^2}{t+B_2} + \frac{x_2^2}{t+B_1}.$$

При $n = 3$ получены следующие анзацы, порождаемые операторами условной инвариантности: 1) $\omega = t$, f имеет вид (6); 2) $\omega = t$,

$$\begin{gathered} f = \frac{1}{2}\{-(x_a b_a)^2 + x_1^2\tau_2\tau_3 + x_2^2\tau_1\tau_2 + x_3^2\tau_1\tau_3 + 2x_1x_2\tau_3 b_3 + 2x_1x_3\tau_2 b_2 + \\ + 2x_2x_3\tau_1 b_1\}\{\tau_1\tau_2\tau_3 - b_1^2\tau_1 - b_2^2\tau_2 - b_3^2\tau_3 + 2b_1b_2b_3\}^{-1}, \end{gathered} \tag{7}$$

$\tau_k \equiv t + a_k$, a_k, b_k — постоянные.

2. Условная симметрия и решения уравнения (1). Понятие “Условная симметрия (инвариантность) дифференциального уравнения” введено в [4, 5]. Дальнейшее развитие и применение этого понятия привело к существенному расширению возможностей теоретико-алгебраического метода исследования уравнений. С использованием этого подхода в работах [4–9] построены широкие классы точных решений многих нелинейных уравнений математической физики.

В настоящей работе мы искали в явном виде решения системы (4) и соответствующие им анзацы (3). Среди найденных таким образом анзацев есть и нелиевские, для которых соответствующие им операторы не входят в алгебру (2).

Операторы условной инвариантности, соответствующие анзацу (3), $\omega = t$ для произвольного n, описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение Шредингера (1), к которому дописаны дополнительные условия*

$$L_a = u_a - if_a u = 0, \tag{8}$$

ивариантно относительно операторов

$$Q_a = r(t,\vec{x})(\partial_a + if_a(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad a = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $r(t,\vec{x})$ — произвольная ненулевая функция, $f(t,\vec{x})$ удовлетворяет уравнениям

$$2f_t + f_a f_a = 0, \quad \Delta f = Q(t), \tag{10}$$

$Q(t)$ — некоторая функция.

Замечание 1. Анзац (3) представляет собой общее решение системы (8).

Доказательство теоремы 1. Необходимое и достаточное условие инвариантности системы (1), (8) относительно операторов (9) имеет вид

$$\begin{aligned} &k_a Q_a^2(2iu_t + \Delta u - uF(|u|)\Big|_{\substack{L=0\\L_a=0}} = 0,\\ &k_a Q_a^1(u_a - if_a u)\Big|_{L_a=0} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где k_a — произвольные постоянные, Q_a^1, Q_a^2 — первое и второе лиевские продолжения операторов Q_a.

Первое из определяющих уравнений (11) приводится к виду

$$2i(\eta_t - \xi_t^a u_a) + \eta_{aa} + 2\eta_{ua}u_a - 2\xi_a^b u_{ab} - \xi_{aa}^b u_b = 0, \quad \eta = irk_a f_a u, \quad \xi^a = k_a r.$$

С учетом дополнительных условий (8) получаем

$$-2uk_a r(f_{at} + f_b f_{ab}) + irf_{abb}k_a = 0$$

вследствие уравнений (10).

Из второго уравнения (11)

$$\eta_a + \eta_u u_a - \xi_a^b u_b - if_{ab}\xi^b u - if_a\eta = 0$$

— тождественное равенство с учетом (8). Теорема доказана.

Запишем операторы условной инвариантности, соответствующие анзацу (3), $\omega = t$, f имеет вид (6), (7).

1) $n = 2$, f имеет вид (6):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left[(t+B_1)(t+B_2) - B_3^2\right]\partial x_1 + [x_2B_3 + x_1(t+B_1)]M,\\ Q_2 &= \left[(t+B_1)(t+B_2) - B_3^2\right]\partial x_2 + [x_1B_3 + x_2(t+B_2)]M, \end{aligned} \tag{12}$$

где $M \equiv i[u\partial_u - u^*\partial_{u^*}]$;

2) $n = 3$, f имеет вид (6): Q_1, Q_2 определяются соотношениями (12), ∂_{x^3};

3) $n = 3$, f имеет вид (7):

$$Q_k = T\partial_k + N_k M, \quad k = 1, 2, 3,$$
$$T = (t + a_1)(t + a_2)(t + a_3) - b_1^2(t + a_1)^2 - b_2^2(t + a_2)^2 - b_3^2(t + a_3) + 2b_1 b_2 b_3,$$
$$N_k = -x_k(b_c x_c) + x_a \tau_l \tau_m + x_l \tau_m b_m + x_m \tau_l b_l, \quad \tau = t + a_l,$$

по k нет суммирования, $\{1, 2, 3\} = \{k, l, m\}$.

Анзац (3), $\omega = t$, f имеет вид (6) или (7), редуцирует (1) к уравнению

$$i(Q(t)\varphi + 2\varphi') = \varphi F(|\varphi|), \tag{13}$$

где $Q(t) = \Delta t$. Если представить $Q(t)$ в виде $Q(t) = \theta(t)/\theta(t)$, то

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{\theta}} \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int F\left(\frac{c}{\sqrt{\theta}} \right) dt \right\}, \tag{14}$$

c — произвольная постоянная; $Q(f) = \frac{2t + B_1 + B_2}{(t + B_1)(t + B_2) - B_3^2}$, f имеет вид (6);

$$Q(t) = \frac{3t^2 + 2t(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{(t + a_1)(t + a_2) - b_1^2(t + a_1) - b_2^2(t + a_2) - b_3^2(t + a_3) - 2b_1 b_2 b_3},$$

f имеет вид (7).

Решения уравнения (1) записываются в виде

$$u = \exp i \left\{ f(t, \vec{x}) - \frac{1}{2} \int F\left(\frac{c}{\sqrt{\theta}} \right) dt \right\} \frac{c}{\sqrt{\theta}},$$

где f имеют вид (6), (7), $\theta = \frac{d}{dt} \ln \Delta f$.

3. Совместность и симметрия системы (4). Так как мы рассматриваем только действительные функции f и ω, то $T(\omega)$ в (4) должна быть неотрицательной. Следовательно, уравнение $\omega_a \omega_a = T(\omega)$ локальными преобразованиями можно привести к виду $T(\omega) \equiv 0$ или $T(\omega) = 1$.

1. В случае $\omega_a \omega_a = 0$, $\omega_a = 0$, можно положить $\omega = \omega(t)$. При подстановке $\omega = t$ система (4) приобретает вид

$$2f_t + f_a f_a = R(t), \quad \Delta f = Q(t). \tag{15}$$

Нашей целью является описание всех анзацев вида (3), редуцирующих уравнение (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Поэтому без ограничения общности можно привести (4) к более простому виду таким образом, что получаемые при решении этой системы анзацы будут эквивалентными, т.е. приведут к одинаковым решениям уравнения (1).

Очевидно, анзацы вида (3) эквивалентны с точностью до преобразований $f \to f + \rho(\omega)$, поэтому можно считать, что $R(t) \equiv 0$.

Далее докажем, что условие совместимости системы (15) $R(t) = 0$ необходимо для произвольного n и достаточно для $n = 2, 3$.

Теорема 2. *Система*

$$2f_t + f_a f_a = 0, \quad \Delta f = Q(t) \tag{16}$$

совместна только в случае, если

$$Q(t) = \frac{\theta'}{\theta}, \quad \theta^{(n+1)} \equiv 0. \tag{17}$$

Доказательство. $\{f_{ab}\}$ — матрица вторых производных функции f размерности $(n \times n)$. Через S_k обозначим $\mathrm{tr}(\{f_{ab}\}^k)$ и докажем, что

$$S_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} Q(t). \tag{18}$$

Дифференцируя по x_b и x_c первое уравнение (16), получаем

$$f_{bct} + f_{abc}f_a + f_{ab}f_{ac} = 0. \tag{19}$$

Доказательство проводится методом математической индукции; $S_1 = Q(t)$ — утверждение для $k = 1$ верно.

Умножив равенство (19) на $f_{ba_1} \cdots f_{a_{n-1}c}$, получаем

$$\frac{1}{n}(S_n)_t + \frac{1}{n-1}(S_{n-1})_a f_a + S_{n+1} = 0,$$

так как S_{n-1}, по предположению, функция от t, то $(S_{n_1})_a = 0$ и $S_{n+1} = -\frac{1}{n}(S_n)_t$, т.е. из справедливости утверждения для $k = n$ следует его справедливость для $k = n + 1$.

По теореме Гамильтона–Кэли для матрицы W размерности $(n \times n)$ справедливо соотношение

$$W^n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} M_k W^{n-k} + (-1)^{n+1} E \det W, \tag{20}$$

M_k — сумма главных миноров порядка k матрицы W, E — единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Если взять следы от равенства (20) и от этого же равенства, умноженного на W, $W = \{f_{ab}\}$, то получим следующие уравнения для S_k:

$$S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k M_k S_{n-k} + (-1)^n \cdot n \det W = 0,$$

$$S_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k M_k S_{n+1-k} + (-1)^n \cdot S_1 \det W = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k M_k (S_1 S_{n-k} - n S_{n+1-k}) = 0 \quad (M_0 = 1). \tag{21}$$

Методом математической индукции легко показать, что

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l-1} M_l S_{k-1},$$

откуда, положив $Q(t)=\theta(t)/\theta(t)$ и используя (18), получаем $M_k=\frac{1}{k}\frac{\theta^{(k)}}{\theta}$.

Подставим в (21) выражения M_k и S_k через $\theta(t)$:

$$\sum_{k=0}^{k-1}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\theta^{(k)}}{\theta}\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\left(\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\right)^{(n-k-1)}\right)-\frac{n(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\right)^{(n-k)}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\theta}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{\dot\theta}{\theta}\right)^{(n-k)}\theta^{(k)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\theta^{(n+1)}}{\theta}=0,$$

$\theta^{(n+1)}=0$, что и требовалось доказать.

2. $\omega_a\omega_a=1$. В [10] установлено, что при $n=3$ $\Delta\omega=N/\omega$, $N=0,1,2$ (при $n=2$ $N=0,1$).

Покажем, что с точностью до эквивалентности анзацев можно положить $S(\omega)=0$. Уравнение $f_a\omega_a+\omega_t=S(\omega)$ имеет общее решение для f:

$$f=\varphi(\Omega_i)-\int\frac{\omega_t}{\omega_t}dx_1+\int S(\omega)d\omega, \tag{22}$$

$\frac{\omega_t}{\omega_1}=R(x_1,\Omega_i)$, Ω_i — интегралы уравнения $f_a\omega_a=0$. Так как анзацы (3) эквивалентны с точностью до преобразования $\tilde f\to f+\rho(\omega)$, то из (22) следует, что можно положить $S=0$.

Теорема 3. *Система уравнений*

$$\begin{aligned}&2f_t+f_af_a=R(\omega),\quad \Delta f=Q(\omega),\\&f_a\omega_a+\omega_t=0,\quad \omega_a\omega_a=1,\quad \Delta\omega=N/\omega,\end{aligned}\tag{23}$$

$N=0,1$ *при* $n=2$, $N=0,1,2$ *при* $n=3$ *совместна только в случае, когда* $Q(\omega)=0$, $R(\omega)=c_1\omega+c_2$, $N=0$; $R(\omega)=c_1/\omega^2+c^2$, $N=1$; $R(\omega)=c_1$, $N=2$; c_1, c_2 *— постоянные.*

Замечание 2. Доказательство теоремы 3 проводится аналогична доказательству теоремы 2. При этом нужно использовать дифференциальные следствия уравнений (23) и теорему Гамильтона–Кэли.

Замечание 3. Для дальнейших рассуждении достаточно использовать тот факт, что система (4) инвариантна относительно операторов

$$J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a,\quad \partial_a,\quad \hat G_a=t\partial_a+x_a\partial_t. \tag{24}$$

Будем искать общее решение этой системы с точностью до преобразований, порождаемых этими операторами:

$$x_a\to\alpha_ax_b+\beta_a,\quad x_a\to g_at+x_a, \tag{25}$$

α_{ab}, g_a, β_a — постоянные, $\alpha_{ab}\alpha_{cb}=\delta_{ac}$ (символ Кронекера).

4. Решения системы (4). Нахождение решений системы (4) требует большого числа громоздких вычислений. Поэтому остановимся более подробно на случае $\omega_a\omega_a=0$, когда получаются нелиевские анзацы; опишем кратко способ построения решений, а для $\omega_a\omega_a=1$ приведем список анзацев.

1. $\omega_a\omega_a = 0$. Пусть n произвольное. Рассмотрим общее решение уравнения Гамильтона–Якоби $2f_t + f_a f_a = 0$ ранга n ($\det\{f_{ab}\} \neq 0$) [11]. Рангом решения называется ранг матрицы $\{f_{ab}\}$,

$$f = x_a y_a - \frac{t}{2} y_a^2 + \Phi(\vec{y}), \quad 0 = x_a - t y_a + \Phi_a, \tag{26}$$

$y = (y_1, \ldots, y_n)$ — параметры, Φ — произвольная функция.

Из (26) следует

$$\Delta f = \operatorname{tr}\left(\{t\delta_{ab} - \Phi_{y_a y_b}\}^{-1}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\det T}{\det T}, \quad T = \{t\delta_{ab} - \Phi_{y_a y_b}\}.$$

По теореме 2 $Q(t) = \dot\theta(t)/\theta(t)$, $\theta^{(n+1)} \equiv 0$. Следовательно, $\det T$ — полином по t с постоянными коэффициентами. Коэффициенты $\det T$ — главные миноры матрицы

$$\{\Phi_{y_a y_b}\} = \Phi, \quad \det T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (-1)^k t^{n-k} + (-1)^n \det\Phi,$$

M_k — главные миноры матрицы Φ, $M_0 \equiv 1$.

Таким образом, решение системы (16) ранга n имеет вид (26), где $\Phi(\vec{y})$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi = A_1,\\
&\begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \Phi_{n-1,n-1} & \Phi_{n-1,n} \\ \Phi_{n,n-1} & \Phi_{nn} \end{vmatrix} = A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\det\Phi = A_n.
\end{aligned} \tag{27}$$

При $n = 2$, $n = 3$ посредством преобразований Эйлера [11] из (27) можно получить, что

$$\Phi_{y_a y_b} = \text{const}, \quad \Phi = l_{ab} y_a y_b + k_a y_a + m_a,$$

$L = \{l_{ab}\}$ — постоянная матрица, k_a, m_a — произвольные постоянные. Преобразования (25) позволяют привести выражение для f (26) к виду, когда $k_a = m_a = 0$.

Из (26)

$$f = \frac{1}{2}\vec{y}\{Et - 2L\}\vec{y}, \quad \vec{x} = \{Et - 2L\}\vec{y},$$

откуда $f = \frac{1}{2}\vec{x}\{Et - 2L\}^{-1}\vec{x}$; $n = 2$, $-2L = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix}$ — для f получается выражение (7); $n = 3$, $-2L = \begin{pmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{pmatrix}$ — для f получается выражение (7).

Общее решение для уравнения Гамильтона–Якоби в (16) ранга 2 при $n = 3$ имеет вид

$$f = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \Psi(y_1, y_2) x_3 - \frac{t}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \Psi^2(y_1, y_2)) + \Phi(\vec{y}),$$

$$0 = x_1 + \Psi_{y_1} x_3 - t(y_1 + \Psi\Psi_{y_1}) + \Phi_{y_1},$$
$$0 = x_2 + \Psi_{y_1} x_3 - t(y_2 + \Psi\Psi_{y_1}) + \Phi_{y_2}, \tag{28}$$

Подставив выражение для Δf из (28) во второе уравнение (16), можно показать, что ψ_{y_1}, ψ_{y_2} — постоянные и преобразованиями (25) уравнения (28) приводятся к виду (26) для $n = 2$, следовательно, и в этом случае f имеет вид (6).

Решение рассматриваемого уравнения Гамильтона–Якоби ранга 1 имеет вид

$$f = \Psi_a(y)x_a - \frac{t}{2}\Psi_a(y)\Psi_a(y) + \Phi(y),$$
$$0 = \dot{\Psi}_a x_a - t\dot{\Psi}_a\Psi_a + \dot{\Phi}(y). \tag{29}$$

Подставив выражение для Δf из (29) во второе уравнение (16), можно показать, что $\dot{\Psi}_a(y)$ — постоянные, $\Psi_a = b_a y + c_a$.

С учетом (25) можно положить $b_2 = b_3 = c_a = 0$, $b_1 = 1$. Тогда $f = x_1^2(2t + c_0)$.

Решение ранга 0 для произвольного n линейно по x, $f = c_1 x_1 + c_2$.

2. $\omega_a\omega_a = 1$. Пара уравнений

$$\Delta\omega = N/\omega, \quad \omega_a\omega_a = 1 \tag{30}$$

инвариантна относительно группы вращений, параметры которой зависят от t

$$y_a = \alpha_{ab}(t)x_a + \beta_a(t), \quad \alpha_{ab}\alpha_{cb} = \delta_{ac}. \tag{31}$$

Действительные решения системы (30) с точностью до преобразований (31) имеют вид

$$x_1, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (n = 2);$$
$$x_1, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (n = 3). \tag{32}$$

Однако вся система (4) не инвариантна относительно преобразований (31), поэтому подстановка в (4) решений (32) не даст общего решения системы (4).

Чтобы получить общее решение (4), вместо ω нужно подставлять размноженные посредством преобразований (31) следующие решения (4):

$$y_1, \quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}. \tag{33}$$

Однако значительно проще сначала применить преобразования (31) к уравнениям (4) и в полученную систему для $\vec{y}$ и t подставлять выражения (33):

$$2(f_\tau + f_{y_a}(\dot{\alpha}_{ab}\alpha_{cb}(y_c - \beta_c) + \dot{\beta}_a)) + f_{y_a y_a} = R(\omega), \quad f_{y_a y_a} = 0,$$
$$f_{y_a}\omega_{y_a} + \omega_\tau + \omega_{y_a}(\dot{\alpha}_{ab}\alpha_{cb}(y_c - \beta_c) + \dot{\beta}_a) = 0,$$
$$\Delta\omega = \frac{N}{\omega}, \quad \omega_{y_a y_a} = 1 \quad (x_a = \alpha_{ba}(y_b - \beta_b),\ t = \tau). \tag{34}$$

Решив систему (34), получим следующие выражения для f (с точностью до преобразований (25)):

1) $n = 2,\ n = 3,\ N = 0,$

$$\omega = x_1 + at^2, \quad f = -2atx_1 + at^3\frac{1}{6} + bt;$$

2) $n = 2,\ n = 3,\ N = 1,$

$$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad f = A \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} + Bt;$$

3) $n = 3,\ N = 2,$

$$\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad f = ct.$$

Здесь a, b, c, A, B — произвольные постоянные. Приведенным решениям системы (4) соответствуют известные лиевские анзацы для уравнения Шредингера [1–3, 6].

5. Заключение. Мы описали все анзацы вида (3), редуцирующие уравнение Шредингера (1) к нелинейным дифференциальным уравнениям, где функция u зависит от двух или трех пространственных переменных.

Очевидно, анзацы, для которых соответствующие им инфинитезимальные операторы не входят в алгебру инвариантности уравнения, и аналогичные (3) ($\omega = t$), можно получить и для произвольного n:

$$f = \frac{1}{2}\vec{x}(Et + A)^{-1}\vec{x}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m),$$

A — постоянная матрица ($m \times m$), $m \le n$, однако для $n > 3$ могут существовать и другие решения.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A*, 1987, **20**, L929–L933.
2. Tajiri M., Similarity reductions of the one and two dimensional nonlinear Schrödinger equations, *J. Phys. Soc. Japan*, 1983, **52**, № 6, 1908–1917.
3. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation. I. The symmetry group and its subgroups, *J. Phys. A*, 1988, **21**, № 7, 1493–1511.
4. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики, 1987, 4–16.
5. Fushchych W., Nikitin A., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1987, 217 p.
6. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
7. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint, Minneapolis, Inst. for Mathematics and Applications, Univ. of Minnesota, 1988, 5 p.
8. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения уравнений Буссинеска, в сб. Симметрия и решения уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989, 96–103.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990, 400 с.
10. Collins C.B., Complex potential equations. I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–184.
11. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.

Несимметрийный подход к построению точных решений одного нелинейного волнового уравнения

В.И. ФУЩИЧ, И.В. РЕВЕНКО, Р.З. ЖДАНОВ

The exact solutions containing an arbitrary function are obtained for the nonlinear wave equation.

Группой симметрии двухмерного нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} = \left[a^2(u)u_x\right]_x + b(u) \tag{1}$$

при произвольных функциях $a(u)$, $b(u)$ является двухпараметрическая группа сдвигов

$$t' = t + C_1, \quad x' = x + C_2, \quad u' = u, \tag{2}$$

C_1, C_2 — константы.

Расширение этой группы происходит при конкретизации функций $a(u)$ и $b(u)$. Этот вопрос детально изучен в [1]. Построению широких классов точных решений уравнения (1) с использованием его условной симметрии посвящена работа [2].

Ниже без использования в явном виде симметрииных свойств, уравнения (1) построены семейства его точных решений, содержащие произвольные функции. Для этого, следуя [3, 4], мы применяем классический метод промежуточного интеграла [5, 6].

Определение. *Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) первого порядка*

$$G(u_t, y_x, u, t, x) = 0 \tag{3}$$

называется промежуточным интегралом уравнения (1), если всякое решение (3) тождественно удовлетворяет соотношению (1).

Справедлива

Теорема 1. *Уравнение (1) допускает промежуточный интеграл только в таких случаях:*

$$\begin{aligned} &1) \quad a(u) = A_1^2(u), \quad b(u) = \lambda^2 \dot{A}_1(u) A_1^{-3}(u); \\ &2) \quad a(u) = A_2^2(u), \quad b(u) = -\mu \dot{A}_2(u) A_2^{-3}(u), \end{aligned} \tag{4}$$

причем функция G задается формулами

$$\begin{aligned} &1) \quad G = \varepsilon A_1^2(u) u_x - u_t + \lambda A_1^{-1}(u); \\ &2) \quad G = \varepsilon A_2^2(u) u_x - u_t + H(\alpha t + \beta x; \nu) A_2^{-1}(u). \end{aligned} \tag{5a}$$

Доклады АН УССР, 1991, № 7, 15–19.

В приведенных формулах α, β, λ, μ — произвольные действительные параметры, $\varepsilon = \pm 1$; $A_1(u)$ — произвольная гладкая функция;

$$H(\omega;\mu) = \begin{cases} \mu^{1/2}\mathrm{tg}\,(\mu^{1/2}\omega + C_1), & \mu > 0; \\ -|\mu|^{1/2}\mathrm{th}\,(|\mu|^{1/2}\omega + C_1), & \mu < 0; \\ -(\omega + C_1)^{-1}, \end{cases} \tag{5б}$$

Функция $A_2(u)$ определяется одним из следующих неявных соотношений:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad A_2(u) = (C_2 - \alpha u)^{-1}; \tag{6а}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad A_2(u) = (C_2 - 3\varepsilon\beta u)^{-1}; \tag{6б}$$

$$\varepsilon\alpha\beta^{-1} = \tau^2 > 0, \quad A_2^{-2}\tau^{-2} + \tau^{-3}\mathrm{arctg}\,\frac{A_2}{\tau} = C_2 - \varepsilon\beta u;$$

$$\varepsilon\alpha\beta^{-1} = -\tau^2 < 0, \quad A_2^{-2}\tau^{-2} + \frac{\tau^{-3}}{2}\ln\left|\frac{A_2 - \tau}{A_2 + \tau}\right| = C_2 + \varepsilon\beta u; \tag{6в}$$

$$C_1, C_2 \subset R^1, \quad \dot{A}_i = \frac{dA_i}{du}.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что в случае $\frac{\partial G}{\partial u_t} = 0$ соотношение (3) не является промежуточным интегралом уравнения (1). Поэтому, не умаляя общности, можно переписать ДУЧП (3) в эквивалентном виде

$$u_t = F(u_x, u, t, x). \tag{7}$$

Рассмотрим переопределенную систему ДУЧП, состоящую из уравнения (1) и дифференциальных следствий первого порядка из уравнения (7)

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \left[a^2(u)u_x\right]_x - b(u) = 0, \quad u_{tt} - F_{u_x}u_{tx} - F_uF_t = 0, \\ &u_{tx} - F_{u_x}u_{xx} - F_uu_x - F_x = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Согласно [2, 3], необходимым условием того, чтобы выражение (7) было промежуточным интегралом, является равенство нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов при u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}. Вычисляя этот определитель, имеем $F_{ux}^2 = a^2(u)$, откуда $F = \varepsilon a(u)u_x + f(u,t,x)$, $\varepsilon = \pm 1$. Подстановка полученного результата в систему (8) приводит ее к виду

$$\begin{aligned} &u_{tt} - (a^2u_x)_x - b = 0, \\ &u_{tt} - \varepsilon a u_{tx} - (\varepsilon a u_x + f)(\varepsilon\dot{a}u_x + f_u) - f_t = 0, \\ &u_{tx} - \varepsilon a u_{xx} - u_x(\varepsilon\dot{a}u_x + f_u) - f_x = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\dot{a} = \frac{da}{du}$.

Умножая первое уравнение системы (9) на 1, второе — на -1, третье — на εa и складывая полученные выражения, имеем

$$-b + u_x(\varepsilon\dot{a}f + 2\varepsilon a f_u) + ff_u + f_t + \varepsilon a f_x = 0. \tag{10}$$

Наконец, расщепляя равенство (10) по степеням u_x, приходим к необходимым и достаточным условиям того, что (7) является промежуточным интегралом уравнения (1).

$$\dot{a}f + 2af_u = 0, \quad ff_u + f_t + \varepsilon a f_x - b = 0. \tag{11}$$

Анализ системы ДУЧП (11) показывает, что ее общее решение при $f_t = f_x = 0$ задается формулами

$$a(u) = A_1^2(u), \quad b(u) = \lambda^2 \dot{A}_1(u) A_1^{-3}(u), \quad f(u) = \lambda A_1^{-1}(u);$$

а при $f^t + f_x^2 \neq 0$ —

$$a(u) = A_2^2(u), \quad b(u) = -\mu \dot{A}_2(u) A_2^{-3}(u), \quad f(u,t,x) = H(\alpha t + \beta x; \mu) A_2^{-1}(u),$$

где $A_1(u)$ — произвольная гладкая функция, а функции $H(\omega;\mu)$, $A_2(u)$ определены в (5б), (6). Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы было установлено тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon a(u) \frac{\partial}{\partial x}\right) G = u_{tt} - [a^2(u) u_x]_x - b(u),$$

где функции $a(u)$, $b(u)$, G задаются формулами (4), (5). Следовательно, задача построения частных решений нелинейного уравнения (1) сводится к интегрированию одного из ДУЧП первого порядка

$$\begin{aligned} &1) \quad u_t - \varepsilon A_1^2(u) u_x - \lambda A_1^{-1}(u) = 0, \\ &2) \quad u_t - \varepsilon A_2^2(u) u_x - H(\alpha t + \beta x; \mu) A_2^{-1}(u) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Но всякое квазилинейное скалярное ДУЧП первого порядка инвариантно относительно бесконечнопараметрической группы Ли [4]. Из этого вытекает, что уравнение (1) имеет подмножества решений, инвариантные относительно более широкой группы, чем все множество решений в целом. Иначе говоря, нелинейное ДУЧП (1) при указанных функциях $a(u)$, $b(u)$ обладает нетривиальной условной симметрией [2, 5].

Общее решение ДУЧП первого порядка вида (12) представляется в виде

$$\rho \omega_1 = \varphi(\omega_2), \tag{13}$$

где ρ — дискретный параметр, равный либо 0, либо 1; $\varphi \in C^2(R^1, R^2)$ — произвольная функция; $\omega_1(u,t,x)$, $\omega_2(u,t,x)$ — первые интегралы соответствующей системы уравнений Эйлера–Лагранжа.

Для уравнения 1) из (12) система Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-\varepsilon A_1^2(u)} = \frac{du}{\lambda A_1^{-1}(u)}. \tag{14}$$

При $\lambda = 0$ одним из первых интегралов этой системы является функция $\omega_1 = u$. Еще один первый интеграл получается в результате интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения с раздельными переменными $dt = -\varepsilon A_1^{-2}(\omega_1) dx$, откуда $\omega_2 = t A_1^2(u) + \varepsilon x$. Подобным же образом интегрируются уравнения (14) при $\lambda \neq 0$

$$\omega_1 = \lambda_t - R(u), \quad \omega^2 = \varepsilon \lambda x + \int_0^{R(u)} A_1^2(\tilde{R}(\tau)) d\tau,$$

где $R(u) = \int_0^u A_1(\tau) d\tau$, $\tilde{R}(\tau)$ — функция, обратная к $R(\tau)$.

Подстановка полученных результатов в формулу (13) дает два класса точных решений нелинейного ДУЧП

$$u_{tt} = \left[A_1^4(u)u_x\right]_x + \lambda^2 \dot{A}_1(u)A_1^{-3}(u),$$
$$\rho u = \varphi(\varepsilon x + tA_1^2(u)), \quad \rho\left(\varepsilon\lambda x + \int_0^{R(u)} A_1^2(\tilde{R}(\tau))d\tau\right) = \varphi(\lambda t - R(u)), \tag{15}$$

где $\rho = 0, 1$; φ — произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция.

Интегрируя ДУЧП 2) из (12), получаем классы точных решений нелинейного ДУЧП

$$u_{tt} = \left[A_2^4 u_x\right]_x - \mu\dot{A}_2(u)A_2^{-3}(u).$$

1) $A_2(u)$ задается формулой (6а),
$\mu = 0$

$$\rho A_2(u) = (\beta x + C_1)\varphi(\beta\varepsilon t - A_2^{-2}(\beta x + C_1)),$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u) = \mathrm{ch}\,(|\mu|^{1/2}\beta x + C_1)\varphi(2\varepsilon|\mu|^{1/2}\beta t + A_2^{-2}(u)\,\mathrm{sh}\,2(|\mu|^{1/2}\beta x + C_1),$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u) = \cos(\mu^{1/2}\beta x + C_1)\varphi(2\varepsilon\mu^{1/2}\beta + A_2^{-2}(u)\sin 2(\mu^{1/2}\beta x + C_1);$$

2) $A_2(u)$ задается формулой (6б)
$\mu = 0$

$$\rho A_2 = (\alpha t + C_1)^{-1}\varphi(\alpha\varepsilon x - A_2^2(\alpha t + C_1)),$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u) = \mathrm{ch}^{-1}(\alpha|\mu|^{1/2}t + C_1)\varphi(2\varepsilon|\mu|^{1/2}\alpha x + A_2^2\,\mathrm{sh}\,2(|\mu|^{1/2}\alpha tx + C_1)),$$

$\mu > 0$

$$\rho A_2(u) = \cos^{-1}(\mu^{1/2}\alpha t + C_1)\varphi(2\varepsilon\mu^{1/2}\alpha x + A_2^2\sin 2(\mu^{1/2}\alpha tx + C_1));$$

3) $A_2(u)$ задается одной из формул (6в)
$\mu = 0$

$$\rho(\alpha t + \beta x + C_1)A_2(u) = (\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)\varphi(t - (\alpha t + \beta x + C_1)(\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)^{-1});$$

$\mu < 0$

$$\rho A_2(u)\,\mathrm{ch}\,(|\mu|^{1/2}(\alpha t + \beta x) + C_1) = (\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha) \times$$
$$\times\,\varphi([\varepsilon\beta A_2^2(u)\,\mathrm{sh}\,2|\mu|^{1/2}\alpha t + \alpha\,\mathrm{sh}\,2(|\mu|^{1/2}\beta x + C_1)](\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)^{-1});$$

$\mu > 0$

$$\rho A_2(u)\cos(\mu^{1/2}(\alpha t + \beta x) + C_1) = (\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha) \times$$
$$\times\,\varphi([\varepsilon\beta A_2^2(u)\sin 2\mu^{1/2}\alpha t + \alpha\sin 2(\mu^{1/2}\beta x + C_1)](\varepsilon\beta A_2^2(u) + \alpha)^{-1}).$$

В приведенных формулах $\varphi \in C^2(R^1, R^1)$ — произвольная функция; α, β, C_1 — произвольные действительные параметры, причем $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\rho = 0, 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Ввиду того, что построенные нами точные решении содержат произвольную функцию, они могут использоваться при анализе довольно широкого класса краевых задач для нелинейного ДУЧП (1). Например, решение задачи Коши

$$u_{tt} = \left[a^2(u)u_x\right]_x, \quad u(0,x) = U_0(x), \quad u_t(0,x) = U_1(x),$$

где $U_0(x)$, $U_1(x)$ — произвольные действительные функции, связанные соотношением $U_1(x) = \pm a(U_0(x))\dot{U}_0(x)$, задается неявной формулой $u = U_0(x \pm ta(u))$.

1. Ames W.F., Loher R.J., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, *J. Non-Linear Mechanics*, 1981, **16**, № 5/6, 439–447.
2. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К., Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения, *Докл. АН УССР*, 1991, № 4, 8–12.
3. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Forsyth A.R., Theory of differential equations, Cambridge, Univ. Press, 1906, Vol. 6, 596 p.
6. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск, Наука, 1984, 270 с.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

On the non-Lie reduction of the nonlinear Dirac equation

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

The method of construction of exact solutions of nonlinear spinor equations based on their conditional (non-Lie) symmetry is suggested. With the help of this method new ansätze that reduce the nonlinear Poincaré-invariant Dirac equation to ordinary differential equations are constructed. The new family of exact solutions of the nonlinear Dirac equation with scalar selfinteraction is found.

1. Introduction

It is common knowledge that the classical Lie approach to the construction of exact solutions of partial differential equations (PDEs) essentially uses invariance properties of the set of solutions of the considered equation [1, 2]. In Refs. [3–5] a natural generalization of the Lie approach was suggested that takes into account not only the symmetry of the set of solutions of PDEs as a whole, but the symmetry of their subsets as well. This is achieved by imposing on the solutions of the initial equation such additional conditions (equations) that the obtained system of PDEs is compatible and possesses wide symmetry.

Using the above idea, in the present paper we construct a family of the new exact solutions of the following nonlinear spinor equation:

$$\{i\gamma_\mu\partial_{mu} - \lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\}\psi = 0, \quad \lambda, k = \text{const}, \tag{1}$$

where $\psi = \psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ is the four-component complex function, $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma_0$ and γ_μ are 4×4 Dirac matrices, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, and $\mu = \overline{0,3}$. Hereafter, the summation over the repeated indices is supposed.

2. Construction of the non-Lie anzätze for the spinor field

The solution of Eq. (1) is found in the form

$$\psi(x) = \exp\{f_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\}\varphi(\omega), \tag{2}$$

where $\varphi(\omega)$ is a four-component function and $f_{\mu\nu}(x)$ and $\omega = \omega(x)$ are scala real functions. The functions $f_{\mu\nu}$, ω are chosen such that substitution of expression (2) into Eq. (1) yields an ordinary differential equation (ODE) for $\varphi = \varphi(\omega)$.

We shall describe ansätze (2) as reducing the PDE (1) to systems of ODEs if the functions $f_{\mu\nu}$, ω are of the following structure:

$$\begin{aligned}
&f_{00} = -f_{11} = -f_{22} = -f_{33} = \frac{1}{4}\theta_0(x_0 + x_3, x_1, x_2),\\
&f_{01} = -f_{10} = f_{13} = -f_{31} = \frac{1}{2}\theta_1(x_0 + x_3, x_1, x_2),\\
&f_{02} = -f_{20} = f_{23} = -f_{32} = \frac{1}{2}\theta_2(x_0 + x_3, x_1, x_2),\\
&f_{03} = f_{30} = f_{12} = f_{21} = 0, \quad \omega = \omega(x_0 + x_3, x_1, x_2).
\end{aligned}$$

J. Math. Phys., 1991, **32**, № 12, 3488–3490.

Substituting the ansatz

$$\psi(x) = \exp\{\theta_0 + (\theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2)(\gamma_0 + \gamma_3)\}\varphi(\omega) \tag{3}$$

into Eq. (1) and multiplying the obtained equality by

$$\exp\{-\theta_0 - (\theta_1\gamma_1 + \theta_2\gamma_2)(\gamma_0 + \gamma_3)\}$$

one has

$$\begin{gathered} i[(\gamma_0+\gamma_3)\partial_\xi\theta_0 + \gamma_a\partial_a\theta_0 + \gamma_a\gamma_B(\partial_a\theta_B)(\gamma_0+\gamma_3) - 2\theta_a(\partial_a\theta_0)(\gamma_0+\gamma_3)]\varphi + \\ + i[(\gamma_0+\gamma_3)(\partial_\xi\omega - 2\theta_a\partial_a\omega) + \gamma_a\partial_a\omega]\varphi - \lambda e^{\theta_0/k}(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi = 0, \end{gathered}$$

where $\xi = x_0 + x_3$, $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$, $a = \overline{1,2}$, and $B = \overline{1,2}$.

Hence it follows that ansatz (3) reduces the initial PDEs to ODEs if the nonlinear equations hold:

$$\begin{gathered} \partial_\xi\theta_0 - 2\theta_a\partial_a\theta_0 - \partial_a\theta_a = e^{\theta_0/k}f_1(\omega), \quad \partial_1\theta_0 = e^{\theta_0/k}f_2(\omega), \\ \partial_a\theta_0 = e^{\theta_0/k}f_3(\omega), \quad \partial_2\theta_1 - \partial_1\theta_2 = e^{\theta_0/k}f_4(\omega), \\ \partial_\xi\omega - 2\theta_a\partial_a\omega = e^{\theta_0/k}f_5(\omega), \quad \partial_1\omega = e^{\theta_0/k}f_6(\omega), \quad \partial_2\omega = e^{\theta_0/k}f_7(\omega). \end{gathered} \tag{4}$$

In Eqs. (4) $f_1, \dots, f_7$ are arbitrary smooth real functions.

It is worth noting that as a result of the arbitrariness of the function $\varphi(\omega)$ substitution of the expressions

$$\omega(x), \quad \theta_\alpha(x) \tag{5}$$

and

$$\tilde f(\omega(x)), \quad \theta_\alpha(x) + \tilde f_\alpha(\omega(x)), \tag{6}$$

where $\bar f, \bar f_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\alpha = \overline{0,2}$, into formula (3) gives the same ansatz for the field $\psi(x)$. In this sebse solutions of system (4) of the forms (5) and (6) are equivalent.

System (4) contains seven equations for four functions, i.e., it is an overdetermined system. This fact makes it possible to construct its general solution.

Theorem. *The general solution of the nonlinear system of PDEs (4) determined up to the above equivalence relation is given by one of the following formulas:*

$$\begin{gathered} \theta_0 = k\ln\omega_1, \quad \theta_1 = (2\omega_1)^{-1}(\dot\omega_1 x_1 + \dot\omega_2), \\ \theta_2 = (2\omega_1)^{-1}[(2k-1)\dot\omega_1 x_2 + \omega_3], \quad \omega = \omega_1 x_1 + \omega_2; \\ \theta_0 = -k\ln(x_1+\omega_1), \\ \theta_a = \omega_3[(x_1+\omega_1)^2 + (x_2+\omega_2)^2]^{k-1}(x_a+\omega_a) + \tfrac12\dot\omega_a, \quad a = \overline{1,2}, \\ \omega = (x_1+\omega_1)(x_2+\omega_2)^{-1}; \\ \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = R(x_1+ix_2, x_0+x_3) + R(x_1-ix_2, x_0+x_3) + \omega_1 x_1, \\ \theta_2 = iR(x_1+ix_2, x_0+x_3) - iR(x_1-ix_2, x_0+x_3) + \omega_2 x_1, \quad \omega = x_0+x_3. \end{gathered} \tag{7}$$

Here ω_1, ω_2 and ω_3 designate arbitrary real smoothfunctions on x_0+x_3 and R designates an arbitrary analytical function on the first variable.

Let us adduce the main steps of the proof. First, an overdetermined system made up of the second, third, sixth, and seventh equations in (7) is integrated. Upon making the change of the variable $\theta = e^{-\theta_0/k}$ we rewrite this system in the form

$$\partial_a\theta = F_a(\omega), \quad \partial_a\omega = \theta^{-1}G_a(\omega), \quad F_a, G_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1), \quad a = 1, 2. \tag{8}$$

From the necessary and sufficient compatibility conditions of system (8), $\partial_1\partial_2\theta = \partial_2\partial_1\theta$, $\partial_1\partial_2\omega = \partial_2\partial_1\omega$, one has the following relations for $F_a(\omega)$, $G_a(\omega)$:

$$\dot{F}_1 G_2 = G_1\dot{F}_2, \quad G_2\dot{G}_1 - G_1F_2 = G_1\dot{G}_2 - G_2F_1, \tag{9}$$

where the overdot means differentiation with with respect to ω.

The procedure for the integration of the system of ODEs (9) is essentially simplified by the fact that the equivalence conditions (6) induce the equivalence relation on the set of solutions of Eqs. (9):

$$\begin{aligned} &F_a(\omega) \sim F_a(f(\omega)) - \dot{g}(\omega)G_a(f(\omega)),\\ &G_a(\omega) \sim (\dot{f}(\omega))^{-1}G_a(f(\omega))(g(\omega))^{-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

where $f, g \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $\dot{f}g \neq 0$.

By integrating the system of PDEs (8) and (9) one establishes that is general solution up to the equivalence relations (6) and (10) is determined by one of the following formulas:

$$\begin{aligned} &F_1 = G_1 = 1, \quad F_2 = G_2 = 0, \quad \theta = \omega_1^{-1}, \quad \omega = \omega_1x_1 + \omega_2;\\ &F_1 = 1, \quad F_2 = 0, \quad G_1 = \omega, \quad G_2 = -\omega^2,\\ &\theta = x_1 + \omega_1, \quad \omega = (x_1 + \omega_1)(x_2 + \omega_2)^{-1};\\ &F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad \omega = \xi, \quad \theta = 1;\\ &F_1 = F_2 = 0, \quad G_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1), \quad \omega = \xi,\\ &\theta = G_1(\xi)x_1 + G_2(\xi)x_2 + \omega_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Here ω_1, ω_2, and ω_3 are arbitrary real smooth functions on ξ.

Substitution on the sxpressions for the functions $\omega(x)$, $\theta_0(x) = -k\ln\theta(x)$ into the remainder of Eqs. (4) yields four systems of PDEs on $\theta_1(x)$ and $\theta_2(x)$. By integrating the first systems of PDEs one arrives at formulas (7). The fourth system of PDEs proves to be incompatible system.

Substitution of expressions (7) into formula (3) gives three classes of ansätze for the spinor field:

$$\begin{aligned} &\psi(x) = \omega_1^k \exp\{(2\omega_1)^{-1}[(\dot{\omega}_1x_1 + \dot{\omega}^2)\gamma_1 +\\ &\qquad + ((2k-1)\dot{\omega}_1x_2 + \omega_3)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3)\}\varphi(\omega_1x_1 + \omega_2),\\ &\psi(x) = (x_1 + \omega_1)^{-k}\exp\{\omega_3[(x_1 + \omega_1)^2 + (x_2 + \omega_2)^2]^{k-1}\\ &\qquad \times \gamma_a(x_a + \omega_a)(\gamma_0 + \gamma_3) + \tfrac{1}{2}\dot{\omega}_a\gamma_a(\gamma_0 + \gamma_3)\}\varphi((x_1 + \omega_1)(x_2 + \omega_2)^{-1});\\ &\psi(x) = \exp\{[(R + R^* + \omega_1x_1)\gamma_1 + (iR - iR^* + \omega_2x_1)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3)\}\varphi(x_0 + x_3), \end{aligned} \tag{12}$$

reducing the nonlinear Dirac equation (1) to the system of ODEs

$$\begin{aligned} &i\gamma_1\dot{\varphi} = \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi,\\ &i(\gamma_2 - \gamma_1\omega)\dot{\varphi} = \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi,\\ &i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

The general solution of the first system in (13) is given by the formula [6]

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\lambda\gamma_1(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\omega\}\chi,$$

where χ is a constant four-componet column.

By substitutiong the above expression into the first ansatz in (12) we obtain the new family of exact solutions of the nonlinear spinor equation (1) containing the three arbitrary functions $\omega_n(x_0+x_3)$, $n=\overline{1,3}$

$$\begin{aligned}\psi(x) = \omega_1^k \exp\{(2\omega_1)^{-1}[(\dot\omega_1 x_1 + \dot\omega_2)\gamma_1 + ((2k-1)\dot\omega_1 x_2 + \omega_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3)\} \times \\ \times \exp\{i\lambda\gamma_1(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\omega_1 x_1 + \omega_2)\}\chi.\end{aligned} \tag{14}$$

Let us emphasize that ansätze (12) are noninvariant under the three-parameter subgroups of the symmetry group admitted by Eq. (1) (in the case involved it is the extended Poincaré group $\tilde{P}(1,3)$ (see Ref. [6])) and, consequently, they cannot be obtained in the framework of the traditional Lie approach.

3. Conditional invariance of nonlinear Dirac equation

Let us now construct the non-Lie ansätze (12) using the conditional invariance of the nonlinear Dirac equation (1).

Definition. *Equation (1) is conditionally invariant with respect to the operators*

$$Q_\tau = \varepsilon_{\tau\mu}(x)\partial_\mu + \eta_\tau(x), \quad \tau=\overline{1,N}, \tag{15}$$

where $\varepsilon_{\tau\mu}(x)$ are real scalar functions and $\eta_\tau(x)$ are variable 4×4 matrices if the system

$$\{i\gamma_\mu\partial_\mu - \lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\}\psi = 0, \quad Q_\tau\psi = 0, \quad \tau=\overline{1,N} \tag{16}$$

is invariant in the Lie sense under the one-parameter transformations groups generated by the operators Q_τ.

Described another way, Eq. (1) possesses conditional symmetry if the set of its solutions contains the nonempty subset that does not coincide with the whole set having nontrivial symmetry.

We shall point out the explicit form of the operators Q_n, $n=\overline{1,3}$ such that (14) satisfies system (16). For this purpose it is necessary to solve the following system of algebraic equations on the functions $\varepsilon_{\nu\mu}$, η_ν:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{n\mu}\partial_\mu\omega = 0,\\ &\eta_n - [\varepsilon_{n\mu}\partial_\mu \exp\{\theta_0 + (\gamma_1\theta_1+\gamma_2\theta_2)(\gamma_0+\gamma_3)\}] \times \\ &\qquad \times \exp\{-\theta_0 - (\gamma_1\theta_1+\gamma_2\theta_2)(\gamma_0+\gamma_3)\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Here ω, θ_0, θ_1, and θ_2 are scalar functions determined by the first set of formulas in (7) and $n=\overline{1,3}$.

Solving Eqs. (17) one has

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{1}{2}(\partial_0 - \partial_3),\\ Q_2 &= \omega_1\partial_2 + \frac{1}{2}(1-2k)\dot\omega_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3),\\ Q_3 &= \frac{1}{2}\omega_1(\partial_0+\partial_3) - \dot\omega_1(x_1\partial_1 + x_2\partial_2) - \dot\omega_2\partial_2 - k\dot\omega_1 + \\ &\quad + (2\omega_1)^{-1}[(2\dot\omega_1\dot\omega_2 - \omega_1\ddot\omega_2)\gamma_1 + 2(\omega_3\dot\omega_1 - \omega_1\dot\omega_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3) + \\ &\quad + (2\omega_1)^{-1}(2\dot\omega_1^2 - \omega_1\ddot\omega_1)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2)(\gamma_0+\gamma_3).\end{aligned} \tag{18}$$

It is evident that the operators Q_2 and Q_3 are not linear combinations of the generators of the extended Poincaré group; consequently, they do not belong to the Lie algebra of the symmetry group of Eq. (1). By direct verification one can be convinced that the following relations hold:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}_1 L = 0,\\
&\tilde{Q}_2 L = 2(2k-1)\dot{\omega}_1\gamma_2 Q_1\psi + 2k\dot{\omega}_1\omega_1^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)Q_2\psi + \frac{1}{2}(2k-1)\dot{\omega}_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3)L,\\
&\tilde{Q}_3 L = 2\omega_1^{-1}[(\omega_1\ddot{\omega}_1 - 2\dot{\omega}_1^2)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2) + (\omega_1\ddot{\omega}_2 - 2\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2)\gamma_1 +\\
&\qquad + 2(\omega_1\dot{\omega}_3 - \omega_3\dot{\omega}_1)\gamma_2]Q_1\psi + 2\omega_1^{-2}[(1-k)(2\dot{\omega}_1^2 - \omega_1\ddot{\omega}_1)x_2 + \omega_1\dot{\omega}_3 -\\
&\qquad - \omega_3\dot{\omega}_1]Q_2\psi + 2\dot{\omega}_1\omega_1^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)Q_3\psi -\\
&\qquad - \{\dot{\omega}_1 + (2\omega_1)^{-1}(2\dot{\omega}_1^2 - \omega_1\ddot{\omega}_1)(\gamma_1 x_1 + (2k-1)\gamma_2 x_2)(\gamma_0+\gamma_3) +\\
&\qquad + (2\omega_1)^{-1}[(2\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2 - \omega_1\ddot{\omega}_2)(\gamma_1 + 2(\omega_3\dot{\omega}_1 - \omega_1\dot{\omega}_3)\gamma_2](\gamma_0+\gamma_3)\}L,
\end{aligned}$$

where $\tilde{Q}_a$ designates the first prolongation of the operator Q_a,

$$L = i\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\psi.$$

In addition, the commutational relations of the form

$$[Q_1, Q_2] = [Q_1, Q_3] = 0, \quad [Q_2, Q_3] = -2\dot{\omega}_1 Q_2$$

hold true.

Hence follows that the nonlinear Dirac equation (1) is conditionally invariant with respect to the operators (18).

In the same way it is established that the second and third ansätze in (12) can be obtained by using conditional invariance of Eq. (1).

In conclusion, let us note that ansatze (12) reduce to ODEs the more general spinor equations

$$\{i\gamma_\mu\partial_\mu - [f_1((\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^{-1}) + f_2((\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^{-1})(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\}\psi = 0,$$

where $f_a \subset C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1)$.

4. Discussion

We emphasize once more that ansatze for the spinor field ψ constructed above cannot be obtained with the help of symmetry reduction by subgroups of the invariance group of Eq. (1), These ansätze can be constructively described within the framework of the conception of “conditional invariance” introduced for the first time in Refs. [5] and [7] (see Appendix 4 of Ref. [7]). It seems impossible to obtain the complete description of conditional symmetry of the nonlinear Dirac equation (1) since (1) since the determining equations on the coefficients of the infinitesimal operators, unlike the classical case, are nonlinear equations.

Conditional symmetry of some other nonlinear mathematical physics equations has been investigated in Refs. [8–11]. Let us also mention that the wide classes of exact solutions of Eq. (1) that correspond to its Lie symmetry were constructed in Ref. [12].

1. Ovsjannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978.
2. Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer,1986.
3. Fushchych W.I., Tsifra I.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, L45.
4. Fushchych W.I., in Symmetry and Solutions of the Nonlinear Mathematical Physics Equations, Kiev, Institute of Mathematics, 1987, p. 4.
5. Fushchych W.I., *Ukr. Mat. Zh.*, 1987, **39**, 116.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *Phys. Rep.*, 1989, **172**, 123.
7. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Kluwer, 1987.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations, Kiev, Naukova Dumka, 1989.
9. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1988, № 10, 28.
10. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl.Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1990, № 7, 24.
11. Fushchych W.I., Chopik V.I., *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1990, № 4, 30.
12. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Nonlinear spinor equations: symmetry and exact solutions, Kiev, Naukova Dumka, 1991.

Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ, И.В. РЕВЕНКО

Предложен конструктивный метод интегрирования переопределенной системы нелинейных комплексных волновых уравнений Д'Аламбера и эйконала $\Box u = F_1(u)$, $u_{x_\mu} u_{x_\mu} = F_2(u)$. С помощью этого метода получено полное аналитическое описание множества гладких решений этой системы.

1. Введение. Проблема построения широких классов точных решений нелинейных пуанкаре-инвариантных скалярных уравнений посредством метода редукции их к обыкновенным дифференциальным уравнением сводится к следующей задаче: конструктивно описать все гладкие точные решения связки уравнений вида [1–3]

$$\Box u = F_1(u), \quad \Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta_3, \tag{1}$$

$$u_{x_\mu} u_{x_\mu} = F_2(u), \quad u_{x_\mu} = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \tag{2}$$

где $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^2(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$; $F_1, F_2 \subset C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции.

Связка уравнений (1), (2) возникает и в других задачах математической физики [4].

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование в псевдоевклидовом пространстве $R(1,3)$ с метрическим тензором $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$, т.е.

$$u_{x_\mu} u_{x_\mu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} u_{x_\mu} u_{x_\nu} = u_{x_0}^2 - u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2 - u_{x_3}^2.$$

В случае, когда $F_2 = 0$, система (1), (2) совместна тогда и только тогда, когда $F_1 = 0$ [4–5]. Поэтому система дифференциальных уравнений

$$\Box u = 0, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 0 \tag{3}$$

будет рассмотрена отдельно.

В случае, когда $F_2(u) \neq 0$, система уравнений (1), (2) с помощью локальной замены зависимой переменной

$$u \to u' = \int^u [F_2(\tau)]^{-1/2} d\tau \tag{4}$$

приводится к виду

$$\Box u = F(u), \tag{5}$$

Укр. мат. журн., 1991, **43**, № 11, 1471–1486.

$$u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 1. \tag{6}$$

В настоящей работе установлены необходимые и достаточные условия совместности переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (5), (6) и построены общие решения систем (3) и (5), (6) в классе гладких функций.

2. Формулировка результатов. Приведем основные результаты работы в виде следующих утверждений.

Теорема 1 [6]. *Уравнения (5), (6) совместны тогда и только тогда, когда*

$$F(u) = N(u+C)^{-1}, \tag{7}$$

где $C \in \mathbb{C}^1$ — произвольная константа, N — дискретный параметр, принимающий одно из значений 0, 1, 2, 3.

Теорема 2. *Общее решение уравнения эйконала*

$$u_{x_\mu} u_{x_\mu} = \lambda, \quad \lambda \in C^1, \tag{8}$$

задается одной из следующих неявных формул:

$$1) \quad u(x) = A_\mu(v_1, v_2, v_3) x_\mu + B(v_1, v_2, v_3), \tag{9}$$

где $v_a = v_a(x)$, $a = \overline{1,3}$, — гладкие функции, определяемые формулами

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial v_a} x_\mu + \frac{\partial B}{\partial v_a} = 0, \quad a = \overline{1,3},$$

а A_μ, B — произвольные гладкие функции, удовлетворяющие

$$A_\mu A_\mu = \lambda, \quad \operatorname{rank} \|\partial A_\mu / \partial v_a\|^{3}_{\mu=0}{}^{3}_{a=1} = 3;$$

$$2) \quad u(x) = A_\mu(v_1, v_2) x_\mu + B(v_1, v_2), \tag{10}$$

где $v_k = n_k(x)$, $k = 1, 2$, гладкие функции, определяемые формулами

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial v_k} x_\mu + \frac{\partial B}{\partial v_k} = 0, \quad k = 1, 2,$$

а A_μ, B — произвольные гладкие функции, удовлетворяющие

$$A_\mu A_\mu = \lambda, \quad \operatorname{rank} \|\partial A_\mu / \partial v_k\|^{3}_{\mu=0}{}^{2}_{k=1} = 2;$$

$$3) \quad u(x) = A_\mu(z) x_\mu + B(z), \tag{11}$$

где $z = z(x)$ — гладкая функция, определяемая формулой

$$\frac{\partial A_\mu}{dz} x_\mu + \frac{dB}{dz} = 0,$$

A_μ, B — произвольные гладкие функции такие, что выполнено $A_\mu A_\mu = \lambda$.

Теорема 3. *Общее решение системы ДУЧП*

$$\Box u = 3(u+C)^{-1}, \quad u_{x_\mu} v_{x_\mu} = 1 \tag{12}$$

определяется формулой

$$(u+C)^2 = (x_\mu + A_\mu(\tau))(x_\mu + A_\mu(\tau)), \tag{13}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ *определяется неявным образом:*

$$(x_\mu + A_\mu(\tau))B_\mu(\tau) = 0, \tag{14}$$

функции $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$B_\mu A_\mu = 0, \quad B_\mu B_\mu = 0 \tag{15}$$

(здесь и далее точка над функцией одного аргумента означает производную по нему).

Теорема 4. *Общее решение системы ДУЧП*

$$\Box u = 2(u+C)^{-1}, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 1 \tag{16}$$

задается одной из следующих формул:

$$1) \quad (u+C)^2 = (x_\mu + R_\mu(\tau))(x_\mu + R_\mu(\tau)) + [B_\mu(\tau)(x_\mu + R_\mu(\tau))]^2, \tag{17}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ *определяется неявным образом:* $x_\mu + R_\mu(\tau))\dot{B}_\mu(\tau) = 0$, *а* $R_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ — *произвольные гладкие функции, удовлетворяющие отношениям* $\dot{R}_\mu = TB_\mu$, $\dot{B}_\mu \dot{B}_\mu = 0$, $B_\mu B_\mu = -1$ *при произвольной функции* $T = T(\tau)$;

$$2) \quad (u+C)^2 = (x_\mu + R_\mu(\tau))(x_\mu + R_\mu(\tau)) + [d_\mu(x_\mu + R_\mu(\tau))]^2, \tag{18}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ *определяется неявным образом:*

$$(x_\mu + R_\mu(\tau))\dot{R}_\mu(\tau) + (x_\mu + R_\mu(\tau))d_\mu(d_\nu \dot{R}_\nu(\tau)) = 0,$$

$d_\mu = \mathrm{const}$, $d_\mu d_\mu = -1$, $R_\mu(\tau)$ — *произвольные функции, удовлетворяющие соотношению* $\dot{R}_\mu \dot{R}_\mu + (d_\mu \dot{R}_\mu)^2 = 0$.

Теорема 5. *Общее решение системы ДУЧП* $\Box u = (u+C)^{-1}$, $u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 1$ *задается формулой*

$$(u+C)^2 = (a_\mu x_\mu + h_1)^2 - (d_\mu x_\mu + h_2)^2, \tag{19}$$

где $h_k = h_k(\theta_\mu x_\mu) \subset C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, $k = 1, 2$, — *произвольные функции,* a_μ, d_μ, θ_μ — *произвольные комплексные параметры, удовлетворяющие соотношениям* $a_\mu a_\mu = -d_\mu d_\mu = 1$, $a_\mu d_\mu = a_\mu \theta_\mu = d_\mu \theta_\mu = \theta_\mu \theta_\mu = 0$.

Теорема 6. *Общее решение системы ДУЧП* $\Box u = 0$, $u_{x\mu} u_{x\mu} = 1$ *задается формулой*

$$u = A_\mu(\tau)x_\mu + R_1(\tau), \tag{20}$$

где функция $\tau = \tau(x)$ *определяется неявным образом:* $B_\mu(\tau)x_\mu + R_2(\tau) = 0$, *а функции* $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ *связаны соотношениями* $A_\mu A_\mu = 1$, $\dot{A}_\mu B_\mu = 0$, $B_\mu B_\mu = 0$.

Теорема 7. *Общее решение системы ДУЧП (3) задается одной из формул*

$$1) \quad u(x) = A_\mu(\tau_1, \tau_2)x_\mu + B(\tau_1, \tau_2), \tag{21a}$$

где функции $\tau_k = \tau_k(x)$, $k = 1, 2$, определяются неявным образом:

$$\frac{\partial A_\mu(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_k} x_\mu + \frac{\partial B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_k} = 0, \quad k = 1, 2,$$

а $A_\mu(\tau_1, \tau_2)$, $B(\tau_1, \tau_2)$ — произвольные функции, связанные соотношениями

$$A_\mu A_\mu = 0, \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial \tau_k} \frac{\partial A_\mu}{\partial \tau_n} = 0, \quad k, n = 1, 2;$$

$$2) \ \ G(u, A_\mu(u) x_\mu, \ B_\mu(u) x_\mu) = 0, \tag{21б}$$

где $G \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, $A_\mu(u)$, $B_\mu(u)$ — произвольные гладкие функции, связанные соотношениями $A_\mu A_\mu = B_\mu B_\mu = A_\mu B_\mu = 0$.

Таким образом, теоремы 3–7 содержат полное аналитическое описание решений системы ДУЧП (1), (2) во всех случаях, когда эта система совместна.

Подробное доказательство теоремы 1 проведено в работе [6], а доказательства остальных теорем приводятся в следующем пункте.

3. Доказательство теорем 2–7. Приведем подробные доказательства теорем 2, 3, а в остальных случаях ограничимся изложением схемы доказательства. В основе нашего подхода к интегрированию ДУЧП вида (1), (2) и (8) лежит обобщение метода нелокальных преобразований [7, 8] на случай многомерных нелинейных дифференциальных уравнений, предложенное в [6].

Определение 1. *Преобразование зависимых и независимых переменных*

$$x'_\mu = f_\mu(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \quad u' = f(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}), \quad r \geq 1, \tag{22}$$

где f_μ, f — r раз непрерывно дифференцируемые функции, символом $\underset{s}{u}$ обозначен набор производных от функции $u = u(x)$ s-го порядка, называется нелокальным преобразованием порядка r.

Основная идея развиваемого метода нелокальных преобразований состоит в том, чтобы для заданного нелинейного ДУЧП указать в явном виде нелокальное преобразование (22), приводящее его к линейному уравнению. Если для преобразованного уравнения удается построить общее или частное решение, то, обращая преобразование (22), получаем решение исходного нелинейного ДУЧП.

Особая роль в теории ДУЧП первого порядка принадлежит контактным преобразованиям — нелокальным преобразованиям вида

$$x'_\mu = f_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \quad u' = f(x, u, \underset{1}{u}), \quad u'_{x_\mu} = g_\mu(x, u, \underset{1}{u}), \tag{23}$$

которые сохраняют условия касания первого порядка, т.е.

$$du - \sum_{\mu=0}^{3} u_{x_\mu} dx_\mu = 0 \implies du' - \sum_{\mu=0}^{3} u'_{x_\mu} dx'_\mu = 0.$$

Этот факт связан с тем, что всякие два скалярных ДУЧП первого порядка могут быть переведены друг в друга подходящим контактным преобразованием [9].

Доказательство теоремы 2. Из (8) следует, что величины u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3} функционально зависимы, откуда заключаем, что

$$\det\left\|\frac{\partial u_{x_\mu}}{\partial x_\nu}\right\|^3_{\mu,\nu=0} = \det\|u_{x_\mu x_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы $U = \|u_{x_\mu x_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$ принимает одно из значений 1, 2, 3. Каждый из этих случаев необходимо рассмотреть отдельно.

Случай 1; $\operatorname{rank} U = 3$. При таком условии существует ненулевой минор матрицы U третьего порядка. Производя, если это необходимо, замены переменных $x_0 \to ix_a$, $x_a \to ix_0$, либо $x_a \to x_b$, $x_b \to x_a$, $1 \le a \le 3$, $1 \le b \le 3$, при которых уравнение (8) остается инвариантным, можем считать, что

$$\det\|u_{x_a x_b}\|^3_{a,b=1} \ne 0. \tag{24}$$

Произведем в (8) следующее нелокальное преобразование:

$$\begin{aligned} &y_0 = x_0, \quad y_a = u_{x_a}, \quad H(y) = \sum_{a=1}^{3} x_a u_{x_a} - u, \\ &Hy_0 = -u_{x_0}, \quad Hy_a = x_a, \quad a = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что (25) — это контактное преобразование, которое является обобщением классического преобразования Эйлера для двух независимых переменных [7, 8]. Кроме того, это преобразование является взаимно-однозначным в силу (24).

В новых переменных y_μ, $H(y)$ уравнение (8) принимает вид

$$H_{y_0} = -\left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2},$$

т.е. замена (25) приводит ДУЧП (8) при условии (25) к линейному уравнению, общее решение которого задается следующей формулой:

$$H = -y_0\left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2} - B(y_1, y_2, y_3), \tag{26}$$

где $B \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подставляя (26) в (25), приходим к такому выражению для $u(x)$:

$$u(x) = \sum_{a=1}^{3} x_a y_a - H = x_0\left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2} + \sum_{a=1}^{3} x_a y_a + B(y_1, y_2, y_3), \tag{27}$$

причем функции $y_a = y_a(x)$ определяются неявными соотношениями

$$x_a = H_{y_a} = -x_0 y_a \left(\lambda + \sum_{b=1}^{3} y_b^2\right)^{-1/2} - B_{y_a}, \quad a = \overline{1,3}. \tag{28}$$

Обозначая в (28)

$$
\begin{aligned}
&y_a(x) = v_a(x), \quad A_0(v_1, v_2, v_3) = \left(\lambda + \sum_{b=1}^{3} v_b^2\right)^{1/2}, \\
&A_0(v_1, v_2, v_3) = -v_a, \quad a = \overline{1,3},
\end{aligned}
$$

получаем формулы (9).

Случай 2; $\operatorname{rank} U = 2$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что

$$
\det \|u_{x_a x_b}\|^2_{a,b=1} \neq 0. \tag{29}
$$

и, кроме того, существует функция $S \in C^1(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$ такая, что $S(u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}) = 0$ и выражения $S(u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$, $u_{x_\mu} u_{x_\mu} - \lambda$, рассматриваемые как функции от переменных u_{x_μ}, функционально-назависимы.

С учетом сказанного, уравнение (8) при условии (29) представляется в виде

$$
u_{x_0} = \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} u_{x_a}^2\right)^{1/2}, \quad S(u_{x_0}, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}) = 0
$$

или

$$
u_{x_0} = \left(\lambda + \sum_{k=1}^{3} u_{x_k}^2 + W^2\right)^{1/2}, \quad u_{x_3} = W(u_{x_1}, u_{x_2}). \tag{30}
$$

Совершим в (30) следующее контактное преобразование:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = y_0, \quad x_k = H_{y_k}, \quad x_3 = y_3, \quad u = \sum_{k=1}^{2} y_k H_{y_k} - H, \\
&u_{x_0} = -H_{y_0}, \quad u_{x_k} = y_k, \quad u_{x_3} = -H_{y_3}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{31}
$$

откуда

$$
H_{y_0} = -\left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2(y_1, y_2)\right)^{1/2}, \quad H_{y_3} = -W(y_1, y_2).
$$

Интегрируя эту систему ДУЧП, имеем

$$
H = -y_0 \left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2\right)^{1/2} - y_3 W - B(y_1, y_2), \tag{32}
$$

где $B \in C^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя полученный результат в формулы (31), получаем следующее выражение для функции $u(x)$:

$$
u = x_1 y_1 + x_2 y_2 - H = x_0 \left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2\right)^{1/2} + x_3 W + B(y_1, y_2), \tag{33}
$$

причем функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ определяются неявными соотношениями

$$
x_k = -x_0 (y_k + W W_{y_k}) \left(\lambda + y_1^2 + y_2^2 + W^2\right)^{-1/2} - x_3 W_{y_k} - B_{y_k}, \quad k = 1, 2. \tag{34}
$$

Обозначая в (33), (34)

$$
\begin{aligned}
&y_k(x) = v_k(x), \quad k = 1, 2, \quad A_0(v_1, v_2) = \left(\lambda + v_1^2 + v_2^2 + W^2(v_1, v_2)\right)^{1/2}, \\
&A_k(v_1, v_2) = -v_k, \quad k = 1, 2, \quad A_3(v_1, v_2) = -W(v_1, v_2),
\end{aligned}
$$

приходим к формулам (10).

Случай 3; $\operatorname{rank} U = 1$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать, что а) $u_{x_0x_0} \neq 0$; б) $\exists\, W_a = W_a(u_{x_0} \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$: $u_{x_a} = W_a(u_{x_0})$, $a = \overline{1,3}$.

С учетом этого факта уравнение эйконала (8) представляется в виде

$$u_{x_0} = \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} W_a^2(u_{x_0})\right)^{1/2}, \quad u_{x_a} = W_a(u_{x_0}), \quad a = \overline{1,3}. \tag{35}$$

Совершим в (35) следующее контактное преобразование

$$\begin{aligned} &y_0 = u_{x_0}, \quad y_a = x_a, \\ &H = x_0 u_{x_0} - u, \quad H_{y_0} = x_0, \quad H_{y_a} = -u_{x_a}, \quad a = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{36}$$

которое является взаимно-однозначным при условии $u_{x_0x_0} \neq 0$. В новых переменных y_μ, $H(y)$ переопределенная система ДУЧП (35) принимает вид

$$H_{y_a} = -W_a(y_0), \quad a = \overline{1,3}, \quad \sum_{a=1}^{3} W_a^2(y_0) = y_0^2 - \lambda,$$

откуда

$$H = -\sum_{a=1}^{3} W_a(y_0) y_a - B(y_0), \tag{37}$$

где $B(y_0) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставив формулу (37) в (36), получим следующее выражение для функции $u = u(x)$:

$$u = x_0 y_0 - H = x_0 \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} W_a^2(y_0)\right)^{1/2} + \sum_{a=1}^{3} W_a(y_0) x_a + B(y_0), \tag{38}$$

причем функция $y_0 = y_0(x)$ определяется из соотношения

$$x_0 \sum_{a=1}^{3} W_a(y_0) \dot{W}_a(y_0) \left(\lambda + \sum_{b=1}^{3} W_b^2(y_0)\right)^{-1/2} + \sum_{a=1}^{3} \dot{W}_a(y_0) x_a + \dot{B}(y_0) = 0, \tag{39}$$

и выполнено равенство $y_0^2 - \sum\limits_{a=1}^{3} W_a^2(y_0) = \lambda$.

Вводя в (38), (39) обозначения

$$y_0(x) = z(x), \quad A_0(z) = \left(\lambda + \sum_{a=1}^{3} W_a^2(z)\right)^{1/2}, \quad A_a(z) = -W_a(z), \quad a = \overline{1,3},$$

приходим к формулам (11).

Кроме того, нам необходимо рассмотреть вырожденный случай, когда матрица $U = \|u_{x_\mu x_\nu}\|_{\mu,\nu=0}^{3}$ нулевая, т.е. $u_{x_\mu x_\nu} = 0$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$. Отсюда следует

$$u(x) = c_\mu x_\mu + c_4, \tag{40}$$

причем комплексные константы c_μ, c_4 удовлетворяют соотношению

$$c_\mu c_\mu = \lambda. \tag{41}$$

Легко видеть, что формулы (40), (41) получаются из (11), если положить $A_\mu = c_\mu$, $B = c_4$.

Таким образом, общее решение нелинейного ДУЧП задается одной из формул (9)–(11). Теорема доказана.

Доказанная теорема иллюстрирует основные этапы применения метода нелокальных преобразований, последовательная реализация которого позволила получить полное аналитическое описание множества гладких решений нелинейного уравнения эйконала (8). Отметим, что это множество разбивается на три непересекающихся класса, каждый из которых характеризуется дискретным параметром $r = \operatorname{rank} U$. Причем это разбиение является пуанкаре-инвариантным, т.е. различные классы не переводятся друг в друга преобразованиями из группы Пуанкаре $P(1,3)$.

Доказательство теоремы 3. Идея доказательства состоит в следующем: совершив контактное преобразование вида (23), линеаризовать и проинтегрировать второе уравнение системы (12), а затем подставить полученный результат в первое уравнение, записанное в новых переменных. Полученные системы ДУЧП с меньшим количеством независимых переменных интегрируются в общем виде.

Множество решений системы (12) также разбивается на три непересекающихся класса в зависимости от значения величины $r = \operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$. Мы рассмотрим каждый из случаев $r = 1, 2, 3$ отдельно.

Случай 1; $r = 3$. Не умаляя общности, можно считать, что выполнено (24). Совершим в (12) преобразование (25), для чего необходимо продолжить его до производных второго порядка (см., например, [8]). После несложных, но довольно громоздких, преобразований получаем

$$\begin{gathered}
H_{11} = \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{12} = -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{23} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{31} = -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{22} \\ u_{13} & u_{23} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{22} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{23} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{13} & u_{23} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{33} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{01} = -\begin{vmatrix} u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \quad H_{02} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{03} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{01} & u_{02} & u_{03} \end{vmatrix} \Delta^{-1}, \\
H_{00} = -\det \|u_{\mu\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} \Delta^{-1}, \quad \Delta = \det \|u_{ab}\|^3_{a,b=1}.
\end{gathered} \tag{42}$$

В приведенных формулах использованы обозначения $H_{\mu\nu} = H_{y_\mu y_\nu}$, $u_{\mu\nu} = u_{x_\mu x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$. Следует подчеркнуть, что при условии (24) замена переменных (25), (42) является взаимно-однозначной.

Совершая при необходимости замену переменных $u \to u + C$, можно добиться, чтобы в (12) $C = 0$.

Переходя в (12) к переменным y_μ, $H(y)$ согласно формулам (25), (42), имеем

$$\begin{aligned} &\det \|H_{y_\mu y_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} + M_2(H) + 3[T(H)]^{-1} \det \|H_{y_a y_b}\|^3_{a,b=1} = 0, \\ &H_{y_0} = -\left(1 + \sum_{a=1}^{3} y_a^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{43}$$

где $T(H) = y_a H_{y_a} - H$, символом $M_2(H)$ обозначена сумма главных миноров матрицы $\|H_{y_\mu y_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0}$ второго порядка.

Подставляя общее решение второго уравнения системы (43), задаваемое формулой (26) при $\lambda = 1$, в первое уравнение и умножая полученный результат на $[T(H)]$, замечаем, что полученное выражение переписывается в виде полинома второй степени попеременной y_0, т.е.

$$\begin{aligned} &a_1 y_0^2 + a_2 y_0 + a_3 = 0, \quad a_1 = \Delta_3 B + y_a y_b B_{y_a y_b} + 3T(B), \\ &a_2 = M_2(B) + (\Delta_3 B) B_{y_a y_b} y_a y_b - y_a y_b B_{y_a y_c} B_{y_b y_c} - 3[T(B)]^2, \\ &a_3 = (1 + y_a y_a) \det \|B_{y_a y_b}\|^3_{a,b=1} + [T(B)]^3. \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь и далее под повторяющимися индексами, обозначенными буквами a, b, c, подразумевается суммирование от 1 до 3; k, l, n — от 1 до 2.

Так как величины a_1, a_2, a_3 не зависят от переменной y_0, то из (44) немедленно следует, что $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Следовательно, система двух нелинейных ДУЧП (12) при условии $\operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\| = 3$ приведена к системе трех нелинейных ДУЧП с тремя независимыми переменными

$$\begin{aligned} &1) \quad \Delta_3 B + y_a y_b B_{y_a y_b} = -3T(B); \\ &2) \quad M_2(B) + y_a y_b B_{y_a y_b} \cdot \Delta_3 B - y_a y_b B_{y_a y_c} B_{y_b y_c} = 3T^2(B); \\ &3) \quad \det \|B_{y_a y_b}\|^3_{a,b=1} = -T^3(B)(1 + y_a y_a)^{-1}. \end{aligned} \tag{45}$$

Система (45) существенно упрощается, если сделать в ней замену переменных

$$z_a = y_a (1 + y_b y_b)^{-1/2}, \quad p(z_1, z_2, z_3) = (1 + y_a y_a)^{-1/2} B(y_1, y_2, y_3). \tag{46}$$

Совершив в (45) замену (46), после довольно громоздких преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} &\Delta_3 p - z_a z_b p_{z_a z_b} = 0, \quad M_2(p) - (\Delta_3 p) z_a z_b p_{z_a z_b} + z_a z_b p_{z_a z_c} p_{z_b z_c} = 0, \\ &\det \|p_{z_a z_b}\|^3_{a,b=1} = 0, \end{aligned} \tag{47}$$

где, как и ранее, $\Delta_3 p = p_{z_a z_a}$, $M_2(p)$ — сумма главных миноров второго порядка матрицы $P = \|p_{z_a z_b}\|^3_{a,b=1}$.

Из третьего уравнения системы (47) следует, что матрица P является вырожденной. Поэтому ее ранг равен либо 1, либо 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Случай 1.1; $\operatorname{rank} P = 1$. Из этого условия согласно теореме о неявной функции следует существование таких функций $R_1, R_2 \subset C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$, для которых

$$p_{z_k} = R_k(p_{z_3}), \quad k = 1, 2. \tag{48}$$

Подставляя (48) во второе уравнение системы (47), видим, что оно удовлетворяется тождественно при произвольных R_1, R_2. Первое же уравнение принимает вид

$$\left[1+\dot R_k\dot R_k-(z_k\dot R_k+z_3)^2\right]p_{z_3z_3}=0,$$

откуда либо

$$p_{z_3z_3}=0, \tag{49}$$

либо

$$1+\dot R_k\dot R_k-(z_k\dot R_k+z_3)^2=0, \tag{50}$$

где $R_k=dR_k/dp_{z_3}$, $k=1,2$.

Пусть справедливо равенство (49), тогда, дифференцируя (48) по z_3, имеем $p_{z_3z_1}=p_{z_3z_2}=0$.

Дифференцируя (48) по z_1, z_2, окончательно заключаем, что $p_{z_az_b}=0$, $a,b=\overline{1,3}$, откуда

$$p=c_az_a+c_0,\quad c_\mu\in\mathbb{C}^1. \tag{51}$$

Пусть теперь $p_{z_3z_3}\neq 0$, тогда выполнено равенство (50). Для того чтобы проинтегрировать систему нелинейных ДУЧП первого порядка (48), (50), совершим контактное преобразование

$$\begin{aligned}&t_k=z_k,\quad t_3=p_{z_3},\quad G(t_1,t_2,t_3)=z_3p_{z_3}-p,\\&G_{t_k}=-p_{z_k},\quad G_{t_3}=z_3,\quad k=1,2.\end{aligned}$$

В результате имеем

$$G_{t_k}=-R_k(t_3),\quad k=1,2,\quad 1+\dot R_k\dot R_k-(t_k\dot R_k+G_{t_3})^2=0. \tag{52}$$

Интегрируя первые два уравнения системы (52), получаем

$$G=-R_k(t_3)t_k+Q(t_3), \tag{53}$$

где $Q\in C^2(\mathbb{C}^1,\mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Подставляя (53) в третье уравнение системы (52), получаем

$$1+\dot R_k\dot R_k-(t_k\dot R_k-\dot R_kt_k+\dot Q)^2=1+\dot R_k\dot R_k-\dot Q^2=0. \tag{54}$$

Следовательно, формула (53) при условии (54) задает общее решение системы ДУЧП (52). Возвращаясь к исходным переменным z_a, $p(z)$, имеем общее решение системы (48), (50)

$$p=R_k(t_3)z_k+t_3z_3-Q(t_3),\quad 1+\dot R_k\dot R_k-\dot Q^2=0, \tag{55}$$

где $t_3=t_3(z)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$\dot R_k(t_3)z_k+z_3-\dot Q(t_3)=0. \tag{56}$$

Для того чтобы формулы (55), (56) приобрели явно $O(3)$-инвариантный вид, переопределим параметрическую функцию следующим образом: $t_3(z)=\tilde R_3(\tau(z))$ и введем обозначения

$$\tilde R_k(\tau)=R_k(\tilde R_3(\tau)),\quad k=1,2,\quad \tilde Q(\tau)=-Q(\tilde R_3(\tau)).$$

С учетом этого формулы (55), (56) перепишутся в виде

$$p(z) = \tilde{R}_a(\tau)z_a + \tilde{Q}(\tau), \quad \dot{\tilde{R}}_a\dot{\tilde{R}}_a - \dot{\tilde{Q}}^2 = 0, \tag{57}$$

где $\tau = \tau(z)$ — гладкая функция, определяемая из соотношения

$$\dot{\tilde{R}}_a(\tau)z_a + \dot{\tilde{Q}}_a(\tau) = 0. \tag{58}$$

Таким образом, общее решение системы ДУЧП (47) задается одной из формул (51) либо ((57), (58)). Совершая в этих формулах замену переменных (45), получаем общие решения системы нелинейных ДУЧП (44)

$$B(y_1, y_2, y_3) = C_a y_a + C_0(1 + y_a y_a)^{1/2}, \tag{59}$$

$$B(y_1, y_2, y_3) = \tilde{R}_a(\tau)y_a + \tilde{Q}(\tau)(1 + y_a y_a)^{1/2}, \quad \dot{\tilde{R}}_a\dot{\tilde{R}}_a - \dot{\tilde{Q}}^2 = 0, \tag{60}$$

где $\tau = \tau(y)$ — гладкая функция, определяемая неявной формулой

$$\dot{\tilde{R}}_a(\tau)y_a + \dot{\tilde{Q}}(\tau)(1 + y_a y_a)^{1/2} = 0. \tag{61}$$

Очевидно, решение (59) содержится в классе (60), (61). Подставляя формулу (60) в (26) при $\lambda = 1$, имеем

$$H(y) = -(1 + y_a y_a)^{1/2}(y_0 + \tilde{Q}(\tau)) - y_a\tilde{R}_a(\tau),$$

где функция $\tau = \tau(y_1, y_2, y_3)$ определяется соотношением (61).

Наконец, переписывая полученное выражение в исходных переменных $x, u(x)$ (см. формулы (25)), приходим к следующему классу решений системы ДУЧП (12) при $c = 0$:

$$u(x) = x_a y_a - H = (x_a + \tilde{R}_a(\tau))y_a + (1 + y_a y_a)^{1/2}(x_0 + \tilde{Q}(\tau)), \tag{62}$$

где $y_a = y_a(x)$ определяется из равенств

$$x_a = H_{y_a} = -\tilde{R}_a(\tau) - y_a(1 + y_b y_b)^{-1/2}(x_0 + \tilde{Q}(\tau)), \quad a = \overline{1,3},$$

откуда

$$y_a = -(x_a + \tilde{R}_a)\left[(x_0 + \tilde{Q})^2 - (x_b + \tilde{R}_b)(x_b + \tilde{R}_b)\right]^{1/2}.$$

Подставляя полученные соотношения в формулу (62), получаем

$$u(x) = \left[(x_0 + \tilde{Q}(\tau))^2 - (x_a + \tilde{R}_a(\tau))(x_a + \tilde{R}_a(\tau))\right]^{1/2},$$

где $\tau = \tau(x)$ функция, определяемая из уравнения

$$\dot{\tilde{R}}_a(\tau)y_a + \dot{\tilde{Q}}(\tau)(1 + y_a y_a)^{1/2} \equiv (x_0 + \tilde{Q}(\tau))\dot{\tilde{Q}}(\tau) - (x_a + \tilde{R}_a(\tau))\dot{\tilde{R}}_a(\tau) = 0,$$

а $\tilde{Q}$, $\tilde{R}_a$ — произвольные гладкие функции, связанные равенством $\dot{\tilde{Q}}^2 - \dot{\tilde{R}}_a\dot{\tilde{R}}_a = 0$. Вводя в полученных соотношениях обозначения $A_0 = \tilde{Q}$, $A_a = \tilde{R}_a$, получаем формулы (13)–(15) при $B_\mu \equiv A_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$.

Случай 1.2; $\operatorname{rank} P = 2$. В этом случае, не умаляя общности, можно полагать, что

$$\det \left\| \begin{matrix} P_{z_1z_1} & P_{z_1z_2} \\ P_{z_2z_1} & P_{z_2z_2} \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Следовательно, существует такая функция $R \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$, для которой $P_{z_3} = R(p_{z_1}, p_{z_2})$. С учетом этого соотношения система ДУЧП (47) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &p_{z_kz_k} + (R_k - (z_k + z_3R_k))(R_n - (z_n + z_3R_n))p_{z_kz_n} = 0, \\ &(1 - z_kz_k - z_3^2)(1 + R_kR_k) + (z_3 - z_kR_k)^2 = 0, \quad p_{z_3} = R(p_{z_1}, p_{z_2}). \end{aligned} \tag{63}$$

Здесь обозначено $R_k = \partial R/\partial p_{z_k}$, $k = 1, 2$. Совершим в (63) следующее контактное преобразование:

$$\begin{aligned} &t_k = p_{z_k}, \quad t_3 = z_3, \quad G(t_1, t_2, t_3) = z_kp_{z_k} - p, \quad G_{t_k} = z_k, \quad k = 1, 2, \\ &G_{t_3} = -p_{z_3}, \quad G_{t_1t_1} = \delta^{-1}p_{z_2z_2}, \quad G_{t_1t_2} = -\delta^{-1}p_{z_1z_2}, \quad G_{t_2t_2} = \delta^{-1}p_{z_1z_1}, \\ &G_{t_3t_3} = -\delta^{-1} \det \|p_{z_az_b}\|_{a,b=1}^3, \quad G_{t_1t_3} = \delta^{-1}(p_{z_1z_2}p_{z_2z_3} - p_{z_2z_2}p_{z_1z_3}), \\ &G_{t_2t_3} = \delta^{-1}(p_{z_1z_3}p_{z_2z_1} - p_{z_1z_1}p_{z_2z_3}), \end{aligned}$$

где $\delta = p_{z_1z_1}p_{z_2z_3} - p_{z_1z_2}^2 \neq 0$.

В новых переменных t_a, $G(t)$ система ДУЧП (63) принимает вид

$$\begin{aligned} &1) \quad \left[1 + R_{t_2}^2 - (G_{t_2} + t_3R_{t_2})^2\right] G_{t_1t_1} - 2[R_{t_1t_2} - (G_{t_1} + t_3R_{t_1}) \times \\ &\qquad \times (G_{t_2} + t_3R_{t_2})G_{t_1t_2} + \left[1 + R_{t_1}^2 - (G_{t_1} + t_3R_{t_1})^2\right] G_{t_2t_2} = 0; \\ &2) \quad (1 - t_3^2 - G_{t_k}G_{t_k})(1 + R_{t_k}R_{t_k}) + (t_3 - R_{t_k}G_{t_k})^2 = 0; \\ &3) \quad G_{t_3} = R(t_1, t_2). \end{aligned} \tag{64}$$

Интегрируя последнее уравнение из (64), получаем

$$G = -t_3R(t_1, t_2) + iQ(t_1, t_2), \tag{65}$$

где $Q \in C^3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция.

Подставляя выражение (65) в первые два уравнения из (64) и расщепляя полученные соотношения по переменной t_3, приходим к системе двумерных ДУЧП для определения функции $R(t_1, t_2)$, $Q(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} &1) \quad (1 + Q_{t_k}Q_{t_k})(1 + R_{t_n}R_{t_n}) - (R_{t_k}Q_{t_k})^2 = 0, \\ &2) \quad (1 + Q_{t_k}Q_{t_k} + R_{t_k}R_{t_k})\Delta_2Q - (R_{t_k}R_{t_n} + Q_{t_k}Q_{t_n})Q_{t_kt_n} = 0, \\ &3) \quad (1 + Q_{t_k}Q_{t_k} + R_{t_k}R_{t_k})\Delta_2R - (R_{t_k}R_{t_n} + Q_{t_k}Q_{t_n})R_{t_kt_n} = 0, \end{aligned} \tag{66}$$

где $\Delta_2 = \partial_{t_1}^2 + \partial_{t_2}^2$.

Подставляя общее решение системы (66) в формулы (65), (46), (26) (при $\lambda = 1$) и переписывая полученный результат в явно $P(1,3)$-инвариантном виде, приходим к формулам (13)–(15) при $C = 0$ (опускаем соответствующие выкладки ввиду ограниченности объема статьи).

Таким образом, произвольное решение системы ДУЧП (12) при условии rank $\|u_{x_\mu x_\nu}\|_{\mu,\nu=0}^3 = 3$ принадлежит классу функций (13)–(15). Как установлено в [6] при исследовании совместности системы ДУЧП (1), (2), система (12) не имеет решений в случае, когда $\operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\|^3_{\mu,\nu=0} < 3$ Тем самым теорема 3 доказана.

Идея доказательства теорем 4–7 аналогична использованной выше. Именно: вначале, используя контактное преобразование вида (23), линеаризуем и интегрируем уравнение эйконала (общее решение которого дается одной из формул (26), (32), (37) при соответствующем выборе параметра λ), а затем, комбинируя локальные и нелокальные преобразования зависимых и независимых переменных, приводим системы ДУЧП для определения функций $B(y_1, y_2, y_3)$, $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$, $\omega_a(y_0)$, $B(y_0)$, которые получаются в результате подстановки формул (26), (32), (37) в соответствующие нелинейные волновые уравнения, к интегрируемым ДУЧП.

Далее мы ограничимся тем, что приведем схемы доказательств теорем 4–7.

Согласно [6] система нелинейных ДУЧП (16) совместна только в том случае, когда $\operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\| = 2$. Поэтому применяем к этой системе контактное преобразование (31), продолжая его до производных второго порядка

$$\begin{aligned}
&H_{11} = u_{22}\delta^{-1}, \quad H_{12} = -u_{12}\delta^{-1}, \quad H_{22} = u_{11}\delta^{-1},\\
&H_{01} = -\begin{vmatrix} u_{01} & u_{12} \\ u_{02} & u_{22} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad H_{23} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{12} & u_{23} \end{vmatrix}\delta^{-1},\\
&H_{13} = -\begin{vmatrix} u_{13} & u_{12} \\ u_{23} & u_{22} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad H_{02} = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{01} \\ u_{12} & u_{02} \end{vmatrix}\delta^{-1},\\
&H_{00} = -\begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ u_{01} & u_{11} & u_{12} \\ u_{02} & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad H_{03} = -\begin{vmatrix} u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \end{vmatrix}\delta^{-1},\\
&H_{33} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}\delta^{-1}, \quad \delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} \neq 0.
\end{aligned} \tag{67}$$

Здесь $H_{\mu\nu} \equiv \partial^2 H/\partial y_\mu \partial y_\nu$, $u_{\mu\nu} \equiv \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$.

Общее решение уравнения эйконала, записанного в переменных y, $H(y)$, имеет вид (32) при $\lambda = 1$. Подставляя (32) в первое уравнение из (16) и расщепляя его по переменным y_0, y_3, получаем систему нелинейных ДУЧП для определения $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned}
&(\Delta_2\omega + y_k y_n \omega_{y_k y_n})(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)) - (T(\omega)y_k + \omega_{y_k}) \times\\
&\quad \times (T(\omega)y_n + \omega_{y_n})\omega_{y_k y_n} = -2T(\omega)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)),\\
&\det \|\omega_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = T^2(\omega)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega))(1 + y_k y_k + \omega^2)^{-1},\\
&(\Delta_2 B + y_k y_n B_{y_k y_n})(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)) - (T(\omega)y_k + \omega_{y_k}) \times\\
&\quad \times (T(\omega)y_n + \omega_{y_n})B_{y_k y_n} = -2T(B)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)),\\
&\det \|B_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = T^2(B)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega))(1 + y_k y_k + \omega^2)^{-1},\\
&\\
&(\Delta_2 B)(\Delta_2\omega) - B_{y_k y_n}\omega_{y_k y_n} = 2T(\omega)T(B)(1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega)) \times\\
&\quad \times (1 + y_k y_k + \omega^2)^{-1}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Здесь использованы обозначения $T(f) = y_k f_{y_k} - f$, $\Delta_2 f = f_{y_1 y_1} + f_{y_2 y_2}$.

Интегрируя уравнения (68) и возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (31), приходим к выражениям (17), (18).

Далее, согласно [6] система нелинейных ДУЧП (5), (6) при $F(u) = (u + C)^{-1}$ имеет решения, удовлетворяющие одному из двух условий:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\| = 2; \\ &\text{б)} \quad \operatorname{rank} \|u_{x_\mu x_\nu}\| = 1. \end{aligned} \tag{69}$$

В случае а) применяем к этой системе контактное преобразование (31), (67). Общее решение уравнения эйконала, записанного в переменных y, $H(y)$ имеет вид (32) при $\lambda = 1$. Подставляя (32) в уравнение $\Box u = (u - C)^{-1}$, записанное в переменных y, $H(y)$, и расщепляя его по переменным y_0, y_3, получаем систему нелинейных ДУЧП для функций $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned} &1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + T^2(\omega) = 0, \quad \det \|\omega_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = 0, \\ &(1 + y_k y_k + \omega^2) \det \|B_{y_k y_n}\|^2_{k,n=1} = \\ &\quad = T(B)[(T(\omega)y_k + \omega_{y_k}(T(\omega)y_n + \omega_{y_n})B_{y_k y_n}], \\ &(1 + y_k y_k + \omega^2)(\Delta_2 B \Delta_2 \omega - \omega_{y_k y_n} B_{y_k y_n}) = \\ &\quad = T(\omega)[(T(\omega)y_k + \omega_{y_k})(T(\omega)y_n + \omega_{y_n})B_{y_k y_n}]. \end{aligned} \tag{70}$$

Интегрируя эти уравнения и возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (31), получаем (19).

В случае б) к системе (5), (6) при $F(u) = (u + C)^{-1}$ следует применить контактное преобразование (36), продолжив его до производных второго порядка

$$H_{00} = u_{00}^{-1}, \quad H_{0a} = -u_{0a}u_{00}^{-1}, \quad H_{ab} = (u_{0a}u_{0b} - u_{00}u_{ab})u_{00}^{-1}, \tag{71}$$

где $H_{\mu\nu} \equiv \partial^2 H/\partial y_\mu \partial y_\nu$, $u_{\mu\nu} \equiv \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $a, b = \overline{1,3}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$.

Общее решение уравнения эйконала, записанного в переменных $y, H(y)$, задается формулой (38) при $\lambda = 1$. Из требования, чтобы (38) удовлетворяло и первому уравнению исследуемой системы, вытекают такие уравнения для функций $\omega_a(y_0)$, $B(y_0)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{\omega}_a = (1 - \dot{\omega}_b\dot{\omega}_b)(y_0\dot{\omega}_a - \omega_a), \quad a = \overline{1,3}, \\ &\ddot{B} = (1 - \dot{\omega}_b\dot{\omega}_b)(y_0\dot{B} - B), \quad \omega_a\omega_a = y_0^2 - 1. \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений и возвращаясь к исходным переменным x, $u(x)$, устанавливаем, что полученное выражение является частным случаем формулы (19).

При $F(u) = 0$ система ДУЧП (5), (6) также имеет два непересекающихся класса решений, удовлетворяющих одному из условий (69). В случае а) ее общее решение задается формулой (32) при $\lambda = 1$, где $\omega(y_1, y_2)$, $B(y_1, y_2)$ удовлетворяют системе двумерных нелинейных ДУЧП

$$\begin{aligned} &1 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} + (y_k\omega_{y_k} - \omega)^2 = 0, \\ &[y_k(y_n\omega_{y_n} - \omega) + \omega_{y_k}][y_l(y_n\omega_{y_n} - \omega) + \omega_{y_l}]B_{y_k y_l} = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (71), подставляя полученный результат в (32) при $\lambda = 1$ и возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (31), получаем выражение (20).

В случае б) общее решение исследуемой системы ДУЧП задается формулой (38) при $\lambda = 1$, где функции $\omega_a(y_0)$, $B(y_0)$ удовлетворяют соотношениям вида

$$\dot{\omega}_a\dot{\omega}_a = 1, \quad \omega_a\omega_a = y_0^2 - 1. \tag{72}$$

Переписав (38) при $\lambda = 1$ в исходных переменных по формулам (36), после несложных преобразований получаем выражение (20) при $B_\mu \equiv \dot{A}_\mu$, $R_2 = \dot{R}_1$.

Нам осталось рассмотреть систему ДУЧП (3). Общее решение этой системы в зависимости от значения дискретного параметра $r = \operatorname{rank}\|u_{x_\mu x_\nu}\|$ задается:

а) формулой (26) при $\lambda = 0$, если $r = 3$ и функция $B(y_1, y_2, y_3)$, удовлетворяет переопределенной системе нелинейных ДУЧП

$$B_{y_a y_b} y_a y_b = 0, \quad B_{y_a y_c} B_{y_b y_c} y_a y_b = 0, \quad a, b = \overline{1, 3};$$

б) формулой (32) при $\lambda = 0$, если $r = 2$ и функции $B(y_1, y_2)$, $\omega(y_1, y_2)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\omega_{y_a} y_a - \omega = 0,\\
&\Delta_2\omega[\omega^2 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} y_n y_n - 2\omega\omega_{y_k} y_k] + y_k y_n \omega_{y_k y_n} +\\
&\quad + 2\omega\omega_{y_k}\omega_{y_n}\omega_{y_k y_n} - \omega_{y_k y_n}\omega_{y_k}\omega_{y_n}(y_l y_l) = 0,\\
&\Delta_2 B[\omega^2 + \omega_{y_k}\omega_{y_k} y_n y_n - 2\omega\omega_{y_k} y_k] + B_{y_k y_n} y_k y_n +\\
&\quad + 2\omega B_{y_k y_n} y_k \omega_{y_n} - B_{y_k y_n}\omega_{y_k}\omega_{y_n}(y_l y_l) = 0, \quad k, n, l = 1, 2.
\end{aligned}$$

в) формулой (37) при $\lambda = 0$, если $r = 1$ и функции $B(y_0)$, $\omega_a(y_0)$ удовлетворяют системе уравнений

$$1 - \dot{\omega}_a\dot{\omega}_a = 0, \quad y_0^2 - \omega_a\omega_a = 0.$$

Интегрируя записанные уравнения, подставляя полученные результаты в формулы (26), (32), (38) при $\lambda = 0$ и возвращаясь к исходным переменным x, $u(x)$ согласно формулам (25), (31), (36), приходим к выражениям (21а), (21б).

4. Явные решения системы ДУЧП (1), (2). В случае, когда $u = u(x)$ — это действительная функция от четырех действительных переменных x_μ, система (1), (2) с помощью замены переменных (4) приводится к виду

$$\Box u = F(u), \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = \lambda, \tag{73}$$

где $\lambda = -1, 0, 1$. При этом согласно [6] система (73) совместна, если и только если

$$F(u) = N\lambda(u + C)^{-1}, \tag{74}$$

где $N = 0, 1, 2, 3$, $C \in \mathbb{R}^1$.

Используя полученные выше результаты, построим многопараметрические классы точных решений системы (73), (74) в классе действительно-значных функций $u(x)$:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad F(u) = 3(u+C)^{-1}, \quad \lambda = 1,\\
&\qquad (u+C)^2 = (x_\mu + C_\mu)(x_\mu + C_\mu);\\
&2)\quad F(u) = 2(u+C)^{-1}, \quad \lambda = 1,\\
&\qquad (u+C)^2 = (x_0 + C_0)^2 - (x_1 + C_1)^2 - (x_2 + C_2)^2;\\
&3)\quad F(u) = (u+C)^{-1}, \quad \lambda = 1,\\
&\qquad (u+C)^2 = (x_0 + C_0)^2 - (x_1 + C_1)^2;\\
&4)\quad F(u) = 0, \quad \lambda = 1,\\
&\qquad u = x_0 + C_0,
\end{aligned}
$$

где $C_\mu \in \mathbb{R}^1$, $\mu = \overline{0,3}$.

Перечисленные выше решения получаются из формул (12)–(20), если считать в них функции $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_\mu(\tau)$ постоянными. Все они могут быть получены с помощью симметрийной редукции пуанкаре-инвариантной системы ДУЧП (73), (74) к обыкновенным дифференциальным уравнениям [10]. Ниже мы приведем решения системы (73), (74) при $\lambda = -1$, которые в принципе не могут быть получены в рамках классического подхода Ли.

Заметим, что уравнения (73) при $\lambda = -1$ получаются из (5), (6) с помощью замены $u \to iu$. С учетом этого факта общее решение системы

$$
\Box u = -3u^{-1}, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = -1 \tag{75}
$$

в классе комплекснозначных функций принимает вид

$$
\begin{aligned}
&u^2 = -(x_\mu + A_\mu(\tau))(x_\mu + A_\mu(\tau)),\\
&(x_\mu + A_\mu(\tau))B_\mu(\tau) = 0, \quad B_\mu \dot{A}_\mu = B_\mu B_\mu = 0.
\end{aligned} \tag{76}
$$

Положим в (76) $A_0 = \tau$, $A_1 = C\sin\frac{\tau}{C}$, $A_2 = C\cos\frac{\tau}{C}$, $A_3 = 0$, $C \in \mathbb{R}^1$, $B_\mu = A_\mu$, $\mu = \overline{0,3}$. При этом формулы (76) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&x_0 + \tau - x_1\cos\frac{\tau}{C} + x_2\sin\frac{\tau}{C} = 0,\\
&u^2 = \left(x_1 + C\sin\frac{\tau}{C}\right)^2 + \left(x_2 + C\cos\frac{\tau}{C}\right)^2 + x_3^2 - (x_0+\tau)^2.
\end{aligned}
$$

После несложных алгебраических преобразований находим явный вид функции

$$
\tau(x,u) = \pm\left\{\pm 2C\left(u^2 - x_3^2\right)^{1/2} + x_a x_a - u^2 - C^2\right\}^{1/2},
$$

откуда заключаем, что функция $u(x)$ определяется формулой

$$
x_1\cos\frac{\tau}{C} - x^2\sin\frac{\tau}{C} = x_0 + \tau.
$$

Подобным же образом получается еще один класс точных решений системы (75)

$$
\begin{aligned}
&x_0\,\mathrm{sh}\,\frac{\tau}{C} - x_1\,\mathrm{ch}\,\frac{\tau}{C} = C \pm \sqrt{u^2 - x_3^2},\\
&\tau = -x^2 \pm \left\{x_0^2 - x_1^2 + \left(C \pm \sqrt{u^2 - x_3^2}\right)^2\right\}^{1/2};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5)\quad & F(u) = -2u^{-1}, \quad \lambda = -1,\\
& C \pm u = x_0 \operatorname{sh}\frac{\tau}{C} - x_1 \operatorname{ch}\frac{\tau}{C},\\
& \tau = -x^2 \pm \sqrt{x_0^2 - x_1^2 + (C \pm u)^2};\\
& C \pm u = x_1 \sin\frac{\tau}{C} + x_2 \cos\frac{\tau}{C},\\
& \tau = -x_0 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - (-C \pm u)^2};\\
& x_0 \operatorname{sh}\tau - x_3 \operatorname{ch}\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm u \pm \sqrt{-u^2 - x_\mu x_\mu}\right),\\
& \tau = \pm \arcsin\frac{\sqrt{-u^2 - x_\mu x_\mu} - u}{\sqrt{2(x_1^2 + x_2^2)}} - \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.
\end{aligned}
$$

В приведенных формулах $C \in \mathbb{R}^1$, $C \neq 0$.

5. Заключение. В случае, когда количество независимых переменных в системе (1), (2) равно трем, ее общее решение построено Коллинзом [11]. Однако использованный им геометрический метод, как отмечал сам автор, не обобщается на случай четырех независимых переменных. Полученные им решения содержатся в приведенных выше классах решений системы (1), (2) при $A_3 = B_3 = R_3 = 0$.

В 1914 г. Гарри Бейтмен в [12] построил следующий класс точных решений четырехмерной системы (3): $u(x) = C_\mu(\tau)x_\mu + C(\tau)$, где $\tau = \tau(x)$ — функция, определяемая формулой $\dot{C}_\mu(\tau)x_\mu + \dot{C}(\tau) = 0$, а $C_\mu(\tau)$, $C(\tau)$ — произвольные гладкие функции, связанные соотношениями $C_\mu C_\mu = 0$, $\dot{C}_\mu \dot{C}_\mu = 0$ Эти формулы, очевидно, получаются из (21а), если положить $\partial C_\mu/\partial\tau_2 = 0$, $\mu = \overline{0,3}$.

Общее решение трехмерной системы (3) при $u = u(x_0, x_1, x_2)$ в 1932–1933 гг. построили В.И. Смирнов и С.Л. Соболев [13–15]:

$$
A_0(u)x_0 - A_1(u)x_1 - A_2(u)x_2 + B(u) = 0,
$$

где A_0, A_1, A_2, B — произвольные гладкие функции, связанные соотношением $A_0^2(u) - A_1^2(u) - A_2^2(u) = 0$

Эти формулы, очевидно, получаются из (21 б) при $B_\mu = 0$, $\mu = \overline{0,3}$, $A_3 = 0$. В 1944 г. Н. П. Еругин [16] обобщил формулу Смирнова–Соболева на четырехмерный случай.

Из приведенных результатов вытекает такой общий качественный вывод. Все решения линейных и нелинейных скалярных пуанкаре-инвариантных волновых уравнений следует характеризовать рангом матрицы $\|u_{x_\mu x_\nu}\|$ и значениями параметра λ, входящего в уравнение эйконала (8). Параметр λ может принимать одно из трех значений: -1, 0, 1. Важно подчеркнуть, что эти числа дают пуанкаре-инвариантную характеристику множества решений волновых уравнений.

1. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Lioville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 9, 3645–3658.

2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Inst. for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.

3. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.

4. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.

5. Cieciura G., Grundland A., A certain class of solutions of the nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 12, 3460–3469.

6. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона, Препринт 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.

7. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, New York, Acad. Press, V. 1, 1965, 511 p.; V. 2, 1972, 301 p.

8. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт N 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 53 с.

9. Lie S., Vorlesungen über continuerliche Gruppen, Leipzig, Teubner, 1893, 805 p.

10. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

11. Collins C.B., Complex potential equations I. A technique for solution, *Proc. Cambr. Phyl. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.

12. Bateman H., The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion of the basis of Maxwell's equations, Cambridge, Univ. Press, 1915, 180 p.

13. Смирнов В.И., Соболев С.Л., Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний, *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1932, **20**, 37 с.

14. Смирнов В.И., Соболев С.Л., О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии, *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, 1933, **29**, 43–51.

15. Соболев С.Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, *Тр. физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова*, 1934, **5**, 259–264.

16. Еругин Н.П., О функционально-инвариантных решения, *Доклады АН СССР*, 1944, **20**, № 9, 385–386.

Общие решения нелинейного волнового уравнения и эйконала

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ, И.В. РЕВЕНКО

The necessary and sufficient compatibility conditions are established for the system of differential equations consisting of the nonlinear wave and eikonal equations in the four-dimensional pseudo-Euclidian space. A general solution of this system is constructed.

Проблема редукции (понижения размерности) нелинейного волнового уравнения

$$\Box v = H(v), \tag{1}$$

где $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta_3$, $v = v(x_0, x_1, x_2, x_3)$, H — произвольная гладкая функция от v, с помощью анзаца [1]

$$v = \varphi(u) \tag{2}$$

сводится к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных на одну неизвестную функцию $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$$\Box u = F_1(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = F_2(u). \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве $R(1,3)$ с метрикой $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

Ниже построены общие решения системы (3), (4). Вывод основных формул весьма громоздкий, поэтому читателя, интересующегося деталями доказательств, мы отсылаем к работе [2].

Поскольку система дифференциальных уравнений (3), (4) является переопределенной, нужно исследовать необходимые и достаточные условия се совместности (отметим, что необходимые условия были установлены в [3, 4]).

Теорема 1. *Пусть в (3), (4)* $u = u(x) \in C^3(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$, $F_1(u), F_2(u) \subset C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$. *Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных (3), (4) совместна, если и только если*

$$1)\quad F_1(u) = F_2(u) = 0 \tag{4}$$

или

$$2)\quad F_1(u) = N(\dot{f}f)^{-1} - \ddot{f}(\dot{f})^{-3}, \quad F_2(u) = (\dot{f})^{-2}, \tag{5}$$

где $f = f(u) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ *— произвольная функция, удовлетворяющая условию* $\dot{f}(u) \not\equiv 0$; N *— дискретный параметр, принимающий значения* 0, 1, 2, 3; $\dot{f} = df/du$.

Доклады АН УССР, 1991, № 10, 29–31.

Следствие. *Система уравнений*

$$\Box u = 0, \quad u_{x_\mu} u_{x^\mu} = F_2(u)$$

совместна, если и только если функция $F_2(u)$ задается одним из выражений

а) $F_2(u) = C_1 \exp(C_2 u)$,

б) $F_2(u) = (C_1 u + C_2)^{2N/(1-N)}$, $N = 0, 2, 3$; где $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}^1$.

Для доказательства этого утверждения следует проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение $F_1(u) = N(\dot{f} f)^{-1} - \ddot{f}(\dot{f})^{-3} = 0$ и подставить результат в соотношение $F_2(u) = (\dot{f})^{-2}$.

Теорема 2. *Общее решение системы дифференциальных уравнений (3), (4) при $F_1 = F_2 = 0$ задается одной из формул*

$$\begin{aligned} &1) \quad G(A_\mu(u)x^\mu, B_\mu(u)x^\mu, u) = 0, \\ &2) \quad u(x) = C_\mu(\tau_1\tau_2)x^\mu + C(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $G \in C^1(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, $A_\mu(u)$, $B_\mu(u)$ — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$A_\mu A^\mu = 0, \quad A_\mu B^\mu = 0, \quad B_\mu B^\mu = 0, \tag{7}$$

$\tau_a = \tau_a(x)$ — комплекснозначные функции, определяемые неявными формулами $\frac{\partial C_\mu}{\partial \tau_a} x^\mu + \frac{\partial C}{\partial \tau_a} = 0$, $a = 1, 2$; $C_\mu(\tau_1, \tau_2)$, $C(\tau_1, \tau_2)$ — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$C_\mu C^\mu = 0, \quad \frac{\partial C_\mu}{\partial \tau_a} \frac{\partial C_\mu}{\partial \tau_b} = 0, \quad a, b = 1, 2.$$

Замечание 1. Общее решение системы (3), (4) при $F_1 = F_2 = 0$ в случае, когда $u = u(x_0, x_1, x_2)$, дается формулой Смирнова–Соболева [5]

$$A_0(u)x_0 - A_1(u)x_1 - A_2(u)x_2 + A(u) = 0, \quad A_0^2 - A_1^2 - A_3^2 = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что формулы (9) получаются из (7), (8) при $B_\mu = 0$, $A_3 = 0$.

Замечание 2. Бейтмен в работе [6] получил класс точных решений, уравнений (3), (4) при $F_1 = F_2 = 0$ вида $u(x) = C_\mu(\tau)x^\mu + C(\tau)$, где $\tau = \tau(x)$ — функция, определяемая неявным соотношением $\dot{C}_\mu(\tau)x^\mu + \dot{C}(\tau) = 0$, а $C_\mu(\tau)$, $C(\tau)$ — произвольные функции, удовлетворяющие равенствам $C_\mu C^\mu = 0$, $\dot{C}_\mu \dot{C}^\mu = 0$.

Нетрудно показать, что эти решения также содержатся классе (7).

Теорема 3. *Общее решение системы дифференциальных уравнений (3), (4) в случае, когда F_1, F_2 имеют вид (6), задается одной формул*

1) $N = 0$

$$f(u(x)) = A_\mu(\tau)x^\mu + R_1(\tau),$$

где $\tau = \tau(x)$ определяется неявным соотношением $B_\mu(\tau)x^\mu + R_2(\tau) = 0$, а $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$, $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ — произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям: $A_\mu A^\mu = 1$, $A_\mu B^\mu = 0$, $\dot{A}_\mu B^\mu = 0$, $B_\mu B^\mu = 0$;

2) $N=1$

$$f^2(u(x)) = (a_\mu x^\mu + R_1)^2 - (d_\mu x^\mu + R_2)^2,$$

где $R_a = R_a(b_\mu x^\mu + i c_\mu x^\mu) \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ *— произвольные функции,* a_μ, b_μ, c_μ, d_μ *— произвольные константы, удовлетворяющие соотношениям*

$$-a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = d_\mu d^\mu = -1,$$
$$a_\mu b^\mu = a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0;$$

3) $N=2$

а) $$f^2(u(x)) - (x_\mu + A_\mu(\tau))(x^\mu + A^\mu(\tau)) = [B_\mu(\tau)(x^\mu + A^\mu(\tau))]^2,$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой* $(x_\mu + A_\mu(\tau))\dot{B}^\mu(\tau) = 0$; $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям* $B_\mu B^\mu = -1$, $\dot{B}_\mu \dot{B}^\mu = 0$, $\dot{A}_\mu = R(\tau)\dot{B}_\mu$ *при произвольной функции* $R(\tau) \in C^1(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$;

б) $$f^2(u(x)) - (x_\mu + \theta_\mu)(x^\mu + \theta^\mu) = [B_\mu(\tau)(x^\mu + \theta^\mu)]^2,$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой* $(x_\mu + \theta_\mu)\dot{B}^\mu(\tau) = 0$; θ_μ *— произвольные комплексные константы,* $B_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие* $B_\mu B^\mu = -1$, $\dot{B}_\mu \dot{B}^\mu = 0$;

c) $$f^2(u(x)) - (x_\mu + A_\mu(\tau))(x^\mu + A^\mu(\tau)) = [d_\mu(x^\mu + A^\mu(\tau))]^2,$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой*

$$(x_\mu + A_\mu(\tau))\dot{A}^\mu(\tau) + (x_\mu + A_\mu(\tau))d^\mu d_\nu \dot{A}^\nu(\tau) = 0;$$

$A_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношению* $\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + (d_\mu \dot{A}^\mu)^2 = 0$;

4) $N=3$

$$f^2(u(x)) = (x_\mu + A_\mu(\tau))(x^\mu + A^\mu(\tau)),$$

где $\tau = \tau(x)$ *определяется неявной формулой* $(x_\mu + A_\mu(\tau))B^\mu(\tau) = 0$; $A_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ *— произвольные комплекснозначные функции, удовлетворяющие соотношениям* $\dot{A}_\mu B^\mu = 0$, $B_\mu B^\mu = 0$.

Отметим, что в трехмерном случае $x \in R(1,2)$ общее решение системы (3), (4) было построено Коллинзом [7]. Однако используемый геометрический метод, как отмечал сам автор, не обобщается на случай четырех независимых переменных. Полученные им решения ее держатся в приведенных выше классах решений при $N = 0, 1, 2$.

Таким образом, теоремы 1–3 дают полное решение задачи исследования совместности и построения общего решения системы нелинейных волновых уравнений (3), (4).

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т матем. АН УССР, 1981.
2. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В., Совместимость и решения нелинейные уравнений д'Аламбера и Гамильтона, Препринт N 90.39, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1990, 65 с.
3. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988, 5 p.
4. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.
5. Соболев С.Л., Функционально-инвариантные решения волнового уравнения, *Труды физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова*, Л., Изд-во АН СССР, 1934, **5**, 259–264.
6. Бейтмен Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, М., Физматгиз, 1958, 179 с.
7. Collins C.B., Complex potential equations I. A technique for solutions, *Proc. Camb. Ph. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.

On the reduction of the nonlinear multi-dimensional wave equations and compatibility of the d'Alembert–Hamilton system

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV, I.A. YEGORCHENKO

The necessary conditions of the compatibility of the d'Alembert–Hamilton system in Minkowsky space $\mathbb{R}(1,n)$ are established. The problem of reduction of $P(1,n)$-invariant wave equations to ordinary differential equations is discussed.

1. Since Euler the method of reduction of partial differential equations (PDE) to ordinary differential equations (ODE) is one of the most effective ways to construct the exact solutions of PDE.

The papers [1–5] contain the symmetry reduction to ODE of the d'Alembert equation

$$\Box u = G(u), \quad \Box \equiv \partial^2_{x_0} - \partial^2_{x_1} - \cdots - \partial^2_{x_n} \tag{1}$$

(where $G(u)$ is an arbitrary smooth function). So the many-dimensional PDE [1] with the ansatz

$$u = \varphi(\omega), \tag{2}$$

where $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$; $\omega = \omega(x) \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^1)$, the new variable, is reduced to the ODE of the form

$$\omega_\mu \omega_\mu \ddot{\varphi}(\omega) + (\Box\omega)\dot{\varphi}(\omega) = G(\varphi), \tag{3}$$

where $\omega_\mu \equiv \partial\omega/\partial x_\mu$, $\mu = 0, \ldots, n$. Hereafter summation over repeated indices is understood in the Minkowsky space $\mathbb{R}(1,n)$ with the metric $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$.

In [3–5] using the symmetry properties of Eq. (1) and the subgroup structure of the $P(1,n)$ group the new variables $\omega = \omega(x)$ for Eq. (3) had been constructed.

Equation (3) depends on ω and does not depend on "old" variables x. $\omega(x)$ are invariants of the corresponding subgroups of the Poincaré group $P(1,n)$.

In the present paper we suggest the approach to the problem of reduction of PDE to ODE more general than one based on the employment of the symmetry properties of PDE [1–5].

Definition. *We say that the ansatz (2) reduces PDE (1) to ODE (3) when the new variable $\omega = \omega(x)$ satisfies both*

$$\Box\omega = F_1(\omega), \quad \omega_\mu\omega_\mu = F_2(\omega), \tag{4}$$

where $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ are arbitrary smooth functions. Further we call Eqs. (4) the d'Alembert–Hamilton system.

J. Math. Anal. and Appl., 1991, **161**, № 2, 352–360.

Evidently for every $\omega(x)$ satisfying the system (4) ODE (1) depends on ω only. Thus the problem of finding of the ansatze (2) reducing PDE (1) to ODE leads to the construction of solutions of the d'Alembert–Hamilton system (4).

Before solving the system (4) it is necessary to clear the matter of its compatibility, i.e., to describe all functions F_1, F_2 for the system (4) to possess nontrivial solutions.

In the three-dimensional case ($n = 2$) the compatibility of the system (4) was investigated by Collins [6] with the geometry methods. The compatibility of the d'Alembert–Hamilton system in the four-dimensional space $\mathbb{R}(1,3)$ was investigated in detail in [7]. We had generalized the results of [7] for the case of $(1+n)$-dimensional system of PDE (4) using the classical Hamilton–Cayley theorem.

2. The system (4) with the change of dependent variable $z = z(\omega)$ transforms to the following system of PDE

$$\Box\omega = F(\omega), \quad \omega_\mu\omega_\mu = \lambda, \quad \lambda = \text{const}, \tag{5}$$

Eq. (3) having the form

$$\lambda\ddot{\varphi} + F(\omega)\dot{\varphi} = G(\varphi). \tag{6}$$

Before formulating the main result we adduce some preliminary statements.

Lemma 1. *The solutions of the system (5) satisfy the equalities*

$$\begin{aligned}
&\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\mu} = -\lambda\dot{F}(\omega), \quad \omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2\mu} = \frac{1}{2!}\lambda^2\ddot{F}(\omega), \quad \ldots, \\
&\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\ldots\omega_{\nu_N\mu} = \frac{(-\lambda)^N}{N!}F^{(N)}(\omega), \quad N \geq 1,
\end{aligned} \tag{7}$$

where $\omega_{\mu\nu} \equiv \partial^2\omega/\partial x_\mu\partial x_\nu$, $\mu,\nu = 0,\ldots,n$.

Proof. We prove the lemma with the method of mathematical induction by N.

Having differentiated twice the second equation of the system (5) with respect to x_α, x_β we obtain the relation

$$\omega_{\mu\alpha\beta}\omega_\mu + \omega_{\mu\alpha}\omega_{\mu\beta} = 0. \tag{8}$$

Convoluting (8) with the metric tensor $g^{\alpha\beta}$ we come to the equality

$$\omega_{\mu\alpha}\omega_{\mu\alpha} + \omega_\mu\Box\omega_\mu = 0.$$

Since $\Box\omega_\mu = (\partial/\partial x_\mu)F(\omega) = \omega_\mu\dot{F}(\omega)$, on the solutions of the system (5) the last expression can be rewritten in the form

$$\omega_{\mu\alpha}\omega_{\mu\alpha} + \lambda\dot{F}(\omega) = 0.$$

Thus the basic statement of induction is proved.

Let us suppose that the lemma holds for $N = k$. We prove that whence its statement follows for $N = k + 1$.

Convoluting (8) with the tensor

$$\omega_{\alpha\nu_2}\omega_{\nu_2\nu_3}\cdots\omega_{\nu_k\beta}$$

we get the equality

$$\omega_{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu_2}\cdots\omega_{\nu_k\beta}\omega_{\beta\mu} + \omega_\mu\omega_{\alpha\beta\mu}\omega_{\alpha\nu_2}\cdots\omega_{\nu_k\beta} = 0. \tag{9}$$

Since

$$\omega_\mu\omega_{\alpha\beta\mu}\omega_{\alpha\nu_2}\ldots\omega_{\nu_k\beta} = \frac{1}{k+1}\omega_\mu(\omega_{\beta\alpha}\omega_{\alpha\nu_2}\cdots\omega_{\nu_k\beta})_\mu =$$
$$= \frac{1}{k+1}\omega_\mu\left(\frac{(-\lambda)^k}{k!}F^{(k)}(\omega)\right)_\mu = -\frac{(-\lambda)^{k+1}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\omega)$$

(we used the assumption of induction) then it follows from (9) that

$$\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\cdots\omega_{\nu_{k+1}\mu} = \frac{(-\lambda)^{k+1}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\omega)$$

The Lemma is proved.

Lemma 2. *On the solutions of the system (5) the equality*

$$\det\|\omega_{\mu\nu}\| = 0 \tag{10}$$

holds.

The proof follows from the fact that (10) is the criterium of functional dependence of $\omega_0,\ldots,\omega_n$.

Theorem 1. *For the system (5) to be compatible it is necessary that*

$$F(\omega) = \lambda\dot{f}(\omega)f^{-1}(\omega), \tag{11}$$

f satisfying the condition

$$f^{(n+1)}(\omega) \equiv \frac{d^{n+1}f(\omega)}{d\omega^{n+1}} = 0. \tag{12}$$

Proof. Let us first consider the case $\lambda \neq 0$. For an arbitrary $(n+1)\times(n+1)$-matrix $W = \|w_{\mu\nu}\|$ by virtue of the Hamilton–Cayley theorem the equality

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sum M_k\,\mathrm{tr}\,(W^{n-k}) + (-1)^n n\det W = 0 \tag{13}$$

is true. $\sum M_k$ in (13) is the sum of basic minors of the order k of the matrix W, which is calculated with the recurrent formula

$$\begin{aligned}&\sum M_k = \left[\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\sum M_l\,\mathrm{tr}\,(W^{k-l})\right](-1)^{k-l}k^{-1}, \quad k\geq 1;\\ &\sum M_0 = 1.\end{aligned} \tag{14}$$

We take the matrix elements of W as

$$w_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{n} g_{\alpha\nu}\omega_{\mu\alpha},$$

then from Lemmas 1, 2

$$\mathrm{tr}\,(W^k) = \frac{(-\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}F^{(k-1)}(\omega), \quad \det W = 0. \tag{15}$$

The substitution of formula (15) into (14) gives the ODE for determination of the function $F = F(\omega)$. Let us show that this ODE reduces using the nonlocal change of variable (11) to the form (12).

Let

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \sum M_k \operatorname{tr}(W^{N-k+1})$$

then $\sum M_k = ((-1)^{k-1}/k) Y_{k-1}$; whence

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^{N-k+1}}{k(N-k)!} \lambda^{N+1-k} \left(\frac{\dot f}{f}\right)^{(N-k)} Y_{k-1}.$$

Using the method of mathematical induction we prove that

$$Y_N = \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \lambda^{N+1} \frac{f^{(N+1)}}{f}. \tag{16}$$

For $N = 1, 2, 3$ this equality follows from the results of [7]. Let us assume that (16) holds for every $m \in \mathbb{N}$, $m \le N-1$. We show that whence it follows that (16) is true for $m = N$.

Indeed

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k-1)!} \lambda^k \frac{f^{(k)}}{f} \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!} \lambda^{N+1-k} \left(\frac{\dot f}{f}\right)^{(N-k)} =$$

$$= \frac{(-1)^{N+1}\lambda^{N+1}}{N!} \sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{f^{(k)}}{f} \left(\frac{\dot f}{f}\right)^{(N-k)} = \frac{(-1)^{N+1}\lambda^{N+1}}{N!} \frac{f^{(N+1)}}{f},$$

the same as what was to be proved.

From the equality (10) $Y_n = (-1)^{n+1} n \det W = 0$ whence by virtue of (15), (16) we obtain

$$f^{(n+1)} = 0.$$

Let us consider now the case $\lambda = 0$. Using Lemmas 1, 2 we have

$$\operatorname{tr}(W^k) = 0, \quad k = \overline{2, n}; \quad \det W = 0.$$

Taking into account these equalities we can rewrite the Hamilton–Cayley identity in the form

$$Y_n = 0,$$

where $Y_n = (-1)^{n+1}(F/n!)$. Whence we conclude that $F = 0$. The theorem is proved.

Consequence. *The system $\Box u = F(u)$, $u_\mu u_\mu = 0$ is compatible iff $F(u) = 0$.*

Proof. The necessity of the above statement follows from the Theorem 1. The sufficiency is proved by the fact that the function $u(x) = x_0 + x_1$ satisfies both the d'Alembert ($\Box u = 0$) and the Hamilton ($u_\mu u_\mu = 0$) equations.

Let us note that this consequence was proved in [9] by another technique.

Theorem 2. *The system of PDE (5) is invariant with respect to the conformul group of transformations of the Minkowskv space* $\mathbb{R}(1,n)$ *iff [7, 8]*

$$F(\omega) = \lambda n(\omega + C)^{-1}, \quad c = \text{const}, \quad \lambda > 0. \tag{17}$$

The proof is carried out by S. Lie's method.

Let us note that the formula (17) is obtained from (11) when $f = (\omega + c)^n$. So Theorem 2 demonstrates the deep connection between the symmetry of overdetermined system of PDE (5) and its compatibility.

Note. It is well known that PDE (1) is invariant under the conformal group $C(1,n)$ iff $G(u) = cu^{(n+3)/(n-1)}$ (see, e.g., [3, 10, 11]). Thus the additional condition $u_\mu u_\mu = \lambda$ picks out the subset of solutions of Eq. (1) which admits a wider symmetry group than the set of its solutions in a whole. In other words the nonlinear d'Alembert equation is conditionally invariant under the conformal group if $G(u) = \lambda n(u + c)^{-1}$ (the notion of conditional invariance of PDE was introduced in [12–14]; see also [15, 16]).

The sufficient conditions of the compatibility of the d'Alembert–Hamilton system (5) are

$$F(\omega) = |\lambda| N(\omega + c)^{-1}, \tag{18}$$

where $c = \text{const}$, $N = 1 - n, 2 - n, \ldots, 0, 1, \ldots, n$.

As shown by Collins [6] the above conditions are the necessary and sufficient ones for the system (5) to be compatible if $n = 1, 2$. In the Appendix we list exact solutions of the d'Alembert Hamilton system under (18) for $n = 3$ obtained in [3, 5, 7–9, 17]. Let us emphasize that solutions numbered (5)–(7), (9) are not invariants of the Poincaré group $P(1,n)$. Nevertheless they satisfy the d'Alembert–Hamilton system and, consequently, can be used to reduce Eq. (1) to ODE via ansatz (2).

In conclusion we briefly consider the reduction of the arbitrary Poincaré-invariant wave equation to ODE. As it was established in [18] every $P(1,n)$-invariant PDE for the scalar function $u = u(x)$ can be represented in the form where $H(R_1, \ldots, R_n; S_1, \ldots, S_n, u) = 0$

$$R_j = u_{\mu_1} u_{\mu_1\mu_2} \cdots u_{\mu_{j-1}\mu_j} u_{\mu_j}, \quad S_j = u_{\mu_1\mu_2} u_{\mu_2\mu_3} \cdots u_{\mu_j\mu_1},$$

and H is some continuous function.

It turns out that ansatz (2), where $\omega = \omega(x)$ satisfies system (5), reduces every PDE of the form (19) to ODE.

Using Lemma 2 we obtain

$$S_j(\varphi(\omega)) = \lambda^j \ddot{\varphi}^j + \dot{\varphi}^j S_j(\omega) = \lambda^j \ddot{\varphi}^j + \dot{\varphi}^j \frac{(-\lambda)^{j-1}}{(j-1)!} F^{(j-1)}(\omega),$$

$$R_j(\varphi(\omega)) = \dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi}^{j-1} \lambda^j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Substituting these formulae to (19) we get

$$H(R_1, \ldots, R_n, S_1, \ldots, S_n u)|_{u=\varphi(\omega)} = \tilde{H}(\omega, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}).$$

Thus knowing the exact solutions of the d'Alembert–Hamilton system we can construct using ansatz (2) the exact solutions of the arbitrary Poincaré-invariant equation (19).

Appendix

Exact solutions of the d'AIembert–Hamilton system (5)
in $1+3$-dimensional Minkowsky space

N	$*$	$F(\omega)$	$\omega=\omega(x)$
1	1	0	x_0
2	1	ω^{-1}	$\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2}$
3	1	$2\omega^{-1}$	$\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2}$
4	1	$3\omega^{-1}$	$\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^{1/2}$
5	-1	0	$x_1\cos(h_1)+x_2\sin(h_2)+h_2$
6	-1	0	$x_0-x_1\cos(g_1)-x_2\sin(g_1)-g_2=0$
7	-1	$-\omega^{-1}$	$\left[(x_1+h_1)^2+(x_2+h_2)^2\right]^{1/2}$
8	-1	$-2\omega^{-1}$	$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$
9	0	0	h_1

Note. Here h_1, h_2 are arbitrary smooth functions on x_0+x_3 and g_1, g_2 are arbitrary smooth functions on $\omega+x_3$.

Acknowledgments. This work was started when one of the authors (W.I. Fushchych) visited the University of Minnesota, Institute for Mathematics and its Applications. W. Fushchych acknowledges Peter Olver and Avner Friedman for the invitation and the hospitality at the University of Minnesota.

1. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
2. Fushchych W.I., On symmetry and some exact solutions of some many-dimensional equations of mathematical physics, in Theoretical-Algebraic Methods in Mathematical Physics Problems, Kiev, Institute of Mathematics, 1983, 4–23.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3654.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., The symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989.
5. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–806.
6. Collins C.B., Complex potential equations I. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–187.
7. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988.
8. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, 113–115.
9. Cieciura G., Grundland A., A certain class of solutions of the nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 3460–3469.
10. Ibragimov N.Kh., Group properties of certain differential equations, Novosibirsk, Nauka, 1967 (in Russian).
11. Fubini G., *Nuovo Cimento A*, 1976, **34**, 521.
12. Fushchych W.I., On the symmetry and exact solutions of many-dimensional non-linear wave equations, *Ukrain. Math. J.*, 1987, **39**, 116–123.

13. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On reduction and solutions of non-linear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A*, 1987, **20**, L45–L47.

14. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Reidel, 1987.

15. Bluman G.W., Cole J., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.*, 1969, **18**, 1025–1042.

16. Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer, 1986.

17. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Wave phenomena: modem theory and applications, Amsterdam/New York, Elsevier, 1984.

18. Fushchych W.I., Yegorchenko I.A., Differential invariants of the Poincaré and conformal algebra, *Dokl. Acad. Nauk Ukrain. SSR, Ser. A*, 1989, № 5, 21–22.

Нелиевские интегралы движения для частиц произвольного спина и для систем взаимодействующих частиц

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

Найдены новые интегралы движения уравнений Кеммера–Дэффина–Петье, Штюкельберга, Рариты–Швингера, Дирака–Фирца–Паули, Боба, описывающих минимальное и аномальное взаимодействие частиц спина $s \leq 2$ с полем точечного заряда, а также для ряда релятивистских и квазирелятивистских двух- и трехчастичных уравнений. Эти интегралы принадлежат классу дифференциальных операторов порядка $2s$ с матричными коэффициентами и имеют дискретный спектр.

New integrals of motion are found for the Kemmer–Duffin–Petiau equation, the Stukelberg one, the Rarita–Schwinger equation, the Dirac–Fierz–Pauli one and the Bhabna equation which describe minimal and anomal interaction of particles of spin $s \leq 2$ with the Coulomb field, and for a number of relativistic and quasirelativistic two- and three-particle equations. These motion integrals belong to a class of $2s$-order differential operators with matrix coefficients and have a discrete spectrum.

Хорошо известно, что для многих уравнений квантовой теории, описывающих движение заряженной частицы в различных внешних полях, существуют интегралы движения, которые не связаны непосредственно с геометрической симметрией описываемой системы. В случае нерелятивистской бесспиновой частицы в поле Кулона это вектор Рунге–Ленца, а для релятивистского электрона в поле Кулона — интегралы Дирака [1] и Джонсона–Липпмана [2].

Упомянутые интегралы движения позволяют объяснить вырождение спектра энергий соответствующих физических объектов, а интеграл Дирака существенно упрощает решение уравнения движения методом разделения переменных, обусловливая расцепление уравнений для радиальных функции на незацепляющиеся подсистемы.

Целью настоящей работы является описание дополнительных интегралов движения для заряженной частицы со спином $s \leq 2$ в поле Кулона, а также для систем взаимодействующих частиц. Оказывается, такие интегралы движения существуют для всех релятивистских волновых уравнений, инвариантных относительно пространственной инверсии, и для широкого класса двухчастичных уравнений со сферически-симметричным потенциалом.

Ниже получены новые интегралы движения для уравнений Кеммера–Дэффина, Штюкельберга. Рариты–Швингера, Дирака–Фирца–Паули и Баба, описывающих взаимодействие частиц спина $s \leq 2$ с полем точечного заряда, и указан алгоритм построения таких интегралов для частиц произвольного спина. Эти интегралы являются дифференциальными операторами порядка $2s$ с матричными коэффициентами и могут рассматриваться как обобщение интеграла Дирака на случай произвольных s.

Теор. и матем. физика, 1991, **88**, № 3, 406–415.

В работе найдены новые интегралы движения для целого класса двухчастичных уравнений — Брейта [3], Барута–Коми [4], Кроликовского [5], обобщенного уравнения Брейта для связанных кварковых состояний [6, 7]и других. Дополнительный интеграл движения получен также для трехчастичного уравнения Кроликовского [8].

Следует подчеркнуть, что дополнительные интегралы движения в принципе не могут быть найдены в рамках классического лцевского группового анализа дифференциальных уравнений (современное изложение основных положений и приложений такого анализа см. в [9–11]). Мы исходим из обобщенного нелиевского подхода, предложенного и развитого в [12–14].

1. Интеграл Дирака для электрона

Как было впервые замечено Дираком [1], гамильтониан частицы со спином $\frac{1}{2}$ и зарядом e в поле точечного заряда qe

$$H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m + V, \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где γ_0, γ_a — матрицы Дирака, $V = qe^2/x$, $x = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, коммутирует с оператором следующего вида:

$$Q = \gamma_0\left(2S_a J_a - \frac{1}{2}\right) \equiv \gamma_0\left(2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \frac{1}{2}\right), \tag{1.2}$$

где

$$J_a = \varepsilon_{abc}x_b p_c + S_a, \tag{1.3}$$

$S_a = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c$ — матрицы спина.

Иными словами, помимо трех очевидных интегралов движения — компонент вектора углового момента J_a — для уравнения Дирака с кулоновским потенциалом существует дополнительный интеграл движения (1.2), который представляет собой дифференциальный оператор с матричными коэффициентами. Такие операторы не являются генераторами группы Ли, поэтому интеграл Дирака в принципе не мог быть найден в рамках классического группового анализа дифференциальных уравнений.

Используя тождество

$$2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{S}^2, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}, \tag{1.4}$$

нетрудно показать, что в пространстве квадратично интегрируемых функций спектр оператора (1.2) дискретен и задается формулой [1]

$$Q\psi = \varepsilon(j + 1/2)\psi, \quad \varepsilon = \pm l, \quad j = 1/2, 3/2, \ldots. \tag{1.5}$$

Прямым вычислением проверяются следующие полезные соотношения:

$$Q^2 = \boldsymbol{J}^2 + 1/4, \quad [Q, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}]_+ \equiv Q\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}Q = 0, \quad [Q, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}]_+ = 0. \tag{1.6}$$

Используя (1.6), нетрудно заметить, что оператор (1.2) является интегралом движения не только для частицы, минимально взаимодействующей с полем Кулона, но и для более сложных взаимодействий. В частности, справедливо следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Утверждение 1. *Общий вид сферически-симметричного потенциала $V = V(x)$, при котором гамильтониан (1.1) коммутирует с оператором: (1.2), определяется соотношением*

$$V = V_1 + V_2\gamma_0 + V_3\gamma_a x_a + V_4\gamma_0\gamma_a x_a, \tag{1.7}$$

где $V_1, \dots, V_4$ — произвольные функции от x.

В случае $V_1 = qe^2/x$, $V_3 = kqe^2/x^3$, $V_2 = V_4 = 0$ соотношение (1.7) задает потенциал аномального взаимодействия Паули с полем точечного заряда, а при $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4 = 0$ — общий вид потенциала взаимодействия, обеспечивающего конфайпмент в кварковых моделях, использующих одночастичное уравнение Дирака [15] (мы не конкретизируем явный вид V_3 и V_4, который для наших целей несуществен). Можно показать, что условие симметрии гамильтониана (1.1) с произвольным потенциалом V относительно группы трехмерных вращений $O(3)$ и относительно преобразования пространственной инверсии

$$\psi(x_0, \boldsymbol{x}) \to P\psi(x_0, \boldsymbol{x}) = r\psi(x_0, -\boldsymbol{x}), \tag{1.8}$$

где $r = \gamma_0$, также сводится к требованию, чтобы V имел форму (1.7). Иными словами, требование P-инвариантности гамильтониана (1.1) с произвольным $O(3)$-инвариантным потенциалом V является необходимым и достаточным условием существования интеграла Дирака для этого гамильтониана. Мы увидим ниже, что симметрия относительно преобразования пространственной инверсии влечет существование дополнительных интегралов движения и для других одно- и двухчастичных уравнений движения.

Итак, интеграл Дирака является оператором симметрии (т.е. оператором, переводящим решения в решения, более строгое определение см. в [16]) для целого класса уравнений вида

$$L\psi = 0, \quad L = i\frac{\partial}{\partial x_0} - H, \tag{1.9}$$

где H — гамильтониан, задаваемый формулами (1.1), (1.7). Действительно, в силу изложенного выше выполняется соотношение коммутации [14, 16]

$$[Q, L]\psi = 0, \tag{1.10}$$

где ψ — произвольное решение уравнения (1.9).

2. Интегралы движения для векторных частиц

Покажем, что для векторных частиц, взаимодействующих с полем точечного заряда, также существуют дополнительные интегралы движения, и найдем их в явном виде.

Рассмотрим уравнение Кеммера–Дэффина–Петье (КДП) с аномальным взаимодействием для частицы спина 1 в поле Кулона

$$[\beta^\mu\pi_\mu - m - ekS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]\psi \equiv L\psi = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

$$\pi_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu, \quad A_0 = \frac{qe}{x}, \quad A_a = 0, \quad S^{\mu\nu} = i[\beta^\mu, \beta^\nu], \tag{2.2}$$

$F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = i[\pi_\mu, \pi_\nu], \quad F_{0a} = \frac{qex_a}{x^3}, F_{ab} = 0, \quad a, b \neq 0, \tag{2.3}$$

β^μ — десятирядные матрицы, удовлетворяющие алгебре КДП,

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\lambda + g^{\nu\lambda}\beta^\mu, \tag{2.4}$$

k — константа аномального взаимодействия. Уравнение (2.1) может быть записано в форме Шредингера (1.9), где

$$H = [\beta_0, \beta_a]p_a + \beta_0 m + \frac{qe^2}{x} + \frac{iqe^2}{m}(k + \beta_0^2 - 1)\frac{\beta_a x_a}{x^3} + \frac{ikqe^2}{m^2}\left[\frac{\beta_a x_a}{x^3}, \beta_b p_b\right], \tag{2.5}$$

а ψ — десятикомпонентная волновая функция, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\left(1 - \beta_0^2 + \frac{\beta_a p_a}{m}\beta_0^2 - \frac{ikqe^2}{m^2}\beta_a\beta_0\frac{x_a}{x^3}\right)\psi = 0.$$

Очевидными операторами симметрии уравнения (2.1) являются генераторы группы $O(3)$ (операторы углового момента), явный вид которых задается формулами (1.3) и (2.6):

$$S_a = i\varepsilon_{abc}\beta_b\beta_c. \tag{2.6}$$

Эти генераторы являются интегралами движения, поскольку коммутируют с гамильтонианом (2.5).

Используя соотношения (2.4), можно убедиться прямой проверкой в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 2. *Для уравнения (2.1)–(2.3) существует дополнительный интеграл движения*

$$Q = (1 - 2\beta_0^2)[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 - 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}^2], \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{S}$ задаются формулами (1.3), (2.6).

Оператор (2.7) коммутирует как с гамильтонианом (2.5), так и с оператором L (2.1) и, следовательно, является оператором симметрии рассматриваемого уравнения. Этот результат справедлив, конечно, и в случае $k = 0$, т.е. в отсутствие аномального взаимодействия.

Как и интеграл Дирака, оператор (2.7) имеет дискретный спектр, который, в отличие от (1.5), имеет вид

$$Q\psi = \varepsilon j(j+1)\psi. \tag{2.8}$$

К соотношению (2.8) приходим, используя представление (1.4) для оператора $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}$.

Оператор (2.7) не принадлежит обертывающей алгебре, порождаемой генераторами (1.3), (2.6). Однако квадрат этого оператора выражается через $\boldsymbol{J}^2$:

$$Q^2 = (\boldsymbol{J}^2)^2. \tag{2.9}$$

Интересно отметить, что формула (2.7) задает оператор симметрии также для уравнений Максвелла с токами и зарядами, если последние записать в виде системы [14]

$$(1-\beta_5^2)(\beta^\mu p_\mu+1)\psi=0, \quad \beta^\mu p^\mu \beta_5\psi=0,$$

где $\beta_5=\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho\beta^\sigma$, ψ — столбец $(E_1,E_2,E_3,H_1,H_2,H_3,j_1,j_2,j_3,j_0)$, E_a и H_a $(a=1,2,3)$ — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей, j_μ $(\mu=0,1,2,3)$ — компоненты четырехвектора тока, β_μ — матрицы КДП в стандартном представлении, явный вид которых приведен, например, в [14]. Действительно, как нетрудно убедиться, $[Q,(1-\beta_5^2)(\beta^\mu p_\mu+1)]=[Q,\beta^\mu p_\mu\beta_5]=0$.

Дополнительный интеграл движения существует и для уравнения Штюкельберга [17], описывающего взаимодействие квазичастнцы (с возможными значениями спина $s=0,1$) с полем точечного заряда. С учетом аномального взаимодействия Паули это уравнение может быть записано в форме (2.1)–(2.3), где β^μ — матрицы размерности 11×11, явный вид которых приведен, например, в [16], $S^{\mu\nu}$ — генераторы прямой суммы неприводимых представлений $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\oplus D(0,0)\oplus D(1,0)\oplus D(0,1)$ группы Лоренца. Интеграл движения для такого уравнения задается формулой (2.7), где $S_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}$, а β_0 и S_{ab} — соответствующие матрицы размерности 11×11. Для нового интеграла движения уравнения Штюкельберга справедливы соотношения (2.8), (2.9).

3. Интегралы движения для частиц произвольного спина

Приведенные выше результаты могут быть обобщены на случай релятивистских волновых уравнений для частиц произвольного спина.

Рассмотрим произвольное уравнение вида (2.1), где $S^{\mu\nu}$ — генераторы прямой суммы конечномерных неприводимых представлений

$$D=\sum\oplus D(m,n) \tag{3.1}$$

группы Лоренца, β^μ — числовые матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$[\beta^\mu,S^{\nu\lambda}]=i(g^{\mu\nu}\beta^\lambda-g^{\mu\lambda}\beta^\nu), \tag{3.2}$$

обеспечивающим релятивистскую инвариантность уравнения (2.1).

Потребуем, чтобы уравнение (2.1) было инвариантно относительно преобразования пространственной инверсии (1.8), где r — числовая матрица для которой должно выполняться [18]

$$r^2=1, \quad r\beta^0=\beta^0 r, \quad r\beta^a=-\beta^a r, \quad rS^{ab}=S^{ab}r, \quad rS^{0a}=-S^{0a}r. \tag{3.3}$$

На матрицы β^μ обычно накладывается ряд дополнительных ограничений, обеспечивающих возможность лагранжевой формулировки уравнения (2.2) и единственность значения спина описываемой им частицы [18]. Для наших целей эти дополнительные предположения несущественны.

Ограничимся случаем, когда внешнее поле сводится к потенциалу Кулона (2.2). По аналогии с (1.2), (2.7) оператор симметрии соответствующего уравнения (2.1) ищем в виде

$$Q=rd, \quad d=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},S^{\mu\nu}), \tag{3.4}$$

где r — матрица пространственной инверсии.

Потребовав коммутативность Q (3.4) с L (2.1), получаем, используя (3.2), (3.3), следующие уравнения для d:

$$[d, \boldsymbol{x}] = [d, \beta_0] = 0, \tag{3.5}$$

$$[d, S_{0a}P_a]_+ = [d, S_{0a}x_a]_+ = 0. \tag{3.6}$$

Из (3.5) следует, что d зависит только от матриц S_{ab}, $a, b \neq 0$, и $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$, а уравнения (3.6) достаточно рассмотреть для матриц S_{0a} из неприводимого представления $D(m,n) \subset D$.

Решение уравнений (3.6) удобно искать в базисе шаровых спиноров (собственных векторов коммутирующих операторов $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{S}^2$, J_3 и $\boldsymbol{L}^2 = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})^2$), в котором операторы $S_{0a}x_a/x$ и $xS_{0a}p_a$ сводятся к числовым матрицам. Явный вид этих матриц приведен в [16].

Переход к базису шаровых спиноров, по существу, является одной из форм реализации предложенного в [12–14] алгоритма поиска нелокальных симметрии дифференциальных уравнений, основная идея которого состоит в преобразовании уравнений к такому представлению, в котором описание симметрии сводится к чисто матричной задаче.

Опуская несколько громоздкие выкладки, приведем явный вид операторов d для произвольных неприводимых представлений $D(m,n)$:

$(m+n)$ целое:

$$d = CF\sum_{s=|m-n|}^{m+n}\sum_{\lambda=0}^{s}(-1)^{\lambda}B_{\lambda}^{s}, \quad \lambda = 0, 1, \ldots; \tag{3.7}$$

$(m+n)$ полуцелое:

$$d = CF\sum_{s=|m-n|}^{m+n}\sum_{\nu=1/2}^{s}(-1)^{s+1/2-\nu}N_{\nu}^{s}, \quad \nu = 1/2, 3/2, \ldots, \tag{3.8}$$

где $F = \sum\limits_{\alpha=1}^{2(m+n)-1}(4\boldsymbol{J}^2 + 1 - \alpha^2)$, $m+n \neq \frac{1}{2}$, и $F = 1$ для $m+n = \frac{1}{2}$, C — произвольная постоянная, B_{λ}^{s} и N_{ν}^{s} — операторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\lambda=\lambda_0}^{s} B_{\lambda}^{s} = 1, \quad \lambda = \lambda_0, \lambda_0+1, \ldots, \quad \lambda_0 = \frac{1}{4}[1-(-1)^{2s}]; \tag{3.9}$$

$$B_{\lambda}^{s}B_{\lambda'}^{s} = \delta_{\lambda\lambda'}B_{\lambda}^{s}, \quad B_{\lambda}^{s}N_{\lambda'}^{s} = \delta_{\lambda\lambda'}N_{\lambda}^{s}, \quad N_{\lambda}^{s}N_{\lambda'}^{s} = \delta_{\lambda\lambda'}(4\boldsymbol{J}^2+1)B_{\lambda}^{s}, \tag{3.10}$$

$$G_s \equiv P_s(2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \boldsymbol{S}^2) = \sum_{\lambda=\lambda_0}^{s}(\lambda N_{\lambda}^{s} - \lambda^2 B_{\lambda}^{s}). \tag{3.11}$$

Здесь P_s — оператор проектирования

$$P_s = \prod_{s'\neq s}\frac{S^2 - s'(s'+1)}{s(s+1)-s'(s'+1)}, \quad |m-n| \leq s, s' \leq m+n,$$

$\boldsymbol{S}$ — вектор с компонентами $S_a = 1/2\varepsilon_{abc}S_{bc}$, $S_{bc} \in D(m,n)$.

Для каждого конкретного значения s операторы B_λ^s и N_λ^s можно выразить через G_s. Для этого достаточно последовательно возвести обе части уравнения (3.11) в степень $n = 1, 2, \ldots, 2s$ и решить полученную систему $2s + l$ линейных алгебраических уравнений для $2s + l$ неизвестных B_λ^s и N_λ^s. При этом согласно (3.10) уравнения с номерами $n = 2k$ и $n = 2k + 1$ имеют вид

$$\begin{aligned}
G_s^{2k} &= \sum_{\lambda=\lambda_0}^{s}\left[\sum_{m=0}^{k}\lambda^{2(k+m)}(4\boldsymbol{J}^2+1)^{k-m}C_{2k}^{2m}B_\lambda^s -\right.\\
&\quad\left.-\sum_{l=0}^{k-1}\lambda^{2(k+m)-1}(4\boldsymbol{J}^2+1)^{k-m-1}C_{2k}^{2l+1}N_\lambda^s\right], \quad k \le s;\\
G_s^{2k+1} &= \sum_{\lambda=\lambda_0}^{s}\left[\sum_{m=0}^{k}\lambda^{2(k+m)+1}(4\boldsymbol{J}^2+1)^{k-m}C_{2k+1}^{2m}N_\lambda^s -\right.\\
&\quad\left.-\sum_{l=0}^{k-1}\lambda^{2(k+l)}(4\boldsymbol{J}^2+1)C_{2k+1}^{2l+1}B_\lambda^s\right], \quad k < s
\end{aligned} \tag{3.12}$$

(C_b^a — число сочетаний из b элементов по a), а уравнение с номером $2s+1$ задается формулой (3.8).

Пусть $S = (m+n)_{\max}$ — максимальное значение квантового числа s, возникающее при редукции представления (3.1) по группе $O(3)$. Приведем решения уравнений (3.7)–(3.9), (3.12) для $d = d_S$, $S \le 2$:

$$d_{1/2} = 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 1/2; \tag{3.13}$$

$$d_1 = 2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 - 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}^2; \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
&d_{3/2} = 4/3[g^3 - g^2 - (7\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{S}^2)g + (4\boldsymbol{S}^2 - 6)\boldsymbol{J}^2] + 3;\\
&g = 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 3/2;
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= 2/3[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 - 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 4\boldsymbol{J}^2](\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} - 3) -\\
&\quad - \boldsymbol{J}^2(\boldsymbol{J}^2 - 2) + (1/3\boldsymbol{S}^2 - 2)[(4 - 3\boldsymbol{J}^2)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J})^2 + (7\boldsymbol{J}^2 - 4)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J} -\\
&\quad - 4\boldsymbol{J}^2 + 3/8\boldsymbol{S}^2(4\boldsymbol{J}^2 + 1).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ — оператор (1.3), $\boldsymbol{S}$ — матрицы, входящие в соответствующее представление D (3.1) при $S \le 2$.

Формулы (3.4), (3.13)–(3.16) задают операторы симметрии для целого класса релятивистски- и P-инвариантных уравнений вида (2.1), соответствующих $S \le 2$. В этот класс входят уравнения, обсуждаемые выше в разделах 1, 2, уравнения Рариты–Швингора [19] в формулировке, приведенной в [20], Дирака–Фирца–Паули [21, 22], описывающие частицы с фиксированными значениями массы и спина, а также уравнения Баба [23] для наборов частиц со спинами $s \le S$ и массами m_s. Явный вид соответствующих матриц r и $\boldsymbol{S}$ приведен в [18, 20, 23].

Отметим еще, что спектр операторов (3.13), (3.14) задается формулами (1.5), (2.8) (где $Q \to d_s$), а для операторов (3.15), (3.16) получаем с использованием (1.4)

$$d_{3/2}\psi = \varepsilon(2j-1)(2j+1)(2j+3)\psi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad j = 1/2, 3/2, \ldots;$$
$$d_2\psi = \varepsilon(j-1)j(j+1)(j+2)\psi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

4. Интегралы движения для двух- и трехчастичных уравнений

Приведенные выше результаты позволяют построить новые интегралы движения для уравнений, описывающих системы взаимодействующих частиц.

Рассмотрим обобщенное двухчастичное уравнение вида

$$i\frac{\partial}{\partial x_0}\psi = (H^{(1)} + H^{(2)} + V)\psi, \tag{4.1}$$

где $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ — одночастичные гамильтонианы Дирака

$$H^{(\alpha)} = \gamma_0^{(\alpha)}\gamma_a^{(\alpha)}p_a - \gamma_0^{(\alpha)}m_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4.2}$$

$\{\gamma_0^{(1)}\gamma_a^{(1)}\}$ и $\{\gamma_0^{(2)}\gamma^{(2)}\}$ — коммутирующие наборы матриц Дирака размерности 16×16, V — потенциал взаимодействия следующего общего вида:

$$V = V_A\Gamma_A + V_B'\Gamma_B^a x_a + V_c''\Gamma_c^{ab}x_a x_b. \tag{4.3}$$

Здесь $\{\Gamma_A\}$ $(A = 1, 2, \ldots, 16)$ — набор матриц $\{\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}, \gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}, \sigma^{(1)}\sigma^{(2)}, I\}$ и их всевозможных произведений, пронумерованный произвольным образом, $\sigma_a^{(a)} = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\gamma_b^{(\alpha)}\gamma_c^{(\alpha)}$, $\{\Gamma_B^\alpha\} = \{\gamma_4^{(\alpha)}\gamma_0^{(\beta)}\sigma_a^{(\nu)}, \gamma_4^{(\alpha)}\sigma_a^{(\beta)}, \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_4^{(\alpha)}\sigma_a^{(\beta)}\}$, $B = 1, 2, \ldots, 24$, $(\alpha, \beta, \nu) = 1, 2, \{\Gamma_C^{ab}\}$ $(C = 1, 2, \ldots, 8)$ — набор матриц вида $\Gamma_C'\sigma_a^{(1)}\sigma_b^{(2)}$, где $\{\Gamma_C'\} = \{\gamma_0^{(\alpha)}, \gamma_4^{(1)}, \gamma_4^{(2)}, I, \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}, \gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\gamma_0^{(\alpha)}, \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\}$, V_A, V_B', V_C'' — произвольные функции от x.

Формула (4.3) определяет общий вид потенциала V, при котором уравнение (4.1) сохраняет инвариантность относительно группы $O(3)$ и преобразования пространственной инверсии (1.8) (при этом $r = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}$). Такой потенциал включает как частные случаи (получаемые специальным выбором функций V_A, V_B' и V_C'') квазирелятивистский потенциал Брейта [3], релятивистский потенциал двухчас тичного уравнения Барута–Коми [4], а также потенциалы, используемые в кварцовых моделях мезонов [5–7]. Соответствующие уравнения (4.1) интерпретируются как двухчастичные уравнения в системе центра масс [7].

Для уравнения (4.1) с произвольным потенциалом вида (4.3) существует очевидный векторный интеграл движения — оператор полного момента (1.3), где

$$S_a = S_a^{(1)} + S_a^{(2)}, \quad S_a^{(\alpha)} = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}\gamma_b^{(\alpha)}\gamma_c^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{4.4}$$

Оказывается, однако, что, как и для рассмотренных выше одночастичных релятивистских уравнений, можно указать дополнительный интеграл движения уравнения (4.1), который имеет вид

$$Q = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}d_1, \tag{4.5}$$

где d_1 задается формулами (3.14), (1.3), (4.4).

Как можно убедиться прямой проверкой, оператор (4.5) коммутирует с гамильтонианами $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ (4.2) с любым потенциалом вида (4.3). Такую проверку несложно осуществить, воспользовавшись следующим представлением для $\hat{Q}$:

$$\hat{Q} = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}([Q_{(1)}, Q_{(2)}]_+ - 1/2), \tag{4.6}$$

где $Q_{(\alpha)}$ — операторы, явный вид которых может быть получен из (3.13) заменой $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}^{(\alpha)}$ ($\boldsymbol{S}^{(\alpha)}$ заданы в (4.4), $\boldsymbol{J}$ — в (1.3), (4.4)). Эти операторы удовлетворяют условиям

$$[Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{p}]_+ = \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')}\cdot\boldsymbol{p}, \quad [Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{x}]_+ = \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')}\cdot\boldsymbol{x},$$
$$[Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')}\cdot\boldsymbol{p}] = [Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha')}\cdot\boldsymbol{x}] = [Q_{(\alpha)}, \boldsymbol{x}] = 0, \quad \alpha' \neq \alpha.$$

Таким образом, для любого двухчастичного уравнения вида (4.1) существует дополнительный интеграл движения, задаваемый формулами (4.5), (4.6). Можно показать, что в пространстве квадратично интегрируемых функций спектр оператора (4.5) дискретен и задается формулой (2.8).

Укажем еще новый интеграл движения для трехчастичного уравнения Кроликовского [8]:

$$Q = \gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\gamma_0^{(3)}d_{3/2}.$$

Здесь $d_{3/2}$ — оператор (3.14) для $S_a = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}(\gamma_b^{(1)}\gamma_c^{(1)} + \gamma_b^{(2)}\gamma_c^{(2)} + \gamma_b^{(3)}\gamma_c^{(3)})$, $\{\gamma_\mu^{(1)}\}$, $\{\gamma_\mu^{(2)}\}$, $\{\gamma_\mu^{(3)}\}$ — три набора коммутирующих матриц Дирака размерности 64×64.

5. Заключение

Мы убедились, что дополнительпые интегралы движения типа Дирака существуют для широкого класса одночастичных и двухчастичных уравнений. Найденные интегралы движения могут быть использованы при решении соответствующих уравнений методом разделения переменных, при построении ортогональных базисов и для других целей.

При выводе новых интегралов движения существенно использовалась симметрия рассматриваемых уравнений относительно группы $O(3)$ и преобразования пространственной инверсии P. Полученные результаты могут быть обобщены па случай произвольных $O(3)$- и P-инвариантных уравнений, не обязательно удовлетворяющих условию релятивистской инвариантности. В частности, такие интегралы движения могут быть получены для галилеевски-инвариантных волновых уравнений [24–26, 16] и для уравнений вида (2.1) с произвольным $O(3)$- и P-инвариантным потенциалом A_0.

Следует еще раз отметить, что найденные интегралы движения в принципе не могут быть получены методами классического группового анализа дифференциальных уравнений. Существеннно “нелиевскими элементами” используемого нами подхода являются высокий порядок операторов дифференцирования, входящих в операторы симметрии, и сведение задачи к нахождению общего решения антикоммутационных соотношений (3.6).

Многочисленные примеры нелиевской симметрии основных уравнений квантовой теории приведены в [16].

1. Дирак П.А.М., Принципы квантовой механики, М., Мир, 1979.
2. Johnson M.H., Lippman B.A., *Phys. Rev.*, 1950, **77**, № 3, 702.
3. Breit G., *Phys. Rev.*, 1929, **34**, № 4, 553–573.
4. Barut A.O., Komy S., *Forts. Phys.*, 1985, **33**, № 6, 309–318.
5. Krolikowski W., Rzewuski I., *Acta Physica Polonica*, 1976, **7**, № 7, 481–496.
6. Хелашвили А.А., *ТМФ*, 1982, **51**, № 2, 201–210.
7. Childers R.W., *Phys. Rev. D*, 1982, **26**, № 10, 2902–2915.
8. Krolikowski W., *Acta Physica Polonica B*, 1984, **15**, № 10, 927–944.
9. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
10. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
11. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989.
12. Фущич В.И., *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
13. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1983, **14**, Вып. 1, 5–57.
14. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel, 1987 (Сокращенный вариант: Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983).
15. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповая структура групп Галилея и Пуанкаре и редукция в нелинейных уравнениях, Киев, Наукова думка, 1991.
16. de Amaral M.L., Zagury N., *Phys. Rev. D*, 1982, **26**, № 11, 3119–3122.
17. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990.
18. Stucelberg E., *Helv. Phys. Acta*, 1938, **11**, 225.
19. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
20. Rarita, Schwinger J., *Phys. Rev.*, 1941, **60**, № 1, 61–62.
21. Боте Г., Солпитер Э., Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., Физматгиз, 1960.
22. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1936, **155**, 447–459.
23. Fierz M., Pauli W., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1939, **173**, 211–232.
24. Kraicik R.A., Nieto M.M., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, № 12, 4049–4060.
25. Levy-Leblond J.-M., *Comun. Math. Phys.*, 1967, **6**, № 4, 286–311.
26. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, № 10, 2339–2347.
27. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1980, **44**, № 1, 34–46.

О нелиевской симметрии галилеевски-инвариантного уравнения для частицы со спином $s = 1/2$

Р.З. ЖДАНОВ, В.И. ФУЩИЧ

Исследована симметрия одного галилеевски-инвариантного спинорного уравнения в классе дифференциальных операторов первого порядка. Установлено, что множество операторов симметрии первого порядка содержит супералгебру, которая является суперрасширением алгебры Галилея.

Symmetry of a Galilei-invariant spinor equation in a class of first-order matrix differential operators is studied. It is established that a set of the first-order symmetry operators contains a subalgebra which is a superextension of the Galilei algebra.

Под термином “нелиевская симметрия”, введенным в [1], будем понимать симметрию уравнения, которая не может быть получена в рамках классического подхода Софуса Ли (см., например, [2–5]).

Нелиевская симметрия уравнения Дирака исследована в работах [6–8]. Аналогичные результаты получены и для пуанкаре-инвариантных уравнений движения для частиц произвольного спина [9, 10]. В то же время нелиевская симметрия уравнений движения, инвариантных относительно группы Галилея, совершенно не исследована.

В настоящей работе полностью изучена нелиевская симметрия в классе дифференциальных операторов первого порядка простейшего спинорного галилеевски-инвариантного уравнения (1)

$$\{-i(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t + i\gamma_a\partial_a + m(\gamma_0-\gamma_4)\}\psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_4$ — матрицы Дирака размерности 4×4, $\psi(t,\boldsymbol{x})$ — четырехкомпонентная комплекснозначная функция-столбец,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial x_a}{\partial t}, \quad a=\overline{1,3}, \quad m = \text{const}.$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3.

Уравнение (1) предложено рядом авторов [11, 12] для описания галилеевской частицы с массой m и спином $s = 1/2$ (более подробно об этом см. [10, 13]).

Определение. *Линейный дифференциальный оператор*

$$Q = H_0(t,\boldsymbol{x})\partial_t + H_a(t,\boldsymbol{x})\partial_a + H(t,\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

где H_0, H_a, H — переменные матрицы размерности 4×4, называется оператором симметрии уравнения (1), если существует такой дифференциальный оператор X, что выполнено соотношение (3)

$$[L,Q] \equiv LQ - QL = XL. \tag{3}$$

Теор. и мат. физика, 1991, **89**, № 3, С. 413–419.

Здесь символом L обозначен оператор уравнения (1).

Операторное равенство (3) следует понимать следующим образом: дифференциальные операторы, стоящие в левой и правой частях (3), при действии на произвольное решение уравнения (1) дают одинаковый результат.

Если в (2) матрицы H_0, H_a пропорциональны единичной матрице, то оператор (2) генерирует локальную группу Ли преобразований [5, 10]. Отметим, что максимальной локальной группой инвариантности уравне ния (1) является 13-параметрическая группа Ли [5, 11, 14].

Теорема 1. *Произвольный оператор симметрии (2) уравнения (1) при $m \neq 0$ может быть представлен в виде линейной комбинации следующих операторов:*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b + \frac{1}{2}\gamma_a\gamma_b, \\
&G_a = t\partial_a + 2imx_a + \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + 2 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_4, \\
&A = tD - t^2\partial_t + imx_ax_a + \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a x_a, \quad M_1 = I, \quad M_2 = iI, \\
&W_0 = \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t - \frac{im}{2}(\gamma_0-\gamma_4), \\
&W_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left[\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)(\gamma_b\partial_c - \gamma_c\partial_b) + im\gamma_b\gamma_c\right], \\
&S_a = \gamma_0\gamma_4\partial_a + (\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a\partial_t - im(\gamma_0-\gamma_4)\gamma_a, \\
&T_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left[\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma_4)(\gamma_b\partial_c - \gamma_c\partial_b) + \gamma_b\gamma_c\partial_t\right], \\
&R_0 = tW_0 + x_aW_a + \frac{3}{4}(\gamma_0+\gamma_4), \\
&R_a = 2tT_a + 2x_aW_0 + \varepsilon_{abc}\left(x_bS_c + \frac{1}{2}\gamma_b\gamma_c\right) + \frac{3}{2}\gamma_a, \\
&N_0 = x_aS_a + \gamma_0\gamma_4, \quad N_a = tS_a + 2\varepsilon_{abc}x_bW_c + (\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a, \\
&K_a = 2x_aR_0 - (x_bx_b)W_a + \\
&\qquad + \varepsilon_{abc}\left(tx_bS_c + \frac{t}{2}\gamma_b\gamma_c + (\gamma_0+\gamma_4)x_b\gamma_c\right) + t^2T_a + \frac{3t}{2}\gamma_a,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где I — единичная матрица 4×4,

$$
\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1, & (a,b,c) = \textit{цикл}\,(1,2,3), \\ -1, & (a,b,c) = \textit{цикл}\,(2,1,3), \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}
$$

Доказательство сформулированного утверждения существен упрощается, если переписать уравнение (1) в эквивалентном виде, умножив его на несингулярную матрицу $i\gamma_3$

$$
\tilde{L}\psi \equiv \{(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3\partial_t + \gamma_3\gamma_1\partial_1 + \gamma_3\gamma_2\partial_2 + \partial_3 + im(\gamma_0-\gamma_4)\gamma_3\}\psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{5}
$$

и исключить в операторе (2) производную ∂_3 по правилу

$$
\partial_3 = -(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3\partial_t - \gamma_3\gamma_1\partial_1 - \gamma_3\gamma_2\partial_2 - im(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_3. \tag{6}
$$

Подставляя $\tilde{L}$ и $\tilde{Q} = \tilde{H}_0\partial_t + \tilde{H}_1\partial_1 + \tilde{H}_2\partial_2$ в соотношение (2), имеем

$$[\tilde{L}, \tilde{Q}] = X\tilde{L}. \tag{7}$$

Вычисляя коммутатор в левой части равенства (7) и приравнивая коэффициенты при операторе ∂_3, приходим к выводу, что $X = 0$. Следовательно, задача построения операторов симметрии вида (2) уравнения (1) сводится к нахождению всех операторов

$$\tilde{Q} = \tilde{H}_0\partial_t + \tilde{H}_1\partial_1 + \tilde{H}_2\partial_2 + \tilde{H}, \tag{8}$$

коммутирующих с $\tilde{L}$.

Разлагая матрицы $\tilde{H}_0$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{H}$ по базису из 16 линейно независимых γ-матриц с коэффициентами, зависящими от t, $\boldsymbol{x}$, имеем

$$\begin{aligned} &\tilde{H}_\alpha = a^{(\alpha)} + b_0^{(\alpha)}\gamma_0 + b_a^{(\alpha)}\gamma_a + C_{0a}^{(\alpha)}\gamma_0\gamma_a + C_{ab}^{(\alpha)}\gamma_a\gamma_b + \\ &\qquad + d_0^{(\alpha)}\gamma_0\gamma_4 + +d_a^{(\alpha)}\gamma_4\gamma_a + e^{(\alpha)}\gamma_4, \\ &\tilde{H} = a + b_0\gamma_0 + b_a\gamma_a + C_{0a}\gamma_0\gamma_a + C_{ab}\gamma_a\gamma_b + d_0\gamma_4 + d_a\gamma_4\gamma_a + e\gamma_4, \end{aligned} \tag{9}$$

где $a^{(\alpha)}, b_0^{(\alpha)}, \ldots, e^{(\alpha)}, a, \ldots, e$ — произвольные комплекснозначные функции от t, $\boldsymbol{x}$, $\alpha = \overline{0,2}$.

Вычисляя коммутатор (7), где $X = 0$, а оператор $\tilde{Q}$ задается формулами (8), (9), и приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых операторах ∂_t^2, $\partial_t\partial_a$, $\partial_a\partial_b$, ∂_t, ∂_a, $a, b = 1, 2$, $a \le b$, получаем переопределенную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных на функции $a^{(\alpha)}, b_0^{(\alpha)}, \ldots, e^{(\alpha)}, a, b_0, \ldots, e$ содержащую более 80 уравнений. Мы не приводим эти уравнения из-за недостатка места.

Анализ полученной системы показывает, что все третьи производные от функций $a^{(\alpha)}, b_0^{(\alpha)}, \ldots, e^{(\alpha)}, a, b_0, \ldots, e$ равны нулю, т.е. они являются полиномами по переменным t, $\boldsymbol{x}$ не выше второго порядка. С учетом этого факта вышеуказанная система уравнений легко интегрируется. Подставляя ее общее решение в формулы (8), (9) и совершая замену (6), приходим к следующему выводу: произвольный оператор симметрии первого порядка уравнения (1) является линейной комбинацией операторов (4), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Произвольный оператор симметрии (2) уравнения (1) при $m = 0$ может быть представлен в виде линейной комбинации следующих операторов:*

$$\begin{aligned} &M_1 = I, \quad M_2 = iI, \quad T_\infty^1 = \varphi_1^1(\gamma_0 + \gamma_4) + i\varphi_2^1(\gamma_0 + \gamma_4), \\ &D_\infty^1 = \varphi^2\partial_t + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(1 - \gamma_0\gamma_4), \\ &A_\infty = \varphi^3(x_a\partial_a + 1) + \frac{1}{2}\varphi^3\gamma_0\gamma_4 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^3(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a x_a, \\ &G_\infty = \varphi_a^4\partial_a + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}_a^4, \\ &J_\infty = \varepsilon_{abc}\varphi_a^5\left(x_c\partial_b + \frac{1}{4}\gamma_b\gamma_c\right) + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}_a^5(\gamma_b x_b), \\ &W_\infty = (\gamma_0 + \gamma_4)(\varphi_a^6\partial_t + \varphi_a^6\partial_a), \\ &S_\infty = \varphi_a^7((\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\partial_t + \gamma_0\gamma_4\partial_a) + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}_a^7, \end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&T^2_\infty = \varphi^8_a(2\gamma_a\partial_t - (\gamma_0+\gamma_4)\partial_a) + \frac{1}{4}(2\gamma_a + \varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c)\dot{\varphi}^8_a,\\
&D^2_\infty = \varphi^9(\gamma_0+\gamma_4)x_a\partial_a,\\
&R_\infty = \varphi^{10}_a\left\{\varepsilon_{abc}((\gamma_0+\gamma_4)x_b\gamma_c + \gamma_0\gamma_4x_b\partial_c) + \frac{1}{2}\gamma_a\right\} - \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_a\dot{\varphi}^{10}_a(\gamma_bx_b),\\
&N_\infty = \varphi^{11}\left((\gamma_0+\gamma_4)\gamma_ax_a\partial_t + \gamma_0\gamma_4x_a\partial_a + \frac{1}{2}(1+\gamma_0\gamma_4)\right) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^{11}(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_ax_a,\\
&K_\infty = \varphi^{12}_a(-(\gamma_0+\gamma_4)x_bx_b\partial_a + 2x_a(\gamma_0+\gamma_4)x_b\partial_b +\\
&\qquad + 2x_a(\gamma_0+\gamma_4) - \varepsilon_{abc}x_b\gamma_c(\gamma_0+\gamma_4)),\\
&\Sigma_\infty = \varepsilon_{abc}\varphi^{13}_a(\gamma_0+\gamma_4)\left(x_b\partial_c + \frac{1}{4}\gamma_b\gamma_c\right),
\end{aligned}
$$

где φ^N_a — произвольные гладкие действительные функции от t, точкой обозначено дифференцирование по t.

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Таким образом, операторы симметрии первого порядка уравнения (1) при $m \neq 0$ образуют 35-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Это пространство не замкнуто относительно операции

$$
Q_1, Q_2 \to Q_3 = [Q_1, Q_2]
$$

и, следовательно, не является алгеброй Ли. Однако оно содержит подпространства, на которых можно ввести структуру алгебры Ли (простейший пример — это тринадцатимерная обобщенная алгебра Галилея с базисными элементами P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D, A, M_2 из (4)).

Коэффициенты операторов W_0, W_a, S_a, T_a, R_0, R_a, N_0, N_a, K_a являются матрицами, не кратными единичной матрице, вследствие чего эти операторы симметрии в принципе не могут быть получены методом Ли (для их нахождения следует применять обобщенный метод Ли — метод Ли–Бэклунда [3, 15]).

Построим в качестве примера группу преобразований, генерируемую нелиевским оператором симметрии $Q = \theta_aW_a$, $\theta_a \in \mathbb{R}^1$. Для этого согласно [9, 10] необходимо вычислить экспоненту

$$
\exp\{\theta_aW_a\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\theta_aW_a)^n. \tag{11}
$$

Ряд в правой части равенства (11) нетрудно просуммировать, если заметить, что операторы W_a на множестве решений уравнения (1) представляются в следующем эквивалентном виде:

$$
W_a = \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_4)\partial_a - im\gamma_a.
$$

Используя тождество $(\theta_aW_a)^2 = m^2\theta_a\theta_aI$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\exp\{\theta_aW_a\} = I + \theta_aW_a + \frac{1}{2!}m^2\theta_a\theta_aI + \frac{1}{3!}m^2\theta_a\theta_a(\theta_bW_b) + \cdots =\\
&\quad = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^{2k}(\theta_a\theta_a)^k}{(2k)!}\right)I + m^{-1}(\theta_a\theta_a)^{-1/2}\theta_bW_b\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^{2k+1}(\theta_a\theta_a)^{k+1/2}}{(2k+1)!}\right) =
\end{aligned}
$$

$$= I \operatorname{ch} m\theta + m^{-1}\theta^{-1}\theta_a W_a \operatorname{sh} m\theta,$$

где $\theta = (\theta_a\theta_a)^{1/2}$.

Следовательно, нелиевский оператор $\theta_a W_a$ генерирует группу преобразований вида

$$\begin{gathered} t' = t, \quad x'_a = x_a, \\ \psi'(t', \boldsymbol{x}') \equiv \exp\{\theta_a W_a\}\psi(t, \boldsymbol{x}) = (\operatorname{ch} m\theta - i\theta^{-1}\gamma_a \operatorname{sh} m\theta)\psi(t, \boldsymbol{x}) + \\ + (2m\theta)^{-1}(\operatorname{sh} m\theta)(\gamma_0 + \gamma_4)\theta_a \frac{\partial\psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_a}. \end{gathered} \tag{12}$$

Поскольку закон преобразования компонент функции $\psi(t, \boldsymbol{x})$ содержит первые производные от нее, (12) — это группа преобразований Ли–Бэклунда. Можно непосредственной проверкой убедиться в том, что группа преобразований (12) переводит множество решений уравнения (1) в себя.

Как установлено в работе [16], из множества операторов симметрии первого и второго порядков уравнения Дирака можно выделить подмножество, являющееся супералгеброй Ли. Мы покажем, что аналогичный результат имеет место и для уравнения (1).

Теорема 3. *Операторы P_0, P_a, J_{ab}, G_a, M_2, W_0, W_a образуют базис 15-мерной супералгебры Ли.*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} &[P_0, P_a] = [P_a, P_b] = [P_0, M_2] = [P_a, M_2] = [J_{ab}, M_2] = [G_a, M_2] = 0, \\ &[P_0, J_{ab}] = 0, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c, \\ &[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}, \\ &[G_a, J_{bc}] = \delta_{ac}C_b - \delta_{ab}G_c, \quad [P_a, G_b] = 2M_2\delta_{ab}, \\ &[P_0, W_0] = [P_0, W_a] = [P_a, W_0] = [P_a, W_b] = 0, \quad [W_0, J_{ab}] = 0, \\ &[W_a, J_{bc}] = \delta_{ab}W_c - \delta_{ac}W_b, \quad [W_0, M_2] = [W_a, M_2] = 0, \quad [G_a, W_0] = -W_a, \\ &[G_a, W_b] = 0, \quad [W_0, W_0]_+ = 2imP_0, \quad [W_0, W_a]_+ = 2imP_a, \\ &[W_a, W_b]_+ = -iM_2\delta_{ab}. \end{aligned}$$

Здесь $[Q_1, Q_2]_+ = Q_1Q_2 + Q_2Q_1$. Из приведенных соотношений вытекает, что операторы P_0, P_a, J_{ab}, G_a, M_2 могут быть выбраны в качестве четных (Ч), а операторы W_0, W_a — в качестве нечетных (Н) элементов некоторой супералгебры, поскольку выполнены равенства

$$[\text{Ч}, \text{Ч}] = \text{Ч}, \quad [\text{Ч}, \text{Н}] = \text{Н}, \quad [\text{Н}, \text{Н}]_+ = \text{Ч}.$$

Теорема доказана.

Важно подчеркнуть, что симметрия галилеевски-инвариантного уравнения (1) существенно шире, чем симметрия уравнения Дирака, которое при $m \neq 0$ допускает двадцать шесть линейно независимых операторов симметрии первого порядка, а при $m = 0$ — пятьдесят два оператора [7, 10].

Полученные выше результаты по исследованию нелиевской симметрии уравнения (1) могут быть использованы для построения новых интегралов движения с помощью обобщенной теоремы Нетер [3, 4] либо в рамках подхода, развиваемого в [9, 10], а также для разделения переменных.

Следуя [7, 14], решением уравнения (1) с разделенными переменными в координатах $z_\mu = z_\mu(t,x)$, $\mu=\overline{0,3}$, будем называть четырехкомпонентную функцию

$$\psi(t,x) = R(t,x)\prod_{\mu=0}^{0} V_\mu(z_\mu;\lambda)X \tag{13}$$

(где R, V_μ — невырожденные 4×4-матрицы, λ_a — константы, X — произвольный постоянный четырехкомпонентный столбец), которая удовлетворяет (1) тождественно по λ. При этом параметры λ_a называют константами разделения.

К настоящему времени не существует сколько-нибудь общих подходов к решению задачи полного описания решений с разделенными переменными для заданной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, если эта система обладает нетривиальной симметрией (лиевской или нелпевской), существует конструктивный метод построения таких решений. Он состоит в том, что решения с разделенными переменными ищутся как решение переопределенной системы дифференциальных уравнений [7, 14]

$$L\psi = 0, \quad Q_a\psi = \lambda_a\psi, \quad a=\overline{1,3} \tag{14}$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — операторы симметрии уравнения $L\psi=0$, коммутирующие друг с другом, λ_a — константы разделения.

В [14] с использованием лиевской симметрии уравнения (1) получены пять систем координат, в которых оно допускает разделение переменных, и построены соответствующие решения вида (13). Используя нелиевскую симметрию уравнения (1), можно получить новые системы координат, в которых возможно разделение переменных. Подробный анализ этой проблемы будет проведен в одной из наших последующих публикаций, здесь мы ограничимся тем, что приведем пример разделения переменных с помощью нелиевской симметрии уравнения (1).

Выбирая в качестве Q_1, Q_2, Q_3 операторы P_0, J_{12}, N_0 из (4), переписываем систему уравнений (14) в виде

$$\begin{aligned}
&\{-i(\gamma_0+\gamma_4)\partial_t + i\gamma_a\partial_a + m(\gamma_0-\gamma_4)\}\psi = 0,\\
&P_0\psi = \lambda_1\psi, \quad J_{12}\psi = \lambda_2\psi, \quad N_0\psi = \lambda_3\psi.
\end{aligned}$$

Совершив в этих уравнениях замену переменных

$$\begin{aligned}
&z_0 = t, \quad z_1 = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right), \quad z_2 = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}, \quad z_3 = \operatorname{arctg}\frac{x_3}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}},\\
&\tilde\psi(z_0,z) = \exp\left\{-\frac12\gamma_1\gamma_3\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}}\right\}\times \\
&\qquad\times\exp\left\{-\frac12\gamma_1\gamma_2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right\}\psi(t,x),
\end{aligned} \tag{15}$$

после очень громоздких вычислений получаем

$$\frac{\partial\tilde\psi}{\partial x_0} = \lambda_1\tilde\psi, \quad \frac{\partial\tilde\psi}{\partial x_2} = -\lambda_2\tilde\psi,$$

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z_1} = \{\lambda_1(\gamma_0+\gamma_4)\gamma_1 + im(\gamma_0-\gamma_4)\gamma_1 - z_1^{-1} - \lambda_3 z_1^{-1}\gamma_0\gamma_4\}\tilde{\psi},$$
$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z_3} = \left\{\frac{1}{2}\operatorname{tg} z_3 + \lambda_2(\cos z_3)^{-1}\gamma_2\gamma_3 - \lambda_3\gamma_2\right\}\tilde{\psi}, \tag{16}$$

т.е. переменные “разделились”.

Обозначая символами $V_1(z_1;\lambda_1,\lambda_2)$, $V_3(z_3;\lambda_2,\lambda_3)$ матриканты третьей и четвертой систем обыкновенных дифференциальных уравнений из (16), запишем общее решение уравнений (16) в виде

$$\tilde{\psi}(z_0,\boldsymbol{z}) = e^{i(\lambda_1 z_0 - \lambda_2 z_2)} V_1(z_1;\lambda_1,\lambda_3) V_3(z_3;\lambda_2,\lambda_3) X, \tag{17}$$

где X — произвольный постоянный четырехкомпонентный столбец. Подстановка полученного результата в формулу (15) даст точное решение исходного уравнения (1) вида (13), где

$$R(t,\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_3\operatorname{arctg}\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}\right\},$$
$$V_0(z_0;\boldsymbol{\lambda}) = e^{i\lambda_1 z_0}, \quad V_1(z_1;\boldsymbol{\lambda}) = V_1(z_1;\lambda_1,\lambda_3),$$
$$V_2(z_2;\boldsymbol{\lambda}) = e^{-i\lambda_2 z_2}, \quad V_3(z_3;\boldsymbol{\lambda}) = V_3(z_3;\lambda_2,\lambda_3),$$

Следовательно, собственная функция коммутирующих операторов симметрии P_0, J_{12}, N_0 является решением уравнения (1) с разделенными переменными в сферических координатах.

1. Фущич В.И., *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 5, 846–850.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
3. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
4. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1989.
5. Фущич В.И., Штелень В.М, Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989.
6. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
7. Шаповалов В.П., Экле Г.Г., Алгебраические свойства уравнения Дирака, Элиста, Изд-во Калмыцкого госуниверситета, 1972.
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, № 3, 81–85.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983.
10. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990.
11. Levi-Leblond J.M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, № 4, 286–311.
12. Galindo A., Sanchez C., *Amer. J. Phys.*, 1961, **29**, № 9, 582–584.
13. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1981, **12**, Вып. 3, 1157–1219.
14. Фущич В.И., Жданов Р.З., Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения, Киев, Наукова думка, 1991.
15. Жданов Р.З., О применении метода Ли-Бэклунда к исследованию симметрийных свойств уравнения Дирака, в сб. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 70–73.
16. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, № 4, 537–549.

A simple method of finding solutions of the nonlinear d'Alembert equation

P. BASARAB-HORWATH, W.I. FUSHCHYCH, M. SEROV

We consider the nonlinear d'Alembert equation

$$\Box u = F(u), \tag{1}$$

where $u = u(x)$ and $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

and $F(u)$ is an arbitrary differentiable function. In equation (1) we make the local change of variable

$$u = \Phi(w), \tag{2}$$

where $w(x)$ is a new unknown function and Φ is a function to be determined later. On making this change, (1) becomes

$$\dot{\Phi}\Box w + \ddot{\Phi} w_\mu w^\mu = F(\Phi), \tag{3}$$

where

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dw}, \quad w_\mu w^\mu = \left(\frac{dw}{dx_0}\right)^2 - \left(\frac{dw}{dx_1}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{dw}{dx_n}\right)^2.$$

Equation (3) is equivalent to the following equation

$$\dot{\Phi}\left(\Box w - \lambda\frac{\dot{P}_n}{P_n}\right) + \ddot{\Phi}(w_\mu w^\mu - \lambda) + \lambda\left(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}\frac{\dot{P}_n}{P_n}\right) - F(\Phi) = 0, \tag{4}$$

where $P_n(w)$ is an arbitrary polynomial of degree n in w, and $\lambda = -1, 0, 1$. Choosing Φ such that

$$\lambda\left(\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}\frac{\dot{P}_n}{P_n}\right) = F(\Phi) \tag{5}$$

equation (4) becomes

$$\dot{\Phi}\left(\Box w - \lambda\frac{\dot{P}_n}{P_n}\right) + \ddot{\Phi}(w_\mu w^\mu - \lambda) = 0. \tag{6}$$

From this it is clear that a solution of the system

$$\Box w = \lambda\frac{\dot{P}_n}{P_n}, \quad w_\mu w^\mu = \lambda \tag{7}$$

J. Phys. A: Math. Gen., 1992, **25**, L871–L877.

is also a solution of (6), and in this way we obtain a solution of (1) provided Φ satisfies (5). There remains, of course, the problem of the existence of solutions of (7). We have the following result.

Theorem 1. *For $n = 3$ the system*

$$\Box w = H(w), \quad w_\mu w^\mu = \lambda$$

with $\lambda = -1, 0, 1$ is compatible if and only if

$$H(w) = \frac{\lambda N}{w + C},$$

where $N = 0, 1, 2, 3$ and C is an arbitrary constant.

This result follows from theorem 2 of [2]. In theorem 1 of [3], it is further shown that if the system in theorem 1 above is compatible, then it is necessarily of the type given in equation (7). Moreover, as is mentioned in [3], the system (7) is always compatible (for any n) if $H(w)$ is as in theorem 1 above. Having discussed the question of compatibility, we now turn to equation (5), which gives us the appropriate choice of Φ. We do this for several cases of the function $F(u)$. Note that for the remainder of this paper, we take $n = 3$.

Case 1. $F(u) = u^k$ with $k \neq 1$. If $P_n = w^m$ with $m = 0, 1, 2, 3$ then (5) becomes

$$\lambda\left(\ddot\Phi + \frac{m}{w}\dot\Phi\right) = \Phi^k. \tag{8}$$

Assuming Φ to be of the form

$$\Phi(w) = \alpha w^\beta$$

with α, β constants, we obtain

$$\Phi(w) = \left(\frac{(1-k)w}{(2\lambda(1+k+m-km))^{1/2}}\right)^{2/(1-k)} \tag{9}$$

as a solution of (8).

Case 2. $F(u) = \exp u$. Again using $P_n(w) = w^m$, $m = 0, 1, 2, 3$, equation (5) becomes

$$\lambda\left(\ddot\Phi + \frac{m}{w}\dot\Phi\right) = \exp\Phi. \tag{10}$$

and we seek solutions Φ with the help of me ansatz

$$\exp(\Phi(w)) = \alpha w^\beta$$

with α, β constants. We obtain

$$\Phi(w) = \log\left(\frac{2\lambda(m-1)}{w^2}\right), \quad m = 2, 3. \tag{11}$$

Case 3. $F(u) = -\ddot\Psi(u)/\dot\Psi^3(u)$. Here we take Ψ to be an arbitrary differentiable function such that $\ddot\Psi \neq 0$. If we take $P_n(w) = \lambda_0 = \text{const}$, then (5) becomes

$$\lambda\ddot\Psi = -\frac{\ddot\Psi(\Phi)}{\dot\Psi^3(\Phi)} \tag{12}$$

and this gives us

$$\sqrt{\lambda}\int \frac{d\Phi}{(c_1 + \dot{\Psi}^{-2}(\Phi))^{1/2}} = w + c_2, \tag{13}$$

where c_1, c_2 are two constants of integration. On choosing these two constants of integration to be zero, we obtain

$$w = \sqrt{\lambda}\Psi(\Phi)$$

as a solution of (12), and the change of variable (2) is then given by

$$w = \sqrt{\lambda}\Psi(u). \tag{14}$$

In this case of F, we have replaced Φ by another function Ψ; we now took at some cases of Ψ.

Case 3(a). $F(u) = \lambda_1 \sin u$, where $\lambda_1 = \text{const}$. On setting

$$\lambda_1 \sin u = -\frac{\ddot{\Psi}(u)}{\dot{\Psi}^3(u)}$$

we obtain

$$\Psi(u) = \int \frac{du}{(c_1 - 2\lambda_1 \cos u)^{1/2}} + c_2. \tag{15}$$

For $c_1 = 2\lambda_2$, $c_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$ we find

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \log\tan(u/4)$$

and for $c_1 = -2\lambda_1$, $c_2 = 0$, $\lambda_1 < 0$ one obtains

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} \tanh^{-1}\tan(u/4).$$

On putting $\lambda = |\lambda_1|$ in (14), the change of variable then takes on the form

$$u = \begin{cases} 4\arctan\exp(w/\sqrt{\lambda_1}) & \text{for } \lambda_1 > 0, \\ 4\arctan\tanh(w/\sqrt{-\lambda_1}) & \text{for } \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Case 3(b). $F(u) = \sinh u$. Integrating the equation

$$\sinh u = -\frac{\ddot{\Psi}(u)}{\dot{\Psi}^3(u)}$$

we obtain

$$\Psi(u) = \int \frac{du}{(c_1 + 2\cosh u)^{1/2}} + c_2. \tag{16}$$

For $c_1 = 2$, $c_2 = 0$ one finds

$$\Psi(u) = 2\arctan\tanh(u/4)$$

and for $c_1 = -2$, $c_2 = 0$ one gets

$$\Psi(u) = \log\tanh(u/4).$$

Then (14) gives, with $\lambda > 0$

$$u = 4\tanh^{-1}\tan(w/\sqrt{\lambda}),$$
$$u = 4\tanh^{-1}\exp(w/\sqrt{\lambda}).$$

Case 3(c). $F(u) = \sin u/\cos^3 u$. In this case, the equation

$$\frac{\sin u}{\cos^3 u} = -\frac{\ddot{\Psi}(u)}{\dot{\Psi}^3(u)}$$

yields

$$\Psi(u) = \int \frac{du}{(c_1 + 2\tan^2 u)^{1/2}} + c_2. \tag{17}$$

Again, we choose values for the integration constants. For $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ we find

$$\Psi(u) = \sin u$$

and for $c_1 = c_2 = 0$ we obtain

$$\Psi(u) = \log\sin u.$$

Using (14), with $\lambda > 0$ the change of variable (2) is given by the equations

$$u = \arcsin(w/\sqrt{\lambda})$$

and

$$u = \arcsin\exp(w/\sqrt{\lambda}).$$

We present our results in table 1.

Table 1. Summary of results obtained in cases 1–3(c).

$F(u)$	Solution of (1)	System (7)
u^k, $k \neq 1$	$u = \left(\frac{(1-k)w}{\sqrt{2\lambda(1+k+m-km)}}\right)^{2/(1-k)}$	
	$1 + k + m - km \neq 0$, $m = 0, 1, 2, 3$	$\Box w = m\lambda/w$
$\exp u$	$u = \log\left(\frac{2\lambda(m-1)}{w^2}\right)$, $m = 2, 3$	$w_\mu w^\mu = \lambda$
$-\ddot{\Psi}(u)/\dot{\Psi}^3(u)$	$\Psi(u) = \frac{w}{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda > 0$	
$\lambda_1 \sin u$	$u = 4\arctan\exp(w/\sqrt{\lambda_1})$, $\lambda_1 > 0$	
	$u = 4\arctan\tanh(w/\sqrt{-\lambda_1})$, $\lambda_1 < 0$	$\Box w = 0$
$\sinh u$	$u = 4\tanh^{-1}\tan(w/\sqrt{2\lambda})$, $\lambda > 0$	$w_\mu w^\mu = \lambda$
	$u = 4\tanh^{-1}\exp(w/\sqrt{2\lambda})$, $\lambda > 0$	
$\sin u/\cos^3 u$	$u = 4\arcsin(w/\sqrt{\lambda})$, $\lambda > 0$	
	$u = 4\arcsin\exp(w/\sqrt{\lambda})$, $\lambda > 0$	

We now present some results from [1] concerning the general solutions of the system

$$\Box w = \frac{m\lambda}{w}, \quad w_\mu w^\mu = \lambda, \quad n = 3. \tag{18}$$

Theorem 2. *The general solution of the system (18) for $m = 3$, $\lambda = 1$ is given by*

$$w^2 = [x_\mu + A_\mu(\tau)][x^\mu + A^\mu(\tau)],$$

where the function $\tau(x)$ is defined implicitly by the equation

$$[x_\mu + A_\mu(\tau)]B^\mu(\tau) = 0$$

and A_μ, B_μ are arbitrary differentiable functions of one variable satisfying the conditions

$$\dot{A}_\mu B^\mu = 0, \quad B_\mu B^\mu = 0.$$

Theorem 3. *The general solution of the system (18) for $m = 0$, $\lambda = -1$ is given by*

$$w = A_\mu(\tau)x^\mu + f_1(\tau), \tag{19}$$

where the function $\tau = \tau(x)$ is implicitly defined by the equation

$$B_\mu(\tau)x^\mu + f_2(\tau) = 0 \tag{20}$$

and A_μ, B_μ, f_1, f_2 are arbitrary functions of one variable satisfying

$$A_\mu A^\mu = -1, \quad \dot{A}_\mu B^\mu = 0, \quad A_\mu B^\mu = 0, \quad B_\mu B^\mu = 0. \tag{21}$$

The abtive theorems give us some general information about the solutions of (18) in particular cases. Of course, these results express the solution in terms of other functions, but now we know how to generate these functions: we have to choose A_μ, B_μ, f_1, f_2 appropriately so as to define both τ and then w (as we do below in a particular case). In this way, we have a systematic way of obtaining solutions of (18). Our approach to the solution of the nonlinear d'Alembert equation is based on a change of variable as in (2), and a decomposition of the equation (4) for the new variable w into 'component' equations (5), (6) and (7). Equation (5) involves the change of variable and the nonlinearity $F(u)$, whereas (7) provides us with a system which can be dealt with using theorems 1–3. The d'Alembert equation with nonlinearity $\sin u$ was discussed in [4], where a change of variable together with a decomposition of the ensuing equation was also used. The result obtained in [4] can be obtained with our results, as follows. In (20), (21) put

$$A_\mu = \beta_\mu, \quad B_\mu = \theta_\mu,$$

where $\theta_\mu = \alpha_\mu - \gamma_\mu$, α_μ, β_μ, γ_μ are constant vectors satisfying

$$\alpha_\mu\alpha^\mu = -\beta_\mu\beta^\mu = -\gamma_\mu\gamma^\mu = 1, \quad \alpha_\mu\beta^\mu = \alpha_\mu\gamma^\mu = \beta_\mu\gamma^\mu = 0.$$

Equation (20) then defines τ through

$$f_2(\tau) = -\theta_\mu x^\mu$$

and on choosing f_2 invertible we obtain the solution of (19)

$$w = \beta_\mu x^\mu + f(\theta_\mu x^\mu).$$

When $F(u) = -\sin u$ we obtain

$$u = 4 \arctan \exp[\beta_\mu x^\mu + f(\theta_\mu x^\mu)], \tag{22}$$

where f is an arbitrary differentiable function. Equation (22) is the solution obtained in [4]. As can be seen, our method gives a useful way of obtaining exact solutions of nonlinear equations.

WF acknowledges support by the Swedish Natural Sciences Research Council, grant number R-RA 9423-307.

1. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., General solutions of the nonlinear wave equation and the eikonal equation, *Ukr. Math. J.*, 1991, **43**, 1420–1460 (in Russian).
2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Compatibility and solutions of the nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 1990 (in Russian).
3. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Yehorchenko I.A., On the reduction of nonlinear multidimensional wave equations and compatibility of the d'Alembert–Hamilton system, *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **161**, 352–361.
4. Ouroushev D., Martinov N., Grigorov A., An approach for solving the two-dimensional sine-Gordon equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**, L527–L528.

Symmetry analysis. Preface

W.I. FUSHCHYCH

Till now there are no general methods of investigation of arbitrary nonlinear partial differential equations (PDE). However if a nonlinear equation is beautiful, that is to say it possesses a non-trivial symmetry, than it is possible to obtain rather wide and rich information about its solutions; to carry out reduction of multidimensional equations to ordinary differential equations [1], to construct classes of exact and approximate solutions, investigate asymptotic of special classes of solutions, etc. [1–6].

It is important to point out that beautiful equations are these ones which are widely used in mathematical and theoretical physics, and in applied mathematics. It is connected with the fact that mathematical models of real processes must be of such a form that e.g. conservation laws of energy, momentum, angular momentum of motion or relativity principles [1, 3] and other important principles of physics are satisfied in these models. The beauty (or symmetry, or approximate symmetry) of an equation has a lot of forms: local (or Lie, as we call it in [2, 6]), nonlocal (non-Lie [2]), discrete, non-group, non-algebraic. Therefore it is not simple to give a mathematically correct, effective and general enough definition of beauty of an equation.

The principal ideas and methods of investigation of group (local) properties of partial differential equations PDE are developed by Sophus Lie. These methods enable to study group properties of an arbitrary partial differential equation. The above methods form a part of modern theory of differential equations called on L.V. Ovsyannikov and N.Kh. Ibragimov suggestion "Group analysis of PDE" [4, 5].

Since PDE prove rather often to possess symmetry that cannot be presented in terms of Lie groups or Lie algebras, we use a more general term "Symmetry analysis" suggested in [2, 6]. Symmetry analysis is the aggregate of mathematical methods for investigating local, geometry, non-geometry, discrete, inner and dynamic symmetries of PDE.

The present collection contains papers by participants of the Seminar "Symmetry analysis of mathematical physics equations" (Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine) in which two scientific directions are considered:

1. Conditional symmetry of equations of nonlinear mathematical physics.

2. Local, non-local symmetry and construction of classes of exact solutions of nonlinear PDE.

In conclusion, I adduce several beautiful second-order PDE, that have not been investigated yet

$$a(u,\omega,\Box u)+b(u,\omega,u_\alpha u_\beta u^{\alpha\beta})+c(u,\omega,\det u_{\mu\nu})=F(u,\omega),$$

$$\omega\equiv u_\alpha u^\alpha=\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\cdots-\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2,$$

in Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, Kyiv, Institute Mathematics, 1992, P. 5–6.

$$u = u(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad u_\alpha u_\beta u^{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},$$

$$\det u_{\mu\nu} \equiv \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right);$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \vec{E} = \vec{0}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \vec{H} = 0, \quad v = v\left(\vec{E}, \vec{H}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial x}\right);$$

$$v_\alpha \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\alpha} = 0, \quad v^2 \equiv v_\alpha v^\alpha = v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^3;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) v_l = F_l(v_1, v_2, v_3), \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = F(u, \omega, \Box u);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_b}\frac{\partial}{\partial x_b}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial x_a}\right) u = F(u).$$

In the above formulae a, b, c, F, F_1 arbitrary smooth

1. Fushchych W., Shtelen V., Serov M., Symmetry and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989 (in Russian).
2. Fushchych W.I., A new method of study of the group properties, *Dokl. AN USSR*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
3. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetry of equations of quantum mechanics, Moscow, Nauka, 1990 (in Russian).
4. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978.
5. Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer, 1986.
6. Fushchych W.I., On symmetry and exact solutions of multidimensional nonlinear wave equations, *Ukr. Math. J.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.

Conditional symmetry of equations of nonlinear mathematical physics

W.I. FUSHCHYCH

1. Introduction. In this paper we present some results on conditional symmetry of nonlinear equations of mathematical and theoretical physics which were obtained in the Institute of Mathematics of Ukrainian Academy of Science. The term and the concept of "conditional symmetry of equation" or "conditional invariance" had been introduced in [1–10].

Speaking about the conditional symmetry of an equation, we mean of the symmetry of some subset of its solutions. To be a constructive one, such general definition needs, some more details. To study conditional symmetry means to give analytical description of conditions (constraints) for the set of solutions of an equation under study picking out subsets having wider (or another) symmetry properties than the whole set of solutions. Having carried out such description one can obtain solutions which cannot be obtained within the framework of the classical Vie approach (as it is known, in the Lie approach reduction, of the multi-dimensional partial differential equation (PDE) to equations with less number of independent variables is carried out by means of symmetry of the set of its solutions in a whole).

Euler, Bateman, Lie, Smirnov and Sobolev (1932) and many other classics used implicitly symmetry of subsets of solutions for linear d'Alembert and Laplace equations to construct their exact solutions. Not long ago Bluman and Cole [11] suggested the "non-classical method of solutions invariant under group" for the linear heat equation. Olver and Rosenau (1986) [12] constructed solutions of the one-dimensional nonlinear acoustics equation

$$u_{00} = uu_{11}, \quad u_{00} = \partial^2 u/\partial t^2, \quad u_{11} = \partial^2 u/\partial x^2 \tag{1}$$

which cannot be obtained by means of Lie method. Clarkson and Kruskal suggested "new method of invariant reduction of the Boussinesq equation"

$$u_{00} + \frac{1}{2}u_{11} + u_{1111} = 0. \tag{2}$$

Conclusion 1. *Using the concept of "conditional symmetry of PDE" we can obtain the above results within the framework of the unified symmetry approach.*

Conclusion 2. *The majority of linear and nonlinear equations of mathematical physics: d'Alembert, Maxwell, Schrödinger, Dirac, heat, acoustics, KdV equations possess some conditional symmetry.*

Note 1. All solutions of the Boussinesq equation (2) constructed by Clarkson and Kruskal had been obtained independently by Levi and Winternitz [14], and by Fushchych and Serov [10], using the concept of conditional symmetry.

in Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, Kyiv, Institute Mathematics, 1992, P. 7–27.

Let us consider some PDE

$$L(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},\ldots,\underset{s}{u})=0, \tag{3}$$

where $u=u(x)$, $x\in\mathbb{R}(n+1)$, $u(x)\in\mathbb{R}$, $\underset{s}{u}$ is the set of s-th order partial derivatives of $u(x)$.

According to Lie, the equation (3) is invariant under the first-order differential operator

$$X=\xi^{\mu}(x,u)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4}$$

if the following condition is satisfied:

$$\underset{s}{X}\,L=\lambda L \quad\Leftrightarrow\quad \underset{s}{X}\,L\Big|_{L=0}=0, \tag{5}$$

where $\underset{s}{X}$ is the s-th prolongation of the operator X, $\lambda=\lambda(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},\ldots,\underset{s}{u})$ is some differential expression.

Let us designate by the symbol $Q=\{\underset{1}{Q},\ldots,\underset{k}{Q}\}$ a collection of operators not belonging to the invariance algebra (IA) of the equation (3), i.e. $Q\notin$ IA.

Definition 1 [2, 5]. *We say that the equation (3) is conditionally-invariant under the operators Q if there exists some additional condition*

$$L_1(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},\ldots,\underset{s}{u})=0 \tag{6}$$

to be compatible.

The additional condition (6) picks out some subset from the whole set of solutions of the equation (3). It appears that for many important equations of mathematical physics such subsets admit the wider symmetry than the whole set of solutions. Such subsets are to be constructed.

Let the operator Q act on the equation (3) as follows:

$$\underset{s}{Q}\,L=\lambda_0 L+\lambda_1 L_1 \tag{7}$$

or

$$\underset{s}{Q}\,L\Big|_{\substack{Lu\,=\,0\\ L_1u\,=\,0}}=0,$$

where λ_0, λ_1 are some differential expressions depending on $x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},\ldots,\underset{s}{u}$, $\underset{s}{Q}$ is the s-th prolongation of the operator Q. Then the invariance condition reads

$$\underset{s}{Q}\,L_1=\lambda_2 L+\lambda_3 L_1, \tag{8}$$

where λ_2, λ_3 are some differential expressions.

The principal problem of our approach is to describe in explicit form equations of the form (6) which extend symmetry of the equation (6).

The principal and difficult problem can be essentially simplified if one chooses the following nonlinear first-order PDE as an additional condition (6):

$$Qu=0, \tag{9}$$

where

$$Q = j^\mu(x^\mu, u)\partial_\mu + z(x^\mu, u)\partial_u, \quad \partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu, \quad \partial_u \equiv \partial/\partial u. \tag{10}$$

In this case, the invariance condition for the system of equations (3), (9) takes the form

$$\underset{s}{Q} L = \lambda_0 L + \lambda_1 (Qu). \tag{11}$$

Definition 2. *We say that the equation (3) is Q-conditionally invariant if the system (3), (9) is invariant under the operator (10).*

Let us turn now to the simplest one-dimensional acoustics equation.

2. Conditional symmetry of the equation (1).

Theorem 1 [18]. *The equation (1) is Q-conditionally invariant under the operator (10) if its coefficient functions*

$$j^0 \equiv A(x), \quad j^1 \equiv B(x), \quad z \equiv h(x)u + q(x), \quad x = (x_0, x_1)$$

satisfy the following differential equations:

Case 1. $A \neq 0$, $B \neq 0$*:*

$$\begin{aligned}
&h = 2\left(B_1 - A_0 + \frac{B}{A}A_1\right), \quad q = 2\frac{B}{A}B_0,\\
&h_{00} + \frac{2}{A}hh_0 - \left[\frac{h}{A}A_{00} + \frac{2}{A}hA_{00} + 2\left[\frac{h}{A}\right]_1 B_0\right] = q_{11} - \frac{q}{A}A_{11} + 2\left[\frac{q}{A}\right]_1 A_1,\\
&h_{11} = \frac{h}{A}A_{11} + 2\left[\frac{h}{A}\right]_1 A_1,\\
&q_{00} + 2\frac{q}{A}q_0 - \left[\frac{q}{A}A_{00} + 2\left[\frac{q}{A}\right]_1 B_0\right] = 0,\\
&B_{11} - 2h_1 - \left[\frac{B}{A}A_{11} + 2\left[\frac{B}{A}\right]_1 A_1 + 2\frac{h}{A}A_1\right] = 0,\\
&B_{00} + 2\frac{B}{A}h_0 - \left[\frac{B}{A}A_{00} + 2\left[\frac{B}{A}\right]_1 B_0\right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

The subscripts denote the corresponding derivatives.

Case 2. $A = 0$, $B \neq 0$ *(without loosing generality one may choose* $B = 1$*):*

$$\begin{aligned}
&h_0 = 0, \quad h_{11} + 3hh_1 + h^3 = 0,\\
&q_{11} + hq_1 + \left(3h_1 + 2h^2\right) q = 0,\\
&q_{00} - qq_1 - hq^2 = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Case 3. $A = 1$, $B = 0$*:*

$$\begin{aligned}
&h_1 = 0, \quad h_{00} + hh_0 - h^3 = q_{11}, \quad q(q_0 + hq) = 0,\\
&q_{00} + h_0 q - h^2 q - 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Thus a problem of study of Q- conditional symmetry of the equation (1) is reduced to search of the general solution for the equations (12)–(14). Let us emphasize that coefficient functions j, z of the operator Q unlike coefficient functions ξ, η (4) satisfy a system of nonlinear equations. This fact makes difficult to describe conditional symmetry of given equations. Nevertheless it is possible to construct their partial solutions.

We had found 12 inequivalent operators of conditional symmetry for the equation (1) [8]. Two of them have the form

$$Q_1 = x_0^2 x_1 \partial_1 + \left(u x_0^2 + 3x_1^2 + b_5 x_0^5 + b_6\right) \partial_u, \tag{15}$$

$$Q_2 = \partial_1 + [W(x_0)x_1 + f(x_0)]\partial_u, \quad W'' = W^2, \quad f'' = Wf, \tag{16}$$

W is the Weierstrass function.

The operator (15) generates the ansatz

$$U = x_1\varphi(x_0) + 3x_0^{-2}x_1 - b_5 x_0^3 + b_6 x_0^{-2}. \tag{17}$$

The ansatz (17) reduces the nonlinear equation (2) to linear differential equation (ODE)

$$x_0^2\varphi''(x_0) = 6\varphi(x_0) \tag{18}$$

operator (16) gives rise to the ansatz

$$u = \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 + f(x_0)x_1 + \varphi(x_0) \tag{19}$$

reducing the equation (1) to linear ODE with the Weierstrass potential

$$\varphi''(x_0) = W\varphi(x_0). \tag{20}$$

Note 2. In an analogous way we had constructed families of exact solutions for the multi-dimensional equation [8]

$$u_{00} = u\Delta u. \tag{21}$$

Conclusion 3. *Ansätzes generated by operators of conditional invariance often reduce the initial nonlinear equation to a linear one. The reduction by Lie operators, as a rule, does not change the nonlinear structure of the equation under study.*

3. Conditional invariance of the d'Alembert equation. Let us consider the nonlinear equation

$$\Box u = F_1(u), \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{22}$$

where $F_1(u)$ is an arbitrary smooth function. The equation (22) is invariant under the conformal group (that is the maximal invariance group admitted by (22)) iff $F_1 = 0$ or $F_1 = \lambda u^3$. Let us impose on the solutions of (22) the Poincaré-invariant eikonal constraint

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = F_2(u), \tag{23}$$

where F_2 is a smooth function.

Theorem 2 [15]. *Provided $F_1 = F_2 = 0$ the equation (22) with the condition (23) is invariant under the infinite-dimensional Lie algebra with coefficients of the operator (4) having the form*

$$\xi^\mu(x,u) = c^{00}(u)x^\mu + c^{\mu\nu}(u)x^\nu + d^\mu(u), \quad \eta(x,u) = \eta(u),$$

where $c^{00}(u)$, $c^{\mu\nu}(u)$, $d^\mu(u)$, $\eta(u)$ are arbitrary smooth functions.

Consequently, the additional condition (23) ($F_2 = 0$) picks out from the whole set of solutions of the linear d'Alembert equation ($F_1 = 0$) the subset having the unique symmetry properties. Besides, an arbitrary smooth function of a solution of the system (22), (23) ($F_1 = F_2 = 0$) is its solution too.

Theorem 3. *The system (22), (23) is invariant under the conformal group $C(1,3)$ iff*

$$F_1 = 3\lambda(u+C)^{-1}, \quad F_2 = \lambda, \tag{24}$$

where λ, C are constants.

Thus, the additional eikonal constraint (23) extends the class of nonlinear wave equations admitting conformal group. It means that we can construct wide classes of exact solutions of the equation (22) using the subgroup structure of the group $C(1,3)$.

Note 3. The system (22), (23) had been completely integrated in [16].

Let us consider the Lorentz non-invariant wave equation

$$Lu \equiv \Box u + F(x,u,\underset{1}{u}), \tag{25}$$

$$F = -\left(\frac{\lambda_0}{x_0}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\lambda_a}{x_a}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)^2. \tag{26}$$

The maximal invariance group admitted by the equations (25), (26) is the following two-parameter group

$$x_\mu \to x'_\mu = e^a x_\mu, \quad u \to u' = u + b,$$

where a, b are group parameters.

An additional condition of the type (6) is chosen in the form

$$J_{\mu\nu}u = 0, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{27}$$

By direct check one can assure that the equations (25), (27) are invariant under the Lorentz group $O(1,3)$. It means that the Lorentz-invariant ansatz

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{28}$$

reduces the nonlinear wave equation (25) to the following ODE

$$\omega\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + 2\frac{d\varphi}{d\omega} + \lambda^2\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)^2 = 0, \quad \lambda^2 = \lambda_\mu\lambda^\mu.$$

The solution of the above equation is given by the formulae

$$\varphi(\omega) = 2(-\lambda^2)^{-1/2}\tan^{-1}\left[\omega(-\lambda^2)^{-1/2}\right], \quad \lambda^2 < 0,$$

$$\varphi(\omega) = -(\lambda^2)^{-1/2}\ln\left(\frac{(\lambda^2)^{-1/2}+\omega}{(\lambda^2)^{-1/2}-\omega}\right), \quad \lambda^2 > 0,$$

$$\varphi(\omega) = C_1\omega^{-1} + C_2, \quad \lambda^2 = 0,$$

where C_1, C_2 are constants.

Thus, the condition (27) selects from the set of solutions of the Lorentz non-invariant equation (25) a subset invariant under the six-parameter Lorentz group. This essential extension of the symmetry makes it possible to construct wide classes of exact solutions of the nonlinear wave equation (25).

4. Conditional invariance of the nonlinear Schrödinger equation. Let us consider the nonlinear equation of the form

$$Su + F(|u|)u = 0, \quad S \equiv i\frac{\partial}{\partial x_0} + \lambda_1\Delta. \tag{29}$$

The equation (29) is invariant under the Galilei algebra $AG(1,3)$ having the basis elements

$$\begin{gathered} P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a, \quad a,b = \overline{1,n}, \\ G_a = x_0P_a + \frac{1}{2\lambda_1}x_aR_1, \end{gathered} \tag{30}$$

where

$$R_1 = i\left(u\frac{\partial}{\partial u} - u^*\frac{\partial}{\partial u^*}\right).$$

In the class of nonlinear equations (29) there are two well-known ones having wider symmetry algebra than the equation (29) has [17, 18]:

$$Su + \lambda_2|u|^r u = 0, \tag{31}$$

$$Su + \lambda_3|u|^{4/n}u = 0, \tag{32}$$

where λ_2, λ_3, r are arbitrary parameters, n is the number or space variables in the equation (29).

The equation (31) is invariant, under the extended Galilei algebra $AG_1(1,n) = \langle AG(1,n), D\rangle$ having the basis elements (30) and

$$D = 2x_0P_0 + x_aP_a + \frac{2}{r}R_2, \tag{33}$$

where

$$R_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + u^*\frac{\partial}{\partial u^*}.$$

The equation (32) is invariant under the generalized Galilei algebra $AG_2(1,n) = \langle AG_1(1,n), A\rangle$ having the basis elements (30), (33) and

$$A = x_0^2P_0 + x_0x_aP_a + \frac{x^2}{4\lambda_1}R_1 - \frac{nx_0}{2}R_2, \quad x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Theorem 4 [18]. *The Schrödinger equation (29) is conditionally-invariant under the operator*

$$Q_1 = \ln(uu^{*-1})R_1 + x_a P_a - cR_2, \quad c = \text{const}, \tag{34}$$

provided

$$F(|u|) = \lambda_4 |u|^{-4/r} + \lambda_5 |u|^{4/r},$$

where λ_4, λ_5, r are arbitrary real parameters, and the condition

$$\lambda_1 \Delta |u|^{r+4} + \lambda_6 |u|^r = 0 \tag{35}$$

holds.

Thus imposing on solutions of the nonlinear equation (29) an additional constraint (35) we extend its symmetry.

Theorem 5 [18]. *The equation (32) being taken together with the the equation (35) is invariant under the algebra $AG_2(1,n)$ and the operator Q_1 (34).*

5. Conditional symmetry of nonlinear heat equations. To describe nonlinear processes of heat and mass transfer the one-dimensional equations of the form are used

$$u_0 + u_{11} = F(u), \tag{36}$$

$$u_0 + uu_{11} = 0, \tag{37}$$

where F is a smooth function.

We look for operators of conditional symmetry in the form

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u \tag{38}$$

with some smooth functions A, B, C.

Theorem 6 [19]. *The equation (36) is Q-conditionally-invariant under the operator (38) if functions A, B, C satisfy differential equations:*

Case 1: $A = 1$

$$\begin{aligned} &B_{uu} = 0, \quad C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u), \\ &3B_u F = 2(C_{1u} + CB_u) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1), \\ &CF_u - (C_u - 2B_1)F = C_0 + C_{11} + 2CB_1. \end{aligned} \tag{39}$$

Hereafter subscript, mean differentiation with respect to the corresponding variables (x_0, x_1, u).

Case 2. $A = 0$, $B = 0$

$$CF_u - C_u F = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2 C_{uu}. \tag{40}$$

Having constructed the general solutions of nonlinear systems (39), (40), we shall obtain the general operator of conditional symmetry of equation.

Theorem 7 [19]. *The equation (36) is Q-conditionally-invariant under the operator (38) ($A = 1$, $B_u \neq 0$) iff it, is locally equivalent to the equation*

$$u_0 + u_{11} = b_3 u^3 + b_1 u + b_0, \quad b_0, b_1, b_3 = \text{const}, \tag{41}$$

the operator (38) having the form

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2b_3}u\partial_1 + \frac{3}{2}\left(b_3u^3 + b_1u - b_0\right)\partial_u. \tag{42}$$

The equation (41) is reduced to one of the following canonical equations:

$$u_0 + u_{11} = \lambda u(u^2 - 1), \tag{43}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda(u^3 - 3u + 2), \tag{44}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3, \tag{45}$$

$$u_0 + u_{11} = \lambda u(u^2 + 1). \tag{46}$$

Ansätzes constructed by means of the operator (42) have the from

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1} u + \sqrt{2\lambda}x_1, \quad \omega = -\ln(1 - u^{-2}) + 2\lambda x_0, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(\omega) = -\frac{4}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - \sqrt{2\lambda}x_1, \\ &\omega = \frac{2}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - 3\lambda x_0, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\varphi(\omega) = -2u^{-1} + \sqrt{2\lambda}x_1, \quad \omega = -u^{-2} - 3\lambda x_0, \tag{49}$$

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1} u - \sqrt{2\lambda}x_1, \quad \omega = -\ln(1 + u^{-2}) - 3\lambda x_0. \tag{50}$$

The anzätzes (47)–(50) reduce the equations (43)–(46) to ODE:

$$2\ddot\varphi = (\dot\varphi^2 - 1)\dot\varphi, \quad 2\ddot\varphi = \dot\varphi^3 - 3\dot\varphi + 2, \tag{51}$$

$$2\ddot\varphi = \dot\varphi^3, \quad 2\ddot\varphi = \dot\varphi(\dot\varphi^2 + 1). \tag{52}$$

It is evident from the above equations that ansätzes generated by the operator of conditional invariance (42) change essentially their nonlinearities in second parts. This fact allows to integrate the ODE (51), (52) in elementary functions

$$\varphi(\omega) = -2\tan^{-1}\left(\sqrt{C_1\exp\omega + 1}\right) + C_2, \tag{53}$$

$$\ln\left[C_1 - \frac{3}{2}(\varphi + 2\omega)\right] = \ln C_2 - \frac{3}{2}(\varphi - \omega), \tag{54}$$

$$\varphi(\omega) = 2\sqrt{C_1 - \omega} + C_2, \tag{55}$$

$$\varphi(\omega) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{C_1\exp\omega - 1}\right) + C_2, \tag{56}$$

where C_1, C_2 are constants.

Thus, substitute (53)–(56) into (47)–(50), we get families of exact solutions of the equations (43)–(46). These solutions cannot be obtained within the framework of the Lie method.

Theorem 8 [20]. *The equation (37) is Q-conditionally-invariant under the operator (38) with $A = 1$ if functions B, C satisfy the following system of equations:*

$$uC_{uu} = 2(BB_u + uB_{u1}), \quad B_{uu} = 0, \tag{57}$$

$$B_0 + uB_{11} - CBu^{-1} - 2uC_{u1} + 2BB_1 - 2CB_u = 0, \tag{58}$$

$$C_0 + uC_{11} - C^2u^{-1} + 2CB_1 = 0. \tag{59}$$

Solving equations (57)–(59), we get an explicit form of the operator (38)

$$Q = b_1Q_1 + b_2Q_2 + b_3D_1 + b_4D_2 + b_5\partial_0 + b_6\partial_1, \tag{60}$$

$$\begin{gathered} Q_1 = x_1\partial_0 + u\partial_1, \quad Q_2 = x_0^2\partial_0 + 2x_1u\partial_1 + 2u^2\partial_u, \\ D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \quad D_2 = x_1\partial_1 + 2u\partial_u, \quad b_i = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1,6}. \end{gathered} \tag{61}$$

Theorem 9 [20]. *The equation (37) is Q-conditionally-invariant under the operator*

$$Q = \partial_1 + C(x,u)\partial_u, \tag{62}$$

if $C(x,u)$ satisfies the condition

$$C_0 + u(C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}) + CC_1 + C^2C_u = 0. \tag{63}$$

Partial solutions or the equation (63) give rise to explicit form of operators of conditional symmetry. Below we adduce some of them

$$Q_3 = \sqrt{x_0}\partial_1 + \sqrt{2u}\partial_u, \tag{64}$$

$$Q_4 = \sqrt{2x_0}\partial_1 + R(u)\partial_u, \tag{65}$$

$$Q_5 = \partial_1 + \ln u\partial_u, \tag{66}$$

$$Q_6 = x_0\partial_1 + x_1\partial_u, \tag{67}$$

where $R(u)$ a solution of ODE $u\ddot{R} + \dot{R} = R^{-1}$.

Let us adduce some ansätzes generated by operators Q_1, Q_2, Q_3

$$x_0u - \frac{1}{2}x_1^2 = \varphi(u), \tag{68}$$

$$\frac{2ux_0}{x_1} - x_1 = \varphi\left(\frac{u}{x_1}\right), \tag{69}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right)^2. \tag{70}$$

Reduced equations have the form

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}(u) = 0 && \text{for the ansatz (68)}, \\ &\ddot{\varphi}\left(\frac{u}{x_1}\right) = 0 && \text{for the ansatz (69)}, \\ &2x_0\dot{\varphi}(x_0) + \varphi(x_0) = 0 && \text{for the ansatz (70)}. \end{aligned}$$

Thus the ansätzes (68)–(70) reduce nonlinear heat equations to linear ODE.

6. An equation of the Korteweg-de Vries type. Let us consider a non-linear equation [23]

$$u_0 + F(u)u_1^k + u_{111} = 0, \tag{71}$$

$u_{111} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, k is an arbitrary real parameter. With $F(u) = u$, $k = 1$ (71) coincides with the classical KdV equation.

Theorem 10 [23]. *The equation (71) is Q-conditionally invariant under the following Galilei-type operator:*

$$Q = x_0^r \partial_1 + H(x,u)\partial_u, \tag{72}$$

r is an arbitrary real parameter, if

$$1)\quad F(u) = \lambda_1 u^{\frac{2-k}{u}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}},\qquad H(x,u) = \left(\frac{k\lambda_1}{2}\right)^{-1/k} u^{1/2}, \tag{73}$$

$$2)\quad F(u) = (\lambda_1 \ln u)^{1-k},\qquad H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k} u, \tag{74}$$

$$3)\quad F(u) = (\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}},\qquad H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k}(1-u^2)^{1/2}, \tag{75}$$

$$4)\quad F(u) = (\lambda_1 \operatorname{Arsh} u + \lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-k}{2}},\qquad H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k}(1+u^2)^{1/2}, \tag{76}$$

$$5)\quad F(u) = \lambda_1 u,\qquad H(x,u) = (k\lambda_1)^{-1/k}, \tag{77}$$

where $r \neq k^{-1}$, $k \neq 0$, λ_1, λ_2 are arbitrary constants.

By means of operators of conditional invariance (72) we reduce the equation (71) to ODE and construct the following exact solutions:

$$u = \left\{ \frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-1/k} + \lambda x_0^{-1/k} - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right\}^2,$$

when $F(u)$ is of the form (73);

$$u = \exp\left\{ -\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right\},$$

when $k \neq 2$, $F(u)$ is of the form (74); when $k = 2$

$$u = \exp\left\{ -(2\lambda_1)^{-3/2} x_0^{-1/2} \ln x_0 + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right\};$$

$$u = \sin\left\{ \frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/k} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right\}, \quad k \neq 2,$$

$$u = \sin\left\{ (2\lambda_1)^{-3/2} \frac{\ln x_0}{\sqrt{x_0}} + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \right\}, \quad k = 2,$$

when $F(u)$ is of the form (75);

$$u = \operatorname{sh}\left\{-\frac{k(k\lambda_1)^{-3/k}}{k-2}x_0^{-\frac{3}{k}+1} + \lambda x_0^{-1/k} + (k\lambda_1 x_0)^{-1/2}x_1\right\}, \quad k \neq 2,$$

$$u = \operatorname{sh}\left\{-(2\lambda_1)^{-3/2}x_0^{-1/2}\ln x_0 + \lambda x_0^{-1/2} + (2\lambda_1 x_0)^{-1/2}x_1\right\}, \quad k = 2,$$

when $F(u)$ is of the form (76). In all formulae λ is an arbitrary parameter.

Thus, having investigated the conditional symmetry of the equation (71), we construct nontrivial classes of exact solutions.

7. Nonlinear wave equation. An equation of the form

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0 \tag{78}$$

is widely used for description of nonlinear wave processes. The group properties of the equation (78) were investigated in detail by means of Lie method in [24]. Depending on explicit form of the function $F(u)$ the equation (78) has wide conditional symmetry.

Theorem 11 [25]. *The equation (78) is Q-conditionally invariant under the operator*

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + H(x,u)\partial_u,$$

if functions $A(x,u)$, $B(x,u)$, $H(x,u)$, $F(u)$ satisfy the following systems of equations:

Case 1: $A = 1$, $D = F - B^2$

$$(B_u D^{-1})_u = 0, \quad F(H_1 D^{-1})_1 - (H_0 D^{-1})_0 - H^2 = 0,$$

$$(H_u D^{-1})_u - H(H_0 D^{-1})_u - H(H_u D^{-1})_0 +$$
$$+ D^2\{2F(B_0 D_1 - B_1 H_0 + H[B_u H_1 - B_1 H_u]) - BHH_1 F\} = 0,$$

$$D^2 H_{uu} + D\{(H\dot{F})_u + 2B(B_u H_u - B_{uu}H) - 2FB_{1u} - 2B_{0u}\} -$$
$$- HD^2 + 2BB_0 D_u + 2\dot{B}B_1(BF - 2B_u F) = 0,$$

$$D\{B_{00} + 2(B_0 H)_u - 2(BH_{0u} - B_u H_0) + 2(H_1 F)_u - B_{11}F + B_{uu}H^2 +$$
$$+ 2BHH_{uu}\} - D_u\{B_0 H + B_u H^2 + 2BHH_u\} +$$
$$+ B\{B_1 H\dot{F} + 2B_0^2 + 2B_0 B_u H + 4BB_0 H_u + 4B_1 H_u F - 2B_1^2 F\} = 0.$$

Case 2: $A = 1$, $B = F^{1/2}$

1) $\dot{B}H + 2BH_u = 0, \quad H_0 + HH_u - BH_1 = 0;$

2) $\dot{B}H + 2BH_u \neq 0, \quad H_0 + HH_u - BH_1 = 0;$

$$[\ddot{B}H^2 + 2\dot{B}(BH_1 + HH_u) + 2B(H_{0u} + HH_{uu} + BH_{1u})] = (H_0 + HH_u -$$
$$- HH_1) - [H_{00} + H^2 H_{uu} - B^2 H_{11} + 2HH_{0u} - 2\dot{B}HH_1](\dot{B}H + 2BH_u) = 0.$$

Case 3: $A = 0$, $B = 1$

$$H_{00} - H^3\dot{F} - (3HH_1 + 2H^2 H_u)\dot{F} - (H_{11} + 2HH_{1u})F = 0.$$

Having solved these systems we constructed explicit forms of operators Q for special forms of the function $F(u)$. Let us adduce some of obtained operators and ansätzes:

$$F(u) = \exp u,$$

$$Q_1 = x_1\partial_1 + \partial_u, \quad u = \ln x_1 + \varphi(x_0),$$

$$Q_2 = \partial_0 + 2\operatorname{tg} x_0 \partial_u, \quad \exp u = \frac{\varphi(x_0)}{\cos^2 x_0};$$

$$F(u) = u^k,$$
$$Q_1 = \partial_0 + \exp\left(\frac{u}{2}\right)\partial_1 - 4x_0^{-1}\partial_u, \quad x_0\exp\left(\frac{u}{2}\right) + x_1 + \varphi\left(x_0^2\exp\frac{u}{2}\right) = 0,$$
$$Q_2 = (k+1)x_1\partial_1 + u\partial_u, \quad u^{k+1} = x_1\varphi^{k+1}(x_0);$$
$$F(u) = u^{-1/2},$$
$$Q_1 = \partial_0 + x_1u^{1/2}\partial_u, \quad 2u^{1/2} = x_0x_1 + \varphi(x_1),$$
$$Q_2 = x_1^2\partial_0 + (4x_0 + a_1x_1^5)u^{1/2}\partial_u, \quad u^{1/2} = x_0^2x_1^{-2} + \frac{a_1^2}{2}x_0x_1^3 + \varphi(x_1),$$

where a_1, a_2, a_3 are constants.

The most simple solutions of the equation (78), constructed by means of the above ansätzes are or the form

$$\exp u = (x_1^2 + a_1)\cos^{-2}x_0, \quad \exp u = x_1\exp x_0,$$

if $F(u) = \exp u$;

$$u^{k+1} = x_0^{k+1}x_1,$$

if $F(u) = u^k$;

$$u = x_0x_1 + \frac{x_0^4}{12} + a_1, \quad u = W(x_0)x_1^2,$$

if $F(u) = u$;

$$u^{1/2} = W(x_1)x_0^2, \quad 2u^{1/2} = x_0x_1 + \frac{x_1^4}{24} + a_1,$$
$$u^{1/2} = x_0^2x_1^{-2} + 3a_1x_0x_1^3 + \frac{a_1}{6}x_1^3 + a_2x_1^{-1} + a_3x_1^2,$$

if $F(u) = u^{1/2}$.

So we had classified and reduced the nonlinear wave equations (78) by means of conditional symmetry.

8. Three-dimensional acoustics equation. Bounded sound beams are described by a nonlinear equation of the form [26]

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{79}$$

In the case when $F(u) = u$ it coincides with the Khokhlov–Zabolotskaya equation

$$u_{00} - (uu_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0. \tag{80}$$

Let us add to (79) an additional condition in the form of a first-order nonlinear equation

$$u_0u_1 - F(u)u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 0. \tag{81}$$

Theorem 12 [26]. *The equation (80) with the condition (81) is invariant under the infinite-dimensional algebra with the operator*

$$X = a_i(u)R_i, \quad i = \overline{1,12}, \tag{82}$$

where $a_i(u)$ are arbitrary smooth functions of the dependent variable u,

$$R_{\mu+1} = \partial_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad R_5 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3,$$
$$R_6 = x_2\partial_1 + 2x_0\partial_2, \quad R_7 = x_3\partial_1 + 2x_0\partial_3, \quad R_8 = x^\mu\partial_\mu,$$
$$R_9 = 4x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 3x_2\partial_2 + 3x_3\partial_3 - 2\frac{F(u)}{F'(u)}\partial_u, \quad R_{10} = F'(u)x_0\partial_1 - \partial_u,$$
$$R_{11} = x_2\partial_0 + 2(x_1 + F(u)x_0)\partial_2, \quad R_{12} = x_3\partial_0 + 2(x_1 + 2F(u)x_0)\partial_3.$$

Operators $R_1, \ldots, R_8$ are Lie symmetry operators for the equation (80), $R_9, \ldots,$ R_{12} are operators of the conditional symmetry for the equation (79). Using conditional symmetry operators of the equation (79) $R_9, \ldots, R_{12}$ it is possible to construct wide classes of exact solutions. For example, the operator $X = \partial_0 + a(u)\partial_1$ generates the following ansätzes:

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = a(u)x_0 + x_3, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3. \tag{83}$$

The ansatz (83) reduces the four-dimensional equation (79), (81) to three-dimansional ones

$$\begin{gathered}(a(\varphi) - \varphi)\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \left(\frac{da(\varphi)}{d\varphi} - 1\right)\varphi_1^2 = 0,\\ (a(\varphi) - \varphi)\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0, \quad \varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \quad i = \overline{1,3}.\end{gathered} \tag{84}$$

Taking $a(u)$ in some concrete form it is possible in some cases to construct the general solution of (84). Let $a(u) = u + 1$, then we get a system

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} = 0, \tag{85}$$

$$\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0. \tag{86}$$

The system (85), (86) can be naturally called the Bateman (1914) — Sobolev–Smirnov (1932–1933) equations, because Bateman, Sobolev and Smirnov investigated this system in detail. The equations (85), (86) has the general solution which is given by Sobolev–Smirnov formula

$$\varphi = c_1(\varphi)\omega_1 + c_2(\varphi)\omega_2 + c_3(\varphi)\omega_3, \tag{87}$$

where c_1, c_2, c_3 are arbitrary functions satisfying the following conditions:

$$c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 = 0, \quad c_2^2 + c_3^2 \neq 0.$$

Thus the formula (87) gives the class of exact solutions for the three-dimensional nonlinear equations (85), (86).

9. Conditional symmetry of the Dirac equation. Let us consider the nonlinear Dirac equation

$$\{\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar\varphi\varphi)\}\varphi(x) = 0 \tag{88}$$

and put on its solutions a condition $\bar\varphi\varphi = 1$. Then (88) becomes a linear equation with a nonlinear additional condition:

$$(\gamma_\mu p^\mu - \lambda)\psi = 0, \quad \bar\psi\psi = 1. \tag{89}$$

The system (89) is conditionally invariant under the operators [9]

$$Q_1 = P_0 - \lambda\gamma_0, \quad Q_2 = P_3 - \lambda\gamma_3. \tag{90}$$

In the case under consideration the equation of the type (6) has the form

$$Q_1\psi = 0 \quad \text{and} \quad Q_2\psi = 0. \tag{91}$$

The operator Q_1 generates the ansatz

$$\psi(x) = \exp(-i\lambda\gamma_0 x_0)\varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{92}$$

where $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ is a four-component vector-function depending on three variables only.

10. Conditional symmetry of Maxwell's equation. Let us consider a linear system [5]

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}. \tag{93}$$

It can be verified directly that the system (93) is not invariant under the Lorentz transformations. However if we add to the system (93) the well-known additional conditions

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \tag{94}$$

the system (93), (94) becomes a Lorentz-invariant one. The point of view on Maxwell's equations which was set forth [1–9, 21] stressesthe naturality of the notion of conditional invariance and its importance for a wide class of equations of mathematical physics [22].

Conclusion. Investigation of conditional symmetry of partial differential equation has been started recently. The adduced results show that we can anticipate on this way the qualitatively new understanding of symmetry of an equation, of symmetry classification or partial differential equations, of reduction of multi-dimensional nonlinear equations to equations with less number of independent variables, of process of linearization of nonlinear equations.

The principle of relativity, or equivalence of all inertial reference frames, is one of the most fundamental laws of physics, mechanics, hydromechanics, biophysics. Saying in the language of mathematics this principle represents the invariance of an equation of motion whether under the Galilei transformations or under the Lorentz ones. Partial differential equations which do not, satisfy this principle usually are not considered in physical theories. Such equations cannot be used for mathematical description of motion of real physical systems.

The concept of conditional invariance enables to get essentially wider classes of equations satisfying relativity principle. Equations which are non-compatible in usual sense with the relativity principle can satisfy it conditionally, that is, non-trivial conditions on solutions of these equations exist, which pick out subsets of solutions of the initial equation, invariant or under Galilei transformations, or tinder Lorentz ones. Description and detailed investigation of classes of equations conditionally invariant, under Galilei and Poincaré groups and their subgroup seem to the author a rather significant problem of mathematical physics.

Conditional symmetry, for example, of a scalar equation, enables to construct ansätzes which increase the number of dependent variables (antireduction). It allows not only to carry out reduction by number of independent variables but to increase the number of dependent variables. We should like to stress that such ansätzes change essentially the structure of nonlinearity of the initial equation. And, certainly, they cannot be constructed by means of the classical Lie method. The process of linearization, for example, of the nonlinear Navier–Stokes system in our approach is considered as change of a nonlinear equation for a linear system

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{95}$$

with a nonlinear additional condition

$$(\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u} = 0 \quad \text{or} \quad \{(\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u}\}^2 = 0. \tag{96}$$

The linear Navier–Stokes equation with the nonlinear additional conditions has a nontrivial conditional symmetry. Evidently it is also possible to choose as an additional condition for the Stokes–Stokes equation the following equations:

$$(\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p = 0.$$

We are going to devote further papers to detailed investigation of conditional linerisation of nonlinear partial differential equations.

In conclusion I adduce the list (which is far from being complete) of nonlinear equations having nontrivial conditional symmetry

$$u_0 + u_{11} = F(u), \quad u_0 + u u_{11} = 0, \qquad (1988,\ 1990)$$

$$Su + F(|u|)u = 0, \quad S = i\frac{\partial}{\partial x_0} - \Delta, \qquad (1990)$$

$$u_{00} = u\Delta u, \qquad (1988)$$

$$\Box u = F(u), \qquad (1989)$$

$$u_{01} - (F(u)u_1)_1 - u_{22} - u_{33} = 0, \qquad (1990)$$

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0, \qquad (1991)$$

$$u_{00} = C(x, u, \underset{1}{u})\Delta u, \qquad (1987)$$

$$u_0 - \vec{\nabla}[F(u)\vec{\nabla} u] = 0, \qquad (1988)$$

$$u_0 + F(u)u_1^k + u_{111} = 0, \qquad (1991)$$

$$u_0 + \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x_1^2} + \frac{N}{x_1}\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x_1} = F(u), \qquad (1992)$$

$$u_0 + u_{11} + \frac{3}{2x_1}u_1 = \lambda u^3, \qquad (1992)$$

$$u_0 + uu_{11} + \frac{N}{x_1} uu_1 = \lambda_1 u + \lambda_2, \qquad (1992)$$

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p,\\
&\rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \qquad (1992)\\
&p = f(\rho), \quad p = \frac{1}{2}\lambda\rho^2,
\end{aligned}$$

$$(1 - u_\alpha u^\alpha)\Box u + u_\mu u_\nu u^{\mu\nu} = 0. \qquad (1989)$$

In the brackets we indicated the years when the conditional symmetry of the corresponding equation had been investigated.

1. Fushchych W.I., On symmetry and partial solutions of some multi-dimensional equations of mathematical physics, in Theoretical-algebraic methods in problems of mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics of Ukr. Acad. Sci., 1983, 4–23.
2. Fushchych W.I., How to expand symmetry of differential equations?, in Symmetry and solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics of Ukr. Acad. Sci., 1987, 4–16.
3. Fushchych W.I., On symmetry and exact solutions of many-dimensional nonlinear wave equations, *Ukr. Math. J.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
4. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A*, 1987, **20**, L45–L48.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Reidel Publ., 1987, 212 p.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Inst. for Math. and its Appl., Univ. of Minnesota, 1988.
7. Fushchych W.I., Serov M.I., Chopyk V.I., Conditional invariance and nonlinear heat equations, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1988, № 9, 17–21.
8. Fushchych W.I., Serov M.I., Conditional symmetry and exact solutions of the nonlinear acoustics equation, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1988, № 10, 27–31.
9. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Symmetry and exact solutions nonlinear spinor equations, *Phys. Rep.*, 1989, **172**, № 4, 123–174.
10. Fushchych W.I., Serov M.I., Conditional invariance and solutions of the Boussinesq equation, in Symmetry and solutions of equations of mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics of Ukr. Acad. Sci., 1989, 95–102.
11. Bluman G., Cole J., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.*, 1969, **18**, 1025–1042.
12. Olver P., Rosenau Ph., The construction of special solutions to partial differential equations, *Phys. Lett. A*, 1986, **112**, № 3, 107–112.
13. Clarkson P., Kruskal M., New similarity reductions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, № 10, 2201–2213.
14. Levi D., Winternitz P., Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A*, 1989, **22**, 2915–2924.
15. Shul'ga M.W., Symmetry and some partial solutions of the d'Atembert equation with a nonlinear condition, in Group-theoretical studies of equations of mathematical physics, Kiev, Inst. of Mathematics Ukr. Acad. Sci., 1985, 34–38.
16. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Compatibility and solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 90.39, Kiev, Inst. of Mathematics Ukr. Acad. Sci., 1990, 67 p.

17. Fushchych W.I., Serov M.I., On some exact solutions of the three-dimensional Schrödinger equation, *J. Phys. A*, 1987, **20**, L929–L933.

18. Fushchych W.I., Chopyk V.I., Conditional invariance of the nonlinear Schrödinger equations, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1990, № 4, 30–33.

19. Fushchych W.I., Serov M.I., Conditional invariance and reduction of the nonlinear heat equation, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1990, № 7, 24–28.

20. Fushchych W.I., Serov M.I., Amerov T.K., Conditional invariance of the heat equation, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1990, № 11, 16–21.

21. Fushchych W.I., On one generalization of S. Lie method, in Theoretical-algebraic analysis of equations of mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics of Ukr. Acad. Sci., 4–9.

22. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., Symmetry analysis and exact solutions of the equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989, 336 p. (to be published in Kluwer Publishers in 1993).

23. Fushchych W.I., Serov M.I., Amerov T.K., On conditional symmetry of the generalized Korteweg-de Vries equation, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1991, № 12, 28–30.

24. Ames W.F., Lohner R.I., Adams E., Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$, *Intern. J. Nonlinear Mech.*, 1981, **16**, № 5/6, 439–447.

25. Fushchych W.I., Serov M.I., Repeta V.K., Conditional symmetry, reduction and exact solutions of nonlinear wave equation, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1991, № 5, 29–34.

26. Fushchych W.I., Chopyk V.I., Myronyuk P.I., Conditional invariance and exact solutions of the three-dimensional nonlinear acoustics, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1990, № 9, 25–28.

27. Fushchych W., Serov M., Amerov T., Conditional invariance and exact solutions of gas dynamics equations, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1992, № 5, 35–40.

28. Fushchych W., Serov M., Vorobyeva A., Conditional symmetry and exact solutions of equations of nonstationary filtration, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1992, № 6, 20–24.

29. Fushchych W., Myronyuk P., Conditional symmetry and exact solutions of the nonlinear acoustics equations, *Dokl. Ukr. Acad. Sci., Ser. A*, 1991, № 6, 23–29.

New nonlinear equations for electromagnetic field having velocity different from c

W.I. FUSHCHYCH

Предложены новые нелинейные уравнения для электромагнитного поля, скорость которого в вакууме может быть меньше, чем c. Предложены также нелинейные уравнения для электромагнитного, скалярного и спинорного полей.

1. The Maxwell equations

$$\frac{\partial \vec{D}}{dt} = c \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \tag{1}$$

play a basic role in modern electromagnetic theory. When considered in vacuum, Eqs. (1) take the form

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \tag{2}$$

Provided $\vec{D} = \varepsilon \vec{H}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, ε, σ, μ being constants, from (1) it follows that the wave equations hold

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} + \sigma\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \rho, \quad \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{H} + \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0}. \tag{3}$$

When considered in vacuum ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$) Eqs. (3) read

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{H} = \vec{0}. \tag{4}$$

It is a generally accepted axiom of the modern theory of elementary interactions (classical and quantum) that the quantity in (1)–(4) is identified with the velocity of light. That is the fundamental constant.

There are few works devoted to study of nonlinear generalizations of equations (1)–(3) (see, e.g., lists of references in [1–3]).

In the present paper we suggest new nonlinear generalization of Eqs. (1)–(4) based on the following idea: the velocity of light may not coincide with the constant c.

2. Let us admit following Poyting (1884) the standard definition of the energy density and of the electromagnetic flow

$$\rho = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad \rho v_k = c\varepsilon_{kln} E_l H_n, \quad k, l, n = \overline{1,3}, \tag{5}$$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ is the velocity of the electromagnetic flow.

It is easy to see of that the formula

$$\vec{v}^{\,2} = c^2 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \rho^{-2} (\vec{E}^2 - \vec{H}^2)^2 - \rho^{-2} (\vec{E}\vec{H})^2 \right\} \tag{6}$$

holds.

Доклады АН Украины, 1992, № 4, С. 24–27.

From (6) it follows that $\vec{v}^{\,2} \le c^2$ and what is more $\vec{v}^{\,2} = c^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \vec{E}^2 - \vec{H}^2 = 0$, $\vec{E}\vec{H} = 0$.

Let us make in Eqs. (1)–(4) the change

$$c \to v, \quad c^2 \to v^2.$$

This change yields nonlinear equations for electromagnetic field. For example, Eqs. (2) take the form

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = v \,\mathrm{rot}\, \vec{H}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -v \,\mathrm{rot}\, \vec{H}, \quad \mathrm{div}\, \vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\, \vec{H} = 0. \tag{7}$$

The above equations can be generalized in the following way:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\vec{H} \times \vec{v}), \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\vec{v} \times \vec{E}). \tag{8}$$

Eqs. (7), (8) can be interpreted as equations of motion for an electromagnetic field which spreads with velocity $\vec{v}$. Provided $\vec{v}$ is determined by (5), (6), the velocity of electromagnetic field is smaller than c.

One can impose on $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{x})$ equations of hydrodynamics type

$$\Delta\Delta \vec{v} = \vec{0}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \lambda v_k \frac{\partial}{\partial v_k} \tag{9}$$

or

$$\Delta\Delta^2 \vec{v} = \vec{0}, \tag{10}$$

whence

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\vec{H} \times \vec{v}), \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\vec{v} \times \vec{E}), \\ \Delta\Delta \vec{v} = \vec{0}, \quad \mathrm{div}\, \vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\, \vec{H} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Thus system (11) describes woth the electromagnetic field and its velocity.

Note 1. Eq. (9) possesses unique symmetry properties. Is is invariant under the Poincaré and Galilei groups [3]. That is Eq. (9) satisfies. both the Lorentz–Poincaré–Einstein and Galilei relativity principles.

In addition, we adduce another nonlinear equation

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \lambda_1(\vec{E}^2 - \vec{H}^2, \vec{E}\vec{H}) H_k \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_k} + \lambda_2(\vec{E}^2 - \vec{H}^2, \vec{E}\vec{H}) \,\mathrm{rot}\, H = \vec{0},$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \lambda_3(\vec{E}^2 - \vec{H}^2, \vec{E}\vec{H}) E_k \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_k} + \lambda_4(\vec{E}^2 - \vec{H}^2, \vec{E}\vec{H}) \,\mathrm{rot}\, E = \vec{0},$$

where λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 are some smooth functions.

Eqs. (1), (3), (4) are generalized in an analogous way. For example, Eq. (4) is generalized in a way

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \vec{E} = \vec{0}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \vec{H} = \vec{0}. \tag{12}$$

or

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_l}\left\{c_{ln}(v^2)\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_n}\right\} = \vec{0}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_l}\left\{c_{ln}(v^2)\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_n}\right\} = \vec{0}, \tag{13}$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{c_{\mu\nu}(v^2)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right\}F_{\alpha\beta} = 0, \quad \mu,\nu,\alpha,\beta = \overline{0,3}, \tag{14}$$

where $c_{lm}(v^2)$, $c_{\mu\nu}(v^2)$ are smooth functions on v^2. One can impose on the scalar function v the eikonal equation

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 = \lambda, \quad \lambda = 0, \pm 1. \tag{15}$$

Note 2. In Eqs. (12)–(14) the vector $\vec{v}$ can be defined according to the formula (6).

3. Let us turn to the generalization of the linear d'Alembert–Klein–Gordon–Fock equation

$$-\hbar^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2\Delta + m^2c^4)u. \tag{16}$$

After the change $c \to v(t,\vec{x})$ it takes the form

$$-\hbar^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-\hbar^2 v^2\Delta + m^2c^4)u, \tag{17}$$

where v is determined by (6), functions $\vec{E}$, $\vec{H}$ satisfying Eqs. (1)–(4) or Eqs. (7)–(8).

Note 3. The vector of velocity of spread of the scalar field u can be defined in the following way:

$$v_k = \lambda(|u|)\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x_k} + u\frac{\partial u^*}{\partial x_k}\right) \tag{18}$$

or

$$v_\mu = \lambda(|u|)\left(u^*\frac{\partial u}{\partial x_\mu} + u\frac{\partial u^*}{\partial x_\mu}\right), \tag{19}$$

where $\lambda(|u|)$ is an arbitrary smooth function.

4. The Dirac equation for the spinor field

$$(-i\hbar\gamma_\mu\partial_\mu + mc)\psi = 0 \tag{20}$$

is rewritten in the form of nonlinear system

$$(-i\hbar\gamma_\mu\partial_\mu + mv)\psi = 0, \quad v = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^{1/2}, \tag{21}$$

$$\Delta\Delta v_k = 0 \quad \text{or} \quad v_a\frac{\partial v_\mu}{\partial x_a} = 0. \tag{22}$$

Note 4. The vector of velocity of spread of the spinor field can be defined by the formula (6). In this case, $\vec{E}$, $\vec{H}$ are vectors characterizing elecromagnetic field which is generated by the spinor field

$$F_{\mu\nu} = \lambda_1 \bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi, \tag{23}$$

λ_1 is some small parameter.

Note 5. The vector of velocity of the spinor field can be defined as follows

$$v_k = \lambda_2 \bar{\psi}\gamma_k\psi$$

or

$$v_\mu = \lambda_3 \bar{\psi}\gamma_\mu\psi.$$

One can demand that the above vectors have to satisfy conditions (22).

Detailed symmetry analysis and construction of exact solutions of the above suggested equations will be carried out in future paper.

Note 6. The classical wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0$$

in our approach is generalised in the following way

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{a_{kl}(\bar{v})\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\} = 0, \quad a_{kl} = \lambda_1(v^2)v_k v_l + \lambda_2(v^2)\delta_{ik},$$

$$\Delta\Delta v_i = 0 \quad \text{or} \quad \Delta\Delta^2 v_i = 0.$$

In one dimensional space the wave equation has the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad \Delta\Delta v + \lambda_3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

λ_1, λ_2, λ_3 are smooth functions of v^2.

1. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On the symmetry of nonlinear electrodynamics equations, *Teoret. Matem. Fizika*, 1985, **64**, № 1, 41–50.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Reidel, 1987, 214 p.
3. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989, 336 p.

The complete sets of conservation laws for the electromagnetic field

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

We present a compact and simple formulation of zero- and first-order conserved currents for the electromagnetic field and give the number of independent n-order currents.

New conservation laws for the electromagnetic field, discovered by Lipkin [1], had obtained an adequate mathematical and physical interpretation long ago, see e.g. [2–6]. It happens that these conservation laws are nothing but a small part of the infinite series of conserved quantities which exist for any self-adjoint linear system of differential equations; among their number are Maxwell's equations [7]. As to the physical interpretation of Lipkin's zilch tensor it can be connected with conservation of polarization of the electromagnetic field [5, 6].

The aim of the present letter is to establish certain rules in the bewildering complexity of the conservation laws and to describe complete sets of them for the electromagnetic field.

We say that an arbitrary bilinear function $j_\mu^{(m)} = f_\mu^{(m)}(D^n F, D^k F)$ is a conserved current if it satisfies the continuity equation

$$\partial^\mu j_\mu^{(m)} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{1}$$

Here $F = F_{\mu\nu}$ is the tensor of the electromagnetic field,

$$D^n = \prod_{\lambda=0}^{n} \partial^{\mu_\lambda}, \quad \mu_\lambda = 0,1,2,3, \quad m = \max(n+k).$$

It follows from (1) according to the Ostrgradskii–Gauss theorem that the following quantity is conserved in time:

$$\langle j_0^{(m)} \rangle = \int d^3x j_0^{(m)}.$$

We say conserved currents $j_\mu^{(m)}$ and $j_\mu^{\prime(m)}$ are equivalent if

$$\langle j_0^{(m)} \rangle = \langle j_0^{\prime(m)} \rangle.$$

Proposition 1. *There exist exactly 15 non-equivalent conserved currents of zero order for Maxwell's equation. All these currents can be represented in the form*

$$j_\mu^{(0)} = T_{\mu\nu} K^\nu, \tag{2}$$

where $T_{\mu\nu}$ is the traceless energy-momentum tensor of the electromagnetic field and K^ν is a Killing vector satisfying the equations

$$\partial^\nu K^\mu + \partial^\mu K^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda K^\lambda = 0. \tag{3}$$

J. Phys. A: Math. Gen., 1992, **25**, L231–L233.

Proof. This reduces to finding the general solution of the equation

$$\partial^0 \langle j_0^{(0)} \rangle = \partial^0 \int d^3x j_0^{(0)}(F,F) = 0, \tag{4}$$

where $j_0^{(0)}(F,F)$ is a bilinear combination of components of the tensor of the electromagnetic field. It is not difficult to find such a solution, decomposing $j_0^{(0)}$ by the complete set of symmetric matrices of the dimension 6×6

$$\begin{gathered}
j_0^{(0)} = \varphi^T Q \varphi, \quad \varphi = \text{column}(F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{23}, F_{31}, F_{12}),\\
Q = (\sigma_0 A_0^{ab} + \sigma_1 A_1^{ab} + \sigma_3 A_3^{ab}) Z_{ab} + \delta_2 S_a K^a,\\
Z_{ab} = 2\delta_{ab} + S_a S_b + S_b S_a, \quad a,b = 1,2,3,\\
S_a = \begin{pmatrix} S_a & \hat{0} \\ \hat{0} & S_a \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} I & \hat{0} \\ \hat{0} & I \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix},\\
\sigma_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & -I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & \hat{0} \\ \hat{0} & -I \end{pmatrix},\\
S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{gathered}$$

where $\hat{0}$ and I are the zero and unit matrices of dimension 3×3, A_λ^{ab}, K^a are unknown functions of x_μ. In fact substituting (5) into (4) and using the Maxwell equations

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = 0$$

we come to the relations $A_1^{ab} = A_3^{ab} = 0$, $A_2^{ab} = -\delta^{ab} K^0$ and to the equations (3) for K^0 and K^a.

Thus we have found all non-equivalent $j_0^{(0)}$ satisfying (4). The corresponding expressions for $j_\mu^{(0)}$ with $\mu \neq 0$ can be obtained by Lorentz transformations.

Formula (2) gives an elegant formulation of the classical conservation laws of Bessel–Hagen [8]. We present a direct (and simple) proof that there are not another conserved bilinear combination of the electromagnetic field strengths.

In an analogous way it is possible to prove the following assertion.

Proposition 2. *There exist exactly 84 conserved currents of first order for the electromagnetic field. All these currents can be represented in the form*

$$j_\mu^{(1)} = K^{\sigma\nu} Z_{\sigma\nu,\mu} + 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} (\partial^\lambda K^{\rho\nu}) T^{\sigma\rho}, \tag{5}$$

where $T^{\sigma\rho}$ is the energy-momentum tensor, $Z_{\sigma\nu,\mu}$ is Lipkin's zilch tensor, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ is the completely antisymmetric unit tensor, $K^{\sigma\nu}$ is a conformal Killing tensor of valence 2, satisfying the equations

$$\partial^{(\mu} K^{\sigma\nu)} = \frac{1}{3} \partial_\lambda K^{\lambda(\mu} g^{\sigma\nu)}, \quad K^{\sigma\nu} = K^{\nu\sigma}, \quad K_\mu^\mu = 0, \tag{6}$$

where symmetrization is imposed over the indices in brackets.

Using the relations

$$\begin{gathered}
\partial^\mu Z_{\lambda\sigma,\mu} = 0, \quad Z_{\mu\nu,}{}^\nu = 0, \quad \partial_\lambda T^{\lambda\mu} = 0, \quad T^\lambda{}_\lambda = 0,\\
\partial^\rho (\varepsilon_{\rho\lambda\nu\sigma} T^{\sigma\mu} + \varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma} T^{\sigma\lambda}) = Z_{\lambda\nu,}{}^\mu + Z_{\mu\nu,}{}^\lambda
\end{gathered}$$

and the equations (7) we can ensure that the currents (6) really satisfy the continuity equation (1).

Thus all non-equivalent conserved currents of first order are given by formula (6). The general solution of the equation (7) is a fourth-order polynomial of x_μ depending on 84 parameters; for the explicit expression of $K^{\sigma\nu}$ see e.g. [9]. Formula (6) describes well known and also ‘new’ conserved currents; the latter depend on the fourth degree of x_μ.

In conclusion we note that in an analogous way it is possible to describe conserved currents for the electromagnetic field of an arbitrary order m. For $m > 1$ such currents are defined by two fundamental quantities i.e. by the conformal Killing tensor of valence $m+1$ and the Floyd–Penrose tensor of valence $R_1 + 2R_2$ where $R_1 = m-1$, $R_2 = 2$. The higher order conserved currents will be considered in a separate paper; here we present only the number of linearly independent currents of order m:

$$N_m = \frac{1}{2}(2m+5)\left[2m(m+1)(m+4)(m+5) + (m+2)^2(m+3)^2\right], \quad m > 1.$$

For the details about generalized Killing and Floyd–Penrose tensors in application to higher symmetries of Poincaré- and Galilei-invariant wave equations see the extended version of our book [10]. Non-Lie symmetries and conservation laws for Maxwell’s equations are discussed in [11].

1. Lipkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 696.
2. Klibble T.W., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 1022.
3. Morgan T.A., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 1659.
4. Michelson J., Niederle J., *Lett. Math. Phys.*, 1984, **8**, 195.
5. O’Connel R.F., Tompkins D.R., *Nuovo Cimento*, 1965, **39**, 391.
6. Candlin P.I., *Nuovo Cimento*, 1965, **37** 1390.
7. Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer, 1986.
8. Bessel-Hagen E., *Math. Ann.*, 1921, **84**, 258.
9. Nikitin A.G., *Ukr. Math. J.*, 1991, **43**, 786.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of the equations of quantum mechanics, Moscow, Nauka, 1990 (in Russian); New York, Allerton Press, 1994.
11. Fuschych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell’s equations, Dordrecht, Reidel, 1987.

Symmetry reduction of the Navier–Stokes equations to linear two-dimensional systems of equations

W.I. FUSHCHYCH, R.O. POPOVYCH

Побудовано повний набір нееквіалентних двовимірних підалгебр максимальної в сенсі Лі (нескінченовимірної) алгебри інваріантнооті рівнянь Навье–Стокса для в'язкої нестискної рідини. Отримано анзаци, що редукують рівняння Навье–Стокса до лінійних систем ДРЧП від двох незалежних змінних. Проведено дослідження симетрійних властивостей редукованих систем та побудовані деякі їх точні розв'язки.

In this article, being continuation of our works [1, 2], we construct ansätze for the Navier–Stokcs (NS) field which reduce the NS equations (NSEs) for an incompressible viscous fluid to linear systems of partial differential equations (PDEs) in two independent variables. To solve this problem we use the method described in [3] and the infinite-dimensional symmetry algebra of the NSEs.

It is known that NSEs

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}-\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\nabla}p=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)=\{u^1,u^2,u^3\}$ is the velocity field of a fluid, $p=p(x)$ is the pressure, $x=\{t,\boldsymbol{x}\}\in\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{\nabla}=\{\partial/\partial x_a\}$, $a=1,2,3$, $\Delta=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$, are invariant under the infinite dimensional algebra A^∞ with basis elements

$$\begin{aligned}
&\partial_t=\frac{\partial}{\partial t},\quad D=2t\partial_t+x_a\partial_a-u^a\partial u^a-2p\partial_p,\\
&J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a+u^a\partial u^b-u^b\partial u^a,\\
&R(\boldsymbol{m})=m^a\partial_a+\dot m^a\partial u^a-x_a\ddot m^a\partial_p,\quad Z(\alpha)=\alpha(t)\partial_p,
\end{aligned} \tag{2}$$

where $\boldsymbol{m}=\{m^a(t)\}$ and $\alpha(t)$ are arbitrary differentiable function of t; dot means differentiation with respect to t. The set of operators (2) determine the maximal in the sense of Lie invariance algebra of the NSEs [4, 6, 7].

Constructing a complete set of inequivalent two-dimensional subalgebras of A^∞, we choose from it those subalgebras which lie in a linear span of operators J_{ab}, $R(m)$ and $Z(\alpha)$. It is these subalgebras that allow us to construct ansätze which reduce the nonlinear NSEs to linear systems of PDEs in two independent variables.

Theorem 1. *A complete set of A^∞-inequivalent two-dimensional subalgebras of A^∞ is exhausted by such algebras:*

1. $A^1(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\langle R(\boldsymbol{m}),R(\boldsymbol{n})\rangle$, $\ddot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{n}-\ddot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{m}=0$, *and* $\forall\, c_1,c_2\in\mathbb{R}$ $c_1\boldsymbol{m}+c_2\boldsymbol{n}\neq 0$, *where algebras* $A_1(\boldsymbol{m}^1,\boldsymbol{n}^1)$ *and* $A^1(\boldsymbol{m}^2,\boldsymbol{n}^2)$ *are equivalent if* $\exists\,\{a_{kl}\}_{k,l=1,2}$, $\det\{a_{kl}\}\neq 0$, $B\in O(3)$, $\exists\,\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$:

$$(\boldsymbol{m}^2,\boldsymbol{n}^2)(t)=(B(a_{11}\boldsymbol{m}^1+a_{12}\boldsymbol{n}^1),\ B(a_{21}\boldsymbol{m}^1+a_{22}\boldsymbol{n}^1))(te^{2\varepsilon}+\delta); \tag{3}$$

Доповіді АН України, 1992, № 8, С. 29–36.

2. $A^2(\alpha,\beta)=\langle J_{12}+Z(\alpha(t)),R(0,0,\beta(t))\rangle$, $\beta\neq 0$, *where algebras* $A^2(\alpha^1,\beta^1)$ *and* $A^2(\alpha^2,\beta^2)$ *are equivalent if*

$$\exists\, c\neq 0\ \exists \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}:\ (\alpha^2,\beta^2)(t)=(e^{2\varepsilon}\alpha^1,c\beta^1)(te^{2\varepsilon}+\delta); \tag{4}$$

3. $A^3(\alpha,\beta)=\langle J_{12}+R(0,0,\beta(t)\int\frac{dt}{(\beta(t))^2}+Z(\alpha(t)),R(0,0,\beta(t))\rangle$, $\beta\neq 0$, *where algebras* $A^3(\alpha^1,\beta^1)$ *and* $A^3(\alpha^2,\beta^2)$ *are equivalent if*

$$\exists \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}:\ (\alpha^2,\beta^2)(t)=(e^{2\varepsilon}\alpha^1,e^{-\varepsilon}\beta^1)(te^{2\varepsilon}+\delta); \tag{5}$$

4. $A^4=\langle D+2\varkappa J_{12},R(\mu|t|^\sigma\cos(\varkappa\ln|t|),\mu|t|^\sigma\sin(\varkappa\ln|t|),\nu|t|^\sigma)+Z(\varepsilon|t|^{\sigma-3/2})\rangle$, $\varkappa>0$, $\mu\geq 0$, $\nu\geq 0$, $\mu^2+\nu^2=1$, $\varepsilon=0$ *if* $\sigma\neq 1/2$ *and* $\varepsilon\geq 0$ *if* $\sigma=1/2$;

5. $A^5=\langle D,R(0,0,|t|^\sigma)+z(\varepsilon|t|^{\sigma-3/2})\rangle$, $\varepsilon=0$ *if* $\sigma\neq 1/2$ *and* $\varepsilon\geq 0$ *if* $\sigma=1/2$;

6. $A^6=\langle \partial_t+J_{12},R(\mu e^{\sigma t}\cos t,\mu e^{\sigma t}\sin t,\nu e^{\sigma t}+Z(\varepsilon e^{\sigma t})\rangle$, $\mu\geq 0$, $\nu\geq 0$, $\mu^2+\nu^2=1$, $\varepsilon=0$ *if* $\sigma\neq 0$ *and* $\varepsilon\geq 0$ *if* $\sigma=0$;

7. $A^7=\langle \partial_t,R(0,0,e^{\sigma t})+Z(\varepsilon e^{\sigma t})\rangle$, $\sigma\in\{-1;0;1\}$, $\varepsilon=0$ *if* $\sigma\neq 0$ *and* $\varepsilon\in\{0;1\}$ *if* $\sigma=0$;

8. $A^8=\langle \partial_t,J_{12}+\theta\partial_3+\varepsilon\partial_p\rangle$, $\theta\in\{0;1\}$, $\varepsilon\geq 0$ *if* $\theta=1$ *and* $\varepsilon\in\{0;1\}$ *if* $\theta=0$;

9. $A^9=\langle \partial_t,D+\gamma J_{12}\rangle$, $\gamma\geq 0$;

10. $A^{10}=\langle D,J_{12}+R(0,0,\theta|t|^{1/2})+Z(\varepsilon t^{-1})\rangle$, $\theta\geq 0$, $\varepsilon\geq 0$;

11. $A^{11}=\langle D+\gamma J_{12},Z(|t|^\varkappa)\rangle$, $\gamma\geq 0$, $\varkappa\in\mathbb{R}$;

12. $A^{12}=\langle \partial_t,Z(e^{\sigma t})\rangle$, $\sigma\in\{-1;0;1\}$;

13. $A^{13}=\langle \partial_t+J_{12},Z(e^{\sigma t})\rangle$, $\sigma\in\mathbb{R}$;

14. $A^{14}(\alpha,\beta)=\langle J_{12}+R(0,0,\beta(t)),Z(\alpha(t))\rangle$, $\alpha\neq 0$, *where algebras* $A^{14}(\alpha^1,\beta^1)$ *and* $A^{14}(\alpha^2,\beta^2)$ *are equivalent if* $\exists \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$, $\exists\, c\neq 0$: $(\alpha^2,\beta^2)(t)=(c\alpha^1,e^{-\varepsilon}\beta^1)(te^{2\varepsilon}+\delta)$;

15. $A^{15}(\alpha,\beta)=\langle J_{12}+Z(\beta(t)),Z(\alpha(t))\rangle$, $\alpha\neq 0$, *where algebras* $A^{15}(\alpha^1,\beta^1)$ *and* $A^{15}(\alpha^2,\beta^2)$ *are equivalent if* $\exists\, c^1\neq 0$, $\exists \varepsilon,\delta,c^2\in\mathbb{R}$: $(\alpha^2,\beta^2)(t)=(c^1\alpha^1,e^{-\varepsilon}\beta^1+c^2\alpha^1)(te^{2\varepsilon}+\delta)$;

16. $A^{16}(\boldsymbol{m},\alpha)=\langle R(\boldsymbol{m}(t)),Z(\alpha(t))\rangle$, $\boldsymbol{m}\neq 0$, $\alpha\neq 0$, *where algebras* $A^{16}(\boldsymbol{m}^1,\alpha^1)$ *and* $A^{16}(\boldsymbol{m}^2,\alpha^2)$ *are equivalent if* $\exists\, c^1\neq 0$, $\exists\, c^2\neq 0$, $\exists \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$, $\exists\, B\in O(3)$:

$$(\boldsymbol{m}^2,\alpha^2)(t)=(c^1B\boldsymbol{m}^1,c^2\alpha^1)(te^{2\varepsilon}+\delta);$$

17. $A^{17}(\alpha,\beta)=\langle R(0,0,\beta(t)),R\left(0,0,\beta(t)\int\frac{dt}{(\beta(t))^2}\right)+Z(\alpha(t))\rangle$, $\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$, *where algebras* $A^{17}(\alpha^1,\beta^1)$ *and* $A^{17}(\alpha^2,\beta^2)$ *are equivalent if* $\exists\, c\neq 0$, $\exists \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$: $(\alpha^2,\beta^2)(t)=\left(\frac{e^{2\varepsilon}}{c}\alpha^1,e^{-\varepsilon}c\beta^1\right)(te^{2\varepsilon}+\delta)$;

18. $A^{18}(\alpha,\beta)=\langle Z(\alpha(t)),Z(\beta(t))\rangle$, $c^1\alpha+c^2\beta\neq 0\ \forall c^1,c^2\in\mathbb{R}$, *where algebras* $A^{18}(\alpha^2,\beta^2)$ *and* $A^{18}(\alpha^2,\beta^2)$ *are equivalent if* $\exists\{a_{kl}\}_{k,l=1,2}$, $\det\{a_{kl}\}\neq 0$, $\exists \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$: $(\alpha^2,\beta^2)(t)=(a_{11}\alpha^1+a_{12}\beta^1,a_{21}\alpha^1+a_{22}\beta^1)(te^{2\varepsilon}+\delta)$.

Theorem 1 is proved with method described in [4, 5].

Lying in a linear span of operators J_{ab}, $R(\boldsymbol{m})$ and $Z(\alpha)$ are algebras 1, 2 and 3. Ansätze constructed with these algebras have the form

$$1.\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}(\omega_1,\omega_2)+\frac{\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\dot{\boldsymbol{m}}+\frac{\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\dot{\boldsymbol{n}}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\dot{\boldsymbol{k}},\quad p=q(\omega_1,\omega_2)+\frac{b_{ij}(t)}{2}x_ix_j,$$

where $\omega_1=t$, $\omega_2=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, $\tilde{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}$, $\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}$, $\delta=|\boldsymbol{k}|^2$,

$$b_{ij}=-\frac{1}{\delta}\left[\ddot{m}^i\tilde{m}^i+\ddot{n}^i\tilde{n}^i+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{m}}}{\delta}\tilde{m}^ik^j+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{n}}}{\delta}\tilde{n}^ik^j\right];$$

$$2.\quad u^1 = x_1 v^1(\omega_1,\omega_2) - \frac{x_2}{\omega_2^2}(v^2(\omega_1,\omega_2) - s(t)),$$
$$u^2 = x_2 v^1(\omega_1,\omega_2) + \frac{x_1}{\omega_2^2}(v^2(\omega_1,\omega_2) - s(t)),$$
$$u^3 = \frac{1}{\beta(t)} v^3(\omega_1,\omega_2) + \frac{\dot\beta(t)}{\beta(t)} x_3,$$
$$p = q(\omega_1,\omega_2) - \frac{\ddot\beta(t)}{\beta(t)}\frac{x_3^2}{2} + \alpha(t)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1},$$

where $\omega_1 = t$, $\omega_2 = \sqrt{x_2^1 + x_2^2}$, $s(t) = \int \alpha(t)dt$;

$$3.\quad u^1 = x_1 v^1(\omega_1,\omega_2) - \frac{x_2}{\omega_2^2}(v^2(\omega_1,\omega_2) - s(t)),$$
$$u^2 = x_2 v^1(\omega_1,\omega_2) + \frac{x_1}{\omega_2^2}(v^2(\omega_1,\omega_2) - s(t)),$$
$$u^3 = \frac{1}{\beta(t)} v^3(\omega_1,\omega_2) + \frac{\dot\beta(t)}{\beta(t)} x_3 + \frac{1}{\beta(t)}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1},$$
$$p = q(\omega_1,\omega_2) - \frac{\ddot\beta(t)}{\beta(t)}\frac{x_3^2}{2} + \alpha(t)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1},$$

where $\omega_1 = t$, $\omega_2 = \sqrt{x_2^1 + x_2^2}$, $s(t) = \int \alpha(t)dt$;

Here numeration of ansätze correspond to that of algebras in theorem 1. Substituting ansätze 1–3 into the NSEs, we obtain equations reduced

$$1.\ \boldsymbol{v}_1 - \delta\boldsymbol{v}_{22} + q_2\boldsymbol{k} + \frac{\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{v}}{\delta}\cdot\dot{\boldsymbol{m}} + \frac{\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{v}}{\delta}\dot{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\omega}_2 = 0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0, \tag{7}$$

where $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(t) = \dfrac{2}{\delta^2}(\dot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{n} - \dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{m})\dot{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{k} + \dfrac{2\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}} - \ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}}{\delta^2}\boldsymbol{k}$;

$$2.\ v_1^1 + ((v^1)^2 - \frac{1}{\omega_2^4}(v^2 - s)^2 + \omega_2 v^1 v_2^1 - \left(v_{22}^1 + \frac{3}{\omega_2}v_2^1\right) + \frac{1}{\omega_2}q_2 = 0, \tag{8}$$

$$v_1^2 + \omega_2 v^1 v_2^2 - v_{22}^2 + \frac{1}{\omega_2}v_2^2 = 0, \tag{9}$$

$$v_1^3 + \omega_2 v^1 v_2^3 - v_{22}^3 + \frac{1}{\omega_2}v_2^3 = 0, \tag{10}$$

$$2v^1 + \omega_2 v_2^1 + \frac{\dot\beta}{\beta} = 0, \tag{11}$$

$$3.\ v_1^1 + (v^1)^2 - \frac{1}{\omega_2^4}(v^2 - s)^2 + \omega_2 v^1 v_2^1 - \left(v_{22}^1 + \frac{3}{\omega_2}v_2^1\right) + \frac{1}{\omega_2}q_2 = 0, \tag{12}$$

$$v_1^2 + \omega_2 v^1 v_2^2 - v_{22}^2 + \frac{1}{\omega_2}v_2^2 = 0, \tag{13}$$

$$v^3_1 + \omega_2 v^1 v^3_2 - v^3_{22} - \frac{1}{\omega_2} v^3_2 + \frac{v^2 - s}{\omega_2^2} = 0, \tag{14}$$

$$2v^1 + \omega_2 v^1_2 + \frac{\dot\beta}{\beta} = 0. \tag{15}$$

Here subscripts 1 and 2 mean differentiation by variables ω_1 and ω_2 respectively. Let us show that nonlinear system 1–3 can be transformed to linear PDEs.

Consider system 1 (equations (6)–(7)). After integration of equation (7) by ω_2: $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = h(t)$. Further we make the transformation from the symmetry group of the NSEs

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}(t)) + \dot{\boldsymbol{l}}(t), \quad \tilde p(t,\boldsymbol{x}) = p(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}(t)) - \ddot{\boldsymbol{l}}(t)\cdot\boldsymbol{x},$$

where $\ddot{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{m} - \boldsymbol{l}\cdot\ddot{\boldsymbol{m}} = \ddot{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{l}\cdot\ddot{\boldsymbol{n}} = 0$,

$$\boldsymbol{k}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{l}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{l}}{\delta}\dot{\boldsymbol{m}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{l}}{\delta}\dot{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}}{\delta}\dot{\boldsymbol{k}}\right) + h = 0.$$

This transformation does not change ansatz 1 and besides $\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{v}} = 0$, that is $\tilde h(t)\equiv 0$. Therefore, without loss of generality we can assume that $h(t)\equiv 0$.

Let $f = f(\omega_1,\omega_2) = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}$, $g = g(\omega_1,\omega_2) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$. Since $\ddot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{m}} = 0$ then $\dot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{n} - \dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{m} = C = \text{const}$. Case $C\neq 0$ is reduced by means of change of the basis of the algebra $A^1(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ to case $C = 1$. Let us multiply the scalar equation (6) by $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ and $\boldsymbol{k}$. As result we obtain the linear system of PDEs with variable coefficient for functions f, g and q:

$$\begin{aligned}
&f_1 - \delta f_{22} + C\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}f - \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}}{\delta}g\right) + \frac{2}{\delta^2}C\omega_2(\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{k}) = 0,\\
&g_1 - \delta g_{22} + C\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}f - \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}g\right) - \frac{2}{\delta^2}C\omega_2(\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{k}) = 0,\\
&q_2 = \frac{2}{\delta^2}((\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})f + (\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})g) + \frac{\omega_2}{\delta^2}(\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k} - 2\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}}).
\end{aligned}$$

Consider two possible cases.

a) Let $C = 0$. Then there are functions $\varphi^i = \varphi^i(\tau,\omega)$, $i = 1,2$, where $\tau = \int\delta(t)dt$, $\omega = \omega_2$, that $f = \varphi^1_\omega$, $g = \varphi^2_\omega$ and $\varphi^i_\tau - \varphi^i_{\omega\omega} = 0$, $i = 1,2$. Therefore

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} = \left(\varphi^1_\omega(\tau,\omega) + \frac{\dot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\tilde{\boldsymbol{m}} + \left(\varphi^2_\omega(\tau,\omega) + \frac{\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\right)\tilde{\boldsymbol{n}} - \frac{\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\boldsymbol{k},\\
&p = \frac{2}{\delta^2} + (\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})\varphi^1(\tau,\omega) + \frac{2}{\delta^2}(\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})\varphi^2(\tau,\omega) + \frac{1}{2\delta}\left\{\frac{\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k} - 2\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}}}{\delta}\omega^2 - \right.\\
&\left. -(\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x})(\ddot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x}) - (\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})(\ddot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}) - \frac{\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{m}}}{\delta}(\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) - \frac{\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{n}}}{\delta}(\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\right\},
\end{aligned} \tag{16}$$

where $\dot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{n} - \dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{m} = 0$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, $\tilde{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}$, $\tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}$, $\delta = |\boldsymbol{k}|^2$, $\tau = \int\delta(t)dt$, $\omega = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$, $\varphi^i_\tau - \varphi_{\omega\omega} = 0$, $i = 1,2$.

b) Let $C=1$. Then we obtain the following solutions of the NSEs:

$$\boldsymbol{u}=\left(y^i(t)\varphi^i(\tau,\omega)+y^0(t)\omega+\frac{\dot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}-\frac{\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta^2}\right)\tilde{\boldsymbol{m}}+$$
$$+\left(z^i(t)\varphi^i(\tau,\omega)+z^0(t)\omega+\frac{\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}+\frac{\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta^2}\right)\tilde{\boldsymbol{n}}-\frac{\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{x}}{\delta}\boldsymbol{k},$$
$$p=\frac{2}{\delta 2}(\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{k})\left(y^i(t)\varphi^i(\tau,\omega)+y^0(t)\frac{\omega^2}{2}\right)+ \tag{17}$$
$$+\frac{2}{\delta^2}(\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}})\left(z^i(t)\varphi^i(\tau,\omega)+z^0(t)\frac{\omega^2}{2}\right)+\frac{1}{2\delta}\left\{\frac{\ddot{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}-2\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}}}{\delta}\omega^2-\right.$$
$$\left.-(\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x})(\ddot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x})-(\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})(\ddot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{m}}}{\delta}(\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{n}}}{\delta}(\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\right\},$$

where $\dot{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{n}-\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{m}=1$, $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, $\tilde{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}$, $\tilde{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}$, $\delta=|\boldsymbol{k}|^2$, $\tau=\int\delta(t)dt$, $\omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$, $\varphi^i_\tau-\varphi_{\omega\omega}=0$, $i=1,2$, $(y^i(t),z^i(t))$, $i=1,2$ is a fundamental system of solutions for equations

$$\dot{y}+\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}y-\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}}{\delta}z=0,\quad \dot{z}+\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}y-\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}z=0 \tag{18}$$

and $(y^0(t),z^0(t))$ is a particular solutions of the system

$$\dot{y}+\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{\delta}y-\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}}{\delta}z+\frac{2}{\delta^2}\tilde{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \dot{z}+\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}y-\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta}z-\frac{2}{\delta^2}\tilde{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{k}=0.$$

Remark 1. System (18) can be reduced to one ordinary differential equation of second order. For this aim we introduce new designations:

$$h(t)=\exp\left\{\int\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{\delta}dt\right\},\quad y(t)=y\cdot h,\quad \tilde{z}(t)=z/h,$$
$$F^1(t)=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}}{\delta}h^2,\quad F^2(t)=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}{\delta h^2}.$$

For functions $\tilde{y}$ and $\tilde{z}$ we obtain the system

$$\dot{\tilde{y}}=F^1\cdot\tilde{z},\quad \dot{\tilde{z}}=-F^2\tilde{y}$$

and hence

$$\left(\frac{\dot{y}}{F^1}\right)^{\cdot}+F^2\tilde{y}=0. \tag{19}$$

Functions F^1 and F^2 (and vectors $\boldsymbol{m}$ and $\boldsymbol{n}$ respectively) we choose in such manner that fundamental system of solutions of equation (19) should be known. Then solution (17) can be written in closed form.

Remark 2. New solutions can be obtained from solutions (16) and (17) by force of (3) only after transformations generated by operators of type $R(\boldsymbol{m}(t))$ and $Z(\alpha(t))$.

Consider system 2 (equations (8)–(11)). Equations (11) immediately gives

$$v^1=-\frac{\dot{\beta}}{2\beta}+\frac{h(\omega_1)-1}{\omega_2^2}, \tag{20}$$

where h is an arbitrary differentiable function of ω_1. Substituting (20) into the remaining equations (8)–(10), we get

$$q_2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\dot\beta}{\beta}\right)^{\cdot} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot\beta}{\beta}\right)^2\right)\omega^2 - \frac{\dot h}{\omega_2} + \frac{(h-1)^2}{\omega_2^3} + \frac{(v^2 - s(t))^2}{\omega_2^3}, \tag{21}$$

$$v_1^2 - v_{22}^2 + \left(\frac{h}{\omega_2} - \frac{\dot\beta}{2\beta}\omega_2\right) v_2^2 = 0, \tag{22}$$

$$v_1^3 - v_{22}^3 + \left(\frac{h-2}{\omega_2} - \frac{\dot\beta}{2\beta}\omega_2\right) v_2^3 = 0. \tag{23}$$

After change of independent variables

$$\tau = \int |\beta(t)|dt, \quad \omega = \sqrt{|\beta(t)|}\omega_2 \tag{24}$$

in equations (22) and (23) we obtain the decomposed system of linear equations

$$v_\tau^2 - v_{\omega\omega}^2 + \frac{h(t)}{\omega} v_\omega^2 = 0, \tag{25}$$

$$v_\tau^3 - v_{\omega\omega}^3 + \frac{h(t)-2}{\omega} v_\omega^3 = 0. \tag{26}$$

Remark 3. An arbitrary solution of equation (26) can be written down in the form $v^3 = \tilde v_\omega/\omega$, where $\tilde v^3$ is a solution of (25).

From equation (21)

$$q = \frac{\omega_2^2}{4}\left(\left(\frac{\dot\beta}{\beta}\right)^{\cdot} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot\beta}{\beta}\right)^2\right) - \dot h \ln\omega_2 - \frac{(h-1)^2}{2\omega_2^2} + \int \frac{(v^2(\tau,\omega) - s(t))^2}{\omega_2^3} d\omega_2. \tag{27}$$

Formulas (20), (24)–(27) and anzats 2 give a solution of the NSEs.

Remark 4. New solutions can be obtained from this solution by force of (4) only alter transformations generated by operators of type J_{ab}, $R(\boldsymbol{m}(t))$ and $Z(\alpha(t))$.

Let us to investigate the symmetry properties of the equation

$$f_t + \frac{h(t)}{r} f_r - f_{rr} = 0 \tag{28}$$

and to construct some its exact solutions.

Theorem 2. *The maximal, in the sense of Lie, invariance algebra of equation (28) is the algebra*

1. $\mathcal{A}_1 = \langle f\partial_f, g(t,r)\partial_f\rangle$ *if* $h(t) \neq \mathrm{const}$;
2. $\mathcal{A}_2 = \langle \partial_t, D, \Pi, f\partial_f, g(t,r)\partial_f\rangle$ *if* $h = \mathrm{const},\ h \notin \{0;-2\}$;
3. $\mathcal{A}_3 = \langle \partial_t, D, \Pi, f\partial_f, \partial_r + \frac{h}{2r} f\partial_f, G = 2t\partial_t - \left(r - \frac{ht}{r}\right) f\partial_f, g(t,r)\partial_f\rangle$ *if* $h \in \{0;-2\}$.

Here $D = 2t\partial_t + r\partial_r$, $\Pi = 4t^2\partial_t + 4tr\partial_r - (r^2 + 2(1-h)t)f\partial_f$, $g(t,r)$ is an arbitrary solution of (28).

Theorem 2 is proved by the standard Lie algorithm [4].

Consider case $h = \mathrm{const}$ in detail.

Theorem 3. *If $h = -2n$, $n \in \mathbb{N}$, then any solution of (28) have the form $f = \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^n \tilde{f}$, where $\tilde{f}$ is a solution of the one-dimensional linear heat equation: $\tilde{f}_t = \tilde{f}_{rr}$.*

To prove the theorem 3 one should use the remark 3.

Reducing equation (28) by inequivalent one-dimensional subalgebras of $\mathcal{A}_2$ we construct the following solutions:

by subalgebra $\langle \partial_t + au\partial_u \rangle$, where $a \in \{-1; 0; 1\}$:

$$f = e^{-t} r^{\nu}(C_1 J_\nu(r) + C_2 Y_\nu(r)) \quad \text{if } a = -1,$$
$$f = e^{t} r^{\nu}(C_1 I_\nu(r) + C_2 K_\nu(r)) \quad \text{if } a = 1,$$
$$f = C_1 r^{h+1} + C_2 \quad \text{if } h \neq -1 \text{ and } a = 0,$$
$$f = C_1 \ln r + C_2 \quad \text{if } h = -1 \text{ and } a = 0;$$

here J_ν, Y_ν is the Bessel functions of real variable, I_ν, K_ν is the Bessel functions of complex variable, $\nu = (h+1)/2$;

by subalgebra $\langle D + 2au\partial_u \rangle$, where $a \in \mathbb{R}$:

$$f = t^a e^{-\omega/8} \omega^{\frac{h-1}{4}} W\left(\frac{h-1}{4} - a, \frac{h+1}{4}, \frac{\omega}{4}\right),$$

where $\omega = r^2/t$ and $W(k,m,x)$ is the general solution of the Whittaker equation

$$4x^2 y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)y;$$

by the subalgebra $\langle \partial_t + \Pi + au\partial_u \rangle$, where $a \in \mathbb{R}$:

$$f = (4t^2+1)^{\frac{h-1}{4}} \exp\left\{-t\omega + \frac{a}{2}\operatorname{arctg} 2t\right\}\varphi(\omega),$$

where $\omega = \frac{x^2}{4t^2+1}$ and φ is a solution of the equation

$$4\omega\varphi'' + 2(1-h)\varphi' + (\omega - a)\varphi = 0;$$

if $a = 0$ then

$$\varphi(\omega) = \omega^{\mu}\left(C_1 J_\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) + C_2 Y_\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)\right), \quad \mu = \frac{1+h}{4}.$$

Consider equation (28) when $h(t)$ is an arbitrary function of time.

Theorem 4. *Equation (28) is Q-conditionally invariant under the operators*

1. $Q = \partial_t + A(t,r)\partial_r + (B^1(t,r)u + B^2(t,r))\partial_u$, *where*
$$A_t - \frac{h}{r}A_r + \frac{h}{r^2}A - A_{rr} + 2A_rA - \frac{h'}{r} + 2B^1_r = 0,$$
$$B^i_t + \frac{h}{r}B^i_r - B^i_{rr} + 2A_rB^i = 0, \quad i = 1, 2;$$

2. $Q = \partial_r + B(t,r,u)\partial_u$, *where*
$$B_t - \frac{h}{r^2}B + \frac{h}{r}B_r - B_{rr} + 2BB_{ur} - B^2B_{uu} = 0.$$

Equation (28) does not have other operators of Q-conditional symmetry.

This theorem is proved by method described in [3].

Therefore, unlike Lie symmetry, Q-conditional symmetry, theorem 4 (28) for arbitrary $h(t)$ is rather wide. Thus, in particular, theorem 4 give rise to that equation (28) is Q-conditional invariant under the operators ∂_r and $G = (2t + C)\partial_r - rf\partial_f$. By means of reduction of equation (28) using the operator G we obtain the following solution

$$f = \frac{c_1}{\sqrt{4t+2C}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4t+2C} + 2\int \frac{h(t)}{4t+2C}dt\right\},$$

and generalizing this we can construct solutions of the form

$$f = \sum_{k=0}^{N} T_k(t) r^{2k} \exp\left\{-\frac{r^2}{4t+2C}\right\}.$$

Other class of solutions of (28) is given with formula

$$f = \sum_{k=0}^{N} T_k(t) r^{2k}.$$

For example, if $N = 1$ then $f = C_1\left(r^2 + 2t - 2\int h(t)dt\right) + C_2$. We here do not present results for arbitrary N as they arc very cumbersome.

Consider system 3 (equations (12)–(15)). In this case we get

$$v^1 = -\frac{\dot\beta}{2\beta} + \frac{h(t)-1}{\omega_2^2}, \tag{29}$$

$$v^2_\tau - v^2_{\omega\omega} + \frac{h(t)}{\omega} v^2_\omega = 0, \tag{30}$$

$$v^3_\tau - v^3_{\omega\omega} + \frac{h(t)-2}{\omega} v^3_\omega + \frac{v^2 - s(t)}{\omega^2} = 0, \tag{31}$$

$$q = \frac{\omega_2^2}{4}\left(\left(\frac{\dot\beta}{\beta}\right)^{\cdot} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot\beta}{\beta}\right)^2\right) - \dot h \ln\omega_2 - \frac{(h-1)^2}{2\omega_2^2} - \int \frac{v^2(\tau,\omega) - s(t))^2}{\omega_2^3} d\omega_2, \tag{32}$$

where $\tau = \int |\beta(t)|dt$, $\omega = \sqrt{|\beta(t)|}\omega_2$, $s(t) = \int a(t)dt$. Formulas (29)–(32) and ansatz 3 give a solution of the NSEs.

Remark 5. New solutions can be obtained from this solution by force of (5) only after transformations generated by operators of type J_{ab}, $R(\boldsymbol{m}(t))$ and $Z(a(t))$.

Let us to write down system (30)–(31) in the form

$$f_\tau - f_{\omega\omega} + \frac{\tilde h(\tau)}{\omega} f_\omega = 0, \tag{33}$$

$$g_\tau - g_{\omega\omega} + \frac{\tilde h(\tau) - 2}{\omega} g_\omega + \frac{\tilde f - \tilde s(\tau)}{\omega^2} = 0. \tag{34}$$

If (f,g) is a solution of (33)–(34) then $(f,g+g^0)$, where function g^0 satisfies the equation

$$g^0_\tau - g^0_{\omega\omega} + \frac{\tilde h(\tau)-2}{\omega} g^0_\omega = 0 \tag{35}$$

is also a solution of (33)–(34).

System (33)–(34) has for some $\tilde s(\tau)$ particular solutions of the form

$$f = \sum_{k=0}^{N} T_k(\tau)\omega^{2k}, \quad g = \sum_{k=0}^{N-1} S^k(\tau)\omega^{2k},$$

where $T^0(\tau) = \tilde s(\tau)$. For example, if $\tilde s(\tau) = -2C_1\int(\tilde h(\tau)-1)d\tau + C_2$, $N=1$ then $f = C_1\left(\omega^2 - 2\int(h(\tau)-1)d\tau\right) + C_2$, $g = -C_1\tau$.

Let $\tilde s(\tau) = 0$.

Theorem 5. *The maximal, in the sense of Lie, invariance algebra of system (33)–(34) when $\tilde s(\tau)=0$ is the algebra*

1. $\langle f\partial_f + g\partial_g, \tilde f(\tau,\omega)\partial_f + \tilde g(\tau,\omega)\partial_g\rangle$ *if* $\tilde h \neq \mathrm{const}$;
2. $\langle 2\tau\partial_\tau + \omega\partial_\omega, \partial_\tau, f\partial_f + g\partial_g, \tilde f(\tau,\omega)\partial_f + \tilde g(\tau,\omega)\partial_g\rangle$ *if* $\tilde h \neq \mathrm{const}$ *and* $\tilde h \neq 0$;
3. $\langle 2\tau\partial_\tau + \omega\partial_\omega, \partial_\tau, \dfrac{f}{\omega}\partial_g, f\partial_f + g\partial_g, \tilde f(\tau,\omega)\partial_f + \tilde g(\tau,\omega)\partial_g\rangle$ *if* $\tilde h = 0$.

Here $(\tilde f,\tilde g)$ is an arbitrary solution of (33)–(34) when $\tilde s(\tau)=0$.

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Slavuislcy S.L., Reduction and exact solution of Navier–Stokes equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**, 971–984.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Попович Р.Е., О редукции уравнений Навье–Стокса к линейным уравнениям теплопроводности, *Докл. АН Украины*, 1992, № 2, 23–30.
3. Фущич В.И. Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989, 336 с.
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
5. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наукова думка, 1991, 304 с.
6. Бытев В.О., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса, в сб. “Численные методы механики сплошной среды”, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972, **3**, № 5, 13–17.
7. Lloyd S.P., The infinitesimal group of the Navier–Stokes equations, *Acta Mechanica*, 1981, **38**, 83–98.

О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, Т.К. АМЕРОВ

Implicit nonlocal ansätze of the $F(x,v) = \tilde{f}(x,v)\varphi(\omega) + h(x,v)\dot{\varphi}(\omega) + \tilde{g}(x,v)$, $x_1 = u$ form reducing nonlinear heat equation $u_0 = \partial_1(u^{-\frac{2}{3}}u_1)$ to the ordinary differential equations are constructed. A method for generating the new solutions of the nonlinear heat equation by means of nonlocal transformation is indicated.

В работе [1] дана полная групповая классификация одномерного нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_0 = \partial_1(c(u)u_1), \tag{1}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_\mu = \partial_\mu u = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1$, $c(u)$ — произвольная гладкая функция. Там же установлено, что уравнение (1) имеет самую широкую алгебру инвариантности тогда, когда

$$c(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}, \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Базисные элементы $\langle P_0, P_1, D_1, D_2, A\rangle$ этой пятимерной алгебры Ли имеют вид

$$P_0 = \partial_0, \quad P_1 = \partial_1, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \tag{3}$$

$$D_2 = x_1\partial_1 + (au + b)\partial_u \quad (a, b = \mathrm{const}), \tag{4}$$

$$A = -x_1^2\partial_1 + 3x_1u\partial_u. \tag{5}$$

Во всех остальных случаях алгебра инвариантности уравнения (1) является четырехмерной $\langle P_0, P_1, D_1, D_2\rangle$ или трехмерной $\langle P_0, P_1, D_1\rangle$.

Анзацы, порождаемые операторами (3)–(5), имеют вид [2]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{6}$$

где f, g — некоторые гладкие функции, определяемые из условия редукции [3].

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 = \partial_1(u^{-\frac{2}{3}}u_1). \tag{7}$$

Алгеброй инвариантности уравнения (7) является четырехмерная алгебра с базисными элементами (3), (4).

В настоящей работе для уравнения (7) построены анзацы вида

$$F(x,v) = \tilde{f}(x,v)\varphi(\omega) + h(x,v)\dot{\varphi}(\omega) + \tilde{g}(x,v), \tag{8}$$

Доклады АН Украины, 1992, № 1, С. 26–30.

где $v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1} = u$, $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\omega}$, $\omega = \omega(x, v)$, $x = (x_0, x_1)$. В формуле (8) F, $\tilde{f}$, h, $\tilde{g}$ — некоторые гладкие функции, определяемые из условия редукции уравнения в частных производных (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Анзац (8) принципиально отличен от (6) и связан с нелокальной (нелиевской) симметрией уравнения (7).

Для построения анзаца (8) в явном виде мы воспользуемся идеей [4–6]: с помощью нелокального, несингулярного преобразования приводим (7) к уравнению, симметрия которого шире, чем симметрия исходного уравнения. Воспользовавшись обратимостью используемых нелокальных преобразований, находим анзац для уравнения (7).

Для конкретной реализации этой идеи преобразуем уравнение (7) с помощью цепочки нелокальных преобразований [5, 7]

$$u = v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \tag{9}$$

$$x_0 = t, \quad x_1 = w, \quad v = x, \tag{10}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = z. \tag{11}$$

Уравнение (7) при преобразованиях (9)–(11) переходит в уравнение

$$z_t = \partial_x (z^{-\frac{4}{3}} z_x), \tag{12}$$

где $z = z(t, x)$, $z_t = \frac{\partial z}{\partial t}$, $z_x = \partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x}$. Уравнение (12) имеет более широкую симметрию, чем уравнение (7). Именно оператор

$$A_z = -x^2 \partial_x + 3xz\partial_z \tag{13}$$

является новым (дополнительным) оператором симметрии преобразованного уравнения (12). Этот факт дает возможность построить лиевский анзац для уравнения (12), а затем преобразовать его с помощью (11), (10), (9). Построенный таким образом анзац будет нелокальным (нелиевским) для уравнения (7).

Анзацы для уравнения (12) имеют вид

$$z = x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = at + \frac{1}{x}, \tag{14}$$

$$z = t^{\frac{3}{4}} x^{-3} \varphi(\omega), \quad \omega = a \ln t + \frac{1}{x} \quad (a = \mathrm{const}). \tag{15}$$

Построение таких анзацев возможно благодаря наличию в симметрии уравнения (12) оператора (13). После преобразований (11), (10) анзацы (14), (15) принимают вид (8)

$$x_1 + F(x_0) = -\frac{1}{v}\dot{\varphi}(\omega) + \varphi(\omega), \quad \omega = c_3 x_0 + \frac{1}{v}, \quad v_1 = u, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} (x_1 + F(x_0)) x_0^{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{v}\dot{\varphi}(\omega) + \varphi(\omega), \\ \omega = c_3 \ln x_0 + \frac{1}{v}, \quad v_1 = u, \quad c_3 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{17}$$

Анзацы (16), (17) редуцируют уравнение (7) к следующим ОДУ:

$$\begin{aligned}&3(\ddot{\varphi})^{-\frac{1}{3}} + c_3\dot{\varphi} - c_2 = 0,\\ &\dot{F} = c_2,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&3(\ddot{\varphi})^{-\frac{1}{3}} + c_3\dot{\varphi} + \frac{3}{4}\varphi - c_2 = 0,\\ &x^{\frac{1}{4}}\dot{F} = c_2.\end{aligned} \tag{19}$$

Уравнения (18) несложно проинтегрировать. В результате получим

$$(c_1x_1 + c_2x_0)^4 = \left(c_3x_0 + \frac{1}{v}\right)\left(-4c_3x_0 + \frac{1}{v}\right)^4, \quad v_1 = u, \tag{20}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Заметим, что формула (20) задает семейство точных решений уравнения (7) в неявном виде. Такие решения не могут быть получена классическим методом С. Ли.

Применим преобразования (9)–(11) к уравнению (1). При этом уравнение принимает вид

$$z_t = \partial_x(\tilde{c}(z)z_x), \quad \tilde{c}(z) = z^{-2}c(z^{-1}). \tag{21}$$

Преобразования (9)–(11) переводят уравнения из класса (1) в тот же класс. Для того чтобы данные преобразования были преобразованиями-инвариантности уравнения (1), следует на функцию c наложить условие

$$z^{-2}c(z^{-1}) = c(z). \tag{22}$$

Решением уравнения (22) является функция $c(z) = z^{-1}q(z)$, где $q(z)$ — произвольное решение функционального уравнения

$$q(z) = q(z^{-1}). \tag{23}$$

Преобразования инвариантности (9)–(11) уравнения

$$u_0 = \partial_1\left(q(u)\frac{u_1}{u}\right) \tag{24}$$

используем для построения формулы размножения его решений.

Пусть $u = R(x_0, x_1)$ — решение уравнения (24). Тогда $z = R(t, x)$ — решение уравнения

$$z_t = \partial_x\left(q(z)\frac{z_x}{z}\right). \tag{25}$$

Произведя замену (11), получаем $w_x = R(x, t)$ — решение уравнения

$$w_t = q(w_x)\frac{w_{xx}}{w_x}. \tag{26}$$

Применяя преобразование годографа (10), имеем решение

$$\frac{1}{v_1} = R(x_0, v) \tag{27}$$

уравнения

$$v_0 = q(v_1)\frac{v_{11}}{v_1}. \tag{28}$$

Соотношение (27) представляет собою ОДУ относительно неизвестной функции v, в котором x_0 играет роль параметра. Решая это уравнение, находим

$$x_1 = \int_0^v R(x_0, \tau)d\tau. \tag{29}$$

Если из (29) найти функцию v и продифференцировать ее по x_1, получим решение уравнения (24).

В качестве примера рассмотрим уравнение (24) при $q(u) \equiv 1$

$$u_0 = \partial_1\left(\frac{u_1}{u}\right). \tag{30}$$

Функция

$$u = \frac{x_0}{\cos x_1 + 1} \tag{31}$$

является одним из частных решений уравнения (30). Из формулы (29) находим $x_1 = x_0 \operatorname{tg}\frac{v}{2}$, откуда $v = 2\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_0}$. Продифференцировав последнее выражение по x_1, получаем решение уравнения (30)

$$u = \frac{2x_0}{x_0^2 + x_1^2}. \tag{32}$$

Отметим, что решения (31) и (32) существенно отличаются между собой по своим свойствам (ограниченности, периодичности, поведением в ноле и на бесконечности и т.д.). Если же размножать решения уравнения (24) при помощи групповых преобразований, то большинство из указанных свойств этих решений сохраняются.

1. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, *Докл. АН СССР*, 1959, **125**, № 3, 492–495.

2. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.

3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989.

4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.

5. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 48 с.

6. Фущич В.І., Тичинін В.А., Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійних хвильових рівнянь, *Доп. АН УРСР*, 1990, № 5, С. 32–36.

7. King I.R., Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1990, **23**, 5441–5464.

Conditional invariance and exact solutions of gas dynamics equations

W.I. FUSHCHYCH, N.I. SEROV, T.K. AMEROV

Изучена условная инвариантность системы уравнений газовой динамики, а также получены некоторые ее точные решения.

Let us consider the system of gas dynamics equations

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial x_0} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{u}) = 0, \\
&p = F(\rho),
\end{aligned} \tag{1}$$

where $\vec{u} = \vec{u}(x) = \{u^1(x), u^2(x), \dots, u^n(x)\}$ is speed of gas diffusion, $\rho = \rho(x)$ is density of a gas, $p = p(x)$ is pressure of a gas, $x = (x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1+n}$.

L.V. Ovsyannikov in [1] investigated Lie symmetry of gas dynamics equations. We have to take notice of Lie symmetry of one-dimensional case. In this case, system (1) takes the form

$$S_1 \equiv u_0 + uu_1 + f(\rho)\rho_1 = 0, \quad S_2 \equiv \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0, \tag{2}$$

where $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\rho_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1$, $\dot{F} = \rho f$.

In [2] it is proved that if

$$f = \lambda\rho^{\gamma-2}, \quad \gamma = \frac{2N+1}{2N-1}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda = \mathrm{const}$$

then equations (2) are invariant under infinite-dimensional Lie algebra, which cannot be obtained from the results of [1].

In this paper we study conditional invariance (see [2]) of the system of gas dynamics equations.

Theorem. *The system of equations (2), with corresponding $f(\rho)$, is Q-conditionally invariant under operators Q_i, $i = 1, \dots, 8$, which are listed in Table.*

Proof. We give the proof of the theorem by considering one of the operators from Table, the other cases are analogous.

In accordance with definition (see [2]), system (2) is Q-conditionally invariant under the operator

$$Q = \partial_0 + A(x_0, x_1, u, \rho)\partial_1 + B(x_0, x_1, u, \rho)\partial_u + C(x_0, x_1, u, \rho)\partial_\rho;$$

if

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}[S_1] = \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3(Qu) + \theta_4(Q\rho),\\
&\tilde{Q}[S_2] = \theta_5 S_1 + \theta_6 S_2 + \theta_7(Qu) + \theta_8(Q\rho),
\end{aligned}$$

Доклады АН Украины, 1992, № 5, С. 35–40.

$f = \frac{\dot F(\rho)}{\rho}$	Q	Ansatz	Reduced ODE system
$\lambda_1 p^{-3} + \lambda_2 p^{-1}$	$Q_1 = \partial_0 + u\partial_1 + {}+\lambda_3[(\lambda_1\rho^{-2} + \lambda_2)\partial_u + \sqrt{\lambda_1}\partial_\rho]$	$\begin{cases} \rho = e^{\varkappa}, \\ u = \varphi^1(\omega) - \sqrt{\lambda_1}e^{-\varkappa} + \lambda_2\lambda_3 x_0, \\ \varkappa = \varphi^2(\omega) + \lambda_3 x_0\varphi^1(\omega) - \lambda_3 x_1 + \frac{\lambda_2\lambda_3^2}{2}x_0^2, \\ \omega = p - \sqrt{\lambda_1}\lambda_3 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(\omega) = 0, \\ \dot\varphi^2(\omega) = 0 \end{cases}$
$\rho^{-2}(\lambda_1 + \lambda_2\rho)^{-1}$	$Q_2 = \partial_0 + u\partial_1 + \lambda_3\partial_u - {}-\frac{\lambda_1\rho + \lambda_2\rho^2}{\lambda_1 x_0}\partial_\rho$	$\begin{cases} \rho = -\lambda_1(\lambda_2 + \varphi^1(\omega)x_0)^{-1}, \\ u = \frac{\varphi^2(\omega)}{x_0} + \frac{1}{2}\lambda_3 x_0 + x_1 x_0^{-1}, \\ \omega = u - \lambda_3 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(\omega) = -\lambda_3\lambda_1^2, \\ \varphi^1(\omega)\dot\varphi^2(\omega) = -\lambda_2 \end{cases}$
λp^{-3}	$Q_3 = \partial_0 + u\partial_1 + {}+\lambda_1\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda}p^{-2}\partial_u + \partial_\rho)$	$\begin{cases} \rho = e^{\varkappa}, \\ u = \varphi^1(\omega) - \sqrt{\lambda}e^{-\varkappa}, \\ \varkappa = \varphi^2(\omega) - \lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_0\varphi^1(\omega), \\ \omega = \rho - \sqrt{\lambda}\lambda_1 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(\omega) = 0, \\ \dot\varphi^2(\omega) = 0 \end{cases}$
	$Q_4 = \partial_0 + u\partial_1 + \lambda_1\partial_u + \lambda_2\rho^2\partial_\rho$	$\begin{cases} \rho = (\varphi^1(\omega) - \lambda_2 x_0)^{-1}, \\ u = x_0^{-1}\varphi^2(\omega) + \frac{1}{2}\lambda_1 x_0 + x_1 x_0^{-1}, \\ \omega = u - \lambda_1 x_0. \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda\lambda_2\dot\varphi^1(\omega) + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2\dot\varphi^2(\omega) - \varphi^1(\omega) = 0 \end{cases}$
	$Q_5 = \rho\partial_0 - (\rho^2 u^2 - \lambda)\partial_u$	$\begin{cases} \rho = \varphi^1(x_1), \\ u = \frac{\sqrt{-\lambda}}{\varphi^1(x_1)}\,\mathrm{tg}(\varphi^2(x_1) - \sqrt{-\lambda}x_0),\ \lambda < 0, \end{cases}$	
		$\begin{cases} \rho = \varphi^1(x_1), \\ u = \frac{\sqrt{\lambda}}{\varphi^1(x_1)}\,\mathrm{th}(\varphi^2(x_1) + \sqrt{\lambda}x_0),\ \lambda > 0, \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(x_1) = -\lambda_1(\varphi^1(x_1))^2, \\ \dot\varphi^2(x_1) = 0 \end{cases}$
$\forall\ f(\rho)$	$Q_6 = f\partial_1 + \lambda\partial_\rho$	$\begin{cases} \int f d\rho - \lambda x_1 = \varphi^2(x_0), \\ u = \varphi^1(x_0) \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(x_0) = -\lambda, \\ \dot\varphi^2(x_0) + \lambda\varphi^1(x_0) = 0 \end{cases}$
	$Q_7 = -\partial_0 + \lambda u\rho\partial_u + \lambda\rho^2\partial_\rho$	$\begin{cases} \rho = (\varphi^1(x_1) + \lambda x_0)^{-1}, \\ u = \varphi^2(x_1)(\varphi^1(x_1) + \lambda x_0)^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(x_1) = 0, \\ \dot\varphi^2(x_1) = 0 \end{cases}$
	$Q_8 = \partial_0 + \lambda\partial_u + \lambda u f^{-1}\partial_\rho$	$\begin{cases} \frac{1}{2}u^2 - \int f d\rho = \varphi^1(x_1), \\ u = \varphi^2(x_1) + \lambda x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \dot\varphi^1(x_1) = \lambda, \\ \dot\varphi^2(x_1) = 0 \end{cases}$

λ, λ_i, $i = \overline{1,3}$ are arbitrary constants.

where $\tilde{Q}$ is the prolongation of Q; θ_i are some functions, $i = 1, 8$; $Qu = u_0 + Au_1 - B$; $Q\rho = \rho_0 + A\rho_1 - C$.

Let us consider operator

$$Q_4 = \partial_0 + u\partial_1 + \lambda_1 \partial u + \lambda_2 \rho^2 \partial_\rho, \quad \lambda_i = \text{const}, \qquad i = 1, 2.$$

We will show that system (2) with $f(\rho) = \lambda\rho^{-3}$, $\lambda = \text{const}$ is Q-conditionally invariant under operator Q_4. For this particular case we have

$$S_1 = u_0 + uu_1 + \lambda\rho^{-3}\rho_1, \tag{3}$$

$$S_2 = \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1, \tag{4}$$

$$Q_4 u = u_0 + uu_1 - \lambda_1, \quad Q_4\rho = \rho_0 + u\rho_1 - \lambda_2\rho^2.$$

Acting by the prolongation of Q_4 on (3), (4) and then getting together terms in a proper manner we obtain the following

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}_4[S_1] = -\lambda\rho^{-4}\rho_1 S_2 + \lambda\rho_1\rho^{-4}(Q_4\rho) - u_1(Q_4 u), \\ &\tilde{Q}_4[S_2] = (2\lambda_2\rho - u_1)S_2 - \rho_1(Q_4 u) + u_1(Q_4\rho). \end{aligned} \tag{5}$$

It follows from (5) that the system (2) with $f = \lambda\rho^{-3}$ is Q-conditionally invariant under the operator Q_4. The theorem is proved.

All obtained operators of conditional invariance of the system (2) are used for constructing of ansätze which reduce equations (2) to the systems of ordinary differential equations (ODE). The final results are listed in the Table. Having integrated the reduced equations and substituting obtained values of φ^1, φ^2, into the corresponding ansatz we get the following solutions of system (2) with a proper value of $f(\rho)$:

$$\rho = \exp\left\{\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4 x_0 - \lambda_3 x_1 + \frac{\lambda_2\lambda_3^2}{2}x_0^2\right\},$$

$$u = -\sqrt{\lambda_1}\exp\left\{-\lambda_5 - \lambda_3\lambda_4 x_0 + \lambda_3 x_1 - \frac{\lambda_2\lambda_3^2}{2}x_0^2\right\} + \lambda_2\lambda_3 x_0 + \lambda_4;$$

$$\rho = -\lambda_1[\lambda_2 - \lambda_3\lambda_1^2(\omega + \lambda_4)x_0]^{-1},$$

$$u = x_0^{-1}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_3\lambda_1^2}(\ln(\omega + \lambda_4) + \lambda_5)\right]^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 x_0 + x_1 x_0^{-1}, \quad \omega = u - \lambda_3 x_0;$$

$$\rho = \exp\{\lambda_3 - \lambda_1 x_1 + \lambda_1\lambda_2 x_0\},$$

$$u = \lambda_2 - \sqrt{\lambda}\exp\{-\lambda_3 + \lambda_1 x_1 - \lambda_1\lambda_2 x_0\};$$

$$\rho = (-\lambda_1\lambda^{-1}\lambda_2^{-1}\omega + \lambda_3 - \lambda_2 x_0)^{-1},$$

$$u = x_0^{-1}\left(-\frac{\lambda_1}{2\lambda\lambda_2^2}\omega^2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\omega + \lambda_4\right) + \frac{1}{2}\lambda_1 x_0 + \frac{x_1}{x_0}, \quad \omega = u - \lambda_1 x_0;$$

$$\rho = \frac{1}{\lambda_1 x_1},$$

$$u = \begin{cases} -\lambda_1\sqrt{-\lambda}x_1 \operatorname{tg}\lambda_1\sqrt{-\lambda}x_0, & \lambda < 0, \\ \lambda_1\sqrt{\lambda_1}x_1 \operatorname{th}\lambda_1\sqrt{\lambda}x_0, & \lambda < 0; \end{cases}$$

$$\int f d\rho = \frac{1}{2}\lambda_1^2 x_0^2 - \lambda_1 x_1,$$
$$u = \lambda_1 x_0;$$
$$\rho = (\lambda x_0 + \lambda_1)^{-1},$$
$$u = (\lambda x_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda x_0)^{-1};$$
$$\frac{1}{2}u^2 + \int f d\rho = \lambda x_1 + \lambda_2,$$
$$u = \lambda_1 + \lambda x_0,$$

where λ_i, $i = \overline{1,5}$ are arbitrary constants.

The results of the theorem can be generalized for n-dimensional case. After that the counterparts of Q, have the form

$$\hat{Q}_1 = \partial_0 + \vec{u}\,\vec{\nabla} + (\lambda_1\rho^{-1} + \lambda_2)\vec{\alpha}\partial_{\vec{u}} + \sqrt{\lambda_1}\partial_\rho,$$
$$\hat{Q}_2 = \partial_0 + \vec{u}\,\vec{\nabla} + \vec{\alpha}\partial_{\vec{u}} - \frac{\lambda_1\rho + \lambda_2\rho^2}{\lambda_1 x_0}\partial_\rho,$$
$$\hat{Q}_3 = \partial_0 + \vec{u}\,\vec{\nabla} + \lambda\rho^{-1}\vec{\alpha}\partial_{\vec{u}} + \sqrt{\lambda}\partial_\rho,$$
$$\hat{Q}_4 = \partial_0 + \vec{u}\,\vec{\nabla} + \vec{\alpha}\partial_{\vec{u}} + \lambda_2\rho^2\partial_\rho,$$
$$\hat{Q}_5 = \rho\partial_0 - (\rho^2\vec{u}^2 - \lambda)\vec{\alpha}\partial_{\vec{u}},$$
$$\hat{\vec{Q}}_6 = f(\rho)\vec{\nabla} + \vec{\alpha}\partial_\rho,$$
$$\hat{Q}_7 = -\partial_0 + \lambda\rho\vec{u}\partial_{\vec{u}} + \lambda\rho^2\partial_\rho,$$
$$\hat{Q}_8 = \partial_0 + \vec{\alpha}\partial_{\vec{u}} + \vec{\alpha}\vec{u}f^{-1}(\rho)\partial_\rho,$$

where $\vec{\alpha}$ is arbitrary constant unit vector. By analogy with one-dimensional case, using operators $\hat{Q}_i$, $i = \overline{1,8}$ we can construct ansätze which reduce system (1) to systems with lesser number of variables.

Let us show some examples. The ansätze for system (1) that were constructed by means of operators $\hat{Q}_7$, $\hat{Q}_8$, $\hat{Q}_5$, respectively, are of the form

$$a)\quad \rho = (\varphi^0(\vec{x}) - \lambda x_0)^{-1},$$
$$u^a = \varphi^a(\vec{x})(\varphi^0(\vec{x}) - \lambda x_0)^{-1}, \quad a = \overline{1,n};$$
$$b)\quad \int f d\rho = \varphi^0(\vec{x}) + \alpha_a\varphi^a(\vec{x})x_0 + \frac{1}{2}\vec{\alpha}^{\,2}x_0^2,$$
$$u^a = \varphi^a(\vec{x}) + \alpha_a x_0, \quad a = \overline{1,n};$$
$$c)\quad \rho = \sqrt{\lambda}\varphi^0(\omega), \quad \omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} = \{\vec{a}\,\vec{x}, \vec{b}\,\vec{x}, \vec{c}\,\vec{x}\},$$
$$u = \begin{cases} \vec{a}\varphi^1 + \vec{b}\varphi^2 + \dfrac{\vec{c}}{\sqrt{\lambda}}(x_0\varphi^0 + \varphi^3)^{-1}, & \delta = 0, \\ \vec{a}\varphi^1 + \vec{b}\varphi^2 + \vec{c}\,\mathrm{th}\,\sqrt{\lambda}(x_0\varphi^0 + \varphi^3), & \delta = 1, \\ \vec{a}\varphi^1 + \vec{b}\varphi^2 + \vec{c}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{\lambda}(-x_0\varphi^0 + \varphi^3), & \delta = -1, \end{cases}$$

where $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$; $\delta \equiv (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 - (\varphi^0)^{-2}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ are arbitrary orthonormal vectors.

These ansätze reduce (1) to the following systems

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \varphi^0 = \text{const},\\
& (\vec\varphi\vec\nabla + \lambda)\vec\varphi = 0,\\
& \operatorname{div}\vec\varphi + \lambda = 0;\\
b)\quad & \vec\alpha + \vec\nabla\varphi^0 + (\vec\varphi\vec\nabla)\vec\varphi = 0,\\
& \operatorname{div}\vec\varphi = 0,\\
& \varphi^a_b + \varphi^b_a = 0, \quad a,b=\overline{1,n}, \quad a\neq b;\\
c)\quad & \text{for } \delta = 0;1;-1 \text{ respectively:}\\
& \varphi^0_3 = \varphi^s_3 = \varphi^3_3 = 0, \quad s=1,2,\\
& \varphi^s\varphi^3_s = -\varphi^0,\\
& \varphi^s\varphi^\sigma\varphi^\sigma_s = 0, \quad s,\sigma = 1,2,\\
& \varphi^2_1 - \varphi^1_2 = 0, \quad \varphi^1_1 + \varphi^2_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Having defined the potential $v = v(\omega_1,\omega_2)$, $\varphi^s = \frac{\partial v}{\partial\omega_s}$, $s=1,2$, we can rewrite the system c) in the following form

$$
\begin{aligned}
& \varphi^0_3 = \varphi^3_3 = \varphi^s_3 = 0, \quad s=1,2,\\
& v_s\varphi^3 = -\varphi^0,\\
& -(\varphi^0)^{-2} + v_sv_s = \begin{cases} \ \ 0,\\ \ \ 1,\\ -1,\end{cases}\\
& \Delta v = 0,\\
& v_sv_\sigma v_s\sigma = 0.
\end{aligned}
$$

Having got a solution of the system

$$
\Delta v = 0, \quad v_sv_\sigma v_s\sigma = 0, \tag{6}
$$

we can write down the solution of system (6) and, using corresponding ansatz, to construct a solution for system (1). For example we can consider the particular solution of system (7)

$$
v = \psi_1.
$$

It leads to the solution of system (6) $v=\omega_1$, $\varphi^3 = \omega_1 + \Phi(\psi_2)$, $\varphi^0 = 1$, $\varphi^1 = 1$, $\varphi^2 = 0$.

Using the corresponding ansatz we obtain a solution of system (1) which depends on arbitrary function Φ

$$
\rho = \sqrt{\lambda}, \quad \vec u = \vec a + \frac{\vec c}{\sqrt{\lambda}}(x_0 + \omega_1 + \Phi(\omega_2))^{-1},
$$

where $\omega_1 = \vec a\,\vec x$, $\omega_2 = \vec b\,\vec x$, $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ are arbitrary orthonormal vectors.

1. Овсянников Л.В., Лекции по основам газовой динамики, М., Наука, 1981, 368 с.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Фущич В.И., Серова М.М., О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики, *Докл. АН СССР*, 1983, **268**, № 5, 1102–1104.

On non-local symmetries of nonlinear heat equation

W.I. FUSHCHYCH, N.I. SEROV, V.A. TYCHININ, T.K. AMEROV

Для нелинейного уравнения теплопроводности приведены нелокальные формулы размножения и суперпозиции его решений.

1. Introduction. L.V. Ovsiannikov [1] gave the group classification of nonlinear one-dimensional heat equation

$$u_0 = \partial_1(F(u)u_1), \tag{1}$$

where $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \partial_\mu u$, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1$; $F(u)$ is arbitrary differentiable function. These results can be formulated as follows:

Theorem 1. *The widest algebra of invariance of equation (1) with $F(u) \neq \mathrm{const}$ in class of S. Lie operators is given by the following basis elements*

$$a)\quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \tag{2}$$

if $F(u)$ is arbitrary differentiable function;

$$b)\quad \partial_0,\quad \partial_1,\quad D_1,\quad D_2 = x_1\partial_1 + \frac{2}{k}u\partial_u, \tag{3}$$

if $F(u) = \lambda u^k$, λ, k are arbitrary constants, not equal to zero;

$$c)\quad \partial_0,\quad \partial_1,\quad D_1,\quad D_3 = x_1\partial_1 + 2\partial_u, \tag{4}$$

if $F(u) = \lambda \exp u$;

$$d)\quad \partial_0,\quad \partial_1,\quad D_1,\quad D_4 = x_1\partial_1 - \frac{3}{2}u\partial_u,\quad \Pi = x_1^2\partial_1 - 3x_1u\partial_u, \tag{5}$$

if $F(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}$.

It is well known (see for example [3]) that the sequence of transformations

$$u(x_0, x_1) = \frac{\partial v(x_0, x_1)}{\partial x_1}, \tag{6}$$

$$x_0 = t,\quad x_1 = w(t, x),\quad v = x, \tag{7}$$

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} = z(t, x) \tag{8}$$

do not take out of the equations class (1), i.e. if the sequence of transformations (6), (7), (8) is carried out then equation (1) goes to the form

$$z_t = \partial_x(F^*(z)z_x), \tag{9}$$

Доклады АН Украины, 1992, № 11, С. 27–33.

where

$$F^*(z) = z^{-2}F(z^{-1}). \tag{10}$$

In this paper transformations (6)–(8) are used to construct nonlocal ansätzes, which reduce equation (1) to ordinary differential equations (ODE). The generating and superposition formulas for solutions of equation (1) are given for corresponding nonlinearities $F(u)$.

2. The equation $u_0 = \partial_1(u^{-2}u_1)$. In the case when $F(u) = u^{-2}$ the equation (1) takes the form

$$u_0 = \partial_1(u^{-2}u_1). \tag{11}$$

It follows from (10) that equation (11) can be reduced to the linear heat equation by means of transformations (6)–(8):

$$z_t = z_{xx}. \tag{12}$$

As it was established by S. Lie, the widest algebra of invariance of equation (12) consists of the operators:

$$\begin{gathered} \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial_x}, \quad G = t\partial_x - \frac{1}{2}xz\partial_z, \quad I = z\partial_z, \\ D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad P = t\left(t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}z\partial_z\right) - \frac{x^2}{4}z\partial_z. \end{gathered} \tag{13}$$

The symmetry of equation (11) is given by only four operators (3), whereas the symmetry of equation (12) is given by six operators (13). It means that nonlinear equation (11) has some non-Lie symmetry which cannot be obtained by Lie's method. Let us use this fact to construct nonlocal ansätzes for nonlinear equation (11), i.e. having used operators G, P (13) we will construct non-local ansätzes for equation (11) by means of transformations (6)–(8). Below we will show only those ansätzes, which cannot be obtained from Lie symmetry of equation (11)

$$\begin{gathered} u(x_0, x_1) = \frac{1}{x_0x_1 + x_1h(\omega)}, \quad \omega = \tau + x_0^2, \\ \exp\left(x_0\tau + \frac{2}{3}x_0^3\right)\varphi(\omega) = x_1; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} u(x_0, x_1) = \frac{2(x_0^2+1)}{x_1\left[2(x_0^2+1)^{1/2}h(\omega) - x_0\tau\right]}, \quad \omega = \tau(x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}, \\ \exp\left\{\lambda \operatorname{arctg} x_0 - \frac{x_0\tau^2}{4(x_0^2+1)}\right\}\varphi(\omega) = x_1(x_0^2+1)^{1/4}. \end{gathered} \tag{15}$$

In formulas (14), (15) $\tau = \tau(x_0, x_1)$ is functional parameter, functions $\varphi(\omega)$ and $h(\omega)$ are connected by the relation

$$h(\omega) = \frac{\dot\varphi(\omega)}{\varphi(\omega)}.$$

Ansätzes (14), (15) reduce equation (11) to Riccati equations for unknown function h:

$$\dot{h} + h^2 = \omega, \tag{16}$$

$$\dot{h} + h^2 = -\frac{\omega^2}{4} + \lambda, \tag{17}$$

respectively. Equations (16), (17) being written down for function $\varphi(\omega)$, have the form

$$\ddot{\varphi} - \omega\varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \left(\frac{\omega^2}{4} - \lambda\right)\varphi = 0.$$

The solutions of these equations can be expressed only in terms of special functions. As it follows from transformations (6)–(7) the relation between the solutions of equations (11) and (12) is given by following formula

$$u(x_0, x_1) = \left[\frac{\partial z(x_0, \tau)}{\partial \tau}\right]^{-1}, \tag{18}$$

where $\tau = \tau(x_0, x_1)$ is functional parameter, which can be obtained from the relation

$$z(x_0, \tau) = x_1. \tag{19}$$

3. Non-Lie generating of equation solutions. Let us illustrate the process of finding new solutions by means of formulas (18), (19). The function

$$z(t, x) = t + \frac{x^2}{2},$$

is a solution of heat equation (12). For this solution, in accordance with (19), we have $\tau = \sqrt{2(x_1 - x_0)}$. Having substituted this value of parameter τ into (18), we obtain the solution of equation (11):

$$u(x_0, x_1) = [2(x_1 - x_0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Linear equation (12) has a remarkable property: any operator of invariance algebra of this equation maps it's solution into another solution, i.e. the following generating formula takes place

$$\overset{2}{z}(t, x) = Q\,\overset{1}{z}(t, x), \tag{20}$$

where $\overset{1}{z}$, $\overset{2}{z}$ are solutions of equation (12), Q is an operator that belongs to algebra (13).

Let us use formula (20) and the relation between the solutions of equations (11) and (12) to construct generating solutions formula for equation (11). If we, for example, choose operator ∂_x instead of Q in (20), then we get one of the formulas which describe the generating solutions of nonlinear equation (11)

$$\overset{2}{u}(x_0, x_1) = -[\overset{1}{u}(x_0, \tau)]^3 \left[\frac{\partial \overset{1}{u}(x_0, \tau)}{\partial \tau}\right]^{-1}, \tag{21}$$

where $\overset{1}{u}(x_0, x_1)$ and $\overset{2}{u}(x_0, x_1)$ are solutions of equations (11) while function $\tau = \tau(x_0, x_1)$ is determined by the equation

$$\overset{1}{u}(x_0, \tau) = x_1^{-1}. \tag{22}$$

So equation (11) solutions of the form

$$\overset{1}{u}(x_0,x_1)=x_0^{\frac12}x_1^{-1}\left(-\ln x_0^{\frac12}x_1\right)^{-\frac12}$$

are multiplied into parametrical solutions:

$$\overset{2}{u}(x_0,x_1)=x_0^{\frac32}\tau\left(\ln\tau-\frac12\right)^{-1},\quad \ln\tau=x_0^2x_1^2\tau^2$$

by means of formulas (21), (22).

In the case $Q=\partial_t$, it follows from (18)–(20) that

$$\overset{2}{u}(x_0,x_1)=\frac{[\overset{1}{u}(x_0,\tau)]^5}{2[\overset{1}{u}_\tau(x_0,\tau)]^2-[\overset{1}{u}(x_0,\tau)]^2\,\overset{1}{u}_0(x_0,\tau)},\tag{23}$$

where $\tau=\tau(x_0,x_1)$ is defined by the condition

$$\overset{1}{u}_\tau(x_0,\tau)+x_1[\overset{1}{u}(x_0,\tau)]^3=0.\tag{24}$$

Note. If we choose anyone of operators (13) in the capacity of Q in formula (20) then the generating solutions formula for equation (11) is constructed analogously. The synthesis of Galilei local transformations:

$$t'=t,\quad x'=x+2at,\quad z'=z\exp\{-ax-a^2t\}\tag{25}$$

and non-local relation (18), (19) leads to the new generating solutions formula of equation (11)

$$\overset{2}{u}(x_0,x_1)=\frac{\overset{1}{u}(x_0,\tau)}{-ax_1\,\overset{1}{u}(x_0,\tau)+x_1\tau^{-1}},\tag{26}$$

where a is arbitrary real parameter and $\tau=\tau(x_0,x_1)$ is functional parameter which is a solution of the following equations

$$\tau_1=\frac{1}{-ax_1\,\overset{1}{u}(x_0,\tau)+x_1\tau^{-1}},\quad [\overset{1}{u}(x_0,\tau)]^2\tau_0=\tau_1^{-2}\tau_{11}+2a\,\overset{1}{u}{}^2(x_0,\tau).\tag{27}$$

It should be noted that x_0 is a parameter of first equation (27) and that is why this equation can be considered as first-order ODE with separable variables. Because of this the second of the equation (27) is only the correlating condition of obtained τ with respect for x_0. The following example show the effectivity of formulas (26)–(27). The constant solution $u^1(x_0,x_1)=1$ being generated by these formulas takes the form of following implicit solution:

$$\ln\frac{1}{(x_1u)^{-1}-a}+\frac{a}{(x_1u)^{-1}-a}=\ln x_1+a^2x_0.$$

4. Nonlinear superposition principle. Solutions of equation (12) have linear superposition principle. Using formulas (18), (19) we get nonlinear superposition principle for the solutions of equation (11). Let $\overset{1}{u}(x_0,x_1)$, $\overset{2}{u}(x_0,x_1)$ are the pair of solutions of equation (11) then third solution of this equation can be obtained by the formula

$$\frac{1}{\overset{3}{u}(x_0,x_1)}=\frac{1}{\overset{1}{u}(x_0,\overset{1}{\tau})}+\frac{1}{\overset{2}{u}(x_0,\overset{2}{\tau})},\tag{28}$$

where $\overset{k}{\tau}=\overset{k}{\tau}(x_0,x_1)$ are functional parameters which can be obtained from the conditions

$$\begin{gathered}\overset{1}{u}(x_0,\overset{1}{\tau})d\overset{1}{\tau}=\overset{2}{u}(x_0,\overset{2}{\tau})\,d\overset{2}{\tau},\\ \overset{1}{\tau}+\overset{2}{\tau}=x_1,\quad \overset{k}{\tau}_0=\frac{\overset{k}{\tau}_{11}}{\overset{k}{\tau}{}_1^2}\overset{k}{u}{}^{-2}(x_0,\overset{k}{\tau}),\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{29}$$

The substitution $u(x_0,x_1)=\frac{1}{U(x_0,x_1)}$ leads equation (11) and formulas (28), (29) to the following form

$$U_0=U^2U_{11},\tag{30}$$

$$\overset{3}{U}(x_0,x_1)=\overset{1}{U}(x_0,\overset{1}{\tau})+\overset{2}{U}(x_0,\overset{2}{\tau}),\tag{31}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\overset{1}{\tau}}{\overset{1}{U}(x_0,\overset{1}{\tau})}=\frac{d\overset{2}{\tau}}{\overset{2}{U}(x_0,\overset{2}{\tau})},\\ \overset{1}{\tau}+\overset{2}{\tau}=x_1,\quad \overset{k}{\tau}_0=\frac{\overset{k}{\tau}_{11}}{\overset{k}{\tau}{}_1^2}\overset{k}{U}{}^2(x_0,\overset{k}{\tau}),\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{32}$$

Example. Having two simplest stationary solutions

$$\overset{1}{U}(x_0,x_1)=x_1,\quad \overset{2}{U}(x_0,x_1)=2x_1$$

of equation (30) and using formulas (31)–(32) we can obtain nonstationary solution of that equation

$$\overset{3}{U}(x_0,x_1)=\pm e^{-2x_0}\left(1-2x_1e^{2x_0}\pm\sqrt{1-2x_1e^{2x_0}}\right).$$

5. Non-Lie ansätzes for equation $u_0=\partial_1(u^{-\frac{2}{3}}u_1)$. It follows from (10), that transformations (6)–(8) map equation

$$u_0=\partial_1(u^{-\frac{2}{3}}u_1)\tag{33}$$

into the equation

$$z_t=\partial_x(z^{-\frac{4}{3}}z_x).\tag{34}$$

Symmetry of equation (34) in class of Lie transformations is wider then that of equation (33) (see Theorem 1). By analogy with section 1 let us use Lie symmetry of equation (34) for a construction of non-local ansätzes which reduce equation (33).

Let us concisely adduce the results of our analysis. Ansätzes for function z:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad z = x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = t,\\
&2)\quad z = x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = at + \frac{1}{x},\\
&3)\quad z = t^{\frac34}x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = a\ln t + \frac{1}{x},\\
&4)\quad z = (x^2+1)^{-\frac32}\varphi(\omega), \quad \omega = t + \lambda\,\mathrm{arctg}\,x,\\
&5)\quad z = (x^2-1)^{-\frac32}\varphi(\omega), \quad \omega = t + \lambda\,\mathrm{arctg}\,x,\\
&6)\quad z = t^{\frac34}(x^2+1)^{-\frac32}\varphi(\omega), \quad \omega = \ln t + \lambda\,\mathrm{arctg}\,x,\\
&7)\quad z = t^{\frac34}(x^2-1)^{-\frac32}\varphi(\omega), \quad \omega = \ln t + \lambda\,\mathrm{arctg}\,x.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Ansätzes for function u:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad u = [\varphi^1(x_0)x_1^2 + \varphi^2(x_0)]^{-\frac23};\\
&2)\quad [x_1 + \varphi^1(x_0)][\dot\varphi^2(x_0)]^{\frac34} = -\tau\dot\varphi^3(\omega) + \varphi^3(\omega),\\
&\qquad \omega = \varphi^2(x_0) + \tau, \quad -\frac{\tau_1}{\tau} = u;\\
&3)\quad [x_1 + \varphi^1(x_0)][\dot\varphi^1(x_0)]^{\frac34} = \int[\dot\varphi^3(\tau)]^{\frac32}\varphi^4(\omega)d\tau,\\
&\qquad \omega = \varphi^2(x_0) + \varphi^3(\tau), \quad \tau_1 = u.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Reduced equations which where obtained by the substitution of ansätzes (36) into the equation (33):

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \dot\varphi^1 + 4(\varphi^1)^2 = 0,\\
&\qquad \dot\varphi^2 - 2\varphi^1\varphi^2 = 0;
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
&2)\quad \dot\varphi^1 = \lambda_1(\dot\varphi^2)^{\frac14}, \quad \ddot\varphi^2 = \lambda_2(\dot\varphi^2)^2,\\
&\qquad 3(\ddot\varphi^3)^{-\frac13} + \lambda_3\dot\varphi^3 + \frac34\lambda_2\varphi^3 - \lambda_1 = 0;
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
&3)\quad \dot\varphi^1 = 0, \quad \ddot\varphi^2 = \lambda_2(\dot\varphi^2)^2,\\
&\qquad 2\dddot\varphi^3\dot\varphi^3 - 3(\ddot\varphi^3)^2 = 2\lambda_1(\dot\varphi^3)^4,\\
&\qquad (\varphi^4)^{-\frac43}\ddot\varphi^4 - \frac43(\varphi^4)^{-\frac73}(\dot\varphi^4)^2 + 3\lambda_1(\varphi^4)^{-\frac13} + \frac34\lambda_2\varphi^4 - \dot\varphi^4 = 0,
\end{aligned}
\tag{39}
$$

where λ_1, λ^2, λ^3 are arbitrary constants. In particular, having integrated the system of equations (38) with $\lambda_2 = 0$, we obtain the parametrical solutions of equation (33) of the form:

$$
\begin{aligned}
&u^{\frac13} = \frac{-c_1\left(\frac54 c_1^3x_1 + c_2x_0\right)}{\tau(\tau - 4c_3x_0)},\\
&(\tau + c_3x_0)(\tau - 4c_3x_0)^4 = \left(\frac54 c_1^3x_1 + c_2x_0\right)^4,
\end{aligned}
\tag{40}
$$

where c_1, c_2, c_3 are arbitrary constants of integration.

6. The invariance of equation (1) under the transformations (6)–(8). For the invariance of equation (1) under non-local transformations (6)–(8) the following condition must be satisfied

$$z^{-2}F(z^{-1}) = F(z). \tag{41}$$

The solution of equation (41) can be written down in the form

$$F(z) = z^{-1}f(\ln z), \tag{42}$$

where f is arbitrary differentiable even function. So transformations (6)–(8) are non-local invariance transformations of equation

$$u_0 = \partial_1\left[\frac{f(\ln u)}{u}u_1\right], \quad (f(-\alpha) = f(\alpha)). \tag{43}$$

Using this fact, we construct generating formula for solutions of equation (43):

$$\overset{2}{u}(x_0,x_1) = \frac{1}{\overset{1}{u}(x_0,\tau)}, \tag{44}$$

where $\tau = \tau(x_0,x_1)$ is the functional parameter which is a solution of the equations

$$\tau_1 = \frac{1}{\overset{1}{u}(x_0,\tau)}, \quad \tau_0 = f(\ln\tau_1)\frac{\tau_{11}}{\tau_1}. \tag{45}$$

Example. Let us consider the solution

$$\overset{1}{u}(x_0,x_1) = \frac{x_0}{1+\cos x_1} \tag{46}$$

of the equation

$$u_0 = \partial_1\left(\frac{u_1}{u}\right). \tag{47}$$

By means of formulas (44), (45) we construct new solution

$$\overset{2}{u}(x_0,x_1) = \frac{2x_0}{x_0^2+x_1^2} \tag{48}$$

of the equation (47). It should be noted that the solutions (46) and (48) have essentially different properties (boundaryness, periodicity, the behavior at zero and at the infinity and so on). If we will apply Lie transformations to manifold of the solutions of equation (47), then the majority of those properties of the solutions will be conserved.

1. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, *Доклады АН СССР*, 1959, **125**, № 3, 492–495.

2. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М., Мир, 1989, 639 с.

3. King I.R., Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1990, **23**, 5441–5464.

Conditional symmetry and exact solutions of equations of nonstationary filtration

W.I. FUSHCHYCH, N.I. SEROV, A.I. VOROB'EVA

Досліджена умовна іваріантість, одержані неліївські анзаци та побудовані точні розв'язки рівняння нестаціонарної фільтрації з нелінійною правою частиною. Результати узагальнено для n-вимірного нелінійного рівняння теплопровідності.

In describing filtration processes of gas the following nonlinear equation is widely used [1]

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}+\frac{\partial^2\varphi(v)}{\partial x_1^2}+\frac{N}{x_1}\frac{\partial\varphi(v)}{\partial x_1}=\Phi(v), \tag{1}$$

where $v=v(x)$, $x=(x_0,x_1)\in\mathbb{R}_2$, $N=\text{const}$; $\varphi(v)$, $\Phi(v)$ are given smooth functions. Substitution $u=\varphi(v)$ reduces equation (1) to equivalent equation

$$H(u)u_0+u_{11}+\frac{N}{x_1}u_1=F(u), \tag{2}$$

where $u_0=\frac{\partial u}{\partial x_0}$, $u_1=\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $u_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.

Lie symmetry of equation (2) under $N=0$ was studied in [2, 3] and its conditional symmetry was studied in [4–7].

In present paper we study conditional symmetry of equation (2) with $N\neq 0$. Operators of conditional symmetry are used to construct ansätze which reduce (2) to ordinary differential equations (ODE). By means of this method we obtain exact solutions of equations (2) and then exact solutions of multidimensional nonlinear heat equation. Below we will use terms and definitions given in [4–7].

Theorem 1. *Equation (2) is Q-conditionally invariant under the operator*

$$Q=A(x,u)\partial_0+B(x,u)\partial_1+C(x,u)\partial_u, \tag{3}$$

iff function A, B, C satisfy the following system of equations:

Case I. $A\neq 0$ (without lose of generality one can put $A=1$)

$$\begin{gathered}B_{uu}=0,\quad C_{uu}=2\left(B_{1u}+HBB_u-\frac{N}{x_1}B_u\right),\quad 3B_uF=2(C_{1u}+HB_uC)-\\ -\left(HB_0+B_{11}-\frac{N}{x_1}B_1+\frac{N}{x_1^2}B+2HBB_1+\dot HBC\right),\\ C\dot F-(C_u-2B_1)F=HC_0+C_{11}+\frac{N}{x_1}C_1+2NCB_1+\dot HC^2;\end{gathered} \tag{4}$$

Доповіді АН України, 1992, № 6, С. 20–24

Case II. $A = 0$, $B = 1$,

$$
\begin{aligned}
&C\dot{F} - \left(C_u + \frac{\dot{H}}{H}C\right)F = HC_0 + C_{11} + \frac{N}{x_1}C_1 - \frac{N}{x_1^2}C + 2CC_{1u} + C^2C_{uu} - \\
&\qquad - C\frac{\dot{H}}{H}\left(CC_u + C_1 + \frac{N}{x_1}C\right).
\end{aligned} \tag{5}
$$

In formulas (4), (5) and everywhere below subscripts mean differentiation with respect to corresponding arguments.

To prove the theorem one should use the method described in [4–7].

To find the general solution of equations (4), (5) is impossible, but we succeeded in obtaining several partial solutions.

Theorem 2. *Equation (2) is Q-conditionally invariant under operator (3) with* $H(u) = 1$, $A = 1$, $D_u \neq 0$ *it is leeally equivalent to the equation*

$$
u_0 + u_{11} + \frac{3}{2x_1}u_1 = \lambda u^3 \quad (\lambda = \mathrm{const}), \tag{6}
$$

and in this case operator (3) takes the form

$$
Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\left(\sqrt{2\lambda}u + \frac{1}{x_1}\right)\partial_1 + \frac{3}{4}u\left(2\lambda u^2 - \frac{1}{x_1^2}\right)\partial_u. \tag{7}
$$

To prove the theorem one has to solve equations (4) under $H(u) = 1$, $B(u) \neq 0$. By means of operator (7) we construct an implicit ansatz

$$
15\left(x_0 - \frac{x_1^2}{3}\right)\omega + 4\sqrt{2\lambda}x_1^{\frac{5}{2}} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{1 + \sqrt{2\lambda}ux_1}{u\sqrt{x_1}}, \tag{8}
$$

which reduces equation (6) to the ODE $\ddot{\varphi} = 0$. Having solved this latter one and taking into account (8), we obtain the following solution of equation (6), $u(x_0, x_1)$ is a new solution

$$
u = -\frac{5}{\sqrt{2\lambda}}\frac{x_1^3 - 3x_0}{x_1^3 - 15x_0x_1 + c_1\sqrt{x_1}} \quad (c_1 = \mathrm{const}). \tag{9}
$$

All inequivalent ansätze of Lie type are given by one of formulae

$$
u = \varphi(x_1), \quad u = x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi(x_0^{-\frac{1}{2}}x_1). \tag{10}
$$

It is obvious that (9) does not belong to (10).

The above solutions of equation (6) can be multiplied by means of formulae of generating solutions using Lie symmetry:

$$
u(x_0, x_1) = \theta_1 f(\theta_1^2 x_0 + \theta_0, \theta_1 x_1), \tag{11}
$$

where θ_0, θ_1 are group parameters, $f(x_0, x_1)$ is a known solution of equation (6), $u(x_0, x_1)$ is a new solution.

Theorem 3. *Equation*

$$
\frac{1}{u}u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1}u_1 = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}), \tag{12}
$$

is Q-conditionally invariant under operator

$$Q = \partial_0 + (N+1)\frac{u}{x_1}\partial_1 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u. \tag{13}$$

Proof. To prove the theorem it is sufficient to show that the following relation holds true

$$\tilde{Q}S = \tilde{\lambda}_1 S + \tilde{\lambda}_2 Qu, \tag{14}$$

where

$$S = \frac{1}{u}u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1}u_1 - \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2),$$

$$Qu = u_0 + (N+1)\frac{u}{x_1}u_1 - (\lambda_1 u + \lambda_2),$$

$\tilde{Q}$ is corresponding prolongation of operator Q: $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ are some functions.

On acting operator $\tilde{Q}$ on S we get after rather tedious calculations,

$$\tilde{Q}S = \left[\lambda_1 + \frac{N+1}{x_1^2}(2u + 3x_1u_1)\right]S -$$
$$- \left[\frac{N+1}{x_1 u}u_1 - \frac{N+1}{x_1^2 u}(2u + 3x_1u_1) - \frac{\lambda_1 u + \lambda_2}{u^2}\right]Qu.$$

So, the theorem is proved.

Operator (13) results in the ansatz

$$\frac{x_1^2}{2(N+1)} - \int \frac{udu}{\lambda_1 u + \lambda_2} = \varphi(\omega), \quad \omega = x_0 - \int \frac{du}{\lambda_1 u + \lambda_2}, \tag{15}$$

which reduces equation (12) to the ODE

$$-\ddot{\varphi} = \lambda_1\dot{\varphi} + \lambda_2. \tag{16}$$

Having integrated equation (16) and using once more (15) one finds solution of equation (12)

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 &= \frac{\lambda_1\lambda_2 x_0 + \frac{1}{2}\lambda_1^2(N+1)^{-1}x_1^2}{1 + \lambda_3\exp(-x_0)}, \quad \lambda_1 \neq 0, \\ u &= \frac{\lambda_2 x_0^2 + \lambda_3 + (N+1)^{-1}x_1^2}{2x_0}, \quad \lambda_1 = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

where λ_3 is a constant of integration.

It is not difficult to verify that solutions (17) cannot be obtained by means of Lie ansätze (analogously to above solutions of equation (6)).

The rest results obtained for equation (2) are collected in table, where λ_1, λ_2, λ_3 are arbitrary constants, $W = W(u)$ an arbitrary smooth function.

Let us give some solutions of equation (2) obtained as a result of integration of reduced equations listed in the table.

1. $$u = \lambda\left(\frac{N-3}{\lambda_2}\frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{2}\right)^{N-1},$$

$$\lambda = \left[\frac{\lambda_3}{(N-1)(N-2)}\right]^{\frac{N-1}{2}}, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad N \neq 1, 2;$$

$$
\begin{aligned}
&2. \quad u = x_1^{-2}\varphi(\omega), \quad \text{where} \ \ \omega = x_0 - \frac{x_1^2}{2},\\
& \varphi(\omega) \text{ satisfies ODE } \dot\varphi = -\lambda_1 \ln\varphi + \lambda_3\omega;\\
&3. \quad u = -2\ln x_1^{-1}\sqrt{2\lambda_3}\left(\frac{x_0}{\lambda_2} - \frac{x_1^2}{4}\right), \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 > 0;\\
& u = \ln\frac{\lambda_4 x_1^2}{\exp\frac{\lambda_1\lambda_4}{\lambda_2}\left(\frac{4x_0}{\lambda_2} - x_1^2\right) - 1}, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 \neq 0;\\
&4. \quad u = -\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{4x_0}{x_1^2} - 1\right), \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0;\\
& W(u) = x_1\left(\frac{1}{\lambda_2} + \exp\left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}x_0\right)\right)^{-\frac12}, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0;\\
&5. \quad W(u) = x_1\sqrt{\frac{\lambda_1}{2x_0}}, \quad \lambda_2 = 0; \quad u = \lambda_1 x_0 + \frac{\lambda_2 x_1^2}{2(N+1)};\\
&6. \quad u = \lambda_1 x_0 + \lambda_3\frac{x_1^2}{2};\\
&7. \quad u = \exp\left(\exp\lambda_3 x_0 + \frac{\lambda_3}{4}x_1^2 + \frac{N+1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Numeration in (18) corresponds to that of ansätze in the table.

Note, that substituting $x_1 \to r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ and putting $N = n-1$ we find that equation (2) coincides with reduced nonlinear heat equation

$$
H(u)u_0 + \Delta u = F(u), \tag{19}
$$

where $u = u(x_0, \vec x)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial n_n}$. Equation (19) is reduced to (2) by means of the $O(n)$-invariant ansatz $u = u(x_0, r)$. Therefore, many results obtained above for equation (2) can be used straightforwardly for finding operators of conditional symmetry and corresponding solutions of multidimensional equation (19). We summarize them in the following statement.

Theorem 4. *Nonlinear heat equation (19) is Q-conditionally invariant under the set of operators $\{AO(n), Q\}$ if:*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad H(u) = \lambda_1 u^{\frac{2}{2-n}} + \lambda_2, \quad F(u) = \lambda_3^{\frac{4-n}{2-n}},\\
& Q = \lambda_2\vec x^{\,2}\partial_0 + (4-n)x_a\partial_a + (4-n)(2-n)u\partial_u, \quad \lambda_2 \neq 0,\ n \neq 2,\ 4;\\
&2) \quad H(u) = \frac{\lambda_1}{u}, \quad F(u) = \lambda_3,\ n = 4, \quad Q = \vec x^{\,2}\partial_0 + x_a\partial_a - 2u\partial_u;\\
&3) \quad H(u) = \lambda_1\exp u + \lambda_2, \quad F(u) = \lambda_3\exp u, \quad n = 2,\\
& Q = \lambda_2\vec x^{\,2}\partial_0 + 2x_a\partial_a + 4\partial_u, \quad \lambda_2 \neq 0;\\
&4) \quad H(u) = 1, \quad F(u) = \lambda_3 u\ln u, \quad Q = x_a\partial_a + \frac{\lambda_3}{2}\vec x^{\,2}u\partial_u;\\
&5) \quad H(u) = \frac{1}{u}, \quad F(u) = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2), \quad Q = \partial_0 + \frac{n}{\vec x^{\,2}}ux_a\partial_a + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u.
\end{aligned} \tag{20}
$$

№	$H(u)$	$F(u)$	Operator Q	Ansatz	Reduced equation
1	$\lambda_1 u^{\frac{2}{1-N}} + \lambda_2,\ \lambda_2 \neq 0$	$\lambda_3 u^{\frac{3-N}{1-N}},\ N \neq 1,\ 3$	$\lambda_2 x_1^2\partial_0 + (3-N)x_1\partial_1 +$ $+(3-N)(1-N)u\partial u$	$u = x_1^{1-N}\varphi(\omega)$, $\omega = \frac{x_0}{\lambda_2} + \frac{x_1^2}{2(N-3)}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}{}^{\frac{2}{1-N}}\dot\varphi + \frac{\ddot\varphi}{(N-3)^2} = \lambda_3\varphi^{\frac{3-N}{1-N}}$
2	$\frac{\lambda_1}{u},\ N = 3$	λ_3	$x_1^2\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u\partial u$	$u = x_1^{-2}\varphi\left(x_0 - \frac{x_1^2}{2}\right)$	$\lambda_1\frac{\dot\varphi}{\varphi} + \ddot\varphi = 3$
3	$\lambda_1 e^u + \lambda_2,\ \lambda_2 \neq 0$	$\lambda_3 e^u,\ N = 1$	$\lambda_2 x_1^2\partial_0 + 2x_1\partial_1 + 4\partial u$	$u = \varphi(\omega) + 2\ln x_1$, $\omega = \frac{x_0}{\lambda_2} - \frac{x_1^2}{4}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}e^\varphi\dot\varphi + \frac{1}{4}\ddot\varphi = \lambda_3 e^\varphi$
4	$\frac{\lambda_1}{\dot W^2}\left(N - \frac{W\ddot W}{\dot W^2}\right)$	$\frac{\lambda_2}{W\dot W}\left(N - \frac{W\ddot W}{\dot W^2}\right)$	$x_1\partial_1 + \frac{W}{\dot W}\partial_u$	$W(u) = x_1\varphi(x_0)$	$\lambda_1\dot\varphi = \lambda_3\varphi - \varphi^3$
5	$W(u),\ N \neq -1$	$\lambda_1\omega + \lambda_2,\ \lambda_2 \neq 0$	$\partial_1 + \frac{\lambda_2}{N+1}x_1\partial_u$	$u = \varphi(x_0) - \frac{\lambda_2 x_1^2}{2(N+1)}$	$\dot\varphi = \lambda_1$
6	$W(u),\ N = -1$	$\lambda_1 W(u)$	$\partial_1 + \lambda_3 x_1\partial_u$	$u = \varphi(x_0) + \lambda_3\frac{x_1^2}{2}$	$\dot\varphi = \lambda_1$
7	1	$\lambda_3 u\ln u$	$\partial_1 + \frac{\lambda_3}{2}x_1 u\partial_u$	$u = \varphi(x_0)e^{\frac{\lambda_3 x_1^2}{4}}$	$\dot\varphi + \lambda_3\frac{N+1}{2}\varphi = \lambda_3\varphi\ln\varphi$

Remark. Basis elements of $AO(n)$ have the form

$$I_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad a, b = \overline{1, n}. \tag{21}$$

Repeated indices are to be summed over $1, 2, \ldots, n$.

Let us give some exact solutions of equation (19) obtained by means of operators (20):

$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2 x_0 + \frac{\lambda_1^2\vec{x}^{\,2}}{2n}}{1 + \lambda_3\exp(-x_0)} \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

is solution of equation

$$\frac{1}{u}u_0 + \Delta u = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2)$$

and

$$u = \ln\frac{\vec{x}^{\,2}}{2\lambda_3}\left(\frac{x_0}{\lambda^2} - \frac{\vec{x}^{\,2}}{4}\right)^{-2}$$

is solution of equation under $n = 2$.

$$\lambda_2 u_0 + \Delta u = \lambda_3 \exp u$$

under $n = 2$.

1. Кочина П. Я., Гидродинамика и теория фильтрации. Избр. тр., М., Наука, 1991, 209 с.
2. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности, *Докл. АН СССР*, 1959, **125**, № 3, 492–495.
3. Дородницын В.А., Князева Н.В., Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Дифференц. уравнения*, 1983, **19**, № 17, 1215–1224.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К., Условная инвариантность нелинейного уравнения ттеплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А*, 1990, № 11, 15–18.
6. Серов Н.И., Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности, *Укр. мат. журн.*, 1990, **42**, № 10, 1370–1376.
7. Фущич В.И., Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики, *Укр. мат. журн.*, 1991, **43**, № 11, 1456–1471.

Про редукцію рівнянь Нав'є–Стокса до лінійних рівнянь теплопровідності

В.І. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, Р.О. ПОПОВИЧ

Відомо [1–4], що рівняння Нав'є–Стокса (НС)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} - \Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

інваріантні відносно алгебри $A\tilde{G}(1,3)$ розширенної групи Галілея $\tilde{G}(1,3)$ з базисними елементами

$$\begin{gathered} \partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_a = \partial/\partial_{x_a}, \quad G_a = -(t\partial_a + \partial_{u^a}), \\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a}, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a} - 2p\partial_p. \end{gathered} \tag{2}$$

В (1) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = \{u^1, u^2, u^3\}$ — поле швидкостей рідини, $p = p(x)$ — тиск, $x = \{t, \boldsymbol{x}\} \in \mathbb{R}(4)$, $\nabla = \{\partial/\partial_{x_a}\}$, $a = 1, 2, 3$, Δ — лапласіан. Крім того, рівняння (1) інваріантні відносно нескінченновимірної алгебри A^∞ з базисними елементами [3, 4]

$$Q = f^a\partial_a + \dot{f}^a\partial_{u^a} - x_a\ddot{f}^a\partial_p, \quad R = g\partial_p, \tag{3}$$

де $f^a = f^a(t)$, $g = g(t)$ — довільні диференційовні функції змінної t, точка означає диференціювання по t. В [5] здійснена редукція рівнянь НС (1) до звичайних диференційних рівнянь (ЗДР).

Нижче наводяться результати досліджень з редукції рівнянь НС до двовимірних ДРЧП. Для побудови анзаців і нових змінних використані ті алгебри з повного набору нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри $A\tilde{G}(1,3)$, які містяться в лінійній оболонці операторів ∂_a і G_a. Результати зведені до таблиці, яка дає повну інформацію про анзаци і змінні ω_1 і ω_2. Саме ці анзаци дозволяють редукувати рівняння НС до систем з двох незачеплених лінійних рівнянь теплопровідності.

В таблиці v^1, v^2, v^3, q є диференційовними функціями інваріантних змінних ω_1 і ω_2. Підставивши анзаци з таблиці в рівняння НС, одержимо такі двовимірні системи ДРЧП від змінних ω_1 та ω_2:

$$\begin{aligned} 1^\circ.\quad & v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = 0, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = 0, \\ & v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ.\quad & v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = -\frac{v^1}{\omega_1}, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = 0, \\ & v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = -\frac{1}{\omega_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ.\quad & v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = -\frac{v^1}{\omega_1}, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = -\frac{v^2}{\omega_1}, \\ & v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = -\frac{2}{\omega_1}. \end{aligned}$$

Доповіді АН України, 1992, № 2, С. 23–30.

$\tilde{G}(1,3)$-нееквівалентні підалгебри і анзаци корозмірності 2, що редукують рівняння НС до рівняння теплопровідності

№	Алгебра	Інваріантні змінні	Анзац
1	$\partial_1,\ \partial_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u_1 = v^1,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
2	$G_1,\ \partial_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u_1 = v^1 + x_1/t,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
3	$G_1,\ G_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + x_1/t,\ u^2 = v^2 + x_2/t,\ u^3 = v^3,\ p = q$
4	$G_1 + \partial_2,\ \partial_1$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
5	$G_1,\ \partial_1 + \alpha\partial_2,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{1}{t}(x_1 - x_2/\alpha),\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
6	$G_1 + \partial_2,\ G_2$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + x_1/t,\ u^2 = v^2 + x_2/t + x_1/t^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
7	$G_1 + \partial_2,\ G_2 - \partial_1$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{tx_1}{1+t^2} - \frac{x_2}{1+t^2},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1}{1+t^2} + \frac{tx_2}{1+t^2},\ u^3 = v^3,\ p = q$
8	$G_1 + \partial_2,\ G_2 - \partial_1 + \alpha\partial_2,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{(t-\alpha)x_1 - x_2}{1+t(t-\alpha)},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1 + tx_2}{1+t(t-\alpha)},\ u^3 = v^3,\ p = q$
9	$G_1 + \partial_2,\ \partial_3$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + tx_2$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
10	$G_1 + \partial_2,\ \partial_1 + \alpha\partial_3,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + tx_2 - \frac{x_3}{\alpha}$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3,\ p = q$
11	$G_1 + \partial_2,\ G_3$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + tx_2$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3 + x_3/t,\ p = q$
12	$G_1 + \gamma\partial_1 + \partial_2,\ \gamma \neq 0,\ G_3$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_1 + (t-\gamma)x_3$	$u_1 = v^1 - x_2,\ u^2 = v^2,\ u^3 = v^3 + x_3/t,\ p = q$
13	$G_1 + \lambda\partial_1,\ \lambda \in \mathbb{R},$ $G_2 + \alpha\partial_1 + \partial_3,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = x_2 + tx_3$	$u_1 = v^1 + \frac{x_1 - \alpha x_3}{t-\lambda},\ u^2 = v^2 - x_3,\ u^3 = v^3,\ p = q$
14	$G_1 + \lambda\partial_1 + \partial_3,\ \lambda \in \mathbb{R},$ $G_2 + \alpha\partial_1,\ \alpha > 0$	$\omega_1 = t,$ $\omega_2 = tx_1 + \alpha x_2 + (t-\lambda)tx_3$	$u_1 = v^1 - x_3,\ u^2 = v^2 + x_2/t,\ u^3 = v^3,\ p = q$
15	$G_1 + \lambda\partial_1 + \partial_3,\ \lambda \in \mathbb{R}$ $G_2 + \mu\partial_1 + \alpha\partial_3,\ \alpha > 0,$ $\lambda_2 + \mu^2 \neq 0$	$\omega_1 = t,\ \omega_2 = tx_1 + t(t-\lambda)x_3 +$ $+(\mu + \alpha(t-\lambda))x_2$	$u_1 = v^1 - \alpha x_3/t - x_3,\ u^2 = v^2 + x_2/t,\ u^3 = v^3,\ p = q$
16	$G_1 + \partial_2 + \alpha\partial_3,\ \alpha > 0,$ $G_2 - \partial_1$	$\omega_1 = t,$ $\omega_2 = x_2 - tx_1 - \left(\frac{t^2+1}{\alpha}\right)x_3$	$u_1 = v^1 - x_3\alpha,\ u^2 = v^2 + x_1 + tx_3/\alpha,\ u^3 = v^3,\ p = q$
17	$G_1 + \partial_2,$ $G_2 - \partial_1 + \beta\partial_2 + \mu\partial_3,$ $\beta > 0,\ \mu > 0$	$\omega_1 = t,$ $\omega_2 = \mu x_1 + \mu t x_2 +$ $+(t(t-\beta)+1)x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{(t-\beta)x_1 - x_2}{1+t(t-\beta)},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1 + tx_2}{1+t(t-\beta)},\ u^3 = v^3,\ p = q$
18	$G_1 + \partial_2 + \lambda\partial_3,$ $G_2 - \partial_1 + \beta\partial_2 + \mu\partial_3,$ $\beta > 0,\ \lambda > 0$	$\omega_1 = t,$ $\omega_2 = (\lambda(t-\beta) + \mu)x_1 +$ $+(\mu t - \lambda)x_2 + (t(t-\beta)+1)x_3$	$u^1 = v^1 + \frac{(t-\beta)x_1 + x_2}{1+t(t-\beta)},\ u^2 = v^2 + \frac{x_1 + tx_2}{1+t(t-\beta)},\ u^3 = v^3,\ p = q$

4°. $v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = v^2, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = 0,$
$v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = 0.$

5°. $$v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = \frac{1}{\alpha\omega_1} v^2 - \frac{1}{\omega_1}, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = 0,$$
$$v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = -\frac{1}{\omega_1}.$$

6°. $$v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = -\frac{1}{\omega_1} v^1, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = -\frac{1}{\omega_1^2} v^1 - \frac{1}{\omega_1} v^2,$$
$$v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = -\frac{2}{\omega_1}.$$

7°. $$v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = \frac{-\omega_1 v^1 + v^2}{1 + \omega_1^2}, \quad v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = -\frac{v^1 + \omega_1 v^2}{1 + \omega_1^2},$$
$$v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0, \quad v^3_2 = -\frac{2\omega_1}{1 + \omega_1^2}.$$

8°. $$v^1_1 + v^3 v^1_2 - v^1_{22} = -B(\omega_1)((\omega_1 - \alpha) v^1 - v^2), \quad B(\omega_1) = \frac{1}{1 + \omega_1(\omega_1 - \alpha)},$$
$$v^2_1 + v^3 v^2_2 - v^2_{22} = -B(\omega_1)(v^1 + \omega_1 v^2), \quad v^3_1 + v^3 v^3_2 - v^3_{22} + q_2 = 0,$$
$$v^3_2 = -B(\omega_1)(2\omega_1 - \alpha).$$

9°. $$v^1_1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v^1_2 - v^2 - (1 + \omega_1^2) v^1_{22} + q_2 = 0,$$
$$v^2_1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v^2_2 - (1 + \omega_1^2) v^2_{22} + \omega_1 q_2 = 0,$$
$$v^3_1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v^3_2 - (1 + \omega_1^2) v^3_{22} = 0, \quad v^1_2 + \omega_1 v^2_2 = 0.$$

10°. $$v^1_1 + \left(v^1 + \omega_1 v^2 - \frac{1}{\alpha} v^3\right) v^1_2 - v^2 - \left(1 + \omega_1^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) v^1_{22} + q_2 = 0,$$
$$v^2_1 + \left(v^1 + \omega_1 v^2 - \frac{1}{\alpha} v^3\right) v^2_2 - \left(1 + \omega_1^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) v^2_{22} + \omega_1 q_2 = 0,$$
$$v^3_1 + \left(v^1 + \omega_1 v^2 - \frac{1}{\alpha} v^3\right) v^3_2 - \left(1 + \omega_1^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) v^3_{22} - \frac{1}{\alpha} q_2 = 0,$$
$$v^1_2 + \omega_1 v^2_2 - \frac{1}{\alpha} v^3_2 = 0.$$

11°. $$v^1_1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v^1_2 - v^2 - (1 + \omega_1^2) v^1_{22} + q_2 = 0,$$
$$v^2_1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v^2_2 - (1 + \omega_1^2) v^2_{22} + \omega_1 q_2 = 0,$$
$$v^3_1 + (v^1 + \omega_1 v^2) v^3_2 + \frac{1}{\omega_1} v^3 - (1 + \omega_1^2) v^3_{22} = 0, \quad v^1_2 + \omega_1 v^2_2 + \frac{1}{\omega_1} = 0.$$

12°. $$v^1_1 + (v^1 + (\omega_1 - \gamma) v^2) v^1_2 - v^2 - (1 + (\omega_1 - \gamma)^2) v^1_{22} + q_2 = 0,$$
$$v^2_1 + (v^1 + (\omega_1 - \gamma) v^2) v^2_2 - (1 + (\omega_1 - \gamma)^2) v^2_{22} + (\omega_1 - \gamma) q_2 = 0,$$
$$v^3_1 + (v^1 + (\omega_1 - \gamma) v^2) v^3_2 + \frac{1}{\omega_1} v^3 - (1 + (\omega_1 - \gamma)^2) v^3_{22} = 0,$$
$$v^1_2 + (\omega_1 - \gamma) v^2_2 + \frac{1}{\omega_1} = 0.$$

13°. $$v^1_1 + (v^2 + \omega_1 v^3) v^1_2 - (1 + \omega_1^2) v^2_{22} + \frac{v^1 - \alpha v^3}{\omega_1 - \lambda} = 0,$$
$$v^2_1 + (v^2 + \omega_1 v^3) v^2_2 - v^3 - (1 + \omega_1^2) v^2_{22} + q_2 = 0,$$

$$v^3_1 + (v^2 + \omega_1 v^3)v^3_2 - (1 + \omega_1^2)v^3_{22} + \omega_1 q_2 = 0, \quad v^2_2 + \omega_1 v^3_2 + \frac{1}{\omega_1 - \lambda} = 0.$$

14°. $$v^1_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}v^1_2 + fv^1_2 - K(\omega_1)v^1_{22} + \omega_1 q_2 = v^3,$$
$$v^2_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}v^2_2 + fv^2_2 - K(\omega_1)v^2_{22} + \alpha q_2 = -\frac{v^2}{\omega_1},$$
$$v^3_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}v^3_2 + fv^3_2 - K(\omega_1)v^3_{22} + \omega_1(\omega_1 - \lambda)q_2 = 0, \quad f_2 + \frac{1}{\omega_1} = 0,$$
$$f = \omega_1 v^1 + \alpha v^2 + \omega_1(\omega_1 - \lambda)v^3, \quad K(\omega_1) = \omega_1^2 + \alpha^2 + \omega_1^2(\omega_1 - \lambda)^2.$$

15°. $$v^1_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}v^1_2 + fv^1_2 - K(\omega_1)v^1_{22} + \omega_1 q_2 - \frac{\alpha}{\omega_1}v^2 - v^3 = 0,$$
$$v^2_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}v^2_2 + fv^2_2 - K(\omega_1)v^2_{22} + (\mu + \alpha(\omega_1 - \lambda))q_2 + \frac{v^2}{\omega_1} = 0,$$
$$v^3_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}v^3_2 + fv^3_2 - K(\omega_1)v^3_{22} + \omega_1(\omega_1 - \lambda)q_2 = 0, \quad f^2 + \frac{1}{\omega_1} = 0,$$
$$f = \omega_1 v^1 + (\mu + \alpha(\omega_1 - \lambda))v^2 + \omega_1(\omega_1 - \lambda)v^3,$$
$$K(\omega_1) = \omega_1^2 + \mu + \alpha(\omega_1 - \lambda))^2 + \omega_1^2(\omega_1 - \lambda)^2.$$

16°. $$v^1_1 + fv^1_2 - K(\omega_1)v^1_{22} - \frac{v^3}{\alpha} - \omega_1 q_2 = 0,$$
$$v^2_1 + fv^2_2 - K(\omega_1)v^2_{22} + v^1 + \frac{\omega_1}{\alpha}v^3 + q_2 = 0,$$
$$v^3_1 + fv^3_2 - K(\omega_1)v^3_{22} - \frac{\omega_1^2 + 1}{\alpha}q_2 = 0, \quad f_2 = 0,$$
$$f = -\omega_1 v^1 + v^2 - \frac{\omega_1^2 + 1}{\alpha}v^3, \quad K(\omega_1) = 1 + \omega_1^2 + \left(\frac{\omega_1^2 + 1}{\alpha}\right)^2.$$

17°. $$v^1_1 + fv^1_2 + g\omega_2 v^1_2 - K(\omega_1)v^1_{22} + \mu q_2 = -\frac{-(\omega_1 - \beta)v^1 + v^2}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^2_1 + fv^2_2 + g\omega_2 v^2_2 - K(\omega_1)v^2_{22} + \mu\omega_1 q_2 = \frac{-v^1 - \omega_1 v^2}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^3_1 + fv^3_2 + g\omega_2 v^3_2 - K(\omega_1)v^3_{22} + (\omega_1(\omega_1 - \beta) + 1)q_2 = 0, \quad f_2 + g = 0,$$
$$f = \mu v^1 + \mu\omega_1 v^2 + (\omega_1(\omega_1 - \beta) + 1)v^3, \quad g = \frac{2\omega_1 - \beta}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$K(\omega_1) = \mu^2 + \mu^2\omega_1^2 + (\omega_1(\omega_1 - \beta) + 1)^2.$$

18°. $$v^1_1 + fv^1_2 + g\omega_2 v^1_2 - K(\omega_1)v^1_{22} + (\lambda(\omega_1 - \beta) + \mu)q_2 = \frac{v^2 - (\omega_1 - \beta)v^1}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^2_1 + fv^2_2 + g\omega_2 v^2_2 - K(\omega_1)v^2_{22} + (\mu\omega_1 - \lambda)q_2 = \frac{-v^1 - \omega_1 v^2}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)},$$
$$v^3_1 + fv^3_2 + g\omega_2 v^3_2 - K(\omega_1)v^3_{22} + (1 + \omega_1(\omega_1 - \beta))q_2 = 0, \quad f_2 + g = 0,$$
$$f = (\lambda(\omega_1 - \beta) + \mu)v^1 + (\mu\omega_1 - \lambda)v^2 + (1 + \omega_1(\omega_1 - \beta))v^3,$$
$$K(\omega_1) = (\lambda(\omega_1 - \beta) + \mu)^2 + (\mu\omega_1 - \lambda)^2 + (1 + \omega_1(\omega_1 - \beta))^2,$$
$$g = \frac{2\omega_1 - \beta}{1 + \omega_1(\omega_1 - \beta)}.$$

Нумерація рівнянь 1°–18° відповідає нумерації анзаців у таблиці. Нижні індекси 1 і 2 означають диференціювання за інваріантними змінними ω_1 і ω_2 відповідно.

Нелінійні редуковані системи 1°–18° можна звести до лінійних рівнянь теплопровідності. Покажемо, як це можна зробити на прикладі найбільш простої системи 1°, з якої випливає

$$\begin{aligned} &v^3 = h(\omega_1), \quad q = g(\omega_1)\omega_2 - \dot{h}(\omega_1)\omega_2, \quad v^1_1 + h(\omega_1)v^1_2 - v^1_{22} = 0, \\ &v^2_1 + h(\omega_1)v^2_2 - v^2_{22} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де h, g — довільні диференційовні функції від $\omega_1 = t$, точка означає диференцювання по $t = \omega_1$. Після заміни змінних

$$\tau = \omega_1, \quad z = \omega_2 + H(\omega_1), \quad \dot{H} = -h \tag{5}$$

з рівнянь (4) одержимо два незачеплених рівняння теплопровідності

$$v^1_\tau - v^1_{zz} = 0, \quad v^2_\tau - v^2_{zz} = 0. \tag{6}$$

Таким чином, за розв'язками лінійних рівнянь (6) будуються розв'язки нелінійного рівняння НС (1)

$$u^1 = v^1(t,z), \quad u^2 = v^2(t,z), \quad u^3 = -\dot{H}(t), \quad p = \ddot{H}(t)x_3 + g(t), \tag{7}$$

де $z = x_3 + H(t)$. Використовуючи перетворення, породжені операторами з нескінченновимірної алгебри інваріантності рівнянь НС (1), розв'язок (7) можна звести до простішого вигляду, зручного для розмноження. Дійсно, зробимо заміну змінних

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3 + H(t), \quad \tilde{u}^1 = u^1, \quad \tilde{u}^2 = u^2, \\ &\tilde{u}^3 = u^3 + \dot{H}(t), \quad \tilde{p} = p - \ddot{H}(t)x_3 - g(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Це перетворення належить групі симетрії рівнянь НС і зводить розв'язок (7) до вигляду

$$\tilde{u}^1 = v^1(t,z), \quad \tilde{u}^2 = v^2(t,z), \quad \tilde{u}^3 = 0, \quad \tilde{p} = 0, \quad z = \tilde{x}_3. \tag{9}$$

Зробивши аналогічні викладки для рівнянь 2°–13°, одержимо розв'язки рівнянь НС

$$2^\circ. \quad u^1 = \frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z) + \frac{x_1}{t}, \quad u^2 = \varphi^2(\tau,z), \quad u^3 = -\frac{x_3}{t}, \quad p = -\frac{x_3^2}{t^2},$$

де $\tau = \frac{1}{3}t^3$, $z = tx_3$.

Тут і надалі φ^1, φ^2 — диференційовні функції змінних τ і z, що задовольняють лінійне рівняння теплопровідності

$$\varphi^1_\tau - \varphi^1_{zz} = 0, \quad \varphi^2_\tau - \varphi^2_{zz} = 0.$$

$$\begin{aligned} 3^\circ. \quad &u^1 = \frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z) + \frac{x_1}{t}, \quad u^2 = \frac{1}{t}\varphi^2(\tau,z) + \frac{x_2}{t}, \quad u^3 = -2\frac{x_3}{t}, \\ &p = -2\frac{x_3^2}{t^2}, \quad \tau = \frac{1}{5}t^5, \quad z = x_3t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ. \quad &u^1 = \varphi^1(\tau,z) + t\varphi^2(\tau,z), \quad u^2 = \varphi^2(\tau,z), \quad u^3 = 0, \\ &p = 0, \quad \tau = t, \quad z = x_3. \end{aligned}$$

5°. $u^1 = \dfrac{1}{\alpha t}\varphi^1(\tau,z) + \dfrac{1}{\alpha}\varphi^2(\tau,z) + \dfrac{1}{\alpha}\varphi^2(\tau,z) + \dfrac{1}{t}\left(x_1 - \dfrac{x_3}{\alpha}\right),$

$$u^2 = \varphi^2(\tau,z), \quad u^3 = -\frac{x_3}{t}, \quad p = -\frac{x_3^2}{t^2}, \quad \tau = \frac{t^3}{3}, \quad z = tx_3.$$

6°. $u^1 = \dfrac{1}{t}\varphi^1(\tau,z) + \dfrac{x_1}{t}, \quad u^2 = \dfrac{1}{t}\varphi^2(\tau,z) + \dfrac{1}{t^2}\varphi^1(\tau,z) + \dfrac{x_2}{t} + \dfrac{x_1}{t^2},$

$$u^3 = -2\frac{x_3}{t}, \quad p = -3\frac{x_3^2}{t^2}, \quad \tau = \frac{t^5}{5}, \quad z = t^2x_3.$$

7°. $u^1 = \dfrac{1}{1+t^2}(\varphi^1(\tau,z) + t\varphi^2(\tau,z) + tx_1 - x_2),$

$$u^2 = \frac{1}{1+t^2}(-t\varphi^1(\tau,z) + \varphi^2(\tau,z) + x_1 + tx_2), \quad u^3 = -\frac{2t}{1+t^2}x_3,$$

$$p = \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^2}x_3^2, \quad \tau = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t, \quad z = (1+t^2)x_3.$$

8°. $\alpha = 2: \ u^1 = \dfrac{1}{t^2}((t-1)\varphi^1(\tau,z) - t\varphi^2(\tau,z) + (t-1)x_1 - x_2),$

$$u^2 = \frac{1}{t^2}(\varphi^1(\tau,z) + t\varphi^2(\tau,z) + x_1 + (t-1)x_2),$$

$$u^3 = -2\frac{x_3}{t}, \quad p = -3\frac{x_3^2}{t}, \quad \tau = \frac{t^5}{5}, \quad z = t^2x_3;$$

$$0 < \alpha < 2: \ \beta = \sqrt{1-(\alpha/2)^2}, \ u^1 = \left(\left(\beta + \frac{\alpha}{2\beta}\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\varphi^1(\tau,z) + \right.$$

$$\left. + (t-\alpha)\varphi^2(\tau,z) + (t-\alpha)x_1 - x_2\right)/(t^2 - \alpha t + 1),$$

$$u^2 = \left(-\frac{1}{\beta}\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)\varphi^1(\tau,z) + \varphi^2(\tau,z) + x_1 + tx_2\right)/(t^2 - \alpha t + 1),$$

$$u^3 = -(2t-\alpha)x_3/(t^2 - \alpha t + 1),$$

$$p = (1 - t^2 - (t-\alpha)^2 - t(t-\alpha))x_3^2/(t^2 - \alpha t + 1)^2,$$

$$\tau = \frac{t^5}{5} - \frac{\alpha}{2}t^4 + \frac{1}{3}(2+\alpha^2)t^3 - \alpha t^2 + t, \quad z = (t^2 - \alpha t + 1)x_3;$$

$$\alpha > 2: \ \beta_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \ \beta_2 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1},$$

$$u^1 = \frac{-\beta_2\varphi^1(\tau,z)}{(\beta_1-\beta_2)(t-\beta_1)} + \frac{\beta_1\varphi^2(\tau,z)}{(\beta_1-\beta_2)(t-\beta_2)} + \frac{(t-\alpha)x_1 - x_2}{t^2 - \alpha t + 1},$$

$$u^2 = \frac{\varphi^1(\tau,z)}{(\beta_1-\beta_2)(t-\beta_1)} - \frac{\varphi^2(\tau,z)}{(\beta_1-\beta_2)(t-\beta_2)} + \frac{x_1 + tx_2}{t^2 - \alpha t + 1},$$

$$u^3 = -(2t-\alpha)x_3/(t^2 - \alpha t + 1),$$

$$p = (1 - t^2 - (t-\alpha)^2 - (t-\alpha)t)x_3^2/(t^2 - \alpha t + 1)^2,$$

$$\tau = \frac{t^5}{5} - \frac{\alpha}{2}t^4 + \frac{1}{3}(2+\alpha^2)t^3 - \alpha t^2 + t, \quad z = (t^2 - \alpha t + 1)x_3.$$

9°. $u^1 = -\dfrac{t}{1+t^2}\varphi_z^2(\tau,z) - x_2, \quad u^2 = \dfrac{1}{1+t^2}\varphi_z^2(\tau,z), \quad u^3 = \varphi^1(\tau,z),$

$$p = \frac{2}{(1+t^2)^2}\varphi^2(\tau,z), \quad \tau = \frac{1}{3}t^3 + t, \quad z = x_1 + tx_2.$$

10°. $$u^1=\frac{1}{\alpha}\varphi^1(\tau,z)+\left(-\frac{1}{\beta^2}\frac{t}{t^2+\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta}\right)\varphi^2_z(\tau,z)-x_2,$$
$$u^2=\frac{\varphi^2_z(\tau,z)}{t^2+\beta^2},\quad u^3=\frac{1}{\alpha\beta^2}\left(\frac{t}{t^2+\beta^2}+\frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta}\right)\varphi^2_z(\tau,z),$$
$$p=\frac{2}{(t^2+\beta^2)^2}\varphi^2(\tau,z),\quad \beta=\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}},\quad \tau=\frac{1}{3}t^3+\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)t,$$
$$z=x_1+tx_2-\frac{x_3}{\alpha}.$$

11°. $$u^1=-\frac{1}{1+t^2}(\varphi^2_z(\tau,z)+2tx_1-2x_2)-\frac{x_1}{t},$$
$$u^2=\frac{1}{1+t^2}(\varphi^2_z(\tau,z)-2x_1-2tx_2),\quad u^3=\frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z)+\frac{x_3}{t},$$
$$p=\frac{2}{t(1+t^2)^2}\varphi^2(\tau,z)-\frac{1+3t^2}{t^2(1+t^2)^2}(x_1+tx_2)^2,\quad \tau=\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3},$$
$$z=t(x_1+tx_2).$$

12°. $$u^1=-\frac{t-\gamma}{1+(t-\gamma)^2}\left(\varphi^2_z(\tau,z)+\left(\frac{\gamma}{t}-2\right)(x_1+(t-\gamma)x_2)\right)-\frac{x_1}{t}+$$
$$+\left(\frac{\gamma}{t}-2\right)x_2,$$
$$u^2=\frac{1}{1+(t-\gamma)^2}\left(\varphi^2_z(\tau,z)+\left(\frac{\gamma}{t}-2\right)(x_1+(t-\gamma)x_2)\right),$$
$$u^3=\frac{1}{t}\varphi^1(\tau,z)+\frac{x^3}{t},$$
$$p=\frac{2\varphi^2(\tau,z)}{t(1+(t-\gamma)^2)^2}+\frac{(x_1+(t-\gamma)x_2)^2}{1+(t-\gamma)^2}\left(\frac{\frac{\gamma}{t}-2}{1+(t-\gamma)^2}-\frac{1}{t^2}\right),$$
$$\tau=\frac{t^5}{5}-\frac{\gamma}{2}t^4+(1+\gamma^2)\frac{t^3}{3},\quad z=t(x_1+(t-\gamma)x_2).$$

13°. $$u^1=\frac{1}{t-\lambda}(\varphi^1(\tau,z)+\alpha(\operatorname{arctg}t)\varphi^2_z(\tau,z)+x_1-\alpha x_3)+\alpha(x_2+tx_3)\times$$
$$\times\left(-\frac{2}{(1+\lambda^2)^2}\ln|t-\lambda|+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{t-\lambda}+\frac{1}{(1+\lambda^2)^2}\ln|1+t^2|+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^3+3\lambda}{(1+\lambda^2)^2}\operatorname{arctg}t\right),$$
$$u^2=-\frac{t}{1+t^2}\varphi^2_z(\tau,z)+\frac{1}{(1+t^2)(t-\lambda)}((2t-\lambda)x_3+(t^2-\lambda t-1)x_2),$$
$$u^3=\frac{1}{1+t^2}\left(\varphi^2_z(\tau,z)-\frac{2t-\lambda}{t-\lambda}(x_2+tx_3)\right),$$
$$p=\frac{2}{(t-\lambda)(1+t^2)}\varphi^2(\tau,z)-\frac{(x_2+tx_3)^2}{(t-\lambda)^2(1+t^2)}((2t-\lambda)(t-\lambda)+1),$$
$$\tau=\frac{t^5}{5}-\lambda\frac{t^4}{2}+\frac{1}{3}(1+\lambda^2)t^3-\lambda t^2+\lambda^2 t,\quad z=(t-\lambda)(x_2+tx_3).$$

Для систем 14°–18° знайти явний вигляд заміни змінних, яка зводить до пар рівнянь теплопровідності, не вдалось, бо їх пошук пов'язаний з розв'язанням достатньо складних систем ЗДР. Наприклад, у найпростішому з останніх випадку

16° одержимо

$$u^1 = \left(\frac{Y^i(t)}{t^2+1} - \frac{tZ^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\right)\varphi^i_z(\tau,z) - \frac{x^3}{\alpha},$$
$$u^2 = \left(\frac{tY^i(t)}{t^2+1} + \frac{Z^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\right)\varphi^i_z(\tau,z) + x_1 + \frac{tx^3}{\alpha},$$
$$u^3 = \alpha\frac{Z^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\varphi^i_z(\tau,z),$$
$$p = -\frac{2\alpha^2\varphi^i(\tau,z)}{(t^2+1)(t^2+1+\alpha^2)}\left(\frac{Y^i(t)}{t^2+1} + \frac{tZ^i(t)}{t^2+1+\alpha^2}\right),$$

де

$$z = -tx_1 + x_2 - \frac{t^2+1}{\alpha}x_3, \quad \tau = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{t^5}{5} + (2+\alpha^2)\frac{t^3}{5} + (1+\alpha^2)t\right),$$

а $Y^i(t))$, $Z^i(t))$, $i=1,2$ — фундаментальна система розв'язків рівнянь

$$\dot Y(t) = 2Z/(t^2+1+\alpha^2), \quad \dot Z(t) = -2Y/(t^2+1). \tag{10}$$

Для систем 14°–18° також можна виписати вирази типу (10), але через громіздкість ми їх не наводимо.

Зауваження 1. Можна говорити, що для деяких множин розв'язків нелінійного рівняння НС (1) виконується деякий принцип суперпозиції, оскільки розв'язок нелінійних рівнянь НС (1) одержуємо з розв'язків лінійних рівнянь теплопровідності.

Зауваження 2. Алгебрами 1°–18° не вичерпуються всі можливі нееквівалентні підалгебри алгебри $A\tilde G(1,3)$, для яких "лінеаризуються" редуковані рівняння, одержані за їх допомогою.

Зауваження 3. Одержані результати легко узагальнюються на деякі двовимірні підалгебри з A^∞. Наприклад, розглянемо підалгебру з базисними елементами

$$Q_1 = E(t)\partial_1 + \dot E(t)\partial_{u_1} - \ddot E(t)x_1\partial_p, \quad Q_2 = F(t)\partial_2 + \dot F(t)\partial_{u_2} - \ddot F(t)x_2\partial_p, \tag{11}$$

де $E(t)$, $F(t)$ — деякі гладкі ненульові функції змінної t. Відповідний їй анзац має вигляд

$$\begin{gathered} u^1 = v^1(\omega_1,\omega_2) + \dot E x_1/E, \quad u^2 = v^2(\omega_1,\omega_2) + \dot F x_2/F, \quad u^3 = v^3(\omega_1,\omega_2), \\ p = q(\omega_1,\omega_2) - \frac12\ddot E x_1^2/E - \frac12\ddot F x_2^2/F, \end{gathered} \tag{12}$$

де інваріантні змінні $\omega_1 = t$ і $\omega_2 = x_3$. Підставимо анзац (12) у рівняння (1) і проробимо з одержаною системою обчислення, аналогічні наведеним вище для системи 1°. Тут ми випишемо лише кінцевий вираз для розв'язку рівнянь НС (1), одержаний за допомогою анзацу (12)

$$u^1 = (\varphi^1(\tau,z) + \dot E(t)x_1)/E(t), \quad u^2 = (\varphi^2(\tau,z) + \dot F(t)x_2)/F(t),$$
$$u^3 = -(\dot E(t)/E(t) + \dot F(t)/F(t))x_3, \quad p = \frac12\ddot E(t)x_1^2/E(t) - \frac12\ddot F(t)x_2^2/F(t) +$$
$$+\frac{x_3^2}{2}((\ddot E(t) - 2\dot E(t))/E^2(t) + (\ddot F(t) - 2\dot F^2(t))/F^2(t)),$$

де $\tau = \int E^2(t)F^2(t)dt$, $z = E(t)F(t)x_3$.

1. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963, 244 с.
2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики, 1983, 4–23.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Lloyd S.P., The infinitesimal group of the Navier–Stokes equations, *Acta Mechanica*, 1981, **38**, 85–98.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Slavutsky S.L., Reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1991, **24**, № 4, 971–986.
6. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений, Киев, Наук. думка, 1991, 304 с.

Q-conditional symmetry of the linear heat equation

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN, M.I. SEROV, R.O. POPOVYCH

Исследована Q-условная симметрия одномерного линейного уравнения теплопроводности. Получены определяющие уравнения для коэффициентов оператора Q-условной симметрии, изучена их лиевская симметрия, получены некоторые их точные решения. Найдены нелокальные замены, сводящие определяющие уравнения к исходному уравнению теплопроводности. Показано, как можно использовать операторы Q-условной симметрии для линеаризации нелинейных ДУЧП и размножения решений уравнения теплопроводности.

In this article we consider in full detail, as a simple but non-trivial example, how to find and use Q-conditional symmetry of the one-dimensional linear heat equation

$$u_0 = u_{11} \tag{1}$$

$(u = u(x_0, x_1)$, $u_0 = \partial u/\partial x_0$, $u_1 = \partial u/\partial x_1$ and so on.

It is known [1] that the maximal in Lie sense invariance algebra of equation (1) is an algebra with the basis elements

$$\begin{gathered}\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1 u\partial_u, \quad I = u\partial_u, \\ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \quad \Pi = x_0\left(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2}u\partial_u\right) - \frac{x_1^2}{4}u\partial_u.\end{gathered} \tag{2}$$

The problem of finding non-classical symmetry (in our terminology Q-conditional symmetry) was firstly put forward by Bluman and Cole [5]. However, in this important paper the authors did not give explicitly none of operators which would different from those of (2). Below we will present quite complete investigation of this problem. All notions used without explanations are defined in [1–4].

Definition 1 [2, 4]. *A differential equation of order m*

$$S_1(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots, \underset{m}{u}) = 0 \tag{3}$$

for a function $u = u(x)$ where $\underset{k}{u}$ denotes all partial derivatives of order k is called conditionally invariant under an operator Q if there is an additional condition of the form

$$S_2(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots, \underset{m}{u}) = 0 \tag{4}$$

compatible with (3), that

$$\tilde{Q}S_\alpha\Big|_{\substack{S_1 = 0 \\ S_2 = 0}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{5}$$

In the formula (5) $\tilde{Q}$ is the standard prolongation of Q.

Доклады АН Украины, 1992, № 12, С. 28–33.

In that particular case when equation (4) has the form

$$Qu = 0 \tag{6}$$

equation (3) is called Q-conditionally invariant under the operator Q. The notion of Q-conditional invariance coincides with the notion of "non-classical" invariance introduced by Bluman and Cole in the work [5].

The general form of a first-order operator is

$$Q = A(x_0, x_1, u)\partial_0 + B(x_0, x_1, u)\partial_1 + C(x_0, x_1, u)\partial_u, \tag{7}$$

where A, B, C are some differentiable functions of x_0, x_1, u to be determined from the invariance condition (5). It will be noted that because of the imposed condition (6)

$$Qu = 0 \;\Leftrightarrow\; Au_0 + Bu_1 = C \tag{8}$$

there are really only two independent cases of operator (7).

Theorem 1. *The heat equation (1) is Q-conditionally invariant under operator (7) if and only if its coordinates are as follows:*

Case 1.

$$A = 1, \quad B = W^1(x_0, x_1), \quad C = W^2(x_0, x_1)u + W^3(x_0, x_1) \tag{9}$$

and functions $\vec{W} = \vec{W}(x_0, x_1) = \{W^1, W^2, W^3\}$ satisfy equations

$$(\partial_0 + 2W^1_1 - \partial_{11})\vec{W} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \{-2W^2_1, 0, 0\}. \tag{10}$$

Case 2.

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = v(x_0, x_1, u) \tag{11}$$

and function $v = v(x_0, x_1, u)$ satisfies the PDE

$$v_0 = v_{11} + 2vv_{1u} + v^2 v_{uu}. \tag{12}$$

Proof. From the criterion of invariance

$$\underset{2}{Q}(u_0 - u_{11})\Big|_{\substack{u_0 = u_{11},\\ Qu = 0}} = 0, \tag{13}$$

absolutely analogously to the standard Lie's algorithm one finds the defining equations for the coordinates of operator (7) which can be reduced to (9)–(12). It is to be pointed out that unlike Lie's algorithm, in the cases considered above the defining equations (10), (12) are nonlinear ones and it is a typical feature of Q-conditional invariance.

It goes without saying that Q-conditional invariance includes Lie's invariance in particular. So, in our case of the heat equation, we obtain infinitesimals (2) as simplest solutions of (10), (12):

$$\begin{aligned}
&A = 1, \quad \vec{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \partial_0,\\
&A = v = 0, \quad B = 1 \quad \Rightarrow \quad Q = \partial_1,\\
&A = 0, \quad B = 1, \quad v = -\frac{x_1 u}{2x_0} \quad \Rightarrow \quad Q = G,\\
&A = 1, \quad W^1 = \frac{x_1}{2x_0}, \quad W^2 = W^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = D,\\
&A = 1, \quad W^1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad W^2 = -(2x_0 + x_1^2)/4x_0^2, \quad W^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \Pi.
\end{aligned} \tag{14}$$

Remark 1. System of defining equations (10) was firstly obtained by Bluman and Cole [5]. Further investigation of system (10) was continued in [6], where the question of linearization of the first two equations of (10) had been studied. The general solution of the problem of linearization of equations (10), (12) will be given after a while.

Now let us list some concrete operators (7) of Q-conditional invariance of equation (1) obtained as partial solutions of the defining equations (10), (12). In the following Table we also give corresponding invariant ansätze and the reduced equations.

Of course, operators 1–10 from Table do not exhaust the all possible operators of Q-conditional invariance.

N	Operator Q	Ansatz	Reduced equation
1	$-x_1\partial_0 + \partial_1$	$u = \varphi\left(x_0 + \frac{x_1^2}{2}\right)$	$\varphi'' = 0$
2	$-x_1\partial_0 + \partial_1 + x_1^3\partial_u$	$u = \varphi\left(x_0 + \frac{x_1^2}{2}\right) + \frac{x_1^4}{4}$	$\varphi'' = -3$
3	$x_1^2\partial_0 - 3x_1\partial_1 - 3u\partial_u$	$u = x_1\varphi\left(x_0 + \frac{x_1^2}{6}\right)$	$\varphi'' = 0$
4	$x_1^2\partial_0 - 3x_1\partial_1 - (3u + x_1^5)\partial_u$	$u = x_1\varphi\left(x_0 + \frac{x_1^2}{6}\right) + \frac{x_1^5}{12}$	$\varphi'' = -15$
5	$x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u = x_1\varphi(x_0)$	$\varphi' = 0$
6	$\operatorname{cth} x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u = \varphi(x_0)\operatorname{ch} x_1$	$\varphi' - \varphi = 0$
7	$-\operatorname{ctg} x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u = \varphi(x_0)\cos x_1$	$\varphi' + \varphi = 0$
8	$\partial_1 - u\partial_u - \frac{u}{2x_0 - x_1}\partial_u$	$u = (2x_0 - x_1)e^{-x_1}\varphi(x_0)$	$\varphi' - \varphi = 0$
9	$\partial_1 - \sqrt{-2(x_0 + u)}\partial_u$	$u = -x_0 - \frac{1}{2}[x_1 + \varphi(x_0)]^2$	$\varphi' = 0$
10	$\left(x_0 + \frac{x_1^2}{2}\right)\partial_0 - x_1\partial_1$	$u = \varphi\left(x_0x_1 + \frac{x_1^2}{3!}\right)$	$\varphi'' = 0$

Next we study Lie symmetry of the defining equations (10), (12).

Theorem 2. *The Lie maximal invariance algebra of system (10) is given by the operators*

$$
\begin{gathered}
\partial_0, \quad \partial_1, \quad G^{(1)} = x_0\partial_1 + \partial_{W^1} - \frac{1}{2}W^1\partial_{W^2} - \frac{1}{2}x_1W^3\partial_{W^3},\\
D^{(1)} = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - W^1\partial_{W^1} - 2W^2\partial_{W^2}, \quad I^{(1)} = W^3\partial_{W^3},\\
\Pi^{(1)} = x_0\left(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - W^1\partial_{W^1} - 2W^2\partial_{W^2} - \frac{5}{2}W^3\partial_{W^3}\right) +\\
+ x_1\left(\partial_{W^1} - \frac{1}{2}W^1\partial_{W^2}\right) - \frac{1}{2}\partial_{W^2} - \frac{x_1^2}{4}W^3\partial_{W^3},\\
X = (f_0 + f_1W^1 - fW^2)\partial_{W^3}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

where $f = f(x_0, x_1)$ is an arbitrary solution of (1), that is $f_0 = f_{11}$.

Theorem 3. *The Lie maximal invariance algebra of equation (12) is given by the operators*

$$
\begin{gathered}
\partial_0, \quad \partial_1, \quad D^{(2)} = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u, \quad D^{(3)} = u\partial_u + v\partial_v,\\
G^{(2)} = x_0\partial_1 - \frac{1}{2}x_1(u\partial_u + v\partial_v) - \frac{1}{2}u\partial_v,\\
\Pi^{(2)} = x_0\left(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2}u\partial_u - \frac{3}{2}v\partial_v\right) - \frac{x_1^2}{4}(u\partial_u + v\partial_v) - \frac{x_1}{2}u\partial_v,\\
R = f\partial_u + f_1\partial_v \quad (f_0 = f_{11}).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

One can get the proofs of these two theorems by means of the standard Lie's algorithm.

Operators (15), (16) can be used to find exact solutions of equations (10), (12). In particular, using the formula of generating solutions at the expense of invariance under $\Pi^{(2)}$

$$
\begin{gathered}
v^{\mathrm{II}}(x_0,x_1,u)=(1-\theta x_0)^{-3/2}\exp\left\{\frac{\theta x_1^2}{4(1-\theta x_0)}\right\}v^1(x_0',x_1',u')+\frac{\theta}{1-\theta x_0}\frac{x_1u}{2},\\
x_0'=\frac{x_0}{1-\theta x_0},\quad x_1'=\frac{x_1}{1-\theta x_0},\\
u'=(1-\theta x_0)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{\theta x_1^2}{1-\theta x_0}\right\}u\quad(\theta=\mathrm{const})
\end{gathered}
\tag{17}
$$

one can construct new solutions of equations (12) starting from known ones.

Solutions of equations (10), (12) can be obtained by the use of reduction on subalgebras of the invariance algebras (15), (16). For example, using the subalgebra $\langle\partial_0+a_i^{(1)}\rangle$ of the algebra (15) we find the following solution of the system (10)

$$
\begin{gathered}
W^1=\frac{C_1^2-C_3^2}{-C_1\,\mathrm{tg}(C^1x_1+C^2)+C_3\,\mathrm{tg}(C_3x_1+C_4)},\\
W^2=-C_1C_3\frac{C_1\,\mathrm{tg}(C_3x_1+C_4)-C_3\,\mathrm{tg}(C_1x_1+C_2)}{-C_1\,\mathrm{tg}(C^1x_1+C^2)+C_3\,\mathrm{tg}(C_3x_1+C_4)},\\
W^3=(\varphi_{11}-W^1\varphi_1-W^2\varphi)e^{ax_0},
\end{gathered}
\tag{18}
$$

where $C_1,\ldots,C_4$ are arbitrary constants, $\varphi=\varphi(x_1)$, $\varphi_{11}=a\varphi$.

Theorem 4. *The system (10) is reduced to the system of disconnected heat equations*

$$
\vec z_0=\vec z_{11}\quad(\vec z=\vec z(x_0,x_1)=\{z^1,z^2,z^3\})
\tag{19}
$$

with the help of the nonlocal transformation

$$
\begin{gathered}
W^1=-\frac{z_{11}^1z^2-z^1z_{11}^2}{z_1^1z^2-z^1z_1^2},\quad W^2=-\frac{z_{11}^1z_1^2-z_1^1z_{11}^2}{z_1^1z^2-z^1z_1^2},\\
W^3=z_{11}^3+W^1z_1^3-W^2z^3.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Expressions (20) result in (after using the corresponding operator (7), (9)) the ansatz

$$
u=z^1\varphi(\omega)+z^3,\quad\omega=\frac{z^2}{z^1}
\tag{21}
$$

(z^1, z^2, z^3 are solutions of (19)), and the reduced equation is $\varphi''=0$. This means that

$$
u=C_1z^1+C_2z^2+C_3z^3.
\tag{22}
$$

So, we get just the well-known superposition principle for the heat equation.

Letting $W^2=W^3=0$ we get from (10) the Burger's equation

$$
W_0^1+2W^1W_1^1=W_{11}^1.
\tag{23}
$$

Using Hopf–Cole transformation one obtains solutions of equation (23) in the form

$$W^1 = -\partial_1 \ln f = -\frac{f_1}{f} \quad (f_0 = f_{11}). \tag{24}$$

This result in the operator

$$Q = f\partial_0 - f_1\partial_1. \tag{25}$$

Q-conditional symmetry of equation (1) under the operator (25) lead to the following statement.

Theorem 5. *If function f is an arbitrary solution of the heat equation (1) and u is the general integral of the ODE*

$$f_1 dx_0 + f dx_1 = 0, \tag{26}$$

then u satisfies equation (1).

Proof. We note that equation (26) is a perfect differential equation and therefore its general solution $u(x_0, x_1) = C$ possesses the following property

$$u_0 = f_1, \quad u_1 = f. \tag{27}$$

Having used (27) we obtain

$$u_0 - u_{11} = f_1 - f_1 = 0$$

and the theorem is proved.

Theorem 5 may be considered as another algorithm of generating solutions of equation (1). Indeed, even starting from a rather trivial solution of the heat equation $u = 1$ we get the chain of quite interesting solutions

$$1 \to x_1 \ \to \ x_0 + \frac{x_1^2}{2!} \ \to \ x_0 x_1 + \frac{x_1^3}{3!} \ \to \ \cdots, \tag{28}$$

and among them the solutions

$$\frac{x_1^{2m}}{(2m)!} + \frac{x_0}{1!}\frac{x_1^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{x_1^{2m-4}}{(2m-4)!} + \cdots + \frac{x_0^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_0^m}{m!}, \tag{29}$$

$$\begin{gathered}\frac{x_1^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{x_0}{1!}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{x_1^{2m-3}}{(2m-3)!} + \cdots \\ \cdots + \frac{x_0^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_0^m}{m!}\frac{x_1}{1!}.\end{gathered} \tag{30}$$

It will be also noted that supposing function v in (12) to be independent on x_1 and denoting

$$v = \frac{1}{w(x_0, u)} \tag{31}$$

we get instead of (12) the following remarkable nonlinear heat equation

$$w_0 = \partial_u (w^{-2} w_u). \tag{32}$$

One easily sees that the operator

$$Q = w(x_0, u)\partial_1 + \partial_u \tag{33}$$

sets the connection between equations (32) and (1):

$$\begin{gathered} w_0 - \partial_u(w^{-2}w_u) = \frac{1}{u_1}\partial_1\left(\frac{u_0 - u_{11}}{u_1}\right), \\ u_0 - u_{11} = \frac{1}{w}\int[w_0 - \partial_u(w^{-2}w_u)]du \end{gathered} \tag{34}$$

by means of the change of variables

$$w(x_0, u) = \frac{\partial x_1(x_0, u)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u(x_0, x_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{w(x_0, u)}. \tag{35}$$

This result has been obtained differently in [7, 8].

It suppose v from (12) to have the form

$$v = \varphi(x_0, x_1)u \tag{36}$$

then (12) is reduced to the Burger's equation for φ

$$\varphi_0 = 2\varphi\varphi_1 + \varphi_{11} \tag{37}$$

and one may say that operator

$$Q = \partial_1 + \varphi u\partial_u \tag{38}$$

sets the connection between equation (37) and (1) via the substitution

$$\varphi = f_1/f. \tag{39}$$

Letting

$$v = \varphi(x_0, x_1)u + h(x_0, x_1) \tag{40}$$

and substituting it into (12) one finds the Burger's equation (37) for function φ and the following equation for h

$$h_0 = 2h\varphi_1 + h_{11}. \tag{41}$$

System of equation (37), (41) was also obtained in [6] when considering the system (10). Having made the change of variables

$$\varphi = f_1/f, \quad h = (f_1/f)g - g_1 \tag{42}$$

we reduced (37), (41) to two disconnected heat equations

$$f_0 = f_{11}, \quad g_0 = g_{11}. \tag{43}$$

Now we consider how to linearise the equation (12) in general case. Let us introduce the notations

$$S^1(x_0, x_1, u, v) = v_0 - (v_{11} + 2vv_{1u} + v^2v_{uu}). \tag{44}$$

After changing the variables

$$v = -\frac{z_1}{z_u}, \quad z = z(x_0, x_1, u) \tag{45}$$

we get

$$S^1(x_0, x_1, u, v) = -\frac{1}{z_u}(\partial_1 + v\partial_u)S^2(x_0, x_1, u, z), \tag{46}$$

where

$$S^2(x_0, x_1, u, v) = z_0 - z_{11} + 2\frac{z_1}{z_u}z_{1u} - \frac{z_1^2}{z_u^2}z_{uu}. \tag{47}$$

Having applied the hodograph transformation

$$y_0 = x_0, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = z, \quad R = u \tag{48}$$

we get

$$S^2(x_0, x_1, u, z) = -\frac{1}{R_2}(R_0 - R_{11}), \tag{49}$$

where $R = R(y_0, y_1, y_2)$.

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
2. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?, в сб. Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН Украины, 1987, 4–16.
3. Фущич В.И., Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики, *Укр. мат. журн.*, 1991, **43**, № 11, 1456–1470.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности, *ДАН Украины*, 1990, № 7, 24–28.
5. Bluman G.W., Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. and Mech.*, 1969, **18**, № 11, 1025–1042.
6. Webb G.M., Lie symmetries of a coupled nonlinear Burger's–heat equation system, *J. Phys. A*, 1990, **23**, № 17, 3885–3894.
7. Rosen G., Nonlinear heat condition in solid H_2, *Phys. Rev. B*, 1979, **23**, № 4, 2398–2399.
8. Bluman G.W., Kumei S., On the remarkable nonlinear diffusion equation $\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u+b)^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, *J. Math. Phys.*, 1980, **21**, № 5, 1019–1023.

Generating solutions for nonlinear equations by the Legendre transformation

W.I. FUSHCHYCH, V.A. TYCHININ

Предложен новый метод размножения решений нелинейных уравнений, основанный на использовании их инвариантности относительно преобразований Лежандра.

1. The superposition principle for nonlinear equations is not fulfilled. That is why it is important to have a method of generating solutions starting from known ones, i.e. an algorithm of constructing solution when the partial solutions are known.

In the present paper we suggest a new method of generating solutions for nonlinear equations based on the use of their invariance with respect to Legendre transformation. For this aim, first of all, it is necessary to describe the equations which possess such property. Here we do not consider solution of this general problem, and list some first and second order equations invariant with respect to the Legendre transformation and use this property to construct new solutions from known ones.

In [1] there was accomplished the group-theoretical classification for nonlinear second order differential equations invariant under the Lorentz group $O(1,n)$ and the Poincaré group $P(1,n)$ and different their extensions. These equations have the important property due to which there exists simple algorithm of constructing new solution from known ones, or, in another words, there exists the procedure of generating solutions. We use the Legendre transformation for further classification of Lorentz and Poincaré invariant equations. In other words, we distinguish from the set of Lorentz and Poincaré invariant those equations which are additionally invariant with respect to Legendre transformation.

2. The Legendre-invariant equations. The Legendre transformation in the space of n independent variables we write in the form

$$u = y_\mu v_\mu - v, \quad v_\mu = \frac{\partial v}{\partial x_\mu}, \quad x_\mu = v_\mu, \quad \det(v_{\mu\nu}) \neq 0. \tag{1}$$

So, the first and second order derivatives are changing as

$$u_\mu = y_\mu, \quad u_{\mu\nu} = \det{}^{-1}(v_{\lambda\sigma}) a_{\mu\nu}(v_{\lambda\sigma}) \quad (\mu,\nu,\lambda,\sigma = \overline{0,n-1}). \tag{2}$$

If not declare another, summation is understood over repeated indexes,

$$\det(u_{\lambda\sigma}) = \det \begin{pmatrix} u_{00} & \cdots & u_{0,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n-1,0} & \cdots & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$a_{\mu\nu}(v_{\lambda\sigma})$ is an algebraic supplement to element $v_{\mu\nu}$.

The differential equation $L(x,u) = 0$ is called invariant with respect to Legandre transformation (1) when the following condition

$$L(x,u) = \lambda L(y,v) \tag{4}$$

Доклады АН Украины, 1992, № 7, С. 20–25

is fulfilled. Here λ is an arbitrary parameter or function of y, v, v_μ.

We list several sets of nonlinear equations invariant under the Lorentz group $O(1,n)$ and the Poincaré group $P(1,n)$ as well as the Legandre transformation. Consider equations

$$\begin{gathered}\det(u_{\mu\nu})\Box u \pm \operatorname{tr}(u_{\mu\nu}) = 0, \quad \Box u \pm \det(u_{\mu\nu}) \operatorname{tr}(u_{\mu\nu}) = 0,\\ \det{}^m(u_{\mu\nu}) \pm \det{}^{-mn}(u_{\lambda\sigma}) \det{}^m(a_{\mu\nu}(u_{\lambda\sigma})) = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}u_\mu u^\mu + x^2 + c = 0, \quad (x^2 = x_\mu x^\mu),\\ (x_\mu + u_\mu)(x^\mu + u^\mu) = x^2 + 2x_\mu u^\mu + u_\mu u^\mu = 0,\\ u^\mu u^\nu \det(u_{\lambda\sigma}) \pm x^\mu x^\nu a_{\mu\nu}(u_{\lambda\sigma}) = 0, \quad x^\mu x^\nu u_{\mu\nu} \det(u_{\lambda\sigma}) \pm u^\mu u^\nu a_{\mu\nu}(u_{\lambda\sigma}) = 0,\\ f(x^2) \det{}^m(u_{\lambda\sigma}) \pm f(u_\mu u^\mu) \det{}^{-nm}(u_{\lambda\sigma}) \det{}^m(a_{\mu\nu}(u_{\lambda\sigma})) = 0,\\ f(u_\mu u^\mu) \det{}^m(u_{\lambda\sigma}) \pm f(x^2) \det{}^{-nm}(u_{\lambda\sigma}) \det{}^m(a_{\mu\nu}(u_{\lambda\sigma})) = 0,\\ \left[1 + (x^2 - u_\mu u^\mu)\right] u_{11} + 2(u_0 - x_0)(u_1 - x_1)u_{10} -\\ - \left[1 - (x^2 - u^\mu u^\mu)\right] u_{00} = 0 \quad (\mu = 0, 1),\end{gathered} \tag{6}$$

where $\Box u = g_{\mu\nu} u^{\mu\nu}$ is d'Alambert operator,

$$u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u_\mu u_\nu, \quad \operatorname{tr}(u_{\mu\nu}) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu} u_{\mu\nu},$$

$(\mu, \nu = \overline{0, n-1})$, $g_{\mu\nu}$ is metric tensor of the space with signature $(+, -, \ldots, -)$, f is an arbitrary smooth function.

Let us list several equations which are invariant nor under the Lorentz group $O(1, n-1)$ not under Poincaré group $P(1, n-1)$, but are invariant with respect to Legendre transformation

$$\begin{gathered}\alpha^\mu(x_\mu + u_\mu) = 0, \quad \alpha^\mu(u_\nu)x_\mu + \alpha^\mu(x_\nu)u_\mu = 0,\\ g_{\mu\nu}[\alpha_\mu(x_\lambda) + \alpha_\mu(u_\lambda)][\alpha_\nu(x_\lambda) + \alpha_\nu(u_\lambda)] = 0,\\ \alpha^\mu x_\mu \det(u_{\lambda\sigma})\Box u \pm \alpha^\mu u_\mu \operatorname{tr}(u_{\lambda\sigma}) = 0,\\ \alpha^\mu(u_\nu)x_\mu \det(u_{\lambda\sigma})\Box u \pm \alpha^\mu(x_\nu)u_\mu \operatorname{tr}(u_{\lambda\sigma}) = 0,\\ \alpha^\mu x_\mu \Box u \pm \alpha^\mu u_\mu \det(u_{\lambda\sigma}) \operatorname{tr}(u_{\lambda\sigma}) = 0,\\ \alpha^\mu(u_\nu)x_\mu \det{}^m(u_{\lambda\sigma}) \pm \alpha^\mu(x_\nu)u_\mu \det{}^{-nm}(a_{\mu\nu}(u_{\lambda\sigma})) = 0,\\ u_{00}u_{11} - u_{10}^2 = u_{00}^{-1} u_{11}.\end{gathered} \tag{7}$$

α^μ are vector components. The method of generating solutions for equations (7) is unknown.

To prove invariance of equations (5), (6), (7) under Legendre transformation (1) it is necessary to verify fulfilment of relations (4). For example, equation

$$u_\mu u^\mu + x^2 + c = 0$$

is transformed under Legendre transformation into $y^2 + v_\mu v^\mu + c = 0$.

3. The generating solutions. Suppose we have a solution of nonlinear equation

$$u = \overset{(1)}{u}(x), \quad x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \det(\overset{(1)}{u}_{\mu\nu}) \neq 0. \tag{8}$$

Let us rewrite this solution, replacing x_μ for parameters θ_μ ($\mu = \overline{0, n-1}$). The formula of generating solutions resulting from Legendre transformation takes the form

$$\overset{(2)}{u} = \theta_\mu \overset{(1)}{u}_\mu(\theta) - \overset{(1)}{u}(\theta), \quad \overset{(1)}{u}_\mu(\theta) = x_\mu \quad (\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})). \tag{9}$$

To find exact solution $\overset{(2)}{u}(x)$ it is necessary to eliminate parameters θ in (9). So, the formula (9) gives the method for generating solutions.

Example 1. Consider an equation from the list given above

$$u_{00}u_{11} - u_{10}^2 = u_{00}^{-1}u_{11}. \tag{10}$$

This equation admits Lie algebra $\langle P_0, P_1, P_2, J_0, J_1, D_1, D_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_0, \quad P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_u, \quad J_0 = x_0\partial_u, \quad J_1 = x_1\partial_u, \\ &D_1 = x_1\partial_1, \quad D_2 = x_0\partial_0 + 2u\partial_u \end{aligned} \tag{11}$$

and consequently Lie symmetry of equation (10) gives the following formula of generating solutions:

$$\overset{(2)}{u} = e^{-2b}(\overset{(1)}{u}(e^b x_0 + \theta_0, e^a x_1 + \theta_1) + \varkappa_0 x_0 + \varkappa_1 x_1 + \theta_2), \tag{12}$$

where a, b, $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, θ_0, θ_1, θ_2 are group parameters.

One of partial solutions of equation (10) have the form

$$\overset{(1)}{u} = \frac{x_0^2}{2} \operatorname{cth} x_1. \tag{13}$$

It is easily convinced that $\det(\overset{(1)}{u}_{\mu\nu}) \neq 0$. Let us construct a new solution of equation (10) by using the Legandre transformation. Rewrite (13), replacing x_μ, ($\mu = 0, 1$) for parameters θ_μ, i.e.

$$\overset{(1)}{u} = \frac{\theta_0^2}{2} \operatorname{cth} \theta_1.$$

and make use of formulas (9) to obtain

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2}\theta_0^2 \operatorname{cth}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_1\theta_0^2 \operatorname{sh}^{-2}\theta_1, \\ &\theta_0 \operatorname{cth}\theta_1 = x_0, \\ &-\frac{1}{2}\theta_0^2 \operatorname{sh}^{-2}\theta_1 = x_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Exclude parameters by expressing them through x_μ from two lest equations of system (14). We obtain

$$-\frac{x_0^2}{2x_1} = \operatorname{ch}^2\theta_1,$$

or

$$\operatorname{th}\theta_1 = \frac{1}{x_0}\sqrt{x_0^2 + 2x_1}, \quad \theta_0 = \sqrt{x_0^2 + 2x_1}.$$

Substituting θ_0 and θ_1 into first equation of system (14), we get

$$\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2}x_0^2\frac{\sqrt{x_0^2+2x_1}}{x_0} + x_1 \operatorname{arth}\frac{\sqrt{x_0^2+2x_1}}{x_0}. \tag{15}$$

Designating

$$\omega = \sqrt{1+2\frac{x_1}{x_0}},$$

we write the solution in another form

$$\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2}x_0^2\omega + x_1 \operatorname{arth}\omega. \tag{15$'$}$$

It is not difficult to verify that function (15) satisfies the equation (10). Note that this solution cannot be constructed from (13) by generating it according to formula (12).

Example 2. Consider the equation

$$u_\mu u^\mu + x^2 + c = 0 \quad (\mu = \overline{0, n-1}). \tag{16}$$

c is an arbitrary constant. The maximal invariance algebra of equation (16) is $\langle P_0, J_{0a}, J_{ab}\rangle$:

$$P_0 = \partial_0, \quad J_{0a} = x_a\partial_0 + x_0\partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \quad (a, b = \overline{1, n-1}). \tag{17}$$

An ansatz of the form [1]

$$\begin{aligned} &u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_\mu x^\mu = x^2, \quad \omega_2 = (\beta_\mu x^\mu)^2 + (\gamma_\mu x^\mu)^2, \\ &\beta^2 = \gamma^2 = -1, \quad \beta\gamma = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

reduces n-dimensional PDE (16) to 2-dimensional PDE

$$\omega_1\varphi_1^2 - \omega_2\varphi_2^2 + 2\omega_2\varphi_1\varphi_2 + \frac{1}{4}(\omega_1 + c) = 0. \tag{19}$$

Construct the solution of equation (19) by using Legendre transformation

$$z = \omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2 - \varphi, \quad y_1 = \varphi_1, \quad y_2 = \varphi_2. \tag{20}$$

Then the equation (19) is transformed to the linear

$$\left(y_1^2 + \frac{1}{4}\right) z_1 - (y_2 - 2y_1y_2)z_2 + \frac{1}{4}c = 0. \tag{21}$$

The general solution of (21) is:

$$z = \Phi(2\operatorname{arctg} 2y_1 - 2\operatorname{arctg} 2(y_1 - y_2)) - \frac{1}{2}c\operatorname{arctg} 2y_1. \tag{22}$$

One gets the general solution of equation (19) by inverting (20)

$$\varphi = y_1z_1 + y_2z_2 - z, \quad \omega_1 = z_1, \quad \omega_2 = z_2,$$

or, substituting z from (22),

$$\omega_1 = \dot\Phi\left[\frac{1}{y_1^2+\frac14} - \frac{1}{(y_1-y_2)^2+\frac14}\right] - \frac14\frac{c}{y_1^2+\frac14},$$
$$\omega_2 = \dot\Phi\frac{1}{(y_1-y_2)^2+\frac14},$$
$$\varphi = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 - \Phi + \frac12 c\,\mathrm{arctg}\,2y_1,$$

where y_1, y_2 play the role of parameters and must be eliminate for obtaining the solution $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ in explicit form. To demonstrate the solutions of equation (16) generating process we choose Φ in simplest form

$$\Phi(\alpha) = k\alpha,$$

where k is an arbitrary constant. Then

$$z = 2k(\mathrm{arctg}\,2y_1 - \mathrm{arctg}\,2(y_1-y_2)) - \frac12 c\,\mathrm{arctg}\,2y_1.$$

So, corresponding partial solution of equation (21) have the form

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{u} &= (\omega_1+\omega_2)\sqrt{\frac{k-\frac14 c}{\omega_1+\omega_2} - \frac14} - \omega_2\sqrt{\frac{k}{\omega_2} - \frac14} - \\ &\quad - 2\left(k - \frac14 c\right)\mathrm{arctg}\,2\sqrt{\frac{k-\frac14 c}{\omega_1+\omega_2} - \frac14} + 2k\,\mathrm{arctg}\,2\sqrt{\frac{k}{\omega_2} - \frac14}.\end{aligned} \tag{23}$$

Writing $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ with ω_1 and ω_2 determined by (18) in variables θ_μ and make use of Legendre transformation (1), we obtain second solution

$$\begin{aligned}\overset{(2)}{u} &= \left[4\left(k-\frac14 c\right) - \omega_1 - \omega_2\right]\sqrt{\frac{k-\frac14 c}{4\left(k-\frac14 c\right)-\omega_1-\omega_2} - \frac14} - \\ &\quad - [4k-\omega_2]\sqrt{\frac{k}{4k-\omega_2} - \frac14} - \\ &\quad - 2\left(k-\frac14 c\right)\mathrm{arctg}\,2\sqrt{\frac{k-\frac14 c}{4\left(k-\frac14 c\right)-\omega_1-\omega_2} - \frac14} + \\ &\quad + 2k\,\mathrm{arctg}\,2\sqrt{\frac{k}{4k-\omega_2} - \frac14}.\end{aligned} \tag{24}$$

If solution (22) of the equation (21) is $\Phi = 0$, we get

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{u} &= -\frac12\omega_1\sqrt{\frac{c}{\omega_1} - \frac14} + c\,\mathrm{arctg}\,2\sqrt{\frac{c}{\omega_1} - \frac14}, \\ \overset{(2)}{u} &= (c-\omega_1)\sqrt{\frac{\omega_1}{c-\omega_1}} - c\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\omega_1}{c-\omega_1}}.\end{aligned} \tag{25}$$

Choosing invariants of equation (16) the functions

$$\omega_1 = \alpha_\mu x^\mu, \quad \omega_2 = x_\mu x^\mu = x^2,$$

we obtain the solutions

$$\overset{(1)}{u} = -\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2}, \quad \overset{(2)}{u} = -\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2}. \tag{26}$$

i.e. this solution is Legendre-invariant solution of equation (16).

Example 3. The equation

$$\det(u_{\mu\nu})\Box u + \mathrm{tr}\,(u_{\mu\nu}) = 0 \tag{27}$$

is invariant with respect to Legendre transformation. An ansatz

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_\mu x^\mu = x^2 \tag{28}$$

reduces (27) to ODE

$$8\dot{\varphi}\ddot{\varphi}^2 + \omega\ddot{\varphi}[4(n+1)\dot{\varphi}^2 - n + 1] + 2n\dot{\varphi}^3 - n\dot{\varphi} = 0.$$

Following the formula (9), from (28)

$$\overset{(1)}{u} = \varphi(\theta^2), \quad \theta^2 = \theta_\mu\theta^\mu \quad (\mu = \overline{0, n-1}),$$

we obtain

$$\overset{(2)}{u} = \theta_\mu\varphi_\mu(\theta^2) - \varphi(\theta^2), \quad \varphi_\mu(\theta^2) = x_\mu. \tag{29}$$

Hence we find

$$\varphi_\mu = 2\theta_\mu\dot{\varphi}, \quad x^2 = 4\theta^2(\dot{\varphi})^2, \tag{30}$$

and formula (29) take the form

$$\overset{(2)}{u} = \frac{1}{2}x^2\dot{\varphi}^{-1}(\psi(x^2)) - \varphi(\psi(x^2)). \tag{31}$$

1. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

Nonlocal symmetry and generating solutions for Harry–Dym type equations

W.I. FUSHCHYCH, V.A. TYCHININ

Изучена нелиевская симметрия уравнений $u_0 = f(u)u_{111}$, $w_0 = g(w_1)w_{111}$, выделены уравнения, допускающие нелокальную линеаризацию; установлены формулы размножения решений. Для редукции нелинейных уравнений применяется нелиевский анзац $u = h(x)\dot\varphi(\omega) + f(x)\varphi(\omega) + g(x)$.

1. Let us consider two classes of one-dimensional third order nonlinear equations

$$u_0 - f(u)u_{111} = 0, \tag{1}$$

$$w_0 - g(w_{11})w_{111} = 0, \tag{2}$$

$$u_\mu = \partial_\mu u = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \quad u_{\underbrace{1\ldots1}_{n}} = \partial_1^n u = \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \quad w_\mu = \partial_\mu w = \frac{\partial w}{\partial x_\mu},$$

$$w_{\underbrace{1\ldots1}_{n}} = \partial_1^n w = \frac{\partial^n w}{\partial x_1^n} \quad (\mu = 0, 1,\ n \in \mathbb{N}),$$

where $f(u)$, $g(w_{11})$ are arbitrary smooth functions.

In the present paper linearizable equations are picked out from the sets of equations (1) and (2) by means of nonlocal transformations. Non-Lie symmetry of equations (1), (2) is investigated. The formulas of generating solutions for nonlinear equations belonging to classes (1), (2) are obtained. Non-Lie ansatz

$$u = h(x)\dot\varphi(\omega) + f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad x = (x_0, x_1), \quad \dot\varphi(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}, \tag{3}$$

which should be consider as the generalization of ansatz [1]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$$

is used for reducing equations (1), (2) to ODE. Some sets of exact partial solutions for nonlinear equations are constructed.

Note 1. The Eq. (1) is equivalent to equation

$$z_0 - \partial_1^3 c(z) = 0 \tag{4}$$

The connection between these equations is given by transformation

$$c(z) = u. \tag{4a}$$

Thereby, the equality

$$f(u) = \dot c(c^{-1}[u])$$

Доклады АН Украины, 1992, № 9, С. 24–30.

holds. Here $c^{-1}[u]$ is the function inverse to $c(u)$. In that case, when $f(u) = u^3$, $c(z) = z^{-\frac{1}{2}}$, the Eq. (4) coincides with the known Harry–Dym equation [2].

2. Nonlocal symmetry. Consider the Eq. (4)

$$z_0 = \partial_1^3 c(z) = \partial_1^2(\dot{c}(z) z_1).$$

The substitution

$$z = w_{11} \tag{5a}$$

reduces (4) to equation

$$w_0 = \dot{c}(w_{11}) w_{111}. \tag{5}$$

Making use the Euler–Ampere transformation

$$w = y_1 v_1 - v, \quad x_1 = v_1, \quad x_0 = y_0, \quad v = v(y_0, y_1), \quad v_{11} \neq 0, \tag{6}$$

under Eq. (5), we get

$$v_0 = \dot{c}(v_{11}^{-1}) v_{11}^{-3} v_{111}. \tag{7}$$

Using the substitution

$$v_{11} = z(y_0, y_1) \tag{7a}$$

in equation (7), twice differentiated on y_1, we get

$$z_0 = \partial_1^2 \left(\dot{c}(z^{-1}) z^{-3} z_1 \right). \tag{8}$$

It follows from (8), that transformations (5a), (6), (7a) do not take out any Eq. (4) beyond the this class of equations, none the less the set of Eq. (4) is not invariant under these transformations. If function $\dot{c}(z^{-1})z^{-3}$ in (8) satisfies the condition

$$\dot{c}(z^{-1}) z^{-3} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}. \tag{9a}$$

then Eq. (4) is linearisable. When the condition

$$\dot{c}(z) = \dot{c}(z^{-1}) z^{-3} \tag{9b}$$

holds, then the Eq. (8) coincides with initial equation (4), i.e. these equations are invariant with respect to nonlocal transformations (5a), (6), (7a).

The condition (9b) allows to describe all the equations of the class (4) which are invariant with respect to transformations (5a), (6), (7a).

Theorem 1. *The Eq. (4) is invariant with respect to transformations. (5a), (6), (7a), if it has the form*

$$z_0 = \partial_1^2 \left(z^{-\frac{1}{2}} \varphi(\ln z) z_1 \right). \tag{10}$$

Here $\varphi(\alpha)$ is an arbitrary smooth even function.

Corollary 1. *The Eq. (1) is invariant with respect to transformations (4a), (5a), (6), (7a), (4a) if it has the form*

$$u_0 = \left(c^{-1}[u] \right)^{-\frac{3}{2}} \varphi\left(\ln c^{-1}[u] \right) u_{111}, \tag{11}$$

where $c^{-1}[u]$ *is the function inverce to* $c(u)$ *and it is determined implicitly from the formula*

$$u = \int z^{-\frac{3}{2}} \varphi(\ln z) dz. \tag{12}$$

Example 1. From the theorem 1 and the corollary 1 under $\varphi(\alpha) = 1$ we get the following invariant equations

$$z_0 = \partial_1^2 \left(-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z_1 \right) = \partial_1^3 \left(z^{-\frac{1}{2}} \right), \tag{13}$$

$$u_0 = u^3 u_{111}. \tag{14}$$

So, Eq. (13) is known as Harry–Dym equation. Letting $\varphi(\alpha) = \cos\alpha$, we obtain the equation

$$z_0 = \partial_1^2 \left(z^{-\frac{3}{2}} \cos\ln z z_1 \right) \tag{15}$$

and corresponding to it equation of the class (1)

$$u_0 = \left(c^{-1}[u] \right)^{-\frac{3}{2}} \cos\ln \left(c^{-1}[u] \right) u_{111}. \tag{16}$$

Here $c^{-1}[u]$ is determined implicitly by formula

$$u = \frac{4}{5} \left[\sin\ln z - \frac{1}{2} \cos\ln z \right] z^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

So, we establish that the equations

$$u_0 = u^{\frac{3}{2}} u_{111}, \quad z_0 = \partial_1^3 \left(z^{-2} \right), \quad w_0 = w_{11}^{-3} w_{111} \tag{18a,b,c}$$

are reduced to the linear equation

$$v_0 = v_{111} \quad (\lambda = 1) \tag{19}$$

and that, in particular, the Harry–Dym equation and connected with it equations

$$u_0 = u^3 u_{111}, \quad z_0 = \partial_1^3 \left(z^{-\frac{1}{2}} \right), \quad w_0 = w_{11}^{-\frac{3}{2}} w_{111} \tag{20a,b,c}$$

are invariant with respect to corresponding nonlocal transformations.

3. The nonlocal superposition and the generating solutions.

Theorem 2. *The solutions superposition formula for Eq. (18a)*

$$u_0 = u^{\frac{3}{2}} u_{111} \tag{18a}$$

has the form

$$\overset{(3)}{u}(x_0, x_1) = \overset{(1)}{u}(x_0, \tau^1) + \overset{(2)}{u}(x_0, \tau^2) + 2\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0, \tau^1) \overset{(2)}{u}(x_0, \tau^2)}, \tag{21a}$$

$$\frac{d\tau^1}{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0, \tau^1)}} = \frac{d\tau^2}{\sqrt{\overset{(2)}{u}(x_0, \tau^2)}}, \tag{21b}$$

$$\tau^1 + \tau^2 = x_1, \tag{21c}$$

$$\tau_0^1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\tau^1)\,\overset{(2)}{u}(x_0,\tau^2)}}{\sqrt{\overset{(1)}{u}(x_0,\tau^1)} + \sqrt{\overset{(2)}{u}(x_0,\tau^2)}} \left[\overset{(1)}{u}_{11}(x_0,\tau^1) + \overset{(2)}{u}_{11}(x_0,\tau^2)\right]. \tag{21d}$$

Let us illustrate the efficiency of the formula (21).

Example 2. Let us take, as initial, the simplest stationary solutions of Eq. (18a)

$$\overset{(1)}{u}(\overset{1}{x}_1) = (\overset{1}{x}_1)^2, \quad \overset{(2)}{u}(\overset{2}{x}_1) = 4(\overset{2}{x}_1)^2.$$

Replace $\overset{1}{x}_1$ and $\overset{2}{x}_1$ in this solutions for parameters τ^1, τ^2

$$\overset{(1)}{u} = (\tau^1)^2, \quad \overset{(2)}{u} = 4(\tau^2)^2.$$

The differential Eq. (21b) takes the form

$$\frac{d\tau^2}{d\tau^1} = 2\frac{\tau^2}{\tau^1} \tag{22}$$

and has the general solution

$$\tau^2 = -\frac{(\tau^1)^2}{2\lambda(x_0)}. \tag{23}$$

Here $\lambda(x_0)$ is an arbitrary smooth function. The equation for τ^1

$$(\tau^1)^2 - 2\lambda\tau^1 + 2\lambda x_1 = 0 \tag{24}$$

we obtain making use of (21c) and replacing in (23) τ^2 for the expression $x_1 - \tau^1$. From (24) we find

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = [\tau^1 + 2\tau^2]^2 = [2x_1 - \tau^1]^2 = \left[2x_1 - \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda x_1}\right]^2. \tag{25}$$

The function $\lambda(x_0)$ can be defined more precisely from the condition that τ^1 is the solution of Eq. (21d). As a result, we get the equation for $\lambda(x_0)$

$$\dot{\lambda} = -6\lambda.$$

Therefore

$$\lambda = c\exp(-6x_0),$$

where c is an arbitrary constant. So, the new solution $\overset{(3)}{u}$, which is constructed from $\overset{(1)}{u}$ and $\overset{(2)}{u}$, is of the form

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = \left[2x_1 - ce^{-6x_0} \pm \sqrt{c^2e^{-12x_0} - 2cx_1e^{-6x_0}}\right]^2. \tag{26}$$

Example 3. Let us choose, as initial, the following two solutions of Eq. (18a):

$$\overset{(1)}{u} = x_1^2, \quad \overset{(2)}{u} = 9x_1^2$$

and rewrite them in variables τ^1 and τ^2

$$\overset{(1)}{u} = (\tau^1)^2, \quad \overset{(2)}{u} = 9(\tau^2)^2.$$

Unlike the previous example when solving ODE (21b), one obtains the cubic equation for τ^1

$$(\tau^1)^3 - \lambda\tau^1 + \lambda x_1 = 0, \quad \lambda = \lambda(x_0). \tag{27}$$

The real solution of the Eq. (27) can be written in the form

$$\tau^1 = -3\lambda^{-1}\cos\frac{1}{3}\arccos\lambda x_1, \quad \lambda = \frac{1}{2}3\sqrt{3}\lambda^{-\frac{1}{2}}(x_0). \tag{27a}$$

The solution $\overset{(3)}{u}$

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = [3x_1 - 2\tau^1]^2 = 9\left[x_1 - \frac{2}{3}\tau^1\right]^2 = 9\left[x_1 + 2\lambda^{-1}\cos\frac{1}{3}\arccos\lambda x_1\right]^2 \tag{28}$$

we find from the formula (21a). The condition on $\lambda(x_0)$ is of the form

$$\dot\lambda = 12\lambda.$$

Hence

$$\lambda = c\exp(12x_0).$$

c is an arbitrary constant. Finally, one can write solution $\overset{(3)}{u}$ in the form

$$\overset{(3)}{u}(x_0,x_1) = 9\left[x_1 + 2ce^{-12x_0}\cos\frac{1}{3}\arccos\left(cx_1e^{12x_0}\right)\right]^2. \tag{29}$$

4. The non-group generating of solutions. For equations of the class (11) we can write formula of generating solutions. Let $\overset{(1)}{u}(x_0,x_1)$ be a known partial solution of nonlinear Eq. (11) and $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$ is its new solution, then the following assertion holds true.

Theorem 3. *The formula of generating solutions for Eq. (11), giving by nonlocal symmetry (4a), (5a), (6), (7a), (4a) has the form*

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \left[x_1\tau - \int[\overset{(1)}{u}(x_0,\tau)]^{-2}d\tau\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{30a}$$

$$= [\overset{(1)}{u}(x_0,\tau)]^{-1}, \tag{30b}$$

$$x_1 = \int[\overset{(1)}{u}(x_0,\tau)]^{-2}d\tau, \tag{30c}$$

$$\tau_0 = \partial_1\left(\tau_1^{-\frac{3}{2}}\tau_{11}\right). \tag{30d}$$

Let us demonstrate the efficiency of the formula (30) for Eq. (20a) on several simple examples.

Example 4. Let $\overset{(1)}{u}$. Then

$$\overset{(2)}{u}(x_0,\tau) = \left[x_1\tau - \int\left(\int d\tau\right)d\tau\right]^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = \int d\tau = \tau + \lambda_1(x_0).$$

$\lambda_1(x_0)$ is an arbitrary function. Calculating the integral in the first equality and resolving the second one with respect to τ, we get

$$\overset{(2)}{u}(x_0,\tau) = \left[x_1\tau - \frac{1}{2}\tau^2 - \lambda_1\tau + \lambda_2(x_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

$$\tau = x_1 - \lambda_1(x_0). \tag{32}$$

Having excluded parameter τ from equalities of the system (31), (32) we get the solution $\overset{(2)}{u}(x_0,x_1)$ in explicit form

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = \left(\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \lambda_3 = \mathrm{const}. \tag{33}$$

Example 5. The function

$$\overset{(1)}{u}(x_0,x_1) = \frac{1}{4}(\lambda_1 - x_1)^2 \tag{34}$$

is the solution of the Eq. (20a). λ_1 is an arbitrary constant. It follows from relations (30b,c), that

$$\overset{(2)}{u}(x_0,\tau) = 4(\lambda_1 - \tau)^{-2}, \tag{35}$$

$$x_1 = \frac{16}{3}(\lambda_1 - \tau)^{-3} + \lambda_2(x_0). \tag{36}$$

Resolving (36) with respect to τ, one obtain

$$\tau = h(x_1 - \lambda_2(x_0))^{-\frac{1}{3}} + \lambda_1, \quad h = -\left(\frac{3}{16}\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{37}$$

Substituting τ from the formula (37) into condition (30d), one gets

$$\dot{\lambda}_2 = -1.$$

Let us substitute specified value of τ into the formula (35) and find the solution $\overset{(2)}{u}$

$$\overset{(2)}{u}(x_0,x_1) = k(x_0 + x_1)^{\frac{2}{3}}, \quad k = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{38}$$

5. The non-Lie ansätze. Let us consider the ansatz of the form

$$w = h(x)\dot{\varphi}(\omega) + f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad x = (x_0,x_1), \quad \dot{\varphi}(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega} \tag{39}$$

for constructing of solutions for Eq. (20c):

$$w_0 - w_{11}^{-\frac{3}{2}}w_{111} = 0. \tag{20c}$$

Let us summarize the results obtained for Eq. (20c) in table.

	ω	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
1	x_0	0	$\frac{x_1^{-2}}{6}\varphi^{-3}(\omega)$	$\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)$,
2	$x_0+x_1^{-1}$	1	$-2x_1$	$\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)$,
3	$\ln x_0+x_1^{-1}$	$x_0^{-\frac13}$	$-2x_1x_0^{-\frac13}$	$\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)$,
4	$\ln x_0+\operatorname{arth} x_1$	$-x_0^{-\frac13}$	$2x_1x_0^{-\frac13}$	$x_0^{-\frac13}\Big\{-2\int\varphi(\omega)dx_1+2\int\varphi(\omega)\times \times\frac{x_1^2+1}{x_1^2-1}dx_1+8\int\Big(\int\varphi(\omega)\frac{x_1}{(x_1^2-1)^2}dx_1\Big)\times \times dx_1+\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)\Big\}$,
5	$\ln x_0-\operatorname{arctg} x_1$	$x_0^{-\frac13}$	$-2x_1x_0^{-\frac13}$	$x_0^{-\frac13}\Big\{2\int\varphi(\omega)dx_1-2\int\varphi(\omega)\times \times\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}dx_1-8\int\Big(\int\varphi(\omega)\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2}dx_1\Big)\times \times dx_1+\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)\Big\}$,
6	$x_0+\operatorname{arth} x_1$	1	$-2x_1$	$-2\int\varphi(\omega)dx_1+2\int\varphi(\omega)\frac{1+x_1^2}{1-x_1^2}dx_1- -8\int\Big(\int\varphi(\omega)\frac{x_1}{(1-x_1^2)^2}dx_1\Big)dx_1+ +\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)$,
7	$x_0-\operatorname{arctg} x_1$	1	$-2x_1$	$-2\int\varphi(\omega)dx_1-2\int\varphi(\omega)\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}dx_1+ +8\int\Big(\int\varphi(\omega)\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2}dx_1\Big)dx_1+ +\lambda_1(x_0)x_1+\lambda_2(x_0)$,

The ansätze 1–3 reduce the PDE (20c) to such ODEs:

1. $\dot\varphi=0,\quad \dot\lambda_1=-4\varphi,\quad \dot\lambda_2=0,$
2. $[2x_1\partial_\omega-1]\left[2(\dddot\varphi)^{-\frac12}-\ddot\varphi\right]=0,\quad \dot\lambda_1=0,\quad \dot\lambda_2=0,$
3. $[\partial_w-2x_1]\left[\frac23\varphi+\dot\varphi-2(\dddot\varphi)^{-\frac12}\right]=0,\quad \dot\lambda_1=0,\quad \dot\lambda_2=0,$

Before to reduce the Eq. (20c) using ansätze 4–7, let us make substitution putting

$$(\dddot\varphi(\omega))^{-\frac12}=\psi(\omega).$$

As a result we get other reduced ODEs:

4. $\dfrac13\psi-\dot\psi+\psi^3(4\dot\psi-\dddot\psi)=0,$
5. $\dfrac13\psi-\dot\psi+\psi^3(4\dot\psi+\dddot\psi)=0,$
6. $\dot\psi-\psi^3(4\dot\psi-\dddot\psi)=0,$
7. $\dot\psi+\psi^3(4\dot\psi+\dddot\psi)=0,$

It is known [1], that infinitesimal operator

$$X=\xi^i(x,w)\partial_i+\eta(x,w)\partial_w\quad (i=\overline{1,n}),$$

which generates a Lie ansatz, corresponds to the equation

$$Q[w] = \xi^i(x,w)w_i - \eta(x,w) = 0. \tag{40}$$

Equations of the form (40) correspond to non-Lie ansätze 1–7:

1. $x_1 w_{111} + 4w_{11} = 0,$
2. $w_{110} + x_1^2 w_{111} + 4x_1 w_{11} = 0,$
3. $x_0 w_{110} + x_1^2 w_{111} + 4\left(x_1 - \dfrac{1}{6}\right) w_{11} = 0,$
4. $x_0 w_{110} + (x_1^2 - 1) w_{111} + 4\left(x_1 - \dfrac{1}{6}\right) w_{11} = 0,$
5. $x_0 w_{110} + (x_1^2 + 1) w_{111} + 4\left(x_1 - \dfrac{1}{6}\right) w_{11} = 0,$
6. $w_{110} + (x_1^2 - 1) w_{111} + 4x_1 w_{11} = 0,$
7. $w_{110} + (x_1^2 + 1) w_{111} - 4x_1 w_{11} = 0.$

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в сб. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики, 1981, 6–27.
2. Magri F., A simple model of the integrable Hamiltonian equation, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 5, 1156–1162.

Формула размножения решений уравнений Кортевега-де Фриза

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ТЫЧИНИН, Н.И. СЕРОВ

Предложена формула размножения решений уравнения Кортевега-де Фриза. С помощью указанной формулы построены множества решений данного уравнения. Решены уравнения Риккати, которые появляются в процессе размножения.

В настоящей работе предложена конструктивная и простая формула размножения решений уравнения Кортевега-де Фриза (KdV)

$$L_1(u) = u_0 + 6uu_1 + u_{111} = 0. \tag{1}$$

Теорема. *Если* $\overset{(1)}{u}$ *— решение KdV, то*

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2z_1, \quad z_1 = \partial z/\partial x_1, \tag{2}$$

есть решение уравнения KdV, функция z является решением уравнения Риккати

$$L_2(z) = z_1 - z^2 - \overset{(1)}{u} \tag{3}$$

и удовлетворяет дополнительному условию

$$L_3(z) = z_0 - 6z^2 z_1 + z_{111} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) совместны тогда и только тогда, когда $\overset{(1)}{u}$ *— решение уравнения KdV.*

Доказательство теоремы сводится к подстановке (2) в (1), после чего получаем

$$L_1(\overset{(2)}{u}) = \lambda_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + \lambda_2 L_2(\overset{(1)}{z}, \overset{(1)}{u}) + \lambda_3 L_3(\overset{(1)}{z}), \tag{5}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 12(\overset{(1)}{z}_{11} + \overset{(1)}{z}_1 \partial_1), \quad \lambda_3 = -2\partial_1.$$

Условие совместности уравнений (3) и (4) имеет вид

$$z_{10} - z_{01} = k_1 L_1(\overset{(1)}{u}) + k_2 L_2(\overset{(1)}{z}, \overset{(1)}{u}) + k_3 L_3(\overset{(1)}{z}), \tag{6}$$

где

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \partial_{111} + 6\overset{(1)}{u}\partial_1 + 6\overset{(1)}{z}_{11} - 12\overset{(1)}{z}\,\overset{(1)}{z}_1, \quad k_3 = 2\overset{(1)}{z}.$$

Из формул (5), (6) следует утверждение теоремы.

Укр. мат. журн., 1992, **44**, № 5, С. 716–719.

Проиллюстрируем эффективность формулы (2) на простейших примерах. Очевидно, что константа $\overset{(1)}{u} = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$, является решением уравнения (1). Тогда по формуле (2) находим $\overset{(2)}{u} = \lambda - 2\overset{(1)}{z}_1$. Чтобы в явном виде найти $\overset{(2)}{u}$ необходимо решить уравнение Риккати

$$\overset{(1)}{z} = \overset{(1)}{z}{}^2 + \lambda. \tag{7}$$

Возможны три случая: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = 1$. Рассмотрим подробно первый случай. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\overset{(1)}{z} = \frac{-1}{x_1 + c(x_0)}, \tag{8}$$

где $C(x_0)$ — постоянная интегрирования по x_1, которую необходимо определить из условия (4). Подставляя (8) в (4), находим $\dot{c} = 0$. Так как уравнение (4) инвариантно относительно трансляций по x_1, то не умаляя общности можно положить $c = 0$. Таким образом, из очевидного тривиального решения $\overset{(1)}{u} = 0$ по формуле (2) находим стационарное решение $\overset{(2)}{u} = 2x_1$ уравнения KdV.

Повторим эту процедуру еще раз:

$$\overset{(3)}{u} = \overset{(2)}{u} - 2z_1, \tag{9}$$

где

$$z_1 = z^2 + \overset{(2)}{u}, \tag{10}$$

$$z_0 - 6z^2 z_1 + z_{111} = 0. \tag{11}$$

Решением уравнения Риккати (10) является функция

$$z = \frac{c(x_0) - 2x_1^3}{x_1(c(x_0) + x_1^3)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), находим $\dot{c} = 12$. Тогда

$$\overset{(3)}{u} = \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2}. \tag{13}$$

Если продолжать этот процесс, то на n-м шаге получим формулу

$$\overset{(n+1)}{u} = \overset{(n)}{u} - 2\overset{(1)}{z}_1, \tag{14}$$

$$\overset{(1)}{z}_1 = \overset{(1)}{z}{}^2 + \overset{(n)}{u}, \tag{15}$$

$$\overset{(1)}{z}_0 - 6\overset{(n)}{z}{}^2\overset{(n)}{z}_1 + \overset{(n)}{z}_{111} = 0. \tag{16}$$

Основная трудность применения формул (14)–(16) для конкретного размножения решений уравнения (1) заключается в решении уравнения Риккати (15). Однако, если $\overset{(1)}{u} = \lambda = \text{const}$, то удается построить общее решение уравнения (15) для произвольного $\overset{(n)}{u}$, найденного по формуле (14):

$$\overset{(n)}{z} = -\overset{(n-1)}{z} - \overset{(n-1)}{v}, \tag{17}$$

где

$$\overset{(n+1)}{v} = \left(\ln \int \exp\left\{2\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\int \overset{(m)}{v}\,dx_1\right\}dx_1\right)_1, \tag{18}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \overset{(0)}{v} = 0.$$

Если доопределить функции $\overset{(n)}{z}$ относительно переменной x_0 с помощью условия (16), то из (14) получим

$$\lambda \to \lambda + 2(\ln \overset{(1)}{w})_{11} \to \lambda + 2(\ln \overset{(2)}{w})_{11} \to \cdots,$$

где $(\ln w)_1 = v$, или

$$\overset{(2n)}{u} = \lambda + 2\sum_{m=0}^{n}\overset{(2m)}{v}_1, \qquad \overset{(2n+1)}{u} = \lambda + 2\sum_{m=0}^{n}\overset{(2m+1)}{v}_1, \tag{19}$$

где $v_1 = \partial v/\partial x_1$.

Таким образом, используя формулы (18), (19), имеем цепочку решений

$$0 \to \frac{-2}{x_1^2} \to \frac{6(24x_0x_1 - x_1^4)}{(12x_0 + x_1^3)^2} \to \cdots.$$

Аналогично получим следующие две цепочки решений:

$$1 \to 1 - \frac{2}{\cos^2(x_1 - 2x_0)} \to$$
$$\to 1 - \frac{16[(x_1 + 6x_0)\sin 2(x_1 - 2x_0) + \cos 2(x_1 - 2x_0) + 1]}{[2(x_1 + 6x_0) + \sin 2(x_1 - 2x_0)]^2} \to \cdots,$$
$$-1 \to -1 + \frac{2}{\operatorname{ch}^2(x_1 + 2x_0)} \to$$
$$\to -1 + \frac{16[(x_1 - 6x_0)\operatorname{sh} 2(x_1 + 2x_0) - \operatorname{ch} 2(x_1 + 2x_0) - 1]}{[2(x_1 - 6x_0) + \operatorname{sh} 2(x_1 + 2x_0)]^2} \to \cdots.$$

Итак, зная решения уравнения Риккати, по формуле (2) строим решения KdV. Следует отметить, что предложенная формула размножения решений является следствием нелокальной симметрии уравнения (1). Лиевская симметрия уравнения (1) дает такие формулы размножения:

трансляции —

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0 + \theta_0; x_1 + \theta_1), \tag{20}$$

галилеевские преобразования —

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u}(x_0; x_1 + \theta x_0) - \frac{1}{6}\theta, \tag{21}$$

масштабные-преобразования —

$$\overset{(2)}{u} = a^2 \overset{(1)}{u}(x_0 a^3; x_1 a), \tag{22}$$

где θ, θ_0, θ_1, a — групповые параметры.

Объединяя формулу (2) с формулами (20), (21), (22), легко построить широкие классы точных (солитонных и несолитонных) решений уравнения KdV. В частности, решение

$$u = -1 + \frac{2}{\mathrm{ch}^2(x_1 + 2x_0)}$$

после размножения с помощью формул (20)–(22), где $\theta = -6$, $\theta_0 = 0$, принимает вид классического солитонного решения

$$u = \frac{2a^2}{\mathrm{ch}^2 a(x_1 - 4a^2 x_0 + \theta_1)}.$$

Очевидно, что формула (2) не является единственной для уравнения KdV. Например, формулы вида

$$\overset{(2)}{u} = \overset{(1)}{u} - 2(\overset{(1)}{z}{}^2 + \overset{(1)}{k}), \quad \overset{(1)}{z}_1 = \overset{(2)}{z}{}^2 + \overset{(1)}{k} + \overset{(1)}{u},$$
$$\overset{(1)}{z}_0 - 6(\overset{(2)}{z}{}^2 + \overset{(1)}{k})\overset{(1)}{z} + \overset{(1)}{z}_{111} = 0$$

также дают размножение решений уравнения (1).

Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$, $G(1,n)$

W.I. FUSHCHYCH, I.A. YEGORCHENKO

Functional bases of second-order differential invariants of the Euclid, Poincaré, Galilei, conformal, and projective algebras are constructed. The results obtained allow us to describe new classes of nonlinear many-dimensional invariant equations.

0. Introduction

The concept of the invariant is widely used in various domains of mathematics. In this paper, we investigate the differential invariants within the framework of symmetry analysis of differential equations.

Differential invariants and construction of invariant equations were considered by S. Lie [1] and his followers [2, 3]. Tresse [2] had proved the theorem on the existence and finiteness of a functional basis of differential invariants. However, there exist quite a few papers devoted to the construction in explicit form of differential invariants for specific groups involved in mechanics and mathematical physics.

Knowledge of differential invariants of a certain algebra or group facilitates classification of equations invariant with respect to this algebra or group. There are also some general methods for the investigation of differential equations which need tide explicit form of differential invariants for these equations' symmetry groups (see, e.g., [3, 4]).

A brief review of our investigation of second-order differential invariants for the Poincaré and Galilei groups is given in [5, 6]. Our results on functional bases of differential invariants are founded on the Lemma about functionally independent warrants for the proper orthogonal group and two n-dimensional symmetric tensors of the order 2.

We should like to stress that we consider functionally independent invariants of but not irreducible ones, as in the classical theory of invariants.

Bases of irreducible invariants for the group $O(3)$ and three-dimensional symmetric tensors and vectors are adduced in [7].

The definitions of differential invariants differ in various domains of mathematics, e.g. in differential geometry and symmetry analysis of differential equations. Thus, we believe that some preliminary notes are necessary, though these formulae and definitions can be found in [8, 9, 10].

We deal with Lie algebras consisting of the infinitesimal operators

$$X = \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta^r(x,u)\partial_{u^r}. \tag{0.1}$$

Here $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$. We usually mean the summation over the repeating indices.

Acta Appl. Math., 1992, **28**, 69–92.

Definition 1. *The function*

$$F = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}),$$

where $\underset{k}{u}$ *is the set of all kth-order partial derivatives of the function* u *is called a differential invariant for the Lie algebra* L *with basis elements* X_i *of the form (0.1)* ($L = \langle X_i \rangle$) *if it is an invariant of the lth prolongation of this algebra:*

$$\overset{l}{X}_s F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) = \lambda_s(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) F, \tag{0.2}$$

where the λ_s *are some functions; when* $\lambda_i = 0$, F *is called an absolute invariant; when* $\lambda_i \neq 0$, *it is a relative invariant.*

Further, we deal mostly with absolute differential invariants and when writing 'differential invariant' we mean 'absolute differential invariant'.

Definition 2. *A maximal set of functionally independent invariants of order* $r \leq l$ *of the Lie algebra* L *is called a functional basis of the lth-order differential invariants for the algebra* L.

We consider invariants of order 1 and 2 and need the first and second prolongations of the operator X (0.1) (see, e.g., [8–11])

$$\overset{1}{X} = X + \eta^r_i \partial_{u^r_i}, \quad \overset{2}{X} = \overset{1}{X} + \eta^r_{ij} \partial_{u^r_{ij}}$$

the coefficients η^r_i and η^r_{ij} taking the form

$$\eta^r_i = (\partial_{x_i} + u^s_i \partial_{u^s})\eta^r - u^r_k(\partial_{x_i} + u^s_i \partial_{u^s})\xi^k,$$
$$\eta^r_{ij} = (\partial_{x_i} + u^s_j \partial_{u^s} + u^s_{jk} \partial_{u^s_k})\eta^r_i - u^r_{ik}(\partial_{x_j} + u^s_j \partial_{u^s})\xi^k.$$

While writing out lists of invariants, we shall use the following designations

$$\begin{aligned} & u_a \equiv \frac{\partial u}{\partial x_a}, \quad u_{ab} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b}, \\ & S_k(u_{ab}) \equiv u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} \cdots u_{a_{k-1} a_k} u_{a_k a_1}, \\ & S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}) \equiv u_{a_1 a_2} \cdots u_{a_{j-1} a_j} v_{a_j a_{j+1}} \cdots v_{a_k a_1}, \\ & R_k(u_a, u_{ab}) \equiv u_{a_1} u_{a_k} u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} \cdots u_{a_{k-1} a_k} u_{a_k a_1}. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Here and further we mean summation over the repeated indices from 1 to n. In all the lists of invariants, k takes on the values from 1 to n and j takes the values from 0 to k. We shall not discern the upper and lower indices with respect to summation: for all Latin indices

$$x_a x_a \equiv x_a x^a \equiv x^a x_a = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

1. Differential invariants for the Euclid algebra

The Euclid algebra $AE(n)$ is defined by basis operators

$$\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a. \tag{1.1}$$

Here and further, the letters a, b, c, d, when used as indices, take on the values from 1 to n, n being the number of space variables ($n \geq 3$).

The algebra $AE(n)$ is an invariance algebra for a wide class of many-dimensional scalar equations involved in mathematical physics — the Schrödinger, heat, d'Alembert equations, etc.

In this section, we shall explain in detail how to construct a functional basis of the second-order differential invariants for the algebra $AE(n)$. This basis will be further used to find invariant bases for various algebras containing the Euclid algebra as a subalgebra — the Poincaré, Galilei, conformal, projective algebras, etc.

1.1. The main results. Let us first formulate the main results of the section in the form of theorems.

Theorem 1. *There is a functional basis of second-order differential invariants for the Euclid algebra $AE(n)$ with the basis operators (1.1) for the scalar function $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ consisting of these $2n+1$ invariants*

$$u, \quad S_k(u_{ab}), \quad R_k(u_a, u_{ab}). \tag{1.2}$$

Theorem 2. *The second-order differential invariants of the algebra $AE(n)$ (1.1) for the set of scalar functions u^r, $r = 1, \ldots, m$, can be represented as functions of the following expressions:*

$$u^r, \quad S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab}), \quad R_k(u^r_a, u^1_{ab}). \tag{1.3}$$

1.2. Proofs of the theorems. Absolute differential invariants are obtained as solutions of a linear system of first-order partial differential equations (PDE). Thus, the number of elements of a functional basis is equal to the number of independent integrals of this system. This number is equal to the difference between the number of variables on which the functions being sought depend, and the rank of the corresponding system of PDE (in our case, this rank is equal to the generic rank of the prolonged operator algebra [8, 9].

To prove the fact that N invariants which have been found, $F^i = F^i(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u})$, form a functional basis, it is necessary and sufficient to prove the following statements:

(1) the F^i are invariants;

(2) the F^i are functionally independent;

(3) the set of invariants F^i is complete or N is equal to the difference of the number of variables $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u})$ and the rank of the system of defining operators.

We seek second-order differential invariants in the form

$$F = F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}).$$

It follows from the condition of invariance with respect to translation operators ∂_a that F does not depend on x_a; evidently, u is an invariant of the operators (1.1). Thus, it is sufficient to seek invariants depending on $\underset{1}{u}$ and $\underset{2}{u}$ only. The criterion of the absolute invariance (0.1) in this case has the form

$$\hat{J}_{ab} F(\underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \tag{1.4}$$

where

$$\hat{J}_{ab} = u^r_a \partial_{u^r_b} - u^r_b \partial_{u^r_a} + 2(u^r_{ac} \partial_{u^r_{bc}} - u^r_{bc} \partial_{u^r_{ac}}), \tag{1.5}$$

the summation over r from 1 to m being implied.

In that way, the problem of finding the second-order differential invariants of the algebra $AE(n)$ is reduced to the construction of a functional basis for the rotational algebra $AO(n)$ with the basis operators (1.5) for m vectors and m symmetric tensors of order 2.

Lemma 1. *The rank of the algebra $AO(n)$ is equal to $(n(n-1))/2$.*

Proof. It is sufficient to prove the lemma for $m = 1$. The basis of the algebra (1.5) consists of $(n(n-l))/2$ operators. According to definition [8], its rank is equal to the generic rank of the coefficient matrix of these operators. Let us put $u_{ab} = 0$ when $a \neq b$ and write down the coefficient columns by $\partial_{u_{ab}}$ of the operators (1.5):

$$\begin{pmatrix} u_{11}-u_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{11}-u_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1}-u_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

When $u_{aa} \neq u_{bb}$ for $a \neq b$ and all $u_{aa} \neq 0$, the determinant of the matrix (1.6) does not vanish, therefore its generic rank (that is, the generic rank the algebra being considered) cannot be less than $(n(n-1))/2$. The lemma is proved. ■

Lemma 2. *The expressions*

$$S_k(u_{ab}), \quad R_k(u_a, u_{ab}) \tag{1.7}$$

are functionally independent.

Proof. To establish independence of expressions (1.7), it is sufficient to consider the case when $u_{ab} = 0$ if $a \neq b$ and $u_{aa} \neq 0$. Let us write down the Jacobian of the invariants

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 1 & & & \\ 2u_{11} & \cdots & 2u_{nn} & & \mathbf{0} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ nu_{11}^{n-1} & \cdots & nu_{rr}^{n-1} & & & \\ \hline & & & 2u_1 & \cdots & 2u_n \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 2u_1u_{11}^{n-1} & \cdots & 2u_nu_{nn}^{n-1} \end{array}\right| \tag{1.8}$$

The Jacobian (1.8) is equal up to a coefficient to the product of two Vandermonde determinants and is not equal to zero if $u_{aa} \neq u_{bb}$ whenever $a \neq b$. Thus, the expressions (1.17) are functionally independent. ■

Proof of Theorem 1. The fact that expressions (1.2) are invariants of $AO(n)$ can be easily proved by direct substitution of these expressions into the invariance conditions. Nevertheless, it is useful to note that $S_k(u_{ab})$ are traces of the symmetric matrix $(u_{ab}) = U$ and its powers, $R_k(u_a, u_{ab})$ are the scalar products of the vector $(u_a) = (u_1, \ldots, u_n)$, the matrix U^{k-1} and the vector $(u_a)^T$.

The invariants for the vector (u_a) and the symmetric tensor (u_{ab}) depend on their $(n(n+3))/2$ elements. Thus, it follows from Lemma 1 that a functional basis of the algebra $AO(n)$ for (u_a) and (u_{ab}) must consist of

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n$$

invariants.

Therefore the set (1.7) is a complete set of functionally independent invariants of the form $F = F(\underset{1}{u}, \underset{2}{u})$ and (1.2) represents a functional basis of the second-order invariants for the algebra $AE(n)$. The theorem is proved. $\blacksquare$

Let us consider the case of two vectors (u_a), (v_a) and two symmetric tensors of the second order (u_{ab}), (v_{ab}). The operators of the rotation algebra have the form (1.5), $u \equiv u^1$, $v \equiv u^2$.

In this case, a functional basis of invariants contains

$$2\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+7)}{2}$$

elements for which we take the following expressions

$$R_k(u_a, u_{ab}), \quad R_k(v_a, u_{ab}), \quad S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}). \tag{1.9}$$

The invariance of expressions (1.9) with respect to the operators (1.5) can be easily proved by their direct substitution to (1.4). To establish their functional independence, we shall use the following lemma.

Lemma 3. *Let*

$$U = (u_{ab})_{a,b=1,\ldots,n}, \quad V = (v_{ab})_{a,b=1,\ldots,n}$$

be symmetric matrices. Then the expressions

$$S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}) = \operatorname{tr} U^j V^{k-j}, \quad j = 0, \ldots, k; \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.10}$$

are functionally independent.

Proof. To prove Lemma 3, it is sufficient to show that the generic rank of the Jacobi matrix of expressions (1.10) is equal to $(n(n+3))/2$ that is the difference between the number of independent elements of U and V and the rank of the operators (1.5). We shall limit ourselves to the case when $u_{ab} = 0$ if $a \neq b$. Then equations (1.10) depend on $(n(n+3))/2$ variables and their independence is equivalent to the nonvanishing of the Jacobian.

Let us write down the elements of the Jacobian which are needed for further reasoning

$$\left|\begin{array}{ccc|ccccccc}
1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\
2u_{11} & \cdots & 2u_n & & & & \mathbf{0} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & & & & & \\
nu_{11}^{n-1} & \cdots & nu_{nn}^{n-1} & & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
 & \cdots & & 2v_{11} & 4v_{12} & \cdots & 4v_{1n} & 2v_{22} & \cdots & 2v_{nn} \\
 & & & & & \cdots & & & &
\end{array}\right|. \tag{1.11}$$

Since, in the first n rows, all the elements besides the first n columns are equal to j zero, the Jacobian (1.11) is equal to the product of the Jacobian of the elements $\operatorname{tr} U^k$, $k = 1, \ldots, n$, and the Jacobian of all other elements. According to Lemma 2, the expressions $\operatorname{tr} U^k$, $k = 1, \ldots, n$, are independent and their Jacobian is not equal to zero; thus, it remains to show the nonvanishing of the Jacobian and the functional independence only for the elements

$$\operatorname{tr} U^j V^{k-j}, \quad j = 0, \dots, k-1; \quad k = 1, \dots, n.$$

It follows from (1.11) that it is sufficient to show the nonvanishing of this Jacobian without the $(n+1)$th rows and columns. Thus, to prove the lemma, it is enough to show that the following expressions are independent

$$\operatorname{tr} U^j V^{k-j} V, \quad j = 0, \dots, k; \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{1.12}$$

The above reasoning allows us to make use of the principle of mathematical induction.

When $n = 1$, u_{11} and v_{11} are independent and the lemma is true. Let us suppose that it is true for $n-1$ and then prove from this that it is valid for n. Let the expressions

$$\operatorname{tr} U^j V^{k-j}, \quad j = 0, \dots, k; \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{1.13}$$

where U, V are symmetric $(n-1) \times (n-1)$ matrices and are independent. Then, we shall prove the independence of (1.12) for the same matrices. The sets (1.12) and (1.13) coincide with the exception of the following subsets

$$\operatorname{tr} U^j V^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n-1 \tag{1.14}$$

belong only to (1.12) and

$$\operatorname{tr} U^j, \quad j = 1, \dots, n-1 \tag{1.15}$$

belong only to (1.13).

The assumption of validity of the lemma for $n-1$ means that for two symmetric tensors of order 2, the set (1.13) is a functional basis of invariants of the rotation algebra. Thus, all the invariants of this algebra can be represented as functions of (1.13). To prove the functional independence of (1.12), it is sufficient to prove the nondegeneracy of the Jacobi matrix of the functions expressing the invariants (1.12) with (1.13). This matrix has the form

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c}
1 & & \mathbf{0} & & & \\
 & 1 & & & & \cdots \\
 & & \ddots & & & \\
 & \mathbf{0} & & 1 & & \\
\hline
 & & & & W & \\
\hline
 & & \mathbf{0} & & & \dfrac{\partial(\operatorname{tr} U^j V^{n-j})}{\partial(\operatorname{tr} U^j)}
\end{array}\right), \tag{1.16}$$

W being the derivative by $\operatorname{tr} V$ of the expression

$$\operatorname{tr} V^n = F(\operatorname{tr} V^k,\ k = 1, \dots, n-1).$$

(We know that from the Hamilton–Cayley theorem); $W \neq 0$.

We have only to prove the nonvanishing of the Jacobian of the expressions

$$\operatorname{tr}(U^j V^{n-j}) = F(\operatorname{tr} U^k,\ k = 1, \dots, n-1, \dots). \tag{1.17}$$

When $V = E$, the corresponding quadrant of the matrix (1.16) is the unit matrix and its determinant does not vanish identically. This fact proves the nondegeneracy of the matrix (1.16). The expressions (1.17) can be obtained from the Hamilton–Cayley theorem. They are polynomials and, thus, continuous functions of their arguments.

The functional independence of the expressions (1.12) for $(n-1)\times(n-1)$ matrices implies their independence for $n \times n$ matrices. From the above, it follows that the expressions (1.10) are independent, thus Lemma 3 is proved. ■

Proof of Theorem 2. It is easy to see from the structure of the set (1.3) that the invariants involving $(u_a^1), \ldots, (u_a^m)$, $(u_{ab}^2), \ldots, (u_{ab}^m)$ depend on the components of (u_{ab}^1) and of the corresponding vector or tensor, thus it is sufficient to prove the functions independence of each of the following sets:

$$R_k(u_a^r, u_{ab}^1) \qquad \text{for every } r = 1, \ldots, m;$$
$$S_{jk}(u_{ab}^1, u_{ab}^r) \qquad \text{for every } r = 2, \ldots, m;$$

The functional independence of each set of $R_k(u_a^r, u_{ab}^1)$ can be proved similarly to the proof of Lemma 2. The functional independence of the set $S_{jk}(u_{ab}^1, u_{ab}^r)$ easily follows from Lemma 3, u^r are evidently independent of other elements of (1.3).

To make sure that expressions (1.3) are invariants of $AO(n)$, it is sufficient to substitute them into the condition (1.4).

The set (1.3) consists of

$$2mn + m + (m-1)\frac{n(n-1)}{2} = m\left(\frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right) - \frac{n(n-1)}{2}$$

elements and, thus, it is complete.

So we have proved that this set forms a basis of invariants for the algebra $AE(1.n)$ (1.1).

1.3. Bases of invariants for the extended Euclid algebra and for the conformal algebra. The extended Euclid algebra $AE_1(n)$ for one scalar function is defined by the basis operators ∂_a, J_{ab} (1.1) and D depending on a parameter λ:

$$D = x_a\partial_a + \lambda u\partial_u \quad (\partial_u = \partial/\partial u). \tag{1.18}$$

The basis of the conformal algebra $AC(n)$ consists of the operators ∂_a, J_{ab} (1.1) and D (1.18) and

$$K_a = 2x_aD - x_ax_b\partial_a. \tag{1.19}$$

Theorem 3. *There is a functional basis for the extended Euclid algebra that has the following form*

(1) when $\lambda \neq 0$*:*

$$\frac{R_k(u_a, u_{ab})}{u^{k(1-2/\lambda)+1}}, \quad \frac{S_k(u_{ab})}{u^{k(1-2/\lambda)}}; \tag{1.20}$$

(2) when $\lambda = 0$*:*

$$u, \quad \frac{R_k(u_a, u_{ab})}{(u_{aa})^k}, \quad \frac{S_k(u_{ab})}{(u_{aa})^k} \quad (k \neq 1); \tag{1.21}$$

a functional basis for the conformal algebra has the following form:

(1) when $\lambda \neq 0$*:*

$$S_k(\theta_{ab})u^{k(2/\lambda-1)}; \tag{1.22}$$

(2) when $\lambda = 0$*:*

$$u, \quad S_k(w_{ab})(u_au_a)^{-2k} \quad (k \neq n), \tag{1.23}$$

where

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \lambda u_{ab} + (1-\lambda)\frac{u_au_b}{u} - \delta_{ab}\frac{u_cu_c}{2u}, \\ w_{ab} &= u_cu_c\left(u_{ab} + \frac{\delta_{ab}}{2-n}u_{dd}\right) - u_c(u_au_{bc} + u_bu_{ac}), \end{aligned} \tag{1.24}$$

δ_{ab} *being the Kronecker symbol.*

Proof. To find absolute differential invariants of the algebra $AE_1(n)$, it is necessary to add to (1.4) the following condition

$$\overset{2}{D}F \equiv x_aF_{x_a} + \lambda uF_u + (\lambda-1)u_aF_{u_a} + (\lambda-2)u_{ab}F_{u_{ab}} = 0. \tag{1.25}$$

Solving equation (1.25) for

$$F = F(u, R_k(u_a, u_{ab}), S_k(u_{ab})),$$

we obtain functional bases (1.20), (1.21) for the extended Euclid algebra.

The second-order differential invariants of the algebra $AC(n)$ are defined by the conditions (1.4), (1.25) and

$$k_a\overset{2}{K}_aF = 0, \tag{1.26}$$

where k_a are arbitrary real numbers, $\overset{2}{K}_a$ are the second prolongations of the operators K_a (1.19):

$$\overset{2}{K}_a = 2x_a\overset{2}{D} + x_b\overset{2}{J}_{ab} + 2\lambda[u\partial_{u_a} + 2u_b\partial_{u_{ab}}] + 2u_a\partial_{u_{cc}} - 4u_b\partial_{u_{ab}}.$$

Solving this system for an arbitrary n requires a lot of cumbersome computations. It is simpler to construct conformally co variant tensors from u, u_a, u_{ab} and then to construct invariants of the rotation algebra.

Definition 3. *Tensors* θ_a *and* θ_{ab} *of order 1 and 2 are called covariant with respect to some algebra* $L = \langle J_{ab}, X_i\rangle$ *if*

$$\begin{aligned} X_i\theta_a &= \sigma^i_{ab}\theta_b + \sigma^i\theta_a, \\ X_i\theta_{ab} &= \rho^i_{ab}\theta_{cb} + \rho^i_{bc}\theta_{ac} + \rho^i\theta_{ab}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

X_i *are operators of the form (0.1),* ρ^i*,* σ^i *are some functions,* σ^i_{ab}*,* ρ^i_{ab} *are some skew-funmetric tensors.*

It is easy to show that the expressions $S_k(\theta_{ab})$, $R_k(\theta_a, \theta_{ab})$, where θ_a, θ_{ab} are tensors covariant with respect to the algebra L are relative invariants of this algebra.

The fact that θ_{ab} and w_{ab} (1.24) are covariant with respect to the conformal algebra $AC(n)$ can be verified by direct substitution of these tensors into the conditions (1.27) for the operators $\overset{2}{D}$ and $\overset{2}{K}_a$.

The rank of the second prolongation of the algebra $AC(n)$ is equal to the number of its operators

$$\frac{n(n-1)}{2}+n+n+1=\frac{n(n+3)}{2}+1$$

and, therefore, a functional basis of second-order differential invariants must contain n invariants.

The functional independence of the expressions (1.22) follows from Lemma 2 if we notice that the transformation $u_{ab}\to\theta_{ab}$ is nondegenerated. The same is true for the set (1.23).

The expressions (1.22) and (1.23) satisfy (1.25) and (1.26) for the corresponding λ and they are invariants of the conformal algebra.

All that is stated above leads to the conclusion that (1.22) and (1.23) form functional bases for the conformal algebra $AC(n)$ with $\lambda\neq 0$ and $\lambda=0$, respectively.

Note 1. Using condition (1.26), it is easy to show that when $\lambda\neq 0$ covariant tensors exist for $AC(n)$ of order 2 only; when $\lambda=0$, the tensors w_{ab} (1.24) and u_a are conformally covariant but $S_k(w_{ab})$ and $R_k(u_a,w_{ab})$ are dependent.

Theorem 4. *The second-order differential invariants for a vector function $u=(u^1,\dots,u^m)$ and for the algebra $AE_1(n)=\langle\partial_a,J_{ab},D\rangle$, the operator D having the form*

$$D=x_a\partial_a+\lambda u^r\partial_{u^r} \tag{1.28}$$

with a summation over r from 1 to m, can be represented as the functions of the following expressions:

(1) when $\lambda\neq 0$:

$$\frac{u^r}{u^1}\ (r=2,\dots,m),\quad \frac{S_{jk}(u^1_{ab},u^r_{ab})}{(u^1)^{k(1-2/\lambda)}},\quad \frac{R_k(u^r_a,u^1_{ab})}{(u^1)^{k(1-2/\lambda)+1}};$$

(2) when $\lambda=0$:

$$u^r,\quad R_k(u^r_a,u^1_{ab})(u^1_{aa})^{-k},\quad S_{jk}(u^1_{ab},u^r_{ab})(u^1_{aa})^{-k}$$

(when $r=1$ then $k\neq 1$);

the corresponding basis for the conformal algebra $AC(n)=\langle\partial_a,J_{ab},D,K_a\rangle$ $(K_a=2x_aD-x_bx_b\partial_a)$ has the following form:

(1) when $\lambda\neq 0$:

$$\begin{gathered} S_{jk}(\theta^r_{ab},\theta^1_{ab})(u^1)^{k(2/\lambda-1)},\quad \frac{u^r}{u^1},\\ R_k(\theta^r_a,\theta^1_{ab})^{k(2/\lambda-1)-1}\quad (r=2,\dots,m); \end{gathered} \tag{1.29a}$$

(2) when $\lambda=0$:

$$\begin{gathered} u^r\ (r=1,\dots,m),\quad (u^1_du^1_d)^{-2k}S_{jk}(w^1_{ab},w^r_{ab}),\\ (u^1_du^1_d)^{1-2k}R_k(u^r_a,w^1_{ab})\quad (r=2,\dots,m) \end{gathered} \tag{1.29b}$$

(for the set of invariants $(u^1_du^1_d)^{-2k}S_k(w_{ab})$, k does not take the value n); the tensors θ^r_{ab}, w^r_{ab} are constructed similarly to (1.24) and

$$\theta^r_a=\frac{u^r_a}{u^r}-\frac{u^1_a}{u^1}.$$

Theorem 4 is proved similarly to Theorem 3.

The functional independence of the sets of invariants follows from Lemma 2 and 3 taking into account the fact that transformations $u^r_{ab} \to \theta^r_{ab}$, $u^r_{ab} \to w^r_{ab}$ $(r = 1, \ldots, m)$ and $u^r_a \to \theta^r_a$ $(r = 2, \ldots, m)$ are nondegenerate.

1.4. Differential invariants of the rotation algebra. The rotation algebra is defined by the basis operators J_{ab} (1.1).

The second-order invariants of this algebra for m scalar functions u^r are constructed with x_a, u^r, u^r_a, w^r_{ab} similarly to invariants of the Euclid algebra.

Theorem 5. *There is a functional basis of the second-order differential invariants for the algebra $AO(n)$ that has the form*

$$u^r, \quad S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab}), \quad R_k(u^r_a, u^1_{ab}), \quad R_k(x_a, u^1_{ab}), \quad r = 1, \ldots, m;$$

the corresponding basis of invariants for the algebra $\langle J_{ab}, D\rangle$, where D is defined by (1.28), consists of the expressions

$$\frac{u^r}{u^1}\ (r = 2, \ldots, m), \quad \frac{S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab})}{(u^1)^{k(1-2/\lambda)}}, \quad R_k(u^r_a, u^1_{ab})(u^1)^{2k/\lambda-1-k},$$
$$R_k(x_a, u^1_{ab})(u^1)^{2/\lambda(k-2)-k+1}, \quad \textit{when } \lambda \neq 0;$$
$$u^r, \quad R_k(u^r_a, u^1_{ab})(u^1_{aa})^{-k}, \quad S_{jk}(u^1_{ab}, u^r_{ab})(u^1_{aa})^{-k}\ (k \neq 1 \textit{ when } r = 1),$$
$$R_k(x_a, u^1_{ab})(u^1_{aa})^{2-k} \quad \textit{when } \lambda = 0.$$

A basis of invariants for the algebra $\langle J_{ab}, D, K_a\rangle$ when $\lambda \neq 0$, consists of the expressions (1.29a) and

$$\frac{R_k(x_a, \theta^1_{ab})}{x^2(u^1)^{(k-1)(1-2/\lambda)}}, \quad k = 2, \ldots, n+1;$$

when $\lambda = 0$ it consists of the expressions (1.29b) and

$$\frac{R_k(x_a, w^1_{ab})}{x^2(w^1_{aa})^{k-1}} \quad (x^2 = x_a x_a).$$

The proof of this theorem is similar to the proofs of Theorems 2 and 3; notice that (x_a) is a co variant tensor with respect to the conformal operators.

2. Differential invariants of the Poincaré and conformal algebra

In this section, we consider differential invariants of the second order for a set of m scalar functions

$$u^r = u^r(x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad n \geq 3. \tag{2.1}$$

The Poincaré algebra $AP(1, n)$ is defined by the basis operators

$$p_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \tag{2.2}$$

where μ, ν take the values $0, 1, \ldots, n$; the summation is implied over the repeated indices (if they are small Greek letters) in the following way:

$$x_\nu x^\nu \equiv x_\nu x^\nu \equiv x^\nu x_\nu = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2, \quad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, \ldots, -1). \tag{2.3}$$

We consider x_ν and x^ν equal with respect to summation not to mix signs of derivatives and numbers of functions.

The quasilinear second-order invariants of the Poincaré algebra were described in [12].

Theorem 6. *There is a functional basis of the second-order differential invariants of the Poincaré algebra $AP(l,n)$ for a set of m scalar functions u^r consisting of*

$$m(2n+3)+(m-1)\frac{n(n+1)}{2}$$

invariants

$$u^r, \quad R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu}), \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu}).$$

In this section, everywhere $k=1,\ldots,n+1$; $j=0,\ldots,k$; $r=1,\ldots,m$.

For the extended Poincaré algebra $A\tilde{P}(l,n)=\langle p_\mu, J_{\mu\nu}, D\rangle$, where

$$D=x_\mu p_\mu+\lambda u^r p_{u^r} \tag{2.4}$$

($p_{u^r}=i(\partial/\partial u^r)$, the summation over r from 1 to m is implied) the corresponding basis has the following form:

(1) when $\lambda=0$:

$$u^r, \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu})(u^1_{\alpha\alpha})^{-k}, \quad R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu})(u^1_{\alpha\alpha})^{-k};$$

(2) when $\lambda\neq 0$:

$$\frac{u^r}{u^1}, \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu})(u^1)^{k(2/\lambda-1)}, \quad R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu})(u^1)^{2k/\lambda-k-1},$$

where S_{jk}, R_k are defined similarly to (0.3) and the summation over small Greek indices is of the type (2.2).

For the conformal algebra $AC(1,n)=\langle p_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\rangle$, where

$$K_\mu=2x_\mu D-x_\nu x_\nu p_\mu$$

(D being the dilation operator (2.3)), the corresponding basis consists of the expressions

$$S_{jk}(\theta^r_{\mu\nu}, \theta^1_{\mu\nu})(u^1)^{k(2/\lambda-1)}, \quad \frac{u^r}{u^1}, \quad R_k(\theta^r_\mu, \theta^1_{\mu\nu})(u^1)^{k(2/\lambda-1)-1};$$

when $\lambda\neq 0$; $r=2,\ldots,m$, there is no summation over r; the conformally covariant tensors have the form

$$\theta^r_\mu=\frac{u^r_\mu}{u^r}-\frac{u^1_\mu}{u^1}, \quad \theta^r_{\mu\nu}=\lambda u^r_{\mu\nu}+(1-\lambda)\frac{u^r_\mu u^r_\nu}{u^r}-g_{\mu\nu}\frac{u^r_\beta u^r_\beta}{2u^r}.$$

When $\lambda=0$, the corresponding basis of invariants for the conformal algebra has the form

$$u^r, \quad S_{jk}(w_{\mu\nu}, w^1_{\mu\nu})(u^1_\alpha u^1_\alpha)^{-2k}, \quad R_k(u^r_\mu, w^1_{\mu\nu})(u^1_\alpha u^1_\alpha)^{1-2k}, \quad r=2,\ldots,m;$$

the tensors $(w^r_{\mu\nu})$,

$$w^r_{\mu\nu}=u^r_\alpha u^r_\alpha\left(u^r_{\mu\nu}-\frac{g_{\mu\nu}}{1-n}u^r_{\beta\beta}\right)-u^r_\beta(u^r_\mu u^r_{\beta\nu}+u^r_\nu u^r_{\beta\mu})$$

are conformally invariant (there is no summation over r).

The proof of Theorem 6 follows from those of Theorems 2, 3 for $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ if we substitute ix_0 instead of x_{n+1}.

Similarly to the results of Paragraph 1.4, it is possible to construct the invariants of the algebras $\langle J_{\mu\nu}\rangle$, $\langle J_{\mu\nu}, D\rangle$, $\langle J_{\mu\nu}, D, K_\mu\rangle$.

The obtained results allow us to construct new nonlinear many-dimensional equations, e.g. the equation

$$\frac{u_\alpha u_\alpha}{1-n}u_{\nu\nu} - u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} = (u_\nu u_\nu)^2 F(u),$$

where F is an arbitrary function, is invariant under the algebra $AC(1,n)$, $\lambda = 0$. The left member of the above equation is equal to $w_{\mu\mu}$.

There is another quasi-linear relativistic equation with rich symmetry properties

$$(1 - u_\alpha u_\alpha)u_{\mu\mu} - u_\alpha u_\mu u_{\alpha\mu} = 0,$$

that is, the Born–Infeld equation. The symmetry and solutions of this equation were investigated in [10, 13]. This equation is invariant under the algebra $AP(1, n+1)$ with the basis operators

$$J_{AB} = x_A p_B - x_B p_A,$$

$A, B = 1, \dots, n+1$, $x_{n+1} \equiv u$.

Let us consider the class of equations

$$u_{\mu\nu}u_{\mu\nu} = F(u_{\mu\mu}, u_\mu u_\nu u_{\mu\nu}, u_\mu u_\mu, u).$$

It is evident that they are invariant with respect to the Poincaré algebra $AP(1,n)$ out the straightforward search the conformally invariant equations from this class with the standard Lie technique requires a lot of cumbersome calculations. The use of differential invariants turns this problem into one of elementary algebra, e.g. if $\lambda \neq 0$

$$F - u_{\mu\nu}u_{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda}S_2(\theta_{\mu\nu}) + u^{2(1-2/\lambda)}\phi(S_1(\theta_{\mu\nu})u^{2/\lambda-1}),$$

where $\theta_{\mu\nu}$ is of the form (1.24) and ϕ is an arbitrary function. Whence

$$F = u^{2(1-2/\lambda)}\phi\left(u^{2/\lambda-1}\left(u_{\mu\mu} - \frac{\lambda+n}{\lambda}\frac{u_\alpha u_\alpha}{u}\right)\right) - \\ - \frac{1}{\lambda^2 u^2}(\lambda^2 + n^2)(u_\alpha u_\alpha)^2 - \frac{2(1-\lambda)}{\lambda u}u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} + \frac{2u_{\mu\mu}u_\alpha u_\alpha}{\lambda u}.$$

It is useful to note that besides the traces of matrix powers (0.3), one can utilize all possible invariants of covariant tensors $\theta^r_{\mu\nu}$, $w^r_{\mu\nu}$ to construct conformally invariant equations.

3. Differential invariants of an infinite-dimensional algebra

It is well-known that the simplest first-order relativistic equation — the eikonal or Hamilton equation

$$u_\alpha u_\alpha \equiv u_0^2 - u_1^2 - \cdots - u_n^2 = 0 \tag{3.1}$$

is invariant under the infinite-dimensional algebra $AP^\infty(1,n)$ generated by the operators [10, 14]

$$X = (b^{\mu\nu}x_\nu + a^\mu)\partial_\mu + \eta(u)\partial_u, \tag{3.2}$$

$-b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu}$, a^μ, η being arbitrary differentiate functions on u. Equation (3.1) is widely used in geometrical optics.

In this section, we describe a class of second-order equations invariant under the algebra (3.2).

It is easy to show that the tensor of the rank 2

$$\theta_{\mu\nu} = u_\mu u_{\lambda\nu} u_\lambda + u_\nu u_{\lambda\mu} u_\lambda - 2u_\mu u_\nu u_{\lambda\lambda} \tag{3.3}$$

is covariant under the algebra $AP^\infty(1,n)$ (3.2).

Theorem 7. *The equations of the form*

$$S_k(\theta_{\mu\nu}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.4}$$

S_k being defined as (0.3), are invariant with respect to the algebra $AP^\infty(1,n)$ (3.2).

The problem of the description of all such equations is more difficult and we do not consider it here.

Let us investigate in more detail the quasi-linear second-order equation of the form

$$u_\mu u_{\mu\nu} u_\nu - u_\mu u_\mu u_{\alpha\alpha} = 0. \tag{3.5}$$

Theorem 8. *When $n \geq 2$, equation (3.5) is invariant with respect to the algebra $A\tilde{P}^\infty(1,n)$ with generators of the form*

$$X + d(u) x_\mu \partial_\mu,$$

X is of the form (3.2), $d(u)$ is an arbitrary function on u.

The proofs of Theorems 7 and 8 can be easily obtained with the Lie technique using the criterion of invariance

$$\overset{2}{X} S_k(\theta_{\mu\nu})\Big|_{S_k(\theta_{\mu\nu})=0} = 0,$$

where $\overset{2}{X}$ is the second prolongation of the operator X [8–10].

4. Differential invariants of the Galilei algebra

4.1. It is well-known that the heat equation

$$\begin{gathered} 2\mu u_t + \Delta u = 0, \quad \Delta u \equiv u_{aa}, \\ u = u(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad n \geq 3 \end{gathered} \tag{4.1}$$

is invariant under the generalized Galilei algebra $AG_2^I(1,n)$ with the basis operators

$$\begin{gathered} \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \\ G_a = t\partial_a + \mu x_a u \partial_u \quad \left(\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad u\partial_u, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda u \partial_u, \\ A = tD - t^2\partial_t + \frac{\mu \boldsymbol{x}^2}{2} u\partial_u \quad \left(\lambda = -\frac{n}{2}\right). \end{gathered} \tag{4.2}$$

The Schrödinger equation

$$2im\psi_t + \psi_{aa} = 0, \tag{4.3}$$

$\psi = \psi(t, \boldsymbol{x})$ being a complex-valued function, is also invariant [16] under the generalized Galilei algebra with the basis operators

$$\begin{aligned} &p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad J = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \\ &G_a = tp_a - mx_a J, \quad D = 2tp_0 - x_a p_a + \lambda I \quad (I = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}), \\ &A = t^2 p_0 - tx_a p_a + \lambda t I + \frac{m\boldsymbol{x}^2}{2} J \quad \left(\lambda = -\frac{n}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

The asterisk means the complex conjugation.

We shall designate the algebra (4.4) with the symbol $AG_2^{II}(1,n)$. Besides,

$$AG^I(1,n) = \langle \partial_t, \partial_a, u\partial_u, G_a, J_{ab} \rangle,$$

the operators being of the form (4.2). A basis of the algebra $AG_1^I(1,n)$ consists of the basis operators or $AG^I(1,n)$ and of the operator D. Furthermore $AG^{II}(1,n) = \langle p_0, p_a, J, J_{ab}, G_a \rangle$ (4.4). A basis of the algebra $AG_1^{II}(1,n)$ consists of the previous operators and also D (4.4).

To simplify the form of invariants, we introduce the following change of dependent variables:

$$u = \exp\varphi, \quad \psi = \exp\phi \quad \left(\operatorname{Im}\phi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\psi}{\operatorname{Re}\psi}\right). \tag{4.5}$$

All the indices k in the expressions of the type (0.3) here will take on values from 1 to n, the indices j will take on values from 0 to k.

We seek invariants of the algebra $AG_2^I(1,n)$ in the form

$$F = F(\varphi_t, \varphi_a, \varphi_{tt}, \varphi_{at}, \varphi_{ab}). \tag{4.6}$$

Obviously, they do not include φ, x_a, and t because the basis (4.2) contains operators ∂_φ, ∂_a, ∂_t.

Using the definition of an absolute differential invariant (0.2) we get the following conditions on the function F (4.6):

$$\overset{2}{J}_{ab}F = \varphi_a F_{\varphi_b} - \varphi_b F_{\varphi_a} + F_{\varphi_{bt}}\varphi_{at} - \varphi_{bt}F_{\varphi_{at}} + 2\varphi_{ac}F_{\varphi_{bc}} - 2\varphi_{bc}F_{\varphi_{ac}} = 0, \tag{4.7}$$

$$\overset{2}{G}_a F = -\varphi_a F_{\varphi_t} + \mu F_{\varphi_a} - 2\varphi_{at}F_{\varphi_{tt}} - \varphi_{ab}F_{\varphi_{bt}} = 0, \tag{4.8}$$

$$\overset{2}{D} F = -2\varphi_t F_{\varphi_t} - \varphi_a F_{\varphi_a} - 4\varphi_{tt}F_{\varphi_{tt}} - 3\varphi_{at}F_{\varphi_{at}} - 2\varphi_{ab}F_{\varphi_{ab}} = 0, \tag{4.9}$$

$$\overset{2}{A} F = t\overset{2}{D} F + x_a \overset{2}{G}_a F - \lambda F_{\varphi_t} - 2\varphi_t F_{\varphi_{tt}} - \varphi_a F_{\varphi_{at}} + \mu\delta_{ab}F_{\varphi_{ab}} = 0. \tag{4.10}$$

From equations (4.8), we can see that the tensors

$$\theta_a = \mu\varphi_{at} + \varphi_b\varphi_{ab}, \quad \varphi_{ab} \tag{4.11}$$

are covariant with respect to the algebra $AG^I(1,n)$ $(\mu \neq 0)$.

Theorem 9. *There is a functional basis of absolute differential invariants for the algebra $AG^I(1,n)$, when $\mu \neq 0$, consisting of these $2n+2$ invariants:*

$$\begin{aligned} &M_1 = 2\mu\varphi_t + \varphi_a\varphi_a, \quad M_2 = \mu^2\varphi_{tt} + 2\mu\varphi_a\varphi_{at} + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}, \\ &R_k = R_k(\theta_a, \theta_{ab}), \quad S_k = S_k(\varphi_{ab}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

For the algebra $AG_1^I(1,n)$ $(\mu\neq 0)$ *such a basis has the form*

$$\frac{M_2}{M_1^2},\quad \frac{R_k}{M_1^{2+k}},\quad \frac{S_k}{M_1^k}. \tag{4.13}$$

For the algebra $AG_2^I(1,n)$ $(\mu\neq 0)$*, there is a basis of the form*

$$\frac{N_2}{N_1^2},\quad \frac{\hat R_k}{N_1^{2+k}},\quad \frac{\hat S_k}{N_1^k}\quad (k=2,\dots,n), \tag{4.14}$$

where

$$\begin{gathered}N_1=2\mu\varphi_t+\varphi_a\varphi_a+\varphi_{aa},\\ N_2=\mu^2\varphi_{tt}+2\mu\left(\frac{1}{n}\varphi_t\varphi_{aa}+\varphi_a\varphi_{at}\right)+\varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}+\frac{1}{n}\varphi_a\varphi_a\varphi_{bb}+\frac{1}{n}\varphi_{bb}^2,\\ \hat R_k=\sum_{l=0}^k R_l(\varphi_{aa})^{k-1}\frac{(-n)^l k!}{l!(k-l)!},\\ \hat S_k=\sum_{l=0}^k\frac{(-n)^l(k-1)!(k+1)}{(l+1)!(k-l)!}S_l(\varphi_{aa})^{k-l},\end{gathered} \tag{4.15}$$

S_k*,* R_k *are defined by (4.12) and* θ_a *has the form (4.11).*

The proof of this theorem is similar to the proof of Theorems 2 and 3. We shall present here only some hints to the proof.

It is evident that the function F must depend on the invariants of the Euclid algebra

$$F=F(\varphi_t,\varphi_{tt},R_k(\varphi_a,\varphi_{ab}),R_k(\varphi_{at},\varphi_{ab}),S_{\varphi_{ab}})).$$

First we construct two invariants of $AG^I(1,n)$ M_1 and M_2 (4.12) which depend on φ_t and φ_{tt} respectively. The other invariants of the adduced basis (4.12) do not depend on φ_t or φ_{tt} and the sets $\{M_1,M_2\}$ and $\{R_k,S_k\}$ are independent. The invariants R_k, S_k are constructed with the covariant tensors θ_a, φ_{ab} (4.11) similarly to invariants of the conformal algebra investigated above, and it is easy to see that they are independent.

The generic ranks of the prolonged algebras $AG^I(1,n)$, $AG_1^I(1,n)$, $AG_2^I(1,n)$ are equal to the numbers of their operators and from this fact we can compute the number of elements in the bases for these algebras.

Adding to (4.7) and (4.8) the condition (4.9), we obtain from the invariants (4.12) the basis (4.13) for the algebra $AG_1^I(1,n)$.

Relative invariants $\hat R_k$, $\hat S_k$ (4.15) of the algebra $AG_2^I(1,n)$ were found from the equation

$$\lambda F_{\varphi_t}-2\varphi_tF_{\varphi_{tt}}-\varphi_aF_{\varphi_{at}}+\mu\delta_{ab}F_{\varphi_{ab}}=0,$$

$F=F(R_k,S_k)$, and then we constructed absolute invariants using (4.9). Besides, it is possible to construct analogues to $\hat R_k$, $\hat S_k$ with $AG_2^I(1,n)$-covariant tensors θ_a (4.11) and

$$\theta_{ab}=\varphi_{ab}-\frac{2\delta_{ab}}{n}(\varphi_c\varphi_c+\mu\varphi_t).$$

Considering (φ_{at}), (φ_a), (φ_{ab}) as independent vectors and tensors and putting $\varphi_{ab}=0$ whenever $a\neq b$, $\varphi_a=0$, we see from Lemma 2 that the adduced sets of invariants are independent.

Note 2. A basis of invariants for the Galilei algebra without translations contains expressions (4.12) and

$$R_k(h_a,\phi_{ab}),\quad \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{x}^2-\varphi t,$$

the Galilei-covariant vector h_a having the form

$$h_a=\mu x_a-t\varphi_a.$$

Let us also adduce an A-covariant tensor

$$\hat{h}_a=\frac{\mu x_a}{t}-\varphi_a$$

depending on x_a, and a relative invariant of the operators A and D (4.2)

$$\exp\left\{\varphi-\frac{\mu\boldsymbol{x}^2}{2t}\right\}$$

with which it is possible to construct a basis of invariants for the algebra $\langle G_a,J_{ab},D,A\rangle$.

We have presented a method to find the bases of invariants for Lie algebras for which J_{ab} (1.1) are basis operators. Further, we shall adduce functional bases for the algebras $AG_2^I(1,n)$ where $\mu=0$ and $AG_2^{II}(1,n)$ where $\mu=0$ or $\mu\neq 0$. We omit proofs because they are similar to proofs of the previous theorems.

It is evident from the conditions (4.7)–(4.10) that the case $\mu=0$ for the algebra $AG_2^I(1,n)$ has to be specially considered. The tensors (φ_a) and (φ_{ab}) are covariant with respect to this algebra; the tensor (θ_a) involved in invariants is defined by an implicit correlation

$$\varphi_{bt}=\theta_a\varphi_{ab}. \tag{4.16}$$

Theorem 10. *There is a functional basis of the second-order differential invariants for the algebra $AG^I(1,n)$, where $\mu=0$, that has the form*

$$\begin{gathered}M_1=\varphi_t-\varphi_a\theta_a,\quad M_2=\varphi_{tt}-\varphi_{at}\theta_a,\\ R_k=R_k(\varphi_a,\varphi_{ab}),\quad S_k=S_k(\varphi_{ab}).\end{gathered}\tag{4.17}$$

The corresponding basis for the algebra $AG_1^I(1,n)$, where $\mu=0$ has the form

$$\frac{M_1^2}{M_2},\quad \frac{R_k}{M_1^k},\quad \frac{S_k}{M_1^k};$$

for the algebra $AG_2^I(1,n)$, when $\mu=0$, it has the form

$$\frac{R_k}{M^{1/2k}},\quad \frac{S_k}{M^{1/2k}},$$

where R_k, S_k are defined by (4.17) and

$$M=(\varphi_t-\theta_a\varphi_a)^2+(\varphi_{tt}-\varphi_{at}\theta_a)(\lambda+\varphi_a\varphi_b r_{ab}).$$

Here, the matrix $\{r_{ab}\}=\{\varphi_{ab}\}^{-1}$; $\theta_a=r_{ab}\varphi_{bt}$ are the same as in (4.16).

Note 3. It is possible to use, instead of M_1, M_2, the invariants

$$\hat{M}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \hat{M}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{tt} & \varphi_{1t} & \cdots & \varphi_{nt} \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

which have been found in [17] as the solution of the problem of finding the equations invariant under the Galilei algebra when $\mu = 0$.

Note 4. The invariants for the algebra $\langle J_{ab}, G_a, J, D, A\rangle$ (4.2), where $\mu = 0$, which depend on x_a, t, can be constructed with φ_a, φ_{ab} and the following covariant vector

$$\hat{h}_a = \frac{h_a}{t} + \frac{2}{n} t\varphi_a\varphi_t + \frac{4}{n}\frac{x_b\varphi_b\varphi_a}{t},$$

where $h_a = x_b\varphi_{ab} + t\varphi_{at}$ is covariant with respect to the operators G_a when $\mu = 0$.

4.2. Let us proceed to describe the basis of the invariants for the algebra $AG_2^{II}(1,n)$.

Theorem 11. *Any absolute differential invariant of order ≤ 2 for the algebras listed below is a function of the following expressions:*

(1) $AG^{II}(1,n)$, $m \ne 0$:

$$\begin{aligned} &\phi + \phi^*, \quad M_1 = 2im\phi_t + \phi_a\phi_a, \quad M_1^*, \\ &M_2 = -m^2\phi_{tt} + 2im\phi_a\phi_{at} + \phi_a\phi_b\phi_{ab}, \quad M_2^*, \\ &S_{jk} = S_{jk}(\phi_{ab}, \phi^*_{ab}), \quad R_k^1 = R_k(\theta_a, \phi_{ab}), \\ &R_k^2 = R_k(\theta^*_a, \phi_{ab}), \quad R_k^3 = R_k(\phi_a + \phi^*_a, \phi_{ab}), \end{aligned}$$

the covariant tensors being $\theta_a = -im\phi_{at} + \phi_b\phi_{ab}$;

(2) $AG_1^{II}(1,n)$, $m \ne 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{M_1^*}{M_1}, \quad \frac{M_2}{M_1^2}, \quad \frac{M_2^*}{M_1^2}, \quad \frac{R_k^l}{M_1^{2+k}}\ (l=1,2), \quad \frac{R_k^3}{M_1^k}, \quad \frac{S_{jk}}{M_1^k}, \\ &\phi + \phi^* \ \text{ when } \lambda = 0, \quad M_1 e^{(2/\lambda)(\phi+\phi^*)} \ \text{ when } \lambda \ne 0; \end{aligned}$$

(3) $AG_2^{II}(1,n)$, $m \ne 0$, $\lambda = -\frac{n}{2}$:

$$N_1 e^{(-4/n)(\phi+\phi^*)}, \quad \frac{N_1}{N_1^*}, \quad \frac{N_2}{N_1^2}, \quad \frac{N_2^*}{N_1^2}, \quad \frac{\hat{R}_k^l}{N_1^{2+k}}\ (l=1,2), \quad \frac{\hat{R}_k^3}{N_1^k}, \quad \frac{\hat{S}_{jk}}{N_1^k},$$

where

$$\begin{aligned} &N_1 = 2im\phi_t + \phi_{aa} + \phi_a\phi_a, \\ &N_2 = -m^2\phi_{tt} + 2im\left(\phi_a\phi_{at} + \frac{1}{n}\phi_t\phi_{aa}\right) + \phi_a\phi_b\phi_{ab} + \frac{1}{n}\phi_a\phi_a\phi_{bb} + \frac{1}{n}\phi_{aa}^2, \\ &\hat{S}_{jk} = \sum_{l=0}^{k}\sum_{r=0}^{j} S_{rl}(-n)^l C_j^r C_k^{l+1-r}(\phi_{aa})^{j-r}(\phi^*_{aa})^{k-l-j+r} + k(\phi_{aa})^j(\phi^*_{aa})^{k-j-1}, \\ &\hat{R}_k^l = \sum_{j=0}^{k} R_j^l(\phi_{aa})^{k-j}\frac{(-n)^j k!}{j!(k-j)!} \quad (l = 1,2,3). \end{aligned}$$

The invariants for the algebras $AG^{II}(1,n)$, $AG_1^{II}(1,n)$ $(m=0)$ can be constructed similarly to the case of real function. Let us adduce a functional basis for the algebra $AG_2^{II}(1,n)$.

(1) when $\lambda=0$, then there is a basis consisting of the following expressions:

$$\phi+\phi^*,\quad \frac{N_1^2}{N_2^2},\quad \frac{N_1^{*2}}{N_2},\quad \frac{(S_{jk})^2}{N_1^k},\quad (R_k^l)^2 N_1^{-k-1}\ (l=1,2,4);$$

(2) $\lambda\neq 0$:

$$N_1 e^{(4/\lambda)(\phi+\phi^*)},\quad \frac{N_1^*}{N_1},\quad N_3 e^{(3/\lambda)(\phi+\phi^*)},\quad \frac{(R_k^l)^2}{N_1^k}\ (l=1,2,3),\quad \frac{(S_{jk})^2}{N_1^k},$$

where

$$\begin{aligned}
&N_1=(\phi_t-\theta_a\phi_a)^2+(\phi_{tt}-\theta_a\phi_{at})(\lambda+\phi_a\phi_{ab}r_{ab})\\
&\qquad (\textit{with } \{r_{ab}\}=\{\phi_{ab}\}^{-1} \textit{ and } \theta_a=r_{ab}\phi_{bt}),\\
&N_2=(\phi_t-\phi_c\theta_c)\phi_a^*\phi_b^*r_{ab}^*-(\phi_t^*-\phi_c^*\theta_c^*)\phi_a\phi_b r_{ab},\\
&N_3=(\phi_t-\phi_t^*)-\tau_a(\phi_a-\phi_a^*)\quad (\tau_a(\lambda\phi_{ab}+\phi_a\phi_b)=\phi_b\phi_t+\lambda\phi_{bt}),\\
&R_k^1=R_k(\phi_a,\phi_{ab}),\quad R_k^2=R_k(\phi_a^*,\phi_{ab}),\quad R_k^3=R_k(\theta_a-\theta_a^*,\phi_{ab}),\\
&R_k^4=R_k(\rho_a,\phi_{ab})\quad (\rho_a=(\phi_t-\theta_b\phi_b)(\phi_c^*r_{ac}-\phi_c r_{ac}^*)-\phi_b\phi_d r_{bd}(\theta_a-\theta_a^*)).
\end{aligned}$$

The proof of this theorem will be easier if we notice that by putting $\mu=im$ in (4.4), we obtain operators similar to the operators (4.2).

The change of variables (4.5) in the adduced invariants allows us to obtain bases for the algebras AG_2^I and AG_2^{II} in the representations (4.2) and (4.4). These results can also be generalized for the case of several scalar functions.

4.3. Let us present some examples of new invariant equations

$$\begin{aligned}
&\phi_{tt}+\frac{1}{\mu^2}\left\{2\mu\left(\frac{1}{n}\phi_t\phi_{aa}+\phi_a\phi_t\right)+\phi_a\phi_b\phi_{ab}+\frac{1}{n}\phi_a\phi_a\phi_{bb}+\frac{1}{n}\phi_{bb}^2\right\}=\\
&\qquad=(2\mu\phi_t+\phi_a\phi_a+\phi_{aa})^2F,
\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
&-m^2\phi_{tt}+2im\left(\phi_a\phi_{at}+\frac{1}{n}\phi_t\phi_{aa}\right)+\phi_a\phi_b\phi_{ab}+\frac{1}{n}\phi_a\phi_a\phi_{bb}+\frac{1}{n}\phi_{aa}^2=\\
&\qquad=(2im\phi_t+\phi_a\phi_a+\phi_{aa})^2F.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Equations (4.18) and (4.19) are invariant, respectively, under the algebras $AG_2^I(1,n)$, $\mu\neq 0$ (4.2), and $AG_2^{II}(1,n)$, $m\neq 0$ (4.4). The F's are arbitrary functions of the invariants for corresponding algebras.

Evidently, wide classes of invariant equations can be constructed with the adduced invariants.

5. Conclusion

It is well-known that a mathematical model of physical or some other phenomena must obey one of the relativity principles of Galilei or Poincaré. Speaking the language of mathematics, it means that the equations of the model must be invariant under the Galilei or the Poincaré groups. Having bases of differential invariants for these groups (or for the corresponding algebras), we can describe all the invariant scalar equations, or sort the invariant ones out of a set of equations.

The construction of differential invariants for vector and spinor fields presents more complicated problems. The first-order invariants for a four-dimensional vector potential had been found in [18]. The cases of spinor and many-dimensional vector Poincaré-invariant equations and corresponding bases of invariants are still to be investigated.

Note 5. After having prepared the present paper, we became acquainted with the article [19] where realizations of the Poincaré group $P(1,1)$ and the corresponding conformal group were investigated, and all second-order scalar differential equations invariant under these groups were obtained. Reference [19] contains bases of absolute differential invariants of the order 2 for the Poincaré, the similitude, and the conformal groups in $(1+1)$-dimensional Minkowski space for various realizations of the corresponding Lie algebras.

Note 6. It was noticed by the referee that an essential misunderstanding arose in the calculation of second prolongations for differential operators, e.g. in formulae (1.5) and (1.25).

When we calculate such prolongations with the usual Lie technique (see, e.g., [8]), we imply that action of an operator of the form $X^{ab}\partial_{u_{ab}}$, where X^{ab} are some functions, is as follows

$$X^{ab}\partial_{u_{ab}}(u_{cd}u_{cd}) = 2X^{ab}u_{ab}, \quad \partial_{u_{ab}}u_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd}.$$

With this assumption, $\partial_{u_{ab}}u_{ba} = 0$, $a \neq b$.

Otherwise, the second prolongation of the operator J_{ab} (1.1) will be of the form

$$\overset{2}{J}_{ab} = J_{ab} + \hat{J}_{ab},$$
$$\hat{J}_{ab} = u_a\partial_{u_b} - u_b\partial_{u_a} + u_{ac}\partial_{u_{bc}} - u_{bc}\partial_{u_{ac}} + u_{ab}(\partial_{u_{bb}} - \partial_{u_{aa}}).$$

Note 7. The equations which are conditionally invariant with respect to the Poincaré and Galilei algebras were investigated in [20, 21].

Acknowledgement. Authors would like to thank the referees for valuable comments.

1. Lie S., *Math. Ann.*, 1884, **24**, 52–89.
2. Tresse A., *Acta Math.*, 1894, **18**, 1–88.
3. Vessiot E., *Acta Math.*, 1904, **28**, 307–349.
4. Michal A.D., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1951, **37**, 623–627.
5. Fushchych W.I., Yegorchenko I.A., *Dokl AN Ukr. SSR, Ser. A*, 1989, № 4, 29–32.
6. Fuschchych W.I., Yegorchenko I.A., *Dokl. AN Ukr. SSR, Ser. A*, 1989, № 5, 21–22.
7. Spencer A.J.M., Theory of invariants, New York, London, Academic Press, 1971.
8. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, New York, Academic Press, 1982.
9. Olver P., Application of Lie groups to differential equations, New York, Springer-Verlag, 1987.
10. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989 (in Russian); English version to be published by Kluwer Publishers, 1993.
11. Bluman G.W., Kumei S., Symmetries and differential equations, New York, Springer Verlag, 1989.

12. Fuschchych W.I., Yegorchenko I.A., *Dokl. AN SSSR*, 1988, **298**, 347–351.
13. Fuschchych W.I., Serov N.I., *Dokl. AN SSSR*, 1984, **278**, 847.
14. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **34**, 498.
15. Goff J.A., *Amer. J. Math.*, 1927, **49**, 117–122.
16. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802–810.
17. Fushchych W.I., Cherniha R.M., *J. Phys. A*, 1985, **18**, 3491–3503.
18. Yegorchenko I.A., Symmetry properties of nonlinear equations for complex vector fields, Preprint 89.48, Institute of Mathematics of the Ukr. Acad. Sci, 1989.
19. Rideau G., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1990, **31**, 1095–1105.
20. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel, 1987.
21. Fushchych W.I., *Ukrain. Mat. Zh.*, 1991, **43**, 1456.

Conditional symmetry and reduction of partial differential equations

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

Sufficient reduction conditions for partial differential equations possessing nontrivial conditional symmetry are established. The results obtained generalize the classical reduction conditions of differential equations by means of group-invariant solutions. A number of examples illustrating the reduction in the number of independent and dependent variables of systems of partial differential equations are considered.

An analysis of well-known methods for the construction of exact solutions of nonlinear partial differential equations (PDE) (e.g., method of group-theoretic reduction [1, 2], method of differential constraints [3], method of ansatz [4–6]) led us to conclude that most of these methods involve narrowing the set of solutions, i.e., out of the whole set of solutions of the particular equations specific subsets are selected that admit analytic description. In order to implement this approach, certain additional constraints (expressed in the form of equations) that enable us to distinguish these subsets must be imposed on the solution set. For obvious reasons, these additional equations are assumed to be simpler than the initial equations. By complementing the initial equation with additional constraints, we are usually led to an over-determined system of PDE. Consequently, there arises the problem of investigating the consistency of a system of PDE. A second restriction on the choice of these additional constraints is that the resulting system of PDE possesses broader symmetry than the initial system of PDE (or simply a different type of symmetry).

In the present paper we establish sufficient conditions for the reduction of differential equations that generalize the classical reduction conditions of PDE possessing a nontrivial Lie transformation group. Our concern will be with the following:

$$U_A(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0, \quad A = \overline{1, M}, \tag{1}$$

$$\xi_{a\mu}(x, u) u^\alpha_{x_\mu} - \eta^\alpha_a(x, u) = 0, \quad a = \overline{1, N}, \tag{2}$$

where $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $u(x) = (u^0(x), \ldots, u^{m-1}(x))$, $\underset{s}{u} = \{\partial^s u^\alpha / \partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_s}$, $0 \le \mu_i \le n-1\}$, $s = \overline{1, r}$, U_A, $\xi_{a\mu}$, η^α_a are sufficiently smooth functions, $N \le n-1$.

Below summation over repeated indices is understood. Let us introduce the notation

$$R_1 = \operatorname{rank} \|\xi_{a\mu}(x, u)\|_{a=1\ \mu=0}^{N\ n-1},$$

$$R_2 = \operatorname{rank} \|\xi_{a\mu}(x, u),\ \eta^\alpha_a(x, u)\|_{a=1\ \mu=0\ \alpha=0}^{N\ n-1\ m-1}.$$

It is self-evident that $R_1 \le R_2$. We shall prove that the case $R_1 = R_2$ leads to a reduction in the number of independent variables of the PDE (1), while the case

Ukr. Math. J., 1992, **44**, N 7, P. 875–886.

$R_1 < R_2$ leads to a reduction in the number of independent and the number of dependent variables of the PDE (1).

1. Reduction of number of independent variables of PDE. In this section we assume that $R_1 = R_2$.

Definition 1. *The set of first-order differential equations*

$$Q_a = \xi_{a\mu}(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta_a^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}, \tag{3}$$

where $\partial_{x_\mu} = \partial/\partial_{x_\mu}$, $\partial_{u^\alpha} = \partial/\partial u^\alpha$; $\xi_{a\mu}$, η_a^α are smooth functions, is said to be involutive if there exist function $f_{ab}^c(x,u)$ such that:

$$[Q_a, Q_b] = f_{ab}^c Q_c, \quad a,b = \overline{1,N}. \tag{4}$$

Here $[Q_1,Q_2] = Q_1Q_2 - Q_2Q_1$.

The simplest example of an involutive set of operators is a Lie algebra.

It is well-known that conditions (4) ensure that the over-determined system of PDE (2) is consistent (Frobenius theorem [7]). The general solution of the system (2) is given by the formulas

$$F^\alpha(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n+m-R_1}) = 0, \quad \alpha = \overline{0,m-1}, \tag{5}$$

where $\omega_j = \omega_j(x,u)$ are functionally independent first integrals of the system of PDE (2) and F_α are arbitrary smooth functions.

By virtue of the condition $R_1 = R_2$, first integrals (say, $\omega_1,\ldots,\omega_m$) may be chosen that satisfy the condition

$$\det \|\partial\omega_j/\partial u^\alpha\|_{j=1\ \alpha=0}^{m\ m-1} \neq 0. \tag{6}$$

By solving (5) with respect to ω_j, $j = 1,\ldots,m$, we have

$$\omega_j = \varphi_j(\omega_{m+1},\omega_{m+2},\ldots,\omega_{m+n-R_1}), \quad j = \overline{1,m}, \tag{7}$$

where φ_j are arbitrary smooth functions

Definition 2. *Formula (7) is called the ansatz of the field $u^\alpha = u^\alpha(x)$ invariant with respect to the involutive set of operators (3) provided (6) is satisfied.*

Formula (7) become especially simple and self-evident if

$$\begin{aligned} &\partial\xi_{a\mu}/\partial u^\alpha = 0, \quad \eta_a^\alpha = f_a^{\alpha\beta}(x)u^\beta, \\ &a = \overline{1,N}, \quad \mu = \overline{0,n-1}, \quad \alpha,\beta,\gamma = \overline{0,m-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Under conditions (8) the operators in (3) may be rewritten in the following non-Lie form [8]:

$$Q_a = \xi_{a\mu}(x)\partial x_\mu + \eta_a(x), \quad a = \overline{1,N}, \tag{9}$$

where $\eta_a = \| - \partial\eta_a^\alpha/\partial u^\beta\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$ are $(m\times m)$ matrices and the system (2) takes the form

$$\xi_{a\mu}(x)u_{x_\mu} + \eta_a(x)u = 0, \quad a = \overline{1,N}. \tag{10}$$

Here $u = (u^0,u^1,\ldots,u^{m-1})^T$ is a column function.

In this case, the set of functionally independent first integrals of the system (2) with $R_1 = R_2$ may be chosen as follows [7]:

$$\begin{aligned} &\omega_j = b_{j\alpha}(x)u^\alpha, \quad j = \overline{1,m}, \\ &\omega_i = \omega_i(x), \quad i = \overline{m+1, m+n-R_1} \end{aligned} \tag{11}$$

and, moreover, $\det \|b_{j\alpha}(x)\|_{i=1}^{m}{}_{\alpha=0}^{m-1} \neq 0$.

Substituting (11) in (7) and solving for the variables u^α, $\alpha = 0, \dots, m-1$, we have

$$u^\alpha = A^{\alpha\beta}(x)\varphi^\beta(\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \dots, \omega_{m+n-R_1})$$

or (in matrix notation)

$$u = A(x)\varphi(\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \dots, \omega_{m+n-R_1}). \tag{12}$$

It is easily verified that the matrix

$$(x) = \left(\|b_{j\alpha}(x)\|_{j=1}^{m}{}_{\alpha=0}^{m-1}\right)^{-1}$$

satisfies the following system of PDE:

$$Q_a A \equiv \xi_{a\mu}(x)A_{x_\mu} + \eta_a(x)A = 0, \quad a = \overline{1,N}, \tag{13}$$

and that the functions $\omega_{m+1}(x), \omega_{m+2}(x), \dots, \omega_{m+n-R_1}(x)$ form a complete set of functionally independent first integrals of the system of PDE

$$\xi_{a\mu}(x)\omega_{x_\mu} = 0, \quad a = \overline{1,N}. \tag{14}$$

The ansatz (7) is said to *reduce* the system of PDE (1) if substitution of (7) in (1) yields a system of PDE for the functions $\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^{m-1}$ that contains only the new independent variables $\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \dots, \omega_{m+1-R_1}$.

Definition 3. *The system of PDE (1) is conditionally invariant with respect to the involutive set of differential operators (3) if the over-determined system of PDE (1), (2) is Lie invariant with respect to a one-parameter transformation group with generators Q_a, $a = 1, \dots, N$.*

Before stating the reduction theorem, we prove several auxiliary assertions.

Lemma 1. *Suppose that the operators (3) form an involutive set. Then the set of differential operators*

$$Q'_a = \lambda_{ab}(x)Q_b, \quad a = \overline{1,N} \tag{15}$$

with $\det \|\lambda_{ab}(x,u)\|_{a,b=1}^N \neq 0$ *is also involutive.*

We prove the assertion by direct computation. In fact,

$$\begin{aligned} [Q'_a, Q'_b] = [\lambda_{ac}Q_c, \lambda_{bd}Q_d] = \lambda_{ac}(Q_c\lambda_{bd})Q_d - \lambda_{bd}(Q_d\lambda_{ac})Q_c + \lambda_{ac}\lambda_{bd}f_{cd}^{d_1}Q_{d_1} = \\ = \tilde{f}_{ab}^c Q_c = \tilde{f}_{ab}^c \lambda_{cd}^{-1} Q'_d. \end{aligned}$$

Here λ_{cd}^{-1} are the elements of the inverse of the matrix $\|\lambda_{ab}(x,u)\|_{a,b=1}^N$.

Lemma 2. *Suppose that the differential operators (3) satisfy the condition $R_1 = R_2$ and that the conditions*

$$[Q_a, Q_b] = 0, \quad a, b = \overline{1,N} \tag{16}$$

are satisfied. Then there exists a change of variables

$$x'_\mu = f_\mu(x,u), \quad \mu = \overline{0,n-1}, \quad u'^\alpha = g^\alpha(x,u), \quad \alpha = \overline{0,m-1} \tag{17}$$

that reduces the operators Q_a to the form $Q'_a = \partial_{x'_{a-1}}$.

Proof. It is known that for any first-order differential operator

$$Q = \xi_\mu(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha},$$

where ξ_μ and η^α are sufficiently smooth functions, there exists a change of variables (17) that reduces the operator Q to the form $Q' = \partial_{x'_0}$ (cf. [1]). Consequently, the operator Q_1 from the set (3) is reduced to the form $Q'_1 = \partial_{x'_0}$ by means of the change of variables (17). From the condition $[Q_1, Q_a] = 0$, $a = 2,\ldots,N$, it follows that the coefficients of the operators $Q'_2, Q'_3, \ldots, Q'_N$ do not depend on the variable x'_0, whence the operator Q'_2 reduces to the operator $Q''_2 = \partial_{x''_1}$ under the change of variables

$$x''_0 = x'_0, \quad x''_\mu = f'_\mu(x'_1,\ldots,x'_{n-1},u'), \quad \mu = \overline{1,n-1},$$
$$u''_\alpha = g'^\alpha(x'_1,\ldots,x'_{n-1},u'), \quad \alpha = \overline{0,m-1},$$

without the form of the operator Q'_1 changing.

Repeating the above procedure $N-2$ times completes the proof.

Lemma 3. *A system of PDE of the form (1) that is conditionally invariant with respect to a set of differential operators $\partial_{x'_\mu}$, $\mu = 0, N-1$, possesses the structure*

$$\begin{gathered} U_A = F_{AB}W_B(x_N, x_{N+1},\ldots,x_{n-1},u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{r}{u}) + F^\alpha_{A\mu}u^\alpha_{x_\mu}, \\ A = \overline{1,M}, \quad \alpha = \overline{0,m-1}, \quad \mu = \overline{0,N-1}, \end{gathered} \tag{18}$$

where F_{AB} and $F^\alpha_{A\mu}$ are arbitrary smooth functions of x and $u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{r}{u}$, W_B are arbitrary smooth functions, and, moreover, $\|F_{AB}\|^M_{A,B=1} \neq 0$.

We shall prove the lemma with $N=1$. By Definition 3, the system (1) is conditionally invariant under the operator $Q = \partial_{x_0}$ if the system

$$\begin{gathered} U_A(x,u,\underset{1}{u},\ldots,\underset{r}{u}) = 0, \quad A = \overline{1,M}, \\ u^\alpha_{x_0} = 0, \quad \alpha = \overline{1,m-1} \end{gathered} \tag{19}$$

is Lie invariant with respect to a one-parameter translation group with respect to the variable x_0. Denoting by $\tilde{Q}$ the r-th extension of Q, the Lie invariant criteria for the system of PDE (19) under this group assume the form (cf. [1, 2])

$$\tilde{Q}U_A\Big|_{\substack{U_B=0\\ u^\alpha_{x_0}=0}} = 0, \quad A,B = \overline{1,N}, \quad \alpha = \overline{0,m-1}, \tag{19a}$$

$$\tilde{Q}u^\alpha_{x_0}\Big|_{\substack{U_B=0\\ u^\beta_{x_0}=0}} = 0, \quad B = \overline{1,N}, \quad \alpha,\beta = \overline{0,m-1}. \tag{19b}$$

Direct computation shows that the relations

$$\tilde{Q} \equiv \partial_{x_0}, \quad \tilde{Q}u^\alpha_{x_0} \equiv \partial_{x_0}(u^\alpha_{x_0}) = 0$$

hold (recall that in the extended space of the variables $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}$ variables x_0 and $u^\alpha_{x_0}$ are independent), whence, using the method of undetermined coefficients, we may rewrite (19a) and (19b) in the form

$$\partial U_A/\partial x_0 = R_{AB}U_B + P^\alpha_A u^\alpha_{x_0}, \quad A = \overline{1, M}, \tag{19c}$$

where R_{AB} and P^α_A are arbitrary smooth functions of $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}$.

The system (19c) may be considered a system of inhomogeneous ordinary differential equations for the functions U_A, $A = 1, \ldots, M$. Integrating (19c) with respect to $P^\alpha_A = 0$, we have

$$U^{(0)}_A = F_{AB}W_B, \quad A = \overline{1, M},$$

where W_B, $B = 1, \ldots, M$, are arbitrary smooth functions of the variables $x_1, x_2, \ldots,$ $x_{n-1}, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}$; $F = \|F_{AB}\|^M_{A,B=1}$ is the fundamental matrix of the system (19c) (which is known to satisfy the condition $\det F \neq 0$).

Further, by applying the method of variation of an arbitrary parameter, we deduce (18) with $N = 1$, where

$$F^\alpha_{A0} = F_{AB}\int (F)^{-1}_{BC}P^\alpha_c\, dx_0, \quad A = \overline{1, M}, \quad \alpha = \overline{0, m-1}.$$

The lemma is proved.

Theorem 1. *Suppose that the system of PDE (1) is conditionally invariant with respect to the involutive set of operators (3). Then the ansatz invariant with respect to the set of operators (3) reduces this system.*

Proof. By the definition of the quantity $R_1, R_1 \leq N$. We denote by δ the difference $N - R_1$. Then R_1 equations of the system (2) are linearly independent (without loss of generality, we may assume that it is the first R_1 equations which are linearly independent), and the other δ equations are linear combinations of these first R_1 equations.

By the condition that $R_1 = R_2$, there exists a nonsingular $(R_1 \times R_1)$ matrix $||\lambda_{ab}(x, u)||^{R_1}_{a,b=1}$ such that

$$\lambda_{ab}(\xi_{b\mu}u^\alpha_{x_\mu} - \eta^\alpha_b) = u^\alpha_{x_{a-1}} + \sum_{\mu=R_1}^{n-1} \tilde{\xi}_{a\mu}u^\alpha_{x_\mu} - \tilde{\eta}^\alpha_a, \quad a = \overline{1, R_1} \quad \alpha = \overline{0, m-1}.$$

By the definition of conditional invariance, the system of PDE (1), (2) is invariant with respect to one-parameter transformation groups with generators (3), whence the equivalent system of PDE

$$\begin{gathered} U_A(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0, \quad A = \overline{1, M}, \\ u^\alpha_{x_{a-1}} + \sum_{\mu=R_1}^{n-1} \tilde{\xi}_{a\mu}u^\alpha_{x_\mu} - \tilde{\eta}^\alpha_a = 0, \quad a = \overline{1, R_1}, \quad \alpha = \overline{0, m-1} \end{gathered} \tag{20}$$

is invariant with respect to a one-parameter group with generators

$$Q'_a = \lambda_{ab}Q_b = \partial_{x_{a-1}} + \sum_{\mu=R_1}^{n-1} \tilde{\xi}_{a\mu}\partial_{x_\mu} + \tilde{\eta}^\alpha_a\partial_{u^\alpha}. \tag{21}$$

In fact, the action of a one-parameter transformation group with infinitesimal operator Q_a on the solution manifold of the system (20) is equivalent to an identity transformation.

Since the set of operators (21) is involutive (Lemma 1), there exist functions $f^c_{ab}(x,u)$ such that

$$[Q'_a, Q'_b] = f^c_{ab} Q'_c, \quad a,b,c = \overline{1, R_1}. \tag{22}$$

Computing the commutators on the left side of (22) and equating the coefficients of the linearly independent operators ∂_{x_0}, ∂_{x_1}, $\partial_{x_{R_1-1}}$ gives us $f^c_{ab} = 0$, with $a,b,c = 1,\dots,R_1$. Consequently, the operators Q'_a commute. Hence, by Lemma 2, there exists a change of variables (17) that reduces these operators to the form $Q''_a = \partial/\partial x'_{a-1}$.

Expressed in terms of the new variables x' and $u'(x')$, the system (20) takes the form

$$\begin{aligned} & U'_A(x', u', \underset{1}{u'}, \dots, \underset{r}{u'}) = 0, \quad A = \overline{1, M}, \\ & u'^{\alpha}_{x_{a-1}} = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \quad a = \overline{1, R_1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Moreover, the system of PDE (23) is conditionally invariant with respect to the set of operators $Q''_a = \partial'_{x_{a-1}}$, $a = 1,\dots,R_1$, whence, by Lemma 3, the system (23) may be rewritten in the form

$$\begin{aligned} & U'_A = F_{AB} W_B(x'_{R_1}, \dots, x'_{n-1}, u', \underset{1}{u'}, \dots, \underset{r}{u'}) + F^{\alpha}_{A\mu} u'^{\alpha}_{x'_\mu}, \\ & A = \overline{1, M}, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \quad \mu = \overline{0, R_1 - 1}, \\ & u'^{\alpha}_{x'_{a-1}} = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \quad a = \overline{1, R_1}, \end{aligned}$$

where $\det \|F_{AB}\|^{R_1}_{A,B=1} \neq 0$, whence

$$\begin{aligned} & W_A(x'_{R_1}, \dots, x'_{n-1}, u', \underset{1}{u'}, \dots, \underset{r}{u'}) = 0, \\ & u'^{\alpha}_{x'_{a-1}} = 0, \quad A = \overline{1, R_1}, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \quad a = \overline{1, R_1}. \end{aligned} \tag{24}$$

The ansatz of the field $u'^{\alpha} = u'^{\alpha}(x')$ invariant under the involutive set of operators $Q''_c = \partial_{x'_{a-1}}$, $a = 1,\dots,R_1$, is given by the formulas

$$u'^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x'_{R_1}, x'_{R_1+1}, \dots, x'_{n-1}), \quad \alpha = \overline{0, m-1}. \tag{25}$$

Here φ^{α} are arbitrary sufficiently smooth functions.

Substituting (25) in (24), we obtain

$$W_A(x'_{R_1}, \dots, x'_{n-1}, u', \underset{1}{u'}, \dots, \underset{r}{u'}) \equiv W'_A(x'_{R_1}, \dots, x'_{n-1}, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \dots, \underset{r}{\varphi}) = 0, \tag{26}$$

where $\underset{s}{\varphi}$ is the set of partial derivatives of the functions $\varphi^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x'_{R_1}, \dots, x'_{n-1})$ of order s.

Rewriting ansatz (25) in terms of the initial variables x and $u(x)$

$$g^{\alpha}(x,u) = \varphi^{\alpha}(f_{R_1}(x,u), \dots, f_{n-1}(x,u)), \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{27}$$

yields the ansatz for the field $u^{\alpha} = u^{\alpha}(x), \alpha = 0,\dots,m-1$, invariant with respect to the involutive set of operators (3) that reduces the system (1) to a system of PDE with $n - R_1$ independent variables. The theorem is proved.

Corollary. *Suppose that the operators*

$$Q_a = \xi_{a\mu}(x,u)\partial_{x_\mu} + \eta_a^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}, \quad a=\overline{1,N}, \quad N \le n-1$$

are the basis elements of a subalgebra of the invariance algebra of the system of equations (1) and, moreover, that $R_1 = R_2$. Then the ansatz invariant in the Lie algebra $\langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_N\rangle$ reduces the system (1) to a system of PDE having $n-N$ independent variables.

Proof. From the definition of a Lie algebra it follows that the operators Q_a satisfy (4) with $f_{ab}^c = \mathrm{const}$. Consequently, they form an involutive set of first-order differential operators, which renders the above assertion a direct consequence of Theorem 1.

By the above assertion, the classical reduction theorem for differential equations by means of group-invariant solutions [1, 2, 9] is a special case of Theorem 1. If any one of the operators Q_a does not belong to the invariance algebra of the given equation and if the conditions of Theorem 1 hold, a reduction via Q_a-conditionally invariant ansätzes is obtained (numerous examples of conditionally invariant solutions are constructed in [4–6, 10–14]).

We shall now consider several examples.

Example 1. The Lie-maximal invariance algebra of the Schrodinger equation

$$\Delta_3 u + U(\vec{x}^{\,2})u = 0 \tag{28}$$

with arbitrary function U is the Lie algebra of the rotation group having basis elements

$$J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial x_a, \quad a,b=\overline{1,3}. \tag{29}$$

To obtain the ansatz invariant relative to the set of operators (29), the complete set of first integrals of the following system of PDE must be constructed:

$$x_a u_{x_b} - x_b u_{x_a} = 0, \quad a,b=\overline{1,3}. \tag{30}$$

This set contains $3-R_1$ functionally invariant first integrals, where

$$R_1 = \operatorname{rank}\|\xi_{ab}(x)\|_{a,b=1}^3 = \operatorname{rank}\left\|\begin{matrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{matrix}\right\| = 2.$$

Consequently, the ansatz for the field $u = u(\vec{x})$ invariant with respect to a Lie algebra having basis elements (29) has the form

$$u(\vec{x}) = \varphi(\omega), \tag{31}$$

where $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1)$ is an arbitrary smooth function and $\omega = \omega(\vec{x})$ is the first integral of the system of PDE (30). It is not hard to see that $\omega = \vec{x}^{\,2}$ satisfies (30) and, consequently, is the first integral. Substitution of (31) in (28) yields an ordinary differential equation for the function $\varphi(\omega)$:

$$4\omega\ddot{\varphi} + 6\dot{\varphi} + U(\omega)\varphi = 0.$$

Thus, the ansatz for the field $u = u(\vec{x})$ invariant with respect to a three-dimensional Lie algebra with basis elements (29) reduces (28) to a $(3-R_1)$-dimensional PDE (in this case, to an ordinary differential equation).

Example 2. Consider the nonlinear eikonal equation

$$u_{x_0}^2 - u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2 - u_{x_3}^2 + 1 = 0. \tag{32}$$

As shown in [15], the maximal invariance algebra of (32) is the 21-parameter conformal algebra $AC(2,3)$. This algebra contains, in particular, a one-dimensional subalgebra generated by the operator $Q = x_0\partial_u - u\partial_{x_0}$.

To obtain the ansatz invariant under the operator Q, the complete set of first integrals of the following PDE must be constructed:

$$uu_{x_0} + x_0 = 0. \tag{33}$$

The solution of (33) is sought for in the implicit form $f(x,u) = 0$, whence $uf_{x_0} - x_0 f_u = 0$.

The complete set of first integrals of the latter PDE is $\omega_0 = u^2 + x_0^2$, $\omega_1 = x_1$, $\omega_2 = x_2$, $\omega_3 = x_3$. Solving $f(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$ with respect to ω_0, we have

$$u^2 + x_0^2 = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{34}$$

Consequently, (34) gives the ansatz of the field $u^\alpha = u^\alpha(x)$ invariant under the operator Q. Solving (34) for u yields

$$u = \{-x_0^2 + \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\}^{1/2}. \tag{35}$$

Let us emphasize that ansatz (34) cannot be represented in the form (12), since the coefficients of Q do not satisfy condition (8).

Substituting (35) in (32) gives us a three-dimensional PDE for the function $\varphi = \varphi(\vec{\omega})$:

$$\varphi_{\omega_1}^2 + \varphi_{\omega_2}^2 + \varphi_{\omega_3}^2 - \varphi^2 = 0.$$

Example 3. A detailed group-theoretic analysis of the nonlinear wave equation

$$u_{tt} = (a^2(u)u_x)_x, \tag{36}$$

where $a(u)$ is some smooth function, was performed in [16]. It was established that the maximal invariance algebra of (36) has the basis operators

$$Q_1 = \partial_t, \quad Q_2 = \partial_x, \quad Q_3 = t\partial_t + x\partial_x, \tag{37}$$

whence the most general group-invariant ansatz for the PDE (36) is given by the formula $u = \varphi(\omega)$, where $\omega = \omega(t,x)$ is the first integral of the PDE

$$\{\alpha\partial_t + \beta\partial_x + \delta(t\partial_t + x\partial_x)\}\omega(t,x) = 0. \tag{38}$$

Here α, β, and δ are arbitrary real constants. Using transformations from the group G with generators of the form (37), Eq. (38) may be reduced to either one of the following equations:

1) $\alpha\omega_t + \beta\omega_x = 0$ (under $\delta = 0$);
2) $t\omega_t + x\omega_x = 0$ (under $\delta \neq 0$),

The first integrals of these equations are given by the formulas $\omega = \alpha x - \beta t$ and $\omega = xt^{-1}$, respectively.

Thus, there are two distinct group-invariant ansätzes of the PDE (36) with arbitrary function $a(u)$:

$$\begin{aligned} &1)\quad u(t,x) = \varphi(\alpha x - \beta t), \\ &2)\quad u(t,x) = \varphi(xt^{-1}). \end{aligned} \tag{39}$$

Substitution of the above ansätzes in (36) yields the ordinary differential equations

$$\begin{aligned} &1)\quad (\beta^2 - \alpha^2 a^2(\varphi))\ddot\varphi - 2\alpha^2 a(\varphi)\dot a(\varphi)\dot\varphi^2 = 0, \\ &2)\quad (\omega^2 - a^2(\varphi))\ddot\varphi - 2\omega\dot\varphi - 2a(\varphi)\dot a(\varphi)\dot\varphi^2 = 0. \end{aligned}$$

It was established recently [17] that ansätzes (39) do not exhaust the complete set of ansätzes reducing the PDE (36) to ordinary differential equations. This result is a consequence of conditional symmetry, a property that is not found within the framework of the infinitesimal Lie method.

Let us show, following [17], that (36) is conditionally invariant under the operator

$$Q = \partial_t - \varepsilon a(u)\partial_x, \tag{40}$$

where $\varepsilon = \pm 1$.

Proceeding on the basis of the second extension of Q in (36), we have

$$\tilde Q\{u_{tt} - (a^2(u)u_x)_x\} = \varepsilon \dot a u_x\{u_{tt} - (a^2 u_x)_x\} + \varepsilon(\dot a \dot u_x + \dot a\partial_x)(u_t^2 - a^2 u_x^2), \tag{41}$$

whence it follows that the PDE (36) is Lie-noninvariant with respect to a group with infinitesimal operator (40). But if the additional constraint

$$Q_u \equiv u_t - \varepsilon a(u)u_x = 0 \tag{42}$$

is imposed on $u(t,x)$, the right side of (41) vanishes. Consequently, the system (36), (42) is Lie-invariant with respect to a group with generator (40), whence we conclude that the initial PDE (36) is conditionally invariant under the operator Q.

The complete set of functionally independent first integrals of (42) may be chosen in the form $\omega_1 = u$, $\omega_2 = x + \varepsilon a(u)t$.

Consequently, the ansatz invariant under the operator Q is given by the formula $\omega_2 = \varphi(\omega^1)$, or

$$x + \varepsilon a(u)t = \varphi(u), \tag{43}$$

where $\varphi(u)$ is an arbitrary sufficiently smooth function.

Substituting (43) in (36) leads us to conclude that the PDE (36) is satisfied identically. Put differently, (43) gives a solution of the nonlinear equation (36) for an arbitrary function $\varphi(u)$. Recall that solutions that are obtained by means of the group-invariant ansätzes (39) contain two arbitrary constants of integration, and cannot, in theory, contain arbitrary functions.

Thus, the conditional symmetry of PDE enlarges the range of possibilities for reduction of PDE in an essential way.

Example 4. Consider the system of nonlinear Dirac equations

$$\{i\gamma_\mu\partial_\mu - \lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\}\psi = 0, \tag{44}$$

where γ_μ, $\mu = 0,\ldots,3$, are (4×4) Dirac matrices, $\psi = \psi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ a four-dimensional complex column function, $\bar\psi = (\psi^*)^T\gamma_0$, λ, k real constants, and $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, $\mu = 0,\ldots,3$.

It is well known (cf. [5]) that the Lie-maximal invariance group of the system of PDE (44) is the 11-parameter extended Poincaré group complemented with the 3-parameter group of linear transformations in the space ψ^α, $\psi^{*\alpha}$. In [5, 10] it is established that the conditional symmetry of the nonlinear Dirac equation is essentially broader. From [10], it follows that the system: (44) is conditionally invariant with respect to the involutive set of operators

$$\begin{aligned} &Q_1 = \frac{1}{2}(\partial_0-\partial_3), \quad Q_2 = \omega_1\partial_2 - \{B_1\psi\}^\alpha\partial_{\psi^\alpha},\\ &Q_3 = \frac{1}{2}(\partial_0+\partial_3) - \dot\omega_1(x_1\partial_1+x_2\partial_2) - \dot\omega_2\partial_1 - \{B_2\psi\}^\alpha\partial_{\psi^\alpha}, \end{aligned} \tag{45}$$

where B_1 and B_2 are (4×4) matrices of the form

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2}(1-2k)\dot\omega_1\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3),\\ B_2 &= -k\dot\omega_1 + (2\omega_1)(2\dot\omega_1^2-\omega_1\ddot\omega_1)(\gamma_1x_1+2(k-1)\gamma_2x_2)(\gamma_0+\gamma_3) + (2\omega_1)^{-1}\times\\ &\quad\times((2\dot\omega_1\dot\omega_2-\omega_1\ddot\omega_2)\gamma_1 + 2(\omega_3\dot\omega_1-\omega_1\dot\omega_3)\gamma_2)(\gamma_0+\gamma_3), \end{aligned}$$

ω_1, ω_2, and ω_3 are arbitrary smooth functions of x_0+x_3, and $\{\psi\}^\alpha$ denotes the α-th component of the function ψ. Since the coefficients of the operators (45) satisfy conditions (8), they may be rewritten in non-Lie form:

$$\begin{aligned} &Q_1 = \frac{1}{2}(\partial_0-\partial_3), \quad Q_2 = \omega_1\partial_2 + B_1,\\ &Q_3 = \tfrac{1}{2}(\partial_0+\partial_3) - \dot\omega_1(x_1\partial_1+x_2\partial_2) - \dot\omega_2\partial_1 + B_2. \end{aligned}$$

Consequently, the ansatz of the field $\psi(x)$ invariant with respect to the set of operators Q_1, Q_2, Q_3 must be found in the form (12), where $A(x)$ is a (4×4) matrix and $\omega = \omega(x)$ a real function satisfying the following system of PDE

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(A_{x_0}-A_{x_2}) = 0, \quad \omega_1A_{x_2} + B_1A = 0,\\ &\frac{1}{2}(A_{x_0}+A_{x_3}) - (\dot\omega_1x_1+\dot\omega_2)A_{x_1} - \dot\omega_1x_2A_{x_2} - B_2A = 0,\\ &\omega_{x_0}-\omega_{x_3} = 0, \quad \omega_{x_2} = 0,\\ &\omega_{x_0}+\omega_{x_3} - 2(\dot\omega_1x_1+\dot\omega_2)\omega_{x_1} - 2\dot\omega_1x_2\omega_{x_2} = 0. \end{aligned}$$

Omitting the steps in integration of the above system, let us write down the final result, the ansatz for the field $\psi = \psi(x)$ invariant with respect to the involutive set of operators (45):

$$\begin{aligned} \psi(x) = \omega_1^k\exp\{&(2\omega_1)^{-1}(\dot\omega_1x_1+\dot\omega_2)\gamma_1(\gamma_0+\gamma_3) +\\ &+ (2\omega_1)^{-1}((2k-1)\dot\omega_1x_2+\omega_3)\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3)\}\varphi(\omega_1x_1+\omega_2). \end{aligned} \tag{46}$$

This ansatz reduces me system of PDE (44) to a system of ordinary differential equations for the 4-component function $\varphi = \varphi(\omega)$,

$$i\gamma_1\dot\varphi - \lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/2k}\varphi = 0. \tag{47}$$

The general solution of the system (47) has the form [5]

$$\varphi = \exp\{i\lambda\gamma_1(\bar\chi\chi)^{1/2k}\omega\}\chi,$$

where χ is an arbitrary constant 4-component column. Substituting the resulting expression for $\varphi = \varphi(\omega)$ in (46) gives us the class of exact solutions of the nonlinear Dirac equation containing three arbitrary functions.

Nonlinear equations of mathematical and theoretical physics that admit nontrivial conditional symmetry have been analyzed in [14].

3. Reduction of number of independent and number of dependent variables of PDE. Suppose (3) is an involutive set of operators that satisfy the condition $R_2 - R_1 = \delta > 0$. In this case we have to modify somewhat the above technique of reducing PDE by means of ansätzes invariant with respect to the involutive set (3). Note that the case in which (3) are basis operators of a subalgebra of the Lie invariance algebra of a given equation satisfying the condition $R_1 < R_2$ leads to "partially invariant" solutions [18].

We wish to solve the initial system of PDE in implicit form:

$$\omega^\alpha(x,u) = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{48}$$

where ω^α are smooth functions satisfying the condition

$$\det \|\partial\omega^\alpha/\partial u^\beta\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1} \neq 0. \tag{49}$$

As a result, (1) and (2) assume the form

$$H_A(x, u, \omega, \underset{1}{\omega}, \ldots, \underset{r}{\omega}) = 0, \quad A = \overline{1, M}, \tag{50}$$

$$\xi_{a\mu}(x,u)\omega^\alpha_{x_\mu} + \eta^\beta_a(x,u)\omega^\alpha_{u^\beta} = 0, \quad a = \overline{1, N}, \tag{51}$$

where $\underset{s}{\omega} = \{\partial^s\omega/\partial x_{\mu_1}\cdots\partial_{x_{\mu_p}}\partial u^{\alpha_1}\cdots\partial u^{\alpha_q},\ p+q = s\}$.

It is clear that, as they are defined in the space of the variables x, u, $\omega(x,u)$, the operators (3) satisfy the condition $R_1' = R_2'$ (since the coefficients of ∂_{ω^α} are all zero). By means of the same reasoning as in the proof of Theorem 1, we may establish the following result. There exists a change of variables (17) that reduces the system (51) to the form

$$\omega^\alpha_{x'_\mu} = 0, \quad \mu = \overline{0, R_1 - 1}, \quad \omega^\alpha_{u'^\beta} = 0, \quad \beta = \overline{0, \delta - 1}. \tag{52}$$

If the system (48), (50) is conditionally invariant with respect to the set of operators (3) and if condition (52) holds, it may be rewritten as follows:

$$\begin{gathered} \omega^a(x', u') = 0, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \\ H'_A(x'_{R_1}, \ldots, x'_{n-1}, u'^\delta, \ldots, u'^{m-1}, \omega, \underset{1}{\omega}, \ldots, \underset{r}{\omega}) = 0, \end{gathered} \tag{53}$$

where the symbol $\underset{s}{\omega}$ denotes the collection of partial derivatives of the function ω of order s with respect to the variables $x'_{R_1}, \ldots, x'_{n-1}, u'^\delta, \ldots, u'^{m-1}$.

Integrating (52) yields the ansatz of the field w^α:

$$\omega^\alpha = F^\alpha(x'_{R_1}, \ldots, x'_{n-1}, u'^\delta, \ldots, u'^{m-1}), \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{54}$$

where F^α are arbitrary smooth functions. But the ansatz of the field $u'^\alpha(x')$ cannot be obtained by substituting (54) in the relations $\omega^\alpha(x', u'(x')) = 0$, $\alpha = 0, \ldots, m-1$, since the inequality $R_2 - R_1 = \delta > 0$ violates the condition (49) (if $\delta > 0$, the matrix $\|\partial\omega^\alpha/\partial u^{i\beta}\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$ has null columns).

To overcome this problem, we shall, by definition, let the expressions

$$\begin{aligned} &F^\alpha(x'_{R_1}, \ldots, x'_{n-1}, u'^\delta, \ldots, u'^{m-1}) = 0, \quad \alpha = \overline{\delta, m-1}, \\ &u'^j = C_j, \quad j = \overline{0, \delta-1} \end{aligned}$$

be the ansatz of the field $u'^\alpha = u'^\alpha(x')$ invariant with respect to the set of operators

$$Q_j = \partial_{x'_{j-1}}, \quad j = \overline{1, R_1}, \quad X_i = \partial_{u'^{i-1}}, \quad i = \overline{1, \delta}. \tag{55}$$

The latter ansatz may be rewritten in the form

$$\begin{aligned} &u'^\alpha = C_\alpha, \quad \alpha = \overline{0, \delta-1}, \\ &u'^{\alpha+\beta} = \varphi^\beta(x'_{R_1}, \ldots, x'_{n-1}), \quad \beta = \overline{0, m-\delta-1}, \end{aligned} \tag{56}$$

where φ^β are arbitrary smooth functions and C_α are arbitrary constants.

Rewriting (56) in terms of the initial variables gives us

$$\begin{aligned} &g^\alpha(x, u) = C_\alpha, \quad \alpha = \overline{0, \delta-1}, \\ &g^{\beta+\delta}(x, u) = \varphi^\beta(f_{R_1}(x, u), \ldots, f_{n-1}(x, u)), \quad \beta = \overline{0, m-\delta-1}. \end{aligned} \tag{57}$$

Moreover, substituting (57) in the initial system of PDE (1) or, equivalently, substituting the expressions $\omega^\alpha = g^\alpha - C_\alpha$, $\alpha = 0, \ldots, \delta-1$, $\omega^\beta = g^{\beta+\delta} - \varphi^\beta$, $0 \le \beta \le m-\delta-1$ in the PDE (50) yields a system of M differential equations for $m-\delta$ functions. Consequently, the dimension of the system (1) decreases by R_1 independent and δ dependent variables.

Let us rewrite (57) in a form more convenient in applications. For this purpose, note that, without loss of generality, we may renumber the operators (3) satisfying the condition $R_2 - R_1 = \delta > 0$ in such a way that the first R_1 operators satisfy the condition

$$\operatorname{rank} \|\xi_{a\mu}\|_{a=1}^{R_1}{}_{\mu=0}^{n-1} = \operatorname{rank} \|\xi_{a\mu}, \eta_a^\alpha\|_{a=1}^{R_1}{}_{\alpha=0}^{m-1}{}_{\mu=0}^{n-1}$$

and the last $N - R_2$ operators are linear combinations of the previous R_2 operators.

Let $\omega_j(x, u)$, $j = 1, \ldots, m+n-R_2$, be the complete set of functionally independent first integrals of the system (51) and, moreover,

$$\operatorname{rank} \|\partial\omega_j/\partial u^\alpha\|_{j=1}^{m-\delta}{}_{\alpha=0}^{m-1} = m-\delta$$

and let $\rho_j(x, u)$ be the solutions of the equations $Q_{1+R_1}\rho(x, u) = 1$ with $i = 1, 2, \ldots, \delta$. Then (57) may be expressed in the following equivalent form:

$$\begin{aligned} &\rho_i(x, u) = C_i, \quad i = \overline{1, \delta}, \\ &\omega_j(x, u) = \varphi^j(\omega_{R_1}(x, u), \ldots, \omega_{n-1}(x, u)), \quad j = \overline{1, m-\delta}. \end{aligned} \tag{58}$$

Definition 4. *Expressions (58) are called the ansatz of the field $u^\alpha = u^\alpha(x)$ invariant with respect to the involutive set of operators (3) provided $R_2 - R_1 \equiv \delta > 0$.*

The above reasoning may be summarized in the form of a theorem.

Theorem 2. *Suppose that the system of PDE (1) is conditionally invariant with respect to the involutive system of operators (3) and, moreover, that $R_1 < R_2$. Then the system (1) is reduced by the ansatz invariant with respect to the set of operators (3).*

Example 1. The system of two wave equations

$$\Box u = 0, \quad \Box v = 0 \tag{59}$$

is invariant with respect to a one-parameter group with infinitesimal operator $Q = \partial_v$. Since $R_1 = 0$ and $R_2 = 1$, the parameter δ is equal to 1. The complete set of first integrals of the equation $\partial\omega(x,u,v)/\partial v = 0$ is given by the functions

$$\omega_\mu = x_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad \omega_4 = u,$$

whence the ansatz for the field $u(x)$, $v(x)$ invariant under the operator Q has the form (58),

$$u = \varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad v = C, \quad C = \text{const}.$$

Substituting the above expressions in (59) yields

$$\varphi_{\omega_0\omega_0} - \varphi_{\omega_1\omega_1} - \varphi_{\omega_2\omega_2} - \varphi_{\omega_3\omega_3} = 0$$

i.e., the number of dependent variables of the initial system (59) is reduced.

Example 2. Consider the system of nonlinear Thirring equations

$$iv_x = mu + \lambda_1|u|^2 v, \quad iu_y = mv + \lambda_2|v|^2 u, \tag{60}$$

where u, v are complex functions of x, y and λ_1, λ_2 are real constants.

The above system admits a one-parameter transformation group with generator

$$Q = iu\partial_u + iv\partial_v - iu^*\partial_{u^*} - iv^*\partial_{v^*}.$$

Following the change of variables

$$u(x,y) = H_1(x,y)\exp\{iZ_1(x,y) + iZ_2(x,y)\},$$
$$v(x,y) = H_2(x,y)\exp\{iZ_1(x,y) - iZ_2(x,y)\},$$

where H_j and Z_j are the new dependent variables, Q assumes the form $Q' = \partial_{Z_1}$. Consequently, the ansatz invariant under Q has the form

$$\begin{aligned} u(x,y) &= H_1(x,y)\exp\{iC + iZ_2(x,y)\}, \\ v(x,y) &= H_2(x,y)\exp\{iC - iZ_2(x,y)\}. \end{aligned} \tag{61}$$

Substitution of (61) in (60) yields a system of four PDE for the three functions H_1, H_2, and Z_2,

$$H_{2x} = mH_{1x}\sin 2Z_2, \quad H_{1y} = -mH_2\sin 2Z_2,$$
$$H_2 Z_{2x} = mH_1\cos 2Z_2 + \lambda_1 H_1 H_2^2,$$
$$-H_1 Z_{2y} = mH_2\cos 2Z_2 + \lambda_2 H_2 H_1^2.$$

Example 3. A group analysis of the one-dimensional gas dynamics equations

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0, \quad \rho_t + (u\rho)_x = 0, \quad p_t + (up)_x + (\gamma - 1)pu_x = 0 \tag{62}$$

has been carried out by Ovsyannikov [1], who established, in particular, that the invariance algebra of the system of PDE (62) contains the basis element

$$Q = p\partial_p + \rho\partial_\rho. \tag{63}$$

The complete set of functionally independent first integrals of the equation $Qw(t, x, u, p, \rho) = 0$ is: $\omega_1 = u$, $\omega_2 = p\rho^{-1}$, $\omega_3 = t$, and $\omega_4 = x$. Consequently, the ansatz invariant under Q (63) may be chosen in the form

$$u = \varphi^1(t,x), \quad p\rho^{-1} = \varphi^2(t,x), \quad \ln\rho + F(p\rho^{-1}) = C, \tag{64}$$

where $C = \mathrm{const}$ and F is some smooth function.

Substituting the ansatz (64) in the system of PDE (62) yields a system of three differential equations for the two unknown functions $\varphi^1(t,x)$ and $\varphi^2(t,x)$:

$$\begin{aligned} &\varphi^1_t + \varphi^1\varphi^1_x - \varphi^2\dot F(\varphi^2)\varphi^2_x = 0,\\ &\varphi^2_t + \varphi^1\varphi^2_x + (\gamma-1)\varphi^2\varphi^1_x = 0,\\ &\varphi^1_x((1-\gamma)\varphi^2\dot F(\varphi^2) - 1) = 0, \end{aligned} \tag{65}$$

Thus we have achieved a reduction of the number of dependent variables of the gas dynamics equations.

It is of interest that if $\varphi^1_x \neq 0$, it follows from the third equation of the system (65) that $F = \lambda + (1-\gamma)^{-1}\ln(\rho^{-1}p)$. Substituting this expression in (62) yields $p = k\rho^\gamma$, $k \in \mathbb{R}^1$, which is the relation that characterizes a polytropic gas.

1. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).

2. Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer, 1986.

3. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N., Method of differential constraints and its applications in gas dynamics, Novosibirsk, Nauka, 1984 (in Russian).

4. Fushchych W.I., Shtelen V.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1989 (in Russian).

5. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations, *Phys. Rep.*, 1989, **172**, № 4, 123–174.

6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system, *Phys. Lett. A*, 1989, **141**, № 3–4, 113–115.

7. Courant R., Gilbert D., Methods of mathematical physics, Vols. 1 and 2, Moscow, Gostekhizdat, 1951 (Russian translation).

8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetry of equations of quantum mechanics, Moscow, Nauka, 1989 (in Russian).

9. Morgan A., The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations, *Quart. J. Math.*, 1952, **3**, № 12, 250–259.

10. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Non-Lie ansätzes and exact solutions of the nonlinear spinor equation, *Ukr. Math. J.*, 1990, **42**, № 7, 958–962.

11. Zhdanov R.Z., Andreitsev A.Yu., On non-Lie reduction of Galilei-invariant spinor equations, *Dokl. Akad. Nauk UkrSSR, Ser. A*, 1990, № 7, 8–11.

12. Olver P., Rosenau P., The construction of special solutions to partial differential equations, *Phys. Lett. A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.

13. Clarkson P., Kruskal M., New similarity solutions for the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, № 10, 2201–2213.

14. Fushchych W.I., Conditional symmetry of nonlinear equations of mathematical physics, *Ukr. Math. J.*, 1991, **43**, № 11, 1456–1471.
15. Fushchych W.I., Shtelen V.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 67, 498–501.
16. Ames W.F., Lohner R., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, in Nonlinear Phenomena in Mathematical Science, New York, Academic, 1982, 1–6.
17. Fushchych W.I., Revenko I.V., Zhdanov R.Z., Non-symmetry approach to the construction of exact solutions of some nonlinear wave equations, *Dokl. Akad. Nauk UkrSSR, Ser. A*, 1991, № 7, 15–16.
18. Ovsyannikov L.V., Partial invariance, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, **186**, № 1, 22–25.

On the general solution of the d'Alembert equation with nonlinear eikonal constraint

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV, I.V. REVENKO

We construct general solutions of the system of nonlinear differential equations $\Box u = 0$, $u_\mu u^\mu = 0$ in the four- and five-dimensional complex pseudo-Euclidian spaces. The obtained results are used to reduce multi-dimensional nonlinear wave equation to ordinary differential equations.

1. Introduction. In the present paper we construct general solution of the multi-dimensional system of partial differential equations

$$\begin{aligned} &\Box_n u \equiv 0, \\ &u_\mu u^\mu \equiv u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2 - \cdots - u_{x_{n-1}}^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

in the four- and five-dimensional pseudo-Euclidian space. In (1) $u = u(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^1)$. Hereafter the summation over the repeated indices in the pseudo-Euclidian space $M(1, n)$ with the metric tensor $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, \ldots, -1)$ is understood.

We suggest a new algorithm of construction of exact solutions of the nonlinear d'Alembert equation

$$\Box_4 u = \lambda u^k, \quad \lambda, k \in \mathbb{R}^1 \tag{2}$$

via solutions of the system of PDE (1).

2. Integration of the system (1): The list of principal results. Below we adduce assertions giving general solutions of the system of PDE (1) with arbitrary $n \in \mathbb{N}$ provided $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, and with $n = 4, 5$, provided $u(x) \in C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^1)$.

Theorem 1. *Let $u(x)$ be sufficiently smooth real function on n real variables $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Then the general solution of the system of nonlinear PDE (1) is given by the following formula:*

$$C_\mu(u) x_\mu + C_n(u) = 0, \tag{3}$$

where $C_\mu(u)$, $C_n(u)$ are arbitrary real functions that satisfy the condition

$$C_\mu(u) C_\mu(u) = 0 \tag{4}$$

(the condition (4) means that n-vector $(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1})$ is an isotropic one).

Note 1. As far as we know Jacobi, Smirnov and Sobolev were the first to obtain the formulae (3), (4) when $n = 3$ [1, 2]. That is why it is natural to call (3), (4) the Jacoby–Smirnov–Sobolev formulae (JSSF). Later on, in 1944 Yerugin generalized JSSF up to the case $n = 4$ [3]. Recently, Collins [4] proved that JSSF give the general solution of system (1) under arbitrary $n \in \mathbb{N}$. He applied rather complicated

in Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics, Kyiv, Institute Mathematics, 1992, P. 68–90.

differential geometry technique. Below we show that to integrate Eqs. (1) it is quite enough to apply only classical methods of mathematical physics.

Theorem 2. *The general solution of the system of nonlinear PDE (1) in the class of functions $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C^2(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^1)$ is given by the following formula:*

$$F(A_\mu(u)x_\mu, B_\nu(u)x_\nu, u) = 0, \tag{5}$$

where $F \in C^2(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^1)$ is an arbitrary function, $A_\mu, B_\mu \in C^2(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ are arbitrary smooth functions satisfying the conditions

$$A_\mu A_\mu = A_\mu B_\mu = B_\mu B_\mu = 0. \tag{6}$$

Theorem 3. *The general solution of the system of nonlinear PDE (1) in the class of functions $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in C^2(\mathbb{C}^5, \mathbb{C}^1)$ is given by one of the following formulae:*

$$1)\ A_\mu(\tau, u)x_\mu + C_1(\tau, u) = 0, \tag{7}$$

where $\tau = \tau(u, x)$ is a complex function determined by the equation

$$B_\mu(\tau, u)x_\mu + C_2(\tau, u) = 0, \tag{8}$$

and $A_\mu, B_\mu, C_1, C_2 \in C^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ are arbitrary functions satisfying the conditions

$$A_\mu A_\mu = A_\mu B_\mu = B_\mu B_\mu = 0, \quad B_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial \tau} = A_\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial \tau} = 0 \tag{9}$$

and what is more

$$\Delta = \det \left\| \begin{matrix} x_\mu \dfrac{\partial A_\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial C_1}{\partial \tau} & x_\mu \dfrac{\partial A_\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial C_1}{\partial \tau} \\ x_\mu \dfrac{\partial B_\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial C_2}{\partial \tau} & x_\mu \dfrac{\partial B_\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial C_2}{\partial \tau} \end{matrix} \right\| \neq 0. \tag{10}$$

$$2)\ A_\mu(x)x_\mu + C_1(u) = 0, \tag{11}$$

where $A_\mu(u)$, $C_1(u)$ are arbitrary smooth functions satisfying relations

$$A_\mu A_\mu = 0 \tag{12}$$

(in the formulae (7)–(12) the index μ takes the values $0, 1, 2, 3, 4$).

Note 2. In 1915 Bateman [5] investigating particular solutions of the Maxwell equations came to the problem of integrating the d'Alembert equation $\Box_4 u = 0$ with additional nonlinear condition (the eikonal equation) $u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 0$. He obtained the following class of exact solutions of the above system:

$$u(x) = C_\mu(\tau)x_\mu + C_4(\tau), \tag{13}$$

where $\tau = \tau(x)$ is a smooth function determined from the equation

$$\dot{C}_\mu(\tau)x_\mu + \dot{C}_4(\tau) = 0, \tag{14}$$

$c_\mu(\tau)$, $C_4(\tau)$ are arbitrary smooth functions satisfying the conditions

$$C_\mu C_\mu = \dot{C}_\mu \dot{C}_\mu = 0. \tag{15}$$

It is not difficult to show that the solutions (13)–(15) are complex (see Lemma 1 below). Another class of complex solutions of the system (1) with $n = 4$ was constructed by Yerugin [3]. But neither Bateman formulae (13)–(15) not Yerugin's results give the general solution of the system (1) with $n = 4$.

3. Proof of Theorems 1–3. It is well-known that the system of PDE (1) admits an infinite-dimensional Lie algebra [6]. It is this very fact that enables us to construct its general solution.

Proof of the Theorem 1. Let us make in (1) the hodograph transformation

$$z_0 = u(x), \quad z_a = x_a, \quad a = \overline{1, n-1}, \quad w(z) = x_0. \tag{16}$$

Evidently, the transformation (16) is defined for all functions $u(x)$, such that $u_{x_0} \not\equiv 0$.

But the system (1) with $u_{x_0} =$ takes the form

$$\sum_{a=1}^{n-1} u_{x_a x_a} = 0, \quad \sum_{a=1}^{n-1} u_{x_a}^2 = 0,$$

whence $u_{x_a} \equiv 0$, $a = \overline{1, n-1}$ or $u(x) = \text{const}$.

Consequently, the change of variables (16) is defined on the whole set of solutions of the system with the only exception $u(x) = \text{const}$.

Being rewritten in the new variables z, $w(z)$ the system (1) takes the form

$$\sum_{a=1}^{n-1} w_{z_a z_a} = 0, \quad \sum_{a=1}^{n-1} w_{z_a}^2 = 1. \tag{17}$$

Differentiating the second equation with respect to z_b, z_c we get

$$\sum_{a=1}^{n-1} (w_{z_a z_b z_c} w_{z_a} + w_{z_a z_b} w_{z_a z_c}) = 0.$$

Choosing in the above equality $c = b$ and summing we have

$$\sum_{a,b=1}^{n-1} (w_{z_a z_b z_b} w_{z_a} + w_{z_a z_b} w_{z_a z_b}) = 0,$$

whence, by force of (17),

$$\sum_{a,b=1}^{n-1} w_{z_a z_b}^2 = 0. \tag{18}$$

Since $w(z)$ is a real valued function from (18) it follows that $w_{z_a z_b} = 0$, $a, b = \overline{1, n-1}$, whence

$$w(z) = \sum_{a=1}^{n-1} \alpha_a(z_0) z_a + \alpha(z_0). \tag{19}$$

In (19) $\alpha_a, \alpha \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ are arbitrary functions.

Substituting (19) into the second equation of system (17), we have

$$\sum_{a=1}^{n-1} \alpha_a^2(z_0) = 1. \tag{20}$$

Thus, the formulae (19), (20) give the general solution of the system of nonlinear PDE (17). Rewriting (19), (20) in the initial variables, we get

$$x_0 = \sum_{a=1}^{n-1} \alpha_a(u)x_a + \alpha(u), \quad \sum_{a=1}^{n-1} \alpha_a^2(u) = 1. \tag{21}$$

To represent the formula (21) in the manifestly covariant form (3) we redefine the functions $\alpha_a(u)$ in the following way:

$$\alpha_a(u) = \frac{A_a(u)}{A_0(u)}, \quad \alpha(u) = -\frac{B(u)}{A_0(u)}, \quad a = \overline{1, n-1}.$$

Substituting the above expressions into (21) we come to the formulae (7).

Further, since $u = \text{const}$ is contained in the class of functions $u(x)$ determined by the formulae (7) under $A_\mu \equiv 0$, $\mu = \overline{0, n-1}$, $B(u) = u + \text{const}$, JSSF (7) give the general solution of the system of the PDE (1) with an arbitrary $n \in \mathbb{N}$. The theorem is proved.

Let us emphasize that the above used arguments can be applied only to the case of real-valued function $u(x)$. It a solution of the system (1) is looked for in the class of complex-valued functions $u(x)$. JSSF (7) do not give its general solution with $n > 3$. Each case $n = 4, 5, \ldots$ requires a special consideration.

Further we shall adduce the proof of Theorem 3 (Theorem 2 is proved in the same way).

Case 1. $u_{x_0} \neq 0$. In this case the hodograph transformation (16) reducing the system (1) with $n = 5$ to the form

$$\sum_{a=1}^{4} w_{z_a z_a} = 0, \quad \sum_{a=1}^{4} w_{z_a}^2 = 1, \quad w_{z_0} \neq 0 \tag{22}$$

is defined.

The general solution of nonlinear complex Eqs. (22) was constructed by the authors in [7]. It is given by the following formulae:

$$1)\ w(z) = \sum_{a=1}^{4} \alpha_a(\tau, z_0) z_a + \gamma_1(\tau, z_0), \tag{23}$$

where $\tau = \tau(z_0, \ldots, z_4)$ is the function determined from the equation

$$\sum_{a=1}^{4} \beta_a(\tau, z_0) z_a + \gamma_2(\tau, z_0) = 0 \tag{24}$$

and $\alpha_a, \beta_a, \gamma_1, \gamma_2 \in C^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ are arbitrary functions satisfying the relations

$$\sum_{a=1}^{4} \alpha_a^2 = 1, \quad \sum_{a=1}^{4} \alpha_a \beta_a = \sum_{a=1}^{4} \beta_a^2 = 0, \quad \sum_{a=1}^{4} \alpha_a \frac{\partial \beta_a}{\partial \tau} = 0. \tag{25}$$

$$2)\ w(z) = \sum_{a=1}^{4} \alpha_a(z_0) z_a + \gamma_1(z_0), \tag{26}$$

where $\alpha_a, \gamma_1 \in C^2(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^1)$ are arbitrary functions satisfying the relation

$$\sum_{a=1}^{4} \alpha_a^2 = 1. \tag{27}$$

Rewriting the formulae (24), (25) in the initial variables x, $u(x)$, we have

$$x_0 = \sum_{a=1}^{4} \alpha_a(\tau, u) x_a + \gamma_1(\tau, u), \tag{28}$$

where $\tau = \tau(u, x)$ is a function determined from the equation

$$\sum_{a=1}^{4} \beta_a(\tau, u) x_a + \gamma_2(\tau, u) = 0 \tag{29}$$

and the relations (25) hold.

Evidently, the formulae (7) under

$$\begin{aligned} &A_0 = 1, \quad A_a = \alpha_a, \quad C_1 = -\gamma_1, \\ &B_0 = 0, \quad B_a = \beta_a, \quad C_2 = -\gamma_1, \quad a = \overline{1,4}. \end{aligned} \tag{30}$$

Further, by force of inequality $w_{z_a} \not\equiv 0$ we get from (23)

$$\sum_{a=1}^{4} (\alpha_{az_0} + \alpha_{a\tau} \tau_{z_0}) x_a + \gamma_{1z_0} + \gamma_{1\tau} \tau_{z_0} \neq 0. \tag{31}$$

Differentiation of (24) with respect to z_0 yields the following expression for τ_{z_0}:

$$\tau_{z_0} = -\left(\sum_{a=1}^{4} \beta_{az_0} x_a + \gamma_{2z_0} \right) \left(\sum_{a=1}^{4} \beta_{a\tau} x_a + \gamma_{2\tau} \right)^{-1}.$$

Substitution of the above result, into (31) yields relation of the form

$$\left(\sum_{a=1}^{4} \beta_{a\tau} x_a + \gamma_{2\tau} \right)^{-1} \begin{vmatrix} \sum_{a=1}^{4} \alpha_{az_0} x_a + \gamma_{1z_0} & \sum_{a=1}^{4} \alpha_{a\tau} x_a + \gamma_{1\tau} \\ \sum_{a=1}^{4} \beta_{az_0} x_a + \gamma_{2z_0} & \sum_{a=1}^{4} \beta_{a\tau} x_a + \gamma_{2\tau} \end{vmatrix} \neq 0.$$

As the direct, check shows the above inequality follows from (10) with the conditions (30).

Now we turn to solutions of the system (22) of the form (26). Rewriting the formulae (26), (27) in the initial variables x, $u(x)$ we get

$$x_0 = \sum_{a=1}^{4} \alpha_a(u) x_a + \gamma_1(u), \quad \sum_{a=1}^{4} \alpha_a^2(u) = 1.$$

After making in the obtained equalities the chance $\alpha_a = A_a A_0^{-1}$, $a = \overline{1,4}$, $\gamma_1 = -C_1 A_0^{-1}$, we arrive at the formulae (11), (12).

Thus, under $u_{x_0} \not\equiv 0$ the general solution of the system (1) is contained in the class of functions $u(x)$ given by the formulae (7)–(10) or (11), (12).

Case 2. $u_{x_0} \equiv 0$, $u \not\equiv \text{const}$. It is well-known that the system of PDE (1) is invariant under the generalized Poincaré group $P(1, n-1)$ (see, e.g. [8])

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + \Lambda_\mu, \quad u'(x') = u(x),$$

where $\Lambda_{\mu\nu}$, Λ_μ are arbitrary complex parameters satisfying the relations $\Lambda_{\mu\alpha}\Lambda_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, n-1}$. Hence, it follows that, the transformation

$$u(x) + u(x') = u(\Lambda_{\mu\nu} x_\nu) \tag{32}$$

leaves the set of solutions of the system (1) invariant. So when $u(x) \not\equiv \text{const}$ we can obtain $u_{x_0} \not\equiv 0$ by using the transformation (32). Consequently, in the case 2 the general solution is also given by the formulae (7)–(12) up to the transformation (32).

Case 3. $u = \text{const}$. Choosing in (11), (12) $A_\mu = 0$, $\mu = \overline{0,4}$, $C_1 = u + \text{const}$ we come to the condition that this solution is described by the formulae (7)–(12).

Thus, we have proved that, up to transformations from the group $P(1,4)$ (32), the general solution of the system of PDE (1) with $n = 5$ is given by the formulae (7)–(12). But these formulae are not changed with the transformation (32). So to complete the proof of the theorem it is enough to demonstrate that each function $u = u(x)$, determined by the equalities (7)–(12), is a solution of the system of equations (1).

Differentiating the relations (7), (8) with respect to x_μ, we have

$$A^\mu + \tau_{x_\mu}(A_{\nu\tau} x_\nu + C_{1\tau}) + u_{x_\mu}(A_{\nu u} x_\nu + C_{1u}) = 0,$$
$$B^\mu + \tau_{x_\mu}(B_{\nu\tau} x_\nu + C_{2\tau}) + u_{x_\mu}(B_{\nu u} x_\nu + C_{2u}) = 0.$$

Resolving the above system of linear algebraic equations with respect to u_{x_μ}, τ_{x_μ}, we get

$$\begin{aligned} u_{x_\mu} &= \frac{1}{\Delta}(B_\mu(A_{\nu\tau} x_\nu + C_{1\tau}) - A_\mu(B_{\nu\tau} x_\nu + C_{2\tau})), \\ \tau_{x_\mu} &= \frac{1}{\Delta}(A_\mu(B_{\nu u} x_\nu + C_{1u}) - B_\mu(A_{\nu u} x_\nu + C_{2u})), \end{aligned} \tag{33}$$

where $\Delta \neq 0$ by force of (10). Consequently,

$$\begin{aligned} u_{x_\mu} u_{x_\mu} = \Delta^{-2}\Big[& B_\mu B_\mu (A_{\nu\tau} x_\nu + C_{1\tau})^2 - \\ & - 2A_\mu B_\mu (A_{\nu\tau} x_\nu + C_{1\tau})(B_{\nu\tau} x_\nu + C_{2\tau}) + A_\mu A_\mu (B_{\nu\tau} x_\nu + C_{2\tau})^2 \Big] = 0. \end{aligned}$$

Analogously, differentiating (33) with respect to x_ν and convoluting the obtained expression with the metric tensor $g_{\mu\nu}$, we get

$$g^{\mu\nu} u_{x_\mu x_\nu} = \Box_5 u = 0.$$

Further, differentiating (11) with respect to x_μ, we have

$$u_{x_\mu} = -A_\mu (\dot{A}_\nu x_\nu + \dot{C}_1)^{-1}, \quad \mu = \overline{0,4},$$

whence

$$u_{x_\mu x_\nu} = -(\dot{A}_\mu A_\nu + \dot{A}_\nu A_\mu)(\dot{A}_\nu x_\nu + \dot{C}_1)^{-2} + A_\mu A_\nu(\ddot{A}_\nu x_\nu + \ddot{C}_1)(\dot{A}_\nu x_\nu + \dot{C}_1)^{-2}.$$

Consequently,

$$\begin{aligned} u_{x_\mu} u_{x_\mu} &= A_\mu A_\mu (\dot{A}_\nu x_\nu + \dot{C}_1)^{-2} = 0, \\ \Box_5 u \equiv u_{x_\mu x_\mu} &= -(\dot{A}_\mu \dot{A}_\mu)(\dot{A}_\nu x_\nu + \dot{C}_1)^{-2} + \\ &\quad + A_\mu A_\mu (\ddot{A}_\nu x_\nu + \ddot{C}_1)(\dot{A}_\nu x_\nu + \dot{C}_1)^{-2} = 0. \end{aligned}$$

Theorem 3 is proved.

4. Applications: reduction of the nonlinear wave equation (2). Following [7, 8] we look for a solution of the nonlinear wave equation

$$\Box_4 w = F(w), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1) \tag{34}$$

in the form

$$w = \varphi(w_1, w_2), \tag{35}$$

where $w_i = w_i(x) \in C^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^1)$ are functionally-independent. The functions $w_1(x)$, $w_2(x)$ are determined by the demand that the substitution of (35) into (34) yields two-dimensional PDE for a function $\varphi(w_1, w_2)$. As a result we obtain an over-determined system of PDE [8]

$$\begin{aligned} &\Box_4 w_1 = f_1(w_1, w_2), \quad \Box_4 w_2 = f_2(w_1, w_2), \\ &w_{1x_\mu} w_{1x_\mu} = g_1(w_1, w_2), \quad w_{2x_\mu} w_{2x_\mu} = g_2(w_1, w_2), \\ &w_{1x_\mu} w_{2x_\mu} = g_3(w_1, w_2), \quad \operatorname{rank} \|\partial w_i / \partial x_\mu\|_{i=1}^{2}{}_{\mu=0}^{3} = 2 \end{aligned} \tag{36}$$

and besides the function $\varphi(w_1, w_2)$ satisfies the two-dimensional PDE

$$g_1 \varphi_{w_1 w_1} + g_2 \varphi_{w_2 w_2} + 2 g_3 \varphi_{w_1 w_2} + f_1 \varphi_{w_1} + f_2 \varphi_{w_2} = F(\varphi). \tag{37}$$

Let us consider the following problem: to describe all smooth real functions $w_1(x)$, $w_2(x)$ such that the ansatz (35) reduces Eq. (34) to ordinary differential equation (ODE) with respect to the variable w_1. It means that one has to put coefficients g_2, g_3, f_2 in (37) equal to zero. In other words, it is necessary to construct the general solution of the system of nonlinear PDE

$$\begin{aligned} &\Box_4 w_1 = f_1(w_1, w_2), \quad w_{1x_\mu} w_{1x_\mu} = g_1(w_1, w_2), \\ &w_{1x_\mu} w_{2x_\mu} = 0, \quad w_{2x_\mu} w_{2x_\mu} = 0, \quad \Box_4 w_2 = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

The above system contains Eqs. (1) as a subsystem. So, the d'Alembert–eikonal system (1) arises in a natural way when solving the problem of reduction of Eq. (34) be PDE having the smaller dimension (see, also [7, 9]).

Under the appropriate choice of the function $G(w_1, w_2)$ the change of variables

$$v = G(w_1, w_2), \quad u = w_2$$

reduces the system (38) to the form

$$\Box_4 v = f(v, u), \quad v_{x_\mu} v_{x_\mu} = \lambda, \tag{39a}$$

$$v_{x_\mu} u_{x_\mu} = 0, \quad u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 0, \quad \Box_4 u = 0, \tag{39b}$$

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} v_{x_0} & v_{x_1} & v_{x_2} & v_{x_3} \\ u_{x_0} & u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \end{matrix} \right\| = 2, \tag{39c}$$

where λ is a real parameter taking the values -1, 0, 1.

Before formulating the principal assertion, we shall prove an auxiliary lemma.

Lemma. *Let $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ be four-vectors defined in the real Minkowski space $M(1,3)$. Suppose they satisfy the relations*

$$a_\mu b_\mu = b_\mu b_\mu = 0, \quad \sum_{\mu=0}^{3} b_\mu^2 \neq 0. \tag{40}$$

Then the inequality $a_\mu a_\mu \leq 0$ holds.

Proof. It is known that any isotropic vector b in the space $M(1,3)$ can be reduced to the form $b = (\alpha, \alpha, 0, 0)$, $\alpha \neq 0$ by means of transformations from the group $P(1,3)$. Substituting $b = (\alpha, \alpha, 0, 0)$ into the first equality from (40), we get

$$\alpha(a_0 - a_3) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad a_0 = a_3.$$

Consequently, the vector a has the following component: a_0, a_1, a_2, a_0. That is why $a_\mu a_\mu = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a - 0^2 = -(a_1^2 + a - 2^2) \leq 0$.

Let us note that $a_\mu a_\mu = 0$ iff $a_2 = a_3$, i.e. $a_\mu a_\mu = 0$ iff the vectors a and b are parallel.

Theorem 4. *Eqs. (39a-c) are compatible iff*

$$\lambda = -1, \quad f = -N(v + h(u))^{-1}, \tag{41}$$

where $h \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ is an arbitrary function, $N = 0, 1, 2, 3$.

Theorem 5. *The general solution of the system of Eqs. (39a-c) being determined up to the transformation from the group $P(1,3)$ is given by the following formulae:*

a) under $f = -3(v + h(u))^{-1}$, $\lambda = -1$

$$\begin{gathered} (v + h(u))^2 = -(\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-1} (\dot{A}_\mu x_\mu + \dot{B})^2 + \\ + (\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-3} (E_{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \dot{A}_\nu \ddot{A}_\alpha x_\beta + C)^2, \\ A_\mu(u) x_\mu + B(u) = 0; \end{gathered} \tag{42}$$

b) under $f = -2(v + h(u))^{-1}$, $\lambda = -1$

$$(v + h(u))^2 = -(\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-1} (\dot{A}_\mu x_\mu + \dot{B}), \quad A_\mu x_\mu + B = 0, \tag{43a}$$

where $A_\mu(u)$, $B(u)$, $C(u)$ are arbitrary smooth functions satisfying the relations

$$A_\mu A_\mu = 0, \quad \dot{A}_\mu \dot{A}_\mu \neq 0; \tag{43b}$$

c) under under $f = -(v + h(u))^{-1}$, $\lambda = -1$

$$\begin{gathered} u = C_0(x_0 - x_3), \\ (v + h(x_0 - x_3))^2 = (x_1 + C_1(x_0 - x_3))^2 + (x_2 + C_2(x_0 - x_3))^2, \end{gathered} \tag{44}$$

where C_0, C_1, C_2 are arbitrary smooth functions;

d) under $f = 0$, $\lambda = -1$

$$1)\quad v = (-\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-3/2} E_{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \dot{A}_\nu \ddot{A}_\alpha x_\beta + C, \quad A_\mu x_\mu + B = 0, \tag{45}$$

where $A_\mu(u)$, $B(u)$, $C(u)$ are arbitrary smooth functions satisfying the relations (43b);

$$2)\quad u = C_0(x_0 - x_3), \tag{46}$$

$$v = x_1 \cos C_1(x_0 - x_3) + x_2 \sin C_1(x_0 - x_3) + C_2(x_0 - x_3), \tag{47}$$

where C_0, C_1, C_2 are arbitrary smooth functions.

In the above formulae (42), (43a), (45) we denote by the symbol $E_{\mu\nu\alpha\beta}$ the components of antisymmetrical fourth-order tensor, i.e.

$$E_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & (\mu,\nu,\alpha,\beta) = \text{cycle}\,(0,1,2,3), \\ -1, & (\mu,\nu,\alpha,\beta) = \text{cycle}\,(1,0,2,3), \\ 0, & \textit{in the remaining cases}. \end{cases} \tag{48}$$

Proof of Theorems 4, 5. By force of (39c) $u \not\equiv \text{const}$. Consequently, up to transformations from the group $P(1,3)$ $u_{x_0} \not\equiv 0$. That is why one can apply to Eqs. (39) the hodograph transformation

$$\begin{aligned} &z_0 = u(x), \quad z_a = x_a, \quad a = \overline{1,3}, \\ &w(z) = x_0, \quad v = v(z_0, z_a). \end{aligned} \tag{49}$$

As a result the system (39a,b) reads

$$\sum_{a=1}^{3} w_{z_a}^2 = 1, \quad \sum_{a=1}^{3} w_{z_a z_a} = 0, \tag{50a}$$

$$\sum_{a=1}^{3} v_{z_a} w_{z_a} = 0, \tag{50b}$$

$$\sum_{a=1}^{3} v_{z_a}^2 = -\lambda, \quad \sum_{a=1}^{3} (v_{z_a z_a} + 2 w_{z_0}^{-1} v_{z_a} w_{z_a z_0}) = -f(v, z_0). \tag{50c}$$

Since $v(z)$ is a real-valued function, $\lambda = -1$ or $\lambda = 0$.

Case 1. $\lambda = -1$. As it is shown in the Section 1, the general solution of the system (50a) in the class of real-valued functions $w(z)$ is given by the formulae (19), (20) with $n = 4$. On substituting (19) into (50b), we obtain the linear first-order PDE

$$\sum_{a=1}^{3} \alpha_a(z_0) v_{z_a} = 0, \tag{51}$$

the general solution of which is represented in the form

$$v = v(z_0, \rho_1, \rho_2). \tag{52}$$

In (52)

$$z_0, \quad \rho_1 = \left(\sum_{a=1}^{3} \alpha_a^2\right)^{-1/2} \left(\sum_{a=1}^{3} \dot\alpha_a z_a + \alpha\right),$$

$$\rho_2 = \left(\sum_{a=1}^{3} \dot\alpha_a^2\right)^{-1/2} \sum_{a,b,c=1}^{3} E_{abc} z_a \alpha_b \dot\alpha_c$$

are first integrals of Eq. (51) and what is more $\sum\limits_{a=1}^{3} \alpha_a^2 \neq 0$ (the case $\alpha_a = \mathrm{const}$, $a = \overline{1,3}$ will be considered separately).

Substitution of the expression (52) into (50c) yields the system of two PDE for a function $v = v(z_0, \rho_1, \rho_2)$

$$v_{\rho_1\rho_2} + v_{\rho_2\rho_2} + 2\rho_1^{-1} v_{\rho_1} = -f(v, z_0), \tag{53a}$$

$$v_{\rho_1}^2 + v_{\rho_2}^2 = 1. \tag{53b}$$

Let us exclude function $f(v, z_0)$ from (53) by considering of the third-order differential consequence of (53)

$$v_{\rho_2}(v_{\rho_1\rho_1} + v_{\rho_2\rho_2} + 2\rho_1^{-1} v_{\rho_1})_{\rho_1} - v_{\rho_1}(v_{\rho_1\rho_1} + v_{\rho_2\rho_2} + 2\rho_1^{-1} v_{\rho_1})_{\rho_2} = 0, \tag{54a}$$

$$v_{\rho_1}^2 + v_{\rho_2}^2 = 1. \tag{54b}$$

Further we shall consider the cases $v_{\rho_2\rho_2} = 0$ and $v_{\rho_2\rho_2} \neq 0$ separately.

A. $v_{\rho_2\rho_2} = 0$. Then

$$v = g_1(z_0, \rho_1)\rho_2 + g_2(z_0, \rho_1), \tag{55}$$

where $g_1, g_2 \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$ are arbitrary functions.

Substituting (55) into (54b) and splitting the obtained quality by the powers of ρ_2, we have

$$g_{1\rho_1} = 0, \quad g_1^2 + (g_{2\rho_2})^2 = 1,$$

whence

$$v = \alpha\rho_1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}\rho_2 - h(z_0). \tag{56}$$

Here $\alpha \in \mathbb{R}^1$ is an arbitrary smooth function.

Substituting (56) into (53a), we get an algebraic equation $\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} = 0$, whence $\alpha = 0, \pm 1$.

Finally, substitution of (56) into (53a) yields an equation for $f(v, z_0)$

$$2\alpha\rho_1^{-1} = -f\left(\alpha\rho_1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}\rho_2 - h(z_0), z_0\right). \tag{57}$$

From Eq. (57) it follows that under $\alpha = 0$

$$f = 0, \quad v = \pm\rho_2 - h(z_0) \tag{58}$$

and under $\alpha = \pm 1$

$$f = -2(v + h(z_0))^{-1}, \quad v = \pm\rho_1 - h(z_0). \tag{59}$$

B. $v_{\rho_2\rho_2} \neq 0$. In such a case one can apply the Euler transformation to Eqs. (54)

$$\begin{aligned} &z_0 = y_0, \quad \rho_1 = y_1, \quad \rho_2 = G_{y_2}, \quad v + G = \rho_2 y_2, \quad v_{\rho_1} = -G_{y_1}, \quad v_{\rho_2} = y_2, \\ &v_{\rho_2\rho_2} = (G_{y_2y_2})^{-1}, \quad v_{\rho_1\rho_2} = -G_{y_1y_2}(G_{y_2y_2})^{-1}, \\ &v_{\rho_1\rho_1} = (G^2_{y_1y_2} - G_{y_1y_1}G_{y_2y_2})(G_{y_2y_2})^{-1}. \end{aligned} \tag{60}$$

Here y_0, y_1, y_2 are new independent variables, $G = G(y_0, y_1, y_2)$ is a new function.
In the new variables y, $G(y)$ the equation (54b) is linearized

$$G_{y_1} = \pm\sqrt{1 - y_2^2},$$

whence

$$G = \pm y_1\sqrt{1 - y_2^2} + H(y_0, y_2), \quad H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1). \tag{61}$$

The equation (54a) after the change of variables (60) and substitution of the formula (61) takes the form

$$\left[y_1 - (1 - y_2^2)^{3/2} H_{y_2y_2}\right]^{-2} \left[3y_2 H_{y_2y_2} + (y_2^2 - 1)H_{y_2y_2y_2}\right] + 2y_1^2 H_{y_2y_2} = 0. \tag{62}$$

Splitting (62) by the powers of y_1 and integrating the obtained equations, we get

$$H = h_1(y_0)y_2 + h_2(y_0).$$

Substituting the above result into (61) and returning to the initial variables z_0, ρ_1, ρ_2, $v(z_0, \rho_1, \rho_2)$, we have the general solution of the system of PDE (54)

$$v + h_2(z_0) = \pm\left[(\rho_2 - h_1(z_0))^2 + \rho_1^2\right]^{1/2}. \tag{63}$$

At last, substituting (63) into the equation (53a), we come to conclusion that the function f is determined by the formula

$$f(v, z_0) = -3(v + h_2(z_0))^{-1}.$$

Let, us consider now the case $\alpha_a = \text{const}$, $a = \overline{1,3}$. Then the equality $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ holds. That is why, using transformations from the group $P(1,3)$, one can obtain $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, i.e. $u = C_0(x_0 - x_3)$, $C_0 \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$. Then, from Eqs. (39b) it follows that $v = v(\xi, x_1, x_2)$, $\xi = x_0 - x_3$ and what is more Eqs. (39a) take the form

$$v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 = 1, \quad v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} = -f(v, C_0(\xi)). \tag{64}$$

It, is known [7, 10] that Eqs. (64) are compatible iff $f = 0$ or $f = -(v + h(\xi))^{-1}$, $h \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$. And besides the general solution of (64) is given by the formulae (46) and (44) respectively.

Thus we have completely investigated the case $\lambda = -1$.

Case 2. $\lambda = 0$. By force of the fact that the function v is a real one, from (50b) it follows that $v = v(z_0)$. Consequently, the equality $v = v(u)$ holds that breaks the condition (39c). So under $\lambda = 0$ the system (39a-c) is incompatible.

So, we have proved that the system of nonlinear PDE (39a-c) is compatible iff the relations (41) hold and its general solution is given by one of the formulae (44), (46), (58), (59), (63). To complete the proof, one has to rewrite the expressions (58), (59), (63) in the manifestly covariant form (42), (43a), (45).

Let us consider as an example the formula (59)

$$v = \pm\rho_1 - h(z_0) = \pm\left(\sum_{a=1}^{3}\dot\alpha_a^2\right)^{-1/2}\left(\sum_{a=1}^{3}x_a\dot\alpha_a(u) + \dot\alpha(u)\right) - h(u), \tag{65}$$

the function $u(x)$ being determined by the formula (12)

$$\sum_{a=1}^{3}\alpha_a(u)x_a + \alpha(u) = 0, \quad \sum_{a=1}^{3}\alpha_a^2(u) = 1. \tag{66}$$

Let us make in (65), (66) the change $\alpha_a = A_aA_0^{-1}$, $\alpha = -BA_0^{-1}$, whence

$$\begin{aligned}
&A_\mu(u)x_\mu + B(u) = 0, \quad A_\mu A_\mu = 0,\\
&h(u) + v = \pm\left[\sum_{a=1}^{3}\dot A_aA_0^{-1} - A_a\dot A_0A_0^{-2}\right]^{-1/2}\times\\
&\quad\times\left[\sum_{a=1}^{3}x_a(\dot A_aA_0^{-1} - A_a\dot A_0A_0^{-2}) + B\dot A_0A_0^{-2} - \dot BA_0^{-1}\right] =\\
&\ = \pm\left[\sum_{a=1}^{3}(\dot A_a^2A_0^{-2} + A_a^2\dot A_0^2A_0^{-1} - 2\dot A_aA_a\dot A_0A_0^{-3})^{-1/2}\right]\times\\
&\quad\times\left[\sum_{a=1}^{3}x_a(\dot A_aA_0^{-1} - A_a\dot A_0A_0^{-2}) + B\dot A_0A_0^{-2} - \dot BA_0\right] =\\
&\ = \pm\left[-\dot A_\mu\dot A_\mu A_0^{-2} - A_\mu A_\mu\dot A_0^2A_0^{-4} + 2\dot A_\mu A_\mu\dot A_0A_0^{-3}\right]^{-1/2}\times\\
&\quad\times\left[-A_0^{-1}(x_\mu\dot A_\mu + \dot B) + A_0^{-2}\dot A_0(x_\mu A_\mu + B)\right] =\\
&\ = \mp(-\dot A_\mu\dot A_\mu)^{-1/2}(x_\mu\dot A_\mu + \dot B).
\end{aligned}$$

The only thing left is to prove that $\dot A_\mu\dot A_\mu < 0$. Since $A_\mu A_\mu = 0$, the equality $\dot A_\mu A_\mu = 0$ holds. Consequently, by force of the lemma $-A_\mu\dot A_\mu \geq 0$ and what is more the equality $\dot A_\mu\dot A_\mu = 0$ holds iff $\dot A_\mu = k(u)A_\mu$. The general solution of the above system of ordinary differential equations reads $A_\mu = \tilde k(u)\theta_\mu$, where $\tilde k(u)$ is an arbitrary function, $\theta_\mu \in \mathbb{R}^1$, $\theta_\mu\theta_\mu = 0$. Whence it follows that $\alpha_a = A_aA_0^{-1} = \theta_a\theta_0^{-1} =$ const and the condition $\sum\limits_{a=1}^{3}\dot\alpha_a^2 \neq 0$ does not hold. We come to the contradiction whence it follows that $\dot A_\mu\dot A_\mu < 0$.

Thus we have obtained the formula (43a). Derivation of the remaining formulae from (42), (45) is carried out in the same way. The theorems are proved.

Substitution of the above obtained results into the formula $w = \varphi(v, u)$ yields the following collection of ansätzes for the nonlinear wave equation (34)

$$
\begin{aligned}
&1.\quad w = \varphi\Big(- h(u) \pm \Big[(-\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-1}(\dot{A}_\mu x_\mu + \dot{B})^2 - \\
&\qquad - (\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-3}(E_{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \dot{A}_\nu \ddot{A}_\alpha x_\beta + C(u))^2\Big]^{1/2}, u\Big);\\
&2.\quad w = \varphi\Big(- h(u) \pm (-\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{1/2}(\dot{A}_\mu x_\mu + \dot{B}), u\Big);\\
&3.\quad w = \varphi\Big(h(x_0 - x_3) \pm ([x_1 + C_1(x_0 - x_3)]^2 + \\
&\qquad + [x_2 + C_2(x_0 - x_3)]^2)^{1/2}, x_0 - x_3\Big);\\
&4.\quad w = \varphi\Big((-\dot{A}_\nu \dot{A}_\nu)^{-3/2}(E_{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \dot{A}_\nu \ddot{A}_\alpha x_\beta + C(u)), u\Big);\\
&5.\quad w = \varphi\Big(x_1 \cos C_1(x_0 - x_3) + x_2 \sin C_1(x_0 - x_3) + C_2(x_0 - x_3), x_0 - x_3\Big).
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Here $u = u(x)$ is determined by JSSF (8) with $n = 4$.

Substitution of the expressions (67) into (34) gives the following equations for $\varphi = \varphi(u, v)$:

$$1.\quad \varphi_{vv} + 3(v + h(u))^{-1}\varphi_v = -F(\varphi), \tag{68}$$

$$2.\quad \varphi_{vv} + 2(v + h(u))^{-1}\varphi_v = -F(\varphi), \tag{69}$$

$$3.\quad \varphi_{vv} + (v + h(u))^{-1}\varphi_v = -F(\varphi),$$

$$4.\quad \varphi_{vv} = -F(\varphi), \tag{70}$$

$$5.\quad \varphi_{vv} = F(\varphi).$$

Eqs. 4, 5 from (68)–(70) are known to be integrable in quadratures. Therefore, any solution of the d'Alembert–eikonal system (1) corresponds to some class of exact solutions of the nonlinear wave equation (34) that contains arbitrary functions. Saying it in another way, the formulae (67) make it possible to construct wide families of exact solutions of the nonlinear PDE (34) using exact solutions of the linear d'Alembert equation $\Box_4 u = 0$ satisfying the additional constraint $u_{x_\mu} u_{x_\mu} = 0$.

It is interesting to compare our approach to the problem of reduction of Eq. (34) with classical Lie approach. In the framework of the Lie approach the functions $w_1(x)$, $w_2(x)$ from (35) are looked for as invariants of the symmetry group of the equation under study (in the case involved it is the Poincaré group $P(1,3)$). Since the group $P(1,3)$ is a finite-parameter group, its invariants cannot contain an arbitrary function (complete description of invariants of the group $P(1,3)$ had been carried out in [11]). So the ansätzes (67) cannot be obtained by means of Lie symmetry of the PDE (34).

The ansätzes (67) correspond to conditional invariance of the nonlinear wave equation (34). It means that there exist two differential operators $Q_a = \xi_{a\mu}(x)\partial_{x_\mu}$, $a = \overline{1,2}$ such that

$$Q_a w \equiv Q_a \varphi(w_1, w_2) = 0, \quad a = \overline{1,2}$$

and besides the system of PDE

$$Q_a w = 0, \quad a = \overline{1,2}, \quad \Box_4 w - F(w) = 0$$

is invariant in Lie's sense under the one-parameter groups having generators Q_1, Q_2 (on the conditional invariance of mathematical and theoretical physics equations see [8, 12, 13]).

It is worth noting that the ansätzes 2, 5 from (67) were obtained in [14] without using the concept of conditional invariance.

5. On the new exact, solutions of the nonlinear wave equation. The general solution of Eqs. (70) is given by the following quadrature [15]:

$$v + D(u) = \int_0^{\varphi(u,v)} \left[-\int_0^{\tau} F(z)dz + C(u) \right]^{-1/2} d\tau, \tag{71}$$

where $D(u), C(u) \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ are arbitrary functions.

Substituting into (71) expressions for $u(x)$, $v(x)$ given by the formulae 4, 5 from (67), we get two classes of exact solutions of the nonlinear wave equation (34) that contain several arbitrary functions of one variable.

Eqs. (68), (69) are Emden–Fauler type equations. They were investigated by many authors see, e.g. [15]). In particular, it is known that the equations

$$\varphi_{vv} + 2v^{-1}\varphi_v = -\lambda\varphi^5, \tag{72}$$

$$\varphi_{vv} + 3v^{-1}\varphi_v = -\lambda\varphi^3 \tag{73}$$

are integrated in quadratures. In the paper [11] it had been established that Eqs. (72), (73) possess the Painleve property. This fact made it possible to integrate them by applying rather complicated technique. We shall demonstrate how to integrate Eqs. (72), (73) by using their symmetry properties.

It occurs that Eq. (72) admits the symmetry operator $Q = 2v\partial_v - \varphi\partial_\varphi$. Following [15] we find the change of the variables

$$\varphi = z(\tau)v^{-1/2}, \quad \tau = \ln v$$

that reduce the operator Q to the form $Q' = \partial_\tau$. Eq. (72) in the new variables reads

$$z_{\tau\tau} = \frac{1}{4}z - \lambda z^5,$$

whence

$$z_\tau^2 = \frac{1}{4}z^2 - \frac{\lambda}{3}z^6 + \frac{1}{4}D(u), \tag{74}$$

where $D(u) \in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ is an arbitrary function. Further we consider in detail the case $D(u) = \delta \equiv \text{const}$.

On putting $z^2 = R(\tau)$ we get the following equation:

$$R_\tau^2 = -\frac{4\lambda}{3}R^4 + R^2 + \delta R \equiv S(R). \tag{75}$$

Integration of (75) yields

$$\int_0^{z^2} \frac{dR}{\sqrt{S(R)}} = \pm(\ln v + \ln C(u)). \tag{76}$$

Here $C(u)$ is an arbitrary smooth function.

Let us represent the polynomial $S(R)$ in the form

$$S(R) = -\frac{4}{3}\lambda R(R-\theta_1)(R-\theta_2)(R-\theta_3),$$

where θ_i are the roots of the polynomial $S(R)$ that satisfy equations (the Vieta's theorem)

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=0, \quad \theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1=-\frac{3}{4\lambda}, \quad \theta_1\theta_2\theta_3=\frac{3\delta}{4}.$$

The explicit form of the integral in the left side of Eq. (76) depends on relations connecting the roots θ_i.

Case 1. $\theta_1=0$, $\theta_2\neq\theta_3$, $\theta_2\neq 0$, $\theta_3\neq 0$. Such a case taken place under $\delta=0$, solution of Eq. (72) being given by the formulae

$$\varphi=\left\{\frac{\sqrt{3}C(u)}{a(1+C^2(u)v)^2}\right\}^{1/2} \quad \text{under } \lambda=a^2>0, \tag{77}$$

$$\varphi=\left\{\frac{\sqrt{3}C(u)}{a(1-C^2(u)v)^2}\right\}^{1/2} \quad \text{under } \lambda=-a^2<0, \tag{78}$$

Case 2. $\theta_1=\theta_2$, $\theta_2\neq 0$, $\theta_3\neq 0$, $\theta_3\neq\theta_2$. Such relations are satisfied provided $\lambda=a^2>0$, $\delta=\pm(3a)^{-1}$, solution of Eq. (72) taking the form

$$\varphi=\left\{\frac{\sin(\ln(vC(u)))+1}{av(2\sin(\ln(vC(u)))-4)}\right\}^{1/2}. \tag{79}$$

Case 3. $\theta_1\neq\theta_2$, $\theta_2\neq\theta_3$, $\theta_3\neq\theta_1$. $\lambda=-a^2<0$. In such a case the polynomial $S(R)$ has two real and two complex roots. Therefore it is represented in the form

$$S(R)=\frac{4a^2}{3}R(R+\theta_1)((R+\theta_2)^2+\theta_3^2),$$

solution of Eq. (72) taking the form

$$\varphi=\left\{\frac{p\theta_1\left(1-\mathrm{cn}\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{pq}\ln(vC(u))\right]\right)}{v\left[(p+q)\mathrm{cn}\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{pq}\ln(vC(u))\right]+q-p\right]}\right\}^{1/2}. \tag{80}$$

Here

$$p=\sqrt{\theta_2^2+\theta_3^2}, \quad q=\sqrt{(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_3^2}, \quad h=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(p+q)^2+\theta_1^2}}{pq}.$$

Case 4. $\theta_1\neq\theta_2$, $\theta_2\neq\theta_3$, $\theta_3\neq\theta_1$, $0<\frac{1}{\lambda}<(3\delta)^2$, $\lambda=a^2$. The polynomial $S(R)$ has two real and two complex roots and is given by the formula

$$S(R)=\frac{4a^2}{3}R(\theta_1-R)((R+\theta_2)^2+\theta_3^2).$$

The solution of Eq. (72) has the form

$$\varphi = \left\{ \frac{q\theta_1 \left(1 + \mathrm{cn}\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{pq}\ln(vC(u))\right]\right)}{v\left[(p+q) + (q-p)\mathrm{cn}\left[\frac{2a}{\sqrt{3}}\sqrt{pq}\ln(vC(u))\right]\right]} \right\}^{1/2}, \tag{81}$$

where

$$p = \sqrt{(\theta_2-\theta_1)^2+\theta_3^2}, \quad q = \sqrt{\theta_2^2+\theta_3^2}, \quad h = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\theta_1^2-(p+q)^2}}{pq}.$$

Case 5. $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_2 \neq \theta_3$, $\theta_3 \neq \theta_1$, $\lambda = a^2 > 0$, $\lambda(3\delta)^2 < 1$. Is this case the polynomial $S(R)$ has four real roots $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ (one of them is equal to zero) and is represented in the form

$$S(R) = \frac{4a^2}{3}(\theta_0 - R)(R-\theta_1)(R-\theta_2)(R-\theta_3).$$

Solution of Eq. (72) reads

$$\varphi = \left\{ \frac{\theta_0(\theta_1-\theta_3) - \theta_3(\theta_1-\theta_0)\,\mathrm{sn}^2\left[\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{(\theta_0-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)}\ln(vC(u))\right]}{v\left(\theta_1-\theta_3-(\theta_1-\theta_0)\,\mathrm{sn}^2\left[\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{(\theta_0-\theta_2)(\theta_1-\theta_3)}\ln(vC(u))\right]\right)} \right\}^{1/2}. \tag{82}$$

In the above formulae (80)–(82) cn, sn are elliptic functions of the order k.

Substituting the formulae (77)–(82) into the ansatz 2 from (67) with $h \equiv 0$, where $u = u(x)$ is determined by JSSF (43a) we obtain wide families of new exact solutions of the nonlinear PDE (34) under $F(w) = \lambda w^5$.

Eq. (73) is integrated in analogous way. As a result we have

1. $\lambda = -a^2 < 0$,

$$\varphi = \frac{1}{av}\,\mathrm{tg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{a^2}\ln(vC(u))\right); \tag{83}$$

2. $\lambda = a^2 > 0$,

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}C(u)}{a(1+v^2C^2(u))}; \tag{84}$$

3. $\lambda = -a^2 < 0$,

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}C(u)}{a(1-v^2C^2(u))}; \tag{85}$$

4. $\lambda = 2a^{-2} > 0, \quad a > 0$,

$$\varphi = \frac{b}{v}\,\mathrm{cn}\left[\frac{\sqrt{b^2+d^2}}{a}\ln(vC(u))\right], \tag{86}$$

where

$$b = \left(a^2 + a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2}, \quad d = \left(-a^2 + a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2},$$
$$\delta \in \mathbb{R}^1, \quad k = b^{-1}\sqrt{b^2-d^2};$$

$$5.\quad \lambda = 2a^{-2} > 0, \quad a > 0,$$
$$\varphi = \frac{b}{v}\,\mathrm{dn}\left(\frac{b}{a}\ln(vC(u))\right), \tag{87}$$

where

$$b = \left(a^2 + a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2}, \quad d = \left(a^2 - a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2}, \quad k = b^{-1}\sqrt{b^2-d^2};$$

$$6.\quad \lambda = -2a^{-2} < 0, \quad a > 0,$$
$$\varphi = \frac{b}{v}\left[\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{b^2-d^2}}{a}\ln(vC(u))\right)\right], \tag{88}$$

where

$$b = \left(a^2 + a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2}, \quad d = \left(a\sqrt{a^2+4\delta} - a^2\right)^{1/2},$$
$$\delta > 0, \quad k = d(b^2+d^2)^{-1/2};$$

$$7.\quad \lambda = -2a^{-2} < 0, \quad -\frac{a^2}{4} < \delta < 0, \quad a > 0,$$
$$\varphi = \frac{b}{v}\,\mathrm{tn}\left(\frac{b}{a}\ln(vC(u))\right), \tag{89}$$

where

$$b = \left(a^2 + a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2}, \quad d = \left(a^2 - a\sqrt{a^2+4\delta}\right)^{1/2}, \quad k = b^{-1}\sqrt{b^2-d^2};$$

$$8.\quad \lambda = -2a^{-2} < 0,$$
$$\varphi = \frac{b}{v}\left(\frac{1+\mathrm{cn}\left(\frac{2b}{a}\ln(vC(u))\right)}{1-\mathrm{cn}\left(\frac{2b}{a}\ln(vC(u))\right)}\right)^{1/2}, \tag{90}$$

where

$$b = \sqrt[4]{-4\delta a^2}, \quad \delta < -\frac{a^2}{4}, \quad k = \frac{\sqrt{b^2-d^2}}{\sqrt{2}b}.$$

In the above formulae (83)–(90) cn, dn, tn are elliptic functions of the order k.

Substituting the formulae (83)–(90) into the ansatz 1 from (67) with $h = 0$, where $u = u(x)$ is determined by JSSP (43a) we get ad families of exact solutions of the nonlinear Eq. (34) under $F(w) = \lambda w^3$.

Let us emphasize once more that solutions of nonlinear PDE (34) obtained in the above described manner contain several arbitrary functions and cannot in principle be constructed by means of symmetry reduction procedure.

In conclusion, we adduce two examples of exact solutions of Eq. (34) with $F(w) = \lambda w^3$ that can be written down in the explicit form

$$u(x) = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2\right)^{1/2}\mathrm{tg}\left\{\sqrt{2}\left[\ln\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2\right)^{1/2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ln\left[C\left(\frac{x_0x_1 \pm x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_0^2}}{x_1^2+x_2^2}\right)\right]\right]\right\},$$

$$u(x) = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2\right)^{1/2} \operatorname{tg}\left\{\sqrt{2}\left[\ln\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2\right)^{1/2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ln\left[C\left(\frac{x_1x_2 \pm x_0\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}}{x_1^2 + x_2^2}\right)\right]\right]\right\}. \qquad (91)$$

Here C is an arbitrary smooth function.

It is important to note that the formulae (91) under $C \equiv \text{const}$ give the already known solutions (see, e.g. [8, 11]).

1. Smirnov V.I., Sobolev S.L., New method of solution of the plane problem of elastic oscillations, *Trudy Seismol. Instituta AN SSSR*, 1932, **20**, 37–42.
2. Smirnov V.I., Sobolev S.L., On application of the new method to study of elastic oscillations in the space with axial symmetry, *Trudv Seismol. Instituta AN SSSR*, 1933, **29**, 43–51.
3. Yerugin N.P., On functionally-invariant solutions, *Dokl. AN SSSR*, 1944, **20**, № 9, 385–386.
4. Collins C.B., Null field solutions of the wave equation and a certain generalizations, *J. Math. Phys.*, 1983, **24**, 22–28.
5. Bateman H., The mathematical analysis of electrical and optical wave motion of the basis of Maxwell's equations, Cambridge Univ. Press, 1915, 180 p.
6. Shulga M.W., Symmetry and some particular solutions of the d'Alembert equation with a nonlinear condition, in Group-theoretical studies of the mathematical physics equations, Kiev, Inst. of Mathematics of Ukr. Acad. of Sci., 1985, 36–38.
7. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., General solution of the nonlinear wave equation and eikonal equation, *Ukrain. Math. J.*, 1991, **43**, № 11, 1471–1486.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations, Kiev, Naukova Dumka, 1989, 336 p.
9. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Symmetry and some exact solutions of nonlinear spinor equations, *Phys. Repts.*, 1989, **172**, № 4, 123–143.
10. Collins C.B., Complex potential equations. A technique for solution, *Proc. Cambr. Phyl. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–171.
11. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Subgroup of the Poincaré group and their invariants, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 6, 977–985.
12. Fushchych W.I., Conditional invariance of equations of nonlinear mathematical physics, *Ukr. Math. J.*, 1991, **43**, № 11, 1456–1470.
13. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Conditional symmetry and reduction of partial differential equations, *Ukr. Math. J.*, 1992, **44**, № 7, 970–982.
14. Zhdanov R.Z., Lagno V.I., On exact solutions of the nonlinear d'Alembert equation containing arbitrary functions, in Algebraic-theoretical analysis of mathematical physics equations, Kiev, Inst. of Mathematics of Ukr. Acad. of Sci., 1990, 34–39.
15. Kamke E., Handbook on ordinary differential equations, Moscow, Nauka, 1976, 576 p.

On the new exact solutions of the nonlinear Maxwell–Born–Infeld equations

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV, V.F. SMALIJ

Предложены две нелокальные подстановки, сводящие уравнения Максвелла с материальными уравнениями Борца–Инфельда к скалярным уравнениям. С использованием этих подстановок построены многопараметрические семейства точных решений нелинейных уравнений Максвелла–Борна–Инфельда.

In the present work we obtain broad classes of exact solutions of the Maxwell equations

$$\partial_t\vec{D} = \operatorname{rot}\vec{H}, \quad \partial_t\vec{B} = -\operatorname{rot}\vec{E}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{1a}$$

with constitutive equations suggested by Born and Infeld [1] in 1934

$$\begin{aligned}&\vec{D} = \tau\vec{E} + \tau_1\vec{B}, \quad \vec{H} = \tau\vec{B} - \tau_1\vec{E},\\ &\tau = \left\{1 + \vec{B}^2 - \vec{E}^2 - (\vec{B}\vec{E})^2\right\}^{-1/2}, \quad \tau_1 = (\vec{B}\vec{E})\tau.\end{aligned} \tag{1c}$$

Here E_a, H_a, B_a, D_a are smooth functions on $t \equiv x_0 \in \mathbb{R}^1$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $a = \overline{1,3}$.

Symmetry properties of equations (1a–c) are investigated in [2] but we do not apply symmetry reduction procedure to construct their exact solutions. Our approach generalizes that of papers [1, 3] and is based on the fact that the general solution of equations (1a,b) can be represented in the form

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{U}, \quad \vec{D} = \operatorname{rot}\vec{W}, \quad \vec{H} = \partial_t\vec{W}, \quad \vec{E} = -\partial_t\vec{U}, \tag{2}$$

where $U = (U_1, U_2, U_3)$, $W = (W_1, W_2, W_3)$ are arbitrary smooth vector functions.

Substitution of formulas (2) into (1c) gives rise to the first-order system of partial differential equations (PDE)

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\vec{W} = -\tau\left[\partial_t\vec{U} + ((\partial_t\vec{U})(\operatorname{rot}\vec{U}))\operatorname{rot}\vec{U}\right],\\ &\partial_t\vec{W} = \tau\left[\operatorname{rot}\vec{U} + ((\partial_t\vec{U})(\operatorname{rot}\vec{U}))\partial_t\vec{U}\right],\end{aligned} \tag{3}$$

where $\tau = \left\{1 + (\operatorname{rot}\vec{U})^2 - (\partial_t\vec{U})^2 - ((\partial_t\vec{U})(\operatorname{rot}\vec{U}))^2\right\}^{-1/2}$.

To obtain exact solutions of system (3) we use the ansatz

$$\vec{U} = \vec{a}\varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2), \tag{4}$$

where $\omega_0 = t$, $\omega_1 = \vec{b}\,\vec{x}$, $\omega_2 = \vec{c}\,\vec{x}$; $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ are arbitrary constant vectors in the space $\mathbb{R}^3$ satisfying conditions

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{b}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} = 1, \quad \vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c} = \vec{c}\,\vec{a} = 0.$$

Доклады АН Украины, 1992, № 10, С. 28–33.

Since $\mathrm{rot}\,\vec{U} = -\vec{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + \vec{b}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}$, the relation $(\partial_t\vec{U})\mathrm{rot}\,\vec{U} = 0$ holds. Consequently, system (3) is rewritten in the form

$$\mathrm{rot}\,\vec{W} = -\tau\vec{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_0}, \quad \partial_t\vec{W} = \tau\left(-\vec{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + \vec{b}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\right), \tag{5}$$

where $\tau = \left(1 - \varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^{-1/2}$, $\varphi_\mu \equiv \partial\varphi/\partial\omega_\mu$.

Since $\partial_t\mathrm{rot}\,\vec{W} = \mathrm{rot}\,\partial_t\vec{W}$, the equality

$$\partial_t(-\tau\vec{a}\varphi_0) = \mathrm{rot}\left[\tau\left(-\vec{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + \vec{b}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\right)\right]$$

holds. The above equation after making some manipulations takes the form

$$\vec{a}(1 - \varphi_\mu\varphi^\mu)^{-3/2}\left[(1 - \varphi_\mu\varphi^\mu)\Box\varphi + \varphi_{\mu\nu}\varphi^\mu\varphi^\nu\right] = \vec{0}.$$

Here $\varphi_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_\mu\partial\omega_\nu}$; $\mu,\nu = \overline{0,2}$, the summation over the repeated indices in the Minkowski space $\mathbb{R}(1,2)$ with the metric tensor $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1)$ is implied.

Thus provided the function $\varphi(\omega)$ is a solution of the nonlinear PDE

$$(1 - \varphi_\mu\varphi^\mu)\Box\varphi + \varphi_{\mu\nu}\varphi^\mu\varphi^\nu = 0, \tag{6}$$

and what is more $1 - \varphi_\mu\varphi^\mu \neq 0$, formulas (2), (4), (5) give particular solutions of system of nonlinear PDE (1).

We look for a solution of equation (6) in the form

$$\varphi = \Phi(y_1, y_2), \tag{7}$$

where $y_1 = \omega_0 + \omega_1$, $y_2 = \omega_2$.

Substitution of (7) into (6) gives rise to the following equation for Φ:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_2^2} = 0, \tag{8}$$

whence $\Phi = h_1(y_1)y_2 + h_2(y_1)$, $h_i \subset C^2(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1)$ being arbitrary functions. Substituting the obtained expressions into (7) we get the class of exact solutions of nonlinear PDE (6) containing two arbitrary functions on $\omega_0 + \omega_1 \equiv t + \vec{b}\vec{x}$

$$\varphi = \omega_2 h_1(\omega_0 + \omega_1) + h_2(\omega_0 + \omega_1).$$

Hence by using formulas (2), (4), (5) we obtain a family of exact solutions of the nonlinear Maxwell–Born–Infeld equations

$$\begin{aligned} &\vec{E} = -\vec{a}(\dot{h}_1\vec{c}\vec{x} + \dot{h}_2), \quad \vec{H} = (1 + h_1^2)^{-1/2}[\vec{b}h_1 - \vec{c}(\dot{h}_1\vec{c}\vec{x} + \dot{h}_2)], \\ &\vec{D} = -\vec{a}(1 + h_1^2)^{-1/2}[\dot{h}_1\vec{c}\vec{x} + \dot{h}_2], \quad \vec{B} = \vec{b}h_1 - \vec{c}(\dot{h}_1\vec{c}\vec{x} + \dot{h}_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Similarly, using exact solutions of equation (6) constructed in [4, 5], that satisfy the condition $1 - \varphi_\mu\varphi^\mu \neq 0$ we shall write down corresponding particular solutions of system (1) (as earlier, we shall use the designations $\omega_0 = t$, $\omega_1 = \vec{b}\vec{x}$, $\omega_2 = \vec{c}\vec{x}$, $\omega_2 = \omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2$).

$$\begin{gathered}
1.\quad \varphi(\omega_0,\omega_1,\omega_2) = c_1 \int_0^{\sqrt{\omega^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+c_2y^4}}, \quad \tau = \left(1 + \frac{c_1^2}{1+c_2\omega^4 - c_1^2}\right)^{1/2}, \\
\vec{E} = -\frac{c_1 t\vec{a}}{\sqrt{\omega^2(1+c_2\omega^4)}}, \quad \vec{B} = \frac{c_1[-\vec{b}(\vec{c}\,\vec{x}) + \vec{c}(\vec{b}\,\vec{x})]}{\sqrt{\omega^2(1+c_2\omega^4)}}, \\
\vec{D} = -\frac{c_1 t\vec{a}}{\sqrt{\omega^2(1+c_2\omega^4-c_1^2)}}, \quad \vec{H} = \frac{c_1[-\vec{b}(\vec{c}\,\vec{x}) + \vec{c}(\vec{b}\,\vec{x})]}{\sqrt{\omega^2(1+c_2\omega^4-c_1^2)}}.
\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}
2.\quad \varphi(\omega_0,\omega_1,\omega_2) = \pm\left[\frac{\omega_0-\omega_1}{c_1}\,\mathrm{th}(c_1(\omega_0+\omega_1)+c_2)\right]^{1/2} + c_3, \\
\tau = \mathrm{ch}(c_1(\omega_0+\omega_1)+c_2), \\
\vec{E} = \mp\frac{\vec{a}}{4}\left[\frac{\mathrm{cth}(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)}{c_1(t-\vec{b}\,\vec{x})}\right]^{1/2} \times \\
\times\left[\frac{2c_1(t-\vec{b}\,\vec{x}) + \mathrm{sh}\,2(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)}{\mathrm{ch}^2(c_1(t+\vec{c}\vec{x})+c_2)}\right], \\
\vec{B} = \mp\frac{\vec{c}}{4}\left[\frac{\mathrm{cth}(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)}{c_1(t-\vec{b}\,\vec{x})}\right]^{1/2} \times \\
\times\left[\frac{2c_1(t-\vec{b}\,\vec{x}) - \mathrm{sh}\,2(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)}{\mathrm{ch}^2(c_1(t+\vec{b}\vec{x})+c_2)}\right], \\
\vec{D} = \mp\frac{\vec{a}}{4}\left[\frac{2\{2c_1(t-\vec{b}\,\vec{x}) + \mathrm{sh}\,2(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)\}^2}{c_1(t-\vec{b}\,\vec{x})\,\mathrm{sh}\,2(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)}\right]^{1/2}, \\
\vec{H} = \mp\frac{\vec{c}}{4}\left[\frac{2\{2c_1(t-\vec{b}\,\vec{x}) - \mathrm{sh}\,2(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)\}^2}{c_1(t-\vec{b}\,\vec{x})\,\mathrm{sh}\,2(c_1(t+\vec{b}\,\vec{x})+c_2)}\right]^{1/2},
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
3.\quad \varphi(\omega_0,\omega_1,\omega_2) = \pm\left[c_2 e^{c_3(\omega_0-\omega_1)} + \frac{2}{c_3}(\omega_0+\omega_1)\right]^{1/2} + c_1, \\
\tau = \left[\frac{2(\omega_0+\omega_1) + c_2c_1e^{c_3(\omega_0-\omega_1)}}{2(\omega_0+\omega_1) - c_2c_1e^{c_3(\omega_0-\omega_1)}}\right]^{1/2}, \\
\vec{E} = \mp\frac{\vec{a}}{2}\frac{\left(\frac{2}{c_3} + c_2c_3e^{c_3(t-\vec{b}\,\vec{x})}\right)}{\left[c_2e^{c_3(t-\vec{c}\,\vec{x})} + \frac{2}{c_3}(t+\vec{b}\,\vec{x})\right]^{1/2}}, \\
\vec{B} = \mp\frac{\vec{c}}{2}\frac{\left(\frac{2}{c_3} - c_2c_3e^{c_3(t-\vec{b}\,\vec{x})}\right)}{\left[c_2e^{c_3(t-\vec{b}\,\vec{x})} + \frac{2}{c_3}(t+\vec{b}\,\vec{x})\right]^{1/2}},
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\vec{H} = \mp\frac{\vec{a}}{2}\frac{\left(\frac{2}{c_3} - c_2c_3e^{c_3(t-\vec{b}\,\vec{x})}\right)}{\left[-c_2e^{c_3(t-\vec{b}\,\vec{x})} + \frac{2}{c_3}(t+\vec{b}\,\vec{x})\right]^{1/2}},$$

$$\vec{D} = \mp\frac{\vec{a}}{2}\frac{\left(\frac{2}{c_3} + c_2c_3e^{c_3(t-\vec{b}\,\vec{x})}\right)}{\left[-c_2e^{c_2(t-\vec{b}\,\vec{x})} + \frac{2}{c_3}(t+\vec{b}\,\vec{x})\right]^{1/2}}.$$

By direct check one can become convinced of the fact that solutions (9)–(12) are such that the vectors $\vec{E}$ and $\vec{D}$ as well as $\vec{B}$ and $\vec{H}$ are parallel. Besides, the conditions

$$\vec{E}\vec{B} = \vec{D}\vec{B} = \vec{E}\vec{H} = \vec{D}\vec{H} = 0$$

hold.

Some other classes of exact solutions of system (3) are obtained by putting in (3)

$$\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{0}, \quad \vec{U}_{tt} = \vec{0}. \tag{13}$$

By force of (13) equation (3) reads

$$\operatorname{rot}\vec{W} = -\frac{\vec{\nabla}\varphi}{\sqrt{1-(\vec{\nabla}\varphi)^2}}, \quad \vec{U} = \vec{\nabla}(t\varphi(\vec{x}) + V(\vec{x})), \tag{14}$$

where $\varphi(\vec{x}), V(\vec{x}) \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$ are arbitrary functions.

From the integrability condition of system (14): $\vec{\nabla}\,[\vec{\nabla}\times\vec{W}] = 0$ it follows that

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\vec{\nabla}\varphi}{\sqrt{1-(\vec{\nabla}\varphi)^2}}\right) = 0,$$

whence

$$\frac{(1-\vec{\nabla}\varphi)^2)\Delta\varphi + \varphi_{x_a}\varphi_{x_b}\varphi_{x_ax_b}}{[1-\vec{\nabla}\varphi)^2]^{3/2}} = 0.$$

The above equation, provided $(\vec{\nabla}\varphi)^2 \neq 1$, takes the form

$$[1-(\vec{\nabla}\varphi)^2]\Delta\varphi + \varphi_{x_a}\varphi_{x_b}\varphi_{x_ax_b} = 0. \tag{15}$$

In [4, 5] the following classes of exact solutions of equation (15)

$$\begin{gathered}\varphi(\vec{x}) = c_1\ln\left[\sqrt{(\vec{a}\,\vec{x}+c_2)^2 + (\vec{b}\,\vec{x}+c_3)^2} + \right. \\ \left. +\sqrt{(\vec{a}\,\vec{x}+c_2)^2 + (\vec{b}\,\vec{x}+c_3)^2 + c_1^2}\right] + c,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\omega_0}^{\sqrt{\vec{x}^2+c_2\vec{a}\,\vec{x}+c_2^2}} (1+c_1\tau^4)^{-1/2}d\tau$$

were constructed. Omitting intermidiate computations we write down the exact solutions of the Maxwell–Born–Infeld equations (1) obtained by substituting (16) into (2), (14)

$$\vec{B} = \vec{0}, \quad \vec{H} = \vec{0}, \quad \vec{D} = -\frac{c_1[\vec{a}(\vec{a}\,\vec{x} + c_2) + \vec{b}(\vec{b}\,\vec{x} + c_3)]}{(\vec{a}\,\vec{x} + c_2)^2 + (\vec{b}\,\vec{x} + c_3)^2},$$

$$\vec{E} = -\frac{c_1[\vec{a}(\vec{a}\,\vec{x} + c_2) + \vec{b}(\vec{b}\,\vec{x} + c_3)]}{\sqrt{(\vec{a}\,\vec{x} + c_2)^2 + (\vec{b}\,\vec{x} + c_3)^2}}[(\vec{a}\,\vec{x} + c_2)^2 + (\vec{b}\,\vec{x} + c_3)^2 + c_1^2]^{-1/2},$$

$$\vec{B} = \vec{0}, \quad \vec{H} = \vec{0}, \quad \vec{D} = -\frac{\vec{a}(\vec{a}\,\vec{x} + c_2/2) + \vec{b}(\vec{b}\,\vec{x}) + \vec{c}(\vec{c}\,\vec{x})}{\sqrt{c_1(\vec{x}^{\,2} + c_2\vec{a}\,\vec{x} + c_2^2)^2(\vec{x}^{\,2} + c_2\vec{a}\,\vec{x} + c_2^2) + \frac{3}{4}c_2^2}},$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{a}(\vec{a}\,\vec{x} + c_2/2) + \vec{b}(\vec{b}\,\vec{x}) + \vec{c}(\vec{c}\,\vec{x})}{\sqrt{[1 + c_1(\vec{x}^{\,2} + c_2\vec{a}\,\vec{x} + c_2^2)^2](\vec{x}^{\,2} + c_2\vec{a}\,\vec{x} + c_2^2)}}.$$

1. Born M., Infeld L., Foundations of the new field theory, *Proc. Roy. Soc. A*, 1934, **114**, 425–451.
2. Фущич В.И., Цифра И.М., О симметрии нелинейных уравнений электродинамики, *Теорет. и математ. физика*, 1985, **64**, № 1, 41–50.
3. Мирцхулава И.А., Решение двух- и трехмерной проблемы для электродинамики Борна–Инфельда, *Журн. эксперим. и теорет. физики*, 1938, № 4, 377–396.
4. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна–Инфельда, *Докл. АН СССР*, 1991, **263**, № 3, 582–686.

Высшие симметрии уравнения Шредингера

А.Г. НИКИТИН, С.П. ОНУФРИЙЧУК, В.И. ФУЩИЧ

Найдены полные наборы операторов симметрии произвольного конечного порядка для уравнения Шредингера с некоторыми типами потенциалов, в том числе с потенциалом суперсимметричного гармонического осциллятора. Описаны потенциалы, допускающие нетривиальные высшие симметрии.

The complete sets of symmetry operators are found for Shrödinger equation with the potential of supersymmetric oscillator and some other potentials. The potentials admissing nontrivial higher symmetries are described.

Операторы симметрии (ОС) высших порядков привлекают все большее внимание исследователей, см. например, [1–7]. Изучение таких ОС позволяет получать информацию о скрытой симметрии уравнений математической физики, включая симметрии Ли–Беклунда [1] и суперсимметрии [2], и вычислять в явном виде законы сохранения и интегралы движения, которые в принципе не могут быть найдены в классическом подходе Ли [3]. Очень важным приложением ОС высших порядков является описание систем координат, в которых уравнение допускает решения в разделяющихся переменных [4]. Обзор результатов, относящихся к ОС основных уравнении квантовой теории, имеется в [3].

При исследовании высших симметрии уравнений математической физики обычно ограничиваются каким-нибудь конкретным классом ОС, например дифференциальными операторами первого порядка с матричными коэффициентами в случае уравнения Дирака [2, 5]. Конечно, естественный интерес вызывает задача описания ОС возможно более высокого, а в идеале произвольного порядка. Этот интерес стимулируется успешным использованием ОС высокого порядка (превышающего порядок уравнения) для разделения переменных [6, 7].

В работах [8–11] найдены полные наборы ОС произвольного порядка $n < \infty$ для уравнений Д'Аламбера, Клейна–Гордона–Фока. Шредингера и Дирака, описывающих свободные (невзаимодействующие) частицы. В настоящей статье исследуются высшие симметрии уравнения Шредингера с различными потенциалами.

Потенциалы, допускающие нетривиальные лиевские симметрии одномерного уравнения Шредингера, получены в работах [12–14]. Ниже найдены полные наборы ОС произвольного порядка для уравнения Шредингера со всеми этими потенциалами, а также с потенциалом суперсимметричного осциллятора. Описаны потенциалы, допускающие высшие симметрии: показано, что потенциалы, соответствующие точно решаемым уравнениям Шредингера [15], допускают ОС третьего порядка (см. также [11]).

Теор. и мат. физика, 1992, **91**, № 2, С. 268–278.

1. Определяющие уравнения

Запишем исследуемое одномерное уравнение Шредингера в виде (1.1)

$$L\Psi \equiv \bigl(p_0 - 1/2(p^2 + V(x))\bigr)\,\Psi = 0, \tag{1.1}$$

где

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p = -i\frac{\partial}{\partial x} = -i\partial_x.$$

Исследование симметрии уравнения (1.1) включает задачи, которые можно условно разделить на два типа:

1) потенциал V задан, найти симметрию;

2) определить потенциалы, допускающие известную (или какую-нибудь) симметрию.

В этом разделе приведем общие результаты, относящиеся к обоим типам задач.

Определение. *Линейный дифференциальный оператор порядка n*

$$Q^n = \sum_{i=0}^{n} (q_i \cdot p)_i, \tag{1.2}$$

где $(q_i \cdot p)_i = [(q_i \cdot p)_{i-1}, p]_+$, $(q_0 \cdot p)_0 = q_0$, $[A,B]_+ = AB + BA$, $q_i = q_i(t,x)$, называется ОС (порядка n) уравнения (1.1), если

$$[L, Q^n] = 0. \tag{1.3}$$

Замечание 1. Оператор (1.2) не зависит от p_0, поскольку на множестве решений уравнения (1.1) всегда можно выразить p_0 через $p^2 + V$. Это позволяет, не умаляя общности, потребовать равенства нулю коммутатора L с оператором симметрии, переводящим решения в решения [3].

Замечание 2. Представление Q^n в виде суммы i-кратных антикоммутаторов упрощает последующие вычисления. Используя тождество [11]

$$(q_i \cdot p)_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} \frac{i!\,2^{i-k}}{(i-k)!\,k!} (\partial_x^k q_i)\partial_x^{i-k},$$

операторы дифференцирования всегда можно перенести вправо.

Найдем уравнения для коэффициентов q_i ОС. Подставив (1.1), (1.2) в (1.3), используя соотношения [11]

$$[p_0 (q_i \cdot p)_i] = i(q_i \cdot p)_i,$$

$$\left[-\frac{1}{2}p^2, (q_i \cdot p)_i\right] = \frac{i}{2}(q_i' \cdot p)_{i+1},$$

$$[V, (q_{2k} \cdot p)_{2k}] = -i \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{m+k} \frac{2(2k)!}{(2k-2m-1)!(2m+1)!} \times$$
$$\times (q_{2k}\partial_x^{2k-2m-1} V \cdot p)_{2m+1}, \quad k \geq 1,$$

$$[V, (q_{2k+1} \cdot p)_{2k+1}] = -i \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k+1} \frac{2(2k)!}{(2k-2m-1)!(2m+1)!} \times$$
$$\times (q_{2k+1}\partial_x^{2k-2m+1} V \cdot p)_{2m}, \quad k \geq 0$$

(где точка и штрих обозначают производные но t и x), и приравнивая коэффициенты при линейно независимых слагаемых вида $(Ap)_i$ приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов q_i и потенциала V:

$$
\begin{aligned}
&q'_n = 0,\\
&2\dot{q}_{2m} + 2q'_{2m-1} + \sum_{k=m}^{\{(n-1)/2\}k} (-1)^{m+k+1}\frac{2(2k+1)!}{(2k-2m-1)!(2m)!}\times\\
&\qquad \times q_{2k+1}\partial_x^{2k-2m+1}V = 0,\\
&2\dot{q}_{2l+1} + q'_{2l} + \sum_{k=l+1}^{\{n/2\}} (-1)^{k+l}\frac{2(2k)!}{(2k-2l-1)!(2l+1)!}q_{2k}\partial_x^{2k-2l-1}V = 0,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где $m = 0, 1, \ldots \{n/2\}$; $l = 0, 1, \ldots \{(n-1)/2\}$; $q_{-1} \equiv 0$.

Уравнения (1.4) задают необходимые н достаточные условия существования ОС произвольного наперед заданного порядка n для уравнения (1.1). Общее решение уравнения (1.4) для V и q_i определяет явный вид потенциалов, допускающих ОС порядка n и явный вид этого ОС.

2. Полные наборы ОС одномерного уравнения Шредингера

Рассмотрим задачи типа 1 для уравнения (1.1), в которых потенциал V считается известным. Ограничимся анализом потенциалов следующего вида:

$$V = V_1, \tag{2.1а}$$

$$V = V_2 x, \tag{2.1б}$$

$$V = V_3 x^2, \tag{2.1в}$$

$$V = V_4\frac{1}{x^2}, \tag{2.1г}$$

$$V = V_5 x^2 + V_6\frac{1}{x^2}, \tag{2.1д}$$

где $V_1, \ldots, V_6$ — произвольные постоянные.

Формулы (2.1) задают все неэквивалентные потенциалы, допускающие нетривиальные лиевские симметрии [12–14]. Здесь мы найдет полные наборы ОС произвольного порядка n для уравнения (1.1) с потенциалами (2.1).

В случае потенциала (2.1а) задача сводится к описанию ОС свободного уравнения Шредингера [11]. Соответствующие уравнения [1.4] принимают вид

$$\dot{q}_0 = 0, \quad q'_0 = 0, \quad 2\dot{q}_k - q'_{k-1} = 0, \tag{2.2}$$

где точка и штрих обозначают производные по t а x, соответственно. Последовательным дифференцированием (2.2) получаем

$$\partial_t^{k+1} q_k = 0, \quad \partial_x^{n-k+1} q_k = 0, \tag{2.3}$$

откуда

$$q_k = \sum_{p=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} C_k^{p,l} x^p t^l, \tag{2.4}$$

где $C_k^{p,l}$ — произвольные постоянные коэффициенты, число которых равно $(k+1)(n-k+1)$. Из (2.2) получаем единственное ограничение на $C_k^{p,l}$

$$2l(l+1)C_k^{p,l+1} + (p+1)C_{k-1}^{p+1,l} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Следовательно, общее число независимых параметров в (2.4) равно [11]

$$N^n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(n-k+1) - \sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{2.6}$$

Соответствующие ОС порядка n (число которых, очевидно, равно N) задаются соотношениями (1.2), (2.4) и (2.5) (последние могут рассматриваться как рекуррентные формулы). Нетрудно заметить, что все ОС уравнения (1.1), (2.la) представляют собой полиномы порядка n от ОС первого порядка $P = p$ и $G = tp - mx$.

Для потенциалов (2.1б) и (2.1в) уравнения (1.4) сводятся к системам (2.7) и (2.8), соответственно:

$$\begin{aligned} &q_n' = 0, \quad \dot{q}_0 - 2V_2 q_1 = 0, \quad 2\dot{q}_n + \dot{q}_{n-1} = 0, \\ &2\dot{q}_k + q_{k-1} - 2(k+1)V_2 q_{k+1} = 0, \quad 0 < k < n; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &q_n' = 0, \quad 2\dot{q}_n - q_{n-1}' = 0, \quad \dot{q}_0 - 2V_3 x q_1 = 0, \\ &2\dot{q}_k + q_{k-1}' - 4(k+1)V_3 x q_{k+1} = 0, \quad 0 < k < n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Уравнения (2.7) могут быть решены по полной аналогии с (2.2). Снова имеют место дифференциальные следствия (2.3) и справедливо представление (2.4), но вместо (2.5) получаем из (2.7) следующие условия на $C_k^{p,l}$

$$2m(l+l)C_k^{p,l+1} + (p+1)C_{k-1}^{p+1} - 4(k+1)V_2 C_k^{p,l} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Таким образом, уравнение (1.1) с потенциалом (2.16) допускает N^n ОС порядка n. Явный вид этих операторов задается формулами (1.2), (2.4), (2.9), а N^n — формулой (2.6). Все ОС являются полиномами порядка n от ОС первого порядка $\hat{p} = p + Vt$, $\hat{G} = t\hat{p} - mx$.

Для нахождения общего решения системы (2.8) воспользуемся следующими дифференциальными следствиями:

$$\partial_x^{n-k+1} q_k = 0,$$

которые позволяют представить q_n в виде

$$q_k = \sum_{i=0}^{n-k} a_{k,i} x^i, \tag{2.10}$$

где $a_{k,i}$ — произвольные функции от t. Подставив (2.10) в (2.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе N^n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для N^n неизвестных $a_{k,i}$. Воспользовавшись тем фактом, что общее решение такой системы зависит от N^n произвольных параметров [16], мы сразу укажем явный вид соответствующих линейно независимых ОС

$$Q^n = \sum_{n=0}^{n} \sum_{\alpha=0}^{k} C_{k,\alpha}(p - i\omega x)^{\alpha}(p + i\omega x)^{n-\alpha} \exp[i(2\alpha - k)\omega t], \tag{2.11}$$

где $\omega = \sqrt{V_3}$, $C_{k,\alpha}$ — произвольные постоянные, число которых равно N^n (2.6).

Мы видим, что все ОС уравнения (1.1), (2.1в) конечного порядка n сводятся к полиномам от ОС первого порядка $p_\pm = (p \pm i\omega x)\exp(\mp i\omega t)$. В случае $n = 2$ наши результаты сводятся к полученным ранее в [12].

Несколько более громоздких выкладок требует интегрирование системы (1.4) с потенциалом (2.1г). Мы ограничимся выписыванием явного вида соответствующего ОС порядка $2n$

$$Q^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{a_1 a_2 \cdots a_i} Q_{a_1} Q_{a_2} \cdots Q_{a_i}, \tag{2.12}$$

где $\lambda^{a_1 \cdots a_t}$ — произвольные симметричные тензоры, $a_k = 1, 2, 3$,

$$Q_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{V_4}{x^2}, \quad Q_2 = 2tQ_1 - xp + \frac{i}{2}, \quad Q_3 = t^2 Q_1 - tQ_2 - \frac{1}{2}mx^2.$$

Количество линейно независимых операторов (2.12) равно N^n (2.6). ОС нечетного порядка для уравнения (1.1), (2.1г) не существует.

Соотношения (2.6), (2.12) задают полный набор ОС также для уравнения (1.1), (2.1д).

3. ОС суперсимметричного осцилятора

Уравнение Шредингера для суперсимметричного осциллятора имеет вид [17]

$$L\Psi \equiv \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2 + \sigma_3 \omega) \right] \Psi = 0, \tag{3.1}$$

где Ψ — двухкомпонентная волновая функция, ω — произвольный вещественный параметр, σ_3 — одна из матриц Паули:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) обладает специфической симметрией в классе дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами, определяемой супералгеброй $sqm(2)$ [17]. Эту алгебру образуют следующие ОС:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma_1 p + \sigma_2 \omega x], \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2 p - \sigma_1 \omega x), \quad Q_3 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2 + \sigma_3 \omega),$$

удовлетворяющие соотношениям

$$[Q_1, Q_2]_+ = 0, \quad Q_1^2 = Q_2^2 = Q_3, \quad [Q_1, Q_3] = [Q_2, Q_3] = 0. \tag{3.2}$$

Инвариантность относительно алгебры (3.3) является основным свойством уравнений суперсимметрнчной квантовой механики [17].

В работе [18] получен полный набор ОС второго порядка для уравнения (3.1). Мы найдем все неэквивалентные ОС произвольного порядка, описание которых, по сути, сводится к исследованию симметрии уравнения (1.1), (2.1г). Действительно, подвергая Ψ и L из (3.1) преобразованию

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi' = \exp\left(\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right)\Psi, \\ &L \to L' = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right) L \exp\left(\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

приходим к уравнению $L'\Psi' = 0$, где

$$L' = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)$$

— оператор, представляющий собой прямую сумму двух операторов (1.1), (2.1г). Соответствующие ОС, очевидно, можно представить в форме $Q' = \sigma^\mu Q^n_\mu$, где Q^n_μ — ОС уравнения (1.1), (2.1г), задаваемые соотношением (2.11) (где $C_{k,\alpha} \to C^\mu_{k,\alpha}$). Возвращаясь с помощью преобразования, обратно к (3.3), к исходному уравнению (3.1), получаем полный набор ОС этого уравнения в виде

$$Q^n = \sigma'^\mu Q^n_\mu, \tag{3.4}$$

где

$$\sigma'_0 = \sigma_0, \quad \sigma'_3 = \sigma_3, \quad \sigma'_1 = \sigma_1 \cos\frac{\omega t}{2} + \sigma_2 \sin\frac{\omega t}{2},$$
$$\sigma'_2 = \sigma_2 \cos\frac{\omega t}{2} - \sigma_1 \sin\frac{\omega t}{2}.$$

Количество линейно независимых ОС порядка и равно $4N^n$ где N^n задано в (2.6).

Симметрия суперсимметричного уравнения Шредингера с произвольным потенциалом исследована в [19].

4. ОС трехмерных гармонического и суперсимметричного осциляторов

Исследование высших симметрии трехмерного уравнения Шредингера

$$L\Psi \equiv \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{x})\right]\Psi = 0 \tag{4.1}$$

может быть проведено по схеме, используемой в разделе 2. Существенное усложнение задачи, связанное с переходом к уравнениям в частных производных по пространственным переменным, преодолевается с использованием обобщенных тензоров Киллинга [8, 10].

ОС уравнения (4.1) произвольного порядка n представим в виде

$$Q^n = \sum_{k=0}^{n}[[\ldots[F^{a_1a_2\cdots a_k}, p_{a_1}]_+, p_{a_2}]_+, \ldots, p_{a_k}]_+, \tag{4.2}$$

где $F^{a_1a_2\cdots a_k}$ — симметричный тензор ранга k, зависящий от x и t.

Подставляя L (4.1) и Q^n (4.2) в условие инвариантности (1.3) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых операторах дифференцирования, приходим к следующей системе определяющих уравнении (ср. (1.4)):

$$\begin{aligned}
&\partial^{(a_{n+1}}F^{a_1a_2\cdots a_n)} = 0,\\
&2\dot{F}^{a_1a_2\cdots a_{2l+1}} + \partial^{(a_{2l+1}}F^{a_1a_2\cdots a_{2l})} +\\
&\quad + \sum_{k=m}^{\{(n-1)/2\}}(-1)^{m+k+1}\frac{2(2k+1)!}{(2k-2m+1)!(2m)!}U^{a_1a_2\cdots a_{2m}},\\
&2\dot{F}^{a_1a_2\cdots a_{2l+1}} + \partial^{(a_{2l+1}}F^{a_1a_2\cdots a_{2l})} +\\
&\quad + \sum_{k=l+1}^{\{n/2\}}(-1)^{k+1}\frac{2(2k)!}{(2k-2l-1)!(2l+1)!}W^{a_1a_2\cdots a_{2l+1}},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\partial^a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad m = 0, 1, \ldots, \{n/2\}, \quad l = 0, 1, \ldots, \{(n-1)/2\},$$
$$U^{a_1 a_2 \cdots a_{2m}} = F^{a_1 a_2 \cdots a_{2m} b_1 b_2 \cdots b_{2k-2m+1}} \partial^{b_1} \partial^{b_2} \cdots \partial^{b_{2k-2m+1}} V,$$
$$W^{a_1 a_2 \cdots a_{2l+1}} = F^{a_1 a_2 \cdots a_{2l+1} b_1 b_2 \ldots b_{2k-2l-1}} \partial^{b_1} \partial^{b_2} \cdots \partial^{b_{2k-2l-1}} V$$

и подразумевается симметризация по индексам, заключенным в скобки.

Уравнения (4.3) определяют потенциалы V, допускающие нетривиальные симметрии порядка n, и коэффициенты $F^{a_1 a_2 \cdots a_k}$ соответствующих ОС. Общее решение этих уравнений для $V \equiv 0$ получено в [10]. Здесь мы рассмотрим случай потенциала гармонического осциллятора

$$V(\boldsymbol{x}) = \omega^2 \boldsymbol{x}^2$$

и приведем без доказательства число N^n линейно независимых ОС поряд n и явный вид этих операторов:

$$N^n = \frac{1}{3!4!}(n+1)(n+2)^2(n+3)^2(n+4),$$
$$Q^n = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{c} \lambda^{a_1 a_2 \cdots a_c b_1 b_2 \cdots b_{n-c}} q^+_{a_1} q^+_{a_2} \cdots q^+_{a_k} q^-_{a_{k+1}} \cdots q^-_{a_c} J_{b_1} J_{b_2} \cdots J_{b_{a-c}}, \tag{4.4}$$

где

$$q^\pm_{a_j} = (p_{a_j} \pm i\omega x_{a_j}) \exp(\mp i\omega t), \quad J_b = \varepsilon_{bcd} q^+_c q^-_d,$$

$\lambda^{a_1 \cdots a_c b_1 \cdots b_{n-c}}$ — произвольные постоянные тензоры, симметричные относительно перестановок $a_i \leftrightarrow a_j$, $b_k \leftrightarrow b_i$ и имеющие нулевой след по любой паре индексов (a_j, b_i).

Исследование симметрии уравнения (4.1) с потенциалом суперсимметричного осциллятора

$$V(\boldsymbol{x}) = \omega^2 \boldsymbol{x}^2 + \omega\sigma_3$$

может быть проведено в полной аналогии с разделом 3. Общее выражение для соответствующего ОС порядка n задается формулой (3.4), где Q^n_μ — операторы (4.5) ($\lambda^{a_1 \cdots a_c b_1 \cdots b_{n-c}} \to \lambda_\mu^{a_1 \cdots a_c b_1 \cdots b_{n-c}}$), число линейно независимых ОС равно $4N^n$.

5. Потенциалы, допускающие нетривиальные симметрии

Обратимся теперь к задаче второго типа и опишем класс потенциалов. при которых уравнение (1.1) допускает нетривиальные симметрии. В принципе все такие потенциалы описаны уравнениями (1.4), если и V, и q_i рассматривать как неизвестные.

Рассмотрим последовательно случаи $n = 1, 2$ (которые соответствуют лиевским симметриям) и $n = 3$ (простейшая нелиевская симметрия).

Полагая в (1.4) $n = 1$, приходим к следующей системе:

$$q_1' = 0, \quad 2\dot{q}_1 + q_0' = 0, \quad \dot{q}_0 - V' q_1 = 0. \tag{5.1}$$

По определению $q_1 \neq 0$, поэтому справедливы следующие дифференциальные следствия системы (5.1):

$$q_0'' = 0, \quad V''' = 0,$$

откуда получаем общий вид потенциала V, допускающего ОС первого порядка

$$V = V_1 + V_2 x + V_3 x^2,$$

где V_1, V_2 и V_3 — произвольные постоянные. Соответствующие ОС приведены в разделе 3.

Для $n = 2$ система (1.4) принимает вид

$$q_2' = 0, \quad 2\dot{q}_2 + q_1' = 0, \quad \dot{q}_0 - V' q_1 = 0, \quad 2\dot{q}_1 + q_0' - 2q_2 V' = 0, \tag{5.2}$$

откуда получаем но аналогии с вышеизложенным

$$V = V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \frac{V_{-2}}{(C_0 + C_1 x)^2}. \tag{5.3}$$

Мы видим, что уравнения (1.4) позволяют элементарно вычислять общий вид потенциала, допускающего нетривиальную лиевскую симметрию (ОС второго порядка сводятся на множестве решений уравнения (1.1) к дифференциальным операторам первого порядка, являющимся генератором группы Ли).

Случай $n = 3$ уже соответствует нелиевской симметрии. Соответствующие уравнения (1.4) принимают вид

$$q_3' = 0, \quad 2\dot{q}_3 + q_2' = 0, \quad 2\dot{q}_2 + q_1' - 6q_3 V' = 0. \tag{5.4а}$$

$$2\dot{q}_1 + q_0' - 4q_2 V' = 0. \tag{5.4б}$$

$$\dot{q}_0 - q_1 V' + q_3 V''' = 0. \tag{5.4в}$$

Как легко убедиться, общее решение уравнений (5.4а) имеет вид

$$q_3 = a, \quad q_2 = b - 2\dot{a}x, \quad q_1 = 2\ddot{a}x^2 - 2\dot{b}x + 6aV + c, \tag{5.5}$$

где a, b, c — произвольные функции от t. Дифференцируя (5.4б) по t, а (5.4в) по x и исключая $\dot{q}_\mu$, приходим с использованием (5.5) к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}(aV'' - 3aV^2 - cV)'' - 2\ddot{a}[(V'x^2)' + 4(xV)' + 2V] + 2\dot{b}[(V'x)' + 2V'] = \\ = 4\ddddot{a}\,x^2 - 4\dddot{b}\,x + 2\ddot{c}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Нелинейное уравнение (5.6) является достаточно сложным, поэтому ограничимся исследованием его частных решений. Прежде всего отметим, что все потенциалы (5.3) удовлетворяют (5.6) и, следовательно, допускают нетривиальный ОС третьего порядка. Оказывается, однако, класс потенциалов, допускающих такой ОС, гораздо шире и включает, например, следующие решения уравнения (5.6) [11]:

$$\begin{aligned}&V = \frac{2d^2}{\cos^2 dx}, \quad V = 2d^2 \operatorname{tg}^2 dx. \\ &V = 2d(\operatorname{th}^2 dx - 1), \quad V = 2d^2(\operatorname{cth}^2 dx - 1), \quad V = \frac{d^2(1 \pm \operatorname{ch} dx)}{\operatorname{sh}^2 dx},\end{aligned} \tag{5.7}$$

где d — произвольный параметр.

Уравнения (1.1) с потенциалами (5.7) являются точно решаемыми [15]. Следует подчеркнуть, что эти потенциалы не допускают нетривиальной лиевской симметрии, но для соответствующих уравнений Шредингер существует ОС третьего порядка.

Приведем ряд других решений уравнения (5.6). Полагая a priori $\ddot{a} = \dot{b} = \ddot{c} = 0$, это уравнение можно дважды проинтегрировать по x и свести к следующей форме:

$$aV'' - 3aV^2 - cV = k_1 x + k_0. \tag{5.8}$$

Очевидным решеннием (5.8) является функция (5.9)

$$V = \frac{1}{3}W - \frac{c}{6a}, \quad a \neq 0, \tag{5.9}$$

где W — функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $W'' = W^2$, при этом $k_0 = k_1 = 0$. Другие решения уравнения (5.8) получаем с использованием справочника [20]:

а) при $c = k_0 = 0$, $k_1 = 2a \neq 0$, $V = 2y$ получим уравнение, которое определяет трансцендентную функцию Пенлеве;

б) при $k_1 = k_0 = 0$, $c = 4a \neq 0$, $V = 2y$ получим уравнение, решение которого приводит к эллиптическим интегралам. В число решении входят, например, функции

$$y = \frac{1}{\sin^2(x + C_1)},$$

соответствующие частному случаю потенциала Пешля–Теллера [21].

Заключение

Мы показали, что задача описания полного набора ОС произвольного конечного порядка n для одномерного уравнения Шредингера сводится к нахождению общего решения системы линейных уравнений (1.4) для коэффициентов q_i оператора (1.2). Интегрирование этой системы для заданного потенциала взаимодействия позволяет найти все неэквивалентные ОС порядка n. Выше найдены эти ОС для всех потенциалов, допускающие нетривиальную лиевскую симметрию, и для потенциала суперсимметричного осциллятора.

Гораздо более сложной является задача описания потенциалов, допускающих ОС заданного порядка n. Такая задача тоже сводится к решению системы (1.4), где и q_i и V рассматриваются как неизвестные. В результате уже в случае $n = 3$ приходим к нелинейному уравнению для V, для которого удалось получить только частные решения. Однако в их число входят очень важные потенциалы (5.7), (5.10), соответствующие точно решаемым уравнениям Шреднигера [15, 21]. Наличие обобщенной (нелиевской) симметрии у точно решаемых уравнений, не обладающих лиевской симметрией, на наш взгляд, является фундаментальным фактом, открывающим новые возможности в построении точно решаемых моделей. Так, представляется очень интересным исследовать возможность построения точных решений уравнений (1.1) с потенциалом (5.9) и другими потенциалами, перечисленными выше в пунктах “а”, “б”, допускающими ОС третьего порядка.

Следует отметить, что используемый нами подход позволяет вычислять также симметрии бесконечного порядка. Соответствующие ОС могут быть представлены в виде (1.2) или (4.2), где $n \to \infty$, а определяющие уравнения задаются формулами

(1.4) или (4.3), где первые строки должны быть опущены и суммирование заменяется бесконечными рядами (т.е. верхний предел суммирования устремляется к бесконечности).

Наш подход к исследованию ОС высших порядков уравнения (1.1) является альтернативным используемому в [22], где описаны ОС, допускаемые потенциалами Морзе и Пешля–Теллера.

1. Anderson R.H., Ibragimov N.H., Lie–Bäclund transformations in applications, Philadelphia, SIAM, 1979.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, № 3, 537–549.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, М., Наука, 1990.
4. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981.
5. Шаповалов В.Н., Экле Г.Г., Алгебраические свойства уравнения Дирака, Элиста, Калмыцкий гос. ун-т, 1972.
6. Kalnins E.G., Miller W., jr., Williams G.C., *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, № 7, 1893–1990.
7. Fels M., Kamran N., *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1990, **428**, 229–249.
8. Никитин А.Г., *УМЖ*, 1991, **43**, № 6, 786–795.
9. Никитин А.Г., *УМЖ*, 1991, **43**, № 10, 1388–1398.
10. Никитин А.Г., *УМЖ*, 1991, **43**, № 11, 1521–1527.
11. Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1991, **24**, № 22, L1269–L1275.
12. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802–810.
13. Anderson R.H., Kumei S., Wulfman C.E., *Rev. Mex. Fis.*, 1972, **21**, № 1, 1–9.
14. Boyer C.P., *Helv. Phys. Acta*, 1979, **47**, № 4, 589–605.
15. Bagrou V.G., Gitman D.M., Exact solutions of relativistic wave equations, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1990.
16. Смирнов В.И., Курс высшей математики, Т.2, М., Наука, 1967.
17. Witten E., *Nucl. Phys. B*, 1981, **188**, № 3, 513–520.
18. Beckers J., Debergh N., *Helv. Phys. Acta*, 1991, **64**, № 1, 24–35.
19. Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G., *J. Math. Phys.*, 1992, **33**, № 1.
20. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Физматгиз, 1961.
21. Флюгге З., Задачи по квантовой механике, Т.1, М., Мир, 1974.
22. Kalnins E.G., Leuine R.D., Miller W., jr., in Mechanics, analysis and geometry: 200 years after Lagrange, Amsterdam, North-Holland, 1991, 237–256.

Contents