

**W.I. Fushchych  
Scientific Works**

**Volume 3  
1986–1989**

*Editor  
Vyacheslav Boyko*

**Kyiv 2001**



# О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп

А.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

В работе изучаются подалгебры алгебр  $\mathcal{LO}(p, q)$  и  $\mathcal{LU}(p, q)$ . Найдены все максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебр  $\mathcal{LO}(p, q)$  и  $\mathcal{LU}(p, q)$ . Изучена структура таких подалгебр. Получена формула числа максимально разрешимых подалгебр изотропного ранга  $r$  и найдены размерности всех подалгебр такого рода. Полностью изучены максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебры  $\mathcal{LSU}(p, q)$  с точностью до  $SU(p, q)$ -сопряженности. Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ , обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре  $V \boxplus \mathcal{LO}(V)$ . Изучена структура одномерных подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . Для алгебр  $\mathcal{LO}(p, 1)$  и  $\mathcal{LO}(p, 2)$  полностью проведена классификация подалгебр такого рода. Рассматривается ряд свойств неприводимых подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ .

## Введение

В различных приложениях теории групп в математической и теоретической физике важное значение приобретает задача описания непрерывных подгрупп данной группы Ли с точностью до внутренней сопряженности. Эта задача сводится к описанию относительно определенной сопряженности классов подалгебр данной алгебры Ли. Патера, Винтерниц и Цассенхауз [1] предложили метод для изучения максимальных разрешимых подалгебр полупростых алгебр Ли. С помощью этого метода они нашли в явном виде все  $q + 1$  максимальных разрешимых подалгебр  $S_k$ ,  $k = 0, \dots, q$ , алгебры  $\mathcal{LU}(p, q)$ ,  $p \geq q > 0$ . Размерность подалгебры  $S_k$  равна  $(2k + 1)(p + q - k) - 1$ . Ими же описание максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  было сведено к описанию максимальных разрешимых подалгебр алгебр  $\mathcal{LO}(p - 1, q - 1)$  и  $\mathcal{LO}(p - 2, q - 2)$ . Был решен также вопрос о числе максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . Отметим, что структура таких подалгебр как в алгебре  $\mathcal{LSU}(p, q)$ , так и в алгебре  $\mathcal{LO}(p, q)$ , в указанных работах [1–2] не рассматривалась.

Систематическое изучение подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом начато в работах [3–5]. Методом, предложенным в этих работах, была проведена классификация подалгебр таких алгебр:  $\mathcal{LP}(1, 3)$  [3],  $\mathcal{LSim}(1, 3)$  [4],  $\mathcal{LO}(2, 3)$  [5],  $\mathcal{LOpt}(1, 2)$  [5].

В настоящей работе предложен метод для изучения подалгебр алгебр  $\mathcal{LO}(p, q)$  и  $\mathcal{LSU}(p, q)$  с точностью до  $O(p, q)$ - и  $SU(p, q)$ -сопряженности (соответственно). Работа состоит из 8 параграфов. В § 1 найдено полное описание максимальных подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ .

В § 2 получено полное описание максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  и, в частности, изучена их структура. Если  $\mathcal{L}$  — максимальная разрешимая подалгебра, то важнейшей характеристикой ее является ранг  $r$  максимального

вполне изотропного подпространства  $N_0$ , инвариантного относительно подалгебры  $\mathcal{L}$ . Число  $r$  мы называем изотропным рангом подалгебры  $\mathcal{L}$ . Максимальная разрешимая подалгебра изотропного ранга  $r$  алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$  обладает таким коммутативным идеалом  $S$ , фактор-алгебра  $\mathcal{L}/S$  по которому разлагается в полупрямую сумму  $V_r^{(p+q-2r)} \oplus (\Phi_1 \oplus \Phi_2)$  коммутативной подалгебры  $V_r^{(p+q-2r)}$  размерности  $r(p+q-2r)$  и алгебры  $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ , являющейся прямой суммой максимальной разрешимой вполне приводимой подалгебры алгебры  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$  и максимальной разрешимой подалгебры алгебры  $gl(r, R)$ . В предлагаемой работе дано полное описание подалгебр  $S$ ,  $V_r^{(p+q-2r)}$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ . Исходя из этого, получаем разложение алгебры  $\mathcal{L}$ , рассматриваемой как множество, в декартовое произведение хорошо известных множеств. Получена также формула числа максимальных разрешимых подалгебр изотропного ранга и найдены размерности всех подалгебр такого рода.

В § 3 получено полное описание максимальных и максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}SU(p, q)$ . Эти результаты формулируются аналогично результатам § 2.

В § 4 изучаются вполне приводимые подалгебры конечномерной алгебры  $JO(V)$ , являющейся полупрямой суммой нетривиального коммутативного идеала  $V$  и алгебры  $\mathcal{L}O(V)$  линейных преобразований пространства  $V$ . Выделены те из них, которые обладает только расщепляемыми в алгебре  $JO(V)$ . Доказана следующая теорема: вполне приводимая подалгебра  $\mathcal{L}$  алгебры  $\mathcal{L}O(V)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $JO(V)$  в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий: 1)  $\mathcal{L}$  полупроста; 2)  $\mathcal{L}$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ .

В § 5 рассматривается задача описания одномерных подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$  с точностью до  $O(p, q)$ -сопряженности. С этой целью определяется естественное разложение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2 * \mathcal{L}_3 * \mathcal{L}_4$  подалгебры  $\mathcal{L}$  изотропного ранга  $r > 0$  в подпрямое произведение проекций  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}_4$  подалгебры  $\mathcal{L}$  соответственно на  $\mathcal{L}O(r)$ ,  $V_r^{(p+q-2r)}$ ,  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$  и  $gl(r, R)$ . Доказано предложение, утверждающее, что если подалгебры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  изотропного ранга  $r$  алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$   $O(p, q)$ -сопряжены, то подалгебры  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}'_3$   $O(p-r, q-r)$ -сопряжены, а подалгебры  $\mathcal{L}_4$  и  $\mathcal{L}'_4$   $GL(r, R)$ -сопряжены. Это предложение сводит классификацию одномерных подалгебр изотропного ранга  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$  к описанию одномерных подалгебр алгебры  $gl(r, R)$  с точностью до  $GL(r, R)$ -сопряженности и одномерных вполне приводимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$  с точностью до  $O(p-r, q-r)$ -сопряженности. Эти результаты и результаты § 4 позволили изучить структуру одномерных подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$  в общем случае. Для алгебр  $\mathcal{L}O(p, 1)$  и  $\mathcal{L}O(p, 2)$  полностью проведена классификация подалгебр такого рода.

В § 6 определяется разложение вполне приводимой подалгебры  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(p, q)$  в подпрямое произведение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_s$  неприводимых подалгебр  $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}O(p_i, q_i)$ ,  $p_i \leq p$ ,  $q_i \leq q$ . Указанное разложение существенно используется для изучения свойств вполне приводимых подалгебр.

Свойства неприводимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$  изучаются в § 7. Эти результаты позволили в § 8 изучить структуру подпространства  $V_1 \subset V$ , инвариантного относительно вполне приводимой подалгебры алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$ . Отметим, что полученные результаты относительно непрерывных подгрупп группы  $O(p, q)$  без существенных изменений переносятся на случай группы  $SU(p, q)$ .

### § 1. Максимальные подалгебры алгебры $\mathcal{LO}(p, q)$

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем вещественных чисел  $R$ ,  $\varphi$  — невырожденная квадратичная форма на пространстве  $V$ . Для квадратичной формы  $\varphi$  существует такой базис  $\{T_1, \dots, T_{p+q}\}$  пространства  $V$ , что

$$\varphi = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2.$$

Известно, что пара чисел  $(p, q)$  не зависит от выбора базиса, а зависит лишь от  $\varphi$ , и называется сигнатурой формы  $\varphi$ .

Вектор  $T \in V$  называется изотропным, если  $\varphi(T) = 0$ . Пространство  $V_1 \subset V$  называется:

- 1) изотропным, если существует ненулевой вектор  $T \in V_1$ , ортогональный к  $V_1$ ;
- 2) вполне изотропным, если  $\varphi(T) = 0$  для любого вектора  $T \in V_1$ .

Группой  $O(p, q)$  называется группа  $\{f \in GL(V) \mid \varphi(T) = \varphi(f(T))\}$ , составленная из изометрий пространства  $(V, \varphi)$ . Если в базисе  $\{T_i\}$  пространства  $V$  матрица  $f$  равна  $S$ , то  $f \in O(p, q)$  тогда и только тогда, когда  $S^T J_{p,q} S = J_{p,q}$ , где

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix},$$

$E_p$  — единичная матрица порядка  $p$ ,  $S^T$  — матрица, транспонированная к матрице  $S$ . Таким образом, группу  $O(p, q)$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа, можно определить как группу всех квадратных матриц  $A$  порядка  $p + q$  над полем вещественных чисел  $R$ , удовлетворяющих матричному уравнению

$$A^T J_{p,q} A = J_{p,q}.$$

Отсюда вытекает, что алгебра  $\mathcal{LO}(p, q)$  группы  $O(p, q)$  состоит из всех вещественных матриц  $X$ , удовлетворяющих соотношению

$$X \cdot J_{p,q} + J_{p,q} \cdot X^T = 0.$$

Пространство  $V$  будем предполагать реализованным как пространство  $(p + q)$ -мерных вектор-столбцов над  $R$ . Тогда действие элемента  $J$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  на вектор-столбец  $T$  пространства  $V$  сводится к обычному умножению  $T$  слева на матрицу  $J$ , т.е.  $[J, T] = J \cdot T$ . Тем самым определена алгебра  $JO(p, q)$ , являющаяся полупрямой суммой пространства  $V$  размерности  $p + q$  и алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . В дальнейшем алгебру  $\mathcal{LO}(p, q)$ , действующую на пространстве  $(V, \varphi)$ , будем обозначать через  $\mathcal{LO}(V)$ .

К алгебре  $\mathcal{LO}(p, q)$  близко примыкает алгебра  $\mathcal{LSU}(p, q)$ . По определению она состоит из всех комплексных матриц  $X \in sl(p + q, C)$ , удовлетворяющих соотношению

$$X^* J_{p,q} + J_{p,q} \cdot X = 0,$$

где  $X^*$  — матрица, эрмитово-сопряженная  $X$ . Алгебра  $\mathcal{LSU}(p, q)$  является алгеброй Ли группы  $SU(p + q, C)$ , которая состоит из всех комплексных матриц  $X \in \mathcal{SL}(p + q, C)$ , удовлетворяющих соотношению

$$X^* J_{p,q} X = J_{p,q}.$$

Рассматривая подалгебру  $\mathcal{L}(p, q)$ , мы в настоящем параграфе будем предполагать, что  $p \geq q > 0$ .

**Определение.** *Подалгебра  $\mathcal{L} \subset \mathcal{LO}(V)$  называется вполне приводимой подалгеброй класса 0, если каждое  $\mathcal{L}$ -инвариантное подпространство пространства  $V$  обладает  $\mathcal{L}$ -инвариантным прямым ортогональным дополнением.*

Из данного определения вытекает, что подалгебра  $\mathcal{L} \subset \mathcal{LO}(V)$  вполне приводима класса 0, если  $V$  не содержит  $\mathcal{L}$ -инвариантного вполне изотропного подпространства.

В данной работе, за исключением § 4, вполне приводимые подалгебры класса 0, будем называть вполне приводимыми подалгебрами.

Будем говорить, что подалгебра  $\mathcal{L} \subset \mathcal{LO}(V)$  относится к классу  $r$  или имеет изотропный ранг  $r$ , если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно подалгебры  $\mathcal{L}$ , равен  $r$ . Для вполне приводимой подалгебры изотропный ранг полагаем равным нулю.

Изотропный ранг  $r$ , очевидно, удовлетворяет соотношению  $0 \leq r \leq q$ .

Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ , не являющаяся вполне приводимой. Если  $r$  — изотропный ранг подалгебры  $\mathcal{L}$ , то  $\mathcal{L}$  оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство  $N_0$  ранга  $r$ . В силу теоремы Витта можно допускать, что  $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \dots, T_r + T_{p+q} \rangle$ . Для изучения структуры подалгебры  $\mathcal{L}$  воспользуемся следующей конструкцией.

Пусть  $p$  и  $q$  — целые числа,  $p \geq q > 0$ . Для натурального числа  $r$ ,  $0 < r \leq q$ , рассмотрим алгебру  $\mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и алгебру  $gl(r, R)$  всех вещественных квадратных матриц порядка  $r$ . Пусть далее  $V_r^{(n-2r)}$ ,  $n = p+q$ , — множество всех вещественных  $r \times (n-r)$ -матриц. Это множество превращается в алгебру Ли, если положить  $[X, Y] = 0$  для любых двух элементов  $X, Y \in V_r^{(n-2k)}$ . Если  $\mathcal{LO}(p-r, q-r) \oplus gl(r, R)$  — прямая сумма подалгебр  $\mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и  $gl(r, R)$ ,  $B \in \mathcal{LO}(p-r, q-r)$ ,  $C \in gl(r, R)$  и  $X \in V_r^{(n-2r)}$ , то положим  $[B+C, X] = -X \cdot B + C \cdot X$ . Нетрудно убедиться, что относительно этого умножения мы получаем алгебру Ли, являющуюся полупрямой суммой пространства  $V_r^{(n-2r)}$  и алгебры  $\mathcal{LO}(p-r, q-r) \oplus gl(r, R)$ . Полученную алгебру обозначим через  $JO(V_r^{(n-2r)})$ .

Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная подалгебра класса  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{LO}(V)$  и  $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \dots, T_r + T_{p+q} \rangle$  — максимальное вполне изотропное подпространство, инвариантное относительно  $\mathcal{L}$ . Ортогональное дополнение к  $N_0$  совпадает с  $N = N_0 + N_1$ , где  $N_1 = \langle T_{r+1}, \dots, T_{p+q-r} \rangle$ . Следовательно,  $N$  инвариантно относительно  $\mathcal{L}$ . Пусть  $\mathcal{L}_0 = \{J_0 \in \mathcal{L} \mid [J, N_1] \subset N_0\}$ ,  $\mathcal{L}_1 = \{J \in \mathcal{L} \mid [J, N_1] \subset N_1\}$ . Докажем, что  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ . Действительно, каждый элемент  $J$  подалгебры  $\mathcal{L}$  имеет следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & A_2 \\ B_2 & C & B_3 \\ A_2^T & B_4 & D \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $A_1, C, D$  — квадратные матрицы порядка  $r$ ,  $p+q-2r$  соответственно и  $A_1^T = -A_1$ ,  $D^T = -D$ . Учитывая принадлежность элемента  $J$  алгебре  $\mathcal{LO}(p, q)$ , из соотношения  $J \cdot J_{p,q} + J_{p,q} \cdot J^T = 0$  получаем, что

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{LO}(p, q).$$

Рассмотрим произвольный элемент  $X \in N_1$ . Имеем  $[J, X] = X' + X_0$ , где  $X' \in N_1$ ,  $X_0 \in N_0$ . Так как  $[K, X] = X'$ ,  $[K, N_0] = 0$ , то  $K \in \mathcal{L}_1$ . Следовательно,  $B_1 = B_4 = 0$  и ввиду соотношения  $[J - K, X] = 0$ , которое выполняется для любого  $X \in N_1$ , получаем, что  $J - K \in \mathcal{L}_0$ . Поэтому  $J \in \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$  и тем самым равенство  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$  доказано.

Очевидно,  $S = \{J \in \mathcal{L} \mid [J, N] = 0\}$  является идеалом алгебры  $\mathcal{L}$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная подалгебра класса  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ . Тогда фактор-алгебра  $\mathcal{L}/S$  изоморфна алгебре  $JO(V_r^{(n-2r)})$ .

**Доказательство.** Каждый элемент подалгебры  $\mathcal{L}$  имеет вид (1.1), где  $A_1, C, D$  — квадратные матрицы порядка  $r, n - 2r, r$  соответственно и  $A_1^T = -A_1, D^T = -D$ . Матрицу  $B_1$  разобьем на блоки  $B_1 = (B_{11}, B_{12})$ , где  $B_{11}$  —  $r \times (p - r)$ -матрица,  $B_{12}$  —  $r \times (q - r)$ -матрица. Тогда

$$B_2 = \begin{pmatrix} -B_{11}^T \\ B_{12}^T \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Изучим строение подалгебры  $\mathcal{L}_0$ . Поскольку  $N_1$  и  $N_0$  состоят соответственно из векторов

$$\begin{pmatrix} 0 \\ X \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y \\ 0 \\ Y \end{pmatrix},$$

и  $\mathcal{L}_0 N_1 \subset N_0$ , то  $B_1 X = B_4 X$  и  $CX = 0$ . Ввиду произвольности  $X$  отсюда вытекает, что  $B_1 = B_4, C = 0$ . Кроме того,  $\mathcal{L}_0$  оставляет инвариантным подпространство  $N_0$  и потому  $A_1 + A_2 = A_2^T + D, B_3 = -B_2$ . Следовательно, произвольная матрица подалгебры  $\mathcal{L}_0$  представляется в виде суммы

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & 0 & -B_2 \\ 0 & B_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & -A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & B - B^T \end{pmatrix},$$

где  $B \in gl(r, R)$ , а  $B_2$  определена равенством (1.2).

Изучим далее структуру подалгебры  $\mathcal{L}_1$ . Имеем

$$\begin{pmatrix} B_1 X \\ CX \\ B_4 X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $B_1 = B_4 = 0$  и потому  $\mathcal{L}_1$  состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & C & 0 \\ A_2^T & 0 & D \end{pmatrix},$$

где  $A_1 + A_2 = A_2^T + D$ . Поэтому каждая матрица подалгебры  $\mathcal{L}_1$  разлагается в сумму

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & -A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & B - B^T \end{pmatrix},$$

где  $C \in \mathcal{LO}(p-r, q-r)$ ,  $B \in gl(r, R)$ . Таким образом, каждый элемент  $J$  подалгебры  $\mathcal{L}$  имеет следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & C & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^T & 0 & J_4 - J_4^T \end{pmatrix},$$

где  $J_1$  — кососимметрическая квадратная матрица порядка  $r$ ,  $J_2$  — произвольная  $r \times (n-2r)$ -матрица,  $J_3 \in \mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и  $J_4 \in gl(r, R)$ . Определим отображение  $\psi: \mathcal{JO}(V_r^{(n-2r)})$  по правилу

$$\psi(J) = (J_2, J_3, J_4) \in \mathcal{JO}(V_r^{(n-2r)}). \quad (1.3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $\psi$  — гомоморфизм алгебры  $\mathcal{L}$  на алгебру  $\mathcal{JO}(V_k^{(n-2r)})$  с ядром  $S$ , состоящим из матриц вида

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $\mathcal{L}/S \cong \mathcal{JO}(V_r^{(n-2r)})$ . Теорема доказана.

Если  $r = 1$ , то из доказанной теоремы получаем, что максимальная подалгебра класса 1 разлагается в полупрямую сумму  $V_1^{(n-2)} \bowtie (\mathcal{LO}(p-1, q-1) \oplus gl(1, R))$ , поскольку в этом случае  $S = 0$ . Так как  $gl(1, R) \cong R$ , то действие алгебры  $gl(1, R)$  на пространстве  $V_1$  сводится к обычному умножению элементов пространства  $V_1^{(n-2)}$ , на скаляры из поля  $R$ . Если  $r = 2$ , то  $\dim_R S = 1$  и  $\mathcal{L}/S \cong V_2^{(n-4)} \bowtie (\mathcal{LO}(p-2, q-2) \oplus gl(2, R))$ .

Разложение (1.3), полученное при доказательстве теоремы 1.1, означает, что соответствие  $J \leftrightarrow (J_1, J_2, J_3, J_4)$  является взаимно однозначным соответствием между элементами алгебры  $\mathcal{L}$  и элементами декартового произведения  $\mathcal{LO}(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \mathcal{LO}(p-r, q-r) \times gl(r, R)$ . В этом смысле будем говорить, что  $\mathcal{L}$  разлагается в декартово произведение  $\mathcal{LO}(r)$ ,  $V_r^{(n-2r)}$ ,  $\mathcal{LO}(p-r, q-r)$ ,  $gl(r, R)$  и записывать это так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{LO}(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \mathcal{LO}(p-r, q-r) \times gl(r, R).$$



**§ 2. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$**

В силу теоремы 1.1 любая максимальная подалгебра  $\mathcal{L}$  класса  $r$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  содержит такой разрешимый идеал  $S_1$ , фактор-алгебра  $\mathcal{L}/S_1$  по которому является прямой суммой подалгебр  $\mathcal{LO}(p - r, q - r)$  и  $gl(r, R)$ . Поэтому максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  определяет максимальные разрешимые подалгебры  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  алгебр  $\mathcal{LO}(p - r, q - r)$  и  $gl(r, R)$  соответственно. Исследуем структуру подалгебр  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Пусть  $W_1 = \langle T_1, \dots, T_p \rangle$ ,  $W_2 = \langle T_{p+1}, \dots, T_{p+q} \rangle$ ,  $\varphi_i$  — ограничение квадратичной формы  $\varphi$  на подпространство  $W_i$  ( $i = 1, 2$ ). Группы изометрий пространств  $(W_1, \varphi_1)$  и  $(W_2, \varphi_2)$  обозначим соответственно через  $O(p)$  и  $O(q)$ , а их алгебры Ли — через  $\mathcal{LO}(p)$  и  $\mathcal{LO}(q)$ . Справедлив следующий результат.

**Предложение 2.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . Тогда число  $pq$  четное и алгебра  $\mathcal{L}$   $O(p, q)$ -сопряжена подалгебре  $\mathcal{L}'$ , разлагающейся в прямую сумму  $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$  максимальных коммутативных подалгебр  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  алгебр  $\mathcal{LO}(p)$  и  $\mathcal{LO}(q)$  соответственно. Размерность подалгебры  $\mathcal{L}$  равна  $\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$  (целая часть от  $\frac{p+q}{2}$ ).

**Доказательство.** Заметим, что квадратичная форма  $\varphi$  определяет скалярное произведение на векторном пространстве  $V$ . Скалярное произведение векторов  $X$  и  $Y$  пространства  $V$  будем обозначать через  $X \cdot Y$ . Так как  $\mathcal{L}$  вполне приводима, то пространство  $V$  разлагается в прямую ортогональную сумму  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$   $\mathcal{L}$ -неприводимых подпространств  $V_1, \dots, V_s$ . Согласно теореме Ли о разрешимых подалгебрах  $\dim_R V_i \leq 2$ . Если  $\dim_R V_i = 2$ , то в силу теоремы Витта можно предполагать, что  $V_i = \langle T_{i_1}, T_{i_2} \rangle$ , где  $T_{i_1}, T_{i_2} \in \langle T_1, \dots, T_{p+q} \rangle$ . Поэтому в случае  $T_{i_1}^2 = 1, T_{i_2}^2 = -1$  получаем, что  $\mathcal{L}$  оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство  $\langle T_{i_1} + T_{i_2} \rangle$ , что противоречит предположению. Таким образом,  $T_{i_1}^2 = T_{i_2}^2 = 1$ , или  $T_{i_1}^2 = T_{i_2}^2 = -1$ , и потому  $V_i \subset \langle T_1, \dots, T_p \rangle$ , или  $V_i \subset \langle T_{p+1}, \dots, T_{p+q} \rangle$ . В частности, число  $pq$  — четное.

Пусть  $\mathcal{L}_i = \{J \in \mathcal{LO}(p, q) \mid [J, V_i] \subset V_i \wedge [J, V_j] = 0, \text{ если } i \neq j\}$ . Нетрудно убедиться, что  $\mathcal{L}_i$  — подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  и  $[\mathcal{L}, \mathcal{L}_i] \subset \mathcal{L}_i$ . Так как  $\mathcal{L}_i$  — разрешимая, то в силу максимальной  $\mathcal{L}$  отсюда вытекает, что  $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$ . Таким образом,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_s$ , что и доказывает предложение.

**Предложение 2.2.** Максимальная разрешимая подалгебра  $\mathcal{L}$  алгебры  $gl(r, R)$  сопряжена подалгебре матриц

$$Z^{-1}\mathcal{L}Z = \begin{pmatrix} \Delta_1(\mathcal{L}) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_s(\mathcal{L}) \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_i(\mathcal{L})$  — неприводимая разрешимая подалгебра вещественных матриц порядка 1 или 2. Если  $\deg \Delta_i = 1$ , то  $\Delta_i(\mathcal{L}) = R$ ; если  $\deg \Delta_i = 2$ , то

$$\Delta_i(\mathcal{L}) = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Две максимальные разрешимые подалгебры  $Z^{-1}\mathcal{L}Z$  и

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \Delta'_1(\mathcal{L}') & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta'_t(\mathcal{L}') \end{pmatrix}$$

сопряжены (изоморфны) тогда и только тогда, когда  $s = t$  и  $\Delta_i(\mathcal{L}) = \Delta'_i(\mathcal{L}')$  для всех  $i = \overline{1, \dots, s}$ .

**Доказательство.** Согласно теореме Ли неприводимое представление разрешимой алгебры Ли  $\mathcal{L}$  над полем  $R$  имеет размерность 1 или 2. Следовательно, существует такая невырожденная матрица  $Z \in GL(r, R)$ , что  $\bar{\mathcal{L}} = Z^{-1}\mathcal{L}Z$  имеет вид (2.2), где  $\Delta_i$  — неприводимое представление алгебры  $\mathcal{L}$  над  $R$  степени 1 или 2. Из разрешимости и максимальности  $\mathcal{L}$  вытекает, что  $\Delta_i(\mathcal{L})$  — максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $gl(\alpha_i, R)$ ,  $\alpha_i = \deg \Delta_i$ . Поэтому, если  $\alpha_i = 1$ , то  $\Delta_i(\mathcal{L}) = R$ ; если  $\alpha_i = 2$ , то

$$\Delta_i(\mathcal{L}) = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждой максимальной разрешимой подалгебре алгебры  $gl(r, R)$  соответствует набор чисел  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , удовлетворяющих следующим условиям:

$1 \leq \alpha_i \leq 2$ ;  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = r$ . Докажем, что различные наборы определяют несопряженные (неизоморфные) подалгебры. Доказательство этого утверждения проведем, следуя статье [2].

Действительно, пусть  $V_r^1$  — пространство  $r$ -мерных вектор-столбцов над  $R$  и  $V_1$  — подпространство  $V_r^1$ , натянутое на первые  $\alpha_1$  единичных  $r$ -векторов. Очевидно,  $V_1$  — минимальное ненулевое  $\bar{\mathcal{L}}$ -инвариантное подпространство пространства  $V_r^1$ . Подпространство  $V_1$  аннулируется нильпотентной подалгеброй  $\mathcal{L}_0$ , состоящей из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Theta_s \end{pmatrix},$$

где  $\Theta_i$  — нулевая квадратная матрица порядка  $\alpha_i$ . Нетрудно убедиться, что  $r$ -столбец, который аннулируется подалгеброй  $\mathcal{L}_0$ , является линейной комбинацией первых  $\alpha_1$  единичных  $r$ -векторов и потому принадлежит  $V_1$ . Таким образом,  $V_1$  однозначно определяется подалгеброй  $\bar{\mathcal{L}}$  и  $\alpha_1 = \dim_R V_1$ . Аналогично подалгебра  $\mathcal{L}'$  определяет подпространство  $V'_1 \subset V_r^1$ , причем  $\alpha'_1 = \dim_R V'_1$ . Следовательно, если  $\alpha_1 \neq \alpha'_1$ , то подалгебры  $\bar{\mathcal{L}}$  и  $\mathcal{L}'$  не сопряжены (не изоморфны). Предложение доказано.

Исследуем далее структуру максимальной разрешимой подалгебры  $\mathcal{L}$  класса  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ .

Прежде всего отметим, что поскольку  $[S, N] = 0$ , то ввиду гомоморфизма (1.4) определено действие алгебры  $JO(V_r^{(n-2r)})$  на пространстве  $N$ . Если  $M$  — подалгебра  $JO(V_r^{(n-2r)})$ ,  $M'$  — ее проекция на подалгебру  $\mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и существует вполне изотропное  $M'$ -инвариантное подпространство  $N'_0 \subset \langle T_{r+1}, \dots, T_{p+q-r} \rangle$ , то подалгебра  $M$  оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство  $N_0 \oplus N'_0$ . Следовательно и подалгебра  $\psi^{-1}(M)$  оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство  $N_0 \oplus N'_0$ . Учитывая данное замечание и доказанную теорему 1.1, получаем следующий результат.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная разрешимая подалгебра класса  $r$  алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ . Тогда  $S \subset \mathcal{L}$  и фактор-алгебра  $\mathcal{L}/S$  изоморфна алгебре  $V_r^{(n-2r)} \oplus$

$(\Phi_1 \oplus \Phi_2) \subset JO(V_r^{(n-2r)})$ , где  $\Phi_1$  — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ ;  $\Phi_2$  — максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $gl(r, R)$ . Изоморфизм  $\mathcal{L}/S \cong V_r^{(n-2r)} \oplus (\Phi_1 \oplus \Phi_2)$  индуцируется гомоморфизмом (1.4).

Таким образом, максимальная разрешимая подалгебра  $\mathcal{L}$  класса  $r$  алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ , рассматриваемая как множество, разлагается в декартово произведение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2.$$

Пусть  $\mathcal{L}'$  — максимальная разрешимая подалгебра класса  $r'$  алгебры  $\mathcal{L}O(V)$  и

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}O(r') \times V_{r'}^{(n-2r')} \times \Phi'_1 \times \Phi'_2.$$

Имеет место следующее утверждение.

**Предложение 2.3.** Алгебры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$   $O(p, q)$ -сопряжены тогда и только тогда, когда  $r = r'$ ;  $\Phi_1$  и  $\Phi'_1$   $O(p-r, q-r)$ -сопряжены,  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$   $G\mathcal{L}(r, R)$ -сопряжены.

Здесь  $G\mathcal{L}(r, R)$  — группа всех обратимых квадратных матриц порядка  $r$  над полем  $R$ .

**Доказательство. Необходимость.** Если подалгебры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$   $O(p, q)$ -сопряжены, то максимальное вполне изотропное подпространство  $N_0$ , инвариантное относительно  $\mathcal{L}$ , отображается на максимальное вполне изотропное подпространство  $N'_0$ , инвариантное относительно  $\mathcal{L}'$ . Следовательно,  $N_0 = N'_0$  и  $r = r'$ . Поэтому  $\Phi_1$  и  $\Phi'_1$  являются максимальными вполне приводимыми подалгебрами алгебры  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$  и в силу предложения 2.1 сопряжены относительно группы  $O(p-r, q-r)$ . Докажем сопряженность подалгебр  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$  относительно общей линейной группы  $G\mathcal{L}(r, R)$ . Если  $r = 1$ , то  $gl(2, R)$  содержит только две максимальные разрешимые подалгебры размерностей 2 и 3 соответственно и потому сопряженность  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$  очевидна. Пусть  $r > 2$ , тогда аннулятор подпространства  $N_0$  в алгебре  $\mathcal{L}$  совпадает с подалгеброй  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1$ , а в алгебре  $\mathcal{L}'$  — с подалгеброй  $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi'_1$ . Отсюда вытекает, что  $O(p, q)$ -автоморфизм  $\psi$ , отображающий  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{L}'$ , отображает  $\mathcal{L}_1$  на  $\mathcal{L}'_1$  и потому  $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}'/\mathcal{L}'_1$ . Так как  $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1 \cong \Phi_2$ , а  $\mathcal{L}'/\mathcal{L}'_1 \cong \Phi'_2$ , то  $\Phi_2 \cong \Phi'_2$ . Применяя предложение 2.2, получаем, что  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$  сопряжены относительно группы  $G\mathcal{L}(r, R)$ .

**Докажем достаточность.** Поскольку  $\Phi_1$  и  $\Phi'_1$   $O(p-r, q-r)$ -сопряжены, то существует такая матрица  $C_1 \in O(p-r, q-r)$ , что  $\Phi_1 = C_1^{-1}\Phi'_1C_1$ . Тогда  $O(p, q)$ -автоморфизм  $\psi_1$ , определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \in O(p_1, q_1),$$

отображает алгебру  $\mathcal{L}'$  на алгебру  $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi'_2$ . Далее, так как всякий элемент  $X \in G\mathcal{L}(r, R)$  записывается в виде  $X = C_2 \exp U$  (полярное разложение), где  $C_2 \in O(r)$ ,  $U$  — симметрическая матрица, то достаточно ограничиться случаем, когда  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$   $O(r)$ -сопряжены. Пусть  $C_2^{-1}\Phi'_2C_2 = \Phi_2$ . Тогда  $O(p, q)$ -автоморфизм  $\psi_2$ , определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \in O(p, q),$$

отображает  $\bar{\mathcal{L}}$  на алгебру  $\mathcal{L}$ . Следовательно, алгебры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$   $O(p, q)$ -сопряжены. Предложение доказано.

Теорема 2.1 и предложение 2.3 сводят описание максимальных разрешимых подалгебр класса  $r$  к описанию максимальных вполне приводимых разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$  и максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $gl(r, R)$  с точностью до сопряженности.

**Предложение 2.4.** Пусть  $r$  — изотропный ранг максимальной разрешимой подалгебры алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$ ,  $\sigma_r$  — число таких подалгебр. Тогда

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^r - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^r \right] \quad (2.1)$$

и справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $p$  и  $q$  имеют разную четность, то  $r = 1, 2, \dots, q$ ;
- 2) если  $p$  и  $q$  четные, то  $r = 2, 4, \dots, q$ ;
- 3) если  $p$  и  $q$  нечетные, то  $r = 1, 3, \dots, q$ .

**Доказательство.** Утверждения 1, 2 и 3 предложения 2.4 вытекают из теоремы 2.2 и предложения 2.3. Далее,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2$ , и согласно предложению 2.3  $\sigma_r = \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}$ . Следовательно, числа последовательности  $\{\sigma_n\}$  являются числами Фибоначчи. Но тогда справедливость формулы (2.3) вытекает из результатов статьи [2]. Предложение доказано.

Ввиду теоремы 2.2 и предложений 2.1 и 2.2 размерность  $d(\mathcal{L})$  максимальной разрешимой подалгебры  $\mathcal{L}$  ранга  $r$  можно вычислить по формуле

$$d(\mathcal{L}) = \frac{r^2 - r}{2} + r(p + q - 2r) + \left[ \frac{p + q}{2} \right] + \theta, \quad (2.2)$$

где  $\theta$  — размерность максимальной разрешимой подалгебры алгебры  $gl(r, R)$ . Согласно предложению 2.4 такая подалгебра полностью определяется набором чисел  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  и потому

$$\theta = \frac{r^2 - r}{2} + s, \quad s = \left[ \frac{r + 1}{2} \right], \dots, q.$$

При использовании формулы (2.2) следует иметь в виду, что числа  $p$ ,  $q$  и  $r$  должны удовлетворять условиям предложения 2.4.

Сделаем еще одно замечание о максимальных разрешимых подалгебрах алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$ . Из предложения 2.1 вытекает, что если число  $pq$  четное, то существует единственная максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра, являющаяся подалгеброй Картана и обладающая базисом  $\{(E_{12} - E_{21}), (E_{34} - E_{43}), \dots, (E_{2[\frac{p}{2}] - 1, 2[\frac{p}{2}]} - E_{2[\frac{p}{2}], 2[\frac{p}{2}] - 1}), (E_{p+1, p+2} - E_{p+2, p+1}), \dots, (E_{p+2[\frac{q}{2}] - 1, p+2[\frac{q}{2}]} - E_{p+2[\frac{q}{2}], p+2[\frac{q}{2}] - 1})\}$ , где  $E_{ik}$  — квадратная матрица порядка  $n$ , у которой все элементы нули, за исключением элемента, стоящего на пересечении  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца и равного 1. Если подалгебра не является вполне приводимой, то она полностью определяется изотропным рангом  $r$  и набором целых чисел  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , удовлетворяющих двум условия: 1)  $1 \leq \alpha_i \leq 2$ ; 2)  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = r$ .

### § 3. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}SU(p, q)$

Предложенный в предыдущих параграфах подход к описанию максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$  без изменений может быть перенесен на алгебру  $\mathcal{L}SU(p, q)$ ,  $p \geq q > 0$ . Структура максимальной вполне приводимой разрешимой подалгебры алгебры  $\mathcal{L}SU(p, q)$  выясняется в следующем предложении.

**Предложение 3.1 [1].** Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}SU(p, q)$ . Тогда она  $SU(p, q)$ -сопряжена подалгебре

$$\begin{pmatrix} i\lambda_1 & & & 0 \\ & i\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & i\lambda_{p+q} \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_i$  — вещественное число и  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{p+q} = 0$ .

Изучим вначале максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$ ,  $p \geq q > 0$ . Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная подалгебра класса  $r$  алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$  и  $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \dots, T_r + T_{p+q} \rangle$  — максимальное вполне изотропное подпространство, инвариантное относительно  $\mathcal{L}$ . Ортогональное дополнение к  $N_0$  совпадает с  $N = N_0 \oplus N_1$ ,  $N_1 = \langle T_{r+1}, \dots, T_{p+q-r} \rangle$ , и потому  $N$  инвариантно относительно  $\mathcal{L}$ . Подалгебра  $S = \{J \in \mathcal{L} \mid [J, N] = 0\}$  является идеалом алгебры  $\mathcal{L}$ .

Каждый элемент  $J \in \mathcal{L}$  можно представить в виде

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & 0 & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^* & 0 & J_4 - J_4^* \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где  $J_1^* = -J_1$ ,  $J_3 \in \mathcal{L}U(p-r, q-r)$ ,  $J_4 \in gl(r, C)$ ,  $J_2 = (J_{21}, J_{22})$ ,  $J_{21} - r \times (p-r)$ -матрица,  $J_{22} - r \times (q-r)$ -матрица,

$$J_2' = \begin{pmatrix} -J_{21}^* \\ J_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\bar{V}_r^{(n-2r)}$  — множество всех комплексных  $r \times (n-2r)$ -матриц. Это множество превращается в алгебру Ли, если положить  $[X, Y] = 0$  для любых двух элементов  $X, Y \in \bar{V}_r^{(n-2r)}$ . Если  $\mathcal{L}U(p-r, q-r) \oplus gl(r, C)$  — прямая сумма подалгебр  $\mathcal{L}U(p-r, q-r)$  и  $gl(r, C)$ ,  $B \in \mathcal{L}U(p-r, q-r)$ ,  $D \in gl(r, C)$ ,  $X \in \bar{V}_r^{(n-2r)}$ , то положим  $[B + D, X] = X \cdot B + D \cdot X$ . Нетрудно убедиться, что относительно этого умножения мы получаем алгебру Ли, являющуюся полупрямой суммой пространства  $\bar{V}_r^{(n-2r)}$  и алгебры  $\mathcal{L}U(p-r, q-r) \oplus gl(r, C)$ . Полученную алгебру обозначим через  $JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$ .

Определим отображение  $\psi : \mathcal{L} \rightarrow JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$  по правилу

$$\psi(J) = (J_2, J_3, J_4) \in JU(\bar{V}_r^{(n-2r)}). \quad (3.2)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $\psi$  — гомоморфизм алгебры  $\mathcal{L}$  на алгебру  $JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$  с ядром  $S$ , состоящим из матриц вида

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорему 3.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная подалгебра класса  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$ . Тогда фактор-алгебра  $\mathcal{L}/S$  изоморфна алгебре  $JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$ .

Разложение (3.1) означает, что соответствие  $J \leftrightarrow (J_1, J_2, J_3, J_4)$  является взаимно однозначным между элементами подалгебры  $\mathcal{L}$  и элементами декартова произведения  $\mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(n-2r)} \times \mathcal{L}U(p-r, q-r) \times gl(r, C)$  (рассматриваемыми как множества). В этом смысле будем говорить, что  $\mathcal{L}$  разлагается в декартово произведение  $\mathcal{L}U(r)$ ,  $\bar{V}_r^{(n-2r)}$ ,  $\mathcal{L}U(p-r, q-r)$ ,  $gl(r, C)$ , и записывать это так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(n-2r)} \times \mathcal{L}U(p-r, q-r) \times gl(r, C).$$

Максимальные разрешимые подалгебры класса  $r$  алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$  описываются такой теоремой.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mathcal{L}$  — максимальная разрешимая подалгебра класса  $r$  алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$ . Тогда  $S \subset \mathcal{L}$  и фактор-алгебра  $\mathcal{L}/S$  изоморфна алгебре  $\bar{V}_r^{(n-2r)} \oplus (\Phi_1 \oplus \Phi_2) \subset JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$ , где  $\Phi_1$  — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}U(p-r, q-r)$ ,  $\Phi_2$  — максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $gl(r, C)$ . Изоморфизм  $\mathcal{L}/S \cong \bar{V}_r^{(n-2r)} \oplus (\Phi_1 \oplus \Phi_2)$  индуцируется гомоморфизмом (3.2).

Таким образом, максимальная разрешимая подалгебра  $\mathcal{L}$  класса  $r$  алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$ , рассматриваемая как множество, разлагается в декартово произведение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(p+q-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2.$$

Если  $\mathcal{L}'$  — некоторая другая максимальная разрешимая подалгебра класса  $r'$  алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$  и

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}U(r') \times \bar{V}_{r'}^{(p+q-2r')} \times \Phi'_1 \times \Phi'_2$$

— соответствующее разложение, то справедливо следующее предложение.

**Предложение 3.2.** Алгебры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$   $U(p, q)$ -сопряжены тогда и только тогда, когда  $r = r'$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi'_1$   $U(p-r, q-r)$ -сопряжены,  $\Phi_2$  и  $\Phi'_2$   $GL(r, C)$ -сопряжены.

Так как  $gl(r, C)$  содержит только одну максимальную разрешимую подалгебру с точностью до  $GL(r, C)$ -сопряженности и существует только одна максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}U(p-r, q-r)$ , то из предложения 3.2 и теоремы 3.2 вытекает, что  $\mathcal{L}U(p, q)$  содержит только одну максимальную разрешимую подалгебру класса  $r$  для любого  $r$ ,  $0 < r \leq q$ . Эта алгебра имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(n-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2, \quad (3.3)$$

где

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} i\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\lambda_{p-r, q-r} \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in R, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь уже нетрудно получить все  $q + 1$  максимальных разрешимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}SU(p, q)$ . Действительно, каждой максимальной разрешимой подалгебре  $\mathcal{L}$  алгебры  $\mathcal{L}U(p, q)$ , определяемой равенством (3.3), соответствует точно одна максимальная разрешимая подалгебра  $\mathcal{M}$  алгебры  $\mathcal{L}SU(p, q)$ . Если  $J = (J_1, J_2, J_3, J_4) \in \mathcal{L}$  общий элемент подалгебры  $\mathcal{L}$ , то  $J \in \mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда  $\text{Tr } J_3 + \text{Tr } (J_4 - J_4^*) = 0$ , где  $\text{Tr } J_3$  — след матрицы  $J_3$ .

#### § 4. Подалгебры конечномерных алгебр Ли с абелевым радикалом

В настоящем параграфе мы рассматриваем конечномерную алгебру Ли  $JO(V)$ , являющуюся полупрямой суммой нетривиального коммутативного идеала  $V$  и полупростой подалгебры  $\mathcal{L}O(V)$ . Пусть  $\pi$  — проектирование  $JO(V)$  на  $\mathcal{L}O(V)$ ,  $\bar{\mathcal{L}}$  — такая подалгебра  $JO(V)$ , что  $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$ . Если  $\bar{\mathcal{L}}$  сопряжена с помощью внутреннего автоморфизма алгебры  $JO(V)$  алгебре  $N \rtimes \mathcal{L}$ , где  $N$  —  $\mathcal{L}$ -инвариантное подпространство пространства  $V$ , то  $\bar{\mathcal{L}}$  будем называть расщепляемой в алгебре  $JO(V)$ . Если любая подалгебра  $\bar{\mathcal{L}} \subset JO(V)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$ , является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $JO(V)$ . Примерами таких подалгебр являются все полупростые подалгебры. В данном параграфе в классе всех подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(V)$  выделены вполне приводимые подалгебры и изучены их свойства. Подалгебра  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$  называется вполне приводимой, если каждое  $\mathcal{L}$ -инвариантное подпространство пространства  $V$  обладает  $\mathcal{L}$ -инвариантным прямым дополнением. Известно, что если  $JO(V)$  является алгеброй Евклида  $V \rtimes \mathcal{L}O(n)$ , то все подалгебры ортогональной алгебры  $\mathcal{L}O(n)$  вполне приводимы. При изучении структуры произвольной подалгебры алгебры  $JO(V)$  необходимо существенно использовать свойства вполне приводимых подалгебр алгебры  $JO(V)$ . В настоящем параграфе доказана следующая теорема: вполне приводимая подалгебра  $\mathcal{L}$  алгебры  $\mathcal{L}O(V)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $JO(V)$  в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий: 1)  $\mathcal{L}$  — полупроста; 2)  $\mathcal{L}$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ . Эта теорема и другие результаты о вполне приводимых подалгебрах, рассмотренные в следующих параграфах, позволяют изучить структуру произвольной подалгебры  $\bar{\mathcal{L}} \subset JO(V)$ , проекция которой на  $\mathcal{L}O(V)$  вполне приводима. Отметим, что частные случаи сформулированной теоремы рассматривались в [7–10].

Пусть  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$  и  $X$  — произвольный элемент  $V$ . Пересечение всех  $\mathcal{L}$ -инвариантных подпространств, пространства  $V$ , содержащих  $X$ , будем называть  $\mathcal{L}$ -подпространством, порожденным  $X$ . Если  $\langle B \rangle$  — одномерная подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ , то она определяет подпространства  $\text{Ker } B = \{X \in V \mid [B, X] = 0\}$  и  $\text{Im } B = \{X \in V \mid [B, Y] = X, Y \in V\}$ .

**Предложение 4.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая коммутативная подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ ,  $B$  — произвольный элемент подалгебры  $\mathcal{L}$ . Тогда  $V = \text{Ker } B \oplus \text{Im } B$ .

**Доказательство.** Если  $Y \in \text{Ker } B$ ,  $D \in \mathcal{L}$ , то используя тождество Якоби

$$[[B, D], Y] + [[D, Y, B] + [[Y, B], D] = 0$$

и соотношения  $[B, D] = 0$ ,  $[Y, B] = 0$ , получаем, что  $[[D, Y], B] = 0$ , а значит,  $[D, Y] \in \text{Ker } B$ . Следовательно,  $[\mathcal{L}, \text{Ker } B] \subset \text{Ker } B$ . Так как  $\mathcal{L}$  вполне приводима, то  $V = \text{Ker } B \oplus V'$ , где  $V'$  инвариантно относительно  $\mathcal{L}$ . Поэтому  $[B, V] = [B, V'] \subset V'$ . Отсюда вытекает, что  $[B, V'] = V'$ , а значит,  $\text{Im } B = V'$ . Следовательно,  $V = \text{Ker } B \oplus \text{Im } B$ . Предложение доказано.

**Предложение 4.2.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая коммутативная подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ ,  $B$  — ненулевой элемент подалгебры  $\mathcal{L}$ . Тогда пространство  $\text{Im } B$  разлагается в прямую сумму подпространств, неприводимых и инвариантных относительно подалгебры  $\langle B \rangle$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\mathcal{L}$  вполне приводима, то пространство  $V$  разлагается в прямую сумму  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_t$   $\mathcal{L}$ -неприводимых инвариантных подпространств  $V_i$ . Размерность  $\dim V_i$  каждого из подпространств  $V_i$  равна 1 или 2. Пусть  $J_i = \{X \in V_i \mid [B, X] = 0\}$ . Нетрудно убедиться, что подпространство  $J_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{L}$  и в силу неприводимости  $V_i$   $J_i = 0$  или  $J_i = V_i$ . В первом случае  $V_i \subset \text{Im } B$ , во втором —  $V_i \subset \text{Ker } B$ . Отсюда вытекает, что подпространство  $\text{Im } B$  является прямой суммой всех тех подпространств  $V_i$ , каждое из которых, содержится в  $\text{Im } B$ .

Рассмотрим произвольное подпространство  $V_i$ , содержащееся в  $\text{Im } B$ . Если  $\dim V_i = 1$ , то  $V_i$   $B$ -неприводимо. Пусть далее  $\dim V_i = 2$  и подпространство  $V_i$   $B$ -приводимо. Тогда существует такой базис пространства  $V_i$ , относительно которого матрица  $B_i$  линейного оператора  $\text{ad } B$  имеет вид

$$B_i = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ . С другой стороны,  $B_i \in \mathfrak{gl}(2, R)$  и потому  $B_i$  подобна над полем вещественных чисел матрице, содержащейся в алгебре

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $B_i = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и потому  $V_i$  разлагается в прямую сумму двух  $B$ -неприводимых подпространств. Предложение доказано.

**Предложение 4.3.** Пусть  $\langle B \rangle$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ . Если из условия  $[B, X] = 0$ ,  $X \in V$  вытекает, что  $X = 0$ , то подалгебра  $\langle B \rangle$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $\mathcal{JO}(V)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\langle B + X \rangle$ ,  $X \in V$ , — одномерная подалгебра алгебры  $\mathcal{JO}(V)$ . Возьмем какой-либо базис  $P_1, \dots, P_s$  пространства  $V$  и пусть

$$\begin{aligned} (\exp P_1)(B) &= B + X_1, & X_1 &\in V, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\exp P_s)(B) &= B + X_s, & X_s &\in V. \end{aligned}$$



Докажем, что  $X_1, \dots, X_s$  — базис пространства  $V$ . Действительно, предположим, что  $X_1, \dots, X_s$  линейно зависимы. Тогда существуют такие вещественные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  (не все равные нули), что

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s = 0.$$

Так как  $V$  — коммутативная подалгебра, то  $(\exp \alpha_i P_i)(B) = B + \alpha_i X_i$ , значит,

$$(\exp \alpha_1 P_1 \cdots \exp \alpha_s P_s)(B) = B + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s = B.$$

Поскольку

$$\exp \alpha_1 P_1 \cdots \exp \alpha_s P_s = \exp(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s),$$

то  $[\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s, B] = 0$  и потому  $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s = 0$ , что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает, что  $X_1, \dots, X_s$  — базис  $V$ . Следовательно,  $X = \gamma_1 X_1 + \dots + \gamma_s X_s$ ,  $\gamma_i \in R$ , и потому

$$(\exp(-\gamma_1 P_1 - \dots - \gamma_s P_s))(B + X) = B - \gamma_1 X_1 - \dots - \gamma_s X_s + X = B.$$

Предложение доказано.

Из доказательства настоящего предложения вытекает справедливость следующего предложения.

**Предложение 4.4.** Пусть  $\langle B + X \rangle$  — одномерная подалгебра алгебры  $JO(V)$ ,  $B \in \mathcal{LO}(V)$ ,  $X \in V$ . Если  $V = \text{Im } B \oplus \text{Ker } B$ , то подалгебра  $\langle B + X \rangle$  с помощью некоторого автоморфизма  $\exp P$ ,  $P \in V$ , сопряжена подалгебре  $\langle B + X' \rangle$ ,  $X' \in \text{Ker } B$ .

**Предложение 4.5.** Пусть  $\mathcal{L}_1$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ , которая аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \langle J \rangle$ ,  $J \in \mathcal{LO}(V)$ . Если подалгебра  $\bar{\mathcal{L}}$  алгебры  $JO(V)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$ , содержит элемент  $J + X$ ,  $X \in V$ , и подалгебру  $\mathcal{L}_1$ , то  $J \in \bar{\mathcal{L}}$ .

**Доказательство.** Обозначим черв  $M$   $\mathcal{L}_1$ -подпространство пространства  $V$ , порожденное  $X$ . Пространство  $M$  разлагается в прямую сумму неприводимых  $\mathcal{L}_1$ -подпространств:  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ . Докажем индукцией по числу  $s$ , что  $J \in \bar{\mathcal{L}}$ .

Пусть  $s = 1$ . По условию  $[\mathcal{L}_1, X] \neq 0$ , и потому существует такой элемент  $J' \in \mathcal{L}_1$ , что  $[J', X] = X'$ ,  $X' \neq 0$ ;  $\mathcal{L}_1$ -подпространство  $M'_1$ , порожденное  $X'$ , содержится в  $M_1$  и в силу неприводимости последнего  $M'_1 = M_1$ . Поскольку  $X' \in \bar{\mathcal{L}}$ , то  $M'_1 \subset \bar{\mathcal{L}}$  и потому  $X \in \bar{\mathcal{L}}$ . Следовательно,  $J \in \bar{\mathcal{L}}$ .

Пусть  $s > 1$ ,  $X = X_1 + \dots + X_s$ , где  $X_i \in M_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Существует такой элемент  $J' \in \mathcal{L}_1$ , что  $[J', X] = X' \neq 0$ . Рассмотрим разложение  $X' = X'_1 + \dots + X'_s$ , где  $X'_i \in M_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) и будем считать, что  $X'_1 \neq 0$ . Обозначим через  $M'$   $\mathcal{L}_1$ -подпространство  $M$ , порожденное  $X'$ . Очевидно,  $M' \subset \bar{\mathcal{L}}$ . Проекция  $M'_1$  пространства  $M'$  на подпространство  $M_1$  является  $\mathcal{L}_1$ -подпространством. Отсюда в силу неприводимости  $M_1$  заключаем, что  $M'_1 = M_1$ . Следовательно,  $M'$ , а значит, и  $\bar{\mathcal{L}}$  содержит элемент вида  $X_1 + X_2 + \dots + X_s$ , где  $X_i \in M_i$  ( $i = 2, \dots, s$ ). Но тогда  $J + (X_2 - \bar{X}_2) + \dots + (X_s - \bar{X}_s) \in \bar{\mathcal{L}}$ . В силу индуктивного предположения отсюда вытекает, что  $J \in \bar{\mathcal{L}}$ . Предложение доказано.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая коммутативная подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ . Если  $\mathcal{L}$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ ,

то подалгебра  $\mathcal{L}$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $JO(V)$ .

**Доказательство.** Пусть  $B_1, \dots, B_s$  — базис подалгебры  $\mathcal{L}$ ,  $\bar{\mathcal{L}}$  — подалгебра  $JO(V)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$ . Базис подалгебры  $\bar{\mathcal{L}}$  можно выбрать в виде  $B_1 + X_1, \dots, B_s + X_s, Y_1, \dots, Y_t$ , где  $X_i \in V$ ,  $Y_j \in V$ . Поскольку  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая подалгебра, то для любого  $B_i$   $V = \text{Im } B_i \oplus \text{Ker } B_i$  (предложение 4.1). Если  $Y \in \text{Ker } B_i$ ,  $B \in \mathcal{L}$ , то используем тождество Якоби

$$[[B_i, B], Y] + [[B, Y], B_i] + [[Y, B_i], B] = 0$$

и соотношения  $[B_i, B] = 0$ ,  $[Y, B_i] = 0$ , получаем, что  $[[B, Y], B_i] = 0$ , а значит,  $[B, Y] \in \text{Ker } B_i$ , т.е.  $[\mathcal{L}, \text{Ker } B_i] \subset \text{Ker } B_i$ . Аналогично  $[\mathcal{L}, \text{Im } B_i] \subset \text{Im } B_i$ .

Пусть  $\mathcal{L}_d = \langle B_1 + X_1, \dots, B_d + X_d, Y_1, \dots, Y_t \rangle$ ,  $d = 1, \dots, s$ . Докажем индукцией по  $d$ , что подалгебра  $\mathcal{L}_d$  с помощью некоторого автоморфизма  $\exp P$ ,  $P \in V$ , сопряжена подалгебре  $\langle B_1 + X'_1, \dots, B_d + X'_d, Y_1, \dots, Y_t \rangle$ , где  $X'_1, \dots, X'_d \in \text{Ker } B_1 \cap \dots \cap \text{Ker } B_d$ . Если  $d = 1$  то это утверждение вытекает из предложения 4.4. Пусть  $d > 1$ . Согласно индуктивному предположению подалгебра  $\mathcal{L}_{d+1}$  сопряжена подалгебре  $\mathcal{L}'_{d+1} = \langle B_1 + X'_1, \dots, B_d + X'_d, B_{d+1} + Z, Y_1, \dots, Y_t \rangle$ , где  $X'_1, \dots, X'_d \in \text{Ker } B_1 \cap \dots \cap \text{Ker } B_d$ ,  $Z \in V$ . Элемент  $Z$  представим в виде суммы  $P_1 + T_1$ , где  $P_1 \in \text{Ker } B_1$ ,  $T_1 \in \text{Im } B_1$ . Покажем, что подалгебра  $\mathcal{L}'_{d+1}$  содержит элемент  $B_{d+1} + P_1$ . Действительно, пусть  $\pi'$  — проектирование алгебры  $V \ni \mathcal{L}$  на подалгебру  $\text{Im } B_1 \ni \mathcal{L}$ . Тогда  $\pi'(\mathcal{L}'_{d+1}) = \langle B_1, \dots, B_d, B_{d+1} + T_1, Y'_1, \dots, Y'_t \rangle$ ,  $Y'_i = \pi'(Y_i)$  ( $i = 1, \dots, t$ ). В силу предложения 4.2 подпространство  $\text{Im } B_1$ , рассматриваемое как  $\langle B_1 \rangle$ -модуль, вполне приводимо и потому к алгебре  $\mathcal{L}' = \langle B_1, B_{d+1} + T_1, Y'_1, \dots, Y'_t \rangle$  применимо предложение 4.5. Следовательно  $B_{d+1} \in \mathcal{L}'$  и значит  $B_{d+1} \in \pi'(\mathcal{L}'_{d+1})$ . Отсюда вытекает, что  $B_{d+1} + P_1 \in \mathcal{L}'_{d+1}$ . Используя далее разложение  $V = \text{Im } B_2 \oplus \text{Ker } B_2$ , элемент  $P_1$  представляем в виде  $P_1 = R_2 + P_2$ , где  $R_2 \in \text{Im } B_2$ ,  $P_2 \in \text{Ker } B_2$ . Так как  $[\mathcal{L}, \text{Im } B_2] \subset \text{Im } B_2$ ,  $[\mathcal{L}, \text{Ker } B_2] \subset \text{Ker } B_2$ , то из условия  $[B, P_1] = 0$ , вытекает, что  $[B_1, P_2] = 0$  и потому  $P_2 \in \text{Ker } B_1 \cap \text{Ker } B_2$ . Как и выше, убеждаемся, что  $\mathcal{L}'_{d+1}$  содержит элемент  $B_{d+1} + P_2$ . Через  $d$  шагов получаем, что  $\mathcal{L}'_{d+1}$  содержит элемент  $B_{d+1} + P_{d+1}$ , где  $P_{d+1} \in \text{Ker } B_1 \cap \dots \cap \text{Ker } B_d$ . Если  $P_{d+1} = X'_{d+1} + Y'_{d+1}$ , где  $X'_{d+1} \in \text{Ker } B_{d+1}$ ,  $Y'_{d+1} \in \text{Im } B_{d+1}$ , то существует такой элемент  $P \in \text{Im } B_{d+1}$ , что  $(\exp P)(B_{d+1} + P_{d+1}) = B_{d+1} + X'_{d+1}$ . Так как  $(\exp P)(B_i + X'_i) = B_i + X'_i$ , если  $i = 1, \dots, d$ , то  $\mathcal{L}'_{d+1}$ , а значит и подалгебра  $\mathcal{L}_{d+1}$  сопряжена подалгебре  $\langle B_1 + X'_1, \dots, B_{d+1} + X'_{d+1}, Y_1, \dots, Y_t \rangle$ . Проведенные рассуждения показывают также, что всегда можно считать, что  $X'_1, \dots, X'_d \in \text{Ker } B_{d+1}$ . В частности, если  $d = s$ , то  $X'_1, \dots, X'_s \in \text{Ker } B_1 \cap \dots \cap \text{Ker } B_s = 0$ , и потому  $\bar{\mathcal{L}}$  сопряжена подалгебре  $\langle B_1, \dots, B_d, Y_1, \dots, Y_t \rangle$ . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 4.1 вытекает справедливость следующего предложения.

**Предложение 4.6.** Пусть  $\mathcal{L} = \langle B_1, \dots, B_s \rangle$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $LO(V)$ ;  $\bar{\mathcal{L}}$  — подалгебра  $JO(V)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$ . Тогда  $\bar{\mathcal{L}}$  с помощью внутреннего автоморфизма алгебры  $JO(V)$  сопряжена подалгебре  $\langle B_1 + X_1, \dots, B_s + X_s, Y_1, \dots, Y_t \rangle$ , где  $X_1, \dots, X_s \in \text{Ker } B_1 \cap \dots \cap \text{Ker } B_s$ ,  $Y_1, \dots, Y_t \in V$ .

Если  $\text{Ker } B_1 \cap \dots \cap \text{Ker } B_s = 0$ , то из настоящего предложения получаем теорему 4.1.

Докажем далее теорему, выделяющую все вполне приводимые подалгебры алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ , обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре  $\mathcal{L}O(V)$ . При доказательстве ее мы существенно используем теорему 4.1.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ . Подалгебра  $\mathcal{L}$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $JO(V)$  в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $\mathcal{L}$  полупроста;
- 2)  $\mathcal{L}$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть подалгебра  $\mathcal{L}$  не является полупростой. Тогда  $\mathcal{L}$  либо коммутативна, либо разлагается в прямую сумму  $Z(\mathcal{L}) \oplus Q$  своего центра  $Z(\mathcal{L})$  полупростой подалгебры  $Q$  [12]. Предположим, что существует ненулевой элемент  $X_1 \in V$ , удовлетворяющий условию  $[\mathcal{L}, X_1] = 0$ . Докажем, что подалгебра  $\mathcal{L}$  обладает нерасщепляемыми расширениями в алгебре  $JO(V)$ .

Пусть  $T_1, \dots, T_k$  — базис подалгебры  $Z(\mathcal{L})$ . Покажем, что подалгебра  $\bar{\mathcal{L}} = Q \oplus \langle T_1 + X_1, T_2, \dots, T_k \rangle$  нерасщепляема в алгебре  $JO(V)$ . С этой целью воспользуемся матричным представлением алгебры  $JO(V)$ . Пусть  $P_1, \dots, P_k$  — базис пространства  $V$ ,  $J + P$  — произвольный элемент алгебры  $JO(V)$ ,  $J \in \mathcal{L}O(V)$ ,  $P \in V$ . Обозначим соответственно через  $S(J)$  и  $U_P$  матрицу линейного оператора  $\text{ad } J$  и координатный столбец вектора  $P$  в указанном базисе. Тогда отображение  $\Theta_1$ :

$$JO(V) \ni J + P \rightarrow \begin{pmatrix} S(J) & U_P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in gl(n+1, R)$$

является изоморфизмом алгебры  $JO(V)$  на некоторую подалгебру  $\Phi$  алгебры  $gl(n+1, R)$ . В частности,

$$T_1 + X_1 \rightarrow \begin{pmatrix} S(T_1) & U_{X_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, нерасщепляемость подалгебры  $\bar{\mathcal{L}}$  в алгебре  $JO(V)$  будет доказана, если мы покажем, что  $\Theta_1(\bar{\mathcal{L}})$  нерасщепляема в  $\Theta_1(JO(V))$ .

Пусть это не так. Тогда существует такая матрица

$$\begin{pmatrix} T & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \exp \Theta_1(JO(V)),$$

что

$$\begin{pmatrix} T & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S(T_1) & U_{X_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} T^{-1}S(T_1)T & T^{-1}S(T_1)Y + T^{-1}U_{X_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $T^{-1}S(T_1)Y + T^{-1}U_{X_1} = 0$ , откуда  $S(T_1)Y + U_{X_1} = 0$ . Значит,  $U_{X_1} \in \text{Im } S(T_1)$ . С другой стороны, в силу предположения  $U_{X_1} \in \text{Ker } S(T_1)$ . Так как  $\mathcal{L}$  вполне приводима, то  $\text{Im } S(T_1) \cap \text{Ker } S(T_1) = 0$ . Поэтому  $U_{X_1} = 0$ , а значит  $X_1 = 0$ . Мы приходим к противоречию. Полученное противоречие доказывает необходимость.

*Достаточность.* В силу теоремы 4.1 достаточность теоремы справедлива для коммутативных подалгебр. Поэтому будем предполагать, что  $\mathcal{L}$  — некоммутативная подалгебра. Пусть подалгебра  $\mathcal{L}$  не является полупростой. Тогда  $\mathcal{L}$  разложима в прямую сумму  $Z(\mathcal{L}) \oplus Q$  своего центра  $Z(\mathcal{L})$  и полупростой подалгебры  $Q$  [12]. Пусть  $\bar{\mathcal{L}}$  — произвольная подалгебра  $JO(V)$  с условием  $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$ . Докажем, что  $\bar{\mathcal{L}}$  — расщепляемая подалгебра.

Так как  $Q$  — полупростая алгебра, то можно предполагать, что  $Q \subset \bar{\mathcal{L}}$ . Обозначим через  $U$  максимальное подпространство пространства  $V$ , обладающее тем свойством, что  $[Q, U] = 0$ . Если  $J_1 \in Z(\mathcal{L})$ ,  $J_2 \in Q$ ,  $X \in U$ , то  $[J_1, J_2] = 0$ ,  $[J_2, X] = 0$ . Отсюда и из тождества Якоби  $[J_1, [J_2, X]] + [J_2, [X, J_1]] + [X, [J_1, J_2]] = 0$  получаем, что  $[J_2, [X, J_1]] = 0$ . Следовательно,  $[X, J_1] \in U$ . Это означает, что  $[Z(\mathcal{L}), U] \subset U$  и потому  $U$  инвариантно относительно алгебры  $\mathcal{L}$ . Следовательно,  $U$  обладает  $\mathcal{L}$ -инвариантным дополнением  $U'$ , т.е.  $V = U \oplus U'$ . Пусть  $\bar{\mathcal{L}}_1$  — проекция  $\bar{\mathcal{L}}$  на подалгебру  $U \oplus Z(\mathcal{L})$ . Так как для любого  $Y \in U$  имеем  $[Q, Y] = 0$ , то из условия  $[Z(\mathcal{L}), Y] = 0$  следует, что  $Y = 0$ . Если  $U_1 \subset U$  — произвольное  $Z(\mathcal{L})$ -инвариантное подпространство, то оно, очевидно,  $\mathcal{L}$ -инвариантно, и потому существует такое  $\mathcal{L}$ -инвариантное подпространство  $V_1 \subset V$ , что  $U_1 \oplus V_1 = V$ . Следовательно,  $U = U_1 \oplus V_1 \cap U$  — разложение пространства  $U$  в прямую сумму двух  $\mathcal{L}$ -инвариантных подпространств  $U_1$  и  $V_1 \cap U$ . Таким образом, пространство  $U$ , рассматриваемое как  $Z(\mathcal{L})$ -модуль, вполне приводимо, и потому в силу теоремы 4.1 существует автоморфизм вида  $\exp P$ ,  $P \in U$ , отображающий  $\bar{\mathcal{L}}_1$  на подалгебру  $N_1 \oplus Z(\mathcal{L})$ ,  $N_1 \in U$ . Автоморфизм  $\exp P$  отображает при этом  $\bar{\mathcal{L}}$  на некоторую подалгебру  $\bar{\mathcal{L}}'$  и оставляет  $Q$  на месте. Допустим, что  $\bar{\mathcal{L}}'$  содержит элемент вида  $J + X$ , где  $J \in Z(\mathcal{L})$ ,  $X \in U'$ . Используя предложение 4.5, получаем, что  $J \in \bar{\mathcal{L}}'$ . Таким образом,  $\mathcal{L} \subset \bar{\mathcal{L}}'$ , и потому  $\bar{\mathcal{L}}'$ , а значит, и  $\bar{\mathcal{L}}$  — расщепляемые подалгебры. Достаточность доказана.

## § 5. Одномерные подалгебры алгебры $\mathcal{LO}(p, q)$

Рассмотрим задачу описания одномерных подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ ,  $p \geq q > 0$ , с точностью до  $O(p, q)$ -сопряженности. С этой целью используем результаты, относящиеся к структуре максимальных подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . Как установлено в § 1, максимальные подалгебры  $\mathcal{L}_r \subset \mathcal{LO}(p, q)$ , не являющиеся вполне приводимыми, можно характеризовать по рангу  $r > 0$  максимального вполне изотропного подпространства  $N_0$ , инвариантного относительно алгебры  $\mathcal{L}_r$ . Число  $r$  мы называем изотропным рангом подалгебры  $\mathcal{L}_r$ .

Пусть  $\mathcal{L}$  — произвольная подалгебра изотропного ранга  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  и пусть  $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \dots, T_r + T_{p+q} \rangle$  — максимальное вполне изотропное подпространство, инвариантное относительно  $\mathcal{L}$ . Каждый элемент  $J \in \mathcal{L}$  можно представить в виде

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & 0 & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^T & 0 & J_4 - J_4^T \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где  $J_1, J_3, J_4$  — квадратные матрицы порядка  $r, n - 2r$  и  $r$  соответственно,  $J_1^T =$

$-J_1, J_3 \in \mathcal{LO}(p-r, q-r), J_4 \in gl(r, R), J_2$  — произвольная  $r \times (n-2r)$ -матрица. Матрицы  $J_1, J_2, J_3$  и  $J_4$  будем называть проекциями  $J$  на  $\mathcal{LO}(r), V_r^{(n-2r)}, \mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и  $gl(r, R)$  соответственно. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix}, & \tilde{J}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & 0 & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{J}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{J}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^T & 0 & J_4 - J_4^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$J = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3 + \tilde{J}_4. \quad (5.2)$$

Разложение (5.2) будем называть естественным разложением элемента  $J$ . Если  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}_4$  — проекции подалгебры  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{LO}(r), V_r^{(n-2r)}, \mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и  $gl(r, R)$  соответственно, то согласно разложению (5.2) получаем естественное разложение

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}_2 + \tilde{\mathcal{L}}_3 + \tilde{\mathcal{L}}_4 \quad (5.3)$$

подалгебры  $\mathcal{L}$  в подпрямую сумму подалгебр  $\tilde{\mathcal{L}}_i$ , где  $\tilde{\mathcal{L}}_i = \{\tilde{J} \mid J \in \mathcal{L}_i\}$ . Разложение (5.3) будем записывать также в виде  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2 * \mathcal{L}_3 * \mathcal{L}_4$ , рассматривая  $\mathcal{L}$  как подмножество подпрямого произведения множеств  $\mathcal{LO}(r), V_r^{(n-2r)}, \mathcal{LO}(p-r, q-r)$  и  $gl(r, R)$ . Соответственно этому разложению (5.2) будем записывать в виде  $J = J_1 * J_2 * J_3 * J_4$ . Имеет место следующее предложение.

**Предложение 5.1.** *Если подалгебры  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  изотропного ранга  $r$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$   $O(p, q)$ -сопряжены, то подалгебры  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}'_3$   $O(p-r, q-r)$ -сопряжены, а подалгебры  $\mathcal{L}_4$  и  $\mathcal{L}'_4$  —  $GL(r, R)$ -сопряжены.*

**Доказательство.** Будем считать, что максимальные вполне изотропные подпространства  $N_0$  и  $N'_0$ , инвариантные относительно  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  совпадают. Если  $\theta$   $O(p, q)$ -автоморфизм, отображающий  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{L}'$ , то, очевидно,  $\theta(N_0) = N'_0$ . Следовательно,  $\theta$  можно рассматривать как автоморфизм максимальной подалгебры  $\mathcal{L}_r$  изотропного ранга  $r$ . Автоморфизм  $\theta$  определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \in O(p, q), \quad (5.4)$$

где  $C_{11}, C_{22}, C_{33}$  — квадратные матрицы степеней  $r, n-2r, r$  соответственно. Поскольку  $CN_0 = N_0$ , то  $C_{23} = -C_{21}, C_{11} + C_{13} = C_{31} + C_{33}$ . Из условия  $C^T J_{p,q} C = J_{p,q}$  получаем далее, что  $J_{p,q} C^T J_{p,q} C = E$ , и потому  $C^{-1} = J_{p,q} C^T J_{p,q}$ . Поскольку  $C^{-1}N_0 = N_0$ , то  $C_{12} = C_{32}$ . Из условия  $C^T J_{p,q} C = J_{p,q}$  находим, что  $C_{22}^T J_{p-r, q-r} C_{22} = J_{p-r, q-r}$ .

Пусть  $J_3$  — произвольный элемент подалгебры  $\mathcal{LO}(p-r, q-r)$ , тогда

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & C_{22}^{-1} J_3 C_{22} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Подействуем далее автоморфизмом  $\theta$  на матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & B - B^T \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$C^{-1}TC = \begin{pmatrix} t_{11} & * & t_{13} \\ * & t_{22} & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} t_{11} &= -C_{13}^T B^T C_{11} + C_{11}^T B C_{31} - C_{13}^T (B - B^T) C_{31}, \\ t_{13} &= -C_{13}^T B^T C_{13} + C_{11}^T B C_{33} - C_{13}^T (B - B^T) C_{33}, \\ t_{22} &= -J_{p_1, q_1} C_{32}^T B^T C_{12} + J_{p_1, q_1} C_{12}^T B C_{32} - J_{p_1, q_1} C_{32}^T (B - B^T) C_{32} = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

и  $J_{p_1, q_1} = J_{p-r, q-r}$ . Учитывая равенство  $C_{11} + C_{13} = C_{31} + C_{33}$ , находим

$$t_{13} - t_{11} + (C_{11}^T - C_{31}^T) B (C_{31} + C_{33}). \quad (5.7)$$

Докажем, что  $(C_{11}^T - C_{31}^T) (C_{31} + C_{33}) = E$ . Действительно, используя соотношение  $C^T J_{p, q} C = J_{p, q}$ , получаем, что

$$C_{11}^T C_{11} + C_{21}^T J_{p_1, q_1} C_{21} - C_{31}^T C_{31} = E, \quad (5.8)$$

$$C_{11}^T C_{13} + C_{21}^T J_{p_1, q_1} C_{23} - C_{31}^T C_{33} = 0. \quad (5.9)$$

Сложим почленно равенства (5.8) и (5.9). Тогда ввиду равенств  $C_{21} = -C_{23}$  и  $C_{11} + C_{13} = C_{31} + C_{33}$  имеем

$$(C_{11}^T - C_{31}^T) (C_{31} + C_{33}) = E, \quad (5.10)$$

что и требовалось доказать. Таким образом, ввиду разложения (5.2) и равенств (5.5)–(5.7) и (5.10) автоморфизм  $\theta$  индуцирует  $G\mathcal{L}(r, R)$ -автоморфизм  $\theta_4$  алгебры  $gl(r, R)$ , действующий по формуле

$$\theta_4(B) = (C_{33} + C_{31})^{-1} B (C_{33} + C_{31}), \quad B \in gl(r, R),$$

и автоморфизм  $\theta_3$  алгебры  $\mathcal{LO}(p-r, q-r)$ , действующий по формуле

$$\theta_3(J_3) = C_{22}^{-1} J_3 C_{22}.$$

Поскольку  $\theta(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$ , то  $\theta_4(\mathcal{L}_4) = \mathcal{L}'_4$  и  $\theta_3(\mathcal{L}_3) = \mathcal{L}'_3$ . Следовательно, подалгебры  $\mathcal{L}_4$  и  $\mathcal{L}'_4 - G\mathcal{L}(r, R)$ -сопряжены, а подалгебры  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{L}'_3 - O(p-r, q-r)$ -сопряжены. Предложение доказано.

Отметим в связи с предложением 5.1, что при доказательстве предложения 2.3 мы установили, что для любого  $O(p-r, q-r)$ -автоморфизма  $\psi_1$  подалгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  и любого  $G\mathcal{L}(r, R)$ -автоморфизма  $\psi_2$  подалгебры  $gl(r, R)$  существует такой  $O(p, q)$ -автоморфизм  $\theta$  подалгебры  $\mathcal{L}_r$ , для которого  $\theta_3 = \psi_1$ ,  $\theta_4 = \psi_2$ . Поэтому из предложения 5.1 вытекает, что группа  $O(p, q)$ -автоморфизмов максимальной подалгебры  $\mathcal{L}_r$  изотропного ранга  $r$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  индуцирует на подалгебре

$\mathcal{L}O(p-r, q-r) \oplus gl(r, R)$  группу автоморфизмов, разлагающуюся в прямое произведение группы  $G_1 O(p-r, q-r)$  — автоморфизмов алгебры  $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$  и группы  $G_2 GL(r, R)$  — автоморфизмов алгебры  $gl(r, R)$ .

Нетрудно убедиться далее в справедливости следующих утверждений.

**Предложение 5.2.** *Подалгебры  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  и  $\tilde{\mathcal{L}}'_2$ , содержащиеся в  $\tilde{V}_r^{(n-2r)}$ ,  $O(p, q)$ -сопряжены тогда и только тогда, когда  $\mathcal{L}_2$  и  $\mathcal{L}'_2$  сопряжены относительно группы  $G_1 \times G_2$ .*

**Предложение 5.3.** *Если  $\tilde{\mathcal{L}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{L}}'_1$   $O(r)$ -сопряжены, то подалгебры  $\tilde{\mathcal{L}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{L}}'_1$ , содержащиеся в  $\tilde{\mathcal{L}}O(r)$ ,  $O(p, q)$ -сопряжены.*

В дальнейшем нам необходимы результаты, относящиеся к одномерным подалгебрам алгебры  $gl(r, R)$ , и изложенные в [11]. Произвольная квадратная матрица порядка  $r$  над полем вещественных чисел подобна матрице

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_t \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m_i}^{(i)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m_i-1}^{(i)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & 0 & -\alpha_2^{(i)} \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 & -\alpha_1^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Характеристический многочлен матрицы  $A_i$  совпадает с многочленом

$$\Psi_i(\lambda) = \lambda^{m_i} + \alpha_1^{(i)} \lambda^{m_i-1} + \cdots + \alpha_{m_i}^{(i)}.$$

Про матрицу  $A$ , говорят, что она имеет вторую нормальную форму, характеризующую:

- 1) квазидиагональным видом (5.11);
- 2) специфической структурой диагональных клеток (5.12);
- 3) дополнительным условием: характеристический многочлен каждой клетки является степенью неприводимого в поле  $R$  многочлена.

В классе подобных матриц существует только одна матрица, имеющая вторую нормальную форму. Если квадратная матрица  $A$  имеет вид (5.11), то говорят, что  $A$  есть прямая сумма матриц  $A_1, \dots, A_t$ . Символически это будем записывать так:  $A = A_1 + \cdots + A_t$ .

Пусть  $J_2$  — произвольная матрица, содержащаяся в  $V_r^{(n-2r)}$ . Произвольный  $O(p, q)$ -автоморфизм  $\theta$  максимальной подалгебры  $\mathcal{L}_r$  изотропного ранга  $r$ , который определяется матрицей (5.4), действует на матрицу  $J_2$  по формуле:  $\theta(J_2) = (C_{11}^T -$





3) если  $p - r -$  нечетное,  $q - r -$  четное, то

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \beta_t \\ -\beta_t & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

где  $s \leq \frac{p-r}{2}$ ,  $t = \frac{q-r}{2}$ ;  $J_4 = 0$ ;

либо

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \beta_t \\ -\beta_t & 0 \end{pmatrix} + O_k, \quad (5.18)$$

где  $s = \frac{p-r}{2}$ ,  $t \leq \frac{q-r}{2}$ ;  $J_4 = 0$ ;

4)  $J_3 = 0$ ,  $J_4$  имеет вид (5.11);

5)  $J_3$  имеет вид 1)–3) настоящего предложения,  $J_4$  имеет вид (5.11).

Отметим, что предложение 5.4 дает также полное описание одномерных вполне приводимых подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . Такие подалгебры характеризуются тем, что их изотропный ранг  $r = 0$ .

Пусть далее  $\langle J \rangle$  — произвольная одномерная подалгебра изотропного ранга  $r > 0$ ;  $J = J_1 * J_2 * J_3 * J_4$  — естественное разложение элемента  $J$ . Элемент  $J_3 * J_4$  действует на пространстве  $V_r^{(n-2r)}$  по формуле  $[J_3 * J_4, X] = -X \cdot J_3 + J_4 \cdot X$ ,  $X \in V_r^{(n-2r)}$ , и потому определяет линейный оператор  $\text{ad}_2(J_3 * J_4)$  пространства  $V_r^{(n-2r)}$ . Его ядро и образ обозначим соответственно через  $\text{Ker}_2(J_3 * J_4)$  и  $\text{Im}_2(J_3 * J_4)$ . Аналогично,  $J_4$  действует на пространстве  $\mathcal{LO}(r)$  по формуле  $[J_4, X] = J_4 \cdot X + X \cdot J_4^T$  и определяет линейный оператор  $\text{ad}_1 J_4$  пространства  $\mathcal{LO}(r)$ . Ядро и образ этого оператора будем обозначать в дальнейшем через  $\text{Ker}_1 J_4$  и  $\text{Im}_1 J_4$  соответственно. Справедливо следующее предложение.

**Предложение 5.5 [11].** Ядро линейного оператора  $\text{ad}_2(J_3 * J_4)$  в пространстве  $V_r^{(n-2r)}$  нулевое тогда и только тогда, когда матрицы  $J_3$  и  $J_4$  не имеют общих характеристических чисел.

**Теорема 5.1.** Ненулевые одномерные подалгебры  $\langle J \rangle$  изотропного ранга  $r > 0$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$  исчерпываются относительно  $O(p, q)$ -сопряженности такими подалгебрами:

1)  $J_1 = 0$  или  $J_1 \notin \text{Im}_1 J_4$ ,  $J_2 = 0$  или  $J_2 \notin \text{Im}_2(J_3 * J_4)$ ,  $J_3 * J_4$  относится к типу 1)–5) предложения 5.4;

2)  $J_1$  имеет нормальную форму (5.14),  $J_2 = 0$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = 0$ ;

3)  $J_1 = 0$ ,  $J_2$  имеет нормальную форму (5.13),  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = 0$ ;

4)  $J_1$  имеет нормальную форму (5.14),  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = 0$ ,

$$J_2 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \beta_{r3} & \dots & \beta_{rs} \end{pmatrix}, \quad \beta_{rs} = 0, \quad \text{если } s > r.$$

Рассмотрим более подробно вопрос классификации одномерных подалгебр алгебр  $\mathcal{LO}(p, 1)$  и  $\mathcal{LO}(p, 2)$ . Исходя из предыдущих результатов, без труда можем найти все одномерные вполне приводимые подалгебры и подалгебры изотропного ранга 1. Более детально следует остановиться на классификации подалгебр изотропного ранга 2 алгебры  $\mathcal{LO}(p, 2)$ . Эта задача сводится к описанию одномерных

подалгебр алгебры  $gl(2, R)$  с точностью до  $GL(2, R)$ -сопряженности и одномерных подалгебр алгебры  $\mathcal{LO}(p-2)$  с точностью до  $O(p-2)$ -сопряженности. Если  $J_4 \in gl(2, R)$  — произвольная ненулевая квадратная матрица порядка 2, то над полем вещественных чисел она подобна одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Произвольная матрица  $J_3 \in \mathcal{LO}(p-2)$  ортогонально-подобна над полем вещественных чисел матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k, \quad (5.20)$$

где  $O_k$  — нулевая матрица порядка  $k \geq 0$ ,  $1 \leq s \leq [\frac{p-2}{2}]$ .

Если далее  $J_2 \in V_2^{(n-4)}$ , то матрица  $J_2$  имеет следующую нормальную форму:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , либо  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ .

Рассмотрим одномерную подалгебру  $\langle J \rangle$  изотропного ранга 2, удовлетворяющую условию  $J_2 = 0$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ . Нетрудно убедиться, что подалгебра  $\langle J \rangle$   $O(p, q)$ -сопряжена подалгебре  $\langle J' \rangle$ , удовлетворяющей условию  $J'_1 = 0$ ,  $J'_2 = 0$ ,  $J'_3 = 0$ , тогда и только тогда, когда  $J_4$  не подобна одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

**Теорема 5.2.** *Ненулевые одномерные подалгебры  $\langle J \rangle$  алгебры  $\mathcal{L}(p, 1)$ ,  $p > 1$ , исчерпываются относительно  $O(p, 1)$ -сопряженности такими подалгебрами:*

*I. Вполне приводимые подалгебры:*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\frac{p}{2}} \\ -\alpha_{\frac{p}{2}} & 0 \end{pmatrix} + O_1, \quad p - \text{четное};$$

*II. Подалгебры изотропного ранга 1:*

$$1) J_1 = 0, J_2 = 0, J_4 = \alpha,$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k,$$

где  $\alpha$  — произвольное вещественное число,  $1 \leq s \leq [\frac{p-1}{2}]$ ,  $O_k$  — нулевая матрица порядка  $k \geq 0$ ;

$$2) J_1 = 0, J_2 = (O_1^{(1)}, \dots, O_1^{(s)}, \bar{J}_2), J_4 = \alpha,$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k,$$

где  $\alpha \in R$ ,  $O_1^{(i)} = (0 \ 0)$  — нулевая  $(1 \times 2)$ -матрица,  $\bar{J}_2 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $1 \leq s \leq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ , если  $p$  — четное,  $1 \leq s \leq \frac{p-1}{2}$ , если  $p$  — нечетное.

**Теорема 5.3.** *Ненулевые одномерные подалгебры  $\langle J \rangle$  алгебры  $\mathcal{LO}(p, 2)$ ,  $p \geq 2$ , исчерпываются относительно  $O(p, 2)$ -сопряженности такими подалгебрами:*

*I. Вполне приводимые подалгебры:*

1)  $J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\frac{p}{2}} \\ -\alpha_{\frac{p}{2}} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $p$  — четное;

2)  $J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $s \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ;

3)  $J = O_p + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $O_p$  — нулевая матрица порядка  $p$ ;

*II. Подалгебры изотропного ранга 1:*

$J_1 = 0$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_4 = \alpha$ ,  $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\frac{p-1}{2}} \\ -\alpha_{\frac{p-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $p$  —

нечетное число;

*III. Подалгебры изотропного ранга 2:*

1)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4$  имеет вид (5.19);

2)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = 0$ ;

3)  $J_1 = 0$ ,  $J_2$  имеет вид (5.21),  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = 0$ ;

4)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = 0$ ;

5)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2$  имеет вид (5.21),  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = 0$ ;

6)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = 0$ ;

7)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4$  имеет вид (5.22);

8)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = (O_2^{(1)}, \dots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$ ,  $O_2^{(i)}$  — нулевая квадратная матрица, порядка 2 ( $i = 1, \dots, s$ ),  $\bar{J}_2$  имеет вид (5.21),  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = 0$ ;

9)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ;

10)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

11)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4$  имеет вид (5.19);

12)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = (O_2^{(1)}, \dots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$ ,  $\bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ;

13)  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = (O_2^{(1)}, \dots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$ ,  $\bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

14)  $J_1 = 0$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = (A_1, A_2, \dots, A_s, \bar{J}_2)$ , где  $A_i = 0$ , если  $\beta \neq \alpha_i$ ,  $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , если  $\beta = \alpha_i$ ,  $\bar{J}_2$  имеет вид (5.21);

- 15)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = 0$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4$  имеет вид (5.22);
- 16)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3 = 0$ ,  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- 17)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = (O_2^{(1)}, \dots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$ ,  $\bar{J}_2$  имеет вид (5.21),  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4$  имеет вид (5.20),  $J_4 = 0$ ;
- 18)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = (A_1, \dots, A_s, 0)$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  
 $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , если  $\alpha = \alpha_i$ ,  $A_i = 0$ , если  $\alpha \neq \alpha_i$ ;
- 19)  $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3$  имеет вид (5.20),  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 $J_2 = (O_2^{(1)}, \dots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$ ,  $\bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ .

### § 6. Вполне приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{LO}(p, q)$

Пусть  $\mathcal{L}$  — произвольная подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ . Алгебру  $\mathcal{LO}(p, q)$  будем обозначать в этом параграфе через  $\mathcal{LO}(V)$ . Предположим, что пространство  $V$  разлагается в прямую ортогональную сумму  $\mathcal{L}$ -подпространств  $V_1, \dots, V_s$ . Каждое из подпространств  $V_i$ , очевидно, неизотропно. Если  $\varphi_i$  — ограничение квадратичной формы  $\varphi$  на пространство  $V_i$ ,  $(p_i, q_i)$  — сигнатура формы  $\varphi_i$ , то по теореме Витта существует  $O(p, q)$ -автоморфизм  $f$  пространства  $V$ , отображающий  $V_i$  на  $V'_i = \langle T_{i_1}, \dots, T_{i_{p_i}}, T_{i_{p_i+1}}, \dots, T_{i_{p_i+q_i}} \rangle$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Здесь  $i_1 < \dots < i_{p_i} < p$ ,  $p < i_{p_i+1} < \dots < i_{p_i+q_i}$ . При автоморфизме  $f$  алгебра  $\mathcal{L}$  отображается на некоторую алгебру  $\mathcal{L}' \subset \mathcal{LO}(V)$  и

$$V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_s \quad - \quad (6.1)$$

разложение пространства  $V$  в прямую ортогональную сумму  $\mathcal{L}'$ -подпространств. Так как подпространство  $V'_i$  обладает базисом, состоящим из некоторых векторов базиса  $\{T_i\}$  пространства  $V$ , то будем говорить, что разложение (6.1) является разложением пространства  $V$  относительно базиса  $\{T_i\}$  в прямую ортогональную сумму  $\mathcal{L}'$ -подпространств. Поскольку подалгебры алгебры  $\mathcal{LO}(V)$  изучаются с точностью до  $O(p, q)$ -сопряженности, то в дальнейшем будем предполагать, что в классе всех алгебр,  $O(p, q)$ -сопряженных между собой, алгебра  $\mathcal{L}$  выбрана так, что рассматриваемое разложение  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$  является разложением пространства  $V$  относительно базиса  $\{T_i\}$  в прямую ортогональную сумму  $\mathcal{L}$ -подпространств.

Если  $\hat{J} = \text{ad } J \in \text{ad } \mathcal{L}$  — произвольный элемент, то его можно рассматривать как оператор  $\hat{J}_i$  пространства  $V_i$ . Матрица  $J_i$  оператора  $\hat{J}_i$  в базисе пространства  $V_i$  содержится в  $\mathcal{LO}(p_i, q_i)$ . Таким образом, для любого  $i \in \{1, \dots, s\}$  элемент  $J$  из  $\mathcal{L}$  определяет элемент  $J_i$  из  $\mathcal{LO}(p_i, q_i)$ , который будем называть проекцией  $J$  на  $\mathcal{LO}(p_i, q_i)$ . Поэтому можем положить

$$J = J_1 * \dots * J_s,$$

рассматривая  $J$  как элемент декартова произведения алгебр  $\mathcal{L}_i$  ( $\mathcal{L}_i$  — проекция  $\mathcal{L}$  на алгебру  $\mathcal{LO}(p_i, q_i)$ ), так как операция в алгебре  $\mathcal{L}$  согласуется с этими же

операциями в декартовом произведении. Будем говорить, что  $\mathcal{L}$  разложена относительно базиса  $\{T_i\}$  в подпрямое произведение алгебр  $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}O(V_i)$  и записывать это так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_s.$$

**Определение 6.1.** *Подалгебра  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$  называется неприводимой, если  $V$  — минимальное  $\mathcal{L}$ -инвариантное подпространство пространства  $V$  (отличное от нуля).*

Пусть  $\mathcal{L}$  — произвольная вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ . Тогда пространство  $V$  разлагается в прямую ортогональную сумму (относительно базиса  $\{T_i\}$ )  $\mathcal{L}$ -неприводимых подпространств  $V_1, \dots, V_s$ . Этому разложению соответствует разложение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_s$  алгебры  $\mathcal{L}$  в подпрямое произведение неприводимых подалгебр  $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}O(V_i)$ .

**Определение 6.2.** *Разложение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$  алгебры  $\mathcal{L}$  в подпрямое произведение подалгебр  $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}O(p_1, q_1)$  и  $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}O(p_2, q_2)$  назовем тривиальным, если  $p_1 = p_2$ ,  $q_1 = q_2$  и существует такая матрица  $C \in O(p_1, q_1)$ , что каждый элемент  $J \in \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$  имеет вид  $J_1 * C^{-1} J_1 C$ , где  $J_1 \in \mathcal{L}_1$ .*

Если  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_s$ , то проекцию алгебры  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{L}_i * \mathcal{L}_j$  (декартово произведение подалгебр  $\mathcal{L}_i$  и  $\mathcal{L}_j$ ) будем обозначать через  $\mathcal{L}_i * \mathcal{L}_j$ .

**Определение 6.3.** *Подалгебры  $\mathcal{L}_i$  и  $\mathcal{L}_j$  в разложении  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_s$  назовем равносильными, если разложение алгебры  $\mathcal{L}_i * \mathcal{L}_j$  в подпрямое произведение подалгебр  $\mathcal{L}_i$  и  $\mathcal{L}_j$  является тривиальным.*

Нетрудно убедиться, что рассматриваемое отношение на множестве подалгебр  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s\}$  является отношением эквивалентности, и потому оно проводит разбиение множества  $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s\}$  на классы  $S_1, \dots, S_t$ . Проекцию алгебры  $\mathcal{L}$  на декартово произведение подалгебр, входящих в  $S_i$ , обозначим через  $A_i$ . Таким образом, алгебра  $\mathcal{L}$  разлагается в подпрямое произведение подалгебр  $A_1, \dots, A_t$ , которые будем называть примарными множителями алгебры  $\mathcal{L}$  и записывать это так:  $\mathcal{L} = A_1 * \dots * A_t$ .

Роль примарных множителей вполне приводимой подалгебры  $\mathcal{L}$  будет выяснена в § 7.

**Теорема 6.1 [12].** *Если  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ , то она либо коммутативна, либо разлагается в прямую сумму своего центра  $Z(\mathcal{L})$  и полупростой подалгебры  $Q$ .*

### § 7. Неприводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$

В этом параграфе мы исследуем свойства неприводимых подалгебр алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$ .

**Предложение 7.1.** *Пусть  $\mathcal{L}$  — неприводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(p, q)$ ,  $C(\mathcal{L})$  — ее централизатор в  $gl(p + q, C)$ . Если  $A$  — максимальная коммутативная подалгебра  $C(\mathcal{L})$ , то  $\dim_C A \leq 2$ .*

**Доказательство.** Если  $\mathcal{L}$  — абсолютно неприводимая подалгебра, то предложение вытекает из леммы Шура. Пусть  $\mathcal{L}$  приводима над полем комплексных чисел. Тогда существует такая матрица  $C \in gl(p + q, C)$ , что

$$\mathcal{L}' = C^{-1} \mathcal{L} C = \left( \begin{array}{cc} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 \end{array} \right),$$

где  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  — неприводимые подалгебры. Рассмотрим два случая.

1. Подалгебры  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  не сопряжены. Любая матрица, коммутирующая поэлементно с  $\mathcal{L}'$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E & 0 \\ 0 & \lambda_2 E \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае  $\dim_C A = 2$ .

2. Подалгебры  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  сопряжены. Можно предполагать при этом, что  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ . Любая матрица, коммутирующая поэлементно с  $\mathcal{L}'$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E & \lambda_2 E \\ \lambda_3 E & \lambda_4 E \end{pmatrix} \cong gl(2, C).$$

Значит, и в этом случае  $\dim_C A = 2$ . Предложение доказано.

**Предложение 7.2.** Пусть  $\mathcal{L}$  — неприводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ ,  $X \in gl(p + q, R)$  — вещественная матрица, удовлетворяющая условию  $[X, \mathcal{L}] = 0$ . Тогда либо  $X = \lambda E$ , либо существуют такие вещественные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , что  $(\alpha X + \beta E)^2 = -E$ .

**Доказательство.** В силу предложения 7.1 матрицы  $X^2$ ,  $X$ ,  $E$  линейно зависимы над  $C$ . Это значит, что существуют такие комплексные числа  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , что

$$\alpha_0 E + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 = 0.$$

Если  $\alpha_2 = 0$ , то все доказано. Пусть однако,  $\alpha_2 \neq 0$ . Тогда

$$X^2 = \left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right) E + \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) X = \beta_0 E + \beta_1 X. \quad (7.1)$$

Поскольку  $X$  — вещественная матрица, то из равенства (7.1) получаем, что либо  $X = \lambda E$ , либо  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  — вещественные числа. Из равенства (7.1) получаем далее, что

$$X^2 - \beta_1 X + \frac{\beta_1^2}{4} E = \left(\beta_0 + \frac{\beta_1^2}{4}\right) E,$$

или

$$\left(X - \frac{\beta_1}{2} E\right)^2 = \gamma E, \quad (7.2)$$

где  $\gamma = \left(\beta_0 + \frac{\beta_1^2}{4}\right)$ . Если  $\gamma > 0$ , то равенство (7.2) можно переписать так:

$$\left(X - \frac{\beta_1}{2} E - \sqrt{\gamma} E\right) \left(X - \frac{\beta_1}{2} E + \sqrt{\gamma} E\right) = 0.$$

Матрица  $X - \left(\frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\gamma}\right) E$  коммутирует поэлементно с  $\mathcal{L}$ , и потому она либо нулевая, либо обратная. В первом случае  $X = \left(\frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\gamma}\right) E$ , во втором —  $X = \left(\frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\gamma}\right) E$ . Если  $\gamma < 0$ , то из равенства (5.2) получаем, что

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} X - \frac{\beta_1}{2\sqrt{-\gamma}} E\right)^2 = -E,$$

что и доказывает предложение.

**Предложение 7.3.** Пусть  $\mathcal{L}$  — неприводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(p, q)$ ,  $p \neq q$ . Если  $X \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R})$  — вещественная матрица, удовлетворяющая условиям  $[X, \mathcal{L}] = 0$ ,  $(X \cdot J_{p,q})^T = X \cdot J_{p,q}$ , то  $X = \lambda E$ .

**Доказательство.** Так как  $(X \cdot J_{p,q})^T = X \cdot J_{p,q}$ , то матрицу  $X$  можно разбить на блоки:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix},$$

где  $X_1$  — квадратная матрица степени  $p$ ;  $X_4$  — квадратная матрица степени  $q$ , причем  $X_1^T = X_1$ ,  $X_2^T = -X_3$ ,  $X_3^T = -X_2$ ,  $X_4^T = X_4$ .

Рассмотрим случай  $p > q$ . Пусть  $X \neq \lambda E$ . В силу предложения 7.2 можно считать, что  $X^2 = -E$ . Поскольку  $X_1$  симметрическая, то существует такая вещественная матрица  $U$ , что  $U^{-1}XU = Y_1$  — диагональная матрица. Допустим, что

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица  $X$  сопряжена матрице

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}.$$

Так как  $Y^2 = -E$ , то  $Y_1^2 + Y_2Y_3 = -E$  и, значит,  $Y_2Y_3 = -E - Y_1^2$ . Обозначим через  $\bar{Y}_2$  матрицу, которая получается из матрицы  $Y_2$  в результате вычеркивания всех строк с номерами, большими  $q$ , а через  $\bar{Y}_3$  — матрицу, которая получается из матрицы  $Y_3$  в результате вычеркивания всех столбцов с номерами, большими  $q$ . Матрицы  $\bar{Y}_2$  и  $\bar{Y}_3$  квадратные, и в силу равенства  $Y_2Y_3 = -E - Y_1^2$  их произведение  $\bar{Y}_2\bar{Y}_3$  — обратимая диагональная матрица. Отсюда вытекает, что матрица  $Y_2\bar{Y}_3$  имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \alpha_q \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если через  $\Phi$  обозначить матрицу

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & \bar{Y}_3 \end{pmatrix},$$

то

$$\Phi^{-1}Y\Phi = \left( \begin{array}{cc|ccc} & & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \cdots & \alpha_q \\ 0 & & \cdot & \cdots & \cdot \\ & \lambda_p & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & * & * & & \end{array} \right).$$

Таким образом, матрица  $\Phi^{-1}Y\Phi$ , а значит, и матрица  $X$ , имеет вещественный характеристический корень  $\lambda_p$ . Следовательно,  $X = \lambda_p E$ , и потому  $X^2 \neq -E$ . Полученное противоречие и доказывает предложение для случая  $p > q$ .

Если  $p < q$ , то с помощью матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

получаем алгебру  $\mathcal{L}' = D^{-1}\mathcal{L}D$ , содержащуюся в  $\mathcal{L}O(q, p)$ . Так как

$$(D \times D \cdot J_{q,p})^T = -(D \times J_{p,q}D)^T = -D \times J_{p,q}D = D \times D \cdot J_{q,p}$$

и  $[D \times D, \mathcal{L}'] = 0$ , то в силу рассмотренного выше случая  $D \times D = \lambda E$  или  $X = \lambda E$ . Предложение доказано.

**Теорема 7.1.** Пусть  $G_1 \subset \mathcal{L}O(p_1, q_1)$  и  $G_2 \subset \mathcal{L}O(p_2, q_2)$  — две неприводимые подалгебры. Если  $C^{-1}G_1C = G_2$ , то  $CJ_{p_2, q_2}C^T = \lambda J_{p_1, q_1}$ .

**Доказательство.** Поскольку  $G_1 \subset \mathcal{L}O(p_1, q_1)$ , то для любой матрицы  $A \in G_1$ , справедливо равенство

$$J_{p_1, q_1}A + A^T J_{p_1, q_1} = 0. \quad (7.3)$$

Аналогично, для любой матрицы  $B \in G_2$  выполняется равенство

$$J_{p_2, q_2}B + B^T J_{p_2, q_2} = 0. \quad (7.4)$$

Пусть  $C^{-1}AC = B$ , тогда, учитывая соотношение (7.4), получаем

$$J_{p_2, q_2}C^{-1}AC + C^T A^T (C^{-1})^T J_{p_2, q_2} = 0,$$

или

$$A = -CJ_{p_2, q_2}C^T A^T (C^{-1})^T J_{p_2, q_2}C^{-1}. \quad (7.5)$$

С другой стороны, используя соотношение (7.3), имеем

$$A = -J_{p_1, q_1}A^T J_{p_1, q_1}. \quad (7.6)$$

Следовательно, ввиду (7.5) и (7.6)

$$J_{p_1, q_1}A^T J_{p_1, q_1} = CJ_{p_2, q_2}C^T A^T (C^{-1})^T J_{p_2, q_2}C^{-1},$$

Откуда

$$A = J_{p_1, q_1} (C^{-1})^T J_{p_2, q_2}C^{-1}ACJ_{p_2, q_2}C^T J_{p_1, q_1}.$$

Таким образом, матрица  $T = CJ_{p_2, q_2}C^T J_{p_1, q_1}$  перестановочна поэлементно с  $G_1$ . Но тогда по лемме Шура матрица  $T$  либо нулевая, либо обратимая. Поскольку матрица  $T$  удовлетворяет всем условиям предложения 7.3, то  $T = \lambda E$ . Следовательно,  $CJ_{p_2, q_2}C^T = \lambda J_{p_1, q_1}$ . Теорема доказана.



### § 8. Структура инвариантного подпространства для вполне приводимой подалгебры

В настоящем параграфе мы рассматриваем задачу нахождения всех инвариантных подпространств пространства  $V$  для вполне приводимой подалгебры  $\mathcal{L} \subset \mathcal{LO}(p, q)$  с точностью до  $O(p, q)$ -сопряженности. Если  $V_1$  и  $V_2$  — подпространства пространства  $V$ , то подпрямую сумму подпространств  $V_1$  и  $V_2$  будем обозначать через  $V_1 \dot{+} V_2$ .

**Предложение 8.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{LO}(V)$ , разложимая в подпрямое произведение  $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$  подалгебр  $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{LO}(p_1, q_1)$  и  $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{LO}(p_2, q_2)$ , первая из которых действует неприводимо на подпространстве  $V_1 = \langle T_1, \dots, T_{p_1+q_1} \rangle$ , а вторая — на подпространстве  $V_2 = \langle T'_1, \dots, T'_{p_2+q_2} \rangle$ . Если  $\mathcal{L}$ -инвариантное подпространство  $N = V_1 \dot{+} V_2$  не разложимо в прямую сумму  $V_1 \oplus V_2$ , то разложение  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$  является тривиальным.

**Доказательство.** Если  $\mathcal{L}$  содержит ненулевой элемент  $J_1 * J_2$ , где  $J_1 \in \mathcal{L}_1$ ,  $J_2 \in \mathcal{L}_2$ , то нетрудно убедиться, что  $J_1 \neq 0$ ,  $J_2 \neq 0$ . Следовательно,  $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_2 = 0$  и потому существует изоморфизм  $f_1 : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ , определяемый следующим образом: если  $J_1 * J_2 \in \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ , то  $f_1(J_1) = J_2$ .

Поскольку  $N$  не разложимо в прямую сумму подпространств  $V_1$  и  $V_2$ ,  $N \cap V_1 = N \cap V_2 = 0$ , то существует изоморфизм  $f_2 : V_1 \rightarrow V_2$ , определяемый следующим образом: если  $X_1 + X_2 \in V_1 \dot{+} V_2$ , то  $f_2(X_1) = X_2$ . Таким образом, базис инвариантного подпространства  $N$  имеет вид:  $T_1 + R_1, \dots, T_{p_1+q_1} + R_{p_1+q_1}$ , где  $R_1, \dots, R_{p_1+q_1}$  — базис пространства  $V_2$ . Отображение  $f_2 : V_1 \rightarrow V_2$  является, очевидно,  $\mathcal{L}$ -изоморфизмом. Ввиду этого для произвольного элемента  $J = J_1 * J_2 \in \mathcal{L}$  матрица линейного оператора  $\text{ad } J_2$  в базисе  $\{R_1, \dots, R_{p_1+q_1}\}$  совпадает с матрицей  $J_1$ . Если  $C$  — матрица перехода от базиса  $\{R_1, \dots, R_{p_1+q_1}\}$  к базису  $\{T'_1, \dots, T'_{p_1+q_1}\}$ , то  $J_2 = C^{-1} J_1 C$  и, значит,  $\mathcal{L}_2 = C^{-1} \mathcal{L}_1 C$ . Ввиду теоремы 7.1 отсюда вытекает, что

$$C J_{p_2, q_2} C^T = \lambda J_{p_1, q_1}. \tag{8.1}$$

Докажем, что  $\lambda > 0$ . Действительно, пусть  $\lambda < 0$ . В силу закона инерции для квадратичных форм из равенства (8.1) получаем, что  $p_2 = q_1$ ,  $q_2 = p_1$ . Следовательно,  $C J_{q_1, p_1} C^T = \lambda J_{p_1, q_1}$ . Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DC \cdot J_{q_1, p_1} \left( \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DC \right)^T = J_{q_1, p_1},$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

и потому  $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DC \in O(q_1, p_1)$ . Таким образом,  $C = \sqrt{-\lambda} DC_1$ , где  $C_1 \in O(q_1, p_1)$ . Следовательно, произвольный элемент  $J_1 * J_2 \in \mathcal{L}$  можно представить в виде  $J_1 * J_2 = J_1 * C_1^{-1} D J_1 C_1$ . Пусть  $\theta_1$  — автоморфизм, определяемый матрицей  $E * C_1^{-1}$ . Автоморфизм  $\theta_1$  отображает алгебру  $\mathcal{L}$  на алгебру  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1 * D \mathcal{L}_1 D$ , а пространство  $N = \langle T_i + R_i \rangle$  на пространство  $N' = \langle T_i + C_i \cdot R_i \rangle$ . Так как  $DC_i \cdot R_i = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} T'_i$ , то  $T_i + C_i \cdot R_i = T_i + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DT'_i$ . Следовательно, подпространство  $N' = \langle T_i + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DT'_i \rangle$

инвариантно относительно алгебры  $\mathcal{L}'$ . Но тогда инвариантным относительно подалгебры  $\mathcal{L}'$  будет и подпространство  $N'' = \langle T_i + DT'_i \rangle$ . Нетрудно убедиться, что  $N''$  — вполне изотропное подпространство, а это противоречит условию, что подалгебра  $\mathcal{L}$ , а значит, и  $\mathcal{L}'$ , вполне приводима.

Таким образом,  $\lambda > 0$ , и в силу закона инерции для квадратичных форм из равенства (8.1) получаем, что  $p_1 = p_2$ ,  $q_1 = q_2$  и

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C J_{p_1, q_1} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C^T = J_{p_1, q_1}.$$

Следовательно,  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C \in O(p_1, q_1)$ ,  $C_1^{-1} G_1 C_1 = G_2$ . Предложение доказано.

**Теорема 8.1.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ ,  $\mathcal{L} = A_1 * \dots * A_t$  — ее разложение в подпрямое произведение примарных множителей. Подпространство  $N$ , инвариантное относительно подалгебры  $\mathcal{L}$ , разлагается в прямую сумму

$$N = N_1 \oplus \dots \oplus N_t \oplus N',$$

где  $[A_i, N_i] = N_i$ ,  $[A_i, N_j] = 0$ , если  $i \neq j$ ,  $[\mathcal{L}, N'] = 0$ .

**Доказательство.** Доказательство будем проводить индукцией по размерности  $N$ . Рассмотрим вначале случай, когда  $N$  — неприводимое подпространство. Пусть  $N'$  — максимальное подпространство  $N$ , удовлетворяющее условию  $[\mathcal{L}, N'] = 0$ . Ввиду неприводимости  $N$   $N' = N$  или  $N' = 0$ . Если  $N' = N$ , то теорема доказана. Поэтому будем предполагать, что  $N' = 0$ . Обозначим через  $S'_j$  максимальное подпространство  $V$ , удовлетворяющее условию  $[A_j, S'_j] = 0$ , а через  $S_j$  — ортогональное дополнение к  $S'_j$  в пространстве  $V$ . Пространства  $S_j$  и  $S'_j$  неизотропные и  $V = S_j \oplus S'_j$ . Пусть  $N_j$  — проекция  $N$  на  $S_j$ . Очевидно,  $N$  разложимо в подпрямую сумму подпространств  $N_j$ ,  $j = 1, \dots, t$ , т.е.

$$N = N_1 \dot{+} \dots \dot{+} N_t. \quad (8.2)$$

Докажем, что среди  $N_i$  только одно отлично от нуля. Действительно, пусть  $A_i = \mathcal{L}_{i1} * \dots * \mathcal{L}_{is_i}$  — разложение  $A_i$  в подпрямое произведение неприводимых подалгебр. Как и выше, нетрудно убедиться, что  $N_i$  разложимо в подпрямую сумму  $N_i = N_{i1} \dot{+} \dots \dot{+} N_{is_i}$  неприводимых подпространств  $N_{i1}, \dots, N_{is_i}$ .

Рассмотрим произвольный элемент  $X \in N$ , отличный от нуля, и пусть  $X = X_1 + \dots + X_t$ , где  $X_i \in N_i$ . Предположим, что в разложении (8.2)  $N_1 \neq 0$ ,  $N_2 \neq 0$ . При этом предположении  $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 \neq 0$ . В самом деле, если, например,  $X_1 = 0$ , то  $\mathcal{L}$ -подпространство, порожденное  $X$ , отлично от  $N$ , поскольку его проекция на  $N_1$  равна нулю. А это противоречит предположению о неприводимости  $N$ .

Пусть далее  $X_1 = X_{11} + \dots + X_{1s_1}$ ,  $X_{1i} \in N_{1i}$ ,  $X_2 = X_{21} + \dots + X_{2s_2}$ ,  $X_{2i} \in N_{2i}$ . Можно предполагать, что  $X_{11} \neq 0$ ,  $X_{21} \neq 0$ . Так как разложение  $\mathcal{L}_{11} * \mathcal{L}_{21}$  не является тривиальным разложением, то в силу предложения 8.1 проекция  $N$  на подпространстве  $N_{11} \oplus N_{21}$  совпадает с  $N_{11} \oplus N_{21}$ . Следовательно,  $N$  содержит ненулевой элемент  $Y$ , проекция которого на подпространство  $N_{11}$  равна нулю. Но тогда  $\mathcal{L}$ -подпространство, порожденное  $Y$ , отлично от  $N$ , что противоречит предположению о неприводимости  $N$ . Полученное противоречие доказывает, что  $N = N_i$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Тем самым теорема справедлива в случае, если  $N$  неприводимо.

Пусть  $N$  — приводимо, тогда  $N = M_1 \oplus M_2$ ,  $\dim M_i < \dim N$ . В силу индуктивного предположения

$$M_1 = M_1^{(1)} \oplus \dots \oplus M_1^{(t)} \oplus M'_1, \quad M_2 = M_2^{(1)} \oplus \dots \oplus M_2^{(t)} \oplus M'_2,$$

где  $[A_i, M_1^{(i)}] = M_1^{(i)}$ ,  $[A_i, M_2^{(i)}] = M_2^{(i)}$ ,  $[A_i, M_1^{(j)}] = 0$ ,  $[A_i, M_2^{(j)}] = 0$ , если  $i \neq j$ ,  $[A_i, M'_1] = 0$ ,  $[A_i, M'_2] = 0$ . Но тогда, положив  $N_i = M_1^{(i)} \oplus M_2^{(i)}$ ,  $N' = M'_1 \oplus M'_2$ , получим, что  $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_t \oplus N'$ . Теорема доказана.

**Теорема 8.2.** Пусть  $\mathcal{L}$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}O(V)$ ,  $\mathcal{L} = A_1 * \dots * A_t$  — ее разложение в подпрямое произведение примарных подалгебр. Подпространство  $N$ , инвариантное относительно алгебры  $\mathcal{L}$ , разлагается в прямую сумму

$$N = N_1 \oplus \dots \oplus N_t \oplus N',$$

где  $[A_i, N_i] = N_i$ ,  $[A_i, N_j] = 0$ , если  $i \neq j$ ,  $[\mathcal{L}, N'] = 0$ . Если примарная алгебра  $A$  является подпрямым произведением неприводимых подалгебр алгебр  $\mathcal{L}O(V_1), \dots, \mathcal{L}O(V_q)$ , то относительно  $O(V)$ -сопряженности ненулевые подпространства  $W$  пространства  $V$  со свойством  $[A, W] = W$  исчерпываются подпространствами  $V_1, \dots, V_1 \oplus \dots \oplus V_q$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 8.1 достаточно изучить структуру пространства  $W$ , удовлетворяющего условию  $[\mathcal{L}, W] = W$ , где  $\mathcal{L}$  — примарная подалгебра. Пусть  $\mathcal{L}$  разложима в подпрямое произведение двух неприводимых подалгебр  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . Поскольку  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  — неприводимы, то проекция  $W$  на каждое из подпространств  $V_1$  и  $V_2$  либо равна нулю, либо совпадает с соответствующим подпространством  $V_i$ . Предположим, что  $W$  не разлагается в прямую сумму подпространств  $V_1$  и  $V_2$ . Если  $\{T_1, \dots, T_{p_1+q_1}\}$  — базис подпространства  $V_1$ ,  $\{T'_1, \dots, T'_{p_1+q_1}\}$  — базис подпространства  $V_2$ , то, как было установлено при доказательстве предложения 8.1, можно считать при этом, что базис подпространства  $W$  имеет вид  $\{T_1 + \lambda T'_1, \dots, T_{p_1+q_1} + \lambda T'_{p_1+q_1}\}$ , а подалгебра  $\mathcal{L}$  равна  $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_1$ . Пусть

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} E & \lambda E \\ \lambda E & -E \end{pmatrix}.$$

Так как

$$C \begin{pmatrix} J_{p_1, q_1} & 0 \\ 0 & J_{p_1, q_1} \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} J_{p_1, q_1} & 0 \\ 0 & J_{p_1, q_1} \end{pmatrix},$$

то матрица  $C$  определяет некоторую изометрию  $\theta$  пространства  $V_1 \oplus V_2$ . Пусть  $J_1 * J_1$  — произвольный элемент алгебры  $\mathcal{L}$ . В базисе  $\{T_1, \dots, T_{p_1+q_1}, T'_1, \dots, T'_{p_1+q_1}\}$  оператору  $\text{ad}(J_1 * J_1)$  соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что  $C^{-1} \mathcal{L} C = \mathcal{L}$  и  $\theta(T_i + \lambda T'_i) = T_i$ ,  $i = 1, \dots, p_1 + q_1$ . Таким образом, автоморфизм  $\theta$ , определяемый матрицей  $C$ , действует на алгебре  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_1$  тождественно, а пространство  $N$  отображает на пространство  $V_1$ . Тем самым утверждение теоремы справедливо для примарной подалгебры, которая разлагается в подпрямое произведение двух неприводимых подалгебр.

Пусть далее  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_s$  и  $s \geq 3$ . Доказательство будем проводить индукцией по числу  $s$ . Обозначим через  $W_{ij}$  проекцию  $W$  на подпространство  $V_i \oplus V_j$ . Предположим, что для некоторых  $i$  и  $j$   $W_{ij}$  не распадается в прямую сумму своих проекций  $W_i$  и  $W_j$  на  $V_i$  и  $V_j$ . При этом предположении  $W_i = V_i$ ,  $W_j = V_j$ ,  $W_{ij} = V_i + V_j$ , и а силу предыдущего результата для случая  $s = 2$  существует автоморфизм  $\theta$  алгебры  $JO(V)$ , действующий на алгебре  $\mathcal{L}$  тождественно и отображающий подпространство  $W_{ij}$  на подпространство  $V_i$ . Следовательно,  $W$  сопряжено подпространству  $M$ , обладающему тем свойством, что  $M_{ij}$  для любых  $i$  и  $j$  распадается в прямую сумму своих проекций на подпространства  $V_i$  и  $V_j$ .

Допустим, не нарушая общности, что  $M_{s-1} \neq 0$ . Значит,  $M_{s-1} = V_{s-1}$ . Так как  $M_{s-1,s}$  распадается в прямую сумму проекций  $M_{s-1} = V_{s-1}$  и  $M_s$ , то  $M$  содержит подпространство  $P = P_1 + \dots + P_{s-2} + V_{s-1}$ . Обозначим через  $N$   $\mathcal{L}$ -подпространство, порожденное  $P$ . Поскольку  $N_s = 0$ , то  $N$  инвариантно относительно алгебры  $\tilde{\mathcal{L}}_s = \mathcal{L}_1 * \dots * \mathcal{L}_{s-1}$ . В силу индуктивного предположения существует автоморфизм  $\tau$  алгебры  $JO(V)$ , действующий на алгебре  $\mathcal{L}$  тождественно и отображающий подпространство  $N$  на  $V_1 \oplus \dots \oplus V_q$ , где  $q \leq s - 1$ . Следовательно,  $M$  сопряжено подпространству  $M'$ , содержащему  $V_1 \oplus \dots \oplus V_q$ . Отсюда вытекает, что подпространство  $M'_{q+1} + \dots + M'_s \subset M'$  инвариантно относительно алгебры  $\mathcal{L}$ , а значит, и алгебры  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{q+1} * \dots * \mathcal{L}_s$ . По индуктивному предположению существует автоморфизм  $\theta$  алгебры  $JO(V)$ , действующий на алгебре  $\mathcal{L}'$  и подпространстве  $V_1 \oplus \dots \oplus V_q$  тождественно и отображающий пространство  $M'_{q+1} + \dots + M'_s$  на  $V_{q+1} \oplus \dots \oplus V_t$ , где  $t \leq s$ . Следовательно,  $W$  сопряжено  $V_1 \oplus \dots \oplus V_t$ . Теорема доказана.

1. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., The maximal solvable subgroups of the groups and all subgroups of  $SU(2, 1)$ , *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, 1378–1393.
2. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., The maximal solvable subgroups of  $SO(p, q)$  groups, *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, 1932–1938.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597–1614.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1615–1624.
5. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhasu H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 2259–2288.
6. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, в кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.
7. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.
8. Баранник Л.Ф., Фушич В.И., Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, n)$ , Препринт 85.90, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
9. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фушич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре  $P(2, n)$ , Препринт 85.89, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 52 с.
10. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, № 1, 67–72.
11. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., Наука, 1967, 575 с.
12. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964, 355 с.

# О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре $P(1, n)$

Л.Ф. БАРАННИК, А.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЦ

## 1. Введение

Описание подгрупповой структуры обобщенной группы Пуанкаре  $P(1, n)$  необходимо для решения ряда задач теоретической и математической физики: изучение физических систем с переменной массой и спином [1–3], построение точных частных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений [4], редукция представлений группы  $P(1, n)$  на ее подгруппы [5].

Систематическое изучение непрерывных подгрупп неоднородных групп преобразований квантовой механики начато в работе [6], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечномерной алгебры Ли  $L$  с нетривиальным абелевым идеалом  $N$ , являющимся полупрямым слагаемым:  $L = N \ltimes L_1$ . Этим методом проведена классификация подалгебр алгебр Ли групп Пуанкаре  $P(1, 3)$  [6],  $P(1, 4)$  [7, 8] и групп Евклида  $E(3)$  [9],  $E(4)$  [10]. В силу чрезвычайной общности метод не всегда эффективно реализуется.

В настоящей работе для случая группы  $P(1, n)$  дается дальнейшее развитие метода Патеры–Винтернитца–Цассенхауза [6], позволяющее свести проблему классификации относительно  $P(1, n)$ -сопряженности подалгебр алгебры Пуанкаре к описанию относительно  $O(1, k)$ -сопряженности неприводимых подалгебр алгебры  $AO(1, k)$  и к описанию относительно  $O(k)$ -сопряженности неприводимых подалгебр алгебры  $AO(k)$  ( $k = 2, \dots, n$ ).

## 2. Максимальные подалгебры

Пусть  $R$  — поле вещественных чисел;  $\langle X_1, \dots, X_s \rangle$  — векторное пространство или алгебра Ли над  $R$  с образующими  $X_1, \dots, X_s$ ;  $R^{n+1}$  —  $n+1$ -мерное арифметическое векторное пространство над  $R$ ;  $U = U^{n+1}$  —  $n+1$ -мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X, Y) = x_0y_0 - x_1y_1 - \dots - x_ny_n; \quad (1)$$

$O(1, n)$  — группа линейных преобразований  $U^{n+1}$ , сохраняющих  $(X, X)$  для каждого  $X \in U^{n+1}$ . Будем предполагать, что  $O(1, n)$  реализована в виде вещественных матриц порядка  $n+1$ .

Группу Пуанкаре  $P(1, n)$  называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta \in O(1, n)$ ,  $Y \in R^{n+1}$ .

Через  $AG$  обозначим алгебру Ли группы Ли  $G$ .

Алгебра Пуанкаре  $AP(1, n)$  определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \\ [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] &= g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$ ,  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ).

Генераторы поворотов  $J_{\alpha\beta}$  порождают алгебру  $AO(1, n)$ , а генераторы трансляций  $P_\alpha$  порождают коммутативный идеал  $N$ , причем  $AP(1, n) = N \bowtie AO(1, n)$ .

Пусть  $C$  такая матрица порядка  $n+2$  над  $R$ , что отображение  $\varphi_C : X \rightarrow CXC^{-1}$  является автоморфизмом  $AP(1, n)$ . Если  $C \in G$ ,  $G \subset P(1, n)$ , то  $\varphi_C$  называется  $G$ -автоморфизмом. Если  $C = \text{diag}(\lambda E, 1)$  ( $\lambda \in R$ ,  $\lambda > 0$ ), то автоморфизм  $\varphi_C$  называется гомотетией.

Подалгебры  $K$  и  $K'$  алгебры  $AP(1, n)$  называются  $P(1, n)$ -сопряженными, если  $\varphi_C(K) = K'$  для некоторого  $P(1, n)$ -автоморфизма  $\varphi_C$  алгебры  $AP(1, n)$ .

Отождествим  $N$  с  $U$ , сопоставив  $P_i$   $n+1$ -мерный столбец с единицей на  $i$ -ом месте и с нулями на остальных местах ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Элементы  $AO(1, n)$  считаем матрицами порядка  $n+1$ . При таком подходе  $[X, Y] = X \cdot Y$  для любых  $X \in AO(1, n)$ ,  $Y \in N$ .

Пусть  $W$  — невырожденное подпространство пространства  $U$ . Если  $F$  — подалгебра  $AO(W)$ , то тождественное отображение  $F$  является представлением  $F$  в  $AO(W)$ . Будем называть его тривиальным представлением  $F$  в  $AO(W)$ . Подалгебра  $F \subset AO(W)$  называется неприводимой, если тривиальное представление  $F$  в  $AO(W)$  является неприводимым. Подалгебра  $F \subset AO(W)$  называется вполне приводимой, если ее тривиальное представление вполне приводимо.

**Теорема 1.** *Максимальные подалгебры алгебры  $AO(1, n)$  исчерпываются относительно  $O(1, n)$ -сопряженности максимальными неприводимыми подалгебрами и такими алгебрами:  $AO(n)$ ;  $AO(1, k) \oplus AO'(n-k)$ , где  $AO'(n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = k+1, \dots, n \rangle$ ,  $k = 2, \dots, n-1$ ;  $\langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \bowtie (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$ , где  $G_a = J_{0a} - J_{an}$  ( $a = 1, 2, \dots, n-1$ ).*

**Доказательство.** Пусть  $F$  — подалгебра алгебры  $AO(1, n)$ ,  $U_1$  — подпространство пространства  $U$ , инвариантное относительно  $F$ . Если  $U_1$  — вырожденное пространство, то оно содержит одномерное  $F$ -инвариантное изотропное подпространство  $W$ , сопряженное  $\langle P_0 + P_n \rangle$ . В этом случае  $F$  является подалгеброй алгебры  $L = \{X \in AO(1, n) \mid (\forall Y \in W)(XY \in W)\}$ . Нетрудно получить, что  $L = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \bowtie (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$ . Если  $U_1$  — невырожденное пространство, то оно является псевдоевклидовым или евклидовым пространством. На основании теоремы Витта нормализатор  $U_1$  в  $AO(1, n)$  сопряжен с одной из алгебр:  $AO(n)$ ,  $AO(1, k) \oplus AO'(n-k)$ . Теорема доказана.

Пусть  $AE(n) = \langle P_1, \dots, P_n \rangle \bowtie AO(n)$ ,  $AE'(k) = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle \bowtie AO'(n-k)$ ,  $A\tilde{G}(n-1)$  — расширенная алгебра Галилея с базисом:  $M = P_0 + P_n$ ,  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ ,  $G_1, \dots, G_{n-1}$ ,  $J_{ab}$  ( $a, b = 1, \dots, n-1$ ). Согласно теореме 1 описание подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  сводится к описанию относительно  $P(1, n)$ -сопряженности подалгебр алгебр  $AE(n)$ ,  $AP(1, k) \oplus AE'(n-k)$ ,  $A\tilde{G}(n-1) \bowtie \langle J_{0n} \rangle$ , а также алгебр  $U \bowtie F$ , где  $F$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(1, n)$ .

Пусть  $\pi$  — проектирование алгебры  $AP(1, n)$  на  $AO(1, n)$ ,  $F$  — подалгебра  $AO(1, n)$ ,  $\hat{F}$  — такая подалгебра алгебры  $AP(1, n)$ , что  $\pi(\hat{F}) = F$ . Если алгебра  $\hat{F}$

$P(1, n)$ -сопряжена алгебре  $W \oplus F$ , где  $W$  есть  $F$ -инвариантное подпространство пространства  $U$ , то  $\hat{F}$  будем называть расщепляемой в алгебре  $AP(1, n)$ . Если любая подалгебра  $\hat{F} \subset AP(1, n)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(\hat{F}) = F$ , является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра  $F$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $AP(1, n)$ . Аналогично определяется расщепляемость подалгебр и для других алгебр неоднородных преобразований.

**Предложение 1.** Пусть  $L = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$ , где  $G_a = J_{0a} - J_{an}$  ( $a = 1, 2, \dots, n-1$ ). Подалгебра  $F \subset AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  обладает только расщепляемыми расширениями в  $L$  тогда и только тогда, когда  $F$  — полупростая алгебра или  $F$  не сопряжена подалгебре алгебры  $AO(n-2)$ .

Нетрудно установить, что если  $n$  — нечетное число, то  $AO(1, n)$  обладает относительно  $O(1, n)$ -сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2k-1, 2k}, J_{0n} \rangle \quad (2k = n-1).$$

Если  $n$  — четное число, то  $AO(1, n)$  обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n} \rangle;$$

$$\langle G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, J_{0n} \rangle.$$

Отсюда и из предложения 1 получаем описание максимальных абелевых подалгебр алгебры  $AO(1, n)$ .

**Предложение 2.** Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $AO(1, n)$  исчерпываются относительно  $O(1, n)$ -сопряженности такими алгебрами:

$$1) n = 2k + 1: \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1}, J_{0n} \rangle; \langle G_1, G_2, \dots, G_{n-1} \rangle;$$

$$\langle G_1, G_2, \dots, G_{2m}, J_{2m+1, 2m+2}, \dots, J_{n-2, n-1} \rangle \quad (m = 1, \dots, k-1);$$

$$2) n = 2k: \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n} \rangle; \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, J_{0n} \rangle;$$

$$\langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, G_{n-1} \rangle; \langle G_1, G_2, \dots, G_{n-1} \rangle;$$

$$\langle G_1, \dots, G_{2m}, G_{n-1}, J_{2m+1, 2m+2}, \dots, J_{n-3, n-2} \rangle \quad (m = 1, \dots, k-1).$$

### 3. Вполне приводимые подалгебры

**Теорема 2.** Если  $n \geq 2$ , то неприводимая подалгебра алгебры  $AO(1, n)$  является полупростой и некомпактной.

**Доказательство.** Пусть  $F$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(1, n)$ . Тогда  $F = Z(F) \oplus Q$ , где  $Z(F)$  — центр, а  $Q$  — фактор Леви. Если  $F$  — абсолютно неприводимая алгебра, то в силу леммы Шура  $Z(F) = 0$ . Если  $F$  не является абсолютно неприводимой алгеброй, то при  $Z(F) \neq 0$  получаем, что  $\dim Z(F) = 1$  и квадрат ненулевой матрицы из  $Z(F)$  совпадает с  $(-\lambda^2)E$ ,  $\lambda \neq 0$ , где  $\lambda \in R$ . Последнее противоречит предложению 1. Значит,  $F$  — полупростая алгебра.

Если  $F$  — компактная алгебра, то существует такая симметрическая матрица  $C \in GL(n+1, R)$ , что  $C^{-1}FC \subset AO(n+1)$ . Так как  $\exp(C^{-1}FC) = C^{-1} \cdot \exp F \cdot C$ , то в  $O(n+1)$  существует неприводимая группа, которая одновременно сохраняет  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$  и  $\lambda_0^2 x_0^2 - \lambda_1^2 x_1^2 - \dots - \lambda_n^2 x_n^2$  ( $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  — ненулевые вещественные числа). Полученное противоречие и доказывает вторую часть теоремы.

**Предложение 3.** Приводимая подалгебра  $F$  алгебры  $AO(1, n)$  является вполне приводимой тогда и только тогда, когда она сопряжена подалгебре одной из алгебр:  $AO(n)$ ,  $AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  или алгебре  $L_1 \oplus L_2$ , где  $L_1$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(1, k)$  ( $k > 1$ ), а  $L_2$  — подалгебра алгебры  $AO'(n-k)$ .

Предложение 3 является следствием предложения 1, теоремы 2 и того факта, что  $G_a$  действует не вполне приводимо на пространстве  $\langle P_0 + P_n, P_a \rangle$ .

**Предложение 4.** *Вполне приводимая подалгебра  $F$  алгебры  $AO(1, n)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $AP(1, n)$  тогда и только тогда, когда  $F$  полупроста или не сопряжена подалгебре одной из алгебр:  $AO(n)$ ,  $AO(1, n - 1)$ .*

Пусть  $\Gamma$  — тривиальное представление вполне приводимой подалгебры  $F$  алгебры  $AO(1, n)$ , не сопряженной подалгебре алгебры  $AO(n - 1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$ . Тогда  $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$ , где  $\Gamma_i$  — неприводимое представление  $F$  в  $AO(W_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Положим  $F_i = \{\text{diag}(O, \dots, \Gamma_i(X), \dots, O \mid X \in F)\}$ . Тогда  $F_i$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(W_i)$ . Если  $F_i \neq 0$ , то алгебру  $F_i$  будем называть неприводимой частью алгебры  $F$ . Если  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_j$  суть эквивалентные представления, то будем предполагать, что для любого  $X \in F$  имеет место равенство  $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$ . Объединив эквивалентные ненулевые подпредставления, мы получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления  $\Gamma$ . Соответствующие им подалгебры алгебры  $AO(1, n)$ , построенные по тому же правилу что и неприводимые части  $F_i$ , будем называть примарными частями алгебры  $F$ .

**Теорема 3.** *Пусть  $K_1, K_2, \dots, K_q$  — примарные части ненулевой вполне приводимой подалгебры  $F$  алгебры  $AO(1, n)$ ,  $V$  — подпространство  $U$ , инвариантное относительно  $F$ . Тогда  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$ , где  $V_i = [K_i, V] = [K_i, V]$ ,  $[K_j, V_i] = 0$  при  $j \neq i$ ,  $\tilde{V} = \{X \in V \mid [F, X] = 0\}$ . Если примарная алгебра  $K$  является подпрямой суммой неприводимых подалгебр  $S_1, S_2, \dots, S_r$  соответственно алгебр  $AO(W_1), AO(W_2), \dots, AO(W_r)$ , то относительно  $O(1, n)$ -сопряженности ненулевые подпространства  $W$  пространства  $U$  с условием  $[K, W] = W$  исчерпываются пространствами:  $W_1, W_1 \oplus W_2, \dots, W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ .*

**Доказательство.** Разложение  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$  вытекает из теоремы Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр Ли. Пусть  $K$  — примарная часть алгебры  $F$ . В силу предложения 3 можно предполагать, что  $K$  — примарная подалгебра алгебры  $AO(n)$ . На основании леммы Шура нетрудно доказать, что если  $Q$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(m)$ , то группа автоморфизмов алгебры  $\langle P_1, \dots, P_m \rangle \bowtie Q$  разлагается в прямое произведение группы  $E(m)$ -автоморфизмов и группы гометий. Отсюда вытекает второе утверждение теоремы.

На основании теоремы 3 описание подалгебр  $\hat{F} \subset AP(1, n)$ , для которых  $\pi(\hat{F})$  — вполне приводимая алгебра, не сопряженная подалгебре алгебры  $AO(n - 1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$ , сводится к описанию неприводимых подалгебр алгебр  $AO(1, k)$  и  $AO(k)$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ). Остальные случаи сводятся к случаю алгебры  $A\tilde{G}(n - 1) \bowtie \langle J_{0n} \rangle$ .

#### 4. Подалгебры алгебры Галилея

Алгебра Галилея  $AG(n)$  определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, & [P_a, J_{bc}] &= \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \\ [P_a, P_b] &= 0, & [G_a, J_{bc}] &= \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b, & [G_a, G_b] &= 0, & [P_a, G_b] &= 0, \\ [P_0, J_{ab}] &= [P_0, P_a] = 0, & [G_a, P_0] &= P_a \quad (a, b, c, d = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Эта алгебра является факторалгеброй расширенной алгебры Галилея  $A\tilde{G}(n)$  по центру  $\langle M \rangle$ . Через  $A\tilde{G}(n)$  обозначим изохронную алгебру Галилея, т.е. алгебру, получаемую из  $AG(n)$  в результате удаления  $P_0$ .



**Предложение 5.** *Подалгебра  $F \subset AO(n)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $\bar{AG}(n)$  тогда и только тогда, когда  $F$  полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры  $AO(n-1)$ .*

Алгебра  $\bar{AG}(n)$  является подпрямой суммой двух алгебр Евклида  $\langle P_1, \dots, P_n \rangle \oplus AO(n)$ ,  $\langle G_1, \dots, G_n \rangle \oplus AO(n)$ . Поэтому справедливость предложения 5 вытекает из предложения 1.

**Предложение 6.** *Пусть  $m = [n/2]$ ,  $\delta = 0$  при  $n = 2m$ ,  $\delta = 1$  при  $n = 2m + 1$ . Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $AG(n)$  исчерпываются относительно  $G(n)$ -сопряженности такими алгебрами:*

- $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ ;  $\langle G_1 + \alpha P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \rangle$  ( $\alpha > 0$ );
- $\langle G_1, \dots, G_n, P_1, \dots, P_n \rangle$ ;  $\langle P_0, \delta P_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1, 2m} \rangle$ ;
- $\langle G_n, P_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1, 2m} \rangle$  ( $n = 2m + 1$ );
- $\langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2a-1, 2a}, P_0, P_{2a+1}, \dots, P_n \rangle$  ( $a = 1, \dots, m-1$ );
- $\langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2a-1, 2a}, P_{2a+1}, \dots, P_n, G_{2a+1}, \dots, G_n \rangle$  ( $a = 1, \dots, m-1$ );
- $\langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2a-1, 2a}, G_{2a+1} + \alpha P_0, P_{2a+1}, \dots, P_n \rangle$  ( $\alpha > 0, a = 1, \dots, m-1$ ).

**Доказательство.** Относительно  $G(n)$ -сопряженности алгебра  $AG(n)$  обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$K = \langle P_0, P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1, 2m} \rangle.$$

Пусть  $L$  — максимальная абелевая подалгебра  $AG(n)$ . Тогда  $L \subset K$ . Если проекция  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  отлична от нуля, то  $P_0 \in L$  и проекция  $L$  на  $\langle G_1, \dots, G_n \rangle$  является нулевой или проекция  $L$  на векторное пространство  $\langle P_0, G_1, \dots, G_n \rangle$  совпадает с  $\langle G_{2s+1} + \alpha P_0 \rangle$ . Нетрудно получить, что проекция  $L$  на  $\langle J_{2d-1, 2d}, P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d} \rangle$  совпадает с  $\langle J_{2d-1, 2d} \rangle$  или с подалгеброй алгебры  $\langle P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d} \rangle$ . Значит,  $L$  сопряжена одной из алгебр, выписанных в формулировке предложения.

Каждая подалгебра  $F$  алгебры  $AO(n)$  является вполне приводимой алгеброй Ли линейных преобразований пространства  $\langle P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n \rangle$ . Как и в теореме 3, получаем, что описание подалгебр алгебры  $\bar{AG}(n)$  сводится к нахождению неприводимых подалгебр алгебр  $AO(m)$  ( $m = 2, \dots, n$ ) и к классификации пространств, получаемых склеиванием неприводимых относительно данной алгебры  $F \subset AO(m)$  подпространств соответственно пространств  $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$ ,  $\langle G_1, \dots, G_n \rangle$ .

Отметим, что в [11] описаны относительно  $G(3)$ -сопряженности все подалгебры алгебр Галилея  $AG(3)$ . Получена также классификация подалгебр расширенной алгебра Галилея. Эти результаты уточняют классификацию, проведенную в [12].

Вместо  $S_1 \oplus F, \dots, S_m \oplus F$  будем употреблять запись  $F : S_1, \dots, S_m$ . Пусть  $V_a^b = \langle P_a, \dots, P_b \rangle$ ,  $W_a^b = \langle G_a, \dots, G_b \rangle$ ,  $N_{a,b}^\alpha = \langle G_a + \alpha P_b, G_b - \alpha P_a \rangle$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $F$  — проекция  $\hat{F} \subset AG(4)$  на  $AO(4)$ . Подалгебры  $\hat{F}$  алгебры  $AG(4)$  с условием  $\dim F \geq 3$  исчерпываются относительно  $G(4)$ -сопряженности подалгебрами алгебры  $AG(3)$  и такими алгебрами:*

- $AO(4)$ :  $O$ ,  $\langle P_0 \rangle$ ,  $V_0^4$ ,  $V_1^4$ ,  $W_1^4$ ,  $V_1^4 + W_1^4$ ,  $V_0^4 + W_1^4$ ;
- $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{12} - J_{34} \rangle$ :  $O$ ,  $\langle P_0 \rangle$ ,  $V_0^4$ ,  $V_1^4$ ,  $W_1^4$ ,  $N_{1,2}^\alpha + N_{3,4}^{-\alpha}$ ,  $V_1^4 + W_1^4$ ,  $V_0^4 + W_1^4$  ( $\alpha \neq 0$ );
- $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{12} - J_{34} + \alpha P_0 \rangle$ :  $O$ ,  $V_1^4$ ,  $V_1^4 + W_1^4$  ( $\alpha \neq 0$ );
- $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle$ :  $O$ ,  $\langle P_0 \rangle$ ,  $V_0^4$ ,  $V_1^4$ ,  $W_1^4$ ,  $N_{1,2}^\alpha + N_{3,4}^{-\alpha}$ ,  $V_1^4 + W_1^4$ ,  $V_0^4 + W_1^4$  ( $\alpha \neq 0$ );
- $AO(3) \oplus \langle G_1, G_2, G_3, G_4 + \lambda P_4 \rangle$  ( $\lambda \neq 0$ );

$AO(3)$ :  $S_j$ ,  $V_0^3 + S_j$  ( $j = 1, 2, 6$ ),  $V_1^3 + S_j$  ( $j \neq 4, 7$ ),  $W_1^3 + S_j$  ( $j = 1, 2, 6$ ),  $V_1^3 + W_1^3 + S_j$ , где  $S_j$  совпадает с одним из пространств:  $\langle P_4 \rangle$ ,  $\langle G_4 \rangle$ ,  $\langle P_0 + \alpha G_4 \rangle$ ,  $\langle P_0, P_4 \rangle$ ,  $\langle P_0 + \alpha G_4, P_4 \rangle$ ,  $\langle P_4, G_4 \rangle$ ,  $\langle P_0, P_4, G_4 \rangle$  ( $\alpha > 0$ ;  $j = 1, \dots, 7$ ).

1. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
2. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 573.
3. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **10**, 163.
4. Фушич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4.
5. Никитин А.Г., Фушич В.И., Юрик И.И., *ТМФ*, 1976, **26**, 206.
6. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **8**, 1597.
7. Федорчук В.М., *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, 717.
8. Федорчук В.М., *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, 696.
9. Beckers J., Patera J., Perroud K., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 72.
10. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119.
11. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Препринт № 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 25 с.
12. Sorba P., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 941.

# Операторы Казимира для обобщенных групп Пуанкаре и группы Галилея

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

## 1. Введение

Изучение полиномиальных операторов Казимира группы Ли сводится к описанию инвариантов присоединенной группы [1]. Хорошо известны такие инварианты для однородных классических групп Ли [2]. Операторы Казимира и их спектры группы Пуанкаре  $P(1, 4)$  найдены в работах [3, 4]. Эта же задача решена для группы  $ISL(6, C)$  [5] и для группы  $IU(n)$  с различными подгруппами трансляций [6]. Обобщенные операторы Казимира (рациональные, трансцендентные) для подгрупп группы  $P(1, 3)$  найдены в [7], а для подгрупп оптической группы  $Opt(1, 3)$  в [8]. Изучению обобщенных операторов Казимира неоднородных групп произвольной размерности посвящена серия работ [9, 10]. В [11] дано описание инвариантов присоединенной группы для многих неоднородных классических групп.

В нашей работе найдены в явном виде максимальные системы алгебраически независимых полиномиальных операторов Казимира (основные операторы) обобщенных групп Пуанкаре  $P(p, q)$ , группы Галилея  $G(n)$  и расширенной группы Галилея  $\tilde{G}(n)$ .

## 2. Операторы Казимира обобщенных групп Пуанкаре

Алгебра Пуанкаре  $AP(p, q)$  определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}, \\ [P_a, J_{bc}] &= g_{ab}P_c - g_{ac}P_b, \quad J_{ba} = -J_{ab}, \quad [P_a, P_b] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$g = \text{diag} \left\{ \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q \right\} \quad (a, b, c, d = 1, 2, \dots, n; n = p + q).$$

Пусть  $\varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n}$  — полностью антисимметрический тензор ранга  $n$  с условием  $\varepsilon_{12 \dots n} = 1$ ,

$$g^{ab} = \delta^{ak} \delta^{bl} g_{kl}, \quad J^{ab} = \delta^{ak} \delta^{bl} J_{kl}, \quad P^a = \delta^{ak} P_k.$$

Полагаем

$$\begin{aligned} W_{a_1 \dots a_{n-1}} &= \varepsilon_{a_1 \dots a_n} P^{a_n}, \\ W_{a_1 \dots a_r} &= W_{a_1 \dots a_r a_{r+1} a_{r+2}} J^{a_{r+1} a_{r+2}} \quad (r \leq n-3), \\ W &= W_{a_1 a_2} J^{a_1 a_2} \quad \text{при нечетном } n. \end{aligned}$$

На основании (1) можно установить справедливость соотношений:

$$\begin{aligned} [J_{ab}, W_{d_1 \dots d_t}] &= g_{aa} g_{bb} (g_{bd_1} W_{ad_2 \dots d_t} + \dots + \\ &\quad + g_{bd_t} W_{d_1 d_2 \dots a} - g_{ad_1} W_{bd_2 \dots d_t} - \dots - g_{ad_t} W_{d_1 d_2 \dots b}), \\ [P_a, W_{d_1 \dots d_t}] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть  $n = p + q$ ,  $n \geq 3$ ,  $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Элементы

$$T_0 = g^{ab} P_a P_b,$$

$$T_k = \frac{1}{(n-2k-1)! 2^{2k} (k!)^2} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_{n-2k-1} b_{n-2k-1}} W_{a_1 \dots a_{n-2k-1}} W_{b_1 \dots b_{n-2k-1}}$$

при  $k < m$  или  $k = m$  и четном  $n$ ,

$$T_m = \frac{1}{2^m m!} W \quad \text{при нечетном } n$$

образуют максимальную систему алгебраически независимых операторов Казимира алгебры  $AP(p, q)$ .

Инвариантность записанных операторов вытекает из соотношений (2). Их независимость следует из независимости симметризованных операторов Казимира группы  $P(p, q)$ , построенных по аналогичному правилу.

В качестве примера выпишем основные операторы Казимира для группы  $P(1, 6)$ :

$$\begin{aligned} &P_1^2 - P_2^2 - \dots - P_7^2; \\ &\frac{1}{96} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_4 b_4} \varepsilon_{a_1 \dots a_7} \varepsilon_{b_1 \dots b_7} J^{a_5 a_6} P^{a_7} J^{b_5 b_6} P^{b_7}; \\ &\frac{1}{128} g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \varepsilon_{a_1 \dots a_7} \varepsilon_{b_1 \dots b_7} J^{a_3 a_4} J^{a_5 a_6} P^{a_7} J : b_3 b_4 J^{b_5 b_6} P^{b_7}; \\ &\frac{1}{48} \varepsilon_{a_1 \dots a_7} J^{a_1 a_2} J^{a_3 a_4} J^{a_5 a_6} P^{a_7}. \end{aligned}$$

### 3. Операторы Казимира расширенной группы Галилея

Алгебра Ли  $\tilde{AG}(n)$  расширенной группы Галилея  $\tilde{G}(n)$   $n$ -мерного евклидова пространства определяется как вещественная алгебра с такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \delta_{ad} J_{bc} + \delta_{bc} J_{ad} - \delta_{ac} J_{bd} - \delta_{bd} J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b, \\ [P_a, P_b] &= 0, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab} G_c - \delta_{ac} G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \\ [P_0, J_{bc}] &= [P_0, P_a] = 0, \quad [G_a, P_0] = P_a, \quad [G_a, P_b] = \delta_{ab} M, \\ [M, J_{ab}] &= [M, P_0] = [M, P_a] = [M, G_a] = 0 \quad (a, b, c, d = 1, 2, \dots, n; n \geq 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $\tilde{U} = U(\tilde{AG}(n))$  — универсальная обертывающая алгебра алгебры  $\tilde{AG}(n)$ ,  $Z\tilde{U}$  — центр  $\tilde{U}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $m = \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_m$  — система однородных алгебраически независимых инвариантных операторов алгебры  $U(AO(n, R))$ ,  $\Gamma_{ab} = MJ_{ab} - (P_a G_b - P_b G_a)$ ,  $\tilde{C}_j$  — элемент  $\tilde{U}$ , получаемый из  $C_j$  в результате замены  $J_{ab}$  на  $\Gamma_{ab}$ . Максимальную систему алгебраически независимых элементов  $Z\tilde{U}$  образуют элементы:

$$M, \tilde{C}_0 = 2MP_0 - \delta^{ab} P_a P_b, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m.$$

**Доказательство.** Из коммутационных соотношений (3) вытекает, что

$$\begin{aligned} [P_0, \Gamma_{bc}] &= [P_a, \Gamma_{bc}] = [G_a, \Gamma_{bc}] = 0, \quad \Gamma_{ba} = -\Gamma_{ab}, \\ [J_{ab}, \Gamma_{cd}] &= \delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{bc}\Gamma_{ad} - \delta_{ac}\Gamma_{bd} - \delta_{bd}\Gamma_{ac}, \\ [G_{ab}, \Gamma_{cd}] &= M(\delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{bc}\Gamma_{ad} - \delta_{ac}\Gamma_{bd} - \delta_{bd}\Gamma_{ac}). \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть

$$\hat{P}_a = M^{-1}P_a, \quad \hat{J}_{ab} = M^{-1}\Gamma_{ab} = J_{ab} - (\hat{P}_a G_b - \hat{P}_b G_a),$$

$Q$  —  $R$ -подалгебра обертывающего тела алгебры  $A\tilde{G}(n)$ , порожденная 1,  $P_0$ ,  $\hat{P}_a$ ,  $G_b$ ,  $M$ ,  $\hat{J}_{ab}$  ( $R$  — поле вещественных чисел). Так как в силу (4) элементы  $\hat{J}_{ab}$  ( $a, b = 1, \dots, n$ ) порождают  $AO(n, R)$  и

$$[G_a, \hat{P}_b] = \delta_{ab}, \quad [\hat{P}_a, \hat{J}_{cd}] = 0, \quad [G_a, \hat{J}_{cd}] = 0, \quad [G_a, P_0] = M\hat{P}_a,$$

то

$$Q \cong Q_1 \otimes_R Q_2 \otimes_R Q_3 \otimes_R U(AO(n, R)), \quad (5)$$

где  $Q_1$  —  $R$ -алгебра, порожденная 1 и  $M$ ,  $Q_2$  —  $R$ -алгебра, порожденная 1 и  $2P_0 - M\hat{P}_a\hat{P}^a$ , а  $Q_3$  есть  $R$ -алгебра, порожденная 1,  $\hat{P}_a$ ,  $G_b$  ( $a, b = 1, \dots, n$ ).  $Q_3$  является алгеброй Вейля, поэтому ее центр совпадает с полем  $R$ . На основании (5) и результатов о центре  $U(AO(n, R))$  заключаем, что степень трансцендентности центра алгебры  $Q$  равна  $m+2$  и что элементы  $M$ ,  $2P_0 - M\hat{P}_a\hat{P}^a$ ,  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) являются алгебраически независимыми.

Поскольку  $\tilde{U} \subset Q$  и  $M \in ZQ$ , то  $Z\tilde{U} \subset ZQ$  ( $ZQ$  — центр  $Q$ ). Отсюда вытекает, что в  $Z\tilde{U}$  существует не более  $m+2$  алгебраически независимых элементов. В то же время

$$M, M(2P_0 - M\hat{P}_a\hat{P}^a), M^{t_j}C_j,$$

где  $t_j$  — степень однородности  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), принадлежит  $Z\tilde{U}$  и алгебраически независимы. Теорема доказана.

#### 4. Операторы Казимира группы Галилея

Коммутационные соотношения для базисных элементов алгебры Галилея  $AG(n)$  получаем из (3), полагая  $M = 0$ . Сохраним те же обозначения для базисных элементов.

Пусть  $\{C_{ij}^k \mid i, j, k = 1, \dots, s\}$  — структурные константы алгебры Ли  $L$ ,

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^s C_{ij}^k Z_k, \quad B = (B_{ij}), \quad r(L) = \sup_{(Z_1, \dots, Z_s)} \text{rank } B.$$

На основании [1] и результатов о числе фундаментальных решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных получаем, что степень трансцендентности центра обертывающей алгебры алгебры  $L$  не превышает  $\dim L - r(L)$ .

**Лемма.**  $r(AG(n)) \geq \frac{1}{2}(n^2 + 3n) - [n/2]$ .



составляют систему образующих  $ZU(A\tilde{G}(n))$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\langle M \rangle$  двусторонний идеал алгебры, порожденный  $M$ . Известно, что

$$U(A\tilde{G}(n))/\langle M \rangle \cong U(AG(n)).$$

Отождествляя соответствующие элементы, можно считать, что базис  $AG(n)$  состоит из таких элементов:  $\bar{P}_a = P_a + \langle M \rangle$ ,  $\bar{G}_b = G_b + \langle M \rangle$ ,  $\bar{P}_0 = P_0 + \langle M \rangle$ ,  $\bar{J}_{ab} = J_{ab} + \langle M \rangle$ . Пусть  $\bar{C}_j$  — элемент  $U(AG(n))$ , получаемый из  $C_j$  при замене  $J_{ab}$  на  $K_{ab} = \bar{P}_a \bar{G}_b - \bar{P}_b \bar{G}_a$ . Тогда  $\bar{C}_j = \tilde{C}_j + \langle M \rangle$ , а значит,

$$\delta^{ab} \bar{P}_a \bar{P}_b, \bar{C}_a, \dots, \bar{C}_m \tag{7}$$

принадлежат центру алгебры  $U(AG(n))$ . Так как построенные в теореме 3 операторы  $T_1, T_2, \dots, T_m$  можно получить из операторов Казимира алгебры  $AO(n, R)$  при замене  $J_{ab}$  на  $K_{ab}$ , то  $T_j = f_j(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m)$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Отсюда в силу алгебраической независимости  $T_0, T_1, \dots, T_m$  вытекает, что операторы (7) являются алгебраически независимыми.

На основании рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2, каждый элемент центра алгебры  $U(A\tilde{G}(n))$  можно записать в виде  $M^{-k} f(M, \tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m)$ . Если бы элементы (6) не порождали  $ZU(A\tilde{G}(n))$ , то для некоторого ненулевого многочлена  $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_m)$  с вещественными коэффициентами

$$M^{-1} \cdot \varphi(\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m) \in ZU(A\tilde{G}(n)).$$

Отсюда следует, что  $\varphi(\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m) \in \langle M \rangle$ , а значит

$$\varphi(\delta^{ab} P_a P_b, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m) = 0.$$

Полученное противоречие и доказывает предложение 1.

**Предложение 2.** Пусть  $m = [n/2]$ ,  $n \geq 3$ ,  $\bar{C}$  — элемент  $U(AG(n))$ , получаемый из  $C \in U(AO(n, R))$  при замене  $J_{ab}$  на  $P_a G_b - P_b G_a$ . Для любой системы  $C_1, \dots, C_m$  алгебраически независимых однородных операторов Казимира группы  $O(n, R)$  элементы  $\delta^{ab} P_a P_b, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m$  составляют максимальную систему алгебраически независимых операторов Казимира группы  $G(n)$ .

Выпишем основные операторы Казимира для групп  $\tilde{G}(n)$  и  $G(n)$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ .

$$\tilde{G}(3) : M, 2MP_0 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2, \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2;$$

$$\tilde{G}(4) : M, 2MP_0 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 - P_4^2, \sum_{a_1, a_2} \Gamma_{a_1 a_2} \Gamma_{a_2 a_1}, \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} \Gamma^{a_1 a_2} \Gamma^{a_3 a_4};$$

$$\tilde{G}(5) : M, 2MP_0 - P_1^2 - \dots - P_5^2, \sum_{a_1, a_2} \Gamma_{a_1 a_2} \Gamma_{a_2 a_1},$$

$$\sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} \Gamma_{a_1 a_2} \Gamma_{a_2 a_3} \Gamma_{a_3 a_4} \Gamma_{a_4 a_1};$$

$$\tilde{G}(6) : M, 2MP_0 - P_1^2 - \dots - P_6^2, \sum_{a_1, a_2} \Gamma_{a_1 a_2} \Gamma_{a_2 a_1},$$

$$\sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} \Gamma_{a_1 a_2} \Gamma_{a_2 a_3} \Gamma_{a_3 a_4} \Gamma_{a_4 a_1}, \varepsilon_{a_1 \dots a_6} \Gamma^{a_1 a_2} \Gamma^{a_3 a_4} \Gamma^{a_5 a_6};$$

$$G(3) : P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, K_{12}^2 + K_{13}^2 + K_{23}^2;$$

$$G(4) : P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2, \sum_{a_1, a_2} K_{a_1 a_2} K_{a_2 a_1}, \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} K^{a_1 a_2} K^{a_3 a_4};$$

$$G(5) : P_1^2 + \dots + P_5^2, \sum_{a_1, a_2} K_{a_1 a_2} K_{a_2 a_1}, \sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} K_{a_1 a_2} K_{a_2 a_3} K_{a_3 a_4} K_{a_4 a_1};$$

$$G(6) : P_1^2 + \dots + P_6^2, \sum_{a_1, a_2} K_{a_1 a_2} K_{a_2 a_1}, \sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} K_{a_1 a_2} K_{a_2 a_3} K_{a_3 a_4} K_{a_4 a_1},$$

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_6} K^{a_1 a_2} K^{a_3 a_4} K^{a_5 a_6}.$$

1. Гельфанд И.М., *Мат. сб.*, 1950, **26**, 103.
2. Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, М., Мир, 1980, Т. 1, 456 с., Т. 2. 396 с.
3. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 321.
4. Фушич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360.
5. Кадышевский В.Г., Тодоров И.Т., *ЯФ*, 1966, **3**, 135.
6. Mirman R., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 39.
7. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 977.
8. Burdel G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, 1758.
9. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф., *Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия*, 1980, **21**, № 2, 3; **21**, № 2, 7; **21**, № 4, 23.
10. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф., Чайчиан М., *Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия*, 1980, **21**, № 4, 27; **21**, № 5, 20.
11. Perroud M., *J. Math. Phys.*, 1983, **24**, 1381.



# Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1, n)$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

В работе найдены в явном виде полные системы инвариантов одномерных подалгебр алгебры Ли  $AP(1, n)$  группы  $P(1, n)$ . Получен ряд утверждений, позволяющий дать конструктивное описание полных систем инвариантов всех абелевых подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  разрешимых подалгебр алгебры  $AO(1, n)$ . Проблема описания инвариантов произвольных неоднородных подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  сведена к аналогичной проблеме для подалгебр, имеющих более простую структуру.

## Введение

Обобщенная группа Пуанкаре  $P(1, n)$  — это мультипликативная группа таких неоднородных преобразований  $x_\mu \rightarrow a'_\mu x_\nu + b_\mu$  пространства Минковского  $M(1, n) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}$ , для которых соответствующие однородные преобразования  $x_\mu \rightarrow a'_\mu x_\nu$  сохраняют его метрику  $x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$ . В данной работе найдены в явном виде инварианты некоторых классов подгрупп группы  $P(1, n)$ . Поскольку вместо группы Ли  $G \subset P(1, n)$  можно рассматривать соответствующую ей алгебру Ли  $AG$ , а алгебру  $AG$  можно задать как алгебру дифференциальных операторов первого порядка, то исследуемая задача сводится к нахождению решений определенных систем линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Множество  $\{f_1, \dots, f_s\}$  функционально независимых решений такой системы, обладающее тем свойством, что любое ее решение имеет вид  $\Psi(f_1, \dots, f_s)$ , будем называть полной системой инвариантов данной алгебры Ли (сокращенно ПСИ), а инварианты  $f_1, \dots, f_s$  — основными. Из теории систем дифференциальных уравнений в частных производных [1] хорошо известно, что если  $r$  — ранг системы уравнений, соответствующей алгебре  $L \subset AP(1, n)$ , то  $s = n + 1 - r$ . Число  $s$  назовем коразмерностью алгебры  $L$  и обозначим  $\text{codim } L$ .

ПСИ подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  используются для нахождения точных решений уравнений, инвариантных относительно  $P(1, n)$ . Таким уравнением является, например, уравнение

$$\Phi(\square u, (\nabla u)^2, u) = 0, \quad (1)$$

где

$$\square u = u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} - \dots - u_{x_n x_n}, \quad (\nabla u)^2 = (u_{x_0})^2 - (u_{x_1})^2 - \dots - (u_{x_n})^2,$$

а  $\Phi$  — достаточно гладкая функция. Отметим, что частными случаями уравнения (1) суть нелинейные уравнения Даламбера  $\square u = F(u, (\nabla u)^2)$ ,  $\square u = \sin u$  и Гамильтона  $(\nabla u)^2 + V(u) = E$ . Широкие классы точных решений нелинейных дифференциальных уравнений эффективно находятся при помощи предложенного в [2] анзаца  $u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$ , где  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\omega(x) = \{\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)\}$  — функционально независимые инварианты одномерной подалгебры алгебры симметрии данного уравнения (см. [3–7]). Если  $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$  — полная система

инвариантов алгебры  $L \subset AP(1, n)$ , то анзац  $u(x) = \varphi(\omega_1(x), \dots, \omega_k(x))$  редуцирует уравнение (1) к уравнению от  $k$  переменных  $\omega_1, \dots, \omega_k$  [8].

Инварианты подгрупп расширенных групп Евклида, Галилея для трехмерных пространств найдены в [9], а инварианты подгрупп группы  $P(1, 3)$  — в [8].

В первом параграфе нашей работы находятся в явном виде ПСИ тех абелевых подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  ( $n \geq 2$ ), из которых путем использования подпрямых сумм можно построить любую абелеву подалгебру алгебры  $AP(1, n)$ . Доказанные предложения конструктивно описывают ПСИ всех абелевых подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  и позволяют явно перечислить основные инварианты для каждой одномерной подалгебры алгебры  $AP(1, n)$ .

Во втором параграфе описываются ПСИ разрешимых подалгебр алгебры  $AP(1, n)$ . Выписаны в явном виде ПСИ разрешимых подалгебр алгебр  $AO(1, 5)$  и  $AO(1, 6)$ .

Третий параграф работы посвящен редукционным теоремам, сводящим проблему нахождения ПСИ подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  к этой же проблеме для более простых алгебр. Из доказанных нами теорем вытекает основной результат работы [8] о подалгебрах коразмерности 1 алгебры  $AP(1, n)$ .

### § 1. Абелевы подалгебры и их инварианты

Алгебра Пуанкаре  $AP(1, n)$  определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \\ [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] &= g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0, \end{aligned}$$

где  $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$ ,  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n$ ).

Алгебра  $AP(1, n)$  изоморфна алгебре дифференциальных операторов, действующих в пространстве скалярных функций  $u(x)$ , где  $x \in M(1, n)$ :

$$\begin{aligned} J_{\alpha\alpha} &= x_0\partial_\alpha + x_\alpha\partial_0, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad P_\mu = \partial_\mu \\ (\partial_\mu &= \partial/\partial x_\mu; \quad a, b = 1, \dots, n; \quad \mu = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Пусть  $\pi$  — проектирование  $AP(1, n)$  на  $AO(1, n)$ ,  $\hat{F}$  — подалгебра  $AP(1, n)$ . Если  $\pi(\hat{F})$  не имеет в пространстве  $M(1, n)$  инвариантных изотропных подпространств, то структура алгебры  $\hat{F}$  аналогична структуре подалгебр евклидовой алгебры [10]. Описание таких алгебр в определенном смысле сводится к описанию неприводимых подалгебр алгебр  $AO(1, k)$  и  $AO(k)$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ). Остальные случаи сводятся к случаям подалгебр алгебры  $\widehat{AG}(n-1) \ni \langle J_{0n} \rangle$ , где  $\widehat{AG}(n-1)$  — расширенная алгебра Галилея с базисом  $M = P_0 + P_n$ ;  $G_a = J_{0a} - J_{an}$  ( $a = 1, \dots, n-1$ );  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ ;  $J_{ab}$  ( $a, b = 1, \dots, n-1$ ). Отметим, что

$$\begin{aligned} [G_a, J_{0n}] &= G_a, \quad [M, J_{0n}] = M, [P_0 - P_n, J_{0n}] = -(P_0 - P_n), \quad [P_0, G_a] = P_a, \\ [P_a, G_a] &= M, \quad [G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad G_a = (x_0 - x_n)\partial_a + x_a(\partial_0 + \partial_n). \end{aligned}$$

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$AO(s \uparrow t) = \langle J_{ab} \mid a, b = s, s+1, \dots, t \rangle;$$

$\langle X_1, \dots, X_s \rangle$  — алгебра Ли или векторное пространство над полем вещественных чисел  $R$  с образующими  $X_1, \dots, X_s$ ;

$$V(k, l) = \langle G_k, \dots, G_l \rangle, \quad (k \leq l), \quad V(k) = V(k, k);$$

$$W(\alpha, \beta) = \langle P_\alpha, \dots, P_\beta \rangle \quad (\alpha \leq \beta), \quad W(\alpha) = W(\alpha, \alpha);$$

$$\Delta(r, t) = \Delta_0(r, t) + \langle M \rangle = \langle G_r + \alpha_r P_r, \dots, G_t + \alpha_t P_t, M \rangle,$$

где  $r \leq t$ ,  $\alpha_r \leq \dots \leq \alpha_t$ ,  $\alpha_r = 0$  и  $\alpha_t = 1$  при  $\alpha_t \neq 0$ ;  $AH(0) = O$ ,  $AH(2d) = \langle J_{12}, \dots, J_{2d-1, 2d} \rangle$  — подалгебра Картана алгебры  $AO(2d)$ ;

$$\mathfrak{M}(r, t) = \overline{\mathfrak{M}}(r, t) \oplus \langle P_0 \rangle = \langle M, P_r, \dots, P_t, G_r, \dots, G_t \rangle \oplus \langle P_0 \rangle.$$

Через  $\pi_1, \pi_2$  обозначим проектирования алгебры  $A\tilde{G}(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  соответственно на  $V(1, n-1)$ ,  $W(0, n)$ . Мы будем такие использовать проектирования алгебры  $A\tilde{G}(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  на  $\langle P_0 \rangle$ ,  $\langle M \rangle$ ,  $\langle J_{0n} \rangle$ .

В [10] доказано, что максимальные абелевы подалгебры алгебры  $AO(1, n)$  исчерпываются относительно  $O(1, n)$ -сопряженности такими алгебрами:

$$n = 2k + 1,$$

$$AH(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle, \quad V(1, n-1),$$

$$AH(2d) \oplus V(2d+1, n-1) \quad (d = 1, \dots, (n-3)/2);$$

$$n = 2k,$$

$$AH(n), \quad AH(n-2) \oplus \langle J_{0n} \rangle, \quad V(1, n-1),$$

$$AH(2d) \oplus V(2d+1, n-1) \quad (d = 1, \dots, (n-2)/2).$$

**Теорема 1.1.** Пусть  $0 \leq m \leq [n-1/2]$ ,  $L$  — ненулевая абелева подалгебра алгебры  $A\tilde{G}(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$ . Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  отлична от нуля, то  $L$   $P(1, n)$ -сопряжена подпрямой сумме алгебр  $L_1, L_2, \langle J_{0n} \rangle$ , где  $L_1 \subset AH(2m)$ ,  $L_2 = 0$  или  $L_2 = W(2m+1, 2m+s)$ . Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  и на  $\langle P_0 \rangle$  равна 0, то  $L$  сопряжена подпрямой сумме алгебр  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , где  $L_1 \subset AH(2n)$ ,  $L_2 = 0$  или  $L_2 = \Delta_0(2m+1, 2m+s)$ ,  $L_3 = 0$  или  $L_3 = W(2m+s+1, l)$ ,  $L_4 = 0$  или  $L_4 = \langle M \rangle$ . Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  равна 0, а проекция  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  отлична от нуля, то  $L$  сопряжена подпрямой сумме алгебр  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , где  $L_1 \subset AH(2m)$ ,  $L_2 = \langle P_0 + \alpha G_{2m+1} \rangle$  ( $\alpha \in \{0, 1\}$ ),  $L_3 = 0$  или  $L_3 = W(\bar{s}, t)$ ,  $L_4 = 0$  или  $L_4 = \langle M \rangle$  ( $\bar{s} = 2m+1$  при  $\alpha = 0$ ;  $\bar{s} = 2m+2$  при  $\alpha = 1$ ).

**Доказательство.** Пусть  $X_i = G_i + \beta_{2m+1, i} P_{2m+1} + \dots + \beta_{2m+s, i} P_{2m+s}$  ( $i = 2m+1, \dots, 2m+s$ ),  $L = \langle X_{2m+1}, \dots, X_{2m+s} \rangle$ . Очевидно,  $[X_i, X_j] = (\beta_{ji} - \beta_{ij})M$ . Если  $L$  — абелева алгебра, то  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ . Отсюда вытекает, что  $B = (\beta_{ij})$  ( $i, j = 2m+1, \dots, 2m+s$ ) — симметрическая матрица. Поэтому существует такая матрица  $U \in O(s)$ , что  $UBU^{-1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_s]$ . Отсюда следует, что с точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности можно предполагать, что  $X_{2m+j} = G_{2m+j} + \lambda_j P_{2m+j}$  ( $j = 1, \dots, s$ ).  $O(n-1)$ -автоморфизмы позволяют изменять нумерацию генераторов  $G_{2m+1}, \dots, G_{2m+s}$ . Поэтому можно считать, что  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_s$ . Применяя автоморфизм  $\exp(-\lambda_1 P_0)$ , получаем генераторы  $G_{2m+j} + \mu_j P_{2m+j}$  ( $j = 1, \dots, s$ ), где  $\mu_1 = 0, 0 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s$ . Если  $\mu_s > 0$ , то  $\mu_s = \exp \theta$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} \exp(-\theta J_{0n})(G_{2m+j} + \mu_j P_{2m+j}) \exp(\theta J_{0n}) &= \\ &= e^\theta G_{2m+j} + \mu_j P_{2m+j} = e^\theta (G_{2m+j} + \mu_j e^{-\theta} P_{2m+j}). \end{aligned}$$

Поэтому при  $\mu_s > 0$  можно предполагать, что  $\mu_s = 1$ .

Остальные утверждения теоремы вытекают из предложения 1.1 [10] о расщепляемости расширений вполне приводимой алгебры Ли линейных преобразований и теоремы Витта о подпространствах пространства  $M(1, n)$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $\alpha_r \leq \alpha_{r+1} \leq \dots \leq \alpha_t$ ,  $\alpha_r = 0$  и  $\alpha_t = 1$  при  $\alpha_t \neq 1$ . Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $AP(1, n)$  исчерпываются относительно  $P(1, n)$ -сопряженности такими алгебрами:

$$\begin{aligned} & W(0, n); \Delta(1, n-1); \Delta(1, s) \oplus W(s+1, n-1) \quad (s = 1, \dots, n-2); \\ & \langle G_1 + P_0, M \rangle \oplus W(2, n-1); W(1, n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle; \\ & AH(n-2) \oplus \langle G_{n-1} + P_0, M \rangle \quad (n \equiv 0 \pmod{2}); \\ & AH(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle \quad (n \equiv 1 \pmod{2}); \\ & \langle P_0 \rangle \oplus AH(n) \quad (n \equiv 0 \pmod{2}); \\ & \langle P_0 \rangle \oplus AH(2d) \oplus W(2d+1, n) \quad (d = 1, \dots, [n-1/2]); \\ & AH(2d) \oplus W(2d+1, n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle \quad (d = 1, \dots, [n-2/2]); \\ & AH(2d) \oplus \Delta(2d+1, n-1) \quad (d = 1, \dots, [n-2/2]); \\ & AH(2d) \oplus \Delta(2d+1, s) \oplus W(s+1, n-1) \quad (d = 1, \dots, [n-3/2]); \\ & AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1} + P_0, M \rangle \oplus W(2d+2, n-1) \quad (d = 1, \dots, [n-3/2]). \end{aligned}$$

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

**Следствие 2.** Пусть  $n \geq 3$ ;  $\alpha, \beta > 0$ ;  $r = 2, \dots, [n-2/2]$  при  $n \geq 6$ ;  $s = 2, \dots, [n-1/2]$  при  $n \geq 5$ ;  $t = 2, \dots, [n/2]$  при  $n \geq 4$ ;  $X_t = J_{12} + \alpha_1 J_{34} + \dots + \alpha_{t-1} J_{2t-1, 2t}$ , где  $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{t-1} \leq 1$ . С точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности одномерные подалгебры  $AP(1, n)$  исчерпываются такими алгебрами:

$$\begin{aligned} & L_1 = \langle J_{12} \rangle; L_2^s = \langle X_t \rangle; L_3 = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle; L_4^t = \langle X_t + \alpha P_0 \rangle; L_5 = \langle J_{12} + M \rangle; \\ & L_6^s = \langle X_s + M \rangle; L_7 = \langle J_{12} + \alpha J_{0n} \rangle; L_8^s = \langle X_s + \alpha J_{0n} \rangle; L_9 = \langle J_{12} + \alpha P_3 \rangle; \\ & L_{10}^s = \langle X_s + \alpha P_{2s+1} \rangle; L_{11} = \langle J_{12} + \alpha P_3 + \beta J_{0n} \rangle \quad (n \geq 4); \\ & L_{12}^r = \langle X_r + \alpha P_{2r+1} + \beta J_{0n} \rangle; L_{13} = \langle J_{12} + G_3 \rangle \quad (n \geq 4); L_{14} = \langle X_r + G_{2r+1} \rangle; \\ & L_{15} = \langle J_{12} + G_3 + \alpha P_4 \rangle \quad (n \geq 5); L_{16}^r = \langle X_r + G_{2r+1} + \beta P_{2r+2} \rangle \quad (r = [n-3/2]); \\ & L_{17} = \langle P_0 \rangle; L_{18} = \langle M \rangle; L_{19} = \langle P_1 \rangle; L_{20} = \langle G_1 \rangle; L_{21} = \langle G_1 + P_2 \rangle; L_{22} = \langle J_{0n} \rangle; \\ & L_{23} = \langle J_{0n} + \alpha P_1 \rangle; L_{24} = \langle G_1 + P_0 \rangle; L_{25} = \langle J_{12} + \alpha(G_3 + P_0) \rangle \quad (n \geq 4); \\ & R_{26}^r = \langle X_r + \alpha(G_{2r+1} + P_0) \rangle. \end{aligned}$$

Описание ПСИ абелевых подалгебр алгебры  $AP(1, n)$  содержится в доказываемых ниже предложениях.

Пусть

$$\begin{aligned} \mu(x; k_1, \dots, k_s) &= \left( \sum_{i=1}^s g_{k_i k_i} x_{k_i}^2 \right)^{1/2}, \quad h(x; k_1, \dots, k_s) = \left( \sum_{i=1}^s x_{k_i}^2 \right)^{1/2}, \\ \varphi(k, x) &= (x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2)^{1/2}, \quad \psi(k, x) = \arcsin \frac{x_{2k}}{(x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

**Предложение 1.1.** Пусть  $X_a = J_{2a-1, 2a} + \sum_{j=r+1}^m \alpha_{aj} J_{2j-1, 2j}$ ; ( $a = 1, \dots, r$ ;  $m \leq [n/2]$ ). ПСИ алгебры  $L = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$  составляют функции:

$$\begin{aligned} & \varphi(d, x) \quad (d = 1, \dots, m), \quad x_0, x_{2m+1}, \dots, x_n, \\ & \sum_{b=1}^r \alpha_{bq} \psi(b, x) - \psi(q, x) \quad (q = r+1, \dots, m). \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Доказательство.** Непосредственными вычислениями получаем, что

$$J_{2d-1,2d}(\varphi(b, x)) = 0, \quad J_{2d-1,2d}(\psi(c, x)) = 0 \text{ при } c \neq d, \quad J_{2d-1,2d}(\psi(d, x)) = -1.$$

Значит, функции (1.1) суть инварианты алгебры  $L$ . Очевидно,  $\text{codim } L = n + 1 - r$ . Число функций (1.1) также равно  $n + 1 - r$ . Остается доказать их функциональную независимость.

Пусть  $\Gamma(k)$  — функциональная матрица, соответствующая

$$\varphi(t, x) \quad (t = 1, \dots, k), \quad \sum_{b=1}^r \alpha_{bl} \psi(b, x) - \psi(l, x) \quad (l = r + 1, \dots, k).$$

Легко видеть, что с точностью до нумерации строк и столбцов

$$\Gamma(k+1) = \begin{pmatrix} \Gamma(k) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_{2k+1}}{(x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2)^{1/2}} & \frac{x_{2k+2}}{(x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2)^{1/2}} \\ * & \frac{x_{2k+2}}{x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2} & -\frac{x_{2k+1}}{x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} x_{2k+1} & x_{2k+2} \\ -x_{2k+2} & x_{2k+1} \end{vmatrix} = x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2,$$

то  $\text{rang } \Gamma(k+1) = \text{rang } \Gamma(k) + 2$ . Очевидно,  $\text{rang } \Gamma(r+1) = r + 2$ . Следовательно,  $\text{rang } \Gamma(m) = 2m - r$ . Предложение доказано.

**Предложение 1.2.** ПСИ алгебры

$$L = \langle G_1, G_2 + \alpha_2 P_2, \dots, G_t + \alpha_t P_t \rangle$$

составляют функции

$$x_0 - x_n, \quad x_{t+1}, \dots, x_{n-1}, \quad -x_0^2 + x_1^2 + \sum_{i=2}^t \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \alpha_i} x_i^2 + x_n^2. \quad (1.2)$$

**Доказательство.** Очевидно,  $G_a(x_0 - x_n) = 0$ ,  $(G_a + \alpha_a P_a)(x_n^2 - x_0^2) = 2x_a(x_n - x_0)$ . Отсюда вытекает, что функция (1.2) суть инварианты алгебры  $L$ . Очевидно, эти инварианты являются функционально независимыми. Остается установить, что их число совпадает с  $\text{codim } L$ . Составляем матрицу  $\Gamma$  из функций при  $\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_t, \partial_n$  в генераторах алгебры  $L$ :

$$\left( \begin{array}{c|cccc} x_1 & x_0 - x_n & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 - x_n + \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_t & 0 & \cdot & \cdots & x_0 - x_n + \alpha_t \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_t \end{array}.$$

Обведенный минор порядка  $t$  равен

$$(x_0 - x_n)(x_0 - x_n + \alpha_2) \cdots (x_0 - x_n + \alpha_t).$$

Значит,  $\text{rang } \Gamma = t$ , а потому  $\text{codim } L = n + 1 - t$ . Предложение доказано.

**Предложение 1.3.** Пусть

$$X_i = G_i + \alpha_i P_i + \sum_{j=m+1}^s \beta_{ij} P_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

$L = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$ . ПСИ алгебры  $L$  составляют функции

$$x_0 - x_n, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}, -x_0^2 + \sum_{i=1}^m \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \alpha_i} x_i^2 + x_n^2,$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\beta_{ij} x_i}{x_0 - x_n + \alpha_i} - x_j \quad (j = m+1, \dots, s).$$

**Предложение 1.4.** Пусть

$$X_a = J_{2a-1, 2a} + \sum_{j=2r+1}^s \alpha_{aj} (G_j + \alpha_j P_j) \quad (a = 1, \dots, r).$$

ПСИ алгебры  $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r), \quad x_0 - x_n, \quad x_{s+1}, \dots, x_{n-1},$$

$$\sum_{a=1}^r \alpha_{aq} (x_0 - x_n + \alpha_q) \psi(a, x) + x_q \quad (q = 2r+1, \dots, s),$$

$$-x_0^2 + \sum_{q=2r+1}^s \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \alpha_q} x_q^2 + x_n^2.$$

**Предложение 1.5.** Пусть

$$X_a = J_{2a-1, 2a} + \sum_{j=2r+s+1}^t \alpha_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, r),$$

$$Y_{b-2r} = G_b + \gamma_b P_b + \sum_{j=2r+s+1}^t \delta_{bj} P_j \quad (b = 2r+1, \dots, 2r+s).$$

ПСИ алгебры  $\langle X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s \rangle$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r); \quad x_0 - x_n, \quad x_{t+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$-x_0^2 + \sum_{b=2r+1}^{2r+s} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \gamma_b} + x_n^2;$$

$$\sum_{a=1}^r \alpha_{aj} \psi(a, x) - \sum_{b=2r+1}^{2r+s} \delta_{bj} \frac{x_b}{x_0 - x_n + \gamma_b} + x_j \quad (j = 2r+s+1, \dots, t).$$

**Предложение 1.6.** Пусть

$$X_a = J_{2a-1, 2a} + \alpha_a J_{0n} + \sum_{j=2r+1}^s \beta_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, r).$$

ПСИ алгебры  $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r); \quad \mu(x; 0, n); \quad x_{s+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$\sum_{a=1}^r \alpha_a \psi(a, x) - \ln(x_0 - x_n); \quad x_j + \sum_{a=1}^r \beta_{aj} \psi(a, x) \quad (j = 2r + 1, \dots, s).$$

**Предложение 1.7.** Пусть

$$X_a = J_{2a-1, 2a} + \sum_{j=2r+1}^s \alpha_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, r), \quad X = J_{0n} + \sum_{j=2r+1}^s \beta_j P_j.$$

ПСИ алгебры  $\langle X_1, \dots, X_r, X \rangle$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r), \quad \mu(x; 0, n), \quad x_{s+1}, \dots, x_{n-1},$$

$$\sum_{a=1}^r \alpha_{aj} \psi(a, x) + \beta_j \ln(x_0 - x_n) + x_j \quad (j = 2r + 1, \dots, s).$$

**Предложение 1.8.** Полную систему инвариантов алгебры  $\langle J_{0n} + \alpha P_1, P_2, \dots, P_k \rangle$  составляют функции

$$\mu(x; 0, n), \quad \alpha \ln(x_0 - x_n) + x_1, \quad x_{k+1}, \dots, x_{n-1}.$$

**Предложение 1.9.** Пусть  $X_a = J_{2a-1, 2a} \quad (a = 1, \dots, r)$ ,

$$L = \langle M, X_1 + \alpha_1(P_0 + G_{2r+1}), \dots, X_r + \alpha_r(P_0 + G_{2r+1}) \rangle.$$

ПСИ алгебры  $L$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r), \quad \sum_{a=1}^r \alpha_a \psi(a, x) + x_0 - x_n,$$

$$(x_0 - x_n)^2 - 2x_{2r+1}, \quad x_{2r+1}, \dots, x_{n-1};$$

ПСИ алгебры  $L/\langle M \rangle$  составляют основные инварианты алгебры  $L$  и

$$(x_0 - x_n)^3 - 3(x_0 - x_n)x_{2r+1} + 3x_n.$$

**Предложение 1.10.** Пусть

$$L = \langle M, X_1 + \alpha_1 P_0, \dots, X_r + \alpha_r P_0 \rangle, \quad X_a = J_{2a-1, 2a} \quad (a = 1, \dots, r).$$

ПСИ алгебры  $L$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r), \quad \sum_{a=1}^r \alpha_a \psi(a, x) + x_0 - x_n, \quad x_{2r+1}, \dots, x_{n-1};$$

ПСИ алгебры  $L/\langle M \rangle$  составляют функции

$$\varphi(a, x) \quad (a = 1, \dots, r), \quad \sum_{a=1}^r \alpha_a \psi(a, x) + x_0, \quad x_{2r+1}, \dots, x_{n-1}, x_n.$$

**Теорема 1.2.** Пусть  $L_j$  ( $j = 1, \dots, 26$ ) — система представителей классов сопряженных одномерных подалгебр алгебры  $AP(1, n)$ , выписанная в следствии 2 из теоремы 1.1. Полную систему инвариантов алгебры  $L_j$  составляют такие функции:

$$L_1: \varphi(1, x), x_0, x_3, \dots, x_n;$$

$$L_2^t: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, t), \ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, t-1), \\ x_0, x_{2t+1}, \dots, x_n;$$

$$L_3: \varphi(1, x), \alpha \psi(1, x) + x_0, x_3, \dots, x_n;$$

$$L_4^t: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, t), \ \alpha \psi(1, x) + x_0, x_{2t+1}, \dots, x_n, \\ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, t-1);$$

$$L_5: \varphi(1, x), x_0 - x_n, 2\psi(1, x) + x_0 + x_n, x_3, \dots, x_{n-1};$$

$$L_6^s: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, s), \ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, s-1), \\ x_0 - x_n, 2\psi(1, x) + x_0 + x_n, x_{2s+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$L_7: \varphi(1, x), \mu(x; 0, n), \alpha \psi(1, x) + \ln(x_0 + x_n), x_3, \dots, x_{n-1};$$

$$L_8^s: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, s), \ \mu(x; 0, n), \ \alpha \psi(1, x) + \ln(x_0 + x_n), \\ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, s-1), x_{2s+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$L_9: \varphi(1, x), \alpha \psi(1, x) + x_3, x_0, x_4, \dots, x_n;$$

$$L_{10}^s: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, s), \ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, s-1), \\ \alpha \psi(1, x) + x_{2s+1}, x_0, x_{2s+2}, \dots, x_n;$$

$$L_{11}: \varphi(1, x), \alpha \psi(1, x) + x_3, \mu(x; 0, n), \\ \beta \psi(1, x) + \ln(x_0 + x_n), x_4, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{12}^r: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, r), \ \alpha \psi(1, x) + x_{2r+1}, \mu(x; 0, n), \\ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, r-1), \beta \psi(1, x) + \ln(x_0 + x_n), \\ x_{2r+2}, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{13}: \varphi(1, x), x_0 - x_n, (x_0 - x_n)\psi(1, x) + x_3, \mu(x; 0, 3, n), x_4, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{14}^r: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, r), \ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, r-1), \\ x_0 - x_n, (x_0 - x_n)\psi(1, x) + x_{2r+1}, \mu(x; 0, 2r+1, n), x_{2r+2}, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{15}: \varphi(1, x), x_0 - x_n, (x_0 - x_n)\psi(1, x) + x_3, \mu(x; 0, 3, n), \\ \alpha \psi(1, x) + x_4, x_5, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{16}^r: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, r), \ \alpha_j \psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, r-1), \\ x_0 - x_n, (x_0 - x_n)\psi(1, x) + x_{2r+1}, \mu(x; 0, 2r+1, n), \\ \beta \psi(1, x) + x_{2r+2}, x_{2r+3}, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{17}: x_1, \dots, x_n;$$

$$L_{18}: x_0 - x_n, x_1, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{19}: x_0, x_2, \dots, x_n;$$

$$L_{20}: x_0 - x_n, \mu(x; 0, 1, n), x_2, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{21}: x_0 - x_n, \mu(x; 0, 1, n), (x_0 - x_n)^{-1}x_1 - x_2, x_3, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{22}: \mu(x; 0, n), x_1, x_2, \dots, x_{n-1};$$

$$L_{23}: \mu(x; 0, n), \alpha \ln(x_0 + x_n) - x_1, x_2, \dots, x_{n-1};$$



$$\begin{aligned}
L_{24} &: (x_0 - x_n)^2 - 2x_1, (x_0 - x_n)^3 - 3x_1(x_0 - x_n) + 3x_n, x_2, \dots, x_{n-1}; \\
L_{25} &: \varphi(1, x), (x_0 - x_n)^2 - 2x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, \\
&\quad (x_0 - x_n)^3 - 3x_3(x_0 - x_n) + 3x_n, \alpha\psi(1, x) + x_0 - x_n; \\
L_{26} &: \varphi(a, x) \ (a = 1, \dots, r), \ \alpha_j\psi(1, x) - \psi(j+1, x) \ (j = 1, \dots, r-1), \\
&\quad (x_0 - x_n)^2 - 2x_{2r+1}, (x_0 - x_n)^3 - 3x_{2r+1}(x_0 - x_n) + 3x_n, \\
&\quad \alpha\psi(1, x) + x_0 - x_n, \ x_{2r+2}, \dots, x_{n-1}.
\end{aligned}$$

## § 2. Разрешие подалгебры и их инварианты

Если  $n$  — нечетное число, то  $AO(1, n)$  обладает относительно  $O(1, n)$ -сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй  $V(1, n-1) \oplus (AH(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$ . Если  $n$  — четное число, то  $AO(1, n)$  обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:  $AH(n), V(1, n-1) \oplus (AH(n-2) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$ . Максимальные разрешимые подалгебры алгебры  $AP(1, n)$  имеют вид  $W(0, n) \oplus F$ , где  $F$  — максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $AO(1, n)$ .

В дальнейшем будем предполагать, что каждая рассматриваемая разрешимая подалгебра алгебры  $AO(1, n)$  содержится в одной из выписанных максимальных разрешимых подалгебр.

Пусть  $\hat{F}$  — подалгебра  $AP(1, n)$ . Если  $M \in \hat{F}$ , то для инварианта  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  алгебры  $\hat{F}$  выполняется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Произведем замену переменных:  $x_0 = y_0 + y_n, x_n = y_n, x_i = y_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Очевидно,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_n} &= \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad P_0 = \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad P_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \\
G_i &= y_0 \frac{\partial}{\partial y_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad J_{0n} = -y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + (y_0 + y_n) \frac{\partial}{\partial y_n}.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0,$$

то инварианты  $\hat{F}$  суть функции от  $x_0 - x_n, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Следовательно, при нахождении инвариантов алгебры  $\hat{F}$  можно допускать, что

$$\begin{aligned}
G_a &= y_0 \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad J_{0n} = -y_0 \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad J_{ab} = y_b \frac{\partial}{\partial y_a} - y_a \frac{\partial}{\partial y_b}, \\
P_0 &= \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial y_a} \quad (a, b = 1, \dots, n-1).
\end{aligned}$$

Если  $L = N \oplus K$ , то фактор-алгебру  $L/N$  будем отождествлять с алгеброй  $K$ .

**Предложение 2.1.** Пусть  $1 \leq m \leq [n-1/2]$ ,  $L$  — ненулевая разрешимая подалгебра алгебры  $AO(1, n)$ . Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  отлична от 0, то  $L$   $O(1, n)$ -сопряжена алгебре  $U \oplus F$ , где  $U = 0$  или  $U = V(1, s)$ , а  $F$  — подпрямая сумма  $\langle J_{0n} \rangle$  и подалгебры алгебры  $AH(2m)$ . Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  равна

0, то  $L$   $O(1, n)$ -сопряжена алгебре  $U \bowtie F$ , где  $U = 0$  или  $U = V(1, s)$ , а  $F$  — подалгебра  $AH(2m)$  или  $F$  — подпрямая сумма подалгебры алгебры  $AH(2l)$  и  $V(2l + 1, t)$ , причем  $F \cap V(2l + 1, t) = 0$  ( $l \leq [n - 2/2]$ ,  $t \leq n - 1$ ).

Предложение 2.1 доказывается на основании предложения 1.1 из [10] и теоремы Витта о подпространствах псевдоевклидова пространства.

**Предложение 2.2.** Пусть  $L = U \bowtie F$  — одна из разрешимых подалгебр алгебры  $AO(1, n)$ , описанных в предложении 2.1. Если  $U = V(1, s)$  и проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  совпадает с  $\langle J_{0n} \rangle$ , то ПСИ алгебры  $L$  составляют  $\mu(x; 0, \dots, s, n)$  и основные инварианты абелевой алгебры  $L + AH(s)/U + AH(s)$  от переменных  $x_0 - x_n, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}$ . Если  $U = V(1, s)$  и проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  равна 0, то ПСИ алгебры  $L$  составляют  $x_0 - x_n, \mu(x; 0, 1, \dots, n)$  и основные инварианты абелевой алгебры  $L + AH(s)/U + AH(s)$  от переменных  $x_0 - x_n, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}$ .

**Доказательство.** Ранг алгебры  $V(1, s)$  равен  $s$ . Генераторы этой алгебры действуют нетривиально в пространстве функций от  $s + 2$  переменных  $x_0, x_1, \dots, x_s, x_n$ . Допустим, что  $L$  содержит подпрямую сумму  $\Gamma$  алгебр  $V(1, s)$ ,  $\langle J_{0n} \rangle$  и проекции  $F$  на  $AH(s)$ . Поскольку ранг  $\Gamma$  равен  $s + 1$ , то алгебра  $\Gamma$ , а значит и алгебра  $L$ , имеет только один основной инвариант, зависящий от  $x_0, x_1, \dots, x_s, x_n$ . Им является функция  $\mu(x; 0, 1, \dots, s, n)$ . Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  отлична от 0, но  $L$  не содержит  $\Gamma$  и  $J_{0n} \notin L$ , то согласно предложению 1.6 инвариантом алгебры  $L$  является функция вида

$$\sum_{a=[s+2/2]}^{[n-1/2]} \alpha_a \psi(a, x) - \ln(x_0 - x_n).$$

Если проекция  $L$  на  $\langle J_{0n} \rangle$  равна 0, то  $x_0 - x_n$  также будет инвариантом алгебры  $L$ . Во всех случаях остальные инварианты суть функции от переменных  $x_0 - x_n, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}$ . Предложение доказано.

Пусть

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \langle M \rangle, & \Phi(i) &= \langle M, P_1, \dots, P_i \rangle, \\ \Omega(0) &= \langle M, P_0 \rangle, & \Omega(i) &= \langle M, P_0, P_1, \dots, P_i \rangle, \\ \Lambda_{r+1, k+1}(j) &= \langle P_{r+d} + \lambda_d P_{k+d} \mid d = 1, 2, \dots \rangle, \end{aligned}$$

где  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j$  ( $1 \leq j \leq k - r$ ).

**Предложение 2.3.** Пусть  $L = V(1, k)$ . Подпространства пространства  $W(0, n)$ , инвариантные относительно  $L$  исчерпываются относительно  $O(1, n)$ -сопряженности такими пространствами:

$$\begin{aligned} O, \Phi(i), \Omega(k), W(k + 1, t), \Phi(i) \oplus W(k + 1, t), \Omega(k) \oplus W(k + 1, t), \\ \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j), \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j) \oplus W(k + j + 1, s), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $i = 0, 1, \dots, k$ ;  $t = k + 1, \dots, n - 1$ ;  $r = 0, 1, \dots, k - 1$ ;  $j = 1, \dots, k - r$ ;  $s = k + j + 1, \dots, n - 1$ .

Пусть  $U$  — одно из пространств (2.1),  $\hat{L} = U \bowtie L$ . ПСИ алгебры  $\hat{L}$  составляют такие функции:

$$\begin{aligned} L: x_0 - x_n, \mu(x; 0, 1, \dots, k, n), x_{k+1}, \dots, x_{n-1}; \\ \Phi(i) \bowtie L: x_0 - x_n, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}; \end{aligned}$$

$$\Omega(k) \oplus L : x_{k+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$W(k+1, t) \oplus L : x_0 - x_n, \mu(x; 0, 1, \dots, k, n), x_{t+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$(\Phi(i) \oplus W(k+1, t)) \oplus L : x_0 - x_n, x_{t+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$(\Omega(k) \oplus W(k+1, t)) \oplus L : x_{t+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$(\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j)) \oplus L : x_0 - x_n, x_{k+j+1}, \dots, x_{n-1};$$

$$(\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j) \oplus W(k+j+1, s)) \oplus L : x_0 - x_n, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}.$$

Первая часть предложения 2.3 доказана в [10]. Вторая часть доказывается по той же схеме, что и предложение 1.1.

**Предложение 2.4.** Пусть  $L = V(1, k)$ ,  $K = L \oplus \langle J_{0n} \rangle$ . Подпространства пространства  $W(0, n)$ , инвариантные относительно  $K$ , исчерпываются относительно  $O(1, n)$ -сопряженности подпространствами, инвариантными относительно  $L$ . Пусть  $U$  — пространство вида (2.1),  $\hat{L} = U \oplus L$ ,  $\hat{K} = U \oplus K$ . Если из ПСИ алгебры  $\hat{L}$  исключить инвариант  $x_0 - x_n$  (при его наличии), то получим ПСИ алгебры  $\hat{K}$ .

**Лемма 2.1.** Полную систему инвариантов алгебры

$$\langle P_0 + G_k + \alpha G_{k+1}, G_1, \dots, G_{k-1}, P_1, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}, M \rangle$$

составляют функции

$$(x_0 - x_n)^2 - 2x_k, x_{k+2}, \dots, x_{n-1} \quad (\alpha \geq 0).$$

**Предложение 2.5.** Пусть  $L$  — подалгебра алгебры  $\mathfrak{M}(1, n-1)$ , обладающая ненулевой проекцией на  $\langle P_0 \rangle$ , и  $\pi_1(L) = V(1, a)$ . Если  $P_0 \in L$ , то с точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности, сохраняющей  $\pi_1(L)$ , имеем  $\pi_2(L) = \Omega(b)$ , где  $b \geq a$ . ПСИ алгебры  $L$  составляют  $x_{b+1}, \dots, x_{n-1}$ .

Если  $P_0 \notin L$  и  $a > 1$ , то  $L$  сопряжена алгебра

$$L' = K \oplus \langle P_0 + G_a + \sum_{i=a+1}^t \alpha_i G_i \rangle,$$

где  $K$  (как векторное пространство) — подпрямая сумма  $\Phi(a-1) + \mu W(a) + \gamma W(a+1, s)$  ( $\mu, \gamma \in \{0, 1\}$ ) и  $V(1, a-1)$ , причем  $\Phi(a-1) \subset K$  и  $\sum \alpha_i P_i \in \pi_2(K)$  ( $i = a+1, \dots, t$ ). ПСИ алгебры  $L'$  составляют такие функции:  $x_{s+1}, \dots, x_{n-1}$  при  $\mu = \gamma = 1$ ;  $x_{a+1}, \dots, x_{n-1}$  при  $\mu = 1, \gamma = 0$ ;  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_a, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}$  при  $\mu = 0, \gamma = 1$ ;  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_a, x_{a+1}, \dots, x_{n-1}$  при  $\mu = \gamma = 0$ .

Если  $P_0 \notin L$  и  $a = 1$ , то  $L$  сопряжена одной из алгебр

$$N' = (\Phi(0) + \mu W(1) + \gamma W(2, s)) \oplus \langle P_0 + G_1 + \alpha G_2 \rangle,$$

где  $\mu, \gamma \in \{0, 1\}$ ,  $\alpha P_2 \in N'$ ;

$$N'' = \langle P_0 + G_1 \rangle + \gamma W(2, s), \quad \gamma \in \{0, 1\}.$$

Если в ПСИ алгебры  $L'$  положить  $a = 1$ , то получим ПСИ алгебры  $N'$ . ПСИ алгебры  $N''$  составляют функции  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_1, (x_0 - x_n)^3 - 3(x_0 - x_n)x_1 + 3x_n, x_2, \dots, x_{n-1}$  при  $\gamma = 0$ ;  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_1, (x_0 - x_n)^3 - 3(x_0 - x_n)x_1 + 3x_n, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}$  при  $\gamma = 1$ .

Доказательство предложения 2.5 проводим на основании предложения 3.2 из [10].

Теперь найдем основные инварианты алгебры  $L = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$ , где

$$X_a = G_a + \sum_{j=1}^{m+t} \alpha_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, m).$$

Если  $L$  — коммутативная алгебра, то в силу теоремы 1.1 можно предполагать, что  $\alpha_{aj} = 0$  для всех  $j \in \{1, \dots, m\}$  и не равных  $a$ . В этом случае ПСИ алгебры  $L$  описывает предложение 1.3. Теперь допустим, что  $L$  — некоммутативная алгебра. Тогда  $M \in L$  и  $\text{codim } L = n - m$ . Очевидно, инвариантами  $L$  являются функции  $x_0 - x_n, x_{m+t+1}, \dots, x_{n-1}$ , их число равно  $n - m - t$ . Для нахождения недостающих  $t$  инвариантов от переменных  $x_0 - x_n, x_1, \dots, x_{m+t}$  перейдем в системе дифференциальных уравнений, соответствующей алгебре  $L$ , к новым переменным  $y_0 = x_0 - x_n, y_n = x_n, y_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, m + t$ ). Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+t} \beta_{aj} \frac{\partial f}{\partial y_j} &= 0 \quad (a = 1, \dots, m), \\ \frac{\partial f}{\partial y_n} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $\beta_{aj} = \alpha_{aj}$  при  $a \neq j$ ,  $\beta_{aa} = \alpha_{aa} + y_0$ . Решение системы (2.2) ищем в виде:

$$f = \sum_{j=1}^{m+t} \lambda_j y_j. \tag{2.3}$$

Подставив  $f$  в систему (2.2), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m+t} \beta_{aj} \lambda_j = 0 \quad (a = 1, \dots, m). \tag{2.4}$$

Существуют такие значения  $y_0$ , для которых ранг матрицы системы (2.4) равен  $m$ . В этом случае система (2.4) имеет  $t$  линейно независимых решений. Соответствующие им функции вида (2.3) являются искомыми основными инвариантами алгебры  $L$ .

Если  $U$  — невырожденное подпространство пространства  $W(0, n)$ , то через  $AO(U)$  обозначим алгебру Ли группы  $O(U)$  изометрий пространства  $U$ , а через  $AH(U)$  — картановскую подалгебру алгебры  $AO(U)$ . Если  $U \subset W(1, n)$ , то будем предполагать, что  $AH(U) \subset AH(n)$ .

Пусть  $\hat{L}$  — расщепляемая разрешимая подалгебра алгебры  $AP(1, n)$ . Предложения 2.3, 2.4 описывают ПСИ алгебры  $\hat{L}$  в случае, когда проекция  $L$  алгебры  $\hat{L}$  на  $AO(1, n)$  имеет вид  $V(1, k)$  или  $V(1, k) \oplus \langle J_{0n} \rangle$ . Пусть  $L$  — вполне приводимая алгебра. В силу предложения 2.3 из [10]  $L \subset AH(2l)$  ( $1 \leq l \leq [n/2]$ ) или  $L$  — подпрямая сумма  $L_1 \subset AH(2m)$  и  $\langle J_{0n} \rangle$  ( $1 \leq m \leq [n - 1/2]$ ). Подпространство  $U$  пространства  $W(0, n)$ , инвариантное относительно  $L$ , совпадает с  $U_1 \oplus U_2$ , где  $U_1 = 0$  или  $U_1 = W(1, 2r)$ , а  $U_2$  — одно из таких пространств:  $0, W(0), \Phi(0), \Omega(0), W(s, t), W(0) \oplus W(s, t), \Phi(0) \oplus W(s, t), \Omega(0) \oplus W(s, t)$ . Если  $U = \langle M \rangle \oplus U'$  — вырожденное пространство, то ПСИ алгебры  $\hat{L} = U \oplus L$  составляют основные

инварианты абелевой алгебры  $L + AH(U')/AH(U') \oplus \langle M \rangle$  от переменных  $x_0 - x_n$ ,  $x_a$ , где  $a = 1, \dots, n-1$  и  $P_a \notin U'$ . Если  $U$  — невырожденное пространство, то ПСИ алгебры  $L$  составляют основные инварианты абелевой алгебры  $L + AH(U)/AH(U)$  от переменных  $x_a$ , где  $a = 0, 1, \dots, n$  и  $P_a \notin U$ .

Если речь идет о расщепляемых подалгебрах  $U_1 \ni F_i, U_2 \ni F_i, \dots, U_s \ni F_i$  алгебры  $U \ni F$ , то будем употреблять обозначение  $F_{ij} = F_i : U_1, \dots, U_s$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Пусть  $\tilde{F}_i$  — такая подалгебра алгебры  $U \ni F$ , что ее проекция на  $F$  совпадает с  $F_i$ . Запись  $\tilde{F}_i + U_j$  означает, что  $U_j \subset U$ ,  $[F_i, U_j] \subset U_j$  и  $\tilde{F}_i \cap U \subset U_j$ . Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах  $\tilde{F}_i + U_1, \dots, \tilde{F}_i + U_s$ , то будем употреблять обозначение  $\tilde{F}_{ij} = \tilde{F}_i : U_1, \dots, U_s$  ( $j = 1, \dots, s$ ).

**Предложение 2.6.** Пусть

$$G_a = J_{0a} - J_{a5} \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad A\tilde{E}(4) = V(1, 4) \ni (AO(4) \oplus \langle J_{05} \rangle).$$

Подалгебры алгебры  $A\tilde{E}(4)$  исчерпываются относительно  $O(1, 5)$ -сопряженности такими алгебрами:

- $L_{0j} = \langle O \rangle : O, V(1), V(1, 2), V(1, 3), V(1, 4), (j = 1, \dots, 5);$
- $L_{1j} = \langle J_{12} \rangle : O, V(3), V(1, 2), V(3, 4), V(1, 3), V(1, 4) (j = 1, \dots, 6);$
- $\tilde{L}_{1j} = \langle J_{12} + G_3 \rangle : O, V(4), V(1, 2), V(1, 2) \oplus V(4) (j = 1, \dots, 4);$
- $L_{2j} = \langle J_{12} + J_{34} \rangle : O, V(1, 2), V(1, 4) (j = 1, 2, 3);$
- $L_{3j} = \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle : O, V(1, 2), V(3, 4), V(1, 4) (0 < \alpha < 1; j = 1, \dots, 4);$
- $L_{4j} = \langle J_{05} \rangle : O, V(1), V(1, 2), V(1, 3), V(1, 4) (j = 1, \dots, 5);$
- $L_{5j} = \langle J_{12} + \beta J_{05} \rangle : O, V(3), V(1, 2), V(3, 4), V(1, 3), V(1, 4)$   
 $(\beta > 0; j = 1, \dots, 6);$
- $L_{6j} = \langle J_{12} + J_{34} + \alpha J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(1, 4) (\alpha > 0; j = 1, 2, 3);$
- $L_{7j} = \langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(3, 4), V(1, 4)$   
 $(0 < \alpha < 1; \beta > 0; j = 1, 2, 3, 4);$
- $L_{8j} = \langle J_{12}, J_{34} \rangle : O, V(1, 2), V(1, 4) (j = 1, 2, 3);$
- $L_{9j} = \langle J_{12}, J_{05} \rangle : O, V(3), V(1, 2), V(3, 4), V(1, 3), V(1, 4) (j = 1, \dots, 6);$
- $L_{10j} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(1, 4) (j = 1, 2, 3);$
- $L_{11j} = \langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(3, 4), V(1, 4) (0 < \alpha < 1; j = 1, 2, 3, 4);$
- $L_{12j} = \langle J_{12} + \alpha J_{05}, J_{34} + \beta J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(3, 4), V(1, 4)$   
 $(\alpha > 0; \beta \geq 0; \alpha > \beta; j = 1, 2, 3, 4);$
- $L'_{12j} = \langle J_{12} + \alpha J_{05}, J_{34} + \alpha J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(1, 4) (\alpha > 0; j = 1, 2, 3);$
- $L_{13j} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle : O, V(4), V(1, 3), V(1, 4) (j = 1, 2, 3, 4);$
- $L_{14j} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle : O, V(1, 4) (j = 1, 2);$
- $L_{15j} = \langle J_{12}, J_{34}, J_{05} \rangle : O, V(1, 2), V(1, 4) (j = 1, 2, 3);$
- $L_{16j} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle \oplus \langle J_{12} - J_{34} \rangle : O, V(1, 4) (j = 1, 2);$
- $L_{17j} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{05} \rangle : O, V(4), V(1, 3), V(1, 4) (j = 1, \dots, 4);$
- $L_{18j} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{05} \rangle : O, V(1, 4) (j = 1, 2);$
- $L_{19j} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle \oplus \langle J_{12} - J_{34} + \alpha J_{05} \rangle : O, V(1, 4)$   
 $(\alpha \neq 0; j = 1, 2);$
- $L_{20j} = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle \oplus \langle J_{12} - J_{34}, J_{05} \rangle : O, V(1, 4) (j = 1, 2);$
- $L_{21j} = AO(4) : O, V(1, 4) (j = 1, 2);$
- $L_{22j} = AO(4) \oplus \langle J_{05} \rangle : O, V(1, 4) (j = 1, 2).$

Предложение 2.6 вытекает из леммы 3.4 [10] и теоремы 3 [11].

**Предложение 2.7.** Пусть  $L$  — одна из алгебр, выписанных в предложении 2.6. ПСИ алгебры  $L$  в пространстве  $M(1, 5)$  составляют следующие функции:

$L_{4,5}, L_{5,6}, L_{6,3}, L_{7,4}, L_{9,6}, L_{10,3}, L_{11,4}, L_{12,4}, L_{15,3}, L_{17,4}, L_{18,2}, L_{19,2}, L_{20,2}, L_{22,2}$ :  $\mu(x; 0, 1, \dots, 5)$ ;

$L_{0,5}, L_{1,6}, \tilde{L}_{1,4}, L_{2,3}, L_{3,4}, L_{8,3}, L_{13,4}, L_{14,2}, L_{16,2}, L_{21,2}$ :  $x_0 - x_5, \mu(x; 0, 1, \dots, 5)$ ;

$L_{4,4}, L_{5,5}, L_{9,5}, L_{17,3}$ :  $\mu(x; 0, 1, 2, 3, 5), x_4$ ;

$L_{9,4}, L_{11,3}, L_{12,3}$  ( $\beta > 0$ ):  $\varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5)$ ;

$L_{10,2}, L_{11,2}, L_{12,2}, L_{15,2}$ :  $\varphi(2, x), \mu(x; 0, 1, 2, 5)$ ;

$L_{17,2}$ :  $h(x; 1, 2, 3), \mu(x; 0, 4, 5)$ ;

$L_{18,1}, L_{19,1}, L_{20,1}, L_{22,1}$ :  $h(x; 1, 2, 3, 4), \mu(x; 0, 5)$ ;

$L_{0,4}, L_{1,5}, L_{13,3}$ :  $x_0 - x_5, x_4, \mu(x; 0, 1, 2, 3, 5)$ ;

$\tilde{L}_{1,3}$ :  $x_0 - x_5, \mu(x; 0, 1, 2, 3, 5), x_4$ ;

$L_{2,2}, L_{3,2}, L_{8,2}$ :  $\mu(x; 0, 1, 2, 5), x_0 - x_5, \varphi(2, x)$ ;

$L_{4,3}, L_{5,3}, L_{9,3}$ :  $\mu(x; 0, 1, 2, 5), x_3, x_4$ ;

$L_{5,4}, L_{7,3}$ :  $\mu(x; 0, 3, 4, 5), \varphi(1, x), \beta\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_5)$ ;

$L_{12,3}$  ( $\beta = 0$ ):  $\varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5), \alpha\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_5)$ ;

$L_{6,2}$ :  $\varphi(2, x), \mu(x; 0, 1, 2, 5), \alpha\psi(2, x) - \ln(x_0 - x_5)$ ;

$L_{7,2}$ :  $\varphi(2, x), \mu(x; 0, 1, 2, 5), \beta\psi(2, x) - \alpha \ln(x_0 - x_5)$ ;

$L_{9,2}$ :  $\varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 5), x_4$ ;

$L_{13,2}$ :  $x_0 - x_5, h(x; 1, 2, 3), \mu(x; 0, 4, 5)$ ;

$L_{14,1}, L_{16,1}, L_{21,1}$ :  $h(x; 1, 2, 3, 4), x_0, x_5$ ;

$L_{15,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\mu(x; 0, 5)$ ;

$L_{17,1}$ :  $h(x; 1, 2, 3), \mu(x; 0, 5), x_4$ ;

$L_{0,3}, L_{1,3}$ :  $x_0 - x_5, \mu(x; 0, 1, 2, 5), x_3, x_4$ ;

$L_{1,2}$ :  $\varphi(1, x), x_0 - x_5, \mu(x; 0, 3, 5), x_4$ ;

$\tilde{L}_{1,2}$ :  $\varphi(1, x), x_0 - x_5, \mu(x; 0, 3, 4, 5), (x_0 - x_5)\psi(1, x) + x_3$ ;

$L_{4,2}$ :  $\mu(x; 0, 1, 5), x_2, x_3, x_4$ ;

$L_{5,2}$ :  $\varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 5), x_4, \beta\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_5)$ ;

$L_{8,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $x_0, x_5$ ;

$L_{9,1}$ :  $\varphi(1, x), \mu(x; 0, 5), x_3, x_4$ ;

$L_{10,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\psi(1, x) - \psi(2, x), \mu(x; 0, 5)$ ;

$L_{11,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), \mu(x; 0, 5)$ ;

$L_{12,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\mu(x; 0, 5), \alpha\psi(1, x) + \beta\psi(2, x) - \ln(x_0 - x_5)$ ;

$L_{13,1}$ :  $h(x; 1, 2, 3), x_0, x_4, x_5$ ;

$L_{0,2}$ :  $x_0 - x_5, \mu(x; 0, 1, 5), x_2, x_3, x_4$ ;

$L_{1,1}$ :  $\varphi(1, x), x_0, x_3, x_4, x_5$ ;

$\tilde{L}_{1,1}$ :  $\varphi(1, x), x_0 - x_5, \mu(x; 0, 3, 5), x_4, (x_0 - x_5)\psi(1, x) + x_3$ ;

$L_{2,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\psi(1, x) - \psi(2, x), x_0, x_5$ ;

$L_{3,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), x_0, x_5$ ;

$L_{4,1}$ :  $\mu(x; 0, 5), x_1, x_2, x_3, x_4$ ;

$L_{5,1}$ :  $\varphi(1, x), \mu(x; 0, 5), \beta\psi(1, x) + \ln(x_0 + x_5), x_3, x_4$ ;

$L_{6,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\mu(x; 0, 5), \psi(1, x) - \psi(2, x), \alpha\psi(1, x) + \ln(x_0 + x_5)$ ;

$L_{7,1}$ :  $\varphi(a, x)$  ( $a = 1, 2$ ),  $\mu(x; 0, 5), \alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), \beta\psi(1, x) + \ln(x_0 + x_5)$ .

**Предложение 2.8.** Пусть  $G_a = J_{0a} - J_{a6}$  ( $a = 1, \dots, 5$ ),  $A\tilde{E}(5) = V(1, 5) \oplus (AO(5) \oplus \langle J_{06} \rangle)$ . Подалгебры алгебры  $A\tilde{E}(5)$  исчерпываются относительно

$O(1, 6)$ -сопряженности подалгебрами алгебры  $A\tilde{E}(4) = V(1, 4) \oplus (AO(4) \oplus \langle J_{06} \rangle)$  и такими алгебрами:

- $V(1, 5), V(1, 5) \oplus \langle J_{06} \rangle; \langle J_{12} \rangle: V(3, 5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12} + G_5 \rangle: V(3, 4), V(1, 4); \langle J_{12} + \alpha J_{06} \rangle: V(3, 5), V(1, 5) (\alpha > 0);$   
 $\langle J_{12} + J_{34} + \beta J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(1, 5) (\beta \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(3, 5), V(1, 5) (0 < \alpha < 1, \beta \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + J_{34} + G_5 \rangle: O, V(1, 2), V(1, 4);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + G_5 \rangle: O, V(1, 2), V(3, 4), V(1, 4) (0 < \alpha < 1);$   
 $\langle J_{12}, J_{06} \rangle: V(3, 5), V(1, 5); \langle J_{12} + G_5, J_{34} + G_5 \rangle: O, V(1, 2), V(1, 4);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(3, 5), V(1, 5) (0 < \alpha < 1);$   
 $\langle J_{12}, J_{34} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} + \beta J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(3, 5), V(1, 5) (\alpha > 0, \beta \geq 0,$   
 $\alpha > \beta);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} + \alpha J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(1, 5) (\alpha > 0);$   
 $\langle J_{12} + G_5, J_{34} + \alpha G_5 \rangle: V(1, 2), V(3, 4), V(1, 4) (\alpha \geq 0, \alpha \neq 1);$   
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle: V(4, 5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12}, J_{34}, J_{06} \rangle: V(5), V(1, 2) \oplus V(5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle: V(5), V(1, 5);$   
 $\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35} \rangle: O, V(1, 5);$   
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{06} \rangle: V(4, 5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{06} \rangle: V(5), V(1, 5);$   
 $\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35}, J_{06} \rangle: O, V(1, 5);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} + \alpha J_{06} \rangle: V(5), V(1, 5) (\alpha \in R);$   
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45} + \alpha J_{06} \rangle: O, V(4, 5), V(1, 3), V(1, 5) (\alpha \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} + G_5 \rangle: O, V(1, 4);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34}, J_{06} \rangle: V(5), V(1, 5);$   
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}, J_{06} \rangle: O, V(4, 5), V(1, 3), V(1, 5);$   
 $AO(4): V(5), V(1, 5); AO(4) \oplus \langle J_{06} \rangle: V(5), V(1, 5);$   
 $AO(5): O, V(1, 5); AO(5) \oplus \langle J_{06} \rangle: O, V(1, 5).$

Предложение 2.8 доказывается на основании теоремы 3 из [11] и леммы 3.4 из [10].

Предложение 2.8 описывает все те подалгебры алгебры  $AO(1, 6)$ , которые остаются неизменным изотропное подпространство  $\langle P_0 + P_6 \rangle$  пространства  $M(1, 6)$ . Остальные подалгебры алгебры  $AO(1, 6)$  исчерпываются относительно  $O(1, 6)$ -сопряженности подалгебрами алгебры  $AO(6)$ , несопряженными подалгебрами алгебры  $AO(5)$ , неприводимыми подалгебрами алгебр  $AO(1, 5)$  и  $AO(1, 6)$ , а также такими алгебрами:  $AO(1, 2) \oplus L_1, L_1 \subset AO(4)$ ;  $AO(1, 3) \oplus L_2, L_2 \subset AO(3)$ ;  $AO(1, 4) \oplus L_3, L_3 \subset AO(2)$ .

**Предложение 2.9.** Пусть  $L$  пробегает множество представителей классов сопряженных разрешимых подалгебр алгебры  $AO(1, 6)$ , не содержащих подалгебры алгебры  $A\tilde{E}(4)$ . ПСИ алгебры  $L$  образуют следующие функции:

- $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{56} \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2, 3), \alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), \beta\psi(1, x) - \psi(3, x),$   
 $x_0, (0 < \alpha \leq \beta \leq 1);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56} \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2, 3), x_0, \alpha\psi(1, x) + \beta\psi(2, x) - \psi(3, x)$   
 $(0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1; \alpha > 0);$   
 $\langle J_{12}, J_{34}, J_{56} \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2, 3), x_0;$

- $V(1, 5): x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6); V(1, 5) \oplus \langle J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} \rangle: \varphi(1, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12} \rangle: x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6);$   
 $V(3, 4) \oplus \langle J_{12} + G_5 \rangle: \varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6), x_0 - x_6, (x_0 - x_6)\psi(1, x) + x_5;$   
 $V(1, 4) \oplus \langle J_{12} + G_5 \rangle: x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{06} \rangle: \varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6), \alpha\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_6) (\alpha > 0);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6) (\alpha > 0);$   
 $V(5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), x_0 - x_6, \alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), \mu(x; 0, 5, 6)$   
 $(0 < \alpha \leq 0);$   
 $(V(1, 2) \oplus V(5)) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle: \varphi(2, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6) (0 < \alpha \leq 1);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle: \varphi(1, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6) (0 < \alpha < 1);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle: x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6) (0 < \alpha \leq 1);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + G_5 \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), x_0 - x_6, \alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), \mu(x; 0, 5, 6),$   
 $(x_0 - x_6)\psi(1, x) + x_5 (0 < \alpha \leq 1);$   
 $V(1, 2) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} + G_5 \rangle: \varphi(2, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6),$   
 $(x_0 - x_6)\psi(2, x) + \alpha x_5 (0 < \alpha \leq 1);$   
 $V(3, 4) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} + G_5 \rangle: \varphi(1, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6),$   
 $(x_0 - x_6)\psi(1, x) + x_5 (0 < \alpha < 1);$   
 $V(1, 4) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} + G_5 \rangle: x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6) (0 < \alpha \leq 1);$   
 $\langle G_5, J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{06} \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), \alpha\psi(1, x) - \psi(2, x), \mu(x; 0, 5, 6),$   
 $\beta\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_6) (0 < \alpha \leq 1; \beta > 0);$   
 $\langle G_1, G_2, G_5, J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{06} \rangle: \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6), \varphi(2, x),$   
 $\beta\psi(2, x) - \alpha \ln(x_0 - x_6) (0 < \alpha \leq 1; \beta > 0);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{06} \rangle: \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6), \varphi(1, x),$   
 $\beta\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_6) (0 < \alpha < 1; \beta > 0);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6) (0 < \alpha \leq 1; \beta > 0);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12}, J_{06} \rangle: \varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6); V(1, 5) \oplus \langle J_{12}, J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{06}, G_5 \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), \mu(x; 0, 5, 6), \alpha\psi(1, x) - \psi(2, x) (0 < \alpha \leq 1);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{06}, G_1, G_2, G_5 \rangle: \varphi(2, x), \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6) (0 < \alpha \leq 1);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{06} \rangle: \varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6) (0 < \alpha < 1);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{34}, J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6) (0 < \alpha \leq 1);$   
 $\langle J_{12}, J_{34}, G_5 \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 5, 6);$   
 $\langle J_{12}, J_{34}, G_1, G_2, G_5 \rangle: \varphi(2, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12}, J_{34} \rangle: x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} + \beta J_{06}, G_5 \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), \mu(x; 0, 5, 6),$   
 $\alpha\psi(1, x) + \beta\psi(2, x) - \ln(x_0 - x_6) (\alpha > 0, \beta \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} + \beta J_{06}, G_1, G_2, G_5 \rangle: \varphi(2, x), \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6) (\alpha > 0, \beta \geq 0);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} + \beta J_{06} \rangle: \varphi(1, x), \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6) (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha > \beta);$   
 $V(3, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} \rangle: \varphi(1, x), \alpha\psi(1, x) - \ln(x_0 - x_6), \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6) (\alpha > 0);$   
 $V(1, 5) \oplus \langle J_{12} + \alpha J_{06}, J_{34} + \beta J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6) (\alpha > 0, \beta \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + G_5, J_{34} + \alpha G_5 \rangle: \varphi(a, x), (a = 1, 2), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 5, 6),$   
 $(x_0 - x_6)(\psi(1, x) + \alpha\psi(2, x)) + x_5 (\alpha \geq 0);$   
 $V(1, 2) \oplus \langle J_{12} + G_5, J_{34} + \alpha G_5 \rangle: \varphi(2, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6) (\alpha \geq 0);$   
 $V(3, 4) \oplus \langle J_{12} + G_5, J_{34} + \alpha G_5 \rangle: \varphi(1, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6) (\alpha > 0, \alpha \neq 1);$   
 $V(3, 4) \oplus \langle J_{12} + G_5, J_{34} \rangle: \varphi(1, x), x_0 - x_6, \mu(x; 0, 3, 4, 5, 6), (x_0 - x_6)\psi(1, x) + x_5;$   
 $V(1, 4) \oplus \langle J_{12} + G_5, J_{34} + \alpha G_5 \rangle: x_0 - x_6, \mu(x; 0, \dots, 6) (\alpha \geq 0);$   
 $\langle J_{12}, J_{34}, J_{06}, G_5 \rangle: \varphi(a, x) (a = 1, 2), \mu(x; 0, 5, 6);$



$\langle J_{12}, J_{34}, J_{06}, G_1, G_2, G_5 \rangle: \varphi(2, x), \mu(x; 0, 1, 2, 5, 6);$   
 $V(1, 5) \ni \langle J_{12}, J_{34}, J_{06} \rangle: \mu(x; 0, \dots, 6).$

### § 3. Теоремы о редукции

Пусть  $\hat{F}$  — подалгебра  $AP(1, n)$ ,  $Q$  — фактор Леви алгебры  $\pi(\hat{F})$ . В силу леммы Уайтхеда предполагаем, что  $Q \subset \hat{F}$ . В дальнейшем условие  $J_{0n} \notin \hat{F}$  будет означать, что  $J_{0n}$  не содержится ни в одной из алгебр, сопряженных алгебре  $\hat{F}$ . Аналогично мы понимаем условие  $P_0 \notin \hat{F}$ . Будем также предполагать, что каждая рассматриваемая ненулевая подалгебра алгебры  $AO(n)$  является подпрямой суммой своих неприводимых частей [11]. Это же предполагается и относительно подалгебр алгебры  $AO(1, n)$ , не имеющих в  $W(0, n)$  инвариантных изотропных подпространств [10].

**Теорема 3.1.** Пусть  $\hat{F}$  — такая подалгебра алгебры  $AP(1, n)$ , что  $\pi(\hat{F})$  не имеет в  $W(0, n)$  инвариантных изотропных подпространств. Тогда  $\hat{F}$  сопряжена  $\hat{F}' = U \ni L$ , где  $L \cap W(0, n) = 0$ , а  $U$  совпадает с одним из пространств:  $O$ ,  $W(0, k)$ ,  $W(1, k)$ . ПСИ алгебры  $\hat{F}'$  составляют основные инварианты алгебры  $\hat{F}' + AO(U)/U + AO(U)$  от переменных  $x_a$ , где  $a$  принимает такие значения, что  $P_a \notin U$ .

**Доказательство.** Пусть  $U = \hat{F} \cap W(0, n)$ . По теореме Витта можно предполагать, что  $U$  совпадает с одним из пространств, записанных в формулировке теоремы. В [10] установлено, что если  $K$  — вполне приводимая алгебра Ли линейных преобразований векторного пространства  $V$  над полем  $R$ ,  $V'$  — неприводимый  $K$ -подмодуль модуля  $V$  и  $KV' \neq 0$ , то алгебра  $K$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $V' \ni K$ . В силу этого  $\hat{F} \ni L$ , где  $L$  — подпрямая сумма  $\pi(\hat{F})$  и  $\Omega \subset W(0, n)$ , причем  $[\pi(\hat{F}), \Omega] = 0$ . Если  $f(x)$  — инвариант  $\hat{F}$  и  $P_i \in U$ , то  $\partial_i f = 0$ . Значит,  $f(x)$  не зависит от  $x_i$ . Это и заканчивает доказательство теоремы.

Если  $f(x)$  — инвариант алгебры  $L \subset AP(1, n)$ , то  $L$  будем называть алгеброй инвариантности функции  $f(x)$ .

**Следствие.** Пусть  $\hat{F} = U \ni L$  — алгебра, введенная в теореме 3.1. Если  $\text{codim } \hat{F} = 1$ , то с точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности инвариантом алгебры  $\hat{F}$  является одна из следующих функций:  $x_0$ ,  $x_n$ ,  $\mu(x; 0, \dots, m)$ ,  $h(x; 1, \dots, m)$  ( $m = 2, \dots, n$ ). Максимальной алгеброй инвариантности для функции  $x_0$  является алгебра  $AE(n)$ ; для  $x_n$  —  $AP(1, n-1)$ ; для  $\mu(x; 0, \dots, m)$  —  $AO(1, m) \oplus (W(m+1, n) \ni AO(m+1 \uparrow n))$  ( $m < n$ ); для  $\mu(x; 0, \dots, n)$  —  $AO(1, n)$ ; для  $h(x; 1, \dots, m)$  —  $AO(m) \oplus (W(0) \oplus W(m+1, n) \ni \langle J_{ab} \mid a, b = 0, m+1, \dots, n \rangle)$  ( $m < n$ ); для  $h(x; 1, \dots, n)$  —  $AO(n) \oplus \langle P_0 \rangle$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $L$  — подалгебра алгебры  $A\tilde{G}(n-1) \ni \langle J_{0n} \rangle$ , обладающая ненулевой проекцией на  $\langle J_{0n} \rangle$ . С точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности  $\pi_1(L) \subset L$ , и выполняется одно из условий:

- 1) проекции  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  и  $\langle M \rangle$  суть нулевые;
- 2)  $P_0, M \in L$ ;
- 3)  $M \in L$  и проекция  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  равна 0.

Если проекции  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  суть нулевые, то  $L$  — подпрямая сумма алгебр  $L_1$  и  $L_2$ , удовлетворяющих одному из следующих условий:  $L_1 = 0$ ,  $L_2$  — подалгебра алгебры  $V(1, n-1) \ni (\langle J_{0n} \rangle \oplus AO(n-1))$ ;  $L_1$  — подалгебра  $W(1, n-1) \ni AO(n-1)$ ,  $L_2 = \langle J_{0n} \rangle$ ;  $L_1$  — подалгебра  $W(1, k) \ni AO(k)$ ,  $L_2$  — подалгебра  $V(k+1, n-1) \ni$

$(\langle J_{0n} \rangle \oplus AO(k+1 \uparrow n-1))$  ( $1 \leq k \leq n-2$ ). Пусть  $U = W(1, m) = L \cap W(1, k)$ . ПСИ алгебры  $\Gamma = L + AO(m)/AO(m) + U$  от переменных  $x_0, x_{m+1}, \dots, x_n$  является также полной системой инвариантов алгебры  $L$ . Алгебра  $\Gamma$  сопряжена алгебре  $T = V \bowtie F$ , где  $V = 0$  или  $V = V(k+1, l)$ , а  $F$  — подпрямая сумма  $F_1 \subset W(m+1, k) \bowtie AO(m+1 \uparrow k)$ ,  $F_2 \subset AO(k+1 \uparrow d)$  и  $\langle J_{0n} \rangle$ .

Если  $J_{0n} \in F$  и  $V \neq 0$ , то ПСИ алгебры  $T$  от переменных  $x_0, x_{m+1}, \dots, x_n$  составляют  $\mu(x; 0, k+1, \dots, n)$  и основные инварианты от переменных  $x_{m+1}, \dots, x_k, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}$  алгебры  $T + AO(k+1 \uparrow l)/AO(k+1 \uparrow l) + \langle J_{0n} \rangle + V$ .

Если  $J_{0n} \notin F$  и  $V \neq 0$ , то ПСИ алгебры  $T$  составляют  $\mu(x; 0, k+1, \dots, n)$  и ПСИ алгебры  $T + AO(k+1 \uparrow l)/AO(k+1 \uparrow l) + V$  от переменных  $x_0 - x_n, x_{m+1}, \dots, x_k, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}$ .

Если  $P_0, M \in L$ ,  $\pi_2(L \cap \mathfrak{M}(1, n-1)) = \Omega(k)$ , то полной системой инвариантов алгебры  $L$  является ПСИ алгебры  $L + AO(k) + \langle J_{0n} \rangle + \mathfrak{M}(1, k)/AO(k) + \langle J_{0n} \rangle + \mathfrak{M}(1, k)$  от переменных  $x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ .

Пусть  $M \in L$  и проекция  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  равна 0. Если  $[P_0, L \cap \mathfrak{M}(1, n-1)] + \pi_2(L \cap \mathfrak{M}(1, n-1)) = \Phi(k)$ , то при  $J_{0n} \in L$  полную систему инвариантов алгебры  $L$  составляют основные инварианты алгебры  $L + AO(k) + \overline{\mathfrak{M}}(1, k)/AO(k) + \langle J_{0n} \rangle + \overline{\mathfrak{M}}(1, k)$  от переменных  $x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ , а при  $J_{0n} \notin L$  — основные инварианты алгебры  $L + AO(k) + \overline{\mathfrak{M}}(1, k)/AO(k) + \overline{\mathfrak{M}}(1, k)$  от переменных  $x_0 - x_n, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ .

**Доказательство.** Любая подалгебра алгебры  $AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  с ненулевой проекцией на  $\langle J_{0n} \rangle$  действует вполне приводимо на пространстве  $\Omega = \langle M, P_0 - P_n, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$  и аннулирует в  $\Omega$  только нулевое подпространство. Отсюда в силу предложения 1.1 [10] получаем, что проекция алгебры  $L$  на  $\Omega$  принадлежит  $L$ . В силу теоремы 3.1 [10] можно предполагать, что  $\pi_1(L) = V(s, t)$ . Так как  $[J_{0n}, M] = -M$ ,  $[J_{0n}, G_a] = -G_a$ ,  $[J_{0n}, P_0 - P_n] = P_0 - P_n$ , то проекция  $L$  на  $\Omega$  разлагается в сумму проекций на  $\Omega_1 = \langle M, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$  и на  $\Omega_2 = \langle P_0 - P_n \rangle$ . Если  $G_a \in \pi_1(L)$ ,  $P_0 - P_n \in L$ , то  $P_a, M \in L$ , а потому  $P_0, M, P_a, G_a \in L$ . Если  $\pi_1(L) = 0$  и  $P_0 - P_n \in L$ , то, применяя  $O(1, n)$ -автоморфизм алгебры  $AP(1, n)$ , соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем, что  $M \in L$ .

Теперь рассмотрим случай, когда проекция  $L$  на  $\Omega_2$  является нулевой. Пусть  $\tau$  — проектирование  $A\tilde{G}(n-1) \bowtie \langle J_{0n} \rangle$  на  $AO(n-1)$ . Если  $G_a + \gamma M \in \Omega_1$  и  $[P_a, \tau(L)] = 0$ , то, применяя автоморфизм  $\exp(\theta P_a)$ , получаем, что  $G_a \in L$ . Если  $[P_a, \tau(L)] \neq 0$ , то  $G_a$  принадлежит  $[L, G_a + \gamma M] \subset L$ . Следовательно,  $M \in L$  или проекция  $L$  на  $\langle M \rangle$  является нулевой.

Пусть  $\Delta = V(k+1, l) \bowtie K$ , где  $K$  — подпрямая сумма  $\langle J_{0n} \rangle$  и подалгебра алгебры  $AO(k+1 \uparrow l)$ . Так как  $\text{rang } \Delta \geq l - k + 1$ , то ПСИ алгебры  $\Delta$  от переменных  $x_0, x_{k+1}, \dots, x_l, x_n$  состоит из одной функции  $\mu(x; 0, k+1, \dots, l, n)$ . Отсюда и из предложений 1.6, 1.8 вытекают утверждения теоремы об инвариантах алгебры  $T$ . Доказательства остальных утверждений аналогичны. Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $L$  — подалгебра алгебры  $A\tilde{G}(n-1) \bowtie \langle J_{0n} \rangle$ , обладающая ненулевой проекцией на  $\langle J_{0n} \rangle$ . Если  $\text{codim } L = 1$ , то с точностью до  $P(1, n)$ -

сопряженности инвариантом алгебры  $L$  является одна из функций:  $\mu(x; 0, n)$ ,  $\mu(x; 0, \dots, t, n)$ ,  $h(x; 1, \dots, t)$  ( $t = 1, \dots, n-1$ ),  $\alpha \ln(x_0 - x_n) + x_{n-1}$ .

Максимальной алгеброй инвариантности в  $A\tilde{G}(n-1) \bowtie \langle J_{0n} \rangle$  для функции  $\mu(x; 0, n)$  является алгебра  $AE(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$ ; для  $\mu(x; 0, \dots, t, n)$  ( $t < n-1$ ) —  $V(1, t) \bowtie (AO(m) \oplus \langle J_{0n} \rangle) \oplus (W(m+1, n-1) \bowtie AO(m+1 \uparrow n-1))$ ; для  $h(x; 1, \dots, t)$  ( $t < n-1$ ) —  $AO(m) \oplus \mathfrak{M}(m+1, n-1) \bowtie (AO(m+1 \uparrow n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle)$ ; для  $\alpha \ln(x_0 - x_n) + x_{n-1}$  —  $A\tilde{G}(n-2) \bowtie \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1} \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть  $M \in L$  и проекция  $L$  на  $\langle P_0 \rangle$  равна 0. При  $J_{0n} \in L$  инвариантом алгебры  $L$  (с точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности) является функция  $h(x; 1, \dots, t)$  ( $1 \leq t \leq n-1$ ). Если  $J_{0n} \notin L$  и инвариант отличен от  $h(x; 1, \dots, t)$ , то согласно теореме 3.2 можно предполагать, что  $L = \langle J_{0n} + \alpha P_{n-1}, M \rangle$  ( $\alpha > 0$ ). Инвариантом этой алгебры является функция  $\alpha \ln(x_0 - x_n) + x_{n-1}$ .

В остальных случаях инвариантом алгебры  $L$  будет одна из функций:  $\mu(x; 0, n)$ ,  $\mu(x; 0, \dots, t, n)$ ,  $h(x; 1, \dots, t)$  ( $t = 1, \dots, n-1$ ). Следствие доказано.

**Теорема 3.3.** Пусть  $\hat{F}$  — подалгебра алгебры  $A\tilde{G}(n-1)$ , обладающая ненулевыми проекциями на  $AO(n-1)$  и на  $\langle P_0 \rangle$ . Тогда  $\hat{F}$  сопряжена  $U + L$ , где  $L$  — подпрямая сумма алгебр  $L_1$  и  $L_2$ , содержащихся в  $AO(k)$  и  $\mathfrak{M}(k+1, n-1)$ , соответственно.  $U$  — подпространство пространства  $\mathfrak{M}(1, k)$ ,  $[L_1, U] = U$ ,  $[P_0, U] \subset U$ ; при этом, если  $U \neq 0$ , то  $\pi_2(U) = W(1, d)$ .

Если  $U \neq 0$  и  $\pi_1(U) = 0$ , то ПСИ алгебры  $\hat{F}$  составляют основные инварианты алгебры  $\hat{F} + AO(d)/U + AO(d)$  от переменных  $x_0, x_{d+1}, \dots, x_n$ , а если  $\pi_1(U) \neq 0$ , то ПСИ алгебры  $\hat{F}$  составляют основные инварианты алгебры  $\hat{F} + AO(d)/U + \langle M \rangle + AO(d)$  от переменных  $x_0 - x_n, x_{d+1}, \dots, x_{n-1}$ .

**Доказательство.** На основании теоремы 2.3, леммы 3.1 из [12] и теоремы 3.1 из [10] алгебра  $\hat{F}$  сопряжена  $U + L$ , где  $L$  — подпрямая сумма  $L_1 \subset AO(k)$  и  $L_2 \subset \mathfrak{M}(k+1, n-1)$ , а  $U \subset \mathfrak{M}(1, k)$  и  $[L_1, U] = U$ ,  $[P_0, U] \subset U$ . Если  $U \neq 0$ , то в силу теоремы 3.1 [10] можно предполагать, что  $\pi_2(U) = W(1, d)$ . Поскольку  $[P_0, U] \subset U$ , то для любого инварианта  $f(x)$  алгебры  $U + L$  имеем  $\partial_i f(x) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, d$ . Поэтому  $f(x)$  не зависит от  $x_1, \dots, x_d$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $L$  — подалгебра алгебры  $A\tilde{G}(n-1)$ , обладающая ненулевой проекцией на  $\langle P_0 \rangle$ . Если  $\text{codim } L = 1$ , то с точностью до  $P(1, n)$ -сопряженности инвариантом алгебры  $L$  является одна из следующих функций:  $h(x; 1, \dots, t)$  ( $t = 1, \dots, n-1$ ),  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_{n-1}$ .

Максимальной алгеброй инвариантности в  $A\tilde{G}(n-1)$  для функции  $h(x; 1, \dots, t)$  является алгебра  $AO(m) \oplus (\mathfrak{M}(m+1, n-1) \bowtie AO(m+1 \uparrow n-1))$ ,  $t < n-1$ , а для функции  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_{n-1}$  — алгебра  $\overline{\mathfrak{M}}(1, n-2) \bowtie (AO(n-2) \oplus \langle P_0 + G_{n-1} \rangle)$ .

**Доказательство.** Если функция  $h(x; 1, \dots, t)$  не является инвариантом алгебры  $L$ , то на основании предложения 2.5 и теоремы 3.3 можно допускать, что  $L = \langle M, P_0 + G_{n-1}, P_2, \dots, P_{n-2} \rangle$ . Отсюда вытекает, что инвариантом алгебры  $L$  является функция  $(x_0 - x_n)^2 - 2x_{n-1}$ . Следствие доказано.

**Предложение 3.1.** Функция  $x_0 - x_n$  является инвариантом каждой подалгебры алгебры  $A\tilde{G}(n-1)$ , имеющей нулевую проекцию на  $\langle P_0 \rangle$ . Максимальная алгебра инвариантности для функции  $x_0 - x_n$  в  $A\tilde{G}(n-1)$  совпадает с  $\overline{\mathfrak{M}}(1, n-1) \bowtie AO(n-1)$ .

1. Гурса Е., Интегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку, К., Рад. шк., 1941, 415 с.
2. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
3. Фушич В.И., Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна-Инфельда, *Докл. АН СССР*, 1981, **263**, № 3, 582–586.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact colutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.
5. Фушич В.И., Штелен В.И., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
7. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3646.
8. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–806.
9. Фушич В.И., Серова М.М., О точных решениях некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея, В кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 24–54.
10. Баранник Л.Ф., Фушич В.И., Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, n)$ , Препринт № 85.90, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
11. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, **38**, 67–72.
12. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт № 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.

# О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики

В.И. ФУЩИЧ

**Принцип симметрии.** В настоящее время не существует конструктивных методов решения нелинейных многомерных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), поэтому важной является задача выделения специальных классов многомерных нелинейных ДУЧП, обладающих богатыми симметричными свойствами, для которых можно в явном виде построить многопараметрические семейства частных решений и провести детальные качественные исследования этих уравнений, а также использовать частные решения для построения эффективных приближенных алгоритмов ДУЧП.

В современных исследованиях по математической и теоретической физике все возрастающую роль играют принципы симметрии. Это прежде всего связано с тем, что основные физические законы, уравнения движения, различные модели обладают явной или скрытой геометрической или негеометрической, локальной [1, 2] или нелокальной [3–5] симметриями. Построение математического аппарата, способного выявить разнообразные виды симметрий, — одна из важных задач математической физики. Не менее важной является задача, в определенном смысле обратная к только что сформулированной: по заданной группе или алгебре и их представлениям построить математические модели, обладающие заданной симметрией.

Для адекватного математического описания физических явлений естественно, как нам представляется, поставить идеи и принципы симметрии в основу науки о построении математических моделей [6]. Симметричный принцип в такой науке должен играть роль правила отбора, выделяющего из множества допустимых математических моделей (уравнений) только такие, которые обладали бы соответствующими симметричными свойствами. Этот принцип в явном или неявном виде используется при построении современных физических теорий, но, к сожалению, мало используется в классической математической физике.

В некоторых случаях требование инвариантности уравнений движения относительно этой или иной группы приводит к тому, что среди множества математически допустимых уравнений заданными свойствами обладают только одно или несколько уравнений. Так, среди множества линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для двух вектор-функций  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \{E_1, E_2, E_3\}$ ,  $\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \{H_1, H_2, H_3\}$  существует единственная система ДУЧП, инвариантная относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ . Этой системой

являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [5]. Аналогичным свойством обладает и система уравнений Дирака. Единственной (с точностью до преобразований эквивалентности) линейной системой четырех ДУЧП первого порядка, инвариантной относительно группы  $P(1, 3)$ , является система Дирака [5]. Указанными свойствами обладают не только линейные уравнения движения, но и нелинейные ДУЧП. Примером нелинейного уравнения, обладающего широкой группой симметрии, является хорошо известная система уравнений Эйлера–Навье–Стокса (см. п. 4). Необходимо отметить, что некоторые нелинейные ДУЧП обладают такими широкими группами симметрии, какими не обладает ни одно линейное ДУЧП. Примерами таких скалярных уравнений являются многомерное уравнение Монжа–Ампера и эйконоальное уравнение [7, 8].

С чисто математической точки зрения важно знать максимальные (в некотором смысле) группы симметрии ДУЧП. Особенно ценную информацию дает знание нелинейных преобразований независимых и зависимых переменных, относительно которых инвариантно то или иное ДУЧП, поскольку это дает возможность по заданному одному (иногда тривиальному) решению построить (генерировать) целые семейства точных решений нелинейных ДУЧП.

Таким образом, классы нелинейных ДУЧП, обладающие богатыми симметричными свойствами, представляются нам важными и интересными как в теоретическом, так и прикладном плане.

**1. О точных решениях многомерного уравнения Лиувилля.** Среди множества Пуанкаре-инвариантных нелинейных волновых уравнений вида

$$p_\mu p^\mu u + F(u) = 0, \quad (1)$$

где

$$p_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \mu = \overline{0, n},$$

$$u \equiv u(x), \quad x = (x_0, x_1, \dots, x_n), \quad x_0 \equiv t,$$

$F$  — произвольная дифференцируемая функция из пространства  $C^2$ . Существует только два типа уравнений, инвариантных относительно расширенной группы Пуанкаре  $\bar{P}(1, n)$ . Группа  $\bar{P}(1, n)$  — группа Пуанкаре, дополненная однопараметрической группой масштабных преобразований  $D(1)$ , т.е.  $\bar{P}(1, n) = \{P(1, n), D(1)\}$ .

**Теорема 1 [8].** Уравнение (1) инвариантно относительно группы  $\bar{P}(1, n)$  только в случаях

$$F = F_1 = \lambda_1 u^k \quad \text{или} \quad F = F_2 = \lambda_2 \exp u, \quad (2)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, k \neq 1$  — произвольные вещественные параметры.

В этих случаях на множестве решений (1) реализуются следующие неэквивалентные представления алгебры Ли группы  $\bar{P}(1, n)$ :

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} p_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

$$D = x_\mu p^\mu - \frac{2i}{1-k} \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{при} \quad F = F_1, \quad (3)$$

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} p_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

$$D = x_\mu p^\mu - 2i \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{при} \quad F = F_2. \quad (4)$$

**Следствие 1.** Из теоремы 1 вытекает, что уравнение Лиувилля является единственным (в классе (1)) уравнением неполиномиального типа, инвариантным относительно группы  $\bar{P}(1, n)$ .

**Замечание 1.** Двумерное уравнение (1) при  $F = F_1 = 0$  или  $F = F_2 = \lambda_2 \exp u$  инвариантно относительно более широкой алгебры, чем алгебра Ли группы  $\bar{P}(1, n)$ . Можно доказать [9], что в этих и только в этих двух случаях двумерное уравнение (1) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры  $A_\infty \supset \bar{P}(1, n)$ .

**Замечание 2.** Двумерное уравнение Лиувилля с помощью одной из нелокальных подстановок [10]

$$u = \ln \left[ w_\xi w_\eta \left( 1 - \tanh^2 \frac{C_1 - w}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

или

$$u = \ln [2w_\xi w_\eta / (w + C_2)^2], \quad w_\xi = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad w_\eta = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{5}$$

$$u = \ln \left[ w_\xi w_\eta \left( 1 + \tanh^2 \frac{w + C_3}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad \xi = x_0 + x_1, \quad \eta = x_0 - x_1,$$

где  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные, приводится к линейному волновому уравнению

$$\square \omega = -p_\mu p^\mu \omega = 0. \tag{6}$$

Зная общее решение уравнения (6)

$$w = f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1),$$

получаем решение двумерного нелинейного уравнения Лиувилля. Решение это представим в виде ( $F = F_2 = \lambda_2 \exp u$ )

$$u = \ln \left\{ \frac{-8f'_1(\omega_1)f'_2(\omega_2)}{\lambda_2(f_1(\omega_1) + f_2(\omega_2))^2} \right\}, \tag{7}$$

где  $\omega_1 = \alpha_\mu x^\mu, \omega_2 = \beta_\mu x^\mu$ , параметры  $\alpha_\mu, \beta_\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_\mu \alpha^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = 0, \quad \alpha_\mu \beta^\mu = 2, \tag{8}$$

$$f'_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}, \quad f'_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \omega_2}.$$

Решение (7) совпадает с лиувиллевским решением, если положить  $\omega_1 = x_0 + x_1$  ( $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ ),  $\omega_2 = x_0 - x_1$  ( $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ). Представление решений двумерного уравнения (1) в виде (7) имеет важное, с точки зрения обобщения, преимущество по сравнению с лиувиллевским решением. Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество функций вида (7) удовлетворяет  $n$ -мерному уравнению Лиувилля, если параметры удовлетворяют условиям типа (8).

Приведенное наблюдение подсказывает следующий способ построения частных решений многомерного уравнения по решениям двумерного (или трехмерного) уравнения: 1) представить (построить) решения двумерного (или трехмерного)

уравнения в явно инвариантном виде, т.е. решения записать через всевозможные инвариантные переменные  $\omega_1, \omega_2$  или, например,

$$\omega_3 = \alpha_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad \omega_4 = \beta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (9)$$

где  $\alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu}$  — параметры; 2) подставить явно инвариантные решения двумерного уравнения в многомерное нелинейное ДУЧП и найти условия на параметры  $\alpha_\mu, \beta_\mu, \alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu}$ , при которых двумерные решения типа (7) являются решениями многомерного уравнения. Этот способ построения решений многомерных уравнений по решениям двумерного и трехмерного уравнения широко использовался в [8] для уравнения Тейлора–Даламбера (1).

Очевидно, что многомерное уравнение Лиувилля кроме решений вида (7) имеет много других решений. Широкий класс решений многомерного уравнения Лиувилля, неэквивалентных (7), построен в работе [8].

Укажем один простой способ построения частных решений четырехмерного волнового уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = F(u). \quad (10)$$

Ясно, что множество функций  $u$ , удовлетворяющих двумерным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u(x_0, \mathbf{x})}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u(x_0, \mathbf{x})}{\partial x_1^2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0, \mathbf{x})}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u(x_0, \mathbf{x})}{\partial x_3^2} = F(u), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad (12)$$

будет решением уравнения (10). Множество функций  $u$  удовлетворяющих двумерным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = F(u), \quad (14)$$

также будет решением уравнения (10).

Используя то обстоятельство, что общее решение волнового линейного уравнения (11) или (13) задается через две произвольные функции  $f_1$  и  $f_2$ , т.е. решение уравнения (11) имеет вид

$$u = f_1 \{ \alpha_0(x_2, x_3)x_0 + \alpha_1(x_2, x_3)x_1 + \alpha(x_2, x_3) \} + f_2 \{ \beta_0(x_2, x_3)x_0 + \beta_1(x_2, x_3)x_1 + \beta(x_2, x_3) \}, \quad (15)$$

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 = 0, \quad \beta_0^2 - \beta_1^2 = 0,$$

уравнение (12) сводится к решению одного двумерного уравнения для функций  $f_1, f_2, \alpha_\mu, \alpha, \beta_\mu, \beta$ . В ряде случаев такое уравнение может быть решено.

Если нелинейность в (10) имеет, например, вид

$$F(u) = \lambda_1 \sin u + \lambda_2 \exp u, \quad (16)$$



то четырехмерное уравнение (10) редуцируется к двумерным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \lambda_1 \sin u, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \lambda_2 \exp u. \quad (18)$$

Все решения уравнения (18) задаются формулой (7).

**2. Решения нелинейного уравнения Дирака.** Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака

$$\{\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k\} \Psi = 0, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad (19)$$

где  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака,  $\lambda, k$  — произвольные постоянные,  $\Psi = \Psi(x)$  — четырехкомпонентный спинор,  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma_0$  — сопряженный по Дираку спинор. Уравнение (19) инвариантно относительно конформной группы  $C(1,3) \supset P(1,3)$  только в том случае, когда  $k = 1/3$  [11].

Решения уравнения ищем в виде [6]

$$\Psi = A(\tilde{\omega}_1)\varphi(\tilde{\omega}_2), \quad (20)$$

где  $A(\tilde{\omega}_1)$  — функция, зависящая от матрицы  $\tilde{\omega}_1$ , матричные элементы которой зависят от  $x$ . Матрица  $\tilde{\omega}_1$  выбирается так, чтобы она была инвариантной относительно подгруппы конформной группы, например относительно группы Лоренца. Требование лоренц-инвариантности может быть записано в виде

$$[\tilde{\omega}_1, J_{\mu\nu}] = 0, \quad J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \quad (21)$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{\mu}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (22)$$

$\varphi(\tilde{\omega}_2)$  — четырехкомпонентный спинор,  $\tilde{\omega}_2$  — скалярная инвариантная переменная типа (8), для которой по определению выполняется

$$[\tilde{\omega}_2, M_{\mu\nu}] = 0. \quad (23)$$

Формуле (20) можно дать простую физическую интерпретацию: решение уравнения (19) представляет собой волну с “амплитудой”  $A(\tilde{\omega}_1)$  и “фазой”  $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ . Подставим (20) в (19), получим уравнение для  $A(\tilde{\omega}_1)$  и  $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ . При некотором специальном виде амплитуды  $A(\tilde{\omega}_1)$  для  $\varphi(\tilde{\omega}_2)$  получим систему обыкновенных ДУ относительно переменной  $\tilde{\omega}_2$ . Можно, конечно, задать явный вид фазы  $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ , а амплитуду искать в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \gamma_\mu x^\mu f(\tilde{\omega}_3), \quad (24)$$

где  $f(\tilde{\omega}_3)$  — произвольная функция скалярного инварианта  $\tilde{\omega}_3$ . Для отыскания конформно-инвариантных решений уравнения (19), следуя [12, 13], выбираем амплитуду в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_1^4}, \quad \tilde{\omega}_1 = \gamma_\mu x^\mu, \quad \tilde{\omega}_1^4 = (x_\mu x^\mu)^2. \quad (25)$$

В качестве скалярного инварианта  $\tilde{\omega}_2$  выберем инвариант конформных преобразований

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\beta_\mu x^\mu}{x_\nu x^\nu} \equiv \omega, \quad x_\nu x^\nu \neq 0. \quad (26)$$

Формула (20) принимает вид

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\mu x^\mu}{(x_\nu x^\nu)^2} \varphi(\omega). \quad (27)$$

Подстановка (27) в (19) приводит к системе обыкновенных ДУ для  $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i \frac{\lambda}{\beta_\nu \beta^\nu} (\bar{\varphi}\varphi)^{1/3} (\gamma_\alpha \beta^\alpha) \varphi. \quad (28)$$

Общее решение уравнения (28) имеет вид [12]

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha \beta^\alpha)\omega\} \chi, \quad k = 1/3, \quad (29)$$

где  $\chi$  — постоянный спинор.

Таким образом, получили четырехпараметрическое семейство точных решений уравнения (19) ( $k = 1/3$ ) в форме

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\alpha x^\alpha}{(x_\nu x^\nu)^2} \exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha \beta^\alpha)\omega\} \chi, \quad \beta_\nu \beta^\nu > 0. \quad (30)$$

Аналогичным способом можно построить решения систем уравнений второго порядка для спинорных, тензорных и векторных полей:

$$(\lambda_0 \gamma_\mu \pi^\mu + \lambda \pi_\alpha \pi^\alpha) \Psi + \lambda_1 F(\bar{\Psi} \Psi) \Psi = 0,$$

$$\pi_\mu = p_\mu + \lambda_2 \gamma_\mu + \lambda_3 p_\nu F^\nu + \lambda_4 A_\mu + \lambda_5 (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi);$$

$$\pi_\mu \pi^\mu \Psi = m^2 \Psi;$$

$$\left( p_\mu - \lambda_6 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right) \left( p^\mu - \lambda_6 \frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\sigma} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + (\lambda_{17} E_k + \lambda_{18} H_k) \frac{\partial (\lambda_{19} E_i + \lambda_{20} H_i)}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + (\lambda_{17} E_k + \lambda_{18} H_k) \frac{\partial (\lambda_{19} E_i + \lambda_{20} H_i)}{\partial x_k} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0;$$

$$\tilde{p}_\alpha \tilde{p}^\alpha A_\mu - \tilde{p}_\mu (\tilde{p}_\nu A^\nu) = 0,$$

$$\tilde{p}_\alpha = p_\alpha + \lambda_7 \gamma_\alpha + \lambda_8 A_\alpha + \lambda_9 p_\alpha A_\nu A^\nu + \lambda_{10} p_\alpha p_\mu (A^\mu A_\nu A^\nu);$$

$$\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\partial}^\alpha u_\mu = 0, \quad \alpha, \mu, \sigma, \nu = \overline{0, 3},$$

$$\tilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha + \lambda_{11} u_\alpha + \lambda_{12} \partial_\alpha F(u_\nu u^\nu), \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha};$$

$$\tilde{\partial}_0 u_a + \lambda_{13} \tilde{\partial}_b \tilde{\partial}_b u_a = 0,$$

$$\tilde{\partial}_0 = \partial_0 + \lambda_{14} u_c u_c, \quad \tilde{\partial}_b = \partial_b + \lambda_{15} u_b + \lambda_{16} u_c \frac{\partial u_b}{\partial x_c},$$

где  $F_{\mu\nu}$ ,  $A_\mu$ ,  $E_i$ ,  $H_i$  — тензор, вектор-потенциал, напряженности электромагнитного поля,  $u_\mu$  — вектор скорости жидкости,  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{20}$  — произвольные параметры.

**3. Какие уравнения описывают нелинейную теплопроводность?** Процессы тепломассопереноса описывают линейным или нелинейным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ c(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} + F(u), \quad i = 1, 2, 3, \quad (31)$$

$u = u(t, x_1, x_2, x_3)$ ,  $c(u) > 0$ ,  $F(u)$  — произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства одномерного линейного уравнения (31) ( $c(u) = \lambda_1$ ,  $F(u) = \lambda_2 u$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$ ) полностью изучил еще С. Ли. Для нас важно подчеркнуть, что в трехмерном случае линейное уравнение (31) инвариантно относительно 10-параметрической группы Галилея  $G(1, 3)$  [5, 14].

Групповой анализ одномерного нелинейного уравнения (31) в случае  $F(u) = 0$  осуществил Л.В. Овсянников [2]. Методом С. Ли [2] можно получить групповые свойства трехмерного уравнения (31). Такие исследования были проведены М.М. Серовой и Р.М. Чернигой. Результат их исследования таков: среди нелинейных уравнений вида (31) ( $c(u) \neq \text{const}$ ) не существует уравнений, инвариантных относительно всей группы Галилея  $G(1, 3)$ . Это означает, что для нелинейного уравнения вида (31) ( $F = 0$ ), в отличие от линейного, не выполняется принцип относительности Галилея [6]. Если функции  $c$  и  $F$  явным образом зависят от  $t$ , т.е.  $c(u, t)$ ,  $F(u, t)$ , то уравнения вида (31) не будут инвариантны относительно всей группы  $G(1, 3)$ , но могут быть инвариантны относительно преобразований Галилея. Для таких уравнений будет иметь место принцип Галилея. Поэтому представляется важной задача о построении классов нелинейных ДУЧП второго порядка

$$u_0 + F(x, u, u_1, u_2) = 0,$$

$$u_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_2 = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn}), \quad (32)$$

$$u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \quad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0, n}, \quad u = u(x_0 \equiv t, x_1, \dots, x_n),$$

инвариантных относительно группы Галилея  $G(1, n)$  и группы Шредингера  $Sch(1, n) \supset G(1, n)$ . Эта задача для случая  $n \leq 3$  решена М.М. Серовой и автором данной работы. Решения ее приведем в виде следующих теорем.

**Теорема 2.** Уравнение (32) инвариантно относительно группы  $G(1, n)$  только в таких случаях:

при  $n = 1$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_1(v_1), \quad v_1 = \Delta u = u_{11}; \quad (33)$$

при  $n = 2$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_2(v_1, v_2), \quad v_1 = \Delta u = u_{11} + u_{22},$$

$$v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}^2; \quad (34)$$

при  $n = 3$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_3(v_1, v_2, v_3), \quad v_1 = \Delta u,$$

$$v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix},$$

$$v_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad (35)$$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — произвольные функции из пространства  $C^\infty$ .

При доказательстве использована следующая реализация базисных элементов расширенной алгебры Ли группы  $\bar{G}(1, n) = \{G(1, n), D(1)\}$ :

$$P_0 = p_0, \quad P_a = p_a, \quad J_{ab} = M_{ab},$$

$$G_a = x_0 p_a - \frac{1}{2\lambda} x_a p_u, \quad p_u = i \frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b = \overline{1, n}, \quad (36)$$

$$D = 2x_0 p_0 - x_a p_a.$$

Если алгебру  $\bar{G}(1, n)$  дополнить оператором  $A$  (соответствующим проективным преобразованиям), то получим алгебру Шредингера  $Sch(1, n)$ . В данном случае

$$A = x_0(x_0 p_0 - x_a p_a) + \frac{1}{4\lambda} x_i^2 p_u.$$

**Теорема 3.** Уравнение (32) инвариантно относительно группы  $\bar{G}(1, n)$  ( $n \leq 3$ ) только в таких случаях:

$$\text{при } n = 1, \quad F = \lambda u_i u_i + \lambda_1 u_{11};$$

$$\text{при } n = 2, \quad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi \left( \frac{v_2}{v_1^2} \right), \quad v_1 \neq 0; \quad (37)$$

$$\text{при } n = 3, \quad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi \left( \frac{v_2}{v_1^2}; \frac{v_3}{v_1^3} \right).$$

**Теорема 4.** Уравнение (32) инвариантно относительно группы Шредингера  $Sch(1, n)$  ( $n \geq 3$ ) только в таких случаях:

$$\text{при } n = 1, \quad F = \lambda u_i u_i;$$

$$\text{при } n = 2, \quad F = \lambda u_i u_i + v_1 (v_1^2 - 4v_2)^{1/2};$$

$$\text{при } n = 3, \quad F = \lambda u_i u_i + (v_1^2 - 3v_2)^{1/2} \Phi(w), \quad (38)$$

$$w = \frac{2v_1^3 - 9v_1 v_2 + 27v_3}{(v_1^2 - 3v_2)^{3/2}}, \quad v_1^2 \neq 3v_2, \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0.$$

Для всех приведенных уравнений вида (2), инвариантных относительно групп  $G(1, n) \subset \bar{G}(1, n) \subset Sch(1, n)$ , выполняется принцип относительности Галилея и справедливы законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Среди множества уравнений (32) с нелинейностями (35) имеется, в частности, уравнение (при  $\Phi_3 = \sqrt{v_1}$ ,  $v_1 = v_3 = 0$ )

$$u_0 + \lambda u_i u_i + \lambda_1 \sqrt{(\Delta u)^2} = 0. \quad (39)$$

Это уравнение эквивалентно стандартному линейному уравнению теплопроводности  $v_0 + \lambda_1 \Delta v = 0$ ,  $v = \lambda_1 / \lambda \exp \lambda / \lambda_1 u$ .

Для найденных нелинейных уравнений можно ставить те же задачи, что и для линейного уравнения теплопроводности. Конечно, начальные или граничные условия будут, как и в линейном случае, нарушать галилеевскую симметрию.

**Замечание 1.** Для более адекватного описания тепловых и диффузионных процессов естественно использовать интегродифференциальные уравнения вида

$$\{(\exp \mu S) - 1\} u = F \left( u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_a}, \frac{\partial u}{\partial x_a} \right), \quad (40)$$

где

$$\exp \mu S = 1 + \frac{\mu}{1!} S + \frac{\mu^2}{2!} S^2 + \dots, \quad S = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \Delta.$$

В том случае, когда  $F = 0$ , а параметр  $\mu \ll 1$  и  $\|S^2 u\| < \|Su\|$ , уравнение (40) приближенно совпадает со стандартным уравнением теплопроводности.

**Замечание 2.** Группу Галилея  $G(1, n)$ , дополненную группой масштабных и проективных преобразований, в литературе называют группой Шредингера и обозначают символом  $Sch(1, n)$ . Такое название этой группы совершенно не обосновано и несправедливо, поскольку ни в одной работе Шредингера не встречается эта группа. Впервые эта группа, как максимальная локальная группа инвариантности одномерного уравнения теплопроводности, установлена Софусом Ли еще в 1885 г. Поэтому, ради справедливости, эту группу следовало бы обозначать символом  $SL(1, n)$  и назвать специальной группой Ли.

**4. Какой спин несет поле Навье–Стокса?** 1. Для наших целей достаточно рассмотреть простейший вариант системы типа Навье–Стокса [15]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_1 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \lambda_2 \Delta u_i = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (41)$$

и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (42)$$

Тот факт, что система уравнений (41), (42) инвариантна относительно расширенной группы  $\bar{G}(1, 3)$ , известен давно [16]. Сравнительно недавно доказано, что  $\bar{G}(1, n)$  является максимальной (в смысле С. Ли) группой инвариантности (МГИ) системы (41), (42) [2, 17, 18]. Базисные элементы 11-мерной алгебры инвариантности (АИ) уравнений (41), (42) имеют следующий вид (при  $\lambda_1 = 1$ ):

$$P_\mu^I = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad (43)$$

$$J_{ab}^I = M_{ab}^I + S_{ab}^I, \quad M_{ab}^I = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, 3}, \quad (44)$$

$$G_a^I = t \partial_a - \frac{\partial}{\partial u_a}, \quad (45)$$

$$D^I = 2t \partial_0 + x_a \partial_a - u_a \frac{\partial}{\partial u_a}, \quad (46)$$

где

$$S_{ab}^I = u_a \frac{\partial}{\partial u_b} - u_b \frac{\partial}{\partial u_a}. \quad (47)$$

Провести теоретико-алгебраический анализ уравнений означает [4, 19]: 1) найти алгебру инвариантности (АИ); 2) построить по АИ группу инвариантности ДУ; 3) установить, какое именно представление реализуют базисные операторы АИ. В соответствии с работами С. Ли и Л.В. Овсянникова провести групповой анализ ДУ означает решить только первые две задачи. Во времена С. Ли третья задача не могла и ставиться, поскольку только в 30–50-е годы нашего столетия построена теория представлений групп и алгебр Ли. Как нам кажется, уместно использовать словосочетание “теоретико-алгебраический анализ уравнения”, в том случае, когда решаются все три задачи.

Важность решения третьей задачи теоретико-алгебраического анализа ДУ представляется нам очевидной. Действительно, если, например, провести только групповой анализ уравнения Дирака (т.е. решить первые две задачи), то мы не получим существенной информации о спиновой структуре этого уравнения, т.е. не будем знать, что система Дирака описывает частицу и античастицу со спином  $1/2$ . Последняя информация является следствием того, что на множестве решений уравнения Дирака реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений алгебры Пуанкаре  $P(1, 3)$  со спином  $s = 1/2$  [5]. Алгебра  $P(1, 3)$  является алгеброй инвариантности уравнения Дирака.

2. Рассмотрим линейную систему типа (41), (42) (положив  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ )

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = 0, \quad (48)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (49)$$

В матричной записи систему (48), (49) можно представить в виде

$$L_0 \Psi = 0, \quad L_0 = (\partial_t - \Delta) I_3, \quad (50)$$

$$L_1 \Psi = 0, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где  $\Psi$  — вектор-функция с компонентами  $(u_1, u_2, u_3)$ ,  $I_3$  — единичная матрица  $3 \times 3$ .

Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности системы (48), (49) выглядят так:

$$P_\mu^{\text{II}} = \partial_\mu, \quad D_1^{\text{II}} = 2x_0 \partial_0 - x_a \partial_a, \quad D_2^{\text{II}} = u_a \frac{\partial}{\partial u_a}, \quad (52)$$

$$J_{ab}^{\text{II}} = J_{ab}^{\text{I}} = M_{ab}^{\text{I}} + S_{ab}^{\text{I}}. \quad (53)$$

На множестве решений уравнений (50), (51) операторы (52), (53) можно представить в виде

$$P_{\mu}^{\text{II}} = \partial_{\mu}, \quad D_1^{\text{II}} = 2x_0\partial_0 - x_a\partial_a, \quad D_2^{\text{II}} = I_3, \quad (54)$$

$$J_{ab}^{\text{II}} = M_{ab}^{\text{I}} + S_{ab}^{\text{II}}, \quad (55)$$

где  $3 \times 3$  матрицы  $S_{ab}^{\text{II}} = S_{ab}$  реализуют векторное представление алгебры Ли группы вращений  $SO(3)$ , т.е.

$$S_{12} = S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{23} = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$S_{31} = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко подсчитать, что квадрат спинового оператора

$$-(S_{ab}^{\text{II}})^2 \Psi = -(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \Psi = s(s+1)I_3 \Psi = 2\Psi. \quad (57)$$

Проведенный анализ представлений (54), (55) показывает, что система ДУ (48), (49) описывает физическую систему со спином  $s = 1$ .

**Замечание 1.** Необходимо заметить, что линейная система Навье–Стокса (48), (49), в отличие от нелинейной, не инвариантна относительно преобразований Галилея, т.е. для нее не выполняется основной принцип механики — принцип относительности Галилея. Это обстоятельство, как нам кажется, ставит под сомнение правомерность использования линеаризованной системы Навье–Стокса для описания реальных гидродинамических систем.

**Замечание 2.** Максимальной АИ системы (48), без условия (49), является 22-мерная алгебра с базисными операторами

$$P_{\mu}^{\text{III}} = \partial_{\mu}, \quad J_{ab}^{\text{III}} = M_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad (58)$$

$$G_a^{\text{III}} = 2x_0\partial_a + x_a u_b \frac{\partial}{\partial u_b}, \quad D^{\text{III}} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + u_a \frac{\partial}{\partial u_a}, \quad (59)$$

$$A^{\text{III}} = x_0 \left( x_{\mu}\partial_{\mu} - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} x_a x_a u_b \frac{\partial}{\partial u_b}, \quad (60)$$

$$S_{ab}^{\text{III}} = u_a \frac{\partial}{\partial u_b}. \quad (61)$$

Это означает, что группой инвариантности системы (48) является группа  $Sch(1,3) \otimes GL(3)$ .

**Замечание 3.** Система (48), (49), помимо локальной группы инвариантности, порождаемой операторами (52), (53), обладает нелокальной симметрией  $SU(2)$ . Доказательство этого утверждения приводится с помощью метода, описанного в работах [3–5]. По трем базисным операторам алгебры Ли группы  $SU(2)$  можно построить новые законы сохранения для системы (48), (49).

**Замечание 4.** Нелинейная система ( $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ )

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \quad (62)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (63)$$

инвариантна относительно группы  $\bar{G}(1, 3)$ . Максимальной АИ системы (58), (59) является алгебра Ли группы  $IGL(4, R) \supset P(1, 3)$ . Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_\mu, & J_{ab} &= J_{ab}^I, & J_{0a} &= x_a \partial_0 - u_a u_b \frac{\partial}{\partial u_b}, \\ G_a &= x_a \partial_0 - \frac{\partial}{\partial u_a}, & D_0 &= x_0 \partial_0 - u_b \frac{\partial}{\partial u_b}, & D_a &= x_a \partial_a + u_a \frac{\partial}{\partial u_a} \end{aligned} \quad (64)$$

(в  $D_a$  суммы по  $a$  нет).

Из явного вида операторов (64) следует, что система уравнений Эйлера (62), (63) инвариантна как относительно преобразований Галилея, так и относительно преобразований Лоренца. Таким образом, система (62), (63) является примером уравнений, для которых выполняется как принцип относительности Галилея, так и принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна.

**Замечание 5.** Уравнение неразрывности (42) инвариантно относительно бесконечной алгебры.

3. Чтобы ответить на вопрос, вынесенный в заглавие, достаточно провести сравнительный анализ операторов (52), (53) и (43)–(47). Совокупность всех операторов (43)–(47), в отличие от операторов (52), (53), не может быть определена в пространстве вектор-функций  $\{\Psi(t, \mathbf{x}) = \text{столбец}(u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}), u_3(t, \mathbf{x}))\}$ , поскольку  $G_a^I$  выражается через оператор сдвига  $\frac{\partial}{\partial u_a}$ . Оператор  $\frac{\partial}{\partial u_a}$  является неограниченным оператором, поэтому его невозможно представить матрицей конечного порядка.

В силу этого действия всех операторов (43)–(47) можно задать только в пространстве функций  $\{\chi = \chi(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3)\}$ , зависящих от семи переменных. Это главное отличие операторов (43)–(47) от операторов (52), (53). Конечно, операторы (52), (53) можно задать в пространстве  $\{\chi\}$ . При этом пространство  $\{\chi\}$  будет приводимо относительно операторов (52), (53).

Из приведенного следует, что квадрат оператора спина

$$(S_{ab}^I)^2 = (S_{12}^I)^2 + (S_{23}^I)^2 + (S_{31}^I)^2 \quad (65)$$

в пространстве  $\{\chi, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\}$  не равен 2, но принимает бесконечно много различных значений.

Таким образом, поле Навье–Стокса (уравнения (41), (42)) и поле Эйлера (уравнения (62), (63)) несут всевозможные целочисленные спины  $s = 0, 1, 2, \dots$ . Этот результат принципиально отличен от того, что мы знаем о нелинейном уравнении Дирака (19) или о нелинейном уравнении для векторного поля, или о полях Янга–Миллса, где спин принимает либо одно, либо конечное число значений.



В заключение приведем пример релятивистской алгебры (содержащей в качестве подалгебры алгебру  $P(1, 3)$ ) операторов, которые приводят также к бесконечному набору целых спинов. Совокупность таких операторов имеет вид

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_\mu, & J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, & R_\mu &= \frac{\partial}{\partial u_\mu}, \\ G_{\mu\nu}^\pm &= x_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \pm u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, & S_{\mu\nu} &= u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu}. \end{aligned} \quad (66)$$

Часть операторов (66) инвариантна относительно замены зависимых ( $u(x)$ ) и независимых переменных ( $x$ ):  $x_\mu \rightarrow u_\mu$ ,  $u_\mu \rightarrow x_\mu$ .

**5. О нелиевской симметрии релятивистского уравнения Гамильтона.** В работе [26] доказано, что максимальной (в смысле С. Ли) локальной группой инвариантности уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 = 0 \quad (67)$$

является конформная группа  $C(1, 4)$  в пятимерном пространстве  $R_5(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$  с метрикой

$$s^2(x, u) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 = x_\mu^2 - u^2. \quad (68)$$

В данном разделе обращается внимание на существование новой (нелиевской) симметрии уравнения (67). Для обнаружения этого факта достаточно заметить, что (67) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для вектора  $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$ , т.е.

$$u_\mu u^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}. \quad (69)$$

Очевидно, что уравнение (69) инвариантно относительно преобразований Лоренца и конформных преобразований

$$u'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} u^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (70)$$

$$u'_\mu = \frac{u_\mu - c_\mu u_\alpha u^\alpha}{1 - 2c_\alpha u^\alpha + c_\alpha c^\alpha u_\nu u^\nu}. \quad (71)$$

Обратим внимание на то, что преобразования (70), (71) заданы в пространстве производных  $R_4(u_0, u_1, u_2, u_3)$ , а не в пространстве  $R_5(x_0, x_1, x_2, x_3, u)$ . По этой причине симметрию уравнения (67) относительно преобразований (70), (71) невозможно было обнаружить с помощью метода С. Ли. Нелокальные симметричные свойства уравнения (67) относительно группы (70), (71) могут быть использованы для размножения решений, если мы знаем какое-то частное решение (67).

1. Lie S., Über die Integration durch bestimmte integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen, *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328–368.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Фушич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.

4. Фушнич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
5. Фушнич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
6. Фушнич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
7. Фушнич В.И., Серов Н.И., Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 24–64.
8. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
9. Шульга М.В., О двумерных нелинейных волновых уравнениях, инвариантных относительно некоторых алгебр Ли, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 84–86.
10. Фушнич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 82.83, Киев, Ин-т математики, 1982, 49 с.
11. Gürsey F., On a conform-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, № 10, 988–1006.
12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
13. Фушнич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
14. Фушнич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1981, **12**, вып. 3, 1157–1219.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., Наука, 1973, 416 с.
16. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 183 с.
17. Пухначев Вл.В., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 1, 83–90.
18. Данилов Ю.А., Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье–Стокса, Препринт, АН СС-СР, Ин-т атом. энергии, М., 1967, 15 с.
19. Фушнич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
20. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.
21. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie-Bäcklund transformations in applications, Philadelphia, 1979, 150 p.
22. Сорокин В.С., О внутреннем трении жидкостей и газов, обладающих скрытым моментом импульса, *Журн. эл. техн. физики*, 1943, **13**, 306–314.
23. Шлиомис М.И., Динамика жидких парамагнетиков, Пермь, Перм. ун-т, 1983, 68 с.
24. Славущий С.Л., Групповые свойства некоторых уравнений гидрогазодинамики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 71–74.
25. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Дифф. ур-ния*, 1983, **19**, № 7, 1215–1224.
26. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498–502.

# Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК

Описание подгрупповой структуры группы Ли используется при решении ряда задач теоретической и математической физики: разделение переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных [1], построение точных частных решений нелинейных дифференциальных уравнений [2], редукция представлений группы на подгруппы [3].

Систематическое изучение непрерывных подгрупп неоднородных групп преобразований квантовой механики начато в работе [4], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечномерной алгебры Ли  $L$  с нетривиальным абелевым идеалом  $N$  и полупростой фактор-алгеброй  $L/N$ . Этим методом проведена классификация подалгебр алгебр Ли групп Пуанкаре  $P(1,3)$  [4],  $P(1,4)$  [5, 6] и групп Евклида  $E(3)$  [7],  $E(4)$  [8].

В настоящей работе дается дальнейшее уточнение общего метода из [4], позволяющее свести проблему классификации относительно  $E(n)$ -сопряженности подалгебр алгебры Евклида  $LE(n)$  к описанию относительно  $O(n)$ -сопряженности неприводимых частей подалгебр алгебры  $LO(n)$ . В качестве применения полученных общих результатов дано описание максимальных абелевых подалгебр алгебры  $LE(n)$ ,  $n \geq 2$ , и всех подалгебр алгебры  $LE(5)$ .

Пусть  $R$  — поле вещественных чисел,  $R^n$  —  $n$ -мерное арифметическое пространство над  $R$ ,  $O(n)$  — группа ортогональных матриц порядка  $n$ ,  $\langle X_1, \dots, X_s \rangle$  — векторное пространство или алгебра Ли над полем  $R$  с базисом  $X_1, \dots, X_s$ . Группой Евклида  $E(n)$  называется мультипликативная группа матриц  $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $A \in O(n)$ ,  $X \in R^n$ . Через  $LG$  обозначим алгебру Ли группы Ли  $G$ . Алгебра Евклида  $LE(n)$  определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \\ [P_a, P_b] = 0, \quad J_{ba} = -J_{ab}, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, n.$$

Генераторы поворотов  $J_{ab}$  порождают алгебру  $LO(n)$ , а генераторы трансляций  $P_c$  — коммутативный идеал  $N$ , причем  $LE(n) = N \dot{+} LO(n)$ . Алгебру  $LO(n)$  мы рассматриваем как алгебру косимметрических матриц порядка  $n$  над  $R$ , дополненных снизу и справа соответственно нулевой строкой и нулевым столбцом, а  $P_1, P_2, \dots, P_n$  считаем единичными векторами векторного пространства

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in R^n \right\}.$$

При этих предположениях получаем, что если  $Y \in LO(n)$ , а  $Z \in N$ , то  $[Y, Z] = Y \cdot Z$ .

Пусть  $C$  — такая матрица порядка  $n + 1$  над  $R$ , что отображение  $\varphi_C : X \rightarrow CXC^{-1}$  является автоморфизмом  $LE(n)$ . Если  $C \in E(n)$ , то  $\varphi_C$  называется  $E(n)$ -автоморфизмом. Если

$$C = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in R, \quad \lambda > 0,$$

то автоморфизм  $\varphi_C$  называется гомотетией.

Подалгебры  $K$  и  $K'$  алгебры  $LE(n)$  называются  $E(n)$ -сопряженными, если  $\varphi_C(K) = K'$  для некоторого  $E(n)$ -автоморфизма  $\varphi_C$  алгебры  $LE(n)$ .

Пусть  $\pi$  — проектирование алгебры  $LE(n)$  на  $LO(n)$ ,  $F$  — подалгебра  $LO(n)$ ,  $\hat{F}$  — такая подалгебра алгебры  $LE(n)$ , что  $\pi(\hat{F}) = F$ . Если алгебра  $\hat{F}$   $E(n)$ -сопряжена алгебре  $M \dot{+} F$ , где  $M$  есть  $F$ -инвариантное подпространство пространства  $N$ , то  $\hat{F}$  будем называть расщепляемой в алгебре  $LE(n)$ . Если любая подалгебра  $\hat{F} \subset LE(n)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(\hat{F}) = F$ , является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра  $F$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $LE(n)$ .

**Теорема 1.** *Подалгебра  $F \subset LO(n)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $LE(n)$  тогда и только тогда, когда  $F$  полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры  $LO(n - 1)$ .*

**Доказательство.** Нетрудно убедиться в справедливости теоремы для коммутативных подалгебр алгебры  $LO(n)$ . Пусть  $F$  — некоммутативная подалгебра алгебры  $LO(n)$ , не сопряженная подалгебре алгебры  $LO(n - 1)$ . Тогда  $F = D \oplus Q$ , где  $D$  — центр,  $Q$  — фактор Леви. Так как по теореме Уайтхеда полупростые алгебры обладают только расщепляемыми расширениями, то можно предполагать, что  $Q \subset F$ . Если из условия  $[Q, X] = 0$ ,  $X \in N$ , вытекает  $X = 0$ , то вследствие полупростоты  $Q$ -подпространств пространства  $N$  можно утверждать, что  $D \subset F$ .

Допустим, что для некоторого ненулевого элемента  $X \in N$  выполняется  $[Q, X] = 0$ . Обозначим через  $M$  максимальное подпространство пространства  $N$ , имеющее свойство  $[Q, M] = 0$ . Если  $\dim M = n - k$ ,  $0 < k < n$ , то можно предполагать, что  $M = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$ . Но тогда  $Q \subset LO(k)$ . Отсюда и из тождества Якоби вытекает, что  $[D, M] \subset M$ , а потому  $D$  является подалгеброй алгебры  $LO(k) \oplus LO(M)$ . Пусть  $D'$  — проекция  $D$  на  $LO(M)$ . Поскольку  $F$  не сопряжена подалгебре алгебры  $LO(n - 1)$ , то  $D'$  имеет только расщепляемые расширения в  $M \dot{+} LO(M)$ . Отсюда следует, что  $D \subset F$ . Теорема доказана.

Пусть  $F = D \oplus Q$  — разложение подалгебры  $F \subset LO(n)$  в прямую сумму центра  $D$  и фактора Леви  $Q$ . Обозначим через  $W$  максимальное подпространство  $N$ , обладающее тем свойством, что  $[F, W] = 0$ . Если  $\dim W = n - k$ ,  $0 \leq k < n$ , то можно предполагать, что  $W = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$ . Но тогда  $F \subset LO(k)$ . Отсюда в силу теоремы 1 заключаем, что алгебра  $\hat{F} \subset LE(n)$  со свойством  $\pi(\hat{F}) = F$  допускает разложение  $\hat{F} = V \dot{+} (D' \oplus Q)$ , где  $V$  — подпространство  $N$ , инвариантное относительно  $F$ , а  $D'$  — подалгебра прямой суммы алгебр  $D$  и  $\langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$ . Алгебры типа  $D'$  можно классифицировать с помощью метода Ли–Гурса [4].

Из полученных результатов вытекает, что для описания подалгебр алгебры  $LE(n)$  важно решить вопрос о структуре подпространств пространства  $N$ , инвариантных относительно  $F \subset LO(n)$ .

Подалгебра  $F$  алгебры  $LO(n)$ ,  $n \geq 2$ , называется неприводимой, если тривиальное представление  $F$  в  $LO(n)$  является неприводимым.

Тривиальное представление  $\Gamma$  ненулевой алгебры  $F \subset LO(n)$  в  $LO(n)$  вполне приводимо:  $\Gamma = \text{diag} [\Gamma_1, \dots, \Gamma_p]$ , где  $\Gamma_i$  — неприводимое представление  $F$  в  $LO(W_i)$ ,  $W_i \subset N$  и  $\dim W_i \geq 2$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $m \leq p$ . Пусть  $F_i = \{\text{diag} [0, \dots, \Gamma_i(X), \dots, 0] \mid X \in F\}$ . Очевидно,  $F_i$  — неприводимая подалгебра алгебры  $LO(W_i)$ . Алгебру  $F_i$  будем называть неприводимой частью алгебры  $F$ . Если  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_j$  суть эквивалентные представления, то будем предполагать, что для любого  $X \in F$  выполняется равенство  $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$ .

Объединив эквивалентные неприводимые ненулевые представления, получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления  $\Gamma$ . Соответствующие им подалгебры алгебры  $LO(n)$ , построенные по тому же правилу, что и неприводимые части  $F_i$ , будем называть примарными частями алгебры  $F$ .

**Лемма.** Пусть  $F$  — неприводимая подалгебра алгебры  $LO(n)$ . Группа автоморфизмов алгебры  $N \dot{+} F$  разлагается в прямое произведение группы  $E(n)$ -автоморфизмов и группы гометхий.

**Доказательство.** Пусть  $D \oplus Q$  — разложение  $F$  в прямую сумму центра  $D$  и фактора Леви  $Q$ . Если  $\varphi$  — автоморфизм алгебры  $N \dot{+} F$ , то  $\varphi(N \dot{+} D) = N \dot{+} D$  и с точностью до  $E(n)$ -автоморфизмов  $\varphi(Q) = Q$ . Вследствие неприводимости  $F$  имеем  $\varphi(N) = N$ . Поскольку  $F$  не сопряжена подалгебре алгебры  $LO(n-1)$ , то на основании теоремы 1  $\varphi(D) = D$ .

Так как  $[\varphi(X), \varphi(P_j)] = \varphi([X, P_j])$ , то для каждого  $X \in F$  матрица оператора  $\varphi(X)$  в базисе  $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \dots, \varphi(P_n)$  совпадает с матрицей оператора  $X$  в базисе  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Отсюда вытекает, что если  $B$  — матрица перехода от базиса  $P_1, P_2, \dots, P_n$  к базису  $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \dots, \varphi(P_n)$ , то  $BXB^{-1} = \varphi(X)$ . Матрицу  $B$  можно записать в виде  $TU$ , где  $T$  — положительно определенная симметрическая, а  $U$  — ортогональная матрицы. Используя лемму Шура, получаем  $T = \lambda E$ , где  $\lambda > 0$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $K_1, K_2, \dots, K_q$  — примарные части ненулевой подалгебры  $F$  алгебры  $LO(n)$ ,  $M$  — подпространство пространства  $N$ , инвариантное относительно  $F$ . Тогда  $M = M_1 \oplus M_s \oplus \dots \oplus M_q \oplus \tilde{M}$ , где  $M_i = [K_i, M_i] = [K_i, M]$ ,  $[K_j, M_i] = 0$  при  $j \neq i$ ,  $\tilde{M} = \{X \in M \mid [F, X] = 0\}$ . Если примарная алгебра  $K$  является подпрямой суммой неприводимых подалгебр  $S_1, S_2, \dots, S_r$  соответственно алгебр  $LO(W_1), LO(W_2), \dots, LO(W_r)$ , то относительно  $O(n)$ -сопряженности ненулевые подпространства  $W$  пространства  $N$  с условием  $[K, W] = W$  исчерпываются пространствами:  $W_1, W_1 \oplus W_2, \dots, W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ .

**Доказательство.** Так как  $M = \tilde{M} \oplus \tilde{M}^\perp$ , то будем предполагать, что  $\tilde{M} = 0$ . Пусть  $K_i$  — подпрямая сумма неприводимых частей  $K_{i1}, \dots, K_{is_i}$ ,  $M_{ij} = [K_{ij}, M]$ ,  $\pi_{ij}$  — проектированием  $M$  на  $M_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, q$ ;  $j = 1, \dots, s_i$ . Допустим, что  $\pi_{ab}(M) \neq 0$ . На основании леммы и теоремы Ли–Гурса [4] о подалгебрах прямой суммы алгебр в пространстве  $M$  существует такое максимальное  $F$ -инвариантное подпространство  $V$ , что  $\pi_{ab}(V) \neq 0$  и  $\pi_{cd}(V) = 0$ , где  $1 \leq c \leq q$ ,  $c \neq a$ ,  $1 \leq d \leq s_c$ . Отсюда следует, что в  $M$  существует максимальное  $F$ -инвариантное подпространство  $U_{ab}$  со свойством:  $\pi_{ab}(U_{ab}) \neq 0$ ,  $\pi_{cd}(U_{ab}) = 0$  для всех  $c \neq a$ ,  $d = 1, 2, \dots, s_c$ . Очевидно,  $M_a = U_{ab}$ .

Пусть примарная алгебра  $K$  является подпрямой суммой неприводимых подалгебр  $S_1, S_2, \dots, S_r$  соответственно алгебр  $LO(W_1), LO(W_2), \dots, LO(W_r)$ , где

$W_i = \langle P_{(i-1)k+1}, P_{(i-1)k+2}, \dots, P_{ik} \rangle$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Если  $[K, W] = W$  и  $W \neq 0$ , то переставляя, если это необходимо, подалгебры  $S_1, S_2, \dots, S_r$ , можно предполагать, что  $W$  содержит элементы  $P_j + \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j P_{j_{k+i}}$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Пусть

$$C_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}E & 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}E \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}E & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}E \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, r-1,$$

$${}^t E = \text{diag} \left[ \underbrace{E, \dots, E}_t \right],$$

где  $E$  — единичная матрица порядка  $k$ . Очевидно,  $C_j(\lambda) \in O(jk + k)$ . Легко получаем

$$C_1(\lambda) \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} C_1(\lambda) \quad (1)$$

для любой матрицы  $X$  порядка  $k$  и

$$C_1(\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_k \end{pmatrix} = \sqrt{1+\lambda^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Пусть  $\varphi_{A_j}$  — автоморфизм  $LE(rk)$ , соответствующий матрице  $A_j = \text{diag} [C_j(\lambda), (r-j-1)E]$ . На основании равенства (1), (2) имеем  $\varphi_{A_j}(K) = K$ , и автоморфизм

$$\varphi_{A_{r-1}}(\lambda_{r-1}) \varphi_{A_{r-2}}(\lambda_{r-2}) \cdots \varphi_{A_1}(\lambda_1)$$

отображает  $W$  на  $W_1 \oplus W'$ , где  $W'$  — подпространство пространства  $W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ . Остается применить индуктивное предположение. Теорема доказана.

Известно, что  $LO(n)$  обладает относительно  $O(n)$ -сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с подалгеброй Картана  $\mathfrak{K}(n) = \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1, 2m} \rangle$ ,  $m = [n/2]$ . Отсюда вытекает, что алгебра  $\mathfrak{K}(n) = N \dot{+} \mathfrak{K}(n)$  является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры  $LE(n)$  и каждая максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $LE(n)$  сопряжена с  $\mathfrak{K}(n)$ .

Очевидно,  $\langle J_{12} \rangle$  — неприводимая подалгебра алгебры  $LO(2)$ . Примарные части алгебры  $F \subset \mathfrak{K}(n)$  можно найти таким способом.

Зафиксируем некоторый базис  $Y_1, \dots, Y_t$  алгебры  $F$ . Если  $Y_j$  — такой первый базисный вектор  $F$ , что его проекция на  $\langle J_{2k-1,2k} \rangle$  отлична от нуля, то считаем, что коэффициент при  $J_{2k-1,2k}$  в  $Y_j$  является положительным числом. В каждом базисном элементе алгебры  $F$  соберем слагаемые с коэффициентами, равными по модулю, вынесем за скобки модуль коэффициентов, а затем в полученных выражениях выделим суммы, содержащие максимально возможное число слагаемых с одним и тем же знаком. Пусть  $S = \{X_1, \dots, X_l\}$  — множество всех таких сумм, взятых со знаком  $+$ . Если  $X_i$  и  $X_j$  имеют общие слагаемые, то из множества  $S$  исключаем  $X_i, X_j$  и вводим  $X_i \cap X_j, X_i - X_i \cap X_j, X_j - X_i \cap X_j$ , где  $X_i \cap X_j$  — сумма общих слагаемых элементов  $X_i, X_j$ . В полученном множестве снова находим ненулевые пересечения его элементов и производим дальнейшее преобразование множества  $S$ . На конечном шаге мы получим множество  $\{H_1, H_2, \dots, H_a\}$ , в котором  $H_i, H_j$  не имеют общих слагаемых при  $1 \leq i < j \leq a$ . Алгебры  $\langle H_1 \rangle, \langle H_2 \rangle, \dots, \langle H_a \rangle$  суть примарные части алгебры  $F$ .

На основании теорем 1, 2 можно доказать такие утверждения.

**Предложение 1.** *Каждая разрешимая подалгебра алгебры  $LE(n)$  сопряжена с  $W \dot{+} A$ , где  $W \subset N$ ,  $A$  — абелева подалгебра.*

**Предложение 2.** *Каждая нильпотентная подалгебра алгебры  $LE(n)$  является абелевой.*

**Предложение 3.** *Пусть  $m = [n/2]$ ,  $\delta = 0$  при  $n = 2m$ ,  $\delta = 1$  при  $n = 2m + 1$ . Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $LE(n)$  исчерпываются относительно  $E(n)$ -сопряженности такими алгебрами:*

$$\begin{aligned} &\langle P_1, P_2, \dots, P_n \rangle, \quad \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1,2m}, \delta P_n \rangle, \\ &\langle P_1, P_2, \dots, P_{2r}, \delta P_n, J_{2r+1,2r+2}, \dots, J_{2m-1,2m} \rangle, \end{aligned}$$

где  $r = 1, 2, \dots, m - 1$ . Число максимальных абелевых подалгебр алгебры  $LE(n)$  равно  $m + 1$ .

Если речь идет об алгебрах  $W_1 \dot{+} F, \dots, W_s \dot{+} F$ , то используем обозначение  $F : W_1, \dots, W_s$ .

**Теорема 3.** *Относительно  $E(5)$ -сопряженности подалгебры алгебры  $LE(5)$  исчерпываются такими алгебрами:*

$$\begin{aligned} &0, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12} \rangle: 0, \langle P_3 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3 \rangle, \langle P_3, P_4, P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \\ &\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle: 0, \langle P_5 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_5 \rangle, \langle P_3, P_4, P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \\ &\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle, 0 < \alpha < 1; \\ &\langle J_{12} + J_{34} \rangle: 0, \langle P_5 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_2, P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12}, J_{34} \rangle: 0, \langle P_5 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_2, P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle: 0, \langle P_4 \rangle, \langle P_4, P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle: 0, \langle P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35} \rangle: 0, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} \rangle: 0, \langle P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45} \rangle: 0, \langle P_4, P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &LO(4): 0, \langle P_5 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &LO(5): 0, \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle; \\ &\langle J_{12} + aP_5 \rangle: 0, \langle P_3 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, a > 0; \end{aligned}$$

- $\langle J_{12} + \alpha J_{34} + aP_5 \rangle: 0, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, 0 < \alpha < 1, a > 0;$   
 $\langle J_{12} + J_{34} + aP_5 \rangle: 0, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, a > 0;$   
 $\langle J_{12} + aP_5, J_{34} + bP_5 \rangle: 0, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle P_3, P_4 \rangle, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, a > 0, b \geq 0;$   
 $\langle J_{12} - J_{34} + aP_5, J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle: 0, \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, a > 0.$

Теорема 3 доказывается на основании теорем 1, 2 с использованием предложенного алгоритма для нахождения примарных частей подалгебр подалгебры Картана  $\mathfrak{K}(n)$ . Как видно из теоремы 3, алгебра  $LO(5)$  обладает двумя неприводимыми подалгебрами:  $LO(5), \langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35} \rangle$ .

1. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981, 342 с.
2. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Никитин А.Г., Фушич В.И., Юрик И.И., Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам, *Теор. мат. физика*, 1976, **26**, № 2, 206–220.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
5. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре  $P(1, 4)$ , *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717–722.
6. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре  $P(1, 4)$ , *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
7. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.
8. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.



# О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа

В.И. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНИГА

В работе исследуются два нелинейных уравнения шредингеровского типа в пространстве переменных  $(t, x_1, x_2, x_3)$ :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = k \Delta \Psi + \lambda \Psi (\Psi^*)^{2/3},$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = k \Delta \Psi + \lambda \Psi \frac{\partial (\Psi^*)}{\partial x_a} \frac{\partial (\Psi^*)}{\partial x_a} (\Psi^*)^{-2}.$$

Доказано, что эти уравнения сохраняют группу симметрии линейного уравнения Шредингера. Проведена редукция по системе несопряженных одномерных подалгебр, в ряде случаев найдены точные решения полученных редукционных уравнений, по которым, с помощью соответствующих анзацев построены точные решения исходных нелинейных уравнений. В частности, получены солитоноподобные решения. С использованием свойств симметрии выведены формулы размножения решений и многопараметрические семейства решений.

В работе также описаны широкие классы систем дифференциальных уравнений второго порядка, инвариантные относительно группы Галилея и некоторых ее обобщений.

## § 1. Введение

Максимальной локальной (в смысле Ли) группой инвариантности линейного уравнения Шредингера

$$i \Psi_t = k \Delta \Psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad (1)$$

где  $\Psi_t = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{R}^1$ ,  $\Psi(t, x) = U(t, x) + iV(t, x)$ ,  $U, V$  — действительные функции, является обобщенная группа Галилея  $G_2(1, n)$  (см., например, [1–3]), т.е. группа Галилея  $G(1, n)$ , дополненная группами масштабных и проективных преобразований. Символами  $AG(1, n)$ ,  $AG_2(1, n)$  будем обозначать алгебры Ли групп  $G(1, n)$  и  $G_2(1, n)$  соответственно. Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности (АИ) уравнения (1) имеют вид

$$P_\nu = \partial_\nu, \quad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \nu = \overline{0, n}, \quad x_0 = t, \quad (2a)$$

$$J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n}, \quad (2b)$$

$$J = u \partial_v - v \partial_u, \quad G_a = t \partial_a - \frac{x_a}{2k} J, \quad \partial_V = \frac{\partial}{\partial V}, \quad \partial_U = \frac{\partial}{\partial U}, \quad (2c)$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}(U\partial_U + V\partial_V), \quad (2d)$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4k}J - \frac{nt}{2}(U\partial_U + V\partial_V), \quad |x|^2 = x_a x_a. \quad (2e)$$

(По повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование.)

В работах [4, 5] построены широкие классы нелинейных обобщений уравнения теплопроводности, инвариантные относительно группы  $G_2(1, n)$  и ее подгрупп.

В настоящей работе, являющейся естественным продолжением статьи [5], описаны все нелинейные обобщения уравнения (1) вида

$$i\Psi_t = A_{ab}(\Psi, \Psi^*) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_a \partial x_b} + B(\Psi, \Psi^*, \Psi_1^*, \Psi_1^*),$$

$$\Psi_1 = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right), \quad \Psi_1^* = \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_n} \right), \quad (3)$$

$$\Psi = U + iV, \quad \Psi^* = U - iV, \quad \Psi\Psi^* = |\Psi|^2,$$

где  $A_{ab}$ ,  $a, b = \overline{1, n}$ ,  $B$  — произвольные дифференцируемые комплексные функции, инвариантные относительно алгебр  $AG_2(1, n) \subset AG_1(1, n) \subset AG(1, n)$ , где  $AG_1(1, n)$  — алгебра Галилея  $AG(1, n)$ , дополненная оператором масштабных преобразований  $D$ .

Оказывается, что все уравнения вида (3), инвариантные относительно алгебр  $AG_2(1, n)$  с базисными элементами (2), эквивалентны уравнению

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \Psi(\Psi\Psi^*)^{2/n}F(\Theta), \quad (4)$$

где

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\Psi^*) \frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\Psi^*) / (\Psi\Psi^*)^{2+2/n}, \quad (5)$$

$F$  — произвольная функция.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением следующих двух уравнений вида (4) ( $n = 3$ ):

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi(\Psi\Psi^*)^{2/3}, \quad \lambda = \text{const}, \quad (6)$$

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda \frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\Psi^*) \frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\Psi^*) / (\Psi\Psi^*)^2. \quad (7)$$

Воспользовавшись симметричными свойствами этих уравнений, т.е. инвариантностью относительно группы  $G_2(1, 3)$ , построим многопараметрические семейства точных решений уравнений (6) и (7).

В § 2 проведена редукция нелинейных уравнений (6), (7) по системе несопряженных одномерных подалгебр алгебры  $AG(1, 3)$  к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП) для функций, зависящих лишь от трех инвариантных переменных.

В § 3 с помощью преобразований из группы  $G_2(1, 3)$ , порождаемых операторами  $AG_2(1, 3)$ , получены формулы размножения решений для уравнений (6), (7).

Параграфы 4, 5, 7 посвящены построению явных точных решений уравнений (6), (7). Для этого используются редукционные уравнения (§ 2) и формулы раз-множения решений (§ 3).

Параграф 6 содержит результаты теоретико-алгебраических исследований систем уравнений параболического типа. В частности, построенный в нем класс уравнений, инвариантных относительно группы  $G_2(1, n)$ , содержит уравнение (4).

**§ 2. Редукция нелинейных уравнений (6), (7)**

Уравнения (6) и (7) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли  $AG_2(1, 3)$ . Эта алгебра в качестве подалгебры содержит 11-мерную алгебру Галилея  $AG(1, 3)$ . В работе [6] построена система всех несопряженных одномерных подалгебр алгебры Галилея. Эти подалгебры генерируются операторами

$$\begin{aligned}
 X_1 &= P_1, & X_2 &= J = i \left( \Psi \frac{\partial}{\partial \Psi} - \Psi^* \frac{\partial}{\partial \Psi^*} \right), & X_3 &= P_0, & X_4 &= J + \beta P_0, \\
 X_5 &= J_{12}, & X_6 &= J_{12} + \alpha P_3, & X_7 &= J_{12} + \alpha P_0, & X_8 &= J_{12} + \alpha P_0 + \beta J, \\
 X_9 &= J_{12} + \beta J, & X_{10} &= G_2 + \alpha P_2, & X_{11} &= G_1, & X_{12} &= G_1 + \alpha P_0, \\
 X_{13} &= J_{12} + \beta G_3, & X_{14} &= J_{12} + \alpha P_0 + \beta G_3, & \alpha, \beta &\in \mathbb{R}^1, & \alpha \cdot \beta &\neq 0.
 \end{aligned}$$

Решая соответствующие уравнения Лагранжа для каждого из операторов (8), получаем три инвариантные переменные  $w_1, w_2, w_3$ , зависящие от  $t, x_1, x_2, x_3$ , а также анзацы для искомой функции  $\Psi = U + iV$ . Исключение составляет только “единичный” оператор  $J$ , которому очевидно соответствуют 4 инвариантные переменные  $t, x_1, x_2, x_3$  и дополнительное функциональное условие на компоненты  $U, V$ . Результаты решения уравнений Лагранжа приведены в таблице 1.

Таблица 1

Подалгебры	Инвариантные переменные	Анзацы $w = (w_1, w_2, w_3)$
$X_1$	$t, x_2, x_3$	$\Psi(t, x) = \varphi(w)$
$X_2$	$t, x_1, x_2, x_3$	$\Psi(t, x) = \varphi(t, x), \Psi^* \Psi = \gamma^2$
$X_3$	$x_1, x_2, x_3$	$\Psi = \varphi(w)$
$X_4$	$x_1, x_2, x_3$	$\Psi = \exp(it/\beta) \varphi(w)$
$X_5$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \varphi(w)$
$X_6$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3 - \alpha \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$\Psi = \varphi(w)$
$X_7$	$t - \alpha \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \varphi(w)$
$X_8$	$t - \alpha \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \exp(i\beta t/\alpha) \varphi(w)$
$X_9$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \exp \left( i\beta \arctg \frac{x_2}{x_1} \right) \varphi(w)$
$X_{10}$	$t, \alpha x_1 - tx_2, x_3$	$\Psi = \exp \left( -\frac{ix_1^2}{4xt} \right) \varphi(w)$
$X_{11}$	$t, -tx_2, x_3$	$\Psi = \exp \left( -\frac{ix_1^2}{4xt} \right) \varphi(w)$
$X_{12}$	$2\alpha x_1 - t^2, x_2, x_3$	$\Psi = \exp \left[ -\frac{it}{2x\alpha} \left( x_1 - \frac{t^2}{3\alpha} \right) \right] \varphi(w)$
$X_{13}$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3 - \beta t \arctg \frac{x_2}{x_1}$	$\Psi = \exp \left( -\frac{ix_1^2}{4xt} \right) \varphi(w)$
$X_{14}$	$t - \alpha \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, 2\alpha x_3 - \beta t^2$	$\Psi = \exp \left[ -\frac{i\beta t}{2x\alpha} \left( x_3 - \frac{\beta t^2}{3\alpha} \right) \right] \varphi(w)$

Используя инварианты и анзацы из таблицы 1, проведем редукцию уравнений (6) и (7) для каждого оператора  $X_1, X_2, \dots, X_{14}$ . В результате получаем следующие уравнения (функции  $\varphi$  с индексами  $w_1, w_2, w_3$  везде обозначают производные по этим переменным):

$$X_1: i\varphi_t = k(\varphi_{w_2 w_2} + \varphi_{w_3 w_3}) + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3}, \quad w_1 = t, \quad (9a)$$

$$i\varphi_t = k(\varphi_{w_2 w_2} + \varphi_{w_3 w_3}) + \lambda\varphi[(\varphi^*)_{w_2}^2 + (\varphi^*)_{w_3}^2](\varphi^*)^{-2}; \quad (9b)$$

$$X_2: i\varphi_t = k\Delta\varphi + \lambda\gamma^{4/3}\varphi, \quad \varphi^* = \gamma^2, \quad \gamma \in \mathbb{R}^1, \quad (10a)$$

$$i\varphi_t = k\Delta\varphi, \quad \varphi^* = \gamma^2; \quad (10b)$$

$$X_3 (\beta \rightarrow \infty), X_4: k\Delta\varphi + \varphi/\beta + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3} = 0, \quad (11a)$$

$$k\Delta\varphi + \varphi/\beta + \lambda\varphi(\varphi^*)_{x_a}(\varphi^*)_{x_a}/(\varphi^*)^2 = 0, \quad w_a = x_a; \quad (11b)$$

$$X_5 (\alpha = 0), X_6: i\varphi_t = k[4\varphi_{w_2} + 4w_2\varphi_{w_2 w_2} + (1 + \alpha^2/w_2)\varphi_{w_3 w_3}] + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3}, \quad w_1 = t, \quad (12a)$$

$$i\varphi_t = 4w_2 \left[ k\varphi_{w_2 w_2} + \frac{k}{w_2}\varphi_{w_2} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_2}^2(\varphi^*)^{-2} \right] + (1 + \alpha^2/w_2) \left[ k\varphi_{w_3 w_3} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_3}^2(\varphi^*)^{-2} \right]; \quad (12b)$$

$$X_7 (\beta = 0), X_8: i\varphi_{w_1} = k \left( \frac{\alpha^2}{w_2}\varphi_{w_1 w_1} + 4\varphi_{w_2} + 4w_2\varphi_{w_2 w_2} + \varphi_{w_3 w_3} \right) + \frac{\beta}{\alpha}\varphi + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3}, \quad (13a)$$

$$i\varphi_{w_1} - \frac{\beta}{\alpha}\varphi = \frac{\alpha^2}{w_2} \left[ k\varphi_{w_1 w_1} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_1}^2(\varphi^*)^{-2} \right] + 4w_2 \left[ k\varphi_{w_2 w_2} + \frac{k}{w_2}\varphi_{w_2} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_2}^2(\varphi^*)^{-2} \right] + k\varphi_{w_3 w_3} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_3}^2/(\varphi^*)^2; \quad (13b)$$

$$X_9: i\varphi_t = k(4w_2\varphi_{w_2 w_2} + 4\varphi_{w_2} + \varphi_{w_3 w_3}) - \frac{k\beta^2}{w_2}\varphi + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3}, \quad w_1 = t, \quad (14a)$$

$$i\varphi_t + \frac{k\beta^2}{w_2}\varphi = 4w_2 \left[ k\varphi_{w_2 w_2} + \frac{k}{w_2}\varphi_{w_2} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_2}^2(\varphi^*)^{-2} \right] + k\varphi_{w_3 w_3} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_3}^2(\varphi^*)^{-2}; \quad (14b)$$

$$X_{10}, X_{11} (\alpha = 0): i \left[ \varphi_t + \frac{\varphi + 2w_2\varphi_{w_2}}{2t} \right] = \quad (15a)$$

$$= k(\alpha^2 + t^2)\varphi_{w_2 w_2} + k\varphi_{w_3 w_3} + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3},$$

$$i \left[ \varphi_t + \frac{\varphi + 2w_2\varphi w_2}{2t} \right] = (\alpha^2 + t^2) \left[ k\varphi_{w_2w_2} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_2}^2 (\varphi^*)^{-2} \right] + \quad (15b)$$

$$+ k\varphi_{w_3w_3} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_3}^2 (\varphi^*)^{-2}, \quad w_1 = t;$$

$$X_{12} : \frac{w_1}{4k\alpha^2}\varphi = 4k\alpha^2\varphi_{w_1w_1} + k(\varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_3w_3}) + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3}, \quad (16a)$$

$$\frac{w_1}{4k\alpha^2}\varphi = k(4\alpha^2\varphi_{w_1w_1} + \varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_3w_3}) + \quad (16b)$$

$$+ \lambda\varphi(\varphi^*)^{-2} \left[ 4\alpha^2(\varphi^*)_{w_1}^2 + (\varphi^*)_{w_2}^2 + (\varphi^*)_{w_3}^2 \right];$$

$$X_{13} : i \left[ \varphi_t + \frac{\varphi + 2w_3\varphi w_3}{2t} \right] = \quad (17a)$$

$$= k \left[ 4w_2\varphi_{w_2w_2} + \left( 1 + \frac{\beta^2 t^2}{w_2} \right) \varphi_{w_3w_3} \right] + \lambda(\varphi^*)^{2/3},$$

$$i \left[ \varphi_t + \frac{\varphi + 2w_3\varphi w_3}{2t} \right] = 4w_2 \left[ k\varphi_{w_2w_2} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_2}^2 (\varphi^*)^{-2} \right] + \quad (17b)$$

$$+ \left( 1 + \frac{\beta^2 t^2}{w_2} \right) \left[ k\varphi_{w_3w_3} + \lambda\varphi(\varphi^*)_{w_3}^2 (\varphi^*)^{-2} \right];$$

$$X_{14} : i\varphi_{w_1} = k \left[ \frac{\alpha^2}{w_2}\varphi_{w_1w_1} + 4(w_2\varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_2}) + 4\alpha^2\varphi_{w_3w_3} \right] - \quad (18a)$$

$$- \frac{\beta}{4k\alpha^2}w_3\varphi + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3},$$

$$i\varphi_{w_1} + \frac{\beta}{4k\alpha^2}w_2\varphi = k \left[ \frac{\alpha^2}{w_2}\varphi_{w_1w_1} + 4(w_2\varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_2}) + 4\alpha^2\varphi_{w_3w_3} \right] + \quad (18b)$$

$$+ \lambda\varphi(\varphi^*)^{-2} \left[ \frac{\alpha^2}{w_2}(\varphi^*)_{w_1}^2 + 4 \left( w_2(\varphi^*)_{w_2}^2 + \alpha^2(\varphi^*)_{w_3}^2 \right) \right].$$

**Замечание 1.** Редукционные уравнения, соответствующие операторам  $X_3$ ,  $X_5$ ,  $X_7$  и  $X_{11}$ , следуют соответственно из уравнений (11), (12), (13) и (15) при условиях, указанных возле этих операторов. Уравнения (9а), (10а), ..., (18а) получены редукцией уравнения (6), а (9б), (10б), ..., (18б) — редукцией уравнения (7).

**Замечание 2.** Если в уравнениях (6) и (7) провести разделение переменных по инвариантам, соответствующим проективному оператору (2е), то получим уравнения (11) при  $\beta \rightarrow \infty$  с инвариантными переменными  $w_1 = x_1/t$ ,  $w_2 = x_2/t$ ,  $w_3 = x_3/t$ . Следовательно, инвариантные решения соответствующие оператору (2е) с точностью до преобразований группы  $G_2(1,3)$  совпадают с решениями, построенными по оператору временных трансляций  $P_0$ .

### § 3. Формулы размножения решений

Для получения явных формул размножения решений воспользуемся преобразованиями, генерируемыми базисными операторами (2) алгебры  $AG_2(1, 3)$ . Наиболее полезными для получения из известных решений существенно новых являются преобразования инвариантности, порождаемые операторами  $G_a$  (2с) и  $\Pi$  (2е). Решая соответствующие уравнения Ли, получаем преобразования Галилея

$$G_a: \quad \begin{aligned} t' &= t, \quad x'_a = x_a + \varepsilon_a t, \quad a = 1, 2, 3, \\ \Psi' &= \Psi \exp\left(-\frac{i\varepsilon_a}{2k}\left(x_a + \frac{\varepsilon_a t}{2}\right)\right), \quad \varepsilon_a \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (19)$$

и проективные преобразования

$$\Pi: \quad \begin{aligned} t' &= \frac{t}{1-pt}, \quad x'_a = \frac{x_a}{1-pt}, \quad a = 1, 2, 3, \\ \Psi' &= \Psi(1-pt)^{3/2} \exp\left(-\frac{ip|x|^2}{4k(1-pt)}\right), \quad p \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть  $W(t, x)$  — решение уравнения (6) или (7). Применяя к нему преобразования (19), получаем новое решение (штрихи ниже опускаются)

$$\Psi = W(t, x + \varepsilon t) \exp\left(\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{|\varepsilon|^2 t}{2}\right)\right), \quad (21)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ,  $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ .

После применения к решению (21) преобразований (20) находим более широкое семейство решений

$$\Psi = W\left(\frac{t}{1-pt}, \frac{x + \varepsilon t}{1-pt}\right) \exp\left[\frac{ip|x|^2 + 2\varepsilon x + |\varepsilon|^2 t}{4k(1-pt)}\right] (1-pt)^{-3/2}. \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что повторное применение формул (19), (20) к решению (22) приводит к этому же семейству решений (это следует и из общих свойств групп преобразований).

Выражение (22) естественно назвать формулой размножения решений уравнений (6), (7), построенной по операторам  $G_a$  (2с) и  $\Pi$  (2е). Обобщим эту формулу, применив преобразования сдвигов по координатам  $t, x$  и вращениям в пространстве (см. операторы (2а), (2b) при  $n = 3$ ):

$$t' = t + d_0^1, \quad x' = Ax + d^1, \quad \Psi' = \Psi, \quad (23)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = 1,$$

$d_0^1, d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$ ,  $c_{11}, \dots, c_{33}$  — действительные параметры;  $A$  — матрица вращения.

Используя группу преобразований (23), решение (22) обобщаем:

$$\Psi = W\left(\frac{t + d_0^1}{d_0 - pt}, \frac{Ax + \varepsilon t + d}{d_0 - pt}\right) (d_0 - pt)^{-3/2} \exp\left[\frac{ip|x|^2 + 2\varepsilon^1 x + |\varepsilon|^2 + b_0}{4k(d_0 - pt)}\right], \quad (24)$$

где  $d_0 = 1 - pd_0^1$ ,  $d = d^1 + \varepsilon d_0^1$ ,  $\varepsilon^1 = \varepsilon A + pd^1 A$ ,  $b_0 = p|d^1|^2 + 2\varepsilon d^1 + |\varepsilon|^2 d_0^1$ .

Наконец, воспользуемся однопараметрической группой масштабных преобразований, которую порождает оператор  $D$  (2d):

$$t' = m^2 t, \quad x' = m x, \quad \Psi' = m^{-3/2} \Psi, \quad m > 0 \quad (25a)$$

и 1-параметрической группой вращения компонент  $U, V$  функции  $\Psi$  (см. оператор  $J$  (1.2B)):

$$\Psi = e^{-i\alpha} \Psi, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1. \quad (25b)$$

Таким образом, окончательно получаем формулу размножения решений уравнений (6), (7)

$$\begin{aligned} \Psi = e^{i\alpha} \frac{m^{3/2}}{(d_0 - pm^2 t)^{3/2}} \exp \left[ i \frac{pm^2 |x|^2 + 2m\varepsilon^1 x + m^2 |\varepsilon|^2 t + b_0}{4k(d_0 - pm^2 t)} \right] \times \\ \times W \left( \frac{m^2 t + d_0^1}{d_0 - pm^2 t}, \frac{mA x + m^2 \varepsilon t + d}{d_0 - pm^2 t} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} d_0 = 1 - pd_0^1, \quad d = d^1 + \varepsilon d_0^1, \quad \varepsilon^1 = \varepsilon A + pd^1 A, \\ b_0 = p|d^1|^2 + 2\varepsilon d^1 + |\varepsilon|^2 d_0^1, \end{aligned} \quad (27)$$

$\det A = 1$ ,  $A$  — матрица вращений,  $d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  — действительные векторы,  $p, d_0^1, d, m > 0$  — действительные параметры.

**Теорема 1.** Если  $W(t, x)$  — решение нелинейного уравнения (6) или (7), то формула (26) определяет неразмножаемое семейство решений этого же уравнения.

**Доказательство.** Тот факт, что любая функция  $\Psi$  вида (26) будет решением уравнения (6), следует из только что проведенного размножения решения  $W(t, x)$  с помощью базисных операторов алгебры  $AG_2(1, 3)$ .

Неразмножаемость решений вида (26) с помощью 13-мерной группы, соответствующей алгебре  $AG_2(1, 3)$ , доказывается проверкой. А именно, поочередно действуем на решение (26) преобразованиями (19), (20), (23), (25), убеждаемся, что в результате получаем решение вида (26) (изменяются только параметры). Теорема доказана.

Пусть в (26)  $d_0 = 1/p$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $d = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $A = E$ , где  $E$  — единичная матрица. Тогда получаем решение

$$\Psi = \frac{m^{3/2}}{(-pm^2 t)^{3/2}} \exp \left( -\frac{i|x|^2}{4kt} \right) W \left( \frac{m^2 t + \frac{1}{p}}{-pm^2 t}, \frac{x}{-pmt} \right). \quad (28)$$

Сделав в (28) предельный переход

$$p \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad pm \rightarrow 1,$$

получим решение уравнения (6) или (7)

$$\Psi(t, x) = t^{-3/2} \exp \left( -\frac{i|x|^2}{4kt} \right) W \left( -\frac{1}{t}, \frac{x}{t} \right). \quad (29)$$

Формулу (29) можно рассматривать как обобщение известной теоремы Апеля–Бриля для многомерного нелинейного уравнения Шредингера.

**Замечание 3.** Построенные формулы размножения решений позволяют из действительных стационарных решений уравнений (6), (7), получать комплексные нестационарные (т.е. зависящие от времени  $t$ ) решения.

В заключение этого параграфа, отметим, что все приведенные выкладки по размножению решений (1 + 3)-мерных уравнений (6), (7) очевидным образом обобщаются на все уравнения вида (4) в случае любого количества переменных.

#### § 4. Точные решения уравнения (6)

В этом параграфе будут построены точные решения уравнения (6) путем нахождения частных решений соответствующих редукционных уравнений (см. § 2).

Редукция уравнения (6) по оператору  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  приводит к нелинейному уравнению (9а) такого же вида, только в пространстве переменных  $(w_1, w_2, w_3) = (t, x_2, x_3)$ . Для получения частных решений уравнения (9а) рассмотрим систему

$$i\varphi_t = \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3}, \quad \lambda \neq 0, \quad (30a)$$

$$\varphi_{x_2x_2} + \varphi_{x_3x_3} = 0. \quad (30b)$$

Очевидно, что произвольное решение системы (30) удовлетворяет уравнению (9а). Построим общее решение системы (30).

Представляя комплексную функцию  $\varphi$  через пару действительных функций  $R$  и  $P$ , по известной формуле

$$\varphi = R(t, x_2, x_3) \exp(iP(t, x_2, x_3)), \quad (31)$$

сводим уравнение (30а) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) первого порядка. Решая эти уравнения и используя (31), получаем общее решение (30а)

$$\varphi(t, x_2, x_3) = \begin{cases} (-D_2/\lambda)^{3/4} \exp(i(D_1 + D_2t)), & \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ \left(D_2 - \frac{4\beta}{3}t\right)^{-3/4(1-i\alpha/\beta)} \exp(iD_1), & \lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0, \end{cases} \quad (32)$$

где  $D_1(x_2, x_3)$ ,  $D_2(x_2, x_3)$  — произвольные действительные функции.

Подставляя выражение (32) в (30b), находим функции

$$D_1(x_2, x_3) = d_1, \quad D_2(x_2, x_3) = d_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, получаем общее решение системы (30)

$$\varphi = \begin{cases} (-d_2/\lambda)^{3/4} \exp(i(d_2t + d_1)), & \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ \left(d_2 - \frac{4\beta}{3}t\right)^{-3/4(1-i\alpha/\beta)} \exp(id_1), & \lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0, \end{cases} \quad (33)$$

которое является частным решением уравнения (9а), а следовательно, и решением исходного уравнения (6).



Множитель вида  $\exp(id_1)$  в дальнейшем в решениях уравнений (6), (7) опускается, так как любое решение этих уравнений можно на него умножить (см. (25b)).

Редукция уравнения (6) по оператору  $X_2$  приводит к нелинейному уравнению (10a) с дополнительным условием  $\varphi^* \varphi = \gamma^2$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , т.е., используя представление (31), получаем

$$\varphi = \gamma \exp iP(t, x), \tag{34}$$

где  $P(t, x)$  — действительная функция.

Подставляя (34) в уравнение (10a) и делая очевидные преобразования, получаем систему

$$\begin{aligned} P_t = kP_a P_a - \lambda \gamma^{4/3}, \quad P_a = \frac{\partial P}{\partial x_a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ \Delta P = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

которая заменой

$$P(t, x) = P^1(t, x) - \lambda \gamma^{4/3} t \tag{36}$$

сводится к системе

$$\begin{aligned} P_t^1 = kP_a^1 P_a^1, \quad P_a^1 \equiv \frac{\partial P^1}{\partial x_a}, \\ \Delta P^1 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Построим общее решение системы уравнений (37) в предположении  $P_t^1 = F(P^1)$ . Нетрудно показать, что тогда  $F = \alpha = \text{const}$ . Следовательно,

$$P^1 = \alpha(t + P^0(x)), \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{38}$$

где  $P^0(x)$  — действительная функция, удовлетворяющая нелинейной системе

$$\begin{aligned} P_a^0 P_a^0 = \frac{1}{\alpha k}, \quad P_a^0 \equiv \frac{\partial P^0}{\partial x_a}, \\ \Delta P^0 = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Как показано в работе [7], общее решение системы (39) в классе действительных функций имеет вид

$$P^0(x) = b_a^0 x_a + d^0, \quad b_a^0 b_a^0 = \frac{1}{\alpha k} > 0, \quad b_a^0, d^0 \in \mathbb{R}^1, \tag{40}$$

поэтому с учетом (36), (38) линейная функция  $P = b_a x_a + (k b_a b_a - \lambda \gamma^{4/3}) t + d$ ,  $b_a = b_a^0 \alpha$ ,  $d = d^0 \alpha$ , является решением системы (35).

Таким образом, используя (34), получаем решение уравнения (6) в виде плоской волны:

$$\Psi = \varphi = \gamma \exp i(b_a x_a + b_0 t), \quad b_0 = k b_a b_a - \lambda \gamma^{4/3}. \tag{41}$$

**Замечание 4.** Нетрудно убедиться, что система (37) не имеет радиальных решений вида  $P^1 = P^1(t, |x|^2)$ .

Редукция уравнения (6) по оператору  $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$  приводит к нелинейному эллиптическому уравнению (11a). Пусть в уравнении (11a)

$$\varphi = \varphi(w), \quad w = \alpha_a x_a, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1,$$

тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$k\alpha_a\alpha_a\varphi_{ww} + \lambda\varphi(\varphi^*)^{2/3} = 0. \quad (42)$$

В случае действительной функции  $\varphi$  это уравнение есть уравнение Эмдена–Фаулера, частным решением которого является функция [8]

$$\varphi = \beta/w^{3/2}, \quad \beta = (-15|\alpha|^2 k/4\lambda)^{3/4}, \quad \lambda k < 0.$$

Таким образом, получаем стационарное решение уравнения (6):

$$\Psi = \left[ \frac{15\alpha_a\alpha_a k}{-4\lambda(\alpha_a x_a)^2} \right]^{3/4}, \quad \lambda k < 0, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1. \quad (43)$$

Отметим также, что в случае  $\lambda k > 0$  выражение (43) задает чисто мнимое решение уравнения (6).

Если в уравнении (11a) положить

$$\varphi = \varphi(r), \quad r = |x|^2, \quad (44)$$

то получаем ОДУ второго порядка

$$4r\varphi_{rr} + 6\varphi_r + \frac{\lambda}{k}\varphi(\varphi^*)^{2/3} = 0,$$

которое в случае действительной функции  $\varphi$  есть уравнение Эмдена–Фаулера. Частным решением его является функция

$$\varphi = \left( \frac{15\lambda}{-4\lambda r} \right)^{3/4}, \quad \lambda k < 0.$$

Следовательно, с учетом (44) находим еще одно стационарное решение уравнения (6):

$$\Psi = \left( \frac{15k}{-4\lambda|x|^2} \right)^{3/4}. \quad (45)$$

Решение (45) в отличие от предыдущих решений обладает свойством

$$\Psi(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Ко всем построенным решениям (33), (41), (43), (45) уравнения (6) можно применить формулу разложения (26) и тогда по теореме 1 получим неразмножаемые семейства решений. Поскольку формулы получаются довольно громоздкими, мы приводим в таблице 2 результаты применения двух частных случаев общей формулы разложения решений (21) и (29). Заметим, что решение (33) при  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  получается из решения (41), если в последнем формально положить  $b_a = 0$ ,  $a = 1, 2, 3$ ,  $\gamma = (-\alpha_2/\lambda)^{3/4}$ . В связи с этим формулы разложения (21), (29) к решению (33) при  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  не применялись.

Таблица 2

№ п/п	№ формулы исходного решения	Новое решение, полученное применением формулы (21)	Новое решение, полученное применением формулы (29)
1.	(33) $\lambda = \alpha + i\beta,$ $\beta \neq 0$	$\left( d_2 - \frac{4\beta}{3} \right)^{-\frac{3}{4}\left(1 - \frac{i\alpha}{\beta}\right)} \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t \right) \right],$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \varepsilon_a \in \mathbb{R}^1,  \varepsilon ^2 = \varepsilon_a \varepsilon_a$	$t^{-3/2} \left( d_2 + \frac{4\beta}{3t} \right)^{-\frac{3}{4}\left(1 - \frac{i\alpha}{\beta}\right)} \exp \left( -\frac{i x ^2}{4kt} \right)$
2.	(41) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\gamma \exp \left( i \left( b_a^1 x_a + b_0^1 t \right) \right),$ $b_0^1 = kb_a^1 b_a^1 - \lambda \gamma^{4/3}$	$\gamma t^{3/2} \exp \left[ i \left( \frac{b_a x_a - b_0}{t} - \frac{ x ^2}{4kt} \right) \right],$ $b_0 = b_a b_a k - \lambda \gamma^{4/3}, b_a \in \mathbb{R}^1, a = \overline{1, 3}$
3.	(43) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[ \frac{15k \alpha ^2}{-4\lambda(\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))^2} \right]^{3/4} \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t \right) \right],$ $\alpha_a \in \mathbb{R}^1,  \alpha ^2 = \alpha_a \alpha_a$	$\left[ \frac{15k \alpha ^2}{-4\lambda(\alpha_a x_a)^2} \right]^{3/4} \exp \left( -\frac{i x ^2}{4kt} \right)$
4.	(45) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[ \frac{15k}{-4\lambda x + \varepsilon t ^2} \right]^{3/4} \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t \right) \right]$	$\left[ \frac{15k}{-4\lambda x ^2} \right]^{3/4} \exp \left( -\frac{i x ^2}{4kt} \right)$

### § 5. Точные решения уравнения (7)

Настоящий параграф посвящен применению результатов §§ 2, 3 для построения семейств точных решений уравнения (7).

Как показано в § 2, редукция уравнения (7) по оператору  $X_2$  преобразует его к свободному уравнению Шредингера (10b) с дополнительным условием (34). Подстановка (34) в уравнение (10b) приводит к системе (37) для функции  $P(t, x)$ . Следовательно, воспользовавшись формулами (38), (40), получим плосковолновое решение уравнения (7)

$$\Psi = \gamma \exp(i(b_0 t + b_a x_a)), \quad b_0 = k b_a b_a. \quad (47)$$

Рассмотрим теперь нелинейное эллиптическое уравнение (11b), которое получается из уравнения (7) редукцией по оператору  $X_3$ . Любое решение уравнения (11b) будет стационарным решением уравнения (7). Но из стационарных решений уравнения (7), применяя формулы разложения, полученные в § 3, мы можем построить семейства нестационарных решений. Таким образом, представляется важным построить классы точных решений уравнения (11b).

Пусть в уравнении (11b)

$$\varphi(x) = \varphi(w), \quad w = c_a x_a, \quad c_a \in \mathbb{C}^1, \quad a = \overline{1, 3}, \quad (48)$$

тогда для  $\varphi(w)$  получаем ОДУ 2-го порядка

$$c_a c_a \left[ \varphi_{ww} + \frac{\lambda}{k} \varphi(\varphi^*)^2 / (\varphi^*)^2 \right] = 0. \quad (49)$$

Если  $c_a c_a = 0$ , то уравнение (49) превращается в тождество и получаем решение уравнения (7)

$$\Psi = F(c_a x_a), \quad c_a c_a = 0, \quad (50)$$

где  $F$  — произвольная дважды дифференцируемая комплексная функция.

Если  $c_a c_a > 0$ ,  $c_a \in \mathbb{R}^1$ ,  $a = 1, 2, 3$ , то уравнение (49) в случае  $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$  заменой

$$\varphi(w) = R(w) \exp iP(w) = \exp(R^1(w) + iP(w)), \quad (51)$$

где  $R, R^1, P$  — действительные функции аргумента  $w$ , сводится к системе ОДУ

$$R_{ww}^1 = P_w^2, \quad P_{ww} = -2P_w R_w^1. \quad (52)$$

Систему (52) удается полностью проинтегрировать и найти общее решение

$$R^1 = d_1 w - \frac{1}{2} \ln [1 + \exp(4d_1 w + d_2)] + d_3,$$

$$P = \pm \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( 2d_1 w + \frac{d_2}{2} \right) \right] + d_4, \quad d_1 > 0, \quad d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}^1.$$

Итак, воспользовавшись формулами (48), (51), получим решение уравнения (7) при  $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$ :

$$\Psi = \varphi(x) = \frac{\exp \left[ d - d_1 w \pm i \sqrt{2} \operatorname{arctg} \exp \left( 2d_1 w + \frac{d_2}{2} \right) \right]}{\sqrt{1 + \exp(4d_1 w + d_2)}}, \quad (53)$$

$$w = c_a x_a, \quad d = d_3 + i d_4.$$

Если в уравнении (49)  $c_a c_a > 0$  и  $\frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4}$ , то оно заменой

$$\varphi(w) = R(w) \exp i P(w) = (R^1)^{1/(4\lambda/k+1)} \exp(i(P(w))) \quad (54)$$

сводится к системе ОДУ для действительных функций

$$R^1_{ww} = \lambda^1 R^1 P^2_w, \quad \lambda^1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k} \neq 0, \quad (55)$$

$$R^1 P_{ww} = -\frac{2}{\lambda^1} R^1_w P_w.$$

Решение системы (55) при  $P_w \neq 0$  сводится к интегрированию уравнения Эмдена–Фаулера

$$R^1_{ww} = \gamma_0^2 \lambda^1 (R^1)^{1-4/\lambda^1}, \quad 0 < \gamma_0 \in \mathbb{R}^1,$$

которое имеет частное решение

$$R^1 = \left[ \frac{2\gamma_0 w}{\sqrt{\lambda^1 - 2}} \right]^{\lambda^1/2}, \quad \lambda^1 > 2. \quad (56)$$

С учетом (55)

$$P_w = \gamma_0 (R^1)^{-2/\lambda^1} = \frac{\sqrt{\lambda^1 - 2}}{2w}, \quad (57)$$

$$P = \frac{\sqrt{\lambda^1 - 1}}{2} \ln w + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, из (48), (54), (56), (57) получаем решение уравнения (7) при  $\frac{\lambda}{k} > \frac{1}{4}$ ,  $c_a c_a > 0$ :

$$\Psi = \varphi = d(c_a x_a)^{1/2+i\sqrt{\lambda^1-2}/2}, \quad d \in \mathbb{C}^1. \quad (58)$$

Если в (55)  $P_w = 0$ , то  $R^1$  — линейная функция и, следовательно, решение уравнения (7) имеет вид

$$\Psi = (c_a x_a + c_0)^{1/\lambda^1} e^{id_1}, \quad c_0, d_1 \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda^1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k} \neq 0, \quad c_a c_a > 0. \quad (59)$$

Для построения новых решений уравнения (11b) преобразуем его к системе двух действительных уравнений с помощью замены

$$\varphi(x) = R(x) \exp[iP(x)], \quad (60)$$

где  $R, P$  — действительные функции.

Подставляя (60) в уравнение (11 в), получаем систему нелинейных ДУЧП

$$\Delta R = R P_a P_a - 4\frac{\lambda}{k} R_a R_a / R, \quad (61)$$

$$R \Delta P = -2 P_a P_a.$$

Система (61) заменой

$$R = \begin{cases} \exp R^1(x), & \frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}, \\ [R^1(x)]^{1/(1+4\lambda/k)}, & \frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (62)$$

сводится, соответственно, к системам

$$\begin{aligned} \Delta R^1 &= P_a P_a, & \frac{\lambda}{k} &= -\frac{1}{4}, \\ \Delta P &= -2R_a^2 P_a, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \Delta R^1 &= \lambda^1 R^1 P_a P_a, & \lambda^1 &= 1 + 4\frac{\lambda}{k} \neq 0, \\ R^1 \Delta P &= -\frac{2}{\lambda^1} R_a^1 P_a. \end{aligned} \quad (64)$$

Можно заметить, что в случае  $P(x) = d_1 = \text{const}$  произвольное решение уравнения Лапласа

$$\Delta R^1 = 0 \quad (65)$$

удовлетворяет как системе ДУЧП (63), так и (64). Следовательно, воспользовавшись (60), (62), получим семейство стационарных решений уравнения (7)

$$\Psi = \begin{cases} \exp [R^1(x) + id_1], & \frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}, \\ [R^1(x)]^{1/(1+4\lambda/k)} e^{id_1}, & \frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4}, \quad d_1 \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (66)$$

где  $R^1(x)$  — произвольное действительное решение уравнения Лапласа (65).

Если в качестве  $R^1(x)$  взять фундаментальное решение уравнения (65) при  $n = 3$ , т.е.

$$R^1(x) = \frac{1}{|x|},$$

то получаем решение уравнения (7)

$$\Psi = \begin{cases} \exp \left[ \frac{1}{|x|} + id_1 \right], & \frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}, \\ \frac{\exp(id_1)}{|x|^{1/(1+4\lambda/k)}}, & \frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad (67)$$

Заметим, что при  $\frac{\lambda}{k} > -\frac{1}{4}$  решение (67) удовлетворяет условию (46). Рассмотрим теперь систему (63) с дополнительным условием

$$\Delta P = 0. \quad (68)$$

Известно частное действительное решение уравнения (68):

$$P = f(c_a x_a) + f(\bar{c}_a^* x_a), \quad c_a \in \mathbb{C}^1, \quad c_a c_a = 0, \quad (69)$$

где  $f$  — произвольная действительная функция.

Подставляя выражение (69) в систему (63), после соответствующих преобразований, в предложении, что

$$R^1 = R^1(c_a x_a, \bar{c}_a^* x_a), \quad (70)$$

получаем для  $R^1$  ОДУ

$$R^1_{VV} = 1, \quad V = i \left[ f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a) \right],$$

т.е.

$$R^1 = -\frac{1}{2} \left[ f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a) \right]^2 + i d_1 \left[ f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a) \right] + d_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1, (71)$$

С учетом (60), (62) получаем еще одно семейство решений уравнения (7) при  $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$ , которое содержит произвольную функцию  $f$ :

$$\Psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a) \right]^2 + i d_1 \left[ f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a) \right] + i \left[ f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a) \right] \right\}, \quad c_a c_a = 0. (72)$$

Подстановка (69) в систему (64) в предложении (70), приводит к решению

$$R^1(x) = \begin{cases} d_1 \exp \left( \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda}{k}} v(x) \right) + d_2 \exp \left( -\sqrt{1 + 4 \frac{\lambda}{k}} v(x) \right), & \frac{\lambda}{k} > -\frac{1}{4}, \\ d_1 \cos \left( \sqrt{\left| 1 + 4 \frac{\lambda}{k} \right|} v(x) \right) + d_2 \sin \left( \sqrt{\left| 1 + 4 \frac{\lambda}{k} \right|} v(x) \right), & \frac{\lambda}{k} < -\frac{1}{4}, \end{cases} (73)$$

где

$$v(x) = i \left[ f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a) \right]. (74)$$

Воспользовавшись (60), (62), получим решение уравнения (7)

$$\Psi = \begin{cases} \left[ d_1 \exp \left( \sqrt{\lambda^1} v(x) \right) + d_2 \exp \left( -\sqrt{\lambda^1} v(x) \right) \right]^{1/\lambda^1} \times \\ \quad \times \exp i \left[ f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a) \right], & \lambda^1 > 0, \\ \left[ d_1 \cos \left( \sqrt{|\lambda^1|} v(x) \right) + d_2 \sin \left( \sqrt{|\lambda^1|} v(x) \right) \right]^{1/\lambda^1} \times \\ \quad \times \exp i \left[ f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a) \right], & \lambda^1 < 0, \end{cases} (75)$$

$\lambda^1 = 1 + 4 \frac{\lambda}{k}$ ,  $c_a c_a = 0$ ,  $c_a \in \mathbb{C}^1$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$ , ( $v(x)$  — см. (74)).

**Замечание 5.** В случае двух пространственных переменных ( $n = 2$ ) формулы (69), (71) при  $c_1 = 0$ ,  $c_1^2 + c_2^2 = 0$  задают общее решение нелинейной системы ДУЧП (63) с условием (68), а формулы (69), (73) — общее решение системы (64) с условием (68).

В заключение, с помощью формул размножения (см. § 3) построим из стационарных решений уравнения (7) нестационарные семейства решений. Поскольку при применении общей формулы размножения решений выражения слишком громоздки, мы воспользовались частными случаями этой формулы — выражениями (21) и (29). Полученные новые решения уравнения (7) приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ п/п	№ формулы стационарного решения	Решение, полученное с помощью формулы (3.3)	Решение, полученное с помощью формулы (3.11)
1	(50)	$F(c(x + \varepsilon t)) \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right], \varepsilon \in \mathbb{R}^3,  \varepsilon ^2 = \varepsilon_a \varepsilon_a$	$t^{-3/2} F \left( \frac{c_a x_a}{t} \right) \exp \left( -\frac{i x ^2}{4kt} \right), c_a c_a = 0, c_a \in \mathbb{C}^1$
2	(53)	$\frac{\exp[-d_1 c(x + \varepsilon t)]}{\sqrt{1 + \exp[4d_1 c(x + \varepsilon t) + d_2]}} \times \exp \left\{ i \left[ \pm \sqrt{2} \arctg \left( 2d_1 c(x + \varepsilon t) + \frac{d_2}{2} \right) + \frac{1}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right] \right\}, c = (c_1, c_2, c_3), c \in \mathbb{R}^3$	$\frac{t^{-3/2} \exp \left( -\frac{d_1 c_a x_a}{t} \right)}{\sqrt{1 + \exp \left[ \frac{4d_1 c_a x_a}{t} + d_2 \right]}} \exp \left\{ i \left[ \pm \sqrt{2} \times \arctg \exp \left[ \frac{2d_1 c_a x_a}{t} + \frac{d_2}{2} \right] - \frac{ x ^2}{4kt} \right] \right\}, c \in \mathbb{R}^3$
3	(58)	$[c(x + \varepsilon t)]^{\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{\lambda}{k} - \frac{1}{4}}} \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right], c \in \mathbb{R}^3$	$t^{-2 - i\sqrt{\frac{\lambda}{k} - \frac{1}{4}}} (c_a x_a)^{\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{\lambda}{k} - \frac{1}{4}}} \exp \left( -\frac{i x ^2}{4kt} \right), c \in \mathbb{R}^3$
4	(59)	$[c(x + \varepsilon t) + c_0]^{\frac{1}{1 + 4\lambda/k}} \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right], c_0 \in \mathbb{R}^1, c \in \mathbb{R}^3$	$t^{\nu} (c_a x_a)^{\frac{1}{1 + 4\lambda/k}} \exp \left( -\frac{i x ^2}{4kt} \right), \nu = -\frac{3}{2} - \frac{1}{1 + 4\lambda/k}, x_0 = t, \nu = \overline{0, 3}, c_0 \in \mathbb{R}^1, c \in \mathbb{R}^3$
5	(66)	$\exp \left\{ R^1(x + \varepsilon t) + \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right\}, \Delta R^1(x) = 0, [R^1(x + \varepsilon t)]^{\frac{1}{1 + 4\lambda/k}} \exp \left\{ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right\}, \Delta R^1(x) = 0$	$t^{-3/2} \exp \left[ R^1 \left( \frac{x}{t} \right) - \frac{i x ^2}{4kt} \right], \Delta R^1(x) = 0, t^{-3/2} \exp \left[ -\frac{i x ^2}{4kt} \right] \left[ R^1 \left( \frac{x}{t} \right) \right]^{\frac{1}{1 + 4\lambda/k}}, \Delta R^1(x) = 0$
6	(67)	$\exp \left[ \frac{1}{ x + \varepsilon t } + \frac{1}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right]  x + \varepsilon t  = \sqrt{ x ^2 +  \varepsilon ^2 t^2} + 2x\varepsilon t$	$t^{-3/2} \left[ \frac{t}{ x } - \frac{i x ^2}{4kt} \right]$



Таблица 3 (продолжение)

№ п/п	№ формулы стационарного решения	Решение, полученное с помощью формулы (3.3)	Решение, полученное с помощью формулы (3.11)
7	(67) $\frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4}$	$(x + \varepsilon t)^{-\frac{1}{1+4\lambda/k}} \exp \left[ \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right]$	$t^{-3/2} \left[ \frac{t}{ x } \right]^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \exp \left( -i \frac{ x ^2}{4kt} \right)$
8	(72) $\frac{\lambda}{k} > -\frac{1}{4}$	$\exp \left\{ \frac{1}{2} [V(\varepsilon t + x)]^2 + dV(\varepsilon t + x) + i \left[ P(x + \varepsilon t) + \frac{1}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right] \right\},$ $V(x + \varepsilon t) = i[f(c(x + \varepsilon t)) - f^*(c(x + \varepsilon t))],$ $P(x) - \text{см. (36)}, c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C},  c  = 0$	$t^{-3/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} V^2 \left( \frac{x}{t} \right) + dV \left( \frac{x}{t} \right) + i \left[ P \left( \frac{x}{t} \right) - \frac{ x ^2}{4kt} \right] \right\}$ $V \left( \frac{x}{t} \right) = i \left[ f \left( \frac{cx}{t} \right) - f^* \left( \frac{cx}{t} \right) \right], P(x) \text{ см. (36)}$
9	(75) $\frac{\lambda}{k} > -\frac{1}{4}$	$\left\{ d_1 \exp \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda}{k}} V(x + \varepsilon t) \right] + d_2 \exp \left[ -\sqrt{1 + 4 \frac{\lambda}{k}} V(x + \varepsilon t) \right] \right\}^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \times \exp \left[ iP(x + \varepsilon t) + \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right],$ $P, V \text{ см. № 8}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$	$\left\{ d_1 \exp \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda}{k}} V \left( \frac{x}{t} \right) \right] + d_2 \exp \left[ -\sqrt{1 + 4 \frac{\lambda}{k}} V \left( \frac{x}{t} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \times t^{-3/2} \exp \left[ iP \left( \frac{x}{t} \right) - \frac{i x ^2}{4kt} \right],$ $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1, P, V \text{ см. № 8}$
10	(75) $\frac{\lambda}{k} < -\frac{1}{4}$	$\left\{ d_1 \cos \left[ \sqrt{ \lambda_1 } V(x + \varepsilon t) \right] + d_2 \sin \left[ \sqrt{ \lambda_1 } V(x + \varepsilon t) \right] \right\}^{1/\lambda_1} \times \exp \left[ iP(x + \varepsilon t) + \frac{i}{2k} \left( \varepsilon x + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} \right) \right],$ $\lambda_1 = 1 + 4 \frac{\lambda}{k}, P, V \text{ см. № 8}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$	$\left\{ d_1 \cos \left[ \sqrt{ \lambda_1 } V \left( \frac{x}{t} \right) \right] + d_2 \sin \left[ \sqrt{ \lambda_1 } V \left( \frac{x}{t} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \times t^{-3/2} \exp \left[ iP \left( \frac{x}{t} \right) - \frac{i x ^2}{4kt} \right],$ $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1, P, V \text{ см. № 8}$

**§ 6. Нелинейные системы уравнений второго порядка, инвариантные относительно алгебр  $AG(1, n)$ ,  $AG_1(1, n)$  и  $AG_2(1, n)$**

Рассмотрим систему нелинейных ДУЧП второго порядка параболического типа

$$\lambda_1 \Psi_t^1 = A_{ab}^1(\Psi^1, \Psi^{(2)}) \Psi_{ab}^1 + B^1(\Psi^1, \Psi^{(2)}, \Psi_1^1, \Psi_1^{(2)}), \quad (76a)$$

$$\lambda_2 \Psi_t^{(2)} = A_{ab}^{(2)}(\Psi^1, \Psi^{(2)}) \Psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\Psi^1, \Psi^{(2)}, \Psi_1^1, \Psi_1^{(2)}), \quad (76b)$$

где  $\lambda_k = \text{const}$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ ,  $A_{ab}^{(k)}$ ,  $a, b = \overline{1, n}$ ,  $B^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , — произвольные комплексные (в частности, действительные) функции из класса  $C^1$ ;

$$\Psi_t^{(k)} = \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial t}, \quad \Psi_{ab}^{(k)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{x_a \partial x_b},$$

$$\Psi_1^{(k)} = (\Psi_1^{(k)}, \dots, \Psi_n^{(k)}), \quad \Psi_a^{(k)} = \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial x_a}.$$

Системы уравнений вида (76) широко используются в качестве математических моделей для описания процессов диффузии при химических реакциях, в популяционной генетике, при многофазном тепломассопереносе и т.д. (ряд конкретных примеров приведен с [9]). В случае

$$\Psi^{(2)} = \overset{*}{\Psi}^1, \quad A_{ab}^{(2)} = \overset{*}{A}_{ab}^1, \quad B^{(2)} = \overset{*}{B}^1, \quad \lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_1 = -\frac{i}{k} \quad (77)$$

систему (76) можно рассматривать как пару комплексно-сопряженных уравнений вида (3).

Как отмечалось в [10], для параболических уравнений (систем) естественно требовать инвариантность относительно алгебры Галилея  $AG(1, n)$ . Рассмотрим представление алгебры  $AG(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b) и

$$G_a = t \partial_a - \frac{x_a}{2} J_\lambda, \quad a = \overline{1, n}, \quad J_\lambda = \lambda_1 \Psi^1 \frac{\partial}{\partial \Psi^1} - \lambda_2 \Psi^{(2)} \frac{\partial}{\partial \Psi^{(2)}}. \quad (78)$$

Очевидно, что в случае  $\Psi^1 = U + iV$ ,  $\Psi^{(2)} = \overset{*}{\Psi}^1$ ,  $\lambda_1 = i/k$ ,  $\lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_1$  операторы (78) совпадают с (2c).

**Теорема 2.** Система уравнений (76) инвариантна относительно алгебры Галилея  $G(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b) и (78) тогда и только тогда, когда она эквивалентна уравнениям

$$\lambda_1 \Psi_t^1 = C^1(v) \Delta \Psi^1 + \frac{1 - C^1(v)}{\Psi^1} \Psi_a^1 \Psi_a^1 + \Psi^1 f^1(v, \theta), \quad (79a)$$

$$\lambda_2 \Psi_t^{(2)} = C^{(2)}(v) \Delta \Psi^{(2)} + \frac{1 - C^{(2)}(v)}{\Psi^{(2)}} \Psi_a^{(2)} \Psi_a^{(2)} + \Psi^{(2)} f^{(2)}(v, \theta), \quad (76b)$$

где  $v = (\Psi^1)^{\lambda_2} (\Psi^{(2)})^{-\lambda_1}$ ,  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a} v^{-2} = \frac{\partial}{\partial x_a} (\ln v) \frac{\partial}{\partial x_a} (\ln v)$ ,  $C^k$ ,  $f^k$ ,  $k = 1, 2$  — произвольные функции.

**Доказательство. Необходимость.** Воспользуемся алгоритмом Ли (современное изложение см. в [11]). Подействуем на систему уравнений (76) дважды продолженным инфинитезимальным оператором (40)

$$\tilde{X} = X + \rho_i^k \frac{\partial}{\partial \Psi_i^{(k)}} + \sigma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \Psi_{ij}^{(k)}}, \quad k = 1, 2, \quad i, j = \overline{0, n},$$

где

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial \Psi^{(k)}},$$

$$x_0 = t, \quad \xi^i = \xi^i(t, x, \Psi^1, \Psi^{(2)}), \quad \eta^i = \eta^i(t, x, \Psi^1, \Psi^{(2)}),$$

функции  $\rho_i^k, \sigma_{ij}^k$  выражаются через  $\xi^i, \eta^k$  по известным формулам; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В результате получаем систему определяющих уравнений

$$\lambda_1 \rho_0^1 \stackrel{\mathfrak{M}}{=} A_{ab}^1(\Psi^1, \Psi^{(2)}) \sigma_{ab}^1 + \left( \frac{\partial A_{ab}^1}{\partial \Psi^{(k)}} \Psi_{ab}^1 + \frac{\partial B^1}{\partial \Psi^{(k)}} \right) \eta^k + \rho_a^k \frac{\partial B^1}{\partial \Psi_a^{(k)}}, \quad (80a)$$

$$\lambda_2 \rho_0^2 \stackrel{\mathfrak{M}}{=} A_{ab}^{(2)}(\Psi^1, \Psi^{(2)}) \sigma_{ab}^{(2)} + \left( \frac{\partial A_{ab}^{(2)}}{\partial \Psi^{(k)}} \Psi_{ab}^{(2)} + \frac{\partial B^{(2)}}{\partial \Psi^{(k)}} \right) \eta^k + \rho_a^k \frac{\partial B^{(2)}}{\partial \Psi_a^{(k)}}, \quad (80b)$$

где  $\mathfrak{M}$  — система (76), рассматриваемая как многообразие в дважды продолженном пространстве переменных.

Определим коэффициенты оператора  $X$  для алгебры  $G(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b), (78). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^a = C_{ab} x_b + g_a t + d_a, \quad C_{ab} + C_{ba} = 0, \quad a \neq b, \\ \eta^1 &= -\frac{\lambda_1}{2} g_a x_a \Psi^1, \quad \eta^2 = -\frac{\lambda_2}{2} g_a x_a \Psi^{(2)}, \end{aligned} \quad (81)$$

где  $d_0, d_a, C_{ab}, a < b, g_a$  — произвольные комплексные параметры. Используя (81), получаем в явном виде

$$\begin{aligned} \rho_0^k &= -\frac{\lambda_k}{2} g_a x_a \Psi_t^{(k)} - g_a \Psi_a^{(k)}, \\ \rho_a^k &= -\frac{\lambda_k}{2} g_a \Psi^{(k)} - \frac{\lambda_k}{2} g_b x_b \Psi_a^{(k)} - \Psi_b^{(k)} C_{ab}, \\ \sigma_{ab}^k &= -\frac{\lambda_k}{2} (g_b \Psi_a^{(k)} + g_a \Psi_b^{(k)}) - \frac{\lambda_k}{2} g_{a_1} x_{a_1} \Psi_{ab}^{(k)} - C_{b_1 b} \Psi_{ab_1}^{(k)} - C_{b_1 a} \Psi_{bb_1}^{(k)}, \\ a_1, b_1 &= \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (82)$$

Подставляя выражения (81), (82) в определяющее уравнение (80a) и переход на многообразие  $\mathfrak{M}$ , имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1}{2} x_a g_a B^1 + \lambda_1 g_a \Psi_a^1 - \frac{\lambda_1}{2} A_{ab}^1 (g_b \Psi_a^1 + g_a \Psi_b^1) - \\ &- A_{ab}^1 (C_{b_1 b} \Psi_{ab_1}^1 + C_{b_1 a} \Psi_{bb_1}^1) - \frac{\lambda_k}{2} g_{a_1} x_{a_1} \Psi^{(k)} \left( \frac{\partial A_{ab}^1}{\partial \Psi^{(k)}} \Psi_{ab}^1 + \frac{\partial B^1}{\partial \Psi^{(k)}} \right) - \\ &- \frac{\lambda_k}{2} (g_a \Psi^{(k)} + g_b x_b \Psi_a^{(k)}) \frac{\partial B^1}{\partial \Psi_a^{(k)}} - C_{ba} \Psi_b^{(k)} \frac{\partial B^1}{\partial \Psi_a^{(k)}} = 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Расщепляя выражение (83) по параметрам  $C_{ab}$ ,  $a < b$ , учетом независимости всех переменных  $t, x, \Psi^{(k)}, \Psi_{ab}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, a, b = \overline{1, n}$ , получаем

$$A_{ab}^1 \left( \Psi^1, \Psi^{(2)} \right) = \delta_a^b A^1 \left( \Psi^1, \Psi^{(2)} \right), \quad a, b = \overline{1, n}, \quad (84)$$

где

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$A^1$  — произвольная функция. Функция  $B^1$  должна удовлетворить системе линейных ДУЧП

$$\left[ \Psi_b^1 \frac{\partial}{\partial \Psi_a^1} - \Psi_a^1 \frac{\partial}{\partial \Psi_b^1} + \Psi_b^{(2)} \frac{\partial}{\partial \Psi_a^{(2)}} - \Psi_a^{(2)} \frac{\partial}{\partial \Psi_b^{(2)}} \right] B^1 = 0, \quad a < b, \quad a, b = \overline{1, n}. \quad (85)$$

Решая систему (85), находим общее решение

$$B^1 = \hat{B}^1 \left( \Psi^1, \Psi^{(2)}, \Psi_a^1 \Psi_a^1, \Psi_a^1 \Psi_a^{(2)}, \Psi_a^{(2)} \Psi_a^{(2)} \right), \quad (86)$$

где  $\hat{B}^1$  — произвольная функция.

Учитывая соотношения (84), (86), выражение (83) приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{2} g_a x_a \hat{B}^1 + \lambda_1 g_a \Psi_a^1 - \lambda_1 A^1 g_a \Psi_a^1 - \frac{\lambda_k}{2} g_{a_1} x_{a_1} \Psi^k \left( \frac{\partial A^1}{\partial \Psi^k} \Delta \Psi^1 + \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial \Psi^k} \right) - \\ - \frac{\lambda_k}{2} (g_a \Psi^k + g_b x_b \Psi_a^k) \left( 2 \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial y_{kk}} \Psi_a^k + \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial y_{kk_1}} \Psi_a^{k_1} \right) = 0, \quad k \neq k_1, \end{aligned} \quad (87)$$

где

$$y_{kk} = \Psi_a^k \Psi_a^k, \quad y_{kk_1} = \Psi_a^k \Psi_a^{k_1}.$$

Так как соотношение (87) должно выполняться при произвольных параметрах  $g_a$ ,  $a = \overline{1, n}$ , и независимых переменных  $x, \Psi^k, \Psi_a^k, \Psi_{aa}^k, a = \overline{1, n}$ , то оно эквивалентно следующей системе линейных ДУЧП:

$$\lambda_1 \Psi^1 \frac{\partial A^1}{\partial \Psi^1} + \lambda_2 \Psi^{(2)} \frac{\partial A^1}{\partial \Psi^{(2)}} = 0, \quad (88a)$$

$$\lambda_1 \Psi_a^1 (1 - A^1) = \frac{\lambda_k}{2} \Psi^k \left( 2 \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial y_{kk}} \Psi_a^k + \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial y_{kk_1}} \Psi_a^{k_1} \right), \quad k_1 \neq k, \quad a = \overline{1, n}, \quad (88b)$$

$$\lambda_k \Psi^k \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial \Psi^k} + \lambda_k \Psi_a^k \left( 2 \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial y_{kk}} \Psi_a^k + \frac{\partial \hat{B}^1}{\partial y_{kk_1}} \Psi_a^{k_1} \right) = \lambda_1 \hat{B}^1, \quad k_1 \neq k. \quad (88c)$$

Общее решение уравнения (88a) задается выражением

$$A^1 \left( \Psi^1, \Psi^{(2)} \right) = C^1(v), \quad v = (\Psi^1)^{\lambda_2} \left( \Psi^{(2)} \right)^{-\lambda_1}, \quad (89)$$

где  $C^1$  — произвольная функция.

Решение уравнений (88b), (88c) с учетом (89) сводится к построению общего решения уравнения

$$\lambda_1 \Psi^1 \frac{\partial \hat{f}^1}{\partial \Psi^1} + \lambda_2 \Psi^{(2)} \frac{\partial \hat{f}^1}{\partial \Psi^{(2)}} + 2(\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{v} \frac{\partial \hat{f}^1}{\partial \tilde{v}} = \lambda_1 \hat{f}^1, \quad (90)$$

где

$$\tilde{v} = \left( \lambda_1 \Psi^1 \Psi_a^{(2)} - \lambda_2 \Psi^{(2)} \Psi_a^1 \right) \left( \lambda_1 \Psi^1 \Psi_a^{(2)} - \lambda_2 \Psi^{(2)} \Psi_a^1 \right), \quad (91)$$

тогда

$$\hat{B}^1 = \hat{f}^1 \left( \Psi^1, \Psi^{(2)}, \tilde{v} \right) - (1 - C^1(v)) \Psi_a^1 \Psi_a^1 / \Psi^1. \quad (92)$$

В случае  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  уравнение (90) легко решается и получаем общее решение вида

$$\hat{f}^1 = \Psi^1 f^1(v, \tilde{v}), \quad (93)$$

где  $f^1$  — произвольная функция ( $v, \tilde{v}$  — см. (89), (91)). Если  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ , то общее решение уравнения (90) имеет вид

$$\hat{f}^1 = \Psi^1 f^1 \left( v, \frac{\tilde{v}}{(\Psi^1 \Psi^{(2)})^2} \right), \quad (94)$$

где  $f^1$  — произвольная функция.

Можно заметить, что при  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  выражения  $v$  и  $(\Psi^1 \Psi^{(2)})^2$  функционально зависимы, поэтому решение (93) получается из (94) как частный случай. Следовательно, (94) является общим решением уравнения (90). Воспользовавшись формулами (86) и (92) получим окончательный вид искомой функции:

$$B^1 = \Psi^1 f(v, \theta) + \frac{1 - C^1(v)}{\Psi^1} \Psi_a^1 \Psi_a^1, \quad (95)$$

где

$$\theta = \frac{\tilde{v}}{(\Psi^1 \Psi^{(2)})^2} = \frac{\partial v_a}{\partial x_a} \frac{\partial v_a}{\partial x_a} v^{-2} \quad (v \text{ — см. (89)}).$$

Полностью идентичные выкладки для определяющего уравнения (80b) приводят к искомым функциям

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= C^{(2)}(v), & A_{ab}^{(2)} &= \delta_a^b A^{(2)}, \\ B^{(2)} &= \Psi^{(2)} f^{(2)}(v, \theta) + \frac{1 - C^{(2)}(v)}{\Psi^{(2)}} \Psi_a^{(2)} \Psi_a^{(2)}. \end{aligned} \quad (96)$$

Подставляя формулы (84), (89), (95), (96) в исходную систему (76), получаем систему (79). Необходимость доказана. Достаточность доказывается простой проверкой.

**Следствие.** Если  $\lambda_1 = i/k$ ,  $k \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ ,  $\Psi^{(2)} = \Psi^{(1)*}$ ,  $C^{(2)} = C^{(1)*}$ ,  $f^{(2)} = f^{(1)*}$ , то система (79) сводится к паре комплексно-сопряженных нелинейных обобщений уравнения (1):

$$\frac{i}{k}\Psi_t = C(\Psi\Psi^*)\Delta\Psi + \Psi^* \frac{1 - C(\Psi\Psi^*)}{\Psi\Psi^*} \Psi_a \Psi_a + \Psi f(\Psi, \Psi^*, (\Psi\Psi^*)_a (\Psi\Psi^*)_a), \quad (97a)$$

$$-\frac{i}{k}\Psi_t^* = C(\Psi\Psi^*)\Delta\Psi^* + \Psi \frac{1 - C(\Psi\Psi^*)}{\Psi\Psi^*} \Psi_a^* \Psi_a^* + \Psi^* f^*(\Psi, \Psi^*, (\Psi\Psi^*)_a (\Psi\Psi^*)_a). \quad (97b)$$

Очевидно, что при  $C(\Psi\Psi^*) = 1$  уравнение (97a) содержит уравнение (4) как частный случай.

Класс уравнений (79) достаточно широк. Чтобы его сузить, потребуем дополнительную инвариантность относительно оператора масштабных преобразований:

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + I_\alpha, \quad I_\alpha = \alpha_1\Psi^1\partial_{\Psi^1} + \alpha_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}. \quad (98)$$

**Теорема 3.** Галилеевски-инвариантная система уравнений (79) инвариантна относительно группы масштабных преобразований, порождаемой оператором (98), только тогда, когда она эквивалентна уравнениям

$$\lambda_1\Psi_t^1 = D_1\Delta\Psi^1 + \frac{1 - D_1}{\Psi^1}\Psi_a^1\Psi_a^1 + \Psi^1\hat{f}^1(\hat{\theta})v^{-2/\delta}, \quad (99a)$$

$$\lambda_2\Psi_t^{(2)} = D_2\Delta\Psi^{(2)} + \frac{1 - D_2}{\Psi^{(2)}}\Psi_a^{(2)}\Psi_a^{(2)} + \Psi^{(2)}\hat{f}^{(2)}(\hat{\theta})v^{-2/\delta}, \quad (99b)$$

если

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

и

$$\lambda_1\Psi_t^1 = C^1(v)\Delta\Psi^1 + \frac{1 - C^1(v)}{\Psi^1}\Psi_a^1\Psi_a^1 + \Psi^1g^1(v)\theta, \quad (100a)$$

$$\lambda_2\Psi_t^{(2)} = C^{(2)}(v)\Delta\Psi^{(2)} + \frac{1 - C^{(2)}(v)}{\Psi^{(2)}}\Psi_a^{(2)}\Psi_a^{(2)} + \Psi^{(2)}g^{(2)}(v)\theta, \quad (100b)$$

если  $\delta = 0$ , где  $\hat{\theta} = v^{2/\delta}\theta$ ,  $v$ ,  $\theta$  — см. теорему 2,  $D_1$ ,  $D_2$  — произвольные постоянные,  $\hat{f}^{(k)}$ ,  $C^{(k)}$ ,  $g^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  — произвольные функции.

**Доказательство.** Воспользуемся системой определяющих уравнений (80). Подстановка в (80a) коэффициентов уравнения (79a) приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \rho_0^1 \stackrel{\mathfrak{M}}{=} C^1(v) \delta_a^a \sigma_{aa}^1 + \lambda_2 v \frac{\partial C^1}{\partial v} \Delta \Psi^1 \frac{\eta^1}{\Psi^1} - \lambda_1 v \frac{\partial C^1}{\partial v} \Delta \Psi^1 \frac{\eta^{(2)}}{\Psi^{(2)}} + \\
 + 2 \frac{1 - C^1(v)}{\Psi^1} \Psi_a^1 \rho_a^1 - \frac{\lambda_2 v \frac{\partial C^1}{\partial v} + (1 - C^1)}{(\Psi^1)^2} \eta^1 \Psi_a^1 \Psi_a^1 + f^1 \eta^1 + \\
 + \frac{\lambda_1 v}{\Psi^1 \Psi^{(2)}} \frac{\partial C^1}{\partial v} \eta^{(2)} \Psi_a^1 \Psi_a^1 + \lambda_2 \Psi^1 v \frac{\partial f^1}{\partial v} \frac{\eta^1}{\Psi^1} - \lambda_1 \Psi^1 v \frac{\partial f^1}{\partial v} \frac{\eta^2}{\Psi^{(2)}} + \\
 + 2 \Psi^1 \frac{\partial \Psi^1}{\partial \theta} \left[ \left( -\lambda_2^2 \frac{\Psi_a^1 \Psi_a^1}{(\Psi^1)^3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\Psi_a^1 \Psi_a^{(2)}}{(\Psi^1)^2 \Psi^{(2)}} \right) \eta^1 + \right. \\
 + \left( -\lambda_1^2 \frac{\Psi_a^{(2)} \Psi_a^{(2)}}{(\Psi_a^{(2)})^3} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\Psi_a^1 \Psi_a^{(2)}}{\Psi^1 (\Psi^{(2)})^2} \right) \eta^{(2)} + \\
 \left. + \left( \lambda_2^2 \frac{\Psi_a^{(2)}}{(\Psi^1)^2} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\Psi_a^{(2)}}{\Psi^1 \Psi^{(2)}} \right) \rho_a^1 + \left( \lambda_1^2 \frac{\Psi_a^{(2)}}{(\Psi^{(2)})^2} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\Psi_a^1}{\Psi^1 \Psi^{(2)}} \right) \rho_a^{(2)} \right], \tag{101}
 \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{M}$  — многообразие, порожденное системой (79) в продолженном пространстве.

Нетрудно подсчитать, что для оператора (98)

$$\begin{aligned}
 \eta^1 &= \alpha_1 \Psi^1, & \eta^{(2)} &= \alpha_2 \Psi^{(2)}, \\
 \rho_0^1 &= (\alpha_1 - 2) \Psi_t^1, & \rho_0^{(2)} &= (\alpha_2 - 2) \Psi_t^{(2)}, \\
 \rho_a^1 &= (\alpha_1 - 1) \Psi_a^1, & \rho_a^{(2)} &= (\alpha_2 - 1) \Psi_a^{(2)}, \\
 \sigma_{aa}^1 &= (\alpha_1 - 2) \Psi_{aa}^1, & \sigma_{aa}^{(2)} &= (\alpha_2 - 2) \Psi_{aa}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{102}$$

Подставляя выражения (102) для  $\eta^k$ ,  $\rho_i^k$ ,  $\sigma_{aa}^k$ ,  $k = 1, 2$ ;  $a = \overline{1, n}$ ;  $i = \overline{0, n}$ , в определяющее уравнение (101), после соответствующих преобразований получаем соотношение

$$\delta v \Psi^1 \frac{\partial f^1}{\partial v} + \delta v \frac{\partial C^1}{\partial v} \left( \Delta \Psi^1 - \frac{\Psi_a^1 \Psi_a^1}{\Psi^1} \right) - 2 \Psi^1 \theta \frac{\partial f^1}{\partial \theta} + 2 \Psi^1 f^1 = 0. \tag{103}$$

Если  $\delta \neq 0$ , то расщепление уравнения (103) по вторым производным  $\Psi_{aa}^1$  приводит к условию

$$\frac{\partial C^1}{\partial v} = 0,$$

т.е.

$$C^1(v) = D_1 = \text{const}. \tag{104}$$

Для определения функции  $f^1$  получаем линейное ДУЧП первого порядка

$$-v \frac{\partial f^1}{\partial v} + \frac{2}{\delta} \theta \frac{\partial f^1}{\partial \theta} = f^1$$

с общим решением

$$f^1 = v^{-2/\delta} \hat{f}^1 \left( v^{2/\delta} \theta \right), \tag{105}$$

где  $\hat{f}^1$  — произвольная функция.

Если же  $\delta = 0$ , то, очевидно, соотношение (103) приводит к условиям

$$f^1 = \theta g^1(v), \quad (106)$$

$g^1(v)$ ,  $C^1(v)$  — произвольные функции.

Аналогичные выкладки проводятся для определяющего уравнения (80b) с коэффициентами из уравнения (79b) и (102). В результате получаем

$$\begin{aligned} C^{(2)}(v) &= D_2 = \text{const}, \\ f^{(2)} &= v^{-2/\delta} \hat{f}^2 (v^{2/\delta} \theta), \end{aligned}$$

если  $\delta \neq 0$ ;

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \theta g^{(2)}(v), \\ C^{(2)}(v) &\text{ — произвольная функция,} \end{aligned}$$

если  $\delta = 0$ . Теорема доказана.

Оказывается, что среди систем (99), (100) есть такие, которые допускают операторы проективных преобразований

$$\Pi = t^2 \partial_t + t x_a \partial_a - \frac{|x|^2}{4} J_\lambda + t I_\alpha, \quad (107)$$

где  $J_\lambda$ ,  $I_\alpha$  определены в (78) и (98). Другими словами, существуют системы уравнений, инвариантные относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b), (78), (98), (107).

**Теорема 4. 1.** Система уравнений вида (99) при произвольных  $D_k$ ,  $\hat{f}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  инвариантна относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b), (78), (98), (107), причем

$$I_\alpha = -\frac{n}{2} \left( D_1 \Psi^1 \partial_{\Psi^1} + D_2 \Psi^{(2)} \partial_{\Psi^{(2)}} \right), \quad \delta = -\frac{n}{2} \left| \begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \right| \neq 0.$$

2. Система уравнений (100) инвариантна относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  только тогда, когда

$$C^{(k)}(v) = D_k = \text{const}, \quad k = 1, 2,$$

причем

$$I_\alpha = -\frac{D_1 n}{\lambda_1} J_\lambda = -\frac{D_2 n}{\lambda_2} J_\lambda, \quad \delta = -\frac{n}{2} \left| \begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \right| = 0.$$

Доказательство теоремы 4 такое же, как и теорем 2, 3.

**Следствие.** Если положить  $\lambda_1 = i/k$ ,  $k \in \mathbb{R}^1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ ,  $\Psi^{(2)} = \Psi^1$ ,  $\hat{f}^{(2)} = \hat{f}^1 = f^*$ ,  $D_1 = D_2 = q$ ,  $q \in \mathbb{R}^1$ , то  $\delta = nqi/k \neq 0$  и система уравнений (99) сводится к паре комплексно-сопряженных нелинейных обобщений уравнений (1)

$$\frac{i}{k} \Psi_t = q \Delta \Psi + \Psi \frac{1-q}{\Psi^*} \Psi_a \Psi_a + \Psi (\Psi \Psi^*)^{\frac{2}{nq}} f \left( (\Psi \Psi^*)^{-2(1+\frac{1}{nq})} (\Psi \Psi^*)_a (\Psi \Psi^*)_a \right), \quad (108a)$$



$$-\frac{i}{k} \Psi_t^* = q \Delta \Psi^* + \Psi^* \frac{1-q}{\Psi \Psi^*} \Psi_a^* \Psi_a^* + \Psi^* (\Psi \Psi^*)^{\frac{2}{nq}} f \left( (\Psi \Psi^*)^{-2(1+\frac{1}{nq})} (\Psi \Psi^*)_a (\Psi \Psi^*)_a \right), \quad (108b)$$

инвариантных относительно алгебры  $AG_2(1, n)$ .

Очевидно, что при  $q = 1$  класс уравнений (108a) совпадает с классом уравнений (4). При этом операторы (78), (98) и (107) переходят соответственно в (2c), (2d) и (2e).

Отметим, что системы уравнений (99) и (100) при условиях теоремы 4 сводятся к более простым с помощью локальных замен

$$W^{(k)}(t, x) = \int \left[ \exp \int \frac{1 - D_k}{D_k \Psi^{(2)}} d\Psi^{(2)} \right] d\Psi^{(k)} = D_k \left[ \Psi^{(k)} \right]^{1/D_k}, \quad k = 1, 2. \quad (109)$$

Нетрудно убедиться, что замена (109) преобразует систему (99) к виду

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 W_t^1 &= \Delta W^1 + W^1 h^1(\hat{\theta}) v^{-2/\delta}, \\ \hat{\lambda}_2 W_t^{(2)} &= \Delta W^{(2)} + W^{(2)} h^{(2)}(\hat{\theta}) v^{-2/\delta}, \end{aligned} \quad (110)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k &= \frac{\lambda_k}{D_k}, \quad W_t^{(k)} = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial t}, \quad k = 1, 2, \\ v &= \left( (W^1)^{\hat{\lambda}_2} (W^{(2)})^{-\hat{\lambda}_1} \right)^{D_1 D_2}, \quad \theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a} v^{\frac{2}{\delta}-2}, \end{aligned}$$

$h^1, h^{(2)}$  — произвольные функции.

Применение замены (109) к системе (100) при условиях теоремы 4 приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} W_t^1 &= \Delta W^1 + W^1 \theta \hat{g}^1(v), \\ \hat{\lambda} W_t^{(2)} &= \Delta W^{(2)} + W^{(2)} \theta \hat{g}^{(2)}(v), \end{aligned} \quad (111)$$

где

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda_1}{D_1} = \frac{\lambda_2}{D_2}, \quad v = \left( \frac{W^1}{W^{(2)}} \right)^{\hat{\lambda} D_1 D_2}, \quad \theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a} v^2,$$

$\hat{g}^1, \hat{g}^{(2)}$  — произвольные функции.

В заключение рассмотрим систему уравнений диффузионного типа

$$\begin{aligned} \Delta U &= \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + f(U, V), \\ \Delta V &= \lambda \frac{\partial V}{\partial t} + g(U, V), \end{aligned} \quad (112)$$

которая, очевидно, с точностью до обозначений является частным случаем системы уравнений (76). Согласно теореме 2 система (112) инвариантна относительно алгебры Галилея  $AG(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b), (78) только тогда, когда она имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta U &= \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + U f_1(U/V), \\ \Delta V &= \lambda \frac{\partial V}{\partial t} + V g_1(U/V). \end{aligned} \quad (113)$$

Если же в системе уравнений (113)

$$f_1(U/V) = \beta_1(U/V)^{2/(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad g_1(U/V) = \beta_2(U/V)^{2/(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad \alpha_2 \neq \alpha_1, \quad (114)$$

то она допускает оператор масштабных преобразований (98) (см. теорему 3). Однако, как следует из теоремы 4, среди галилеевски-инвариантных систем уравнений вида (113) нет нелинейных систем, инвариантных относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  с проективным оператором  $\Pi$  (107).

Нам удалось показать, что среди нелинейных систем вида (113) существует единственная (с точностью до постоянных коэффициентов), которая инвариантна относительно обобщенной алгебры Галилея  $AG_2(1, n)$  со специальным представлением проективного оператора  $\Pi$ . Это следующая нелинейная система уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + \beta_1 \frac{U^2}{V}, \\ \Delta V &= \lambda \frac{\partial V}{\partial t} + \beta_2 U, \end{aligned} \quad (115)$$

где  $\beta_k = \text{const}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\beta_1 \neq \beta_2$ .

**Теорема 5.** *Максимальная (в смысле С. Ли) АИ системы уравнений (115) является алгебра  $AG_2(1, n)$  с базисными элементами*

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (116a)$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a, b = \overline{1, n}, \quad (116b)$$

$$G_a = t P_a - \frac{\lambda x_a}{2} I, \quad I = U \partial_U + V \partial_V, \quad (116c)$$

$$D = 2t P_t + x_a P_a - 2U \partial_U - \left( \frac{n}{2} + \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right) I, \quad (116d)$$

$$\Pi = t D - t^2 P_t - \frac{\lambda |x|^2}{4} I + \frac{\lambda}{\beta_1 - \beta_2} V \partial_U. \quad (116e)$$

**Доказательство.** Тот факт, что операторы (116) удовлетворяют коммутационным соотношениям, характеризующим алгебру Ли  $AG_2(1, n)$ , доказывается, простой проверкой. Доказательство того, что операторы (116) порождают максимальную АИ системы (115), проводится по методу Ли.

### § 7. О солитоноподобных решениях уравнения (6)

В § 4 найдены частные решения нелинейного уравнения (6) путем редукции его по одномерным неизоморфным подалгебрам  $X_1, X_2, X_3$  алгебры  $AG(1, 3)$ . Оказывается, что, решая редукционное уравнение (12а), соответствующее подалгебре  $X_4$ , можем получить солитоноподобные решения уравнения (6). Действительно, воспользовавшись заменой

$$\varphi = \varphi(y), \quad y = \alpha_a x_a,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^1$ ,  $\varphi(y)$  — действительная функция, сведем уравнение (12а) к нелинейному ОДУ второго порядка

$$|\alpha|^2 k \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{1}{\beta} \varphi + \lambda \varphi^{2/3} = 0. \quad (117)$$

Общее решение уравнения (117) в элементарных функциях получить не удается, так как его решение сводится к квадратуре

$$C_2 \pm y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1 + \frac{\varphi^2}{\beta} - \frac{3}{5} \lambda \varphi^{10/3}}}. \quad (118)$$

Построим частные решения уравнения (117) специального вида:

$$\varphi(y) = y(e^{my} - e^{-my})^{\varkappa_1} (e^{my} + e^{-my})^{\varkappa_2}; \quad (119)$$

здесь  $\gamma, m, \varkappa_1, \varkappa_2$  — некоторые постоянные, которые подлежат определению. Подстановка (119) и уравнение (117) приводит к соотношению

$$k|\alpha|^2 m^2 \left[ \varkappa_1 + \varkappa_2 + 2\varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_1(\varkappa_1 - 1)(e^{my} + e^{-my})^2 / (e^{my} - e^{-my})^2 + \varkappa_2(\varkappa_2 - 1)(e^{my} - e^{-my})^2 / (e^{my} + e^{-my})^2 \right] + \lambda \gamma^{4/3} (e^{my} - e^{-my})^{4\varkappa_1/3} (e^{my} + e^{-my})^{4\varkappa_2/3} = 0. \quad (120)$$

Очевидно, что если постоянные  $\gamma, m, \varkappa_1, \varkappa_2$  такие, что соотношение (120) выполняется тождественно, то (119) является решение уравнения (117).

Пусть  $\varkappa_1 = 0, \varkappa_2 = -3/2$ , тогда выражение (120) сводится к виду

$$\frac{1}{\beta} - \frac{3}{2} |\alpha|^2 m^2 + \frac{15}{4} |\alpha|^2 k m^2 \frac{(e^{my} - e^{-my})^2}{(e^{my} + e^{-my})^2} + \frac{\lambda \gamma^{4/3}}{(e^{my} + e^{-my})^2} = 0. \quad (121)$$

Равенство (121) превращается в тождество только в случае, если

$$\gamma = \pm 2\sqrt{2} \left( -\frac{5}{3\lambda\beta} \right)^{3/4}, \quad m = \pm \frac{2}{3\sqrt{-\beta k |\alpha|^2}}, \quad \lambda\beta < 0, \quad \beta k < 0. \quad (122)$$

Таким образом, получаем решение уравнения (117):

$$\varphi(y) = \frac{\gamma}{(e^{my} + e^{-my})^{3/2}} = \frac{\gamma_-}{[\cosh my]^{3/2}}, \quad \gamma_- = \pm \left( -\frac{5}{3\lambda\beta} \right)^{3/4},$$

где  $\gamma, m$  определены в (122). Следовательно (см. табл. 1), выражение

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_- e^{it/\beta}}{[\cosh m\alpha_a x_a]^{3/2}}, \quad (123)$$

где  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные параметры, является точным решением уравнения (6).

Воспользовавшись формулой разложения решений (21), из (123) получаем семипараметрическое семейство солитоноподобных решений:

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_- \exp \frac{i}{2k} \left[ \varepsilon_a x_a + \left( \frac{|\varepsilon|^2}{2} + 2k/\beta \right) t \right]}{[\cosh(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))]}; \quad (124)$$

здесь

$$|\varepsilon|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^1.$$

В случае  $\alpha_2 = \alpha_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = v$  из (124) имеем решение

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_- \exp \frac{iv}{2k}(x_1 + (v/2 + 2k/v\beta))}{[\cosh m_0(x_1 + vt)]^{3/2}}, \quad m_0 = \frac{\pm 2}{3\sqrt{-k\beta}}, \quad (125)$$

одномерного ( $n = 1$ ) нелинейного уравнения

$$i\Psi_t = k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \lambda \Psi(\Psi\Psi^*)^{2/3}.$$

Решение (125) естественно назвать солитонным по аналогии с известным решением (см., напр., [12])

$$\Psi(t, x_1) = \sqrt{\frac{m_1}{2}} \frac{\exp[(iv/2)(x_1 + (\varepsilon/2 + \lambda^2/3v)t)]}{\cosh m_1(x_1 + vt)}, \quad m_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{4}}, \quad \lambda < 0$$

нелинейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \lambda \Psi(\Psi\Psi^*).$$

Воспользовавшись формулой (22), из решения (123) получаем восьмипараметрическое семейство решений уравнения (6):

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_- \exp\{i[p|x|^2 + 2\varepsilon_a x_a + (|\varepsilon|^2 + 4k/\beta)t]/(4k(1-pt))\}}{\{(1-pt) \cosh[(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))/(1-pt)]\}^{3/2}}. \quad (126)$$

Очевидно, что в случае  $p = 0$  из решений (126) получаем солитоноподобные решения вида (124).

Рассмотрим соотношение (120) в случае  $\varkappa_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $\varkappa_2 = 0$ , т.е.

$$\frac{1}{\beta} - \frac{3}{2}\alpha_a \alpha_a k m^2 + \frac{15}{4}\alpha_a \alpha_a k m^2 \frac{(e^{mx} + e^{-mx})^2}{(e^{mx} - e^{-mx})^2} + \frac{\lambda \gamma^{4/3}}{(e^{mx} - e^{-mx})^2} = 0.$$

Нетрудно показать, что оно превращается в тождество только в случае, когда

$$\gamma = \pm \left( \frac{20}{3\lambda\beta} \right)^{3/4}, \quad m = \pm \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{-\beta k \alpha_a \alpha_a}}, \quad \lambda\beta > 0, \quad k\beta < 0. \quad (127)$$

Воспользовавшись формулой (119), получим еще одно решение нелинейного ОДУ (117):

$$\varphi = \gamma(e^{my} - e^{-my})^{-3/2} = \gamma/(2 \sinh my)^{3/2}, \quad (128)$$

где  $\gamma$ ,  $m$  определены в (127). Из решения (128) следует решение уравнения (6):

$$\Psi = \frac{\gamma_+ e^{it/\beta}}{[\sinh m\alpha_a x_a]^{3/2}}, \quad \gamma_+ = \pm \left( \frac{5}{3\lambda\beta} \right)^{3/4}. \quad (129)$$

Применяя к этому решению формулу (21), получаем семипараметрическое семейство солитоноподобных решений

$$\Psi = \frac{\gamma_+ \exp[(i/2k)(\varepsilon_a x_a + (|\varepsilon|^2/2 + 2k/\beta)t)]}{[\sinh(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))]^{3/2}}. \quad (130)$$

Отметим, что решения вида (130) в отличие от солитоноподобных решений из семейства (124) имеют особенность на многообразии

$$\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t = 0 \quad (131)$$

в пространстве независимых переменных.

В заключение приведем восьмипараметрическое семейство решений уравнения (6)

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_+ \exp\{i[p|x|^2 + 2\varepsilon_a x_a + (|\varepsilon|^2 + 4k/\beta)t]/(4k(1-pt))\}}{\{(1-pt) \sinh[(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))/(1-pt)]\}^{3/2}},$$

которое получается из решения (129) с помощью формулы (22).

1. Niederer V., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 808–816.
2. Фушич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элементар. частиц и атом. ядра*, 1981, **12**, вып. 5, 1157–1219.
3. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
4. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
5. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, 3491–3503.
6. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.
7. Collins C.V., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Proc. Camb. Phys. Soc.*, 1976, **80**, 165–171.
8. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.
9. Хенри Д., Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, М., Мир, 1985, 376 с.
10. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
11. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
12. Захаров В.Е., Шабат А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *Журн. эксперимент. и теорет. физики*, 1971, **61**, № 1, 118–134.

# Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ФЕДОРЧУК, И.М. ФЕДОРЧУК

Найдены инварианты расщепляющихся подгрупп обобщенной группы Пуанкаре  $P(1, 4)$  — группы вращений и сдвигов в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве. Произведена редукция нелинейного уравнения Даламбера и релятивистского уравнения Гамильтона к дифференциальным уравнениям с меньшим числом переменных. Построены классы точных решений этих уравнений.

## Введение

На основании подгрупповой структуры групп инвариантности дифференциальных уравнений можно находить точные решения этих уравнений.

Линейные волновые уравнения в пятимерном пространстве Минковского используются в квантовой теории для описания частиц с переменной массой [1]. Нелинейные волновые уравнения в пространстве Минковского  $M(1, n)$  рассмотрены в работах [2–6], где, в частности, исследована симметрия этих уравнений и построены в явном виде, с помощью специальных анзацев, многопараметрические семейства точных решений.

В математической физике широко используется уравнение эйконала или релятивистское уравнение Гамильтона. В работе [7] исследована симметрия этого уравнения, и на основании специальных анзацев найдены многопараметрические семейства точных решений. В [7], в частности, доказано, что максимальной локальной группой инвариантности уравнения эйконала является конформная группа  $C(1, 4)$  в  $(4 + 1)$ -мерном пространстве Пуанкаре–Минковского. К настоящему времени подгруппы конформной группы  $C(1, 4)$  не описаны. Хорошо известно, что группа  $C(1, 4)$  содержит в качестве подгруппы группу  $P(1, 4)$ .  $P(1, 4)$  — группа движений пространства Минковского  $M(1, 4)$ . Подгрупповая структура группы  $P(1, 4)$  изучена в работах [8–12].

В данной работе на основании подгрупповой структуры группы  $P(1, 4)$  построены точные решения нелинейных волновых уравнений. При этом рассматривались только расщепляющиеся подалгебры [8, 9] алгебры Ли группы  $P(1, 4)$ .

Дадим краткую характеристику работы. В § 1 найдены инварианты расщепляющихся подгрупп (локальных групп Ли, соответствующих расщепляющимся подалгебрам) группы  $P(1, 4)$ . В § 2 построены классы точных решений нелинейного волнового уравнения. В § 3 найдены семейства точных решений уравнения эйконала. В § 4 исследовано уравнение эйконала с нулевой массой.

**§ 1. Инварианты расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$** 

Алгебра Ли группы  $P(1, 4)$  задается базисными элементами  $P_\mu$  и  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$ ), которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\mu\sigma}P_\nu - g_{\nu\sigma}P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho},$$

где  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$ ) — метрический тензор с компонентами  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ ,  $g_{\mu\nu} = 0$  если  $\mu \neq \nu$ .

Для нее выбрано следующее представление:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ P_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad M_{\mu\nu} = -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu).$$

Ниже мы приводим функционально независимые решения систем уравнений

$$X_i I(x) = 0,$$

где  $\{X_i\}$ ,  $i = 1, \dots, \dim P_{ik}$  — базисы расщепляющихся подалгебр  $P_{jk}$  алгебры Ли группы  $P(1, 4)$ . Эти решения и являются инвариантами соответствующих расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$ . Наиболее удобно представить весь список инвариантов в виде таблиц.

**1.1. Одномерные инварианты.** Ниже выписаны одномерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$  в пространстве Минковского  $M(1, 4)$ .

**Таблица 1. Одномерные инварианты**

№	Переменные	№	Переменные
1.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	9.	$(x_4^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$
2.	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}$	10.	$x_0$
3.	$(x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	11.	$x_1$
4.	$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$	12.	$x_2$
5.	$(x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$	13.	$x_3$
6.	$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	14.	$x_4$
7.	$(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$	15.	$x_0 + x_4$
8.	$(x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$	16.	$x_0 - x_4$

**1.2. Двумерные инварианты.** Ниже выписаны двумерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$  в пространстве Минковского  $M(1, 4)$ .

**Таблица 2. Двумерные инварианты**

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2$	№	Инварианты $\omega_1, \omega_2$
1.	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	2.	$x_3, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
3.	$x_2, x_3$	4.	$x_2, (x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$
5.	$x_0, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	6.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
7.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	8.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$

## Продолжение табл. 2

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2$	№	Инварианты $\omega_1, \omega_2$
9.	$x_3, x_4$	10.	$x_0, x_4$
11.	$x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	12.	$x_0, x_3$
13.	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$	14.	$x_3, (x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$
15.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$	16.	$x_1, x_2$
17.	$x_3, (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}$	18.	$x_4, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$
19.	$x_4, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$	20.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$
21.	$x_0 + x_4, x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4)$	22.	$x_0 + x_4,$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4)$
23.	$x_0 + x_4, x_1^2 + x_2^2 - 2x_0(x_0 + x_4)$	24.	$\arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{d} \ln(x_0 + x_4),$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
25.	$\ln(x_0^2 - x_4^2) -$ $-2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} +$ $+2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	26.	$\ln(x_0^2 - x_4^2) +$ $+2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} -$ $-2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
27.	$x_0 + x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	28.	$x_3, x_0 - x_4$
29.	$x_2, x_0 + x_4$	30.	$x_0 - x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
31.	$x_3, x_0 + x_4$	32.	$x_0 + x_4, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$
33.	$x_0 - x_4, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$		

**1.3. Трехмерные инварианты.** Приведем трехмерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$  в пространстве Минковского  $M(1, 4)$ .

Таблица 3. Трехмерные инварианты

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$
1.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3$	2.	$x_1, x_2, x_3$
3.	$x_2, x_3, x_4$	4.	$x_0, x_3, x_4$
5.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, x_4$	6.	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3$
7.	$x_1, x_2, (x_3^2 + x_4^2 - x_0^2)^{1/2}$	8.	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, x_2, x_3$
9.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	10.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_4$
11.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_4$	12.	$x_0 + x_4, x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4), x_2$
13.	$x_0 + x_4, x_1^2 + x_2^2 -$ $-2x_0(x_0 + x_4), x_3$	14.	$x_0 + x_4, x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4),$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
15.	$\ln(x_0^2 - x_4^2) -$ $-2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} +$	16.	$\ln(x_0^2 - x_4^2) +$ $+2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} -$



**Продолжение табл. 3**

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$
	$+2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}},$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3$		$-2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}},$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3$
17.	$\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} +$ $+\frac{1}{e} \operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	18.	$\operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} -$ $-\frac{1}{d} \ln(x_0 + x_4), (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$ $(x_3^2 + x_4^2 - x_0^2)^{1/2}$
19.	$\operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} -$ $-\frac{1}{e} \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}},$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}$	20.	$x_2, x_3, x_0 + x_4$
21.	$x_2, x_3, x_0 - x_4$	22.	$x_1, x_2, x_0 + x_4$
23.	$x_0 + x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3$	24.	$x_0 - x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3$
25.	$\operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{x_3}{\varepsilon(x_0 + x_4)},$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_0 + x_4$		

**1.4. Четырехмерные инварианты.** Ниже выписаны четырехмерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$  в пространстве Минковского  $M(1, 4)$ .

**Таблица 4. Четырехмерные инварианты**

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
1.	$x_1, x_2, x_3, x_4$	2.	$x_0, x_2, x_3, x_4$
3.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_4$	4.	$x_1, x_2, x_3, (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}$
5.	$x_0 + x_4, x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4),$ $x_1, x_2$	6.	$\frac{1}{e} \operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} +$ $+\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}},$ $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, x_0$
7.	$\operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} -$ $-\frac{1}{e} \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$	8.	$\operatorname{arcsin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} +$ $+\frac{x_3}{\varepsilon(x_0 + x_4)}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

## Продолжение табл. 4

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, x_3$		$x_0 + x_4, x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4)$
9.	$x_1, x_2, x_3, x_0 + x_4$	10.	$x_1, x_2, x_3, x_0 - x_4$

## § 2. Частные решения нелинейного волнового уравнения

В данном параграфе рассматривается нелинейное волновое уравнение в пяти-мерном пространстве

$$\square u = F(u), \quad (2.1)$$

где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2},$$

$u(x) = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$  — скалярная дважды дифференцируемая функция,  $F(u)$  — произвольная дифференцируемая функция зависимой переменной  $u$ . Группой инвариантности уравнения (2.1) является  $P(1, 4)$ . Для нахождения точных решений этого уравнения использована подгрупповая структура группы  $P(1, 4)$ . Здесь рассмотрены только расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли группы  $P(1, 4)$ , использование которых редуцирует уравнение (2.1) к уравнениям с меньшим числом переменных.

**2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).** Рассмотрим анзацы вида

$$u = \varphi(\omega), \quad (2.2)$$

где  $\omega$  — одномерные инварианты соответствующих подгрупп группы  $P(1, 4)$ . Подставляя (2.2) в (2.1), получаем ОДУ вида:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{d\varphi}{d\omega}k\omega^{-1} = \varepsilon F(\varphi), \quad (2.3)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ .

Пусть  $F(\varphi) = \lambda\varphi^n$  ( $n \neq 1$ ), тогда уравнение (2.3) имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{d\varphi}{d\omega}k\omega^{-1} = \varepsilon\lambda\varphi^n \quad (n \neq 1). \quad (2.4)$$

В этом случае частное решение (2.4) ищем в виде

$$\varphi = d\omega^\nu. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), находим следующие выражения для  $d$  и  $\nu$ :

$$d = \left[ \frac{2[1 + k + n(1 - k)]}{\varepsilon\lambda(1 - n)^2} \right]^{1/(n-1)}, \quad \nu = \frac{2}{1 - n}. \quad (2.6)$$

Поэтому частные решения уравнения (2.1) с правой частью  $F(u) = \lambda u^n$  ( $n \neq 1$ ) выражаются формулами (2.2) и (2.5) с учетом (2.6). Переменные  $\omega$ ,  $k$  и  $\varepsilon$  выписаны в таблице 5.

Таблица № 5

№	Переменные $\omega$	$k$	$\varepsilon$
1.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$	1	-1
2.	$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}$	1	1
3.	$(x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	1	-1
4.	$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$	2	-1
5.	$(x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$	2	-1
6.	$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$	3	-1
7.	$(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$	3	-1
8.	$(x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$	3	-1
9.	$(x_4^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$	4	-1

Если  $k = 0$ , уравнение (2.3) интегрируется в квадратурах. В этом случае для уравнения (2.4) получается такой результат:

$$\omega + C_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\varepsilon\lambda\varphi^{n+1}/(n+1) + C_1}}, \quad (2.7)$$

где  $C_0$  и  $C_1$  — произвольные постоянные,  $\omega$  — одна из следующих переменных  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Для первой из них  $\varepsilon = 1$ , для остальных переменных  $\varepsilon = -1$ . Для переменных  $\omega_1 = x_0 + x_4$  и  $\omega_2 = x_0 - x_4$   $\square\varphi(\omega) \equiv 0$ .

**2.2. Дифференциальные уравнения в двумерном пространстве.** Рассмотрим анзацы вида

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (2.8)$$

где  $\omega_1(x)$  и  $\omega_2(x)$  — инварианты подгрупп группы  $P(1, 4)$ , выписанные в табл. 2. Подставляя (2.8) в (2.1), получаем следующие двумерные дифференциальные уравнения с частными производными (ДУЧП) ( $\varphi_{ik} = \partial^2\varphi/\partial\omega_i\omega_k$ ,  $i, k = 1, 2$ ):

- 1)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} + \varphi_1\omega_1^{-1} - \varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 2)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 3)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$ ,
- 4)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 5)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 6)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 7)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_1\omega_1^{-1} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 8)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - 3\varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 9)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$ ,
- 10)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} = F(\varphi)$ ,
- 11)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 12)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} = F(\varphi)$ ,

- 13)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} + \varphi_1 \omega_1^{-1} - 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 14)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 3\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 15)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_1 \omega_1^{-1} + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 16)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$ ,
- 17)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 18)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 3\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 19)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 20)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 21)  $4(\omega_1^2 - \omega_2) \varphi_{22} - 4\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 = F(\varphi)$ ,
- 22)  $4(\omega_2 - \omega_1^2) \varphi_{22} + 4\omega_1 \varphi_{12} + 10\varphi_2 = -F(\varphi)$ ,
- 23)  $4(\omega_2 - \omega_1^2) \varphi_{22} + 4\omega_1 \varphi_{12} + 8\varphi_2 = -F(\varphi)$ ,
- 24)  $\omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 25)  $4e^2 \omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 26)  $4e^2 \omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ .

Остальные двумерные инварианты редуцируют уравнение (2.1) к следующим ОДУ

- 27)  $\varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 28)  $\varphi_{11} = -F(\varphi)$ ,
- 29)  $\varphi_{11} = -F(\varphi)$ ,
- 30)  $\varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 31)  $\varphi_{11} = -F(\varphi)$ ,
- 32)  $\varphi_{22} + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 33)  $\varphi_{22} + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ .

**2.3. Дифференциальные уравнения в трехмерном пространстве.** Рассмотрим анзацы вида

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (2.9)$$

где  $\omega_1(x)$ ,  $\omega_2(x)$ ,  $\omega_3(x)$  — инварианты подгрупп группы  $P(1,4)$ , выписанные в табл. 3. Подставляя (2.9) в (2.1), получаем следующие трехмерные ДУЧП ( $\varphi_{ik} = \partial^2 \varphi / \partial \omega_i \omega_k$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ ):

- 1)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 2)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = -F(\varphi)$ ,
- 3)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = -F(\varphi)$ ,
- 4)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} = F(\varphi)$ ,
- 5)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 6)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \varphi_1 \omega_1^{-1} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 7)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + 2\varphi_3 \omega_3^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 8)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \varphi_1 \omega_1^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 9)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_2 \omega_2^{-1} - \varphi_3 \omega_3^{-1} = F(\varphi)$ ,

- 10)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 11)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_1 \omega_1^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 12)  $4(\omega_1^2 - \omega_2) \varphi_{22} - \varphi_{33} - 4\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 = F(\varphi)$ ,
- 13)  $4(\omega_2 - \omega_1^2) \varphi_{22} + \varphi_{33} + 4\omega_1 \varphi_{12} + 8\varphi_2 = -F(\varphi)$ ,
- 14)  $4(\omega_1^2 - \omega_2) \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_3 \omega_3^{-1} - 4\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 = F(\varphi)$ ,
- 15)  $4e^2 \omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 16)  $4e^2 \omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 17)  $\left( e^{-2} \omega_2^{-2} + \frac{1}{4} \omega_3^{-2} \right) \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_2 \omega_2^{-1} + \varphi_3 \omega_3^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 18)  $\omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_2 \omega_2^{-1} + 2\varphi_3 \omega_3^{-1} - 2d^{-1} \varphi_{13} \omega_3^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 19)  $(e^{-2} \omega_3^{-2} + \omega_2^{-2}) \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} - \varphi_{33} - \varphi_3 \omega_3^{-1} = -F(\varphi)$ .

Остальные трехмерные инварианты редуцируют уравнение (2.1) к следующим двумерным ДУЧП:

- 20)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$ ,
- 21)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$ ,
- 22)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$ ,
- 23)  $\varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 24)  $\varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 25)  $(\omega_2^{-2} + \omega_3^{-2}) \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi)$ .

**2.4. Дифференциальное уравнение в четырехмерном пространстве.** Рассмотрим анзацы вида:

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \quad (2.10)$$

где  $\omega_1(x), \dots, \omega_4(x)$  — инварианты подгрупп группы  $P(1, 4)$ , выписанные в табл. 4. Подставляя (2.10) в (2.1), получаем следующие четырехмерные ДУЧП ( $\varphi_{ik} = \partial^2 \varphi / \partial \omega_i \omega_k$ ,  $i, k = 1, 2, 3, 4$ ):

- 1)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + \varphi_{44} = -F(\varphi)$ ,
- 2)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_{44} = F(\varphi)$ ,
- 3)  $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_{44} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi)$ ,
- 4)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} - \varphi_{44} - \varphi_4 \omega_4^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 5)  $4(\omega_1^2 - \omega_2) \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_{44} - 4\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 = F(\varphi)$ ,
- 6)  $\left( e^{-2} \omega_2^{-2} + \frac{1}{4} \omega_3^{-2} \right) \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} - \varphi_{44} + \varphi_2 \omega_2^{-1} + \varphi_3 \omega_3^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 7)  $(e^{-2} \omega_3^{-2} + \omega_2^{-2}) \varphi_{11} + \varphi_{22} - \varphi_{33} + \varphi_{44} + \varphi_2 \omega_2^{-1} - \varphi_3 \omega_3^{-1} = -F(\varphi)$ ,
- 8)  $(\omega_2^{-1} + \omega_3^{-1}) \varphi_{11} + \varphi_{22} + 4\omega_3 \varphi_{34} + 4(\omega_4 - \omega_3^2) \varphi_{44} + \varphi_2 \omega_2^{-1} - 2\varphi_4 = -F(\varphi)$ ,

Остальные четырехмерные инварианты редуцируют уравнение (2.1) к следующим трехмерным ДУЧП:

- 9)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = -F(\varphi)$ ,
- 10)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = -F(\varphi)$ ,

### § 3. Некоторые точные решения релятивистского уравнения эйконала

Релятивистское уравнение эйконала или релятивистское уравнение Гамильтона

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 = m^2 \quad (3.1)$$

является одним из основных в математической физике. Не уменьшая общности, можно положить  $m = 1$  и рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 = 1. \quad (3.2)$$

В работе [7] показано, что максимальной локальной группой инвариантности уравнения (3.2) является конформная группа  $C(1, 4)$  в  $(4+1)$ -мерном пространстве Пуанкаре–Минковского с метрикой

$$s^2 = x^\alpha x_\alpha \equiv g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2,$$

где  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4$ ;  $x_4 = u$ ;  $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \{1, -1, -1, -1, -1\} \delta_{\alpha\beta}$ ,  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера.

Базисные элементы алгебры инвариантности имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}, & P_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1}, & P_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2}, & P_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ P_4 &= -\frac{\partial}{\partial u}, & M_{\mu\nu} &= -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Среди инвариантов, выписанных в § 1, рассмотрим только те, которые удовлетворяют необходимым условиям существования инвариантных решений [13].

На основании одномерных инвариантов получены следующие решения уравнения (3.2):

$$\begin{aligned} 1) \quad x_0^2 - u^2 &= 0, & 5) \quad u &= x_0 - C, \\ 2) \quad x_0^2 - x_3^2 - u^2 &= 0, & 6) \quad x_3^2 + u^2 &= 0, \\ 3) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 &= 0, & 7) \quad x_0^2 - x_1^2 - x_3^2 - u^2 &= 0, \\ 4) \quad u &= C - x_0, & 8) \quad u^2 - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Использование некоторых двумерных инвариантов редуцирует уравнение эйконала к ОДУ. Для этого рассмотрим анзацы вида [2]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad (3.5)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  – известные функции,  $\varphi(\omega)$  – некоторая неизвестная функция, подлежащая определению. Подставляя (3.5) в уравнение (3.2), получаем ОДУ для функции  $\varphi(\omega)$ . Полученные результаты представлены таблицей 6.

Решения уравнений (1)–(4) (см. таблицу № 6) имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi(\omega) &= C, \\ 2) \quad \varphi(\omega) &= i\varepsilon\omega^{1/2} + C, \quad (\varepsilon = \pm 1), \\ 3) \quad \varphi(\omega) &= \varepsilon\omega + C, \\ 4) \quad \varphi(\omega) &= i\varepsilon\omega + C. \end{aligned}$$

Подставляя найденные  $\varphi(\omega)$  в (3.5), получаем точные решения уравнения эйконала.

**Таблица № 6**

№	Инварианты $\omega, \omega_1$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_0 + u$	1	$-x_0$	$\varphi'(\omega) = 0$ (1)
2.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_0 - u$	-1	$x_0$	
3.	$x_1^2 + x_2^2, u + x_0$	1	$-x_0$	
4.	$x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
5.	$x_2, x_0 + u$	1	$-x_0$	
6.	$x_3, x_0 - u$	-1	$x_0$	
7.	$x_1^2 + x_2^2, x_0 - u$	-1	$x_0$	
8.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2, u$	1	0	$[\varphi'(\omega)]^2 \omega = -\frac{1}{4}$ (2)
9.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, u$	1	0	
10.	$x - 1^2 + x_2^2, u$	1	0	
11.	$x_0, u$	1	0	$[\varphi'(\omega)]^2 = 1$ (3)
12.	$x_3, u$	1	0	$[\varphi'(\omega)]^2 = -1$ (4)

Рассмотрим анзацы вида [2, 5]

$$F(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{3.6}$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — известные функции,  $\varphi(\omega)$  — некоторая неизвестная функция, подлежащая определению. В частности, если  $F(u) = u^2$ , получаем следующие результаты:

**Таблица № 7**

№	Инварианты $\omega, \omega_1$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$x_3, x_0^2 - u^2$	-1	$x_0^2$	$(\varphi')^2 - 4\varphi = 0$ (1)
2.	$x_0, x_3^2 + u^2$	1	$-x_3^2$	
3.	$x_0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$	1	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	
4.	$x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + u^2$	1	$-x_3^2$	$(\varphi')^2 \omega + \varphi = 0$ (2)
5.	$x_1^2 + x_2^2, u^2 + x_3^2 - x_0^2$	1	$-x_3^2 + x_0^2$	
6.	$x_3, u^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2$	1	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$	$(\varphi')^2 + 4\varphi = 0$ (3)
7.	$x_2, u^2 + x_3^2 - x_0^2$	1	$x_0^2 - x_3^2$	
8.	$x_1^2 + x_2^2, x_0^2 - u^2$	-1	$x_0^2$	$(\varphi')^2 \omega - \varphi = 0$ (4)
9.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_0^2 - u^2$	-1	$x_0^2$	

Решения уравнений (1)–(4) имеют вид:

- (1)  $\varphi(\omega) = (\omega\varepsilon + C)^2,$
- (2)  $\varphi(\omega) = (i\varepsilon\omega^{1/2} + C)^2,$
- (3)  $\varphi(\omega) = (i\varepsilon\omega + C)^2,$
- (4)  $\varphi(\omega) = (\varepsilon\omega^{1/2} + C)^2, \quad (\varepsilon = \pm 1).$

Подставляя найденные  $\varphi(\omega)$  в (3.6) получаем точные решения уравнения эйконала.

Для инвариантов

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{d} \ln(x_0 + u) \quad (d > 0)$$

анзац имеет вид

$$u = \exp \left[ d \left( \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \varphi(\omega_1) \right) \right] - x_0. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в уравнение (3.2), получаем:

$$\frac{d\varphi}{d\omega_1} = \frac{i\varepsilon}{\omega_1} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\omega_1) = i\varepsilon \ln \omega_1 - \ln C_1,$$

тогда

$$u = \frac{\tilde{C}_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2\varepsilon id}} \exp \left\{ d \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right\} - x_0.$$

Для инвариантов

$$\begin{aligned} (1) \quad \omega_1 &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ \omega_2 &= \ln(x_0^2 - u^2) - 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}}, \\ (2) \quad \omega_1 &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ \omega_2 &= \ln(x_0^2 - u^2) + 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} \quad (e > 0) \end{aligned}$$

решения уравнения эйконала ищем на основании следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad \ln(x_0^2 - u^2) - 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} &= \varphi(\omega_1), \\ (2) \quad \ln(x_0^2 - u^2) + 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} &= \varphi(\omega_1). \end{aligned}$$

Тогда в обоих случаях получается уравнение

$$\left( \frac{d\varphi}{d\omega_1} \right)^2 + \frac{4e^2}{\omega_1^2} = 0,$$

общее решение которого задается формулой

$$\varphi(\omega_1) = C \ln \omega_1^{2ie\varepsilon}.$$



Решения уравнения эйконала задаются неявно в виде формул

$$(1) \quad \ln \frac{x_0^2 - u^2}{C(x_1^2 + x_2^2)^{ie\varepsilon}} - 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} = 0,$$

$$(2) \quad \ln \frac{x_0^2 - u^2}{C(x_1^2 + x_2^2)^{ie\varepsilon}} + 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} = 0.$$

Для инвариантов

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_0 + u, & \omega_2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_0(x_0 + u), \\ \omega_1 &= x_0 + u, & \omega_2 &= x_3^2 - 2x_0(x_0 + u), \\ \omega_1 &= x_0 + u, & \omega_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_0(x_0 + u) \end{aligned} \quad (3.8)$$

рассмотрим анзацы вида

$$\omega_2 = \psi(\omega_1). \quad (3.9)$$

С учетом (3.9) уравнение эйконала редуцируется к следующему ОДУ:

$$\omega_1 \psi_1 + \omega_1^2 - \psi(\omega_1) = 0. \quad (3.10)$$

Общее решение уравнения (3.10) имеет вид

$$\psi = (-\omega_1 + C_1)\omega_1.$$

На основании (3.9) получаются решения уравнения эйконала в неявном виде

$$\omega_2 = (-\omega_1 + C_1)\omega_1, \quad (3.11)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  даются соотношениями (3.8).

Другие анзацы для рассмотренных  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть получены из соотношения

$$F(\omega_1, \omega_2) = 0.$$

**3.2. Уравнения в двумерном пространстве.** Использование некоторых трехмерных инвариантов редуцирует уравнение эйконала к двумерным ДУЧП. С этой целью рассмотрим анзацы вида:

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2) + g(x). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в уравнение (3.2), получаем двумерные ДУЧП для функции  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ . Полученные результаты подытожены в таблице 8.

Рассмотрим анзацы вида

$$F(u) = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2) + g(x), \quad (3.13)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — известные функции,  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  — неизвестная функция, подлежащая определению. В частности, если  $F(u) = u^2$ , получаем следующие результаты (таблица 9).

Таблица № 8

№	Инварианты $\omega, \omega_1, \omega_3$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$x_2, x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
2.	$x_2, x_3, x_0 - u$	-1	$x_0$	
3.	$x_1, x_2, x_0 + u$	1	$-x_0$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 = 0$
4.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
5.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_0 - u$	-1		
6.	$x_2, x_3, u$	1	0	
7.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 = -1$
8.	$x_0, x_3, u$	1	0	
9.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 = 1$
10.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, u$	1	0	

Таблица № 9

№	Инварианты $\omega, \omega_1, \omega_3$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_0^2 - u^2$	-1	$x_0^2$	
2.	$x_2, x_3, x_0^2 - u^2$	-1	$x_0^2$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 - 4\varphi = 0$
3.	$x_1, x_2, x_3^2 + u^2 - x_0^2$	1	$x_0^2 - x_3^2$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + 4\varphi = 0$
4.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3^2 + u^2$	1	$-x_3^2$	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 - 4\varphi = 0$

Для инвариантов

$$\begin{aligned}
 \omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = x_3 - 2x_0(x_0 + u), \\
 \omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3^2 - 2x_0(x_0 + u), \\
 \omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = x_3, \quad \omega_3 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_0(x_0 + u)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

рассмотрим анзацы вида

$$\omega_3 = \psi(\omega_1, \omega_2). \tag{3.15}$$

На основании (3.15) уравнение эйконала редуцируется к следующему двумерному ДУЧП:

$$4\omega_1\psi_1 - (\psi_2)^2 + 4(\omega_1^2 - \psi(\omega_1, \omega_2)) = 0.$$

Рассмотрим трехмерные инварианты

$$\begin{aligned}
 \omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\
 \omega_3 = \ln(x_0^2 - u^2) - 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} \quad (e > 0)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

и

$$\begin{aligned}\omega_1 &= x_3, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ \omega_3 &= \ln(x_0^2 - u^2) + 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} \quad (e > 0).\end{aligned}$$

Анзац (3.15) дает возможность редуцировать уравнение эйконала к следующему ДУЧП:

$$(\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + 4e^2\omega_2^{-2} = 0.$$

Трехмерные инварианты

$$\begin{aligned}(1) \quad \omega_1 &= x_0 + u, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ \omega_3 &= \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{x_3}{\varepsilon(x_0 + u)} \quad (\varepsilon = \pm 1), \\ (2) \quad \omega_1 &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}, \\ \omega_3 &= \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{e} \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} \quad (e > 0), \\ (3) \quad \omega_1 &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (u^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}, \\ \omega_3 &= \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{d} \ln(x_0 + u) \quad (d > 0), \\ (4) \quad \omega_1 &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}, \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + u^2}} + \frac{1}{e} \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (e > 0)\end{aligned} \tag{3.17}$$

с анзацем (3.15) дают возможность редуцировать уравнение эйконала к следующим ДУЧП:

$$\begin{aligned}(1) \quad (\psi_2)^2 + \omega_2^{-2} + \omega_1^2 &= 0, \\ (2) \quad (\psi_1)^2 - (\psi_2)^2 + \omega_1^{-2} + e^{-2}\omega_2^{-2} &= 0, \\ (3) \quad (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + \omega_1^{-2} + 2d^{-1}\omega_2^{-1}\psi_2 &= 0, \\ (4) \quad (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + e^{-2}\omega_1^{-2} + \frac{1}{4}\omega_2^{-2} &= 0.\end{aligned}$$

Другие неявные анзацы для инвариантов (3.14), (3.16) и (3.17) могут быть получены из соотношения  $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$ .

**3.3. Уравнения в трехмерном пространстве.** Использование некоторых четырехмерных инвариантов редуцирует уравнение эйконала к трехмерным ДУЧП. С этой целью рассмотрим анзацы вида:

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + g(x). \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в уравнение (3.2), получаем трехмерные ДУЧП для функции  $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . Полученные результаты приведены в таблице 10.

Таблица № 10

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$x_1, x_2, x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
2.	$x_1, x_2, x_3, x_0 - u$	-1	$x_0$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 0$
3.	$x_0, x_2, x_3, u$	1	0	
4.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 - \varphi_3^2 = 1$
5.	$x_1, x_2, x_3, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = -1$

Для инвариантов  $\omega_1 = x_1, \omega_2 = x_2, \omega_3 = x_3, \omega_4 = x_0^2 - u^2$  анзац имеет вид:

$$u^2 = x_0^2 - \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

В этом случае вместо уравнения эйконала получаем следующее:

$$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 - 4\varphi = 0.$$

Четырехмерные инварианты

$$(1) \quad \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_0 + u, \\ \omega_4 = x_3^2 - 2x_0(x_0 + u),$$

$$(2) \quad \omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = x_3^2 - 2x_0(x_0 + u), \\ \omega_4 = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{x_3}{\varepsilon(x_0 + u)},$$

$$(3) \quad \omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ \omega_4 = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{e} \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}}, \quad (e > 0),$$

$$(4) \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}, \quad \omega_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ \omega_4 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + u^2}} + \frac{1}{e} \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + u^2}}, \quad (e \neq 0),$$

с анзацами вида  $\omega_4 = \psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  редуцируют уравнение эйконала к следующим ДУЧП:

$$(1) \quad (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 - \omega_3\psi_3 - 4\omega_3^2 + 4\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0,$$

$$(2) \quad (\psi_2)^2 + 4(\omega_3 - \omega_2^2)(\psi_3)^2 + 4\omega_1\psi_1\psi_3 + \omega_1^{-2} + \omega_2^{-2} = 0,$$

$$(3) \quad (\psi_1)^2 - (\psi_2)^2 + (\psi_3)^2 + e^{-2}\omega_2^{-2} + \omega_3^{-2} = 0,$$

$$(4) \quad (\psi_1)^2 - (\psi_2)^2 - (\psi_3)^2 - \frac{1}{4}\omega_2^{-2} - e^2\omega_3^{-2} = 0.$$

На основании инвариантов (1)–(4) более общие анзацы имеют вид:

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = 0.$$

**§ 4. О точных решениях уравнения эйконала с нулевой массой**

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 0. \tag{4.1}$$

В работе [5] доказано, что уравнение (4.1) инвариантно относительно бесконечнопараметрической группы Ли. Инфинитезимальный оператор этой группы имеет вид:

$$X = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad \eta = \eta(u), \tag{4.2}$$

$$\xi^\mu = -b_\mu(u)x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu(u)x^\nu + c_{\mu\nu}(u)x^\nu + d_\mu(u).$$

В этом параграфе приводим некоторые точные решения уравнения (4.1), полученные на основании некоторых инвариантов расщепляющихся подгрупп группы  $P(1, 4)$ .

**4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Использование некоторых двумерных инвариантов дает возможность редуцировать уравнение (4.1) к ОДУ. С этой целью рассмотрим анзацы вида (3.5)

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x).$$

Подставляя (3.5) в (4.1), приходим к ОДУ для функции  $\varphi(\omega)$ . Полученные результаты приведены в таблице 11.

**Таблица № 11**

№	Инварианты $\omega, \omega_1$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения	
1.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2, u$	1	0		
2.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, u,$	1	0		
3.	$x_0, u$	1	0	$\varphi'(\omega) = 0$	(1)
4.	$x_1^2 + x_2^2, u$	1	0		
5.	$x_3, u$	1	0		
6.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_0 + u$	1	$-x_0$		
7.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_0 - u$	$-1$	$x_0$		
8.	$x_1^2 + x_2^2, x_0 + u$	1	$-x_0$	$(\varphi')^2 \omega = \frac{1}{4}$	(2)
9.	$x_1^2 + x_2^2, x_0 - u$	$-1$	$x_0$		
10.	$x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$		
11.	$x_2, x_0 + u$	1	$-x_0$	$(\varphi')^2 = 1$	(3)
12.	$x_3, x_0 - u$	$-1$	$x_0$		

Решения уравнений (1)–(3) (см. таблицу 11) имеют вид:

- (1)  $\varphi(\omega) = \text{const},$
- (2)  $\varphi(\omega) = \varepsilon\omega^{1/2} + C,$
- (3)  $\varphi(\omega) = \varepsilon\omega + C, \quad (\varepsilon = \pm 1).$

Учитывая найденные  $\varphi(\omega)$  и вид анзаца, получаем точные решения уравнения (4.1).

**4.2. Уравнения в двумерном пространстве.** Использование некоторых трехмерных инвариантов редуцирует уравнение (4.1) к двумерным ДУЧП. Для этого рассмотрим анзацы (3.12)

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2) + g(x).$$

Подставляя (3.12) в уравнение (4.1), получаем двумерные ДУЧП для функции  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ . Результаты сведены в таблицу 12.

**Таблица № 12**

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$x_2, x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
2.	$x_2, x_3, x_0 - u$	-1	$x_0$	
3.	$x_1, x_2, x_0 + u$	1	$-x_0$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 = 1$
4.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
5.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, x_0 - u$	-1	$x_0$	
6.	$x_2, x_3, u$	1	0	
7.	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 = 0$
8.	$x_0, x_3, u$	1	0	
9.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 = 0$
10.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, u$	1	0	

**4.3. Уравнения в трехмерном пространстве.** Редуцируем уравнение (4.1) к трехмерным ДУЧП. С этой целью воспользуемся подстановкой

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + g(x),$$

которая приводит уравнение (4.1) к трехмерным ДУЧП для функции  $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . Результаты приведены в таблице 13.

**Таблица № 13**

№	Инварианты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$x_1, x_2, x_3, x_0 + u$	1	$-x_0$	
2.	$x_1, x_2, x_3, x_0 - u$	-1	$x_0$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 1$
3.	$x_0, x_2, x_3, u$	1	0	
4.	$x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_3, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 - (\varphi_3)^2 = 0$
5.	$x_1, x_2, x_3, u$	1	0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 0$

Воспользовавшись формулами размножения решений [5, 7] волнового уравнения (2.1) и уравнения эйконала (3.2), по найденным нами частным решениям строятся многопараметрические семейства решений. Так, например, если  $u_1$  — частное решение конформно-инвариантного уравнения

$$\square u + \lambda u^k = 0, \quad k = \frac{n+2}{n-2} = \frac{7}{3}, \quad \text{для } n = 5, \quad (4.3)$$

где  $n$  — размерность пространства, то новые решения  $u_2$  строятся по формуле:

$$u_2 = \sigma \frac{2-n}{n} u_1(x_0 \rightarrow x'_0, x_1 \rightarrow x'_1, x_2 \rightarrow x'_2, x_3 \rightarrow x'_3, x_4 \rightarrow x'_4), \quad (4.4)$$

$$x'_\mu = \sigma^{-1}(x_\mu + c_\mu x_\alpha x^\alpha), \quad \sigma = 1 - 2c_\nu x^\nu + c_\alpha c^\alpha x_\nu x^\nu,$$

$c_\mu$  — произвольные параметры, задающие конформные преобразования. Формула (4.4) задает не одно, а целое семейство частных решений нелинейного уравнения (4.3).

1. Фушич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе, *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, 360–382.
2. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
3. Фушич В.И., О симметрии частных решениях некоторых уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
4. Фушич В.И., Серов Н.И., Штельень В.М., О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Дирака и уравнения эйконала, В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.2, М., Наука, 1983, 407–413.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645.
6. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
7. Fushchych W.I., Shtelen V.M., The symmetry and some exact solutions of relativistic eikonal equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498–502.
8. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера  $P(1, 4)$ , Препринт 78.18, Киев, Институт математики АН УССР, 1978, 36 с.
9. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре  $P(1, 4)$ , *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717.
10. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре  $P(1, 4)$ , *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696.
11. Федорчук В.М., Фушич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.1, М., Наука, 1980, 61–66.
12. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group  $P(1, 4)$ , *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.
13. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

# Конформно-инвариантное обобщение уравнения Дирака–Гейзенберга и его точные решения

*В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, Р.З. ЖДАНОВ*

Рассмотрим следующее пуанкаре-инвариантное нелинейное обобщение уравнения Дирака

$$\begin{aligned} \gamma^\mu [i\partial_\mu + F_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + F_2 \bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi + F_3 (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \gamma_4 + F_4 (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi) \gamma_4] \psi + \\ + F_5 (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi) \sigma^{\mu\nu} \psi + F_6 (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi) \gamma_4 \sigma^{\mu\nu} \psi = (F_7 + F_8 \gamma_4) \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F_1, \dots, F_8$  — произвольные функции от  $\bar{\psi} \psi$ ,  $\bar{\psi} \gamma_4 \psi$ ,  $\gamma_4 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ,  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ .

В настоящей работе мы выделим из этого множества уравнений такие уравнения, которые инвариантны относительно масштабных преобразований

$$x'_\mu = e^\theta x_\mu, \quad \psi'(x') = e^{k\theta} \psi(x), \quad k, \theta = \text{const} \quad (2)$$

и конформных преобразований (см., например, [1–5]):

$$\begin{aligned} x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \quad \psi'(x') = \sigma(x)(1 - \gamma c \gamma x) \psi(x), \\ \sigma(x) \equiv 1 - 2cx + c^2 x^2, \quad cx \equiv c^\nu x_\nu, \quad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3)$$

**Теорема 1.** Уравнение (1) инвариантно относительно масштабных преобразований (2) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} F_1 = \Phi_1 [(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)]^{-(1+2k)/4k}, \quad F_2 = \Phi_2 [(\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_4 \gamma^\mu \psi)]^{-(1+2k)/4k}, \\ F_3 = \Phi_3 [(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)]^{-(1+2k)/4k}, \quad F_4 = \Phi_4 [(\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_4 \gamma^\mu \psi)]^{-(1+2k)/4k}, \\ F_5 = \Phi_5 [(\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)]^{-(1+2k)/4k}, \quad F_6 = \Phi_6 [(\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)]^{-(1+2k)/4k}, \\ F_7 = \Phi_7 (\bar{\psi} \psi)^{-1/2k}, \quad F_8 = \Phi_8 (\bar{\psi} \psi)^{-1/2k}, \end{aligned} \quad (4)$$

а  $\Phi_1, \dots, \Phi_8$  произвольные функции, зависящие от  $\bar{\psi} \psi / \bar{\psi} \gamma_4 \psi$ .

**Доказательство.** Нетрудно убедиться, что преобразования (2) оставляют уравнение (1) инвариантным, если и только если выполняются условия:

$$\begin{aligned} e^{\theta(2k+1)} F_B (\bar{\psi} \psi e^{2k\theta}, \bar{\psi} \gamma_4 \psi e^{2k\theta}) = F_B (\bar{\psi} \psi, \bar{\psi} \gamma_4 \psi), \quad B = 1, 2, \dots, 6, \\ e^{\theta(k+1)} F_C (\bar{\psi} \psi e^{2k\theta}, \bar{\psi} \gamma_4 \psi e^{2k\theta}) = F_C (\bar{\psi} \psi, \bar{\psi} \gamma_4 \psi), \quad C = 7, 8. \end{aligned} \quad (5)$$



Общее решение этих функциональных соотношений с учетом известных тождеств [5]

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2 - (\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) &= 0, \\ (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi) &= 0, \\ (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - (\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\gamma^\mu\psi) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

можно записать в виде (4).

**Теорема 2.** Уравнение (1) инвариантно относительно конформной группы  $C(1, 3)$ , если и только если функции  $F_1, \dots, F_8$  имеют вид (4) и  $k = -3/2$ .

**Доказательство.** Поскольку конформная группа  $C(1, 3)$  содержит расширенную группу Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3) = \{P(1, 3), D\}$  ( $D$  — обозначает группу масштабных преобразований (2)), то для доказательства необходимости можно воспользоваться результатом предыдущей теоремы. Далее непосредственной проверкой можно убедиться, что преобразования (3) оставляют инвариантным уравнение (1) с функциями (4) только при  $k = -3/2$ .

**Следствие.** Если  $F_7 = \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}$ , а все остальные  $F_A$  равны нулю, то уравнение (1) совпадает с уравнением Дирака–Гюрши [3]:

$$\left[ i\gamma\partial - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3} \right] \psi = 0. \quad (7)$$

В том случае, когда  $F_4 = \lambda[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi]^{-1/3}$ , а все остальные  $F_B$  равны нулю, мы получаем конформно-инвариантное уравнение

$$\left( i\gamma\partial + \lambda \frac{(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu}{[(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)]^{1/3}} \right) \psi = 0, \quad (8)$$

которое можно рассматривать как обобщение нелинейного уравнения Дирака–Гейзенберга [4]:

$$\left[ i\gamma\partial + \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu \right] \psi = 0. \quad (9)$$

Как известно [4], уравнение (9) неинвариантно относительно конформных преобразований.

Воспользуемся конформной симметрией уравнения (8) для построения его точных решений. Следуя [6,1], решения ищем в виде:

$$\psi = \varphi(\beta x), \quad \beta x \equiv \beta^\nu x_\nu, \quad \beta^\nu = \text{const} \quad - \text{трансляционно-инвариантные}, \quad (10)$$

$$\psi = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2} \Phi \left( \frac{\beta x}{x^\alpha x_\alpha} \right) \quad - \text{конформно-инвариантные}. \quad (11)$$

Подстановка этих выражений в (8) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i\gamma\beta \frac{du}{d\omega} + \nu \frac{(\bar{u}\gamma_\mu u)\gamma^\mu u}{[(\bar{u}\gamma_\nu u)(\bar{u}\gamma^\nu u)]^{1/3}} = 0, \quad (12)$$

где  $u = \left\{ \varphi(\omega), \omega = \beta x \text{ или } \Phi(\omega); \omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu} \right\}$ ,  $\nu = \lambda$  для  $\varphi$ ,  $\nu = -\lambda$  для  $\Phi$ . В зависимости от  $\nu$  получаем ( $\chi$  — постоянный спинор,  $\beta_\mu = \frac{\bar{\chi}\gamma_\mu\chi}{[(\bar{\chi}\gamma_\nu\chi)(\bar{\chi}\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}$ ):

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & \text{Im } \nu = 0, \quad u = e^{i\nu\omega}\chi, \\ \text{(б)} \quad & \text{Re } \nu = 0, \quad u = \left(c + \frac{2}{3}\mu\omega\right)^{-3/2}\chi, \quad \mu = \text{Im } \nu, \\ \text{(в)} \quad & \text{Im } \nu \text{ Re } \nu \neq 0, \quad u = (f_1 + if_2)\chi, \quad \nu = \nu_1 + i\nu_2, \\ & f_1 = \pm [(w - 2\nu)^{1/2} + (w + 2\nu)^{1/2}], \\ & f_2 = \mp [(w - 2\nu)^{1/2} - (w + 2\nu)^{1/2}], \\ & \int \frac{dv}{\left(c_1 - 2\frac{\nu_2}{\nu_1}v^2\right)^{2/3}} = 2\nu_1\omega + c_2, \quad w = \left(c_1 - 2\frac{\nu_2}{\nu_1}v^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

**Замечание.** Покажем, что конформно-инвариантный анзац (11) можно также получить из трансляционно-инвариантного (10) с помощью процедуры размножения решений. Как показано в [1, 2], формула генерирования решений с помощью конформных преобразований (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{\text{new}}(x) &= \frac{1 - \gamma x \gamma c}{\sigma^2(x)} \psi_{\text{old}}(x'), \quad x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \\ \sigma(x) &\equiv 1 - 2cx + c^2 x^2, \quad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \quad x^2 \equiv x^\nu x_\nu. \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя (14) при  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  к (10) с последующим переходом от  $x_0$  к  $x_0 + 1$  (в силу инвариантности уравнения относительно трансляций), получаем (11).

Применим теперь процедуру размножения решений к конформно-инвариантному решению (11), (13а)

$$\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2} \exp \left\{ -i\lambda \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu} \right\} \chi, \quad \beta_\mu = \frac{\bar{\chi}\gamma_\mu\chi}{[(\bar{\chi}\gamma_\nu\chi)(\bar{\chi}\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}. \quad (15)$$

Совершив над (15) преобразование трансляций  $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$  ( $a_\mu = \text{const}$ ), получим другое семейство решений

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\gamma x + \gamma a}{(x^2 + 2ax + a^2)^2} \exp \left\{ -i\lambda \frac{\beta x + \beta a}{x^2 + 2ax + a^2} \right\} \chi, \\ \beta_\mu &= \frac{\bar{\chi}\gamma_\mu\chi}{[(\bar{\chi}\gamma_\nu\chi)(\bar{\chi}\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это семейство замечательно тем, что оно уже неразмножается с помощью преобразований группы  $C(1, 3)$ . Убедимся в этом. Очевидно, что (16) неразмножимо с помощью трансляций. Применяя к (16) формулы (14), получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1 - \gamma x \gamma c}{\sigma^2(x, c)} \frac{\frac{\gamma x - \gamma c x^2}{\sigma(x, c)} + \gamma a}{\left[ a^2 + 2\frac{ax + acx^2 + x^2}{\sigma(x, c)} \right]^2} \exp \left\{ -i\lambda \frac{\frac{\beta x - \beta c x^2}{\sigma(x, c)} + \beta a}{a^2 + 2\frac{ax - acx^2 + x^2}{\sigma(x, c)}} \right\} \chi, \\ \sigma(x, c) &= 1 - 2cx + c^2 x^2, \quad \beta_\mu = \frac{\bar{\chi}\gamma_\mu\chi}{[(\bar{\chi}\gamma_\nu\chi)(\bar{\chi}\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Легко видеть, что (17) можно переписать в виде (16), если совершить замену параметров

$$\begin{aligned} a_\mu \rightarrow \tilde{a}_\mu &= -\frac{a_\mu - c_\mu a^2}{\sigma(a, c)}, & \chi \rightarrow \tilde{\chi} &= \frac{1 - \gamma c \gamma a}{\sigma^2(a, c)}, \\ \sigma(a, c) &= 1 - 2ac + a^2 c^2, & \beta_\mu \rightarrow \tilde{\beta}_\mu &= \frac{\tilde{\chi} \gamma_\mu \tilde{\chi}}{[(\tilde{\chi} \gamma_\nu \tilde{\chi})(\tilde{\chi} \gamma^\nu \tilde{\chi})]^{1/3}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Неразмножимость (16) остальными преобразованиями группы  $C(1, 3)$  вполне очевидна.

В заключение отметим, что мы использовали симметрию для получения точных решений нелинейного уравнения Дирака [1, 2, 11], нелинейных уравнений квантовой электродинамики [7], уравнений Янга–Миллса [8] и некоторых скалярных нелинейных уравнений, таких, как Лиувилля, эйконала, Монжа–Ампера, Гамильтона–Якоби [6, 9, 10, 11].

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, **16**, 1983, 271.
2. Фушич В.И., Штельень В.М., *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88.
3. Gursey F., *Nuovo Cim.*, 1956, № 1, 88.
4. Гейзенберг В., Введение в единую полевою теорию элементарных частиц, М., Мир, 1968, 239 с.
5. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 5.
6. Фушич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6.
7. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cim.*, 1983, **38**, 37.
9. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498.
10. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645.
11. Фушич В.И., Серов Н.И., Штельень В.М., В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, М., Наука, 1983, Т.2, 407.

# О нелинейном галилей-инвариантном обобщении уравнений Ламе

В.И. ФУЩИЧ, С.Л. СЛАВУЦКИЙ

Уравнение Ламе

$$L\mathbf{u} = 0, \quad L = \square + \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div}, \quad (1)$$

является основным уравнением линейной теории упругости. В (1)  $\square$  — оператор Даламбера,  $\lambda = \operatorname{const}$ ,  $\mathbf{u} = \{u^1, u^2, u^3\}$  — вектор смещения точек упругой среды.

В [1] обращено внимание на следующее: уравнение Ламе не инвариантно ни относительно преобразований Галилея

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad t' = t, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор-параметр преобразования (скорость одной инерциальной системы отсчета относительно другой), ни относительно преобразований Лоренца. Известные нелинейные обобщения уравнения Ламе также не обладают этим свойством. В связи с этим возникает следующая задача [1]: обобщить уравнение (1) таким образом, чтобы оно было инвариантно относительно преобразований (2). В настоящей работе эта задача решена, т.е. построены нелинейные уравнения в частных производных, инвариантные преобразования Галилея (2). Линейная часть в этих уравнениях совпадает с уравнением Ламе (1).

Рассмотрим уравнение

$$L\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{u}_1 = \left\{ \frac{\partial u^a}{\partial x_\mu} \right\}, \quad \mathbf{u}_2 = \left\{ \frac{\partial^2 u^a}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right\}, \quad a = 1, 2, 3, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad x_0 \equiv t,$$

$\mathbf{F}$  — произвольная дважды дифференцируемая вектор-функция, которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} F^i &= A^{\mu\nu}(\mathbf{u})u_{\mu\nu}^i + B_\nu^\mu(\mathbf{u})u_{\mu i}^\nu + C^\mu(\mathbf{u})u_\mu^i + D_\mu(\mathbf{u})u_i^\mu + E(\mathbf{u})u^i, \\ \mathbf{u} &= \{\mathbf{u}, u^0\}, \quad u^0 \equiv 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Всюду по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, нижний индекс у компонент 4-вектора  $\mathbf{u}$  означает дифференцирование по соответствующей переменной. Тензорные коэффициенты в (4) представим в виде

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu}(u) &= a_{\alpha\beta}^{\mu\nu}u^\alpha u^\beta, & B_\nu^\mu(u) &= b_{\nu\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta, & C^\mu(u) &= c_\alpha^\mu u^\alpha, \\ D_\mu(u) &= d_{\mu\alpha} u^\alpha, & E &= e, & & \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $a_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ ,  $b_{\nu\alpha\beta}^{\mu}$ ,  $d_{\mu\alpha}$ ,  $e$  — произвольные дважды дифференцируемые тензорные функции, зависящие только от  $|\mathbf{u}|$ .

**Теорема 1.** Уравнение (3) при условиях (4), (5) инвариантно относительно преобразований Галилея (2), если

$$\mathbf{F} = -2(\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla)\} \mathbf{u}. \quad (6)$$

**Доказательство.** Воспользуемся лиевским критерием инвариантности уравнения (3) относительно преобразований (2):

$$G_a(L\mathbf{u} + \mathbf{F})|_{L\mathbf{u} + \mathbf{F} = 0} = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где

$$G_a = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial u^a} - u_a^b \frac{\partial}{\partial u_0^b} - 2u_{a\mu}^b \frac{\partial}{\partial u_{0\mu}^b}, \quad b = 1, 2, 3,$$

есть дважды продолженный (см., например, [2]) оператор

$$G_a = x_0 \frac{p}{\partial x_a} - \frac{\partial}{\partial u^a}. \quad (8)$$

Оператор (8) порождает преобразования (2).

Применяя критерий (7) к уравнению (3) и учитывая (4), (5), получим для коэффициентов в (5) следующие условия:

$$a_{\alpha\beta}^{00} + 1 = - \sum_{\mu \neq 0} \sum_{\nu} a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \sum_{\mu \neq 0} \sum_{\nu \neq 0} a_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

$$c_{\alpha}^0 = - \sum_{\mu \neq 0} c_{\alpha}^{\mu}, \quad a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = a_{\alpha\beta}^{\nu\mu} = a_{\beta\alpha}^{\mu\nu} = a_{\beta\alpha}^{\nu\mu},$$

$$b_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = d_{\mu\alpha} = e = 0, \quad a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = 0, \quad \mu \wedge \nu \neq \alpha \wedge \beta,$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}^{\mu\nu}}{\partial u} = \frac{\partial c_{\alpha}^{\mu}}{\partial u} = 0, \quad c_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad \mu \neq \alpha.$$

Отсюда следует, что уравнение (3) может быть записано в виде

$$Lu^i + C_1 u_{00}^i - 2(C_1 + 1)u^a u_{0a}^i + (C_1 + 1)u^a u^b u_{ab}^i + C_2 u_0^i - C_2 u^a u_a^i = 0,$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. В частности, при  $C_1 = C_2 = 0$  имеем

$$\square u^i + \lambda u_{ai}^a - 2u^a u_{0a}^i + u^a u^b u_{ab}^i = 0,$$

что совпадает с (3), (6) в покомпонентной записи.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор  $\mathbf{F}$  явно зависит от координат  $\mathbf{x}$ . Очевидно, что такие уравнения (3) не будут инвариантны относительно пространственных сдвигов. В этом случае справедлива

**Теорема 2.** Уравнение (3), в котором

$$\mathbf{F} = -2(\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla)\} \nabla \mathbf{u} + \{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \cdot \nabla)\} \nabla \mathbf{u} \quad (9)$$

инвариантно относительно преобразований (2).

Доказательство аналогично предыдущему.

С помощью хорошо известного алгоритма Ли [2] можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (3) является:*

1) 11-мерная алгебра Ли с базисными элементами

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_a = \varepsilon_{abc} \left( x_b p_c + u^b \frac{\partial}{\partial u^c} \right), \quad G_a = x_0 p_a - \frac{\partial}{\partial u^a}, \quad D = x_\mu p_\mu, \quad (10)$$

если  $\mathbf{F}$  определена из (6);

2) 8-мерная алгебра Ли, базис которой образуют операторы  $p_0, J_a, G_a, D$  из (10), если  $\mathbf{F}$  определена из (9).

Операторы  $p_\mu$  порождают сдвиги по координатам,  $J_a$  — пространственные повороты, а оператор  $D$  — масштабные преобразования.

В заключение укажем еще один путь получения нелинейных уравнений движения для вектор-функций, в котором используется нелинейное представление алгебры Ли группы Галилея. Оказывается, что помимо хорошо известного линейного представления, задаваемого формулами (10), существует нелинейная реализация этой алгебры. Базисные элементы нелинейного представления алгебры Ли группы Галилея имеют вид

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}, & J_a &= \varepsilon_{abc} \left( x_b p_c + u^b \frac{\partial}{\partial u^c} \right), \\ D &= x_\mu p_\mu, & G_a^* &= x_0 p_a + u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^b}. \end{aligned} \quad (11)$$

Конечные преобразования, порождаемые оператором  $G_a^*$  из (11), выражаются формулами

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что вектор-функция при галилеевых переносах преобразуется нелинейным образом.

Более подробно вопрос о построении уравнений движения, инвариантных относительно преобразований (12), будет обсужден в другой работе.

1. Фушич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 6–28.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

# О симметрии некоторых уравнений идеальной жидкости

В.И. ФУЩИЧ, С.Л. СЛАВУЦКИЙ

Групповые свойства основных уравнений движения жидкости — Эйлера и Навье–Стокса — хорошо изучены [1–4]. Однако в различных вопросах гидродинамики используется ряд других уравнений (уравнения в лагранжевых переменных, уравнения движения релятивистской жидкости, сверхтекучей жидкости и др.), симметричные свойства которых не исследованы.

Цель данной работы — изучить групповые свойства таких уравнений и предложить другие уравнения для описания жидкости, допустимые с симметрией точки зрения [9].

1. Для описания турбулентной диффузии, деформации материальных поверхностей в турбулентном потоке используется уравнение движения идеальной жидкости в форме Лагранжа [4]:

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

где  $u^k$  — компоненты вектора смещения,  $x_i$  — лагранжевы переменные,  $p$  — давление, которое полагаем постоянным,  $\lambda = \text{const}$ ,  $i, k = \overline{1, 3}$ , по повторяющимся индексам всюду подразумевается суммирование. Полную информацию о локальных групповых свойствах уравнения (1) дает

**Теорема 1.** *Максимальной алгеброй инвариантности (МАИ), в смысле С. Ли, уравнения (1) является 15-мерная алгебра Ли  $A(15)$ , базисные элементы которой задаются формулами*

$$p_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad D_1 = 2x_a p_a + (u^a - x_a) \tilde{p}_a, \quad D_2 = x_0 p_0, \quad (2)$$

$$p_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \tilde{p}_a = \frac{\partial}{\partial u^a}, \quad G_a = x_0 \tilde{p}_a, \quad I_a = \varepsilon_{abc} (u^b - x_b) \tilde{p}_c, \quad (3)$$

где  $x_0 \equiv t$ ,  $\varepsilon_{abc}$  — символ Леви-Чивита,  $a, b, c = \overline{1, 3}$ .

**Доказательство.** Для доказательства теоремы используем лиевский алгоритм, подробно описанный в работе [5]. Он состоит в определении всех дифференциальных операторов 1-го порядка вида

$$Q = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\nu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\nu}, \quad (4)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \quad \nu = \overline{0, m-1},$$

порождающих группу инвариантности уравнения (1). Лиевское условие инвариантности произвольного дифференциального уравнения  $s$ -го порядка

$$F(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad (5)$$

$$u_k = \left\{ \frac{\partial^k u^\alpha}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right\}, \quad k = \overline{1, s}, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \quad i_1, \dots, i_k = \overline{0, n-1},$$

имеет вид

$$Q_s F(x, u, u_1, \dots, u_s)|_{F=0} = 0, \quad (6)$$

где  $Q_s$  —  $s$ -е продолжение оператора (4), которое строится по формулам Ли [5].

Для уравнения (1) условие инвариантности (6) сводится к следующим определяющим уравнениям относительно коэффициентных функций  $\xi^\mu(x, u)$  и  $\eta^a(x, u)$  в операторе (4):

$$\begin{aligned} \xi_{u^a}^\mu &= \xi_0^a = \xi_a^0 = 0, & \eta_{u^b u^a}^a &= \eta_{00}^a = \eta_{u^b 0}^a = 0, \\ \xi_b^a &= 0, \quad a \neq b, & \eta_{u^b}^a + \eta_{u^a}^b &= 0, \quad a \neq b, \\ 2\eta_{u^i b}^i - \xi_{00}^0 &= 0, & 2\eta_{u^j}^j - \xi_i^i &= 0, \\ \eta_{u^b}^a + \eta_a^b &= 0, & \mu &= \overline{0, 3}, \quad i, j, a, b = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\xi_{u^k}^\mu \equiv \frac{\partial \xi^\mu}{\partial u^k}$ ,  $\xi_k^\mu \equiv \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_k}$  и т.д., по индексам  $i, j$  суммирование нет.

Общим решением сильно переопределенной системы уравнений (7) являются функции

$$\begin{aligned} \xi^0 &= c_{00}x_0 + d_0, & \xi^a &= 2c_{11}x_a + d_a, \\ \eta^a &= c_{ab}(u^b - x_b) + D_a x_0 + f_a, \\ c_{ab} &= -c_{ba}, \quad a \neq b, & c_{11} &= c_{22} = c_{33}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $c_{ab}$ ,  $D_a$ ,  $f_a$ ,  $d_\mu$  — произвольные постоянные. Выбирая базис во множестве операторов (4) с коэффициентами (8), получаем операторы (2), (3).

**Замечание 1.** Десятимерная подалгебра  $A(10)$  алгебры  $A(15)$  (2), (3), порожденная операторами (3), локально изоморфна алгебре Галилея  $G(1, 3)$  [8]. Однако конечные преобразования, порождаемые операторами (3), не совпадают с преобразованиями, определяющими группу Галилея, и имеют вид

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow x'_0 = x_0 + a_0, & x_i &\rightarrow x'_i = x_i, \\ u^i &\rightarrow u^{i'} = R_{ik}(u^k - x_k) + v_i x_0 + a_i, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $R_{ik}$  — оператор 3-мерного поворота,  $a_\mu$ ,  $v_i$  — действительные параметры. Отметим также, что групповые свойства уравнения (1) и уравнений Эйлера и Навье–Стокса принципиально различны.

**Замечание 2.** Уравнение (1) допускает релятивистское обобщение в виде уравнения

$$\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} = 0, \quad (10)$$

где  $\tau$  — собственное время,  $\mu, \nu = \overline{0, 3}$ .



2. Свободно движущуюся идеальную несжимаемую релятивистскую жидкость описывают системой уравнений [6]

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \quad (11)$$

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 1, \quad (12)$$

$$\partial_\mu u^\mu = 0. \quad (13)$$

Здесь  $u^\mu$  — компоненты 4-мерного вектора скорости,  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ ,  $\mu, \nu = 0, \bar{3}$ .

**Теорема 2.** *МАИ системы (11)–(13) является расширенная алгебра Пуанкаре  $\bar{P}(1, 3)$  с базисными элементами*

$$p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad D = x^\mu p_\mu, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad (14)$$

где

$$S_{\mu\nu} = u^\mu \tilde{p}_\nu - u^\nu \tilde{p}_\mu, \quad \tilde{p}_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^\nu}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему. Выпишем здесь только определяющие уравнения для определения  $\xi^\mu(x, u)$ ,  $\eta^\nu(x, u)$ ,  $x = \{x_0, \mathbf{x}\}$ ,  $u = \{u^0, \mathbf{u}\}$ :

$$\begin{aligned} \xi_{u^0}^\mu = 0, \quad u^\mu \eta_\mu^\nu = 0, \quad \eta^\mu - u^\nu \xi_\nu^\mu = A(x, u), \\ \eta_{u^0}^0 - \xi_0^0 = \eta_{u^1}^1 - \xi_1^1 = \eta_{u^2}^2 - \xi_2^2 = \eta_{u^3}^3 - \xi_3^3, \quad g_{\mu\nu}(\eta^\nu u^\mu + u^\nu \eta^\mu) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Общим решением (15) являются функции

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x_\nu + dx_\mu + f_\mu, \quad \eta^\mu = c_{\mu\nu} u^\nu, \quad c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}, \quad (16)$$

где  $c_{\mu\nu}$ ,  $f_\mu$ ,  $d$  — произвольные постоянные.

**Замечание 3.** Из явного вида базисных элементов алгебры  $\bar{P}(1, 3)$  (14) следует, что релятивистскую жидкость, описываемую уравнениями (11)–(13), можно интерпретировать как движение частицы с переменной массой ( $p_\mu p^\mu \neq \text{const}$ ) и бесконечным набором спинов  $s = 0, 1, 2, \dots$ . Более подробно об этом описано в работах [10, 11].

**Замечание 4.** Наряду с системой уравнений (11)–(13) с симметричной точки зрения допустимы системы уравнений

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \partial_\alpha u^\alpha = 0, \quad (17)$$

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \quad \partial_\mu (u^\mu u_\alpha u^\alpha) = 0, \quad (18)$$

$$\square u^\nu + \lambda u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \quad u_\mu u^\mu = 1, \quad \partial_\alpha (u^\mu \partial_\mu u^\alpha) = 0, \quad \lambda = \text{const}, \quad (19)$$

симметрия которых во всяком случае не уже, чем симметрия уравнений (11)–(13).

**Замечание 5.** Алгебра инвариантности уравнений (11), (12) бесконечномерна и содержит, в частности, конформную алгебру  $C(1, 3)$ , порождаемую операторами

$$K_\mu = x_\mu x^\nu p_\nu + u^\mu (u^\nu u^\alpha x_\alpha - x^\nu) \tilde{p}_\nu.$$

3. Движение идеальной несжимаемой сверхтекучей жидкости описывается системой уравнений Эйлера с дополнительным членом Ландау

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s^i}{\partial t} + v_s^k \frac{\partial v_s^i}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial v_n^i}{\partial t} + v_n^k \frac{\partial v_n^i}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_s$  — векторы скорости нормальной и сверхтекучей компонент жидкости; по индексам  $s$ ,  $n$  суммирования нет.

**Теорема 3.** МАИ уравнений (20) является 13-мерная алгебра Ли  $A(13)$ , базисные элементы которой задаются формулами

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad I_a = \varepsilon_{abc}(x_b p_c + u^b \tilde{p}_c + v^b \tilde{\tilde{p}}_c), \quad x_0 p_a + \tilde{p}_a + \tilde{\tilde{p}}_a, \\ A &= x_0(x_\mu p_\mu) + (x_a - 2x_0 u^a) \tilde{p}_a + (x_a - 2x_0 v^a) \tilde{\tilde{p}}_a, \\ D_1 &= x_a p_a + u^a \tilde{p}_a + v^a \tilde{\tilde{p}}_a, \quad D_2 = x_0 p_0 - u^a \tilde{p}_a - v^a \tilde{\tilde{p}}_a, \end{aligned} \quad (21)$$

где приняты обозначения  $\tilde{p}_a = \frac{\partial}{\partial u^a}$ ,  $\tilde{\tilde{p}}_a = \frac{\partial}{\partial v^a}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ ,  $a, b, c = \overline{1, 3}$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

**Следствие 1.** Для системы уравнений (20) выполняется принцип относительности Галилея. Более того, уравнения (20) инвариантны относительно проективных преобразований, порождаемых оператором  $A$ .

4. Из уравнений (20) видно, что они несимметричны относительно замены  $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_s$ . Поэтому более естественным обобщением уравнений Эйлера для нормальной и сверхтекучей компонент жидкости представляется система вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} &= F_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s), \\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x_k} &= F_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s) \end{aligned} \quad (22)$$

с дополнительными условиями

$$\Phi^a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s) = 0, \quad i, k = \overline{1, 3}, \quad a = \overline{1, N}. \quad (23)$$

Простейшей системой зацепленных уравнений вида (22), (23) является система

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x_k} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \lambda = \text{const}. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (24) обладают следующей симметрией.

**Теорема 4.** МАИ системы уравнений (24) является 16-мерная алгебра Ли  $A(16)$ , базисные элементы которой задаются формулами

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad G_a = x_0 p_a + \tilde{p}_a + \tilde{\tilde{p}}_a, \quad K_{ab} = x_a p_b + u^a \tilde{p}_b + v^a \tilde{\tilde{p}}_b, \quad (25)$$

где  $\tilde{p}_a = \frac{\partial}{\partial u^a}$ ,  $\tilde{\tilde{p}}_a = \frac{\partial}{\partial v^a}$ .

**Следствие 2.** Операторы  $K_{ab}$  порождают следующие линейные преобразования:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}' = \Lambda \mathbf{u} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' = \Lambda \mathbf{v} + \mathbf{v}, \quad (26)$$

где  $\Lambda$  — произвольная числовая матрица.

1. Rosen G., Ullrich G.W., Invariance group of the equation  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ , *SIAM J. Appl. Math.*, 1973, **24**, № 3, 286–288.
2. Lloyd S.P., The infinitesimal group of the Navier–Stokes equation, *Acta Mech.*, 1981, **38**, 85–98.
3. Пухначев В.В., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае, *Прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 1, 83–90.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., Наука, 1973, 416 с.
5. Ильюшин А.А., Механика сплошной среды, М., Изд-во МГУ, 1978, 286 с.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Bialynicki-Birula I., Iwinski Z., Canonical formulation of relativistic hydrodynamics, *Repts. Math. Phys.*, 1973, **4**, № 2, 139–151.
8. Паттерман С., Гидродинамика сверхтекучей жидкости, М., Мир, 1978, 520 с.
9. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
10. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
11. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 6–20.
12. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, Сборник научных трудов “Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред”, Киев, Наукова думка, 1986, 146–160.

# Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для электромагнитного поля

В.И. ФУЩИЧ, И.М. ЦИФРА

Известно, что одних уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \tilde{H}_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (0.1)$$

недостаточно, чтобы определить электромагнитное поле в различных средах. Для описания электромагнитного поля в конкретной среде к уравнениям (0.1) добавляют материальные уравнения. Мы используем принцип симметрии в качестве отбора этих дополнительных соотношений.

## 1. Симметрия уравнений (0.1)

Система (0.1) является недоопределенной системой дифференциальных уравнений в частных производных. По этой причине следует ожидать, что система (0.1) будет иметь более широкую симметрию, чем уравнения Максвелла в вакууме. Симметричные свойства уравнений (0.1) устанавливаются следующей теоремой

**Теорема 1.** *Алгеброй инвариантности системы (0.1) является бесконечномерная алгебра, любой элемент которой задается формулами*

$$X_1 = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta_{F_{\mu\nu}}\partial_{F_{\mu\nu}} + \eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}\partial_{\tilde{H}_{\mu\nu}}, \quad (1.1)$$

$$X_2 = F_{\mu\nu}\partial_{F_{\mu\nu}}, \quad (1.2)$$

$$X_3 = \tilde{H}_{\mu\nu}\partial_{\tilde{H}_{\mu\nu}}, \quad (1.3)$$

$$X_4 = F_{\mu\nu}\partial_{\tilde{H}_{\mu\nu}}, \quad (1.4)$$

$$X_5 = \tilde{H}_{\mu\nu}\partial_{F_{\mu\nu}}, \quad (1.5)$$

где  $\xi^\mu(x)$  произвольные дифференцируемые функции;

$$\begin{aligned} \eta_{F_{\mu\nu}} &= -F_{\mu\alpha}\xi_\nu^\alpha - F_{\alpha\nu}\xi_\mu^\alpha, \\ \eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}} &= -\tilde{H}_{\mu\alpha}\xi_\nu^\alpha - \tilde{H}_{\alpha\nu}\xi_\mu^\alpha. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом Ли [1] и ввиду его громоздкости здесь не приводится. Из теоремы 1 получаем важное следствие.

**Теорема 2.** Система (0.1) инвариантна относительно 20-мерной алгебры Ли группы  $IGL(4, R)$ , содержащей в качестве подалгебры алгебру Пуанкаре  $P(1, 3)$  и алгебру Галилея  $G(1, 3)$ .

Базисные элементы алгебры Пуанкаре  $P(1, 3)$  имеют такой вид:

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\partial_{x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + (S_{\mu\nu}\Psi)_n \partial_{\Psi_n}, \quad (1.7)$$

где по  $n$  подразумевается суммирование от 1 до 12,  $\Psi$  — столбец  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H})$ , матрицы  $S_{\mu\nu}$  имеют вид:

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{0a} = \varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ -\hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\hat{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{0}$  — нулевые  $3 \times 3$  матрицы [2].

Генераторы группы Галилея имеют вид:

$$P_0 = i\partial_{x_0}, \quad P_a = -i\partial_{x_a}, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + (S_{ab}\Psi)_n \partial_{\Psi_n}, \quad (1.9)$$

$$G_a = tP_a + (M\Psi)_n \partial_{\Psi_n},$$

где

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

Среди множества операторов (1.1) содержатся генераторы конформной группы  $C(1, 3)$ . Совокупность операторов (1.7) и операторов

$$D = x_\nu P^\nu + 2i\Psi_n \partial_{\Psi_n}, \quad (1.10)$$

$$K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2(x^\nu S_{\mu\nu}\Psi)_n \partial_{\Psi_n},$$

образуют базис конформной алгебры  $C(1, 3)$ .

Таким образом, мы установили, что для системы (0.1), без материальных уравнений, выполняются как принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна, так и принцип относительности Галилея.

## 2. Пуанкаре-инвариантные и конформно-инвариантные нелинейные материальные уравнения

Рассмотрим материальные уравнения в следующем виде:

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}(F_{01}, F_{02}, F_{03}, \dots, F_{23}) \equiv \Phi_{\mu\nu}(F), \quad (2.1)$$

где  $\Phi_{\mu\nu}$  — произвольные гладкие функции  $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$ ,  $\Phi_{\mu\nu} = 0$ .

Используя метод Ли, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 3.** Система уравнений (0.1), (2.1) инвариантна относительно группы Пуанкаре тогда и только тогда, когда

$$H_{\mu\nu} = MF_{\mu\nu} + N\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

где  $M = M(C_1, C_2)$ ,  $N = N(C_1, C_2)$  — произвольные дифференцируемые функции от инвариантов электромагнитного поля

$$C_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2, \quad C_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} = \vec{B}\vec{E},$$

$$a\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad \tilde{H}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\alpha\beta}.$$

В терминах  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  формула (2.2) имеет вид

$$\vec{D} = M\vec{E} + N\vec{B}, \quad \vec{H} = M\vec{B} - N\vec{E}. \quad (2.3)$$

Если в (2.3) положить

$$M = \frac{1}{L}, \quad N = \frac{\vec{B}\vec{E}}{L}, \quad L = \sqrt{1 + (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - (\vec{B}\vec{E})^2},$$

то система (0.1) совместно с (2.3) совпадает с нелинейными уравнениями для электромагнитного поля, предложенными Борном [3] и известными в литературе как уравнения Борна-Инфельда. Для материальных уравнений частного вида

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E}, \vec{H})\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(\vec{E}, \vec{H})\vec{H}, \quad (2.4)$$

как это вытекает из теоремы 3, справедливо следующее утверждение:

**Следствие.** Система уравнений (0.1), (2.4) будет пуанкаре-инвариантна только тогда, когда

$$\varepsilon(\vec{E}, \vec{H})\mu(\vec{E}, \vec{H}) = 1$$

(используется система единиц, в которой скорость света  $c = 1$ ).

**Теорема 4.** Система уравнений (0.1), (2.2) инвариантна относительно локальной конформной группы  $C(1, 3)$  только в том случае, если

$$M = M\left(\frac{C_1}{C_2}\right), \quad N = N\left(\frac{C_1}{C_2}\right), \quad (2.5)$$

где  $M$ ,  $N$  — произвольные дифференцируемые функции, зависящие от отношения инвариантов  $C_1$ ,  $C_2$ .

Если вектор-потенциал  $A_\mu$  ввести стандартным образом, то система (0.1), (2.5) приводит к уравнениям, которые инвариантны не только относительно конформной группы, но и относительно градиентных преобразований.

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \lambda\partial^\nu \left\{ \Phi\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \right\} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (2.6)$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu),$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon^{ik\mu\nu}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu),$$

$\Phi$  — произвольная дифференцируемая функция одного переменного.

Конформную симметрию можно использовать для нахождения точных решений нелинейных уравнений

$$\left\{ i\gamma_{\mu}p^{\mu} + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{-1/3}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} \Psi = 0 \quad (2.7)$$

совместно с (0.1), (2.5), описывающих взаимодействие спинорного и электромагнитного полей.

Решение системы (0.1), (2.5), (2.7) ищем в виде

$$F_{\mu\nu} = \frac{f_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(f_{\mu k}x_{\nu} + f_{k\nu}x_{\mu})x^k}{(x^2)^3}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = \frac{\tilde{h}_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(\tilde{h}_{\mu k}x_{\nu} + \tilde{h}_{k\nu}x_{\mu})x^k}{(x^2)^3}, \quad (2.9)$$

$$\Psi = \frac{\gamma\chi}{(x^2)^2}\varphi(\omega), \quad (2.10)$$

где  $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ ,  $\tilde{h}_{\mu\nu} = -\tilde{h}_{\nu\mu}$  — зависящие от переменной  $w$ ,  $\beta_{\mu}$  — произвольные действительные константы. С помощью формул (2.8)–(2.10) получаем частные точные решения системы (0.1), (2.5), (2.7):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{b_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(b_{\mu k}x_{\nu} + b_{k\nu}x_{\mu})x^k}{(x^2)^3}, \\ \tilde{H}_{\mu\nu} &= \frac{\tilde{c}_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(\tilde{c}_{\mu k}x_{\nu} + \tilde{c}_{k\nu}x_{\mu})x^k}{(x^2)^3}, \\ \Psi &= \frac{\gamma\chi}{(x^2)^2} \exp \left\{ \frac{-i(\gamma\beta)(S_{\mu\nu}b^{\mu\nu})\omega}{\beta^2(\bar{\chi}\chi)^{-1/3}} \right\} \chi, \end{aligned} \quad (2.11)$$

зависящих от постоянных тензорных величин  $b_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{c}_{\mu\nu}$ .

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 197 с.
3. Born M., Infeld L., Foundations of the new field theory, *Proc. Roy. Soc. A*, 1934, **144**, № 852, 4225.

# On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group $\tilde{P}(1, n)$

L.F. BARANNIK, W.I. FUSHCHYCH

Some general results on the subalgebras of the Lie algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  of the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1, n)$  ( $n \geq 2$ ) with respect to  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation have been obtained. All subalgebras of  $A\tilde{P}(1, 4)$  that are nonconjugate to the subalgebras of  $AP(1, 4)$  are classified with respect to  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation. The list of representatives of each conjugacy class is presented.

## 1. Introduction

The systematic study of subalgebras of quantum mechanics transformation algebras was begun in the fundamental paper by Patera, Winternitz and Zassenhaus (PWZ) [1] in which the general method for classifying the subalgebras of a finite-dimensional Lie algebra with a nontrivial solvable ideal with respect to some group of automorphisms was suggested. This method is applied to classify all subalgebras of Lie algebras of the following groups: the Poincaré group  $P(1, 3)$  [1], the extended Poincaré groups  $\tilde{P}(1, 2)$  [2],  $\tilde{P}(1, 3)$  [3], the de Sitter groups  $O(1, 4)$  [4],  $O(2, 3)$  [5], the optical groups  $Opt(1, 2)$  [5],  $Opt(1, 3)$  [6], the Euclidean group  $E(3)$  [7], the Schrödinger group  $Sch(2)$  [8], and the extended Schrödinger group  $\widetilde{Sch}(2)$  [8], the Poincaré group  $P(1, 4)$  [9–11], the Euclidean group  $E(5)$  [12, 13], the Galilei group  $G(3)$  [12], and the extended Galilei group  $\tilde{G}(3)$  [12]. The application of the general method had allowed us to study the subalgebras structure of the Lie algebra of the generalized Euclidean group  $E(n)$  ( $n \geq 2$ ) [13]. The subalgebras of the algebras  $AP(1, 3)$ ,  $AG(3)$ , and  $A\tilde{G}(3)$  were described by another method [14–17].

The PWZ method needs the development for particular classes of algebras of its generality. In the present paper we give the further development of the PWZ method for extended Poincaré algebras  $A\tilde{P}(1, n)$  ( $n \geq 2$ ), denoted also by  $ASim(1, n)$ . The necessity in the description of subalgebras of  $A\tilde{P}(1, n)$  follows from certain problems of theoretical and mathematical physics [1]. In particular, knowledge of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  subalgebras gives us the possibility to study the symmetry reduction for the relativistically invariant scalar differential equation

$$\Phi(\square u, (\nabla u)^2, u) = 0,$$

where

$$\begin{aligned}\square u &= u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} - \dots - u_{x_n x_n}, \\ (\nabla u)^2 &= (u_{x_0})^2 - (u_{x_1})^2 - \dots - (u_{x_n})^2,\end{aligned}$$

and  $\Phi$  is a sufficiently smooth function [18–20]. The description of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  subalgebras allows us to solve the problem of the reduction of  $A\tilde{P}(1, n)$  algebra representations on its subalgebras [21, 22].



In Sec. 2 we describe the maximal reducible subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$ , and in Sec. 3 we describe the completely reducible subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, n) = AO(1, n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ , where  $\mathbb{D}$  is the dilatation generator. Section 4 is devoted to study of the subalgebras of the extended Galilei algebra  $A\tilde{G}(n-1)$ , which is one of the important subalgebras of the  $AP(1, n)$  algebra. In Sec. 5 which is the logical sequel to Sec. 4, a number of assertions on subalgebras of the normalizer of isotropic subspace of the Minkowski space  $M(1, n)$  in algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  are conceived. Classification of the  $A\tilde{P}(1, n)$  algebra subalgebras with respect to the  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation is carried out in Sec. 6. The conclusions are summarized in Sec. 7.

## 2. Maximal reducible subalgebras of the algebra $A\tilde{O}(1, n)$

In this section we describe the maximal reducible subalgebras and the maximal Abelian subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$ .

Let  $R$  be the real number field;  $\{Y_1, \dots, Y_s\}$  is a vector space or Lie algebra over  $R$  with the generators  $Y_1, \dots, Y_s$ ;  $R^m$  is the  $m$ -dimensional arithmetical vector space over  $R$ ;  $U = M(1, n)$  is  $(1+n)$ -dimensional pseudo-Euclidean space with the scalar product

$$(X, Y) = x_0y_0 - x_1y_1 - \dots - x_ny_n; \quad (2.1)$$

$O(1, n)$  is the group of the linear transformations of  $M(1, n)$  which conserve  $(X, X)$  for every  $X \in M(1, n)$ ;  $E_q$  is the unit matrix of degree  $q$ . We suppose that  $O(1, n)$  is realized as the group of the real matrices of degree  $n+1$ .

We call the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1, n)$  the multiplicative group of the matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda\Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where  $\Delta \in O(1, n)$ ,  $\lambda \in R$ ,  $\lambda > 0$ ,  $Y \in R^{n+1}$ .

We denote by  $AG$  the Lie algebra of the Lie group  $G$ . Using the definition of Lie algebra, we find that  $AO(1, n)$  consists of matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \cdots & \alpha_{0,n-1} & \alpha_{0n} \\ \alpha_{01} & 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{02} & -\alpha_{12} & 0 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,n-1} & -\alpha_{1,n-1} & -\alpha_{2,n-1} & \cdots & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{0n} & -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \cdots & -\alpha_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Let  $E_{ik}$  be the matrix of degree  $n+2$  which has the unity on the cross of  $i$ th line and  $k$ th column and zeros on the other places ( $i, k = 0, 1, \dots, n+1$ ). It is easy to get that the basis of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  is formed by the matrices

$$\mathbb{D} = E_{00} + E_{11} + \dots + E_{nn}, \quad J_{0a} = -E_{0a} - E_{a0}, \quad J_{ab} = -E_{ab} + E_{ba},$$

$$P_0 = E_{0,n+1}, \quad P_a = E_{a,n+1} \quad (a < b, \quad a, b = 1, \dots, n).$$

The basis elements satisfy the following commutation relations:

$$\begin{aligned} [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, & J_{\beta\alpha} &= -J_{\alpha\beta}, \\ [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] &= g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, & [P_\alpha, P_\beta] &= 0, & [\mathbb{D}, J_{\alpha\beta}] &= 0, & [\mathbb{D}, P_\alpha] &= P_\alpha, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where  $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$ ,  $g_{\alpha\beta} = 0$ , when  $\alpha \neq \beta$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ).

The generators of turning  $J_{\alpha\beta}$  generate the algebra  $AO(1, n)$  and the translation  $P_\alpha$  the commutative ideal  $N$ , and moreover  $A\tilde{P}(1, n) = N \ltimes (AO(1, n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle)$ . Let  $\tilde{O}(1, n) = \{\lambda E_{n+1} | \lambda \in R, \lambda > 0\} \times O(1, n)$ . Evidently,  $A\tilde{O}(1, n) = AO(1, n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ . It is easy to see that  $[X, Y] = X \cdot Y$  for all  $X \in A\tilde{O}(1, n)$ ,  $Y \in N$ . Let us identify  $N$  and  $M(1, n)$  establishing correspondence between  $P_i$  and the  $(n + 1)$ -dimensional column with unity on the  $i$ th place and zeros on the others ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Let  $C$  be such matrix of degree  $n + 2$  over  $R$  that mapping  $\varphi_C : X \rightarrow CXC^{-1}$  is an automorphism of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$ . If  $C \in G$ , where  $G$  is a subgroup of  $\tilde{P}(1, n)$ , then  $\varphi_C$  is called  $G$  automorphism. The subalgebras  $L$  and  $L'$  of algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  are called  $\tilde{P}(1, n)$  conjugated if  $\varphi_C(L) = L'$  for some  $\tilde{P}(1, n)$  automorphism  $\varphi_C$  of algebra  $A\tilde{P}(1, n)$ . Let us identify  $\varphi_C$  and  $C$ .

Let  $W$  a nondegenerate subspace of the space  $U$ . This subspace we also consider to be pseudo-Euclidean relative to scalar product defined in  $U$ . Let  $O(W)$  be the group of isometries of the space  $W$ ,  $\tilde{O}(W) = O(W) \times \{\lambda E_{n+1} | \lambda \in R, \lambda > 0\}$ . A subalgebra  $F \subset A\tilde{O}(W)$  is called irreducible if in  $W$  there does not exist any  $F$ -invariant subspace different from  $O$  and  $W$ . Otherwise  $F$  is called reducible. If for every  $F$ -invariant subspace  $W'$  in  $W$  there exists an  $F$ -invariant subspace  $W''$  in  $W$  such that  $W = W' \oplus W''$  then it is called completely reducible.

**Theorem 2.1.** *The maximal reducible subalgebras of algebra  $A\tilde{O}(1, n)$  are exhausted with respect to  $\tilde{O}(1, n)$  conjugation by the following algebras: (1)  $AO(1, n - 1) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ ; (2)  $AO(n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ ; (3)  $AO(1, k) \oplus AO'(n - k) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ , where  $AO'(n - k) = \langle J_{ab} | a, b = k + 1, \dots, n \rangle$  ( $k = 2, \dots, n - 2$ ); (4)  $\langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \ltimes (AO(n - 1) \oplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle)$ , where  $G_a = J_{0a} - J_{an}$  ( $a = 1, \dots, n - 1$ ).*

**Proof.** If  $L$  is a maximal subalgebra of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$  then  $L = AO(1, n)$  or  $L = L_1 \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ , where  $L_1$  is a maximal subalgebra of the algebra  $AO(1, n)$ . Let  $F$  be a maximal reducible subalgebra of the algebra  $AO(1, n)$ ,  $U'$  a subspace of the space  $U$  invariant under  $F$ . If  $U'$  is a degenerate space then it contains one-dimensional  $F$ -invariant isotropic space  $W$  conjugated under  $O(1, n)$  to the space  $\langle P_0 + P_n \rangle$ . In this case

$$F = \{X \in AO(1, n) | X(P_0 + P_n) \in \langle P_0 + P_n \rangle\}.$$

It is not difficult to show that

$$F = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \ltimes (AO(n - 1) \oplus \langle J_{0n} \rangle).$$

If  $U'$  is a nondegenerate space of dimension  $r$  then it possesses an orthogonal basis consisting of  $r$  vectors with nonzero length. Let  $r_+$ ,  $r_-$  be numbers of positive and negative length vectors, in the given basis of the space  $U'$ , respectively. These numbers are independent of the choice of basis. In accordance with Witt's mapping theorem any two spaces  $U'$  and  $U'_1$ , for which  $r_+ = r_+^1$ ,  $r_- = r_-^1$  are mutually conjugate under the group  $O(1, n)$ . Obviously,  $r_+ \in \{0, 1\}$ . Since  $U = U' \oplus U'^\perp$  and  $U'^\perp$  is invariant under  $F$  therefore  $F$  is  $O(1, n)$  conjugated to one of the algebras,

$$AO(1, n - 1), AO(n), AO(1, k) \oplus AO'(n - k).$$

The theorem is proved.

Let

$$A\tilde{E}(n) = \langle P_1, \dots, P_n \rangle \ltimes (AO(n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle),$$

$$A\tilde{E}'(n - k) = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle \ltimes AO'(n - k),$$

and  $\tilde{AG}(n - 1)$  is the extended Galilei algebra with the basis

$$M = P_0 + P_n, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{ab} \quad (a, b = 1, \dots, n - 1).$$

According to Theorem 2.1, the description of subalgebras of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  is reduced to the description with respect to the  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation of irreducible subalgebras of the algebra  $AO(1, n)$  and subalgebras of the following algebras:

$$\begin{aligned} \langle P_0 \rangle \oplus A\tilde{E}(n), \quad (AP(1, k) \oplus AE'(n - k) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle), \\ A\tilde{G}(n - 1) \oplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle \quad (k = 2, \dots, n - 1). \end{aligned}$$

Let  $\pi$  be the projection of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  onto  $A\tilde{O}(1, n)$ ,  $F$  a nonzero subalgebra of  $A\tilde{O}(1, n)$ , and  $\hat{F}$  such subalgebra of  $A\tilde{P}(1, n)$  that  $\pi(\hat{F}) = F$ . If the algebra  $\hat{F}$  is  $\tilde{P}(1, n)$  conjugated to the algebra  $W \subset F$ , where  $W$  is an  $F$ -invariant subspace of the space  $U$ , then we shall assume  $\hat{F}$  to be splitting. If every subalgebra  $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1, n)$  satisfying  $\pi(\hat{F}) = F$  is splitting, we shall say that subalgebra  $F$  possesses only splitting extensions in the algebra  $A\tilde{F}(1, n)$ . The splittability of subalgebras for other algebras of inhomogeneous transformations is defined by analogy. If nothing is reserved, then the investigation of subalgebras of given algebra for conjugation is carried out with respect to the group of inner automorphisms.

The affine group  $IGL(n, R)$  is defined as a group of matrices

$$\begin{pmatrix} B & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

where  $B \in GL(n, R)$ ,  $Y \in R^n$ . The Lie algebra  $AIGL(n, R)$  of this group consists of matrices

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where  $X$  is a square matrix of degree  $n$  over  $R$ . Let  $0_a$  be the zero matrix of degree  $a$ ,  $P_a = E_{a, n+1}$ . Let us identify  $X$  and  $\text{diag}[X, 0_1]$ , then  $AIGL(n, R) = \langle P_1, \dots, P_n \rangle \oplus AGL(n, R)$ . If  $m < n$ , then we shall assume that  $AGL(m, R)$  consists of the matrices  $\text{diag}[\bar{X}, 0_{n+1-m}]$ , where  $\text{deg } \bar{X} = m$ .

**Lemma 2.1.** *Let  $F$  be a completely reducible subalgebra of the Lie algebra  $AGL(m, R)$  ( $m < n$ ), which is not semisimple. If  $Z$  is a nonzero central element of the algebra  $F$  and  $\hat{F}$  is the Lie algebra, which is obtained from  $F$  by replacing  $Z$  by  $Z + P_{m+1}$ , then the algebra  $\hat{F}$  is nonsplitting in  $AIGL(n, R)$  with respect to  $IGL(n, R)$  conjugation.*

**Proof.** Let  $X_0$  be a square matrix of the degree  $m$ ,  $T = \text{diag}[X_0, 0_{n-m}]$ ,  $Z = \text{diag}[T, 0_1]$ ,

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} 0_n & Y_{m+1} \\ 0 & 0_1 \end{pmatrix}.$$

If  $\hat{F}$  is a splitting algebra, then there exists the matrix  $C$  of the form (2.4) such that  $C(Z + P_{m+1})C^{-1} = \text{diag}[T', 0_1]$ . It follows that  $-BTB^{-1}Y + BY_{m+1} = 0$ , which implies that  $Y_{m+1} = (TB^{-1})Y$ . However,

$$TB^{-1} = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0B_1 & X_0B_2 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix},$$

and therefore

$$(TB^{-1}) \cdot Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

This contradiction proves the lemma.

**Proposition 2.1.** *Let  $F$  be a completely reducible Lie algebra of linear transformations of vector space  $V$  over the field  $R$ ,  $W$  is an irreducible  $F$  submodule of module  $V$ . If  $FW \neq 0$ , then algebra  $F$  possesses only splitting extensions in algebra  $W \ltimes F$ .*

**Proof.** Since  $F$  is a completely reducible subalgebra of the algebra  $\mathfrak{gl}(V)$ , then  $F = Q \oplus Z(F)$ , where  $Q$  is Levy's factor and  $Z(F)$  is the center of  $F$  [23]. Using Jacobi identity it is not difficult to conceive that  $F = F_1 \oplus F_2$ , where  $F_1W = 0$  and every direct summand of algebra  $F_2$  annuls in  $W$  only zero subspace. Further we may restrict ourselves only with the case when  $F = F_2$ .

Let  $Q \neq 0$ ;  $\hat{F}$  such a subalgebra of the algebra  $W \ltimes F$  that its projection onto  $F$  coincides with  $F$ . According to Whitehead's theorem [23]  $H^1(Q, W) = 0$ . From this it follows that the algebra  $\hat{F}$  contains  $Q$ . Let  $J \in Z(F)$ ,  $Y \in W$ ,  $Y \neq 0$ , and  $J + Y \in \hat{F}$ . Since  $[Q, Y] \neq 0$ , then there exists such an element  $X \in Q$  that  $[X, Y] \neq 0$ . Let  $Y_1 = [X, Y]$ ,  $W_1$  be the  $F$  submodule of module  $W$ , generated by  $Y_1$ . Because of the fact that  $W_1 \neq 0$  and  $W$  is the irreducible  $F$  module we have  $W_1 = W$ . Hence  $J \in \hat{F}$ . Therefore, if  $Q \neq 0$  then  $F \subset \hat{F}$ , i.e.,  $\hat{F}$  is a splitting algebra.

Let  $Q = 0$ ,  $J \in Z(F)$ . Since  $J$  annuls in  $W$  the only zero subspace is then  $[J, W] = W$ . Whence for every  $Y \in W$  there exists such element  $Y' \in W$  that  $[J, Y'] = Y$ . Consequently we may suppose that  $J \in \hat{F}$ . If  $\hat{F}$  contains  $J_1 + Y_1$ , where  $Y_1 \in W$  and  $Y_1 \neq 0$ , then  $[J, Y_1] \in \hat{F}$  and  $[J, Y_1] \neq 0$ . Arguing as in the case  $Q \neq 0$ , we get that  $J_1 \in \hat{F}$ , i.e.,  $\hat{F}$  is a splitting algebra. The proposition is proved.

**Proposition 2.2.** *Let*

$$A\tilde{E}(n-1) = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \ltimes (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle),$$

where  $G_a = J_{0a} - J_{an}$  ( $a = 1, \dots, n-1$ ). The subalgebra  $F \subset AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  possesses only splittable extensions in  $A\tilde{E}(n-1)$  if and only if  $F$  is a semisimple algebra or  $F$  not conjugated to a subalgebra of the algebra  $AO(n-2)$ .

**Proof.** Let  $W = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$ . Since every subalgebra of the algebra  $AO(n-1)$  is completely reducible and  $[J_{0n}, G_a] = -G_a$ , then every subalgebra  $F$  of the  $AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  algebra is also a completely reducible algebra of linear transformations of space  $W$ .

Let  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$  be the decomposition of  $W$  into the direct sum of irreducible  $F$  modules. If projection  $F$  onto  $\langle J_{0n} \rangle$  is nonzero, then  $[F, W_i] = W_i$  for every  $i = 1, \dots, s$ . Whence according to Proposition 2.1  $F$  has only splittable extensions in  $A\tilde{E}(n-1)$ . Let us assume that projection of  $F$  onto  $\langle J_{0n} \rangle$  is equal to 0. If  $F$  is a semisimple algebra then by Whitehead's theorem every extension of  $F$

in  $A\tilde{E}(n - 1)$  is splitting. Let  $F$  not be a semisimple algebra. When  $\dim W_i \geq 2$  for every  $i = 1, \dots, s$  we have  $[F, W_i] \neq 0$  and in view of Proposition 2.1  $F$  possesses only splitting extensions in  $A\tilde{E}(n - 1)$ . When  $\dim W_i = 1$  ( $1 \leq i \leq s$ ), the module  $W_i$  is annuled by the algebra  $F$  and the algebra  $F$  is conjugated to a subalgebra of the algebra  $AO(n - 2)$ . If  $Z(F)$  is the center of  $F$  and  $X$  is a nonzero element of  $Z(F)$  then for every nonzero  $Y \in W_i$  there exists a subalgebra  $\hat{F}$  of the algebra  $A\tilde{E}(n - 1)$ , which is obtained from  $F$  by replacing  $X$  by  $X + Y$ . By Lemma 2.1  $\hat{F}$  is not splitting. The proposition is proved.

From Theorem 2.1 and properties of solvable subalgebras of algebra  $AO(n)$  it follows that if  $n$  is odd then  $AO(1, n)$  possesses with respect to  $O(1, n)$  conjugation only one maximal solvable subalgebra

$$\langle G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1}, J_{0n} \rangle.$$

If  $n$  is even then  $AO(1, n)$  possesses two maximal solvable subalgebras

$$\langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n} \rangle, \quad \langle G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, J_{0n} \rangle.$$

Since an extension of an Abelian algebra with the help of a solvable algebra is a solvable algebra itself then maximal solvable subalgebras of the algebra  $AP(1, n)$  are of the form  $U \oplus F$ , where  $F$  is the maximal solvable subalgebra of the algebra  $AO(1, n)$ . Maximal solvable subalgebras of the  $A\tilde{P}(1, n)$  are exhausted by algebras  $U \oplus (F \oplus \langle \mathbb{D} \rangle)$ .

**Proposition 2.3.** *Let  $AH(t)$  be the Cartan subalgebra of the algebra  $AO(t)$ . The maximal Abelian subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$  are exhausted with respect to  $\tilde{O}(1, n)$  conjugation by the following algebras:  $AH(n-1) \oplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$ ;  $AH(n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$  [ $n \equiv 0 \pmod{2}$ ];  $\langle G_1, \dots, G_{n-1}, \mathbb{D} \rangle$ ;  $AH(2a) \oplus \langle G_{2a+1}, \dots, G_{n-1}, \mathbb{D} \rangle$  ( $a = 1, \dots, [n - 2/2]$ ). The written algebras are pairwise nonconjugated.*

**Proof.** If  $F$  is a maximal Abelian subalgebra of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$  then from Proposition 2.2  $F = \Omega \oplus L \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ , where  $L$  is a subalgebra of the algebra  $AO(l) \oplus \langle J_{0n} \rangle$  or the algebra  $AO(n)$  and  $\Omega$  is a subalgebra of the algebra  $\langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$ . If projection  $L$  onto  $\langle J_{0n} \rangle$  is different from 0 then  $\Omega = 0$ . Let projection  $L$  onto  $\langle J_{0n} \rangle$  be equal to 0. If  $L = AH(n)$ , then  $\Omega = 0$ . If  $L = AH(2a)$ ,  $1 \leq a \leq [n - 2/2]$ , then  $\Omega = \langle G_{2a+1}, \dots, G_{n-1} \rangle$ . The proposition is proved.

### 3. Completely reducible subalgebras of the algebra $A\tilde{O}(1, n)$

In this section we shall prove a number of general results on completely reducible subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$  and shall indicate how to search invariant subspaces of space  $U$  for these algebras. The main results of this section are Proposition 3.3 and Theorem 3.1.

**Proposition 3.1.** *If  $n \geq 2$  then any irreducible subalgebra of the algebra  $AO(1, n)$  is semisimple and noncompact.*

**Proof.** Let  $F$  be an irreducible subalgebra of the algebra  $AO(1, n)$ ,  $Z(F)$  the center of  $F$ . If  $Z(F) \neq 0$  then  $Z(F) = \langle J \rangle$ , where  $J^2 = -E_{n+1}$ . Let  $X$  be an arbitrary element of the form (2.2) of the algebra  $AO(1, n)$ . If  $X^2 = -E_{n+1}$ , then  $\alpha_{01}^2 + \alpha_{02}^2 + \dots + \alpha_{0n}^2 = -1$ . This contradiction proves that  $Z(F) = 0$ .

If  $F$  is a compact algebra then there exists such symmetric matrix  $C$  that  $C^{-1}FC \subset AO(n + 1)$  [24]. Since

$$\exp(C^{-1}FC) = C^{-1} \cdot \exp F \cdot C$$

then in  $O(n+1)$  there exists an irreducible subgroup conserving simultaneously

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{and} \quad \lambda_0^2 x_0^2 - \lambda_1^2 x_1^2 - \dots - \lambda_n^2 x_n^2$$

( $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  are nonzero real numbers). This contradiction proves the second part of the proposition.

**Proposition 3.2.** *A reducible subalgebra of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$  is completely reducible if and only if it is conjugated to  $L_1 \oplus L_2$  or a subalgebra of algebra  $L \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ , where  $L_1$  is an irreducible subalgebra of the algebra  $AO(1, k)$  ( $k \geq 2$ ),  $L_2$  is a subalgebra of  $AO'(n-k) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$  and  $L$  is one of the algebras,  $AO(n)$ ,  $AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$ .*

Proposition 3.2 follows from Theorem 2.1, Propositions 2.2 and 3.1, and the fact that  $G_a$  acts noncompletely reducible onto the space  $\langle P_0 + P_n, P_a \rangle$ .

Let  $L$  be a direct sum of the Lie algebras  $L_1, \dots, L_s$ ,  $B$  a Lie subalgebra of  $L$ , and  $\pi_i$  the projection  $L$  onto  $L_i$ . If  $\pi_i(B) = L_i$  for  $i = 1, \dots, s$  then  $B$  is called a subdirect sum of  $L_1, \dots, L_s$ .

**Proposition 3.3.** *A completely reducible subalgebra  $F \subset A\tilde{O}(1, n)$  has only splitting extensions in  $A\tilde{P}(1, n)$  if and only if  $F$  is semisimple or  $F$  is nonconjugate to subalgebra of one of the algebras,  $AO(n)$  or  $AO(1, n-1)$ .*

The proof of Proposition 3.3 is analogous to that of Proposition 2.2.

Let  $A_i$  be a Lie algebra over  $R$  ( $i = 1, 2$ ),  $f : A_1 \rightarrow A_2$  is an isomorphism,  $B = \{(X, f(X)) | X \in A_1\}$ . Here  $B$  is the Lie algebra over  $R$  with ‘‘componentwise’’ operational rules,

$$\begin{aligned} [(X, f(X)), (X', f(X'))] &= ([X, X'], f([X, X'])), \\ (X, f(X)) + (X', f(X')) &= (X + X', f(X + X')), \\ \lambda(X, f(X)) &= (\lambda X, f(\lambda X)), \end{aligned}$$

where  $X, X' \in A_1$ ,  $\lambda \in R$ . Let us denote it as  $(A_1, A_2, \varphi)$ . Evidently  $(A_1, A_2, \varphi)$  is the subdirect sum of the algebras  $A_1$  and  $A_2$ .

Let  $W_i$  be a left  $A_i$  module ( $i = 1, 2$ ). It is easy to see that  $W_i$  is the  $B$  module if we put

$$(X, f(X)) \cdot Y_1 = X \cdot Y_1, \quad (X, f(X)) \cdot Y_2 = f(X) \cdot Y_2,$$

for every  $X \in A_1$ ,  $Y_i \in W_i$  ( $i = 1, 2$ ). Let  $W$  be a  $B$  submodule of the module  $W_1 \oplus W_2$ . If  $W = W'_1 \oplus W'_2$ , where  $W'_i \subset W_i$  ( $i = 1, 2$ ) then  $W$  is called a splitting  $B$  module. Otherwise the module  $W$  is called nonsplitting  $B$  module.

**Lemma 3.1.** *Let  $B = (A_1, A_2, \varphi)$  and  $V_i$  be a left  $A_i$  module ( $i = 1, 2$ ). In the  $B$  module  $V_1 \oplus V_2$  exists a nonsplitting  $B$  submodule if and only if the  $B$  modules  $V_1$  and  $V_2$  have isomorphic composition factors.*

**Proof.** Let  $W$  be a nonsplitting  $B$  submodule of the module  $V_1 \oplus V_2$ . Then  $W$  is the subdirect sum of the modules  $W_1$  and  $W_2$ , where  $W_i \subset V_i$  ( $i = 1, 2$ ). Let  $S_i = W \cap V_i$  ( $i = 1, 2$ ). Evidently,  $S_i$  is the  $B$  submodule of the module  $W$ . The module  $W/(S_1 \oplus S_2)$  is nonsplitting  $B$  submodule of the module  $V_1/S_1 \oplus V_2/S_2$ . Whence we shall assume that  $W \cap V_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ).

For every element  $Y_1 \in W_1$  there exists only one such element  $Y_2 \in W_2$  such that  $(Y_1, Y_2) \in W$ . We put  $\varphi(Y_1) = Y_2$ . The mapping  $\varphi$  is the isomorphism of  $B$  modules

$W_1$  and  $W_2$ . In this case modules  $W_1$  and  $W_2$  have isomorphic composition factors. The necessity is proved.

Let  $W_i$  be a left  $B$  submodule of the module  $V_i$  ( $i = 1, 2$ ) and let the composition factor  $W_1/N_1$  of the module  $W_1$  be isomorphic to the composition factor  $W_2/N_2$  of the module  $W_2$ . We denote as  $W$  the vector space over the field  $R$  generated by the pairs  $(Z_1, 0), (0, Z_2), (Y_1, Y_2)$ , where  $Z_i \in N_i, Y_i \in W_i$  ( $i = 1, 2$ ) and  $\varphi(Y_1 + N_1) = Y_2 + N_2$  for the isomorphism  $\varphi : W_1/N_1 \rightarrow W_2/N_2$ . It is easy to see that  $W$  is a nonsplitting  $B$  module. The sufficiency of the lemma is proved.

Let  $\Gamma : X \rightarrow X$  be the trivial representation of the completely reducible algebra  $F \subset A\tilde{O}(1, n)$ , the projection of which onto  $AO(1, n)$  has not any invariant isotropic subspaces in the space  $U$  or annuls the isotropic subspaces. Then  $\Gamma$  is  $O(1, n)$  equivalent to  $\text{diag}[\Gamma_1, \dots, \Gamma_m]$ , where  $\Gamma_i$  is an irreducible subrepresentation ( $i = 1, \dots, m$ ). One may suppose that algebra  $F_i = \{\text{diag}[0, \dots, \Gamma_i(X), \dots, 0] | X \in F\}$  is an irreducible subalgebra  $A\tilde{O}(W_i)$ , where

$$W_i = \langle P_{k_{i-1}+1}, P_{k_{i-1}+2}, \dots, P_{k_i} \rangle \quad (k_0 = -1, k_m = n, i = 1, \dots, m).$$

If  $F_i \neq 0$  then we shall call algebra  $F_i$  an irreducible part of the algebra  $F$ . It is well known that if representations  $\Delta$  and  $\Delta'$  of the Lie algebra  $L$  by skew-symmetric matrices are equivalent over  $R$ , then  $C \cdot \Delta(X) \cdot C^{-1} = \Delta'(X)$  for some orthogonal matrix  $C$  ( $X \in L$ ). Whence and from Proposition 3.1 we conclude that if  $\Gamma_i$  and  $\Gamma_j$  are equivalent representations then we can assume that for every  $X \in F$  the equality  $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$  takes place. Having united equivalent nonzero irreducible subrepresentations we shall get a nonzero disjunctive primary subrepresentation of the representation  $\Gamma$ . Corresponding to those subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$ , built by the same rule as the irreducible parts of  $F_i$ , we shall call them primary parts of the algebra  $F$ . If  $F$  coincides with its primary part then  $F$  is called a primary algebra.

**Theorem 3.1.** *Let  $K_1, K_2, \dots, K_q$  be primary parts of a subalgebra  $F$  of the algebra  $A\tilde{O}(1, n)$ , and  $V$  a subspace of the space  $U$  invariant under  $F$ . Then  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$ , where  $V_i = [K_i, V] = [K_i, V_i], [K_j, V_i] = 0$  when  $j \neq i$  ( $i, j = 1, \dots, q$ ),  $\tilde{V} = \{X \in V | [F, X] = 0\}$ . If the primary algebra  $K$  is the subdirect sum of the irreducible subalgebras of the algebras  $A\tilde{O}(W_1), A\tilde{O}(W_2), \dots, A\tilde{O}(W_r)$ , respectively, then nonzero subspaces  $W$  of the space  $U$  with the condition  $[K, W] = W$  are exhausted with respect to  $O(1, n)$  conjugation by the spaces  $W_1, \tilde{W}_1 \oplus W_2, \dots, W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ .*

**Proof.** From the complete reducibility of algebra  $F$  it follows that  $V = V' \oplus V''$ , where  $V''$  is the maximal subspace of the space  $V$ , annulled by  $F$ . Further we shall suppose that  $V = V'$ . From Proposition 3.1 one can suppose that  $F \subset A\tilde{O}(m), m \leq n$ . Let  $K_i$  be a subdirect sum of irreducible parts  $K_{i1}, \dots, K_{is_i}, V_{ij} = [K_{ij}, V], \pi_a$  be a projection of  $V$  onto  $\sum_{j=1}^{s_a} \oplus V_{aj}$ .

In view of Lemma 3.1  $\pi_a(V) \subset V$  and that is why

$$V = \sum_{a=1}^q \oplus \pi_a(V).$$

Since  $K_a$  annuls in  $\pi_a(V)$  only the zero subspace, then  $[K_a, V] = [K_a, \pi_a(V)] = \pi_a(V)$ .

Let primary algebra  $K$  be a subdirect sum of irreducible subalgebras of algebras  $A\tilde{O}(W_1), A\tilde{O}(W_2), \dots, A\tilde{O}(W_r)$ , respectively. If  $W$  is a nonzero subspace of the space

$$\Omega = \sum_{j=1}^r \oplus W_j$$

and  $[K, W] = W$  then in view of Witt's mapping theorem there exists such isometry  $B \in O(\Omega)$  that  $B(W) = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$  ( $1 \leq s \leq r$ ) and the space  $W_i$  is invariant under  $BKB^{-1}$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Whence  $BKB^{-1}$  is a subdirect sum of irreducible subalgebras of algebras  $A\tilde{O}(W_1), A\tilde{O}(W_2), \dots, A\tilde{O}(W_r)$ , respectively. Since irreducible parts of the algebra  $L \subset A\tilde{O}(n)$  are defined uniquely up to conjugation then one may consider that  $BKB^{-1} = K$ . The theorem is proved.

On the basis of Theorem 3.1 the description of splitting subalgebras  $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1, n)$ , for which  $\pi(\hat{F})$  is a completely reducible algebra and has no isotropic invariant subspaces in the space  $U$ , reduces to the description of irreducible subalgebras of the algebras  $AO(1, k)$  and  $AO(k)$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ). The rest of the cases can be reduced to the case of the algebra  $A\tilde{G}(n-1) \in \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$ .

#### 4. On the subalgebras of the extended Galilei algebra

The aim of this section is to study subalgebras of the algebra  $A\tilde{G}(n-1)$  with respect to  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation. The main result concerning this problem is contained in Theorem 4.1. Theorem 4.2 gives a description of all Abelian subalgebras of the algebra  $A\tilde{G}(n-1)$ . As a corollary, we obtain the list of maximal Abelian subalgebras and one-dimensional subalgebras of the algebra  $A\tilde{G}(n-1)$ .

The basis elements of the extended Galilei algebra  $A\tilde{G}(n-1)$  satisfy the following commutation relations:

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}, & [P_a, J_{bc}] &= g_{ab}P_c - g_{ac}P_b, \\ [P_a, P_b] &= 0, & [G_a, J_{bc}] &= g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, & [G_a, G_b] &= 0, & [P_a, G_b] &= \delta_{ab}M, \\ [P_a, M] &= [G_a, M] = [J_{ab}, M] = 0, & [P_0, J_{ab}] &= [P_0, M] = [P_0, P_a] = 0, \\ [P_0, G_a] &= P_a \quad (a, b, c, d = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Let  $V_1 = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$  be a Euclidean space with orthonormal basis  $G_1, \dots, G_{n-1}$ ,  $V_2 = [P_0, V_1]$  ( $n \geq 3$ ),  $\mathfrak{M} = V_1 + V_2 + \langle P_0, M \rangle$ . We settle on identifying the group  $O(n-1)$  with the isometry group  $O(V_1)$ ,  $O(V_2)$ . If  $W$  is a subspace of  $V_1$  and  $\dim W = k$  then according to Witt's theorem for every  $a$ ,  $0 \leq a \leq n-k-1$ , there exists an isometry  $B_a \in O(V_1)$  such that

$$B_a(W) = V_1(a+1, a+k) = \langle G_{a+1}, G_{a+2}, \dots, G_{a+b} \rangle.$$

Further, in spaces  $V_1$ ,  $V_2$  we shall consider only subspaces  $V_1(a, b)$ ,  $V_2(a, b) = [P_0, V_1(a, b)]$ . We call them elementary spaces. The basis  $G_a, G_{a+1}, \dots, G_b$  of the space  $V_1(a, b)$  and the basis  $P_a, P_{a+1}, \dots, P_b$  of the space  $V_2(a, b)$  we shall call canonical.

Let  $W_1, W_2$  be subspaces of some vector space  $W$  over the field  $R$  and  $W_1 \cap W_2 = 0$ . If  $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$  is an isomorphism then we denote as  $(W_1, W_2, \varphi)$  the space  $\{Y + \varphi(Y) | Y \in W_1\}$ . As  $I(W_1, W_2)$  we denote the isomorphism of elementary spaces  $W_1$  and  $W_2$ , by which the canonical basis of  $W_1$  is mapped to the canonical basis of  $W_2$  with numeration of the basis of elements maintained.



Let  $AG(n-1) = A\tilde{G}(n-1)/\langle M \rangle$ . For the generators of the  $AG(n-1)$  we preserve the notation of the generators of the algebra  $A\tilde{G}(n-1)$ . By  $\tau, \tau_0, \tau_1$ , and  $\tau_2$  we denote the projection of  $A\tilde{G}(n-1)$  and  $AG(n-1)$  onto  $AO(n-1) \oplus \langle P_0 \rangle, P_0, V_1$ , and  $V_2$ , respectively.

Let  $F$  be a subalgebra of the  $AO(n-1) \oplus \langle P_0 \rangle, \hat{F}$  an subalgebra of the  $AG(n-1)$  such that  $\tau(\hat{F}) = F$ . If algebra  $\hat{F}$  is conjugated to the algebra  $W \triangleleft F$ , where  $W$  is the  $F$ -invariant subspace of space  $V_1 + V_2$ , then  $\hat{F}$  is called splitting in the algebra  $AG(n-1)$ . The notion of a splitting subalgebra of the algebra  $A\tilde{G}(n-1)$  is defined analogously.

**Proposition 4.1.** *Let  $L_1$  be a subalgebra of the  $AO(n-1)$ ,  $L_2$  be a subalgebra of the  $\langle P_0 \rangle$ , and  $F$  be the subdirect sum of  $L_1$  and  $L_2$ . If  $P_0 \notin F$  then the algebra  $F$  only has splitting extensions in the algebra  $AG(n-1)$  if and only if  $L_1$  is a semisimple algebra or  $L_1$  is not conjugated to any subalgebra of the algebra  $AO(n-2)$ . When  $P_0 \in F$ , the algebra  $F$  only has splitting extensions in the  $AG(n-1)$  if and only if  $L_1$  is not conjugated to any subalgebra of the algebra  $AO(n-2)$ .*

**Proof.** If  $L_1$  is a semisimple algebra and  $L_2 = \langle P_0 \rangle$  then by Whitehead's theorem [23]  $P_0 \in F$ . Let us assume that  $L_2 = \langle P_0 \rangle$  and  $P_0 \notin F$ . Let  $\hat{F}$  be an subalgebra of the  $AG(n-1)$  such that  $\tau(\hat{F}) = F$ . If  $L_1$  is not conjugated to any subalgebra of the  $AO(n-2)$  then by Proposition 2.2 the algebra  $\hat{F}$  is splitting. If  $L_1$  is conjugated to some subalgebra of  $AO(n-2)$  then  $F = \langle X \rangle \oplus F_1$  where  $X \neq 0, \langle X \rangle$ , and  $F_1$  are subalgebras of the algebra  $AO(n-2) \oplus \langle P_0 \rangle$ . The algebra

$$\hat{F} = \langle P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-2}, X + G_{n-1} \rangle \triangleleft F_1$$

is not splitting by Lemma 2.1. The case  $L_2 = 0$  can be treated similarly.

Let  $P_0 \in F$ . If  $L_1 \subset AO(n-2)$  then algebra  $\langle P_0 + G_{n-1} \rangle \triangleleft L_1$  is nonsplitting. If  $L_1$  is not conjugated to any subalgebra of the algebra  $AO(n-2)$  then by way of complete reducibility of the algebra  $L_1$  we get that  $P_0 \in \hat{F}$  and whence algebra  $\hat{F}$  is splitting. The proposition is proved.

**Proposition 4.2.** *The subalgebra  $F$  of the algebra  $AO(n-1) \oplus \langle P_0 \rangle$  has only splitting extensions in the  $A\tilde{G}(n-1)$  if and only if  $F$  is a semisimple algebra.*

**Lemma 4.1.** *Let  $W_1 = \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle, W_2 = \langle Z_1, \dots, Z_m \rangle$  be Euclidean spaces over the field  $R, O(W_i)$  the isometry group of  $W_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t, S_0^t = 0, S_j^t = \langle Z_{t+1}, \dots, Z_{t+j} \rangle$  ( $j = 1, \dots, m-t$ ). The subspaces of the space  $W_1 \oplus W_2$  are exhausted with respect to  $O(W_1) \times O(W_2)$  conjugation by the following spaces:*

$$\begin{aligned} &O, \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle, \langle Z_1, \dots, Z_s \rangle, \langle Y_1, \dots, Y_r, Z_1, \dots, Z_s \rangle \quad (r, s = 1, \dots, m), \\ &\langle Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1} + \alpha_1 Z_1, \dots, Y_{k+t} + \alpha_t Z_t \rangle \oplus S_j^t \\ &\quad (k = 1, \dots, m-1, t = 1, \dots, m-k, j = 0, 1, \dots, m-t), \\ &\langle Y_1 + \alpha_1 Z_1, \dots, Y_t + \alpha_t Z_t \rangle \oplus S_j^t \quad (t = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, m-t). \end{aligned}$$

**Proof.** Let  $N$  be a subspace of  $W_1 \oplus W_2$  and  $N \neq W_1' \oplus W_2'$ , where  $W_i'$  is a subspace of  $W_i$  ( $i = 1, 2$ ). If  $B_i = N \cap W_i, N_i$  is a projection of  $N$  onto  $W_i$  ( $i = 1, 2$ ) and then  $N_1/B_1 \cong N_1/B_2$ . Let  $\dim B_1 = k$ . By Witt's theorem the space  $B_1$  is conjugated to the space  $\langle Y_1, \dots, Y_k \rangle$ . If  $\dim(N_1/B_1) = t$  then  $N$  contains elements  $Y_{k+j} + \alpha_{1j} Z_1 + \dots + \alpha_{tj} Z_t$  ( $j = 1, \dots, t$ ), and moreover the matrix  $A = (\alpha_{ij})$  is nonsingular. The matrix  $A$  can be represented uniquely in the form  $CT$ , where  $C$  is an orthogonal matrix and  $T$  is a positively definite symmetric matrix.

The isometry  $\text{diag}[E_m, C^{-1}, E_{m-t}]$  maps  $N$  onto the space to which the matrix  $C^{-1}(CT) = T$  corresponds. There exists such orthogonal matrix  $C_1$  that  $C_1TC_1^{-1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_t]$ . The isometry  $\text{diag}[E_k, C_1, E_{m-k-t}, C_1, E_{m-t}]$  maps  $N$  onto the space to which the matrix  $C_1TC_1^{-1}$  corresponds. Therefore  $N$  is conjugated to the space

$$B_1 \oplus \langle Y_{k+1} + \alpha_1 Z_1, \dots, Y_{k+t} + \alpha_t Z_t \rangle \oplus B_2,$$

where  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t$ . The lemma is proved.

Let  $K$  be the primary subalgebra of the algebra  $AO(n-1)$  which is a subdirect sum of irreducible subalgebras of the algebras  $AO(V_1(1, q))$ ,  $AO(V_1(q+1, 2q))$ ,  $\dots$ ,  $AO(V_1((r-1)q+1, rq))$ , respectively, and  $W$  nonzero subspace of the space  $\mathfrak{M}$  with the property  $[K, W] = W$ . If  $\tau_1(W) = 0$  then by way of Theorem 3.1  $W$  is conjugated to the space  $V_2(1, iq)$  ( $1 \leq i \leq r$ ). If  $\tau_2(W) = 0$  then  $W$  is conjugated to  $V_1(1, iq)$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Let us suppose that  $\tau_1(W) \neq 0$ ,  $\tau_2(W) \neq 0$ . Then  $W$  is a subdirect sum of  $\tau_1(W)$ ,  $\tau_2(W)$ , where  $\tau_1(W) = V_1(1, m)$  and  $\tau_2(W)$  coincides with  $V_2(1, k)$  or  $V_2(m+1, m+l)$  or a subdirect sum of  $V_2(1, k)$  and  $V_2(m+1, m+l)$  ( $k \leq m$ ). Every number of  $k$ ,  $m$ , and  $l$  is divisible by  $q$ . Let us consider the case when  $\tau_2(W)$  is a subdirect sum of  $V_2(1, k)$  and  $V_2(m+1, m+l)$ . In the space  $W$  we choose the basis in the following form:

$$\begin{aligned} &G_a + \alpha_a^i P_i, \quad \beta_c^i P_i \\ &(a = 1, \dots, m, \quad c = m+1, \dots, m+t, \quad i = 1, \dots, k, m+1, \dots, m+l). \end{aligned} \quad (4.1)$$

The coefficients of the decomposition we write down as the corresponding columns of the matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

having  $m+t$  columns and  $k+l$  lines. We call the matrix  $\Gamma$  a coupling matrix of elementary spaces in the space  $W$ . With the coupling matrix we shall carry out the transformations corresponding to definite  $O(n-1)$  automorphisms and transformations to new bases of the form (4.1). Let  $C_1 \in O(k)$ ,  $C_2 \in O(m-k)$ ,  $C_3 \in O(l)$ ,  $S = \text{diag}[C_1, C_2]$ ,  $T$  be a  $t \times m$  matrix, and  $T_2$  a nonsingular matrix of degree  $t$ . The most general admissible transformations of the coupling matrix have the form

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 A_1 S^{-1} + C_1 B_1 T_1 & C_1 B_1 T_2 \\ C_3 A_2 S^{-1} + C_3 B_2 T_1 & C_3 B_2 T_2 \end{pmatrix}.$$

If  $B_2 \neq 0$  then according to Theorem 3.1 for some matrices  $C_3$ ,  $T_2$ , the following equality is correct:

$$C_3 B_2 T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix},$$

where  $\Delta_1 = \text{diag}(\mu_1 E_q, \dots, \mu_a E_q]$ ,  $\mu_1 = \dots = \mu_a = 1$ . By this transformation algebra  $K$  is left invariant. Applying Theorem 3.1 again we get that with  $k = m$  the matrix  $A_2$  can be transformed into matrix

$$\begin{pmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where  $\Delta_2$  is a square matrix of degree  $bq$ . For simplicity we shall assume that  $\Delta_2$  is a coupling matrix of elementary spaces in the subdirect sum of the spaces  $V_1(1, bq)$  and  $V_2(bq + 1, 2bq)$ . One can admit that

$$K = \text{diag}[A^b, A^b] = \{\text{diag}[\underbrace{X, \dots, X}_{2b} | X \in A]\},$$

where  $A$  is an irreducible subalgebra of the algebra  $AO(q)$ . Since for every matrix  $Y \in A^b$  the equality  $\Delta_2 Y = Y \Delta_2$  takes place then  $\Delta_2 = QS$ , where  $S$  is a symmetric matrix,  $Q$  is an orthogonal matrix, and  $Y \cdot Q = Q \cdot Y$ . Applying the automorphism  $\text{diag}[E, Q^{-1}]$  we transform the coupling matrix  $\Delta_2$  into  $S$ . There exists such matrix  $C \in O(bq)$  that

$$CSC^{-1} = \text{diag}[\lambda_1 E_{(1)}, \lambda_2 E_{(2)}, \dots, \lambda_t E_{(t)}],$$

where  $\lambda_i \neq \lambda_j$  when  $i \neq j$ , and  $E_{(i)}$  is the unit matrix ( $i, j = 1, \dots, t$ ). The automorphism  $\text{diag}[C, C]$  transforms  $K$  into  $\text{diag}[CA^b C^{-1}, CA^b C^{-1}]$  and the coupling matrix  $S$  into  $CSC^{-1}$ . If  $Y \in CA^b C^{-1}$  then  $Y(CSC^{-1}) = (CSC^{-1})Y$ . Whence  $Y = \text{diag}[Y_1, Y_2, \dots, Y_t]$ , where  $\text{deg } Y_i = \text{deg } E_{(i)}$ . The further decomposition of the blocks  $Y_i$  by  $O(2bq)$  automorphisms  $\text{diag}[\tilde{C}, \tilde{C}]$ , where  $\tilde{C} = \text{diag}[C_1, \dots, C_t]$ ,  $\text{deg } C_i = \text{deg } E_{(i)}$  does not change the coupling matrix. Since irreducible parts of an algebra are defined uniquely then by the considered transformations of the coupling matrix the algebra  $K$  is left invariant. That is why one can suppose that with  $k = m$

$$C_3 A_2 S^{-1} + C_3 B_2 T_1 = \begin{pmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where  $\Delta_2 = \text{diag}[\lambda_1 E_q, \dots, \lambda_b E_q]$ ,  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_b$ , and  $(a + b)q = l$  or  $\lambda_1 = \dots = \lambda_b = 0$  and  $aq = l$ . If  $B_1 \neq 0$  then for some  $C_1, T_2$  we have

$$C_1 B_1 T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_3 \end{pmatrix},$$

where  $\Delta_3 = \text{diag}[E_q, \dots, E_q]$ .

The complete classification of coupling matrices one can get for large  $n$ .

Further we shall use the following notation:

$$\mathfrak{M} = \langle P_0, M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle, \quad m = [(n - 1)/2],$$

$$\Gamma(n - 1) = \left\{ \sum_{i=1}^m \gamma_i J_{2i-1, 2i} \mid \gamma_i = 0, 1 \right\},$$

$X_a \cap X_b = 0$  if  $X_a, X_b \in \Gamma(n - 1)$  and have no common summand.

**Lemma 4.2.** *Let  $T = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k + Z$ ,  $Z = \beta J_{0m} + \gamma \mathbb{D} + \delta P_0$ , where  $X_i \in \Gamma(n - 1)$ ,  $\alpha_i \neq 0$ ,  $\alpha_i^2 \neq \alpha_j^2$ ,  $X_i \neq X_j$  when  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ). If  $W$  is a subspace of the space  $\mathfrak{M}$  and  $[T, W] \subset W$  then  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus \tilde{W}$ , where  $W_i = [X_i, W] = [X_i, W_i]$ ,  $[Z, W_i] \subset W_i$ ,  $[X_j, W_i] = 0$  when  $j \neq i$ ,  $[X_i, \tilde{W}] = 0$ ,  $[Z, \tilde{W}] \subset \tilde{W}$ .*

**Proof.** Let  $X = T - Z$ ,  $\mathfrak{M}' = [X, \mathfrak{M}]$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}} = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [X, Y] = 0\}$ ,  $W'$  be a projection of  $W$  onto  $\mathfrak{M}'$ , and  $\tilde{W}$  a projection of  $W$  onto  $\tilde{\mathfrak{M}}$ . Evidently,  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \oplus \tilde{\mathfrak{M}}$  (as

spaces). Since composition factors of the  $\langle Z \rangle$  module  $\mathfrak{M}$  are one dimensional, then the composition factors of the  $\langle Z \rangle$  module  $\tilde{W}$  are one dimensional, too. Let  $\mathfrak{M}(P) = \{P_a \in \mathfrak{M} | [X, P_a] \neq 0\}$ . It is easy to see that  $\langle \mathfrak{M}(P) \rangle$  and  $\mathfrak{M}' / \langle \mathfrak{M}(P) \rangle$  can be represented as direct sums of two-dimensional irreducible  $\langle T \rangle$  submodules. Whence the dimensions of composition factors of the  $\langle T \rangle$  module  $W'$  are equal to 2, too. When we now apply Lemma 3.1 we conclude that  $W = W' \oplus \tilde{W}$ .

Let  $\mathfrak{M}_i = [X_i, \mathfrak{M}]$  and  $W_i$  be a projection of  $W'$  onto  $\mathfrak{M}_i$ . Clearly  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{M}_k$ . At first let us establish that  $[Z, W_i] \subset W_i$ . Since for any  $Y_i \in W_i$  we have  $[J_{0n} - \mathbb{D}, Y_i] = -Y_i$ , then we may assume that  $\beta = 0$ . Obviously

$$[T, [T, Y_i]] = -\alpha_i^2 Y_i + 2\alpha_i [X_i, [Z, Y_i]] + \gamma [Z, Y_i].$$

Let

$$Y_i' = 2\alpha_i [X_i, [Z, Y_i]] + \gamma [Z, Y_i],$$

$$Y_i'' = 2\alpha_i [X_i, [Z, Y_i']] + \gamma [Z, Y_i'].$$

The space  $W_i$  contains  $Y_i', Y_i''$ . It is easy to check that

$$Y_i'' = 4\alpha_i \gamma^2 [X_i, [Z, Y_i]] + \gamma(\gamma^2 - 4\alpha_i^2) [Z, Y_i].$$

The determinant constructed by the coefficients of  $[X_i, [Z, Y_i]]$ ,  $[Z, Y_i]$  in  $Y_i', Y_i''$  is equal to  $-2\alpha_i \gamma(\gamma^2 + 4\alpha_i^2)$ . If  $\gamma \neq 0$  then  $[Z, Y_i] \in W_i$ . If  $\gamma = 0$  then  $W_i$  contains  $Y_i' = [X_i, [\delta P_0, Y_i]]$  and  $Y_i'' = [T, Y_i'] = -\alpha_i [\delta P_0, Y_i]$ .

In the composition factors of the  $\langle T \rangle$  module  $\mathfrak{M}_i$  one can choose the basis so that the matrix of the operator  $T$  is one of the matrices

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\alpha_i \\ \alpha_i & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha_i \\ \alpha_i & -\beta \end{pmatrix}.$$

If for  $i \neq j$  the modules  $\mathfrak{M}_i$  and  $\mathfrak{M}_j$  are possessed by isomorphic composition factors then one of the following conditions is satisfied:  $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$ ,  $2\gamma = -2\beta$ ,  $\gamma^2 + \alpha_i^2 = \beta^2 + \alpha_j^2$ . Since it is impossible then on the basis of Lemma 3.1 we conclude that  $W' = \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus W_k$ . The lemma is proved.

**Proposition 4.3.** *Let  $L_1$  be a subalgebra of the  $AO(n-1)$ ,  $L_2 = \langle \beta J_{0n} + \gamma \mathbb{D} + \delta P_0 \rangle$ , and  $F$  a subdirect sum of  $L_1$  and  $L_2$ . If  $W$  is a subspace of  $\mathfrak{M}$  and  $[F, W] \subset W$  then  $[L_j, W] \subset W$  ( $j = 1, 2$ ).*

This is proved by virtue of Lemma 4.2.

**Theorem 4.1.** *Let  $V_1 = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$ ,  $V_2 = [P_0, V_1]$ ,  $V_{1,a}$  be a subspace of  $V_1$ ,  $V_{2,a} = [P_0, V_{1,a}]$ ;  $K_1, K_2, \dots, K_q$  be primary parts of nonzero subalgebra  $L_1$  of the algebra  $AO(n-1)$ ;  $\mathfrak{A}$  be the maximal subalgebra of algebra  $\mathfrak{M}$ , annulled by  $L_1$ ; and  $L_2$  be a subalgebra of the algebra  $\mathfrak{A} \oplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$ . If  $F$  is the subdirect sum of  $L_1$  and  $L_2$ , and  $W$  is a subspace of  $\mathfrak{M}$  invariant under  $F$ , then  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_q \oplus \tilde{W}$ , where  $W_i = [K_i, W] = [K_i, W_i]$ ,  $[L_2, W_i] \subset W_i$ ,  $[K_j, W_i] = 0$  when  $j \neq i$ ,  $[K_i, \tilde{W}] = 0$ ,  $[L_2, \tilde{W}] \subset \tilde{W}$  ( $i, j = 1, \dots, q$ ).*

*If a primary algebra  $K$  is a subdirect sum of irreducible subalgebras of the algebras  $AO(V_{1,1}), \dots, AO(V_{1,r})$ , respectively, then nonzero subspaces  $W$  of the space  $\mathfrak{M}$  with the property  $[K, W] = W$  are conjugated to*

$$\sum_{i=1}^a V_{1,i}, \quad \sum_{i=1}^a V_{2,i} \quad (a = 1, \dots, r)$$

or to subdirect sums of such spaces

$$\sum_{i=1}^{\tilde{a}} V_{1,i} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{\tilde{b}} V_{2,i}; \quad \sum_{i=1}^a V_{1,i} \quad \text{and} \quad \sum_{i=a+1}^c V_{2,i};$$

$$\sum_{i=1}^a V_{1,i}, \quad \sum_{i=1}^b V_{2,i}, \quad \text{and} \quad \sum_{i=a+1}^c V_{2,i}$$

$$(\tilde{a} = 1, \dots, r, \tilde{b} = 1, \dots, \tilde{a}, a = 1, \dots, r - 1, b = 1, \dots, a, c = a + 1, \dots, r).$$

The subdirect sums of the spaces

$$\sum_{i=1}^a V_{1,i}, \quad \sum_{i=a+1}^c V_{2,i}$$

are exhausted with respect to  $O(n - 1)$  conjugation by the following spaces:

$$\sum_{i=1}^a V_{1,i} \oplus \sum_{j=a+1}^c V_{2,j};$$

$$\sum_{i=1}^b (V_{1,i}, V_{2,a+1}, \lambda_i I(V_{1,i}, V_{2,a+1})) \oplus \sum_{j=b+1}^a V_{1,j} \oplus \sum_{k=a+b+1}^c V_{2,k}$$

$$(0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_b, b = 1, \dots, \min\{a, c - a\}).$$

The written spaces are mutually nonconjugated.

**Proof.** Let  $Q = [L_1, W]$ ,  $S$  be a projection of  $W$  onto  $\mathfrak{R}$ . It is easy to see that  $W$  is the subdirect sum of  $Q$  and  $S$ . Since the composition factors of the  $L_2$  module  $\mathfrak{R}$  are one dimensional and the composition factors of the  $L_1$  module  $[L_1, \mathfrak{M}]$  have dimension not less than 2 then in view of Lemma 3.1  $W = Q + S$ . In virtue of Proposition 4.3  $[L_2, Q] \subset Q$ . We can show, as in Theorem 3.1, that  $Q = W_1 \oplus \dots \oplus W_q$ , where  $W_i = [K_i, Q]$ ,  $W_i = [K_i, W_i]$  ( $i = 1, \dots, q$ ). The truthfulness of the further statements is established earlier when considering the transformations of the coupling matrix of elementary spaces in the space  $W$ . The theorem is proved.

**Theorem 4.2.** Let  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_s$ ,  $\alpha_1 = 0$ , and  $\alpha_s \in \{0, 1\}$ ,  $AH(0) = 0$ ,  $AH(2d) = \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2d-1, 2d} \rangle$ , and  $L$  be a nonzero Abelian subalgebra of the algebra  $A\tilde{G}(n - 1)$ . If the projection  $\tau_0(L)$  of the algebra  $L$  onto  $\langle P_0 \rangle$  is equal to 0 then  $L$  is conjugated to the subdirect sum of the algebras  $L_1, L_2, L_3$ , and  $L_4$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$  ( $0 \leq d \leq m$ ),  $L_2 = 0$  or  $L_2 = \langle G_{2d+1} + \alpha_1 P_{2d+1}, G_{2d+2} + \alpha_2 P_{2d+2}, \dots, G_{2d+s} + \alpha_s P_{2d+s} \rangle$ ,  $L_3 = 0$  or  $L_3 = \langle P_{2d+s+1}, \dots, P_t \rangle$ ,  $L_4 = 0$  or  $L_4 = \langle M \rangle$ . If  $\tau_0(L) \neq 0$  then  $L$  is conjugated to the subdirect sum of the algebras  $L_1, L_2, L_3$ , and  $L_4$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = \langle P_0 + \alpha G_{2d+1} \rangle$  ( $\alpha \in \{0, 1\}$ ),  $L_3 = 0$  or  $L_3 = \langle P_r, \dots, P_t \rangle$ ,  $L_4 = 0$  or  $L_4 = \langle M \rangle$  ( $0 \leq d \leq m$ ;  $r = 2d + 1$  when  $\alpha = 0$ ;  $r = 2d + 2$  when  $\alpha = 1$ ).

**Proof.** Let

$$X_i = G_i + \sum_{j=2d+1}^{2d+s} \beta_{ji} P_j, \quad L = \langle X_{2d+1}, \dots, X_{2d+s} \rangle.$$

Obviously,  $[X_i, X_k] = (\beta_{ki} - \beta_{ik})M$ . Since  $L$  is an Abelian algebra then  $\beta_{ik} = \beta_{ki}$  and therefore  $B = (\beta_{ik})$  ( $i, k = 2d + 1, \dots, 2d + s$ ) is a symmetric matrix. Hence, there exists a matrix  $C \in O(s)$  such that  $CBC^{-1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_s]$ . Whence we can assume up to conjugacy under  $O(n - 1)$  that  $X_{2d+j} = G_{2d+j} + \lambda_j P_{2d+j}$  ( $j = 1, \dots, s$ ).  $O(n - 1)$  automorphisms permit us to change the numeration of generators  $G_{2d+1}, \dots, G_{2d+s}$ . That is why we can suppose that  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_s$ . Applying the automorphism  $\exp(-\lambda_1 P_0)$  we get generators  $G_{2d+j} + \mu_j P_{2d+j}$  ( $j = 1, \dots, s$ ), where  $\mu_1 = 0, 0 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s$ . If  $\mu_s > 0$  then  $\mu_s = \exp \theta$  ( $\theta \in R$ ). Evidently,

$$\exp(-\theta J_{0n})(G_{2d+j} + \mu_j P_{2d+j}) \exp(\theta J_{0n}) = \exp \theta \cdot (G_{2d+j} + \mu_j \exp(-\theta) P_{2d+j}).$$

Therefore when  $\mu_s > 0$  we can assume that  $\mu_s = 1$ .

The rest of the assertion of the theorem follows from Proposition 4.1. The theorem is proved.

**Corollary 1.** *Let*

$$A(r, t) = \langle G_r + \alpha_r P_r, G_{r+1} + \alpha_{r+1} P_{r+1}, \dots, G_t + \alpha_t P_t, M \rangle,$$

where  $\alpha_r \leq \alpha_{r+1} \leq \dots \leq \alpha_t$ ,  $\alpha_r = 0$  and  $\alpha_t = 1$  when  $\alpha_t \neq 0$ . The maximal Abelian subalgebras of the algebra  $\tilde{A}\tilde{G}(n - 1)$  are exhausted up to conjugacy under  $\tilde{P}(1, n)$  by the following algebras:

$$U; A(1, n - 1); A(1, s) \oplus V_2(s + 1, n - 1) \quad (s = 1, \dots, n - 2);$$

$$\langle G_1 + P_0, M \rangle \oplus V_2(2, n - 1); AH(n - 2) \oplus \langle G_{n-1} + P_0, M \rangle \quad [n \equiv 0 \pmod{2}];$$

$$AH(2d) \oplus \langle P_0 \rangle \oplus V_2(2d + 1, n) \quad (d = 1, \dots, [(n - 1)/2]);$$

$$AH(2d) \oplus A(2d + 1, n - 1) \quad (d = 1, \dots, [(n - 2)/2]);$$

$$AH(2d) \oplus A(2d + 1, s) \oplus V_2(s + 1, n - 1) \quad (d = 1, \dots, [(n - 3)/2]);$$

$$AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1} + P_0, M \rangle \oplus V_2(2d + 2, n - 1) \quad (d = 1, \dots, [(n - 3)/2]).$$

The written algebras are not mutually conjugated.

**Corollary 2.** *Let  $n \geq 3$ ,  $X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \dots + \alpha_t X_{2t-1, 2t}$ ;  $\alpha_1 = 1, 0 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t \leq 1$ ;  $t = 1, \dots, [(n - 1)/2]$ ;  $s = 1, \dots, [(n - 2)/2]$ .*

The one-dimensional subalgebras of the algebra  $\tilde{A}\tilde{G}(n - 1)$  are exhausted with respect to  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation by the following algebras:  $\langle P_0 \rangle$ ;  $\langle M \rangle$ ;  $\langle P_1 \rangle$ ;  $\langle G_1 \rangle$ ;  $\langle G_1 + P_2 \rangle$ ;  $\langle G_1 + P_0 \rangle$ ;  $\langle X_t \rangle$ ;  $\langle X_t + P_0 \rangle$ ;  $\langle X_t + M \rangle$ ;  $\langle X_t + P_{2t+1} \rangle$ ;  $\langle X_s + G_{2s+1} \rangle$ ;  $\langle X_s + G_{2s+1} + P_0 \rangle$ ;  $\langle X_r + G_{2r+1} + P_{2r+2} \rangle$  ( $r = 1, \dots, [(n - 3)/2]$ ).

The written algebras are not mutually conjugated.

Let

$$\Phi(0) = \langle M \rangle, \quad \Phi(i) = \langle M, P_1, \dots, P_i \rangle, \quad \Omega(0) = \langle M, P_0 \rangle,$$

$$\Omega(i) = \langle M, P_0, P_1, \dots, P_i \rangle, \quad V_2(s, t) = \langle P_s, \dots, P_t \rangle \quad (s \leq t), \quad (4.2)$$

$$\Lambda_{r+1, k+1}(j) = \langle P_{r+d} + \lambda_d P_{k+d} \mid d = 1, 2, \dots, j \rangle,$$

where  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j$  ( $1 \leq j \leq k - r$ ).

**Proposition 4.4.** *Let  $L = \langle G_1, \dots, G_k \rangle$ . The subspaces of the space  $U = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ , which are invariant under  $L$ , are exhausted with respect to  $\tilde{O}(1, n)$  conjugation by the following spaces:*

$$\begin{aligned} &0, \Phi(i), \Omega(k), V_2(k+1, t), \Phi(i) \oplus V_2(k+1, t), \Omega(k) \oplus V_2(k+1, t), \\ &\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j), \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j) \oplus V_2(k+j+1, s), \end{aligned}$$

where  $i = 0, 1, \dots, k$ ,  $t = k+1, \dots, n-1$ ,  $r = 0, 1, \dots, k-1$ ,  $j = 1, \dots, k-r$ ,  $s = k+j+1, \dots, n-1$ .

**Proof.** Let  $W$  be a subspace of the space  $\Omega(k)$  invariant under  $L$ . Since  $[P_a, G_a] = M$  then with  $W \neq 0$  we have  $M \in W$ . The normalizer of the algebra  $L$  in  $O(n-1)$  contains  $O(k)$ . It follows from this and Witt's theorem that if  $W \neq \langle M \rangle$  and  $P_0 \notin W$  then  $W = \Phi(i)$  ( $1 \leq i \leq k$ ). If  $P_0 \in W$  then  $W = \Omega(k)$ .

For a description of all subspaces of the space  $U$  which are invariant under  $L$  we shall use the Goursat twist method [25]. Since by Witt's theorem the nonzero subspaces of the space  $V_2(k+1, n-1)$  are exhausted with respect to  $O(n-1)$  conjugation by the spaces  $V_2(k+1, t)$  ( $t = k+1, \dots, n-1$ ) we need to classify the subdirect sums of the following pairs of spaces  $\Omega(k), V_2(k+1, t); \Phi(i), V_2(k+1, t)$  ( $i = 0, 1, \dots, k, t = k+1, \dots, n-1$ ).

Let  $N$  be the subdirect sum of  $\Omega(k)$  and  $V_2(k+1, t)$ . If  $P_0 + \lambda P_{k+1} \in N$  ( $\lambda \neq 0$ ) then  $N$  contains  $P_1, P_1 = -[G_1, P_0 + \lambda P_{k+1}]$ , and whence it contains  $M$ , too. Let

$$N' = \exp(\theta G_{k+1}) \cdot N \cdot \exp(-\theta G_{k+1}).$$

The space  $N'$  contains  $P_0 + (\lambda - \theta)P_{k+1} + (\theta^2/2 - \lambda\theta)M$ . Since  $M \in N'$  then  $P_0 + (\lambda - \theta)P_{k+1} \in N'$ . Putting  $\theta = \lambda$  we get that  $P_0 \in N'$  and whence  $\Omega(k) \subset N'$ . Therefore  $N' = \Omega \oplus V_2(k+1, t')$ .

Let  $N$  be the subdirect sum of  $\Phi(i)$  and  $V_2(k+1, t)$ . If  $i = 0, M + \lambda P_{k+1} \in N$  ( $\lambda \neq 0$ ) then  $N'$  contains  $(1 - \theta\lambda)M + \lambda P_{k+1}$ . Putting  $1 - \theta\lambda = 0$  we get that  $N' = V_2(k+1, t)$ . If  $i \neq 0$  then  $M \in N$ . Let us assume that  $N \neq \Phi(i) \oplus V_2(k+1, t)$ . Then  $\Phi(i)/S_1 \cong V_2(k+1, t)/S_2$ , where  $S_1 = N \cap \Phi(i), S_2 = N \cap V_2(k+1, t)$ . Let  $\dim(\Phi(i)/S_1) = i - r = j$ . Within the conjugation we can assume that  $S_1 = \Phi(r)$  and  $S_2 = 0$  or  $S_2 = V_2(k+j+1, s)$  and that is why by means of Lemma 4.1  $N$  is conjugated to one of the spaces,

$$\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j); \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j) \oplus V_2(k+j+1, s).$$

The proposition is proved.

### 5. On subalgebras of the normalizer of isotropic space

In virtue of Theorem 2.1 the normalizer of the isotropic space  $\langle P_0 + P_n \rangle$  in  $A\tilde{P}(1, n)$  coincides with the algebra  $K = A\tilde{G}(n-1) \ltimes \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$ . In this section we shall establish a number of assertions on subalgebras of the algebra  $K$  possessing nonzero projection onto  $\langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$ . On the grounds of these results in Theorem 5.1 we describe all Abelian subalgebras of the algebra  $K$  that are nonconjugate to the subalgebras of  $A\tilde{G}(n-1)$ . As a corollary, we obtain the list of maximal Abelian subalgebras and one-dimensional subalgebras of the algebra  $K$  as well as one-dimensional subalgebras of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$ .

Further  $\varepsilon$  denotes the projection of  $K$  onto  $\langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$  and  $\xi$  denotes the projection of  $K$  onto  $AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$ .

**Proposition 5.1.** *Let  $L = \langle G_1, \dots, G_k \rangle$  ( $1 \leq k \leq n - 1$ ), and  $F$  be a subdirect sum of  $L$  and  $\langle \mathbb{D} \rangle$ . The algebra  $F$  has only splitting extensions in  $A\tilde{P}(1, n)$ .*

**Proof.** Let  $\hat{F}$  be a subalgebra of  $A\tilde{P}(1, n)$  such that  $\pi(\hat{F}) = F$ . Up to an  $O(n - 1)$  automorphism one can assume that  $\hat{F}$  contains the generator

$$X_1 = G_1 + \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu P_\nu + \gamma \mathbb{D} \quad (\gamma \neq 0).$$

Clearly,

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{\mu=0}^n b_\mu P_\mu\right) \cdot X_1 \cdot \exp\left(-\sum_{\mu=0}^n b_\mu P_\mu\right) &= G_1 + \gamma \mathbb{D} + (\alpha_0 - \gamma b_0 + b_1)P_0 + \\ &+ (\alpha_1 + b_0 - b_n - \gamma b_1)P_1 + (\alpha_n + b_1 - \gamma b_n)P_n + \sum_{i=2}^{n-1} (\alpha_i - \gamma b_i)P_i. \end{aligned}$$

We put

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \gamma b_0 + b_1 &= 0, & \alpha_1 + b_0 - b_n - \gamma b_1 &= 0, \\ \alpha_n + b_1 - \gamma b_n &= 0, & \alpha_i - \gamma b_i &= 0 \quad (i = 2, \dots, n - 1). \end{aligned} \tag{5.1}$$

The determinant of coefficients by  $b_0, b_1,$  and  $b_n$  is equal to  $-\gamma^3$ . Since  $\gamma \neq 0$  then the systems (5.1) has a solution. Therefore one can assume that  $X_1 = G_1 + \gamma \mathbb{D}$ . Let  $a \neq 1$ ,

$$X_a = G_a + \sum_{\mu=0}^n \alpha_\mu P_\mu + \delta \mathbb{D}.$$

Since

$$\begin{aligned} [X_1, X_a] &= -(\alpha_0 - \alpha_n)P_1 - \alpha_1 M + \gamma \sum \alpha_\mu P_\mu, \\ [X_1, X_a] - \gamma X_a &= -\gamma G_a - \gamma \delta \mathbb{D} - (\alpha_0 - \alpha_n)P_1 - \alpha_1 M, \end{aligned}$$

we shall assume that

$$X_a = G_a + \alpha M + \beta P_1 + \delta \mathbb{D}.$$

Then

$$[X_1, X_a] = (\gamma\alpha - \beta)M + \gamma\beta P_1 \quad (2 \leq a \leq k).$$

If  $\gamma\alpha - \beta \neq 0$  then we shall consider that  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ . Since

$$[X_1, [X_1, X_a]] = -2\gamma\beta M + \gamma^2\beta P_1,$$

then  $\hat{F}$  contains  $M - \gamma P_1, -2M + \gamma P_1$  and whence  $M, P_1 \in \hat{F}$ . That is why  $G_a + \delta \mathbb{D} \in \hat{F}$ .

Let  $\gamma\alpha - \beta = 0$ . If  $\beta \neq 0$  then  $P_1 \in \hat{F}$ . Since  $[X_1, P_1] = [G_1 + \gamma \mathbb{D}, P_1] = -M + \gamma P_1$  then  $M \in \hat{F}$  and therefore  $G_a + \delta \mathbb{D} \in \hat{F}$ . If  $\beta = 0$  then  $\alpha = 0$ . It proves that  $F$  is a splitting algebra. The proposition is proved.



The record  $F : W_1, \dots, W_s$  means that we deal with the subalgebras  $W_1 \triangleleft F, \dots, W_s \triangleleft F$ .

In virtue of Propositions 4.4 and 5.1 we conclude that the subalgebras of the algebra  $\mathfrak{M} \triangleleft \mathbb{D}$  possessing a nonzero projection onto  $\langle \mathbb{D} \rangle$  are exhausted with respect to  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation by the following algebras [see notations (4.2)]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{D} \rangle : & 0, \Phi(i), V_2(s, t) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1, s = 0, 1, t = s, s+1, \dots, n); \\ \langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, \dots, G_k + \alpha_k \mathbb{D}, \beta \mathbb{D} \rangle : & 0, \Phi(i), \Omega(k), V_2(k+1, t), \\ & \Phi(i) \oplus V_2(k+1, t), \Omega(k) \oplus V_2(k+1, t), \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j), \\ & \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j) \oplus V_2(k+j+1, s) \quad (k = 1, \dots, n-1, i = 0, 1, \dots, k, \\ & t = k+1, \dots, n-1, r = 0, 1, \dots, k-1, j = 1, \dots, k-r, \\ & s = k+j+1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

These algebras must then be simplified using transformations contained in the normalizer of each algebra in the group of  $O(1, n)$  automorphisms. If, for example, the normalizer contains  $\exp(\theta J_{12})$  then instead of  $\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, G_2 + \alpha_2 \mathbb{D} \rangle$  we can take  $\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, G_2 \rangle$ .

**Proposition 5.2.** *Let  $L$  be a subalgebra of  $AO(n)$ , and  $F$  be the subdirect sum of  $L$  and  $\langle \mathbb{D} \rangle$ . The algebra  $F$  possesses only the splitting extensions in  $A\tilde{P}(1, n)$ .*

Proposition 5.2 is proved by virtue of Propositions 2.1 and 3.2.

**Proposition 5.3.** *Let  $L_1$  be a subalgebra of  $AO(n-1)$ ,  $L_2 = \langle \mathbb{D}, J_{0n} \rangle$  or  $L_2 = \langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$ , where  $\gamma = 0, \gamma^2 \neq 0, 2\gamma + 1 \neq 0$ . If  $F$  is a subdirect sum of the algebras  $L_1$  and  $L_2$  then every subalgebra  $\hat{F}$  of the algebra  $K$  with the property  $\xi(\hat{F}) = F$  is conjugated to the algebra  $(W_1 + W_2) \triangleleft F$ , where  $W_1 \subset U, W_2 \subset V_1 = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$ .*

**Proof.** Let  $L_2 = \langle \mathbb{D}, J_{0n} \rangle$ . On the basis of Propositions 2.2 and 5.1 algebra  $\hat{F}$  contains the elements

$$X_1 = J_{0n} + \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i, \quad X_2 = \mathbb{D} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j G_j.$$

Since  $[X_1, X_2] = \sum \gamma_i P_i - \sum \beta_j G_j$  then  $\mathbb{D} + \sum \gamma_i P_i \in \hat{F}$ . Therefore one can suppose that  $\mathbb{D} \in \hat{F}$ . Whence  $J_{0n} \in \hat{F}$  and  $F \subset \hat{F}$ .

Let  $L_2 = \langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$ . Since  $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, P_a] = P_a, [\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, G_a] = -\gamma G_a$  ( $a = 1, \dots, n-1$ ), then by virtue of Proposition 5.2 one can admit that  $\hat{F}$  contains the subdirect sum of  $F$  and subalgebra of the algebra  $\langle P_0, P_n \rangle$ . Evidently

$$\begin{aligned} \exp(\theta_0 P_0 + \theta_n P_n) \cdot (\mathbb{D} + \gamma J_{0n} + \alpha_0 P_0 + \alpha_n P_n) \cdot \exp(-\theta_0 P_0 - \theta_n P_n) = \\ = \mathbb{D} + \gamma J_{0n} + (\alpha_0 - \theta_0 + \gamma \theta_n) P_0 + (\alpha_n + \gamma \theta_0 - \theta_n) P_n. \end{aligned}$$

Since  $\gamma^2 \neq 1$ , then coefficients by  $P_0, P_n$  can be transformed into zero. On the basis of the conditions  $\gamma^2 \neq 1, [\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, \hat{F} \cap \mathfrak{M}] \subset \hat{F} \cap \mathfrak{M}$  it is not difficult to get that  $F \subset \hat{F}$ .

Let  $W = \hat{F} \cap \mathfrak{M}, Y = \sum \delta_a G_a + \sum \rho_i P_i \in W$ . Since

$$[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] = -\gamma \sum \delta_a G_a - \gamma(\rho_0 P_n + \rho_n P_0) + \sum \rho_i P_i$$

and  $\gamma^2 \neq 1$  then one can assume that  $Y = \sum \delta_a G_a + \rho_0 P_0 + \rho_n P_n$ . By the direct calculations we find that

$$\begin{aligned} [\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] &= -\gamma \sum \delta_a G_a + (\rho_0 - \gamma \rho_n) P_0 + (\rho_n - \gamma \rho_0) P_n, \\ [\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, [\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y]] &= \\ &= \gamma^2 \sum \delta_a G_a + (\gamma^2 \rho - 2\gamma \rho_n + \rho_0) P_0 + (\gamma^2 \rho_n - 2\gamma \rho_0 + \rho_n) P_n. \end{aligned}$$

The determinant  $\Delta$  constructed by the coefficients of  $\sum \delta_a G_a$ ,  $P_0$ ,  $P_n$  in  $Y$  and the vectors received is equal to  $\gamma(2\gamma + 1)(\rho_n^2 - \rho_0^2)$ . If  $\Delta \neq 0$  then  $\sum \delta_a G_a, P_0, P_n \in W$ . If  $\Delta = 0$  then  $\rho_n = \pm \rho_0$ . When  $\rho_n = \rho_0$  we get that

$$[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] - (1 - \gamma)Y = -\sum \delta_a G_a.$$

If  $\rho_n = -\rho_0$  then

$$[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] - (1 + \gamma)Y = (-2\gamma - 1) \sum \delta_a G_a.$$

The proposition is proved.

**Proposition 5.4.** *The subalgebras of the algebra  $\mathfrak{M} \ltimes \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$  containing  $J_{0n}$  or having the property that their projection  $F$  onto  $\langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$  coincides with  $\langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$ , where  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma^2 \neq 1$ ,  $2\gamma + 1 \neq 0$ , are exhausted with respect to  $\hat{P}(1, n)$  conjugation by the following algebras [see notation (4.2)]:*

$$\begin{aligned} F : & 0, \Phi(a), \Omega(a), V_2(1, d) \quad (a = 0, 1, \dots, n-1, d = 1, \dots, n-1); \\ & (G_1, \dots, G_k) \ltimes F : 0, \Phi(i), \Omega(k), V_2(k+1, t), \Phi(i) \oplus V_2(k+1, t), \\ & \Omega(k) \oplus V_2(k+1, t), \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j), \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1, k+1}(j) \oplus V_2(k+j+1, s) \\ & (i = 0, 1, \dots, k, t = k+1, \dots, n-1, r = 0, 1, \dots, k-1, j = 1, \dots, k-r, \\ & s = k+j+1, \dots, n-1, k = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

The proof of Proposition 5.4 is based on Proposition 5.3.

**Proposition 5.5.** *Let  $L_1$  be a subalgebra of  $AO(n-1)$ ,  $L_2 = \langle 2\mathbb{D} - J_{0n} \rangle$ ,  $F$  a subdirect sum of  $L_1$  and  $L_2$ , and  $\hat{F}$  such subalgebra of  $K$  that  $\xi(\hat{F}) = F$ . The algebra  $\hat{F}$  is conjugated to the algebra  $W \ltimes F$ , where  $W \subset \mathfrak{M}$  and satisfies the following condition: if  $Y \in W$  and projection of  $Y$  onto  $V_1 = \langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$  is equal to  $\sum \delta_a G_a$  then  $W$  contains  $\sum \delta_a G_a + \rho P_0$  and  $\rho M$  or  $\sum \delta_a G_a + \rho(P_0 - P_n)$ .*

**Proposition 5.6.** *Let  $L_1$  be a subalgebra of  $AO(n-1)$ ,  $L_2 = \langle \mathbb{D} + J_{0n} + \gamma M \rangle$  ( $\gamma \in \{0, 1\}$ ), and  $F$  the subdirect sum of  $L_1$  and  $L_2$ . If a subspace  $W$  of the space  $\mathfrak{M}$  is invariant under  $F$  then  $W = W_1 + W_2$ , where  $W_1 \subset U$ ,  $W_2 \subset V_1$ .*

The proof of Propositions 5.5 and 5.6 is similar to that of Proposition 5.3.

Let  $\theta = (\gamma_0 - \gamma_n)/2$ . Since

$$\exp(\theta P_0) \cdot (\mathbb{D} + J_{0n} + \gamma_0 P_0 + \gamma_n P_n) \cdot \exp(-\theta P_0) = \mathbb{D} + J_{0n} + \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_n)M,$$

then further we shall suppose that the projection of the algebra  $\hat{F} \subset \hat{A}\hat{P}(1, n)$  onto  $\langle \mathbb{D} + J_{0n}, P_0, P_n \rangle$  contains  $\mathbb{D} + J_{0n} + \alpha M$ , where  $\alpha \in \{0, 1\}$ . Proposition 5.6 gives the considerable information on the structure of such algebras.

**Proposition 5.7.** *Let  $L_1$  be a subalgebra of  $AO(n - 1)$ ,  $L_2 = \langle \mathbb{D} - J_{0n} + \gamma P_0 \rangle$  ( $\gamma \in \{0, 1\}$ ), and  $F$  the subdirect sum of the algebras  $L_1$  and  $L_2$ . If a subspace  $W$  of the space  $\mathfrak{M}$  is invariant under  $F$ , then  $W$  contains its own projection onto  $\langle P_0, P_n \rangle$  and  $[L_1, W] \subset W$ ,  $[\gamma P_0, W] \subset W$ .*

**Proof.** On the basis of Proposition 4.3  $[L_i, W] \subset W$  ( $i = 1, 2$ ). Let  $\tilde{\mathfrak{M}} = \{Y \in \mathfrak{M} | [L_1, Y] = 0\}$ , and  $\tilde{W}$  be a projection of  $W$  onto  $\tilde{\mathfrak{M}}$ . It is easy to see that the matrix  $\text{diag}[2, 0]$  is the matrix of the operator  $\mathbb{D} - J_{0n}$  in the basis  $P_0 + P_n, P_0 - P_n$  of the space  $\langle P_0, P_n \rangle$  and in the basis of the space  $\mathfrak{M} | \langle P_0, P_n \rangle$  the matrix of the same operator is the unit one. Whence by Lemma 3.1 we conclude that  $\tilde{W}$  contains its own projection onto  $\langle P_0, P_n \rangle$ . It remains for us to note that for arbitrary

$$Y = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_j P_j + \beta_j G_j)$$

we have  $[\mathbb{D} - J_{0n} + \gamma P_0, Y] = Y + [\gamma P_0, Y]$ . The proposition is proved.

**Proposition 5.8.** *Let  $F$  be a subalgebra of the algebra  $AO(1, n)$  generated by  $J_{0n}$  and  $G_a$ , where  $a$  runs through some subset  $I$  of the set  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ . If  $\hat{F}$  is a subalgebra of  $AP(1, n)$  with  $\pi(\hat{F}) = F$ , then within the conjugation with respect to the group of translations the algebra  $\hat{F}$  contains elements  $G_a$  ( $a \in I$ ) and  $J_{0n} + \sum \delta_i P_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ).*

**Proposition 5.9.** *Let  $L$  be a subalgebra of the algebra  $AP(1, n)$ ,  $X = J_{ab} + \delta J_{0n} + \beta P_c$ ,  $Y = G_c + \sum \gamma_i P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), where  $\beta \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$ , and  $a, b$ , and  $c$  are different numbers of  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ . If  $X, Y \in L$  then  $L$  contains  $G_c$ .*

**Theorem 5.1.** *Let  $L$  be an Abelian subalgebra of the algebra  $K$  and  $\varepsilon(L) \neq 0$ . If  $\varepsilon(L) = \langle J_{0n} \rangle$  then  $L$  is  $\tilde{P}(1, n)$  conjugated to the subdirect sum of algebras  $L_1, L_2, \langle J_{0n} \rangle$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = 0$ , or  $L_2 = \langle P_{2d+1}, \dots, P_{2d+s} \rangle$ . If  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} \rangle$  then  $L$  is  $\tilde{P}(1, n)$  conjugated to the subdirect sum of  $L_1, L_2, \langle \mathbb{D} \rangle$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = 0$  or  $L_2 = \langle G_{2d+1}, \dots, G_{2d+s} \rangle$ . If  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D}, J_{0n} \rangle$  or  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$ , where  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma^2 \neq 1$  then  $L$  is  $\tilde{P}(1, n)$  conjugated to the subdirect sum of algebras  $\varepsilon(L)$  and  $L_1 \subset AH(2d)$ . If  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} + J_{0n} \rangle$ , then  $L$  is conjugated to the subdirect sum of the algebras  $L_1, L_2, L_3$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 \subset \langle M \rangle$ ,  $L_3 = \langle J_{0n} + \mathbb{D} \rangle$ .*

**Proof.** If  $\varepsilon(L) = \langle J_{0n} \rangle$  then in view of Propositions 2.2 and 4.3 the algebra  $L$  contains its own projection onto  $\langle M, P_0 - P_n, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$ . Since  $[J_{0n}, G_a] = -G_a$ ,  $[J_{0n}, M] = -M$ ,  $[J_{0n}, P_0 - P_n] = P_0 - P_n$  then this projection is equal to zero. Therefore  $L$  is the subdirect sum of  $L_1 \subset AH(2d)$  and  $L_2 \subset \langle P_{2d+1}, \dots, P_{n-1} \rangle$ . If  $L_2 \neq 0$  then by Witt's theorem  $L_2$  is conjugated to  $\langle P_{2d+1}, \dots, P_{2d+s} \rangle$ .

If  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} \rangle$  then in virtue of Propositions 4.3 and 5.2 the projection of  $L$  onto  $U$  is equal to 0.

If  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D}, J_{0n} \rangle$  or  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$ , where  $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma^2 \neq 1$ ,  $2\gamma + 1 \neq 0$ , then by Proposition 5.3 the algebra  $L$  is conjugated to the subdirect sum of the algebras  $\varepsilon(L)$  and  $L_1 \subset AH(2d)$ . With  $\varepsilon(L) = \langle 2\mathbb{D} - J_{0n} \rangle$  Proposition 5.5 is applicable.

Let  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} - J_{0n} \rangle$ . On the basis of Propositions 2.2 and 4.3 the projection of  $L$  onto  $\langle G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$  is equal to 0. Applying the  $O(1, n)$  automorphism corresponding to the matrix  $\text{diag}[1, \dots, 1, -1]$  we get that  $\varepsilon(L) = \langle \mathbb{D} + J_{0n} \rangle$ . According to Proposition 5.2 the projection of  $L$  onto  $\langle P_1, \dots, P_{n-1} \rangle$  is equal to 0. Since  $[J_{0n} + \mathbb{D}, P_0 + P_n] = 0$ ,  $[J_{0n} + \mathbb{D}, P_0 - P_n] = 2(P_0 - P_n)$  then by Propositions 2.1 and 4.3 the projection of  $L$  onto  $\langle P_0, P_n \rangle$  belongs to  $\langle P_0 + P_n \rangle$ . The theorem is proved.

**Corollary 1.** *The maximal Abelian subalgebras of the algebra  $K$  with the condition  $\varepsilon(K) \neq 0$  are exhausted with respect to  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation by the following algebras:*

$$AH(n-1) \oplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle, \quad AH(n-1) \oplus \langle M, J_{0n}, \mathbb{D} \rangle,$$

$$AH(2d) \oplus \langle P_{2d+1}, \dots, P_{n-1}, J_{0n} \rangle,$$

$$AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1}, \dots, G_{n-1}, \mathbb{D} \rangle \quad (d = 0, 1, \dots, [(n-2)/2]).$$

*The written algebras are not conjugated mutually.*

**Corollary 2.** *Let  $n \geq 3$ ,  $X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \dots + \alpha_t J_{2t-1, 2t}$ ;  $\alpha_1 = 1$ ,  $0 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t \leq 1$ ;  $t = 1, \dots, [(n-1)/2]$ ;  $s = 1, \dots, [(n-2)/2]$ ;  $\alpha > 0$ . The one-dimensional subalgebras of the algebra  $K$  with the condition  $\varepsilon(K) \neq 0$  are exhausted with respect to  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation by the following algebras:*

$$\langle J_{0n} \rangle; \langle \mathbb{D} \rangle; \langle \mathbb{D} + \alpha J_{0n} \rangle; \langle J_{0n} + P_1 \rangle; \langle \mathbb{D} + G_1 \rangle; \langle \mathbb{D} + J_{0n} + M \rangle;$$

$$\langle X_t + \alpha \mathbb{D} + \beta J_{0n} \rangle \quad (\beta \geq 0); \quad \langle X_t + \alpha J_{0n} \rangle; \quad \langle X_t + \alpha(\mathbb{D} + J_{0n} + M) \rangle;$$

$$\langle X_t + G_{2s+1} + \alpha \mathbb{D} \rangle; \quad \langle X_s + P_{2s+1} + \alpha J_{0n} \rangle.$$

*The written algebras are not conjugated mutually.*

**Proposition 5.10.** *The one-dimensional subalgebras of the algebra  $\tilde{P}(1, n)$  are exhausted with respect to the  $\tilde{P}(1, n)$  conjugation by the one-dimensional subalgebras of the algebra  $K$  and the following algebras:*

$$\langle J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_{n/2-1} J_{n-1, n} + \gamma \mathbb{D} \rangle,$$

$$\langle J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_{n/2-1} J_{n-1, n} + P_0 \rangle,$$

where  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{n/2-1} \leq 1$ .

## 6. Subalgebras of the algebras $A\tilde{P}(1, 4)$

In this section we make use of the previous results to provide a classification of all subalgebras of  $A\tilde{P}(1, 4)$  with respect to  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation.

Let  $\hat{F}$  be an subalgebra of  $A\tilde{P}(1, 4)$  such that  $\pi(\hat{F}) = F$ . An expression  $\hat{F} + W$  means that  $W$  is a subspace of  $U$ ,  $[F, W] \subset W$ , and  $\hat{F} \cap U \subset W$ . As concerns the algebras  $\hat{F} + W_1, \dots, \hat{F} + W_s$  we will use the notation  $\hat{F} : W_1, \dots, W_s$ .

**Lemma 6.1.** *Let  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , and  $F$  run through the full system of representatives of the classes of  $O(1, 4)$ -conjugated subalgebras of the algebra  $AO(1, 4)$  [4]. The subalgebras of the algebra  $AO(1, 4) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$  are exhausted with respect to  $\tilde{O}(1, 4)$  conjugation by the algebras  $F$ ,  $F \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$  and the following algebras:*

$$\langle J_{12} + \alpha \mathbb{D} \rangle; \langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha \mathbb{D} \rangle \quad (0 < c \leq 1); \langle J_{04} + \alpha \mathbb{D} \rangle; \langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha \mathbb{D} \rangle \quad (c > 0);$$

$$\langle G_3 + \mathbb{D} \rangle; \langle G_3 - J_{12} + \alpha \mathbb{D} \rangle; \langle J_{12} + \alpha \mathbb{D}, J_{34} + \beta \mathbb{D} \rangle; \langle J_{04} + \alpha \mathbb{D}, J_{12} + \beta \mathbb{D} \rangle; \langle J_{04}, J_{12} + \alpha \mathbb{D} \rangle;$$

$$\langle G_3 + \mathbb{D}, J_{12} + \beta \mathbb{D} \rangle; \langle G_3, J_{12} + \alpha \mathbb{D} \rangle; \langle G_1 + \mathbb{D}, G_2 \rangle; \langle G_3, J_{04} + \gamma \mathbb{D} \rangle;$$

$$\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} + \gamma \mathbb{D} \rangle \quad (c > 0); \langle G_3, J_{04} + \gamma \mathbb{D}, J_{12} + \beta \mathbb{D} \rangle; \langle G_3, J_{04}, J_{12} + \alpha \mathbb{D} \rangle;$$

$$\langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha \mathbb{D} \rangle; \langle G_1, G_2, J_{04} + \gamma \mathbb{D} \rangle; \langle G_1, G_2, J_{12} + cJ_{04} + \gamma \mathbb{D} \rangle \quad (c > 0);$$

- $\langle G_1 + \mathbb{D}, G_2, G_3 \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3 - J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$ ;  
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{34} + \gamma\mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha\mathbb{D}, J_{04} + \delta\mathbb{D} \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04} + \gamma\mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3 + \mathbb{D}, J_{12} + \beta\mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + \gamma\mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + cJ_{04} + \gamma\mathbb{D} \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \alpha\mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \alpha\mathbb{D}, J_{04} + \delta\mathbb{D} \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \gamma\mathbb{D} \rangle$ .

Lemma 6.1 is proved with the Goursat method [25] and the result on the classification of subalgebras of the algebra  $AO(1, 4)$  [4].

**Theorem 6.1.** *Let  $\Delta(\Gamma)$  be the system of representatives of the classes of conjugated subalgebras of the algebra  $A\tilde{O}(1, 4)$  (respectively,  $AO(1, 4)$ ) found in Lemma 6.1. The splitting subalgebras of the algebra  $A\tilde{P}(1, 4)$  are exhausted with respect to  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation by the following algebras:*

- (1)  $W \in F$ , where  $F \in \Gamma$ ,  $W \subset U$ , and  $[F, W] \subset W$ ;  
 (2)  $W \in \hat{F}$ , where  $\hat{F} \in \Delta$  and the projection of  $\hat{F}$  onto  $AO(1, 4)$  coincides with  $F$ ,  $F \in \Gamma$ ;  
 (3)  $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha\mathbb{D} \rangle$ :  $\langle P_1, P_2 \rangle$ ,  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 (4)  $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2 + \beta\mathbb{D} \rangle$ :  $\langle M, P_1 \rangle$ ,  $\langle M, P_1 + \omega P_3 \rangle$ ,  $\langle M, P_1, P_3 \rangle$ ,  $\langle M, P_1 + \omega P_3, P_2 \rangle$   
 ( $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ );  
 (5)  $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2 + \beta\mathbb{D}, G_3, M, P_1 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ );  
 (6)  $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2, G_3 + \beta\mathbb{D}, M, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ).

**Proof.** Let  $\hat{F}$  be the subdirect sum of  $F \in \Gamma$  and  $\mathbb{D}$ , and  $W$  a subspace of  $U$  invariant under  $\hat{F}$ . Then  $[F, W] \subset W$  and on the contrary, if  $[F, W] \subset W$  then  $[\hat{F}, W] \subset W$ . Therefore we can use the results on the classification of the splitting subalgebras of  $AP(1, 4)$  [9]. Only the cases of the algebras  $\hat{F} \in \Delta$  simplified by  $O(1, 4)$  automorphisms demand an additional consideration. Such algebras correspond to the algebra  $F$  coinciding with  $\langle J_{12}, J_{34} \rangle$ ,  $\langle G_1, G_2 \rangle$ , or  $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle$ . If, for example,  $\hat{F} = \langle G_1 + \alpha_1\mathbb{D}, G_2 + \alpha_2\mathbb{D}, G_3 + \alpha_3\mathbb{D} \rangle$  then this algebra must be simplified using transformations contained in the normalizer of  $\langle M, P_1 \rangle$ ,  $\langle M, P_1, P_2 \rangle$ , respectively, in the group of  $O(1, 4)$  automorphisms. The theorem is proved.

We conceive the classification of nonsplitting subalgebras of  $A\tilde{P}(1, 4)$  with respect to  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation by virtue of the known classification of the nonsplitting subalgebras of  $AP(1, 4)$  with respect to  $P(1, 4)$  conjugation [11]. The application of the automorphism  $\exp(\theta\mathbb{D})$  allows us to substitute one of the continuous parameters by the translation generators onto 1.

Let  $(i_1, \dots, i_q) = \langle P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \rangle$ ;  $(a\omega b) = \langle P_a + \omega P_b \rangle$  ( $\omega > 0$ );  $(04) = \langle M \rangle$ .

**Theorem 6.2.** *The nonsplitting subalgebras of the algebra  $A\tilde{P}(1, 4)$  are exhausted with respect to  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation by the nonsplitting subalgebras of the algebra  $AP(1, 4)$  and the following algebras:*

- $\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0 \rangle$ : 0, (1), (04), (1, 2), (04, 1), (1, 2, 3), (04, 1, 2), (04, 1, 2, 3);  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0) \rangle$ : 0, (04), (3), (04, 3), (1, 2), (1, 2, 3), (04, 1, 2), (04, 1, 2, 3)  
 ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{04} + \mathbb{D} + M, J_{12} + \alpha M \rangle$ : 0, (3), (1, 2), (1, 2, 3) ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle J_{04} + \mathbb{D}, J_{12} + M \rangle$ : 0, (3), (1, 2), (1, 2, 3);  $\langle J_{04} + \mathbb{D} + M, J_{12} \rangle$ : 0, (3), (1, 2), (1, 2, 3);  
 $\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0, J_{12} + \alpha P_0 \rangle$ : (04), (04, 3), (04, 1, 2), (04, 1, 2, 3) ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - \mathbb{D}, J_{12} + P_0 \rangle$ : (04), (04, 3), (04, 1, 2), (04, 1, 2, 3);

- $\langle J_{04} - 2\mathbb{D}, G_3 + P_0 \rangle$ : (04), (04,1), (04,1 $\omega$ 3), (04,3), (04,1 $\omega$ 3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);
- $\langle J_{04} - 2\mathbb{D}, G_3 + P_0 - P_4 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  $\langle J_{04} - \mathbb{D}, G_3 + P_1 \rangle$ : 0, (04), (04,3), (0,3,4);
- $\langle J_{04} - \mathbb{D}, G_3 + P_2 \rangle$ : (1), (04,1), (04,1 $\omega$ 3), (04,1,3), (0,1,3,4);
- $\langle G_3 + \alpha P_1, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_3 \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  $\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0, G_3 + \alpha P_2, M, P_1, P_3 \rangle$  ( $\alpha > 0$ );
- $\langle G_3, J_{04} - \mathbb{D} + P_0 \rangle$ : (04,3), (04,1,3), (04,1,2,3);  $\langle G_3, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle$ : 0, (1), (1,2);
- $\langle G_3 + P_0, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D}) \rangle$ : (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) ( $c > 0$ );
- $\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D}) \rangle$ : 0, (1,2) ( $c > 0$ );
- $\langle G_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0) \rangle$ : (04,3), (04,1,2,3);  $\langle G_3, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M) \rangle$ : 0, (1,2);
- $\langle G_3 + P_0, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D} \rangle$ : (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);
- $\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D} \rangle$ : 0, (1,2);
- $\langle G_3, J_{12} + \alpha P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0 \rangle$ : (04,3), (04,1,2,3) ( $\alpha \geq 0$ );
- $\langle G_3, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D} \rangle$ : (04,3), (04,1,2,3);
- $\langle G_3, J_{12} + \alpha M, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle$ : 0, (1,2) ( $\alpha \geq 0$ );  $\langle G_3, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D} \rangle$ : 0, (1,2);
- $\langle G_1, G_2 + P_0, J_{04} - 2\mathbb{D} \rangle$ : (04,1), (04,1,2), (04,1,2 $\omega$ 3), (04,1,3), (04,1,2,3);
- $\langle G_1 + P_3, G_2 + \mu P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D} \rangle$  ( $\mu > 0, \delta \geq 0$ );  $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D} \rangle$ ;
- $\langle G_1, G_2 + P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D} \rangle$  ( $\delta \geq 0$ );  $\langle G_1, G_2 + P_2, J_{04} - \mathbb{D}, P_3 \rangle$ ;
- $\langle G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$  ( $\mu > 0, \lambda > 0 \vee \lambda = 0, \delta \geq 0$ );
- $\langle G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 - P_1, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$  ( $\lambda \geq 0$ );  $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$ ;
- $\langle G_1 + \lambda P_3, G_2 + P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$  ( $\lambda > 0 \vee \lambda = 0, \delta \geq 0$ );
- $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \mu P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3 \rangle$  ( $\mu \geq 0$ );  $\langle G_1, G_2 + P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3 \rangle$ ;
- $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \mu P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3 \rangle$  ( $\mu \geq 0$ );
- $\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle$  ( $\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0$ );
- $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle$ ;
- $\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 + \omega P_3 \rangle$  ( $\omega > 0$ );
- $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 + \omega P_3 \rangle$  ( $\omega > 0$ );
- $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2 \rangle$ ;
- $\langle G_1 + P_2, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_3 \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 + \omega P_3, P_2 \rangle$  ( $\omega > 0$ );
- $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, P_0, P_1, P_2, P_4 \rangle$ ;  $\langle G_1 + \beta P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );
- $\langle G_1, G_2, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, J_{04} + \mathbb{D} + M, P_3 \rangle$ ;
- $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D}) \rangle$ : (04), (04,3) ( $c > 0$ );
- $\langle G_1, G_2, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0), M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $c > 0, s = 0, 1$ );
- $\langle G_1, G_2, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M) \rangle$ : 0, (3) ( $c > 0$ );
- $\langle G_1, G_2, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );
- $\langle G_1, G_2, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D} \rangle$ : 0, (3);
- $\langle G_1, G_2, J_{12} + \delta P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $\delta \geq 0, s = 0, 1$ );
- $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M, sP_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );
- $\langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha M, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle$ : 0, (3) ( $\alpha \geq 0$ );
- $\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{04} - 2\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );
- $\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_3, J_{04} - \mathbb{D} \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$ ;
- $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$  ( $\mu \geq 0, \beta > 0 \vee \beta = 0, \gamma \geq 0$ );
- $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );
- $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 + P_3, G_3 - P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );

- $\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2 + P_3, G_3 - P_2 + \mu P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle$  ( $\mu > 0, \beta > 0 \vee \beta = 0, \gamma \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2, G_3 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle$  ( $\beta > 0 \vee \beta = 0, \gamma \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + P_2, G_2, G_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 \rangle; \langle G_1 + P_3, G_2, G_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3 \rangle; \langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D}), M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $c > 0, s = 0, 1$ );  
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D}), M \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D}), M, P_3 \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D}) \rangle: \mathbf{0}, (04);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M) \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - \mathbb{D} + P_0 \rangle: \mathbf{0}, (04), (1,2,3), (04,1,2,3);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \delta P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$  ( $\delta \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M \rangle;$   
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3 \rangle; \langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D} \rangle: \mathbf{0}, (04);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D} \rangle; \langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \delta M, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle$  ( $\delta \geq 0$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \mathbb{D} + M \rangle.$

## 7. Conclusions

The results of the present paper may be summarized in the following way.

(1) The maximal Abelian subalgebras of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  have been explicitly found in Corollary 1 to Theorem 4.2 and Corollary 1 to Theorem 5.1.

(2) The full classification of one-dimensional subalgebras of algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  is contained in Corollary 2 to Theorem 4.2, Corollary 2 to Theorem 5.1 and Proposition 5.10.

(3) The completely reducible subalgebras of  $A\tilde{O}(1, n)$  which possess only splitting extensions in the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  have been picked out. We have established in Theorem 3.1 that the description of the splitting subalgebras  $\tilde{F}$  of  $A\tilde{P}(1, n)$  whose projection  $F$  onto  $A\tilde{O}(1, n)$  does not have any invariant isotropic subspaces in the space of translations or annul such subspaces, could be reduced to the description of the irreducible parts of the algebra  $F$ .

(4) A number of assertions on the subalgebras of the algebra  $U \oplus K'$  has been proved where  $K'$  is the normalizer of  $\langle P_0 + P_n \rangle$  in  $A\tilde{O}(1, n)$ . These assertions concern the following matters: The splittability of all extensions of the subalgebra  $L \subset K'$  in  $A\tilde{P}(1, n)$  or in some other algebras (Propositions 4.1, 4.2, 5.1, and 5.2); the decomposition of invariant subspaces into a direct sum of its projections onto certain subspaces (Propositions 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, and 5.8); the explicit description of some classes of the conjugated subalgebras of the algebra  $A\tilde{P}(1, n)$  (Theorem 4.1, Propositions 4.4 and 5.4).

(5) The full classification with respect to  $\tilde{P}(1, 4)$  conjugation of the nonsplitting subalgebras of  $A\tilde{P}(1, 4)$  which are nonconjugate to the subalgebras of  $AP(1, 4)$  has been carried out.

*Note added in proof:* In Refs. [26–28] the subalgebras of the algebra  $AP(1, n)$  were used to construct the exact solutions of many-dimensional nonlinear d'Alembert and Dirac equations. The invariants of subgroups of the generalized Poincaré group

$P(1, n)$  were constructed in Ref. [29]. A number of general results on continuous subgroups of pseudoorthogonal pseudounitary groups had been obtained [30].

**Acknowledgment.** We are grateful to the referee for his valuable remarks.

1. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597.
2. Patera J., Winternitz P., Sharp R.T., Zassenhaus H., *Can. J. Phys.*, 1976, **54**, 950.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1615.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 717.
5. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 2259.
6. Burdet G., Patera P., Perrin M., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, 1758.
7. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 72.
8. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., *Ann. Sci. Math. Quebec*, 1978, **2**, 81.
9. Fedorchuk V.M., *Ukrainian Math. J.*, 1979, **31**, 717.
10. Fedorchuk V.M., *Ukrainian Math. J.*, 1981, **33**, 696.
11. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, 2893.
12. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., The continuous subgroups of the generalized Galilei group. I, Preprint 85.19, Mathematical Institute, Kiev, 1985.
13. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., *Ukrainian Math. J.*, 1986, **38**, 67.
14. Lassner W., *Acta Phys. Slovaca*, 1973, **23**, 193.
15. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Rep. Math. Phys.*, 1974, **5**, 145.
16. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Rep. Math. Phys.*, 1974, **5**, 361.
17. Sorba P., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 941.
18. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Mathematical Institute, Kiev, 1981 (in Russian).
19. Fushchych W.I., On symmetry and particular solutions of some multidimensional equations of mathematical physics, in Algebraic-Theoretical Methods in Mathematical Physics Problems, Mathematical Institute, Kiev, 1983 (in Russian).
20. Grundland A.M., Harnad J., Wintemitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791.
21. Nikitin A.G., Fushchych W.I., Jurik I.I., *Theor. Math. Phys.*, 1976, **26**, 206.
22. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, 2319.
23. Jacobson N., Lie algebras, Dover, New York, 1962.
24. Goto M., Grosshans F.D., Semisimple Lie algebras, Dekker, New York, 1978.
25. Coursat E., *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1889, **3**, 69.
26. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Reidel, Dordrecht, 1987.
27. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645.
28. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, 271.
29. Barannik L.F., Fushchych W.I., The invariants of subgroups of the generalized Poincaré group  $P(1, n)$ , Preprint 86.86, Mathematical Institute, Kiev, 1986.
30. Barannik A.F., Fushchych W.I., On continuous subgroups of pseudoorthogonal and pseudounitary groups, Preprint 86.87, Mathematical Institute, Kiev, 1986.



# The symmetry and exact solutions of some multidimensional nonlinear equations of mathematical physics

W.I. FUSHCHYCH

We discuss exact solutions of some nonlinear equations obtained in collaboration with Shtelen W.M., Serov M.I., Zhdanov R.Z. (Institute of Mathematics, Kiev).

We consider the following equations:

– The nonlinear wave equation

$$p_\mu p^\mu u + F_1(u) = 0, \quad (0.1)$$

$u = u(x)$  scalar,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in R(1, n)$ ,  $F_1(u)$  twice differentiable,  $p_\mu = i\partial/\partial x_\mu$ .

– The generalized Monge–Ampere equation

$$\det(u_{\mu\nu}) = F_2(x, u, u_1), \quad (0.2)$$

$$u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad u_1 = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\},$$

$F_2$  smooth. With  $F_2 = 0$ , we get the Monge–Ampere equation used in differential geometry and, especially at present, in quantum field theory.

– The multidimensional hyperbolic analog of the Euler–Lagrange equation for minimal surfaces or the Born–Infeld equation

$$\square u(1 - u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (0.3)$$

$$u_\nu u^\nu = \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \dots - \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2.$$

– The nonlinear Schrödinger equation

$$\left( p_0 - \frac{p_a^2}{2m} \right) u + F_3(u)u = 0, \quad (0.4)$$

$m$  is a parameter,  $u = u(x_0, \dots, x_n)$  is a complex function.

– The nonlinear Dirac equation

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu + F_4(\bar{\Psi}\Psi)] \Psi = 0, \quad (0.5)$$

$\gamma^\mu$  are  $4 \times 4$  Dirac matrices,  $\Psi, \bar{\Psi}$  spinors,  $F_4$  smooth and depending on  $\Psi\bar{\Psi}$ . The special case

$$\left[ i\gamma^\mu \partial_\mu + \lambda \frac{(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)\gamma^\mu}{[(\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi)\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi]^{1/3}} \right] \Psi = 0 \quad (0.6)$$

can be considered as a conformally invariant analog of the Dirac–Heisenberg equation for a spinor field.

If we require these equations to be invariant with respect to a group larger than the Poincaré or the Galilei group, a special form is imposed on  $F$  and we can construct a whole family of solutions from known ones from such a symmetry.

We denote by  $\tilde{P}(1, n)$  the extended Poincaré group, i.e. the Poincaré group  $P(1, n)$  and scale transformations, and by  $A\tilde{P}(1, n)$  its Lie algebra.

### § 1. The symmetry

To construct solutions of (0.1)–(0.6) we need to know their symmetry properties.

**Theorem 1.** *The wave equation (0.1) is invariant under  $\tilde{P}(1, n)$  iff*

$$F_1(u) = \lambda_1 u^r, \quad r \neq 1, \quad (1.1)$$

$$F_1(u) = \lambda_2 \exp(u), \quad (1.2)$$

$\lambda_1, \lambda_2, r$  constants.

The proof is given in [3]. (0.1) is in the case (1.1) and for  $r = \frac{n+3}{n-1}$  invariant under the conformal group  $C(1, n) \supset P(1, n)$ .

**Theorem 2.** *For  $F_2 = 0$  equation (0.2) is invariant under  $IGL(1, n+1)$ , the group of linear inhomogeneous transformations of  $R(1, n+1)$ , and  $C(1, n+1)$ , the conformal group of  $R(1, n+1)$ . The basis elements of the corresponding Lie algebra have the form*

$$P_A = ig^{AB} \partial / \partial x_B, \quad L_{AB} = x_A P_B, \quad A, B = 0, \dots, n+1, \quad (1.3)$$

$$K_A = x_A D, \quad D = ix_A P_a, \quad x_{n+1} \equiv u, \quad (1.4)$$

$g^{AB}$  is the metric tensor in  $R(1, n+1)$ .

The Monge–Ampère equation is invariant, in particular under linear transformations which preserve the quadratic form

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 - u^2$$

containing independent variables  $x$  and the depending variable  $u$  equally.

**Theorem 3.** *Equation (0.2) with  $F_2 \neq 0$  is invariant under  $\tilde{P}(1, n+1)$  iff*

$$F_2(u) = \lambda(1 - u_\nu u^\nu)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.5)$$

**Theorem 4.** *The maximal, in the sense of Lie, invariance group of the equation (0.3) is  $\tilde{P}(1, n+1)$ .*

**Theorem 5.** *(0.4) is invariant under the extended Galilei group  $\tilde{G}(1, n)$  which includes  $G(1, n)$ , scale and projective transformations, iff*

$$F_3 = \lambda|u|^{4/n}. \quad (1.6)$$

where  $n$  is the number of spatial variables.

**Theorem 6.** *The nonlinear Dirac equation (0.5) is invariant under the conformal group  $C(1, n)$  iff*

$$F_4(\bar{\Psi}\Psi) = \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{4/n}. \quad (1.7)$$

All theorems listed above can be proved by Lie's method. The proofs are as a rule cumbersome, so we omit them.

## § 2. Solutions of nonlinear equations

To construct exact solutions of (0.1)–(0.6) we use the symmetry properties of the equations. The solutions in question are multiparametrical and due to their symmetry we use the following ansatz

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad (2.1)$$

where  $\varphi(\omega)$  an unknown function depending on new variables ( $m = n - 1$ )

$$\omega(x) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$$

chosen from the invariants of the symmetry group of the equation. More precisely  $\omega$  and  $f, g$  are determined from the equations

$$\frac{dx_0}{A_0} = \frac{dx_1}{A_1} = \dots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{du}{B}, \quad (2.2)$$

where  $A_\mu, B$  are functions defining infinitesimal transformations of the invariance group

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \varepsilon A_\mu, & u' &= u + \varepsilon B, \\ A_\mu &= c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, & B &= au + b, \end{aligned}$$

where  $c_{\mu\nu}, d_\mu, a, b$  are group parameters. Variables  $\omega$  are just the first integrals of (2.2).

In the special case that  $\varphi$  depends on one variable, the partial differential equation for  $u$  reduces to an ordinary differential equation for  $\varphi$ . Solutions of this ODE give through (2.1) solutions of the original PDE.

Below we list some simple solutions of (0.1)–(0.6).

### 1. The nonlinear wave equation

$$\square u + \lambda u^r = 0, \quad r \neq 1, \quad (2.3)$$

$$u(x) = \left\{ -\frac{\lambda}{2} (1 - k^2) [(\beta_\nu y^\nu)^2 + y^\nu y_\nu] \right\}^{\frac{1}{1-k}}, \quad (2.4)$$

$$\beta^\nu \beta_\nu = -1, \quad y_\nu = x_\nu + a_\nu;$$

$$u(x) = \left\{ \frac{\lambda}{2} (1 - k^2) \alpha_\nu y^\nu \beta^\sigma y_\sigma \right\}^{\frac{1}{1-k}}, \quad (2.5)$$

$$\alpha^\nu \alpha_\nu = \beta^\nu \beta_\nu = 0, \quad \alpha^\nu \beta_\nu = -1;$$

$$u(x) = [F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta^\nu x_\nu]^{\frac{2}{1-k}}, \quad \beta_\nu \beta^\nu = -\frac{\lambda(1-k)^2}{2(1+k)} \neq 0, \quad (2.6)$$

$F$  arbitrary smooth,  $a_\nu, \alpha_\nu, \beta_\nu$  are constants satisfying the above conditions. (2.4)–(2.6) give a family of solutions of equation (2.3). As it is seen from (2.4)–(2.6), for

$k > 1$  the solutions have a singularity at  $\lambda = 0$  and cannot be obtained by a standard perturbation method.

## 2. Solutions of the Monge–Ampere equation

For  $\det(u_{\mu\nu}) = 0$  arbitrary smooth functions

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}), \quad \omega_k = \alpha_\nu^k x^\nu, \quad (2.7)$$

$\alpha^k = (\alpha_0^k, \dots, \alpha_n^k)$  arbitrary constant vectors, are solutions. Additional solutions in explicit and in implicit form are

$$u = (\alpha_\mu x^\mu)^2 - \alpha^2 x^2, \quad \alpha^2 \equiv \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2; \quad (2.8)$$

$$u = x^2 / (\alpha \cdot x), \quad \alpha \cdot x \equiv \alpha_\nu x^\nu; \quad (2.9)$$

$$\alpha_\nu x^\nu - \alpha_{n+1} u = \varphi_2(\beta_\nu x^\nu - \beta_{n+1} u), \quad (2.10)$$

$\varphi_2$  is smooth,  $\beta_\nu$  are parameters;

$$u = \sigma^{-1}(x, u) [(\alpha \cdot x)^2 - \alpha^2 x^2], \quad \sigma(x, u) = 1 + b_\mu x^\mu - b_{n+1} u. \quad (2.11)$$

## 3. Solutions of the generalized Euler–Lagrange equation

For  $\square u(1 - u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$  the function

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu \quad (2.12)$$

is a solution, where  $\varphi$  is smooth, and the parameters satisfy the following conditions

$$\alpha_\nu \beta^\nu + \alpha_\nu \alpha^\nu (1 - \beta_\sigma \beta^\sigma) = 0.$$

A solution in implicit form is

$$\begin{aligned} \alpha_\nu x^\nu - \alpha_{n+1} u &= \varphi(\beta_\nu x^\nu - \beta_{n+1} u), \\ (\alpha_\nu \alpha^\nu - \alpha_{n+1}^2) (\beta_\sigma \beta^\sigma - \beta_{n+1}^2) - (\alpha_\mu \beta^\mu - \alpha_{n+1} \beta_{n+1})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 4. Solutions of the nonlinear Dirac equation

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k] = 0. \quad (2.14)$$

Consider the case  $k = 1/3$ , then eq. (2.14) is invariant under  $C(1, 3)$ . To reduce eq. (2.14) to the system of ODE we use the ansatz

$$\Psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \quad (2.15)$$

where  $A(x)$  is a  $4 \times 4$  matrix,  $\varphi(\omega)$  is a four-component function, depending on one invariant variable  $\omega$ . More specifically

$$A(x) = (\gamma^\nu x_\nu)(x_\mu x^\mu)^{-2}, \quad (2.16)$$

$$\omega = \beta^\nu x_\nu (x_\mu x^\mu)^{-1}, \quad \beta^\nu \beta_\nu > 0. \quad (2.17)$$

(2.15)–(2.17) reduces (2.14) to the following system of ODE

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i\lambda(\beta^\nu \beta_\nu)^{-1}(\bar{\varphi}\varphi)^{1/3}(\gamma \cdot \beta)\varphi. \quad (2.18)$$

Solving eq. (2.18), we get the following solution of (2.14)

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= (\gamma \cdot x)(x^\nu x_\nu)^{-2} \exp\{i\lambda\kappa(\gamma \cdot \beta)\omega\}\chi = \\ &= (\gamma \cdot x)(x^\nu x_\nu)^{-2} \left[ \cos(\lambda\kappa\beta\omega) + i\frac{\gamma \cdot \beta}{\beta} \sin(\lambda\kappa\beta\omega) \right] \chi,\end{aligned}\quad (2.19)$$

where  $\chi$  is a constant spinor,  $\beta = (\beta^\nu \beta_\nu)^{1/2}$ ,  $\kappa = (\bar{\chi}\chi)^{1/3}(\beta^\nu \beta_\nu)^{-1}$ . (2.19) is conformally invariant.

In the same way solutions of nonlinear Schrödinger, Navier–Stokes, Liouville equations have been constructed [1, 2, 3, 6]. We can even solve PDE's which are noninvariant with respect to  $P(1, 3)$ , e.g.

$$\square u = \left(\frac{\lambda_0}{x_0}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{x_2}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_3}{x_3}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2, \quad (2.20)$$

where  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  are parameters,  $x_\mu \neq 0$ . This reduces with the Lorentz-invariant ansatz  $u = \varphi(x^2)$  to an ODE

$$\omega \frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} + 2 \frac{d\varphi}{d\omega} = \lambda^2 \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)^2, \quad \omega = x^2 \equiv x^\nu x_\nu.$$

1. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
2. Fushchych W.I., On symmetry and particular solutions of some multidimensional equations of mathematical physics, in Algebraic-Theoretical Methods in Mathematical Physics Problems, Kiev, Institute of Mathematics, 1983, 4–23.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the multidimensional Monge–Ampere equation, *Dokl. Acad. Nauk. USSR*, 1983, **273**, № 3, 543–546; 1984, **278**, № 4, 847–851.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, № 3–4, 215–217.
7. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z.. On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions, *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, № 2–3, 189–191.
8. Fushchych W.I., On Poincaré-, Galilei-invariant nonlinear equations and methods of their solution, in Group-Theoretical Studies of Equations of Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1985, 4–20.

# Как расширить симметрию дифференциальных уравнений?

В.И. ФУЩИЧ

Предложен простой способ расширения симметрии дифференциальных уравнений.

**1. Лиевский критерий инвариантности.** Рассмотрим в четырехмерном пространстве  $R(1, 3)$  систему нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных

$$L(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad (1)$$

где вектор  $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $x \in R(1, 3)$ ,  $u_1 \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$ ,  $u_k$ ,  $k = \overline{1, r}$  — совокупность всевозможных производных  $r$ -го порядка.

Согласно Ли уравнение (1) инвариантно относительно оператора

$$Q = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k(x, u) \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad (2)$$

если выполняется следующее условие:

$$\tilde{Q}L = \lambda_0(x, u, u_1, \dots, u_k)L \quad \text{или} \quad \tilde{Q}L \Big|_{L=0} = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{Q}$  — соответствующее число раз продолженный оператор  $Q$ ,  $\lambda_0$  — произвольная дифференциальная функция (более подробно см., например, [1–3]). Условие (3) назовем лиевским критерием инвариантности уравнения (1). Более общее определение инвариантности введено в [4, 5], которое дало возможность обнаружить новые симметрии уравнений Максвелла, Дирака, Ламе [6].

Хорошо известно, что если уравнение обладает нетривиальной симметрией, то это свойство существенно для явного построения широких классов точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Многие ДУЧП обладают довольно узкой группой инвариантности. Поэтому весьма существенно указать конструктивные способы расширения симметрии уравнений.

В настоящее время интенсивно развиваются два направления решения этой проблемы. Одно из них состоит в разработке новых методов исследования симметричных свойств ДУЧП (см. библиографию в [6]), позволяющих обнаружить как локальные, так и нелокальные симметрии. Другое направление намечилось в работах [3, 6–10], где изучается симметрия не всех решений ДУ, а только некоторых подмножеств решений. В неявном виде, как теперь стало ясно, эта идея заложена, в частности, в методе разделений переменных и, конечно, использовалось без привлечения теоретико-алгебраических методов многими исследователями прошлого века. Ниже именно это второе направление будет обсуждаться.

На конкретных примерах будет указан способ расширения симметрии ДУЧП. Как будет видно из дальнейшего, он очевидным образом обобщается и на другие ДУ.

**2. Уравнение Максвелла.** Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}, \quad (4)$$

$\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  — векторы напряженностей электромагнитного поля.

Операторы, порождающие преобразования Лоренца, имеют вид

$$J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \quad P_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (5)$$

$S_{0a} = i S_a$  —  $6 \times 6$ -матрицы, реализующие соответствующее представление алгебры Ли группы  $SU(2)$  [6].

Записав матрицы  $S_a$  через  $E_k$ ,  $H_l$  и  $\frac{\partial}{\partial E_k}$ ,  $\frac{\partial}{\partial H_l}$  и представив (4) в виде (1) [6]

$$L\Psi = 0, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - i\sigma_2 S_a P_a, \quad (6)$$

можно убедиться, что

$$\tilde{J}_{0a} L \neq \lambda_a L \quad \text{или} \quad \tilde{J}_{0a} L \Big|_L \neq 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (7)$$

В (6) вектор-столбец  $\Psi = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)$ . Для уравнения (4)  $\tilde{J}_{0a} = J_{0a}$ . Условие (7) означает, что система (4) неинвариантна относительно операторов  $\{J_{0a}\}$ , а следовательно, уравнение (2) не инвариантно относительно группы Лоренца  $O(1, 3)$ . Действие операторов  $\{J_{0a}\}$  на  $L$  можно записать в виде

$$\tilde{Q}L = \lambda_0(x, u, u_1, \dots, u_r)L + \lambda_1(x, u, u_1, \dots, u_r)L_1, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad (8)$$

где  $\tilde{Q}$  — любой из операторов  $\{\tilde{J}_{01}, \tilde{J}_{02}, \tilde{J}_{03}\}$ . Отсюда видно, что если на множество решений наложить дополнительное условие

$$L_1(x, u, u_1, \dots, u_r) = 0, \quad (9)$$

то система (4) будет инвариантна относительно операторов  $\{J_{0a}\}$ . Для системы (4) эти дополнительные условия имеют вид

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, уравнения (4) в совокупности с дополнительными условиями (10) инвариантны относительно алгебры Ли  $AO(1, 3)$  группы  $O(1, 3)$ . Обобщая понятие инвариантности, введенное в [6–10] и приведенные только что рассуждения, Н.И. Серов и автор ввели понятие условной инвариантности ДУ.

**Определение.** Систему уравнений (1) назовем условно инвариантной, если она инвариантна относительно оператора  $Q$  при дополнительном условии (9) и

$$\tilde{Q}L_1 = \lambda_2(x, u, u_1, \dots, u_k)L + \lambda_3(x, u, u_1, \dots, u_k)L_1, \quad (11)$$

$\lambda_1, \lambda_2$  — произвольные дифференцируемые функции.

В данном определении, конечно, предполагается, что система (1), (9) совместна. Очевидно, что не всякое дополнительное условие (уравнение) расширяет симметрию исходного уравнения. Поэтому важно научиться строить такие дополнительные условия, чтобы симметрия всей системы была шире, чем симметрия исходного уравнения (1).

**3. Условная инвариантность систем гиперболического и параболического типов.** Система гиперболических уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \square \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{E} = \{E_1, E_2, E_3\}, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \\ \square \vec{H} = \vec{0}, \quad \vec{H} = \{H_1, H_2, H_3\} \end{aligned} \quad (12)$$

инвариантна относительно конформных операторов

$$K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu P_\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu}, \quad D = x_\mu P^\mu + 2i, \quad (13)$$

где  $S_{\mu\nu}$  — матрицы, реализующие представление алгебры  $AO(1, 3)$ .

Однако, система (12) условно инвариантна относительно операторов (13). В этом случае дополнительное условие (9) является системой уравнений Максвелла (4), (10). Подробное доказательство этого факта дано в [6].

Рассмотрим систему линейных уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} L\Psi = 0, \quad L = p_0 - \frac{p_a p_a}{2m}, \\ p_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (14)$$

$\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$  — вектор-функция,  $m$  — параметр.

Уравнения (14) условно инвариантны относительно операторов из расширенной алгебры Галилея  $AG(1, 3)$

$$\begin{aligned} G_a = t p_a - m x_a + q_a, \\ A = t D - t^2 p_0 + \frac{1}{2} m \vec{x}^2 - \vec{q} \vec{x}, \quad D = 2r p_0 - \vec{x} \vec{p} + q_0, \end{aligned} \quad (15)$$

если на решения  $\Psi$  положить дополнительные условия

$$\begin{aligned} L_3 \Psi = 0, \quad L_4 \Psi = 0, \\ L_3 = q_0 - \frac{3}{2} i - \frac{\vec{q} \vec{p}}{m}, \quad L_4 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned} \quad (16)$$

В (15), (16) матрицы  $q_0, \vec{q}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[q_a, q_b] = 0, \quad [q_0, q_a] = i q_a.$$

В [7] доказано, что уравнения (16) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы система (14) была инвариантна относительно операторов (15).

**4. Расширение симметрии уравнения Даламбера.** Хорошо известно, что максимальной (в смысле С. Ли) локальной группой инвариантности линейного волнового уравнения

$$\square u(x) = 0, \quad x = (x_0, x_1, \dots, x_n), \quad (17)$$



является конформная группа  $C(1, n)$ . В [11] доказано, что если на решения  $u(x)$  наложить условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0, \quad (18)$$

то переопределенная система (17), (18) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры с операторами

$$Q = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19)$$

$$\xi^\mu = c_{00}x_\mu + c_{\mu\nu}(u)x^\nu + d_\mu(u), \quad \eta(x, u) = \eta(u),$$

где  $c_{00}(u)$ ,  $c_{\mu\nu}(u)$ ,  $\eta(u)$  — произвольные гладкие функции от зависимой переменной  $u(x)$ .

Итак, уравнение Даламбера условно инвариантно относительно бесконечномерной алгебры (19). Такое существенное расширение симметрии волнового уравнения приводит к уникальному свойству нелинейной системы (17), (18): если  $u_1$  — решение (18), (19), то и произвольная гладкая функция от этого решения  $\Phi(u_1) = u_2$  является решением (17), (18).

**5. Условная инвариантность уравнения четвертого порядка.** Рассмотрим уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} + \Delta \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_0} - \Delta \right) u = 0. \quad (20)$$

Применяя метод Ли к уравнению (20), можно показать, что оно неинвариантно относительно алгебры Галилея  $AG(1, 3)$ . Уравнение (20) является дифференциальным следствием уравнения теплопроводности

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_0} - \Delta \right) u = 0, \quad u \equiv u(x), \quad (21)$$

которое, как известно, инвариантно относительно преобразований Галилея. Причина сужения симметрии уравнения (20), по сравнению с уравнением (21), связана с тем, что множество решений уравнения (20) шире, чем множество решений уравнения (21). Однако, если на  $u(x)$  наложить дополнительное условие в виде уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad (22)$$

то система (21), (22) будет инвариантна относительно галилеевских операторов вида

$$G_a = up_a - \frac{1}{2}x_a p_0.$$

Отметим, что эти операторы порождают необычные преобразования Галилея.

Итак, уравнение (20) условно инвариантно относительно алгебры Галилея. Более подробно этот вопрос изучен в [12].

**6. Расширение симметрии нелинейного уравнения теплопроводности.** Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ c(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} = 0, \quad c(u) \neq \text{const}, \quad (23)$$

не инвариантно относительно преобразований Галилея, а следовательно, для него не выполняется принцип относительности Галилея [9], т.е. уравнение (23) неинвариантно относительно операторов

$$G_a = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + \mu(u) x_a \frac{\partial}{\partial u}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (24)$$

где  $\mu(u)$  — произвольная гладкая функция от  $u(x)$ .

Чтобы расширить симметрию нелинейного уравнения теплопроводности до группы Галилея, достаточно дополнить (24) уравнением типа Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2\mu(u)} \frac{\partial u}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \quad (25)$$

причем

$$\mu(u) = \frac{u}{2c(u)}. \quad (26)$$

Аналогичным способом можно расширить симметрию уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = C(x, u, u_1) \Delta u, \quad (27)$$

которое широко применяется в нелинейной акустике, в теории нелинейных волн.

Более подробно эти результаты будут обсуждаться и опубликованы в работе Н.И. Серова и автора.

**7. О некоторых нерешенных задачах.** В этом пункте укажем несколько задач, которые представляются автору важными для развития и применения теоретико-алгебраических методов.

1. Описать дифференциальные уравнения (дополнительные условия) первого и второго порядка

$$F_1(x, u, u_1, u_2, a_{\mu\nu}, F_0), \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (28)$$

которые расширяют симметрию уравнения

$$a_{\mu\nu}(x, u, u_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + F_0(x, u, u_1) = 0 \quad (29)$$

до групп:  $O(1, 3)$ ,  $P(1, 3)$ ,  $C(1, 3)$ ,  $P(1, 4)$ ,  $C(1, 4)$ .  $F_0$ ,  $F_1$ ,  $a_{\mu\nu}$  — гладкие функции. Рассмотреть отдельно случай двумерных уравнений  $\{x = (x_0, x_1)\}$  и описать все уравнения (28), (29), инвариантные относительно бесконечномерной алгебры с оператором

$$Q = \{f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1)\} \frac{\partial}{\partial x_0} + \{f(x_0 + x_1) - g(x_0 - x_1)\} \frac{\partial}{\partial x_1},$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции.

2. Исследовать групповые свойства и построить решения следующих уравнений:

$$\square u + F_0(x, u, u) = 0, \quad (K_\mu u)(K^\mu u) = \lambda, \quad (30)$$

$$K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + \lambda_1, \quad D = \frac{1}{2}(x_\alpha p^\alpha + p^\alpha x_\alpha) + \lambda_2;$$

$$\square u + F_0(x, u, u) = 0, \quad (31)$$

$$(J_{\mu\nu} u)(J^{\mu\nu} u) = \lambda_3, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — произвольные константы. Рассмотрим волновое уравнение (30) с дополнительным условием:  $D^2 u(x) = \lambda$ .

3. Описать системы дополнительных условий (уравнений) первого порядка, расширяющих симметрию уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + C_{lk}(u, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} + F_0(u, u) = 0. \quad (32)$$

Рассмотреть в качестве дополнительного условия уравнение первого порядка

$$a_0(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_0} + a_{kl}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_l} + b_k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0.$$

4. Исследовать групповые свойства и построить семейства частных решений нелинейного уравнения Дирака

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi = F(\bar{\Psi} \Psi) \Psi \quad (33)$$

совместно с одним из следующих дополнительных условий:

$$a \bar{\Psi} \Psi + b \bar{\Psi} \gamma_4 \Psi = 0, \quad (34)$$

$$a(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2 + b(\bar{\Psi} \gamma_4 \gamma_\mu \Psi)^2 = 0, \quad (35)$$

$$a \frac{\partial(\bar{\Psi} \Psi)}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial(\bar{\Psi} \Psi)}{\partial x^\mu} + b \frac{\partial(\bar{\Psi} \gamma_4 \Psi)}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial(\bar{\Psi} \gamma_4 \Psi)}{\partial x^\mu} = 0, \quad (36)$$

$a, b$  — произвольные постоянные.

Рассмотреть случаи:  $F(\bar{\Psi} \Psi) = m = \text{const}$ ,  $F(\bar{\Psi} \Psi) = 0$ ,  $\Psi$  — четырехкомпонентный спинор.

5. Исследовать симметрию и построить точные решения уравнений

$$\square \Psi + \left( F(\bar{\Psi} \Psi), \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \right) \Psi = 0 \quad (37)$$

с дополнительными условиями

$$a \frac{\partial(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}{\partial x_\mu} + b \frac{\partial(\bar{\Psi} \gamma_4 \gamma_\mu \Psi)}{\partial x_\mu} = 0, \quad (38)$$

$$a(\bar{\Psi} \Psi) + b(\bar{\Psi} \gamma_4 \Psi) = 0. \quad (39)$$

6. Провести теоретико-алгебраический анализ системы уравнений

$$\begin{aligned} &(\gamma_\mu w^\mu + w^\mu \gamma_\mu)\Psi + F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0, \\ &w_\mu = \{w_0, \vec{w}\} = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}, \quad w_0 = \vec{p}\vec{J} = p_1 J_1 + p_2 J_2 + p_3 J_3, \\ &J_i = \varepsilon_{ikl} J_{kl}, \quad \vec{w} = p_0 \vec{J} - (\vec{p} \times \vec{N}), \quad \vec{N} = (J_{01}, J_{02}, J_{03}), \\ &J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \end{aligned} \quad (40)$$

7. Описать пуанкаре-инвариантные и конформно-инвариантные первого и второго для спинора  $\Psi$ , предполагая, что ток

$$j_\mu = a(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi) + b(\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi) + c(\bar{\Psi}p_\mu\Psi) + d(\bar{\Psi}w_\mu\Psi)$$

удовлетворяет уравнению непрерывности  $\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ ,  $a, b, c, d$  — произвольные константы.

8. Исследовать групповые свойства и построить частные решения систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu \gamma_\nu J^{\mu\nu} \Psi + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k \Psi = 0, \\ &J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \end{aligned}$$

9. Построить семейства точных решений уравнений второго порядка

$$\square\Psi = F\left(\bar{\Psi}\Psi, \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial\Psi}{\partial x_\beta}\right)\Psi$$

с дополнительным условием

$$\begin{aligned} &\bar{\Psi}\gamma_\mu p^\mu \Psi = a(\bar{\Psi}\Psi) + b(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)^2 + c(\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi)^2, \\ &(\bar{\Psi}w_\mu\Psi)(\bar{\Psi}w^\mu\Psi) = \lambda(\bar{\Psi}\Psi). \end{aligned}$$

Рассмотреть случаи:  $F = -m^2$ ,  $F = (\bar{\Psi}\Psi)^r$ ,  $m, r, b, c$  — произвольные константы.

10. С помощью следующих потенциалов  $(B_\mu, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = K_\mu B_\nu - K_\nu B_\mu, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + \lambda_1, \\ &F_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}\varphi, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad u_i = \varepsilon_{ikl} J_{kl}\varphi, \end{aligned}$$

построить семейства точных решений уравнений для электромагнитного поля и для поля Эйлера–Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \lambda \Delta u_i = 0, \quad i, k, l = 1, 2, 3.$$

11. Описать анзацы вида

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x),$$

которые редуцируют уравнения второго порядка

$$a_{\mu\nu}(x, u, u_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + F(x, u, u_1) = 0 \quad (41)$$

к обыкновенным ДУ. Важно рассмотреть случаи, когда уравнение (41) не инвариантно ни относительно групп  $P(1, 3)$ ,  $C(1, 3)$ , ни относительно подгрупп этих групп. Нетривиальные примеры таких уравнений приведены в [9, 10].

12. Исследовать симметрию и построить классы точных решений следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned} D_t \vec{E} &= \text{rot } \vec{H}, & D_t \vec{H} &= -\text{rot } \vec{E}, \\ D_t &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 E_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_2 H_k \frac{\partial}{\partial x_k}; \\ D_\nu F_{\mu\nu} &= 0, & D_\nu &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} + F_{\nu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \mu = \overline{0, 3}; \\ D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотреть случаи, когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 0$ . Приведенные уравнения можно рассматривать как нелинейное обобщение уравнений Максвелла. При этом, конечно, следует добавить к первой системе уравнений условие неразрывности:  $\text{div } \vec{E} = 0, \text{div } \vec{H} = 0$ .

13. Провести подробно теоретико-алгебраический анализ переопределенных уравнений

$$\square u + F_1(x, u, u) = 0, \quad (42)$$

$$\{b_{\mu\nu}(x, u)J_{\mu\nu} + c_\mu(x, u)P_\mu + d_\mu(x, u)K_\mu + e(x, u)D\}F_2(x, u) = 0, \quad (43)$$

$$\square u + F_3(x, u, u) = 0, \quad (44)$$

$$a_{\mu\nu}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = F_4(x, u), \quad (45)$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad P_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

$$K_\mu = 2x_\mu - x_\nu x^\nu P_\mu, \quad D = \frac{1}{2}(x_\mu P^\mu + P_\mu x^\mu).$$

Описать функции  $F_1, F_2, F_3, F_4, a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, c_\mu, d_\mu, e$ , при которых уравнения (42)–(45) инвариантны относительно групп  $C(1, 3), C(1, 4), P(1, 3), P(1, 4)$  и их подгрупп. Если удастся при некоторых конкретных функциях  $F_2, b_{\mu\nu}, \dots$  решить уравнение (43), то это даст нам анзацы для решения нелинейного волнового уравнения (42), которые не могут быть получены с помощью метода С. Ли. В том случае, когда уравнение (42) инвариантно относительно операторов  $P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D$ , а функции  $b_{\mu\nu}, c_\mu, d_\mu, e$  являются постоянными, уравнение (43) дает нам ливевские анзацы для нахождения инвариантных решений уравнения (42). Решения уравнения (43) приводят к нелиевским анзацам для волнового уравнения (42). При этом, конечно, необходимо, чтобы система (42), (43) была совместной.

14. Исследовать симметрию и построить первые интегралы для обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = x_\mu F_1(x, \bar{\Psi}\Psi) + (\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)F_2(x, \dot{x}),$$

$$\gamma_\mu P^\mu \Psi = F_3(\bar{\Psi}\Psi)\Psi.$$

Приведенная система ОДУ описывает движение классической частицы в спинорном поле  $\Psi$ . Рассмотрим случай, когда  $F_3(\bar{\Psi}\Psi) = m = \text{const}$ .

15. Описать все системы ОДУ вида

$$m(\vec{v}, \vec{E}, \vec{H}) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{x}F_1(x, \vec{v}, \vec{E}, \vec{H}) + \vec{v}F_2(x, \vec{v}, \text{vec}E, \vec{H}) + \vec{E}F_3(x, \vec{v}, \vec{E}, \vec{H}) + \vec{H}F_4(x, \vec{v}, \text{vec}E, \vec{H}), \quad (46)$$

инвариантные относительно групп  $P(1, 3)$ ,  $G(1, 3)$  и их расширений  $(C(1, 3)$ ,  $P(1, 4)$ ,  $C(1, 4)$ ,  $G(1, 4)$ ). В (46)  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ,  $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  — векторы электромагнитного поля.

16. Существуют ли нетривиальные решения для спинорного поля

$$p_\mu p^\mu \Psi + F(\bar{\Psi}\Psi, \bar{\Psi}\gamma_\mu p^\mu \Psi)\Psi = 0,$$

для которых

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \lambda \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi, \quad F_{\mu\nu} = \lambda_1 \bar{\Psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\Psi,$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

или

$$p_\alpha p^\alpha A_\mu + p_\mu(p_\nu A^\nu) = m^2 A_\mu + A_\mu F(\bar{\Psi}\Psi), \quad A_\mu = \lambda \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi,$$

или

$$p_\alpha p^\alpha u = m^2 u + F(u), \quad u = \lambda(\bar{\Psi}\Psi),$$

$\lambda$ ,  $\lambda_1$  — произвольные параметры.

17. Исследовать симметричные свойства и построить решения интегро-дифференциального уравнения для спинора

$$p_0 \Psi = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2)^{1/2} \Psi + F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi \quad (47)$$

с дополнительными нелинейными условиями:

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu p^\mu \Psi = \lambda \bar{\Psi}\Psi; \quad \bar{\Psi}(1 - \gamma_4)\Psi = 0. \quad (48)$$

Рассмотреть отдельно случай:  $F = 0$ ,  $\lambda = m$ . В этом случае решения линейного уравнения Дирака (с положительной энергией) удовлетворяют уравнению (47) и первому нелинейному условию (48).

18. Исследовать пространства с такими метриками:

$$\left(x_\mu + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} + \lambda_2 x_\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right) \left(x^\mu + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x^\mu} + \lambda_2 x_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x^\mu}\right) = F_1(x, u),$$

$u$  — скалярная функция,

$$\left\{x_\mu + \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi + \lambda_2 \frac{\partial(\bar{\Psi}\Psi)}{\partial x_\mu}\right\} \left\{x^\mu + \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi + \lambda_2 \frac{\partial(\bar{\Psi}\Psi)}{\partial x^\mu}\right\} = F_2(x, \Psi),$$

$$(x_\mu + \lambda_1 \gamma_\mu \Psi + \lambda_2 p_\mu \Psi)(x^\mu + \lambda_1 \gamma^\mu \Psi + \lambda_2 p^\mu \Psi) = F_3(x, \bar{\Psi}\Psi).$$

Рассмотреть случаи:  $F_1 = \text{const}$ ,  $F_2 = \text{const}$ ;  $F_1 = x^2 \pm u^2$ ,  $F_2 = x^2 \pm (\bar{\Psi}\Psi)$ ,  $F_3 = x^2 \pm (\bar{\Psi}\Psi)$ .

19. Исследовать симметрию и построить классы точных решений систем:

$$p_\mu p^\mu u_1 = F_1(u_1, u_2),$$

$$p_\mu p^\mu u_2 = F_2(u_1, u_2),$$

$$(p_\mu u_1)(p^\mu u_2) = \text{const},$$

$$p_\mu u_1 p^\mu u_1 = m_1, \quad p_\mu u_2 p^\mu u_2 = m_2, \quad p_\mu u_1 p^\mu u_2 = m_3.$$

20. Провести детальный теоретико-алгебраический анализ уравнений

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu w^\mu + w^\mu \gamma_\mu)\Psi = \lambda\Psi, \quad w_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu J^{\alpha\beta},$$

$$\{\gamma_\mu P^\mu + \lambda\gamma_\mu(\bar{\Psi}w^\mu\Psi)\}\Psi = 0,$$

Проанализировать случай, когда  $\Psi$  матрица  $4 \times 4$ . Обычно  $\Psi$  — столбец из 4 функций.

21. Исследовать симметрию и построить решения дифференциальных неравенств:

$$(p_0 u)^2 - (p_a u)(p_a u) > 0;$$

$$p_0 u > \{(p_1 u)^2 + (p_2 u)^2 + (p_3 u)^2\}^{1/2}, \quad p_0 u > 0.$$

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 278 с.
3. Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer Verlag, 1986.
4. Фушич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
5. Фушич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
6. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
7. Фушич В.И., Штелень В.М., О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера, *Теор. и мат. физика*, 1983, **56**, № 3, 387–394.
8. Olver P.J., Rosenan P., The construction of special solutions to partial differential equations, *Phys. Lett. A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
9. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
10. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.
11. Шульга М.В., Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.
12. Чопик В.И., О групповых свойствах линейных уравнений параболического типа с нелинейными дополнительными условиями, в кн: Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 63–66.

# О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ

Мемуар Н.М. Крылова и Н.Н.Боголюбова [1] открыл широкую перспективу для конструктивного исследования нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1955 г. вышла в свет основополагающая монография Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [2], в которой развиты и математически обоснованы асимптотические методы решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Обобщению и применению асимптотических методов к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП) посвящена работа Ю.А. Митропольского и Б.И. Мосеевкова [3]. Идеи и методы, развитые в указанных работах, играют первостепенную роль в современной нелинейной математической физике.

В настоящей статье приведены некоторые результаты по изучению симметричных свойств и построению семейств частных решений многомерных нелинейных волновых уравнений.

В дальнейшем будем следовать такой схеме [4, 5]: выделим из множества волновых ДУЧП такие, которые обладают высокой симметрией, а затем построим их решения (аналитическими или приближенными методами). Нас будут интересовать не отдельные решения того или иного уравнения, а семейство (класс, многообразие) его решений.

Линейные и нелинейные ДУЧП с нетривиальной симметрией обладают важным свойством: если известно хотя бы одно их частное решение, то с помощью групповых преобразований можно построить целое семейство точных решений. Именно этим свойством нелинейных уравнений будем пользоваться в дальнейшем.

1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} u_0 &= F(x, u, u_1), & x &\in R(1, n), & x &= (x_0, \dots, x_n), & u &\equiv u(x), \\ u_0 &= \partial u / \partial x_0, & u_1 &= (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n). \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F$  — произвольная гладкая функция. Обозначим символом  $\tilde{P}(1, n)$  расширенную группу Пуанкаре — группу вращений и сдвигов в  $R(1, n)$ , дополненную группой масштабных преобразований;  $A\tilde{P}(1, n)$  — алгебра Ли группы  $\tilde{P}(1, n)$ .

**Теорема 1.** Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$  с базисными элементами

$$\begin{aligned} p_A &= ig_{AB} \partial / \partial x_B, & J_{AB} &= x_{APB} - x_{BPA}, & A, B &= \overline{0, n+1}, \\ D &= x_{APA} = x_0 p_0 - x_a p_a - u p_{n+1}, & p_{n+1} &= -i \partial / \partial u, & x_{n+1} &= u, & a &= \overline{1, n} \end{aligned} \quad (2)$$



только в том случае, когда

$$F(x, u, u_1) = \pm(u_i u_i + 1)^{1/2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad u_i u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Доказательство этой теоремы [6] сводится к решению сильно переопределенной системы ДУЧП для функции  $F(x, u, u)$ . Решением этой системы являются функции (3).

**Следствие 1.** Уравнение Гамильтона

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = m^2, \quad m^2 = 1, \quad (4)$$

инвариантно относительно алгебры  $A\tilde{P}(1, n+1)$ .

2. Рассмотрим волновое уравнение второго порядка

$$\square u + F(x, u) = 0, \quad \square = \partial^2 / \partial x_0^2 - \partial^2 / \partial x_1^2 - \dots - \partial^2 / \partial x_n^2. \quad (5)$$

**Теорема 2.** Уравнение (5) инвариантно относительно алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$  только в таких двух случаях:

$$F(x, u) = F_1(u) = \lambda_1 u^r, \quad r \neq 1, \quad (6)$$

$$F(x, u) = F_2(u) = \lambda_2 \exp u, \quad (7)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, r$  — произвольные константы.

Доказательство теоремы см. в [7]. Приведенные теоремы показывают, что естественным критерием отбора (выделения) довольно узкого класса нелинейных ДУЧП из всего множества уравнений является принцип инвариантности (симметрии) [4–7].

**Замечание 1.** Уравнение (5) с нелинейностью (7) в двумерном пространстве  $R(1, 1)$  инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры алгебру  $A\tilde{P}(1, 2)$ . Эта симметрия дала возможность построить общее решение уравнения (5), (7) [4, 5, 7]

$$u(x_0, x_1) = \ln \left\{ \frac{-8f'_1(x_0 + x_1)f'_2(x_0 - x_1)}{\lambda_2[f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1)]^2} \right\}, \quad (8)$$

где  $\lambda_1, f_2$  — произвольные гладкие функции,  $f'$  — производная по соответствующему аргументу.

**Замечание 2.** Все решения двумерного уравнения (5), (7) имеют непertурбационный характер (решения (8) имеют сингулярность в точке  $\lambda_2 = 0$ ), поэтому к уравнению неприменимы методы малого параметра. Для волнового уравнения со степенной нелинейностью (6) такой результат не обнаружен. Более того, многие частные решения уравнения (5), (6) аналитичны по  $\lambda_1$  [4, 7].

**Замечание 3.** При  $r = (n+3)/(n+1)$  уравнение (5), (6) инвариантно относительно конформной алгебры  $AC(1, n) \supset A\tilde{P}(1, n)$  [8].

3. Выясним, какие уравнения описывают нелинейную теплопроводность. Принято считать, что нелинейные процессы теплопроводности и диффузии описываются нелинейными ДУЧП вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ C(u) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\} + F(u), \quad x_0 \equiv t, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (9)$$

В случае, когда  $F(u) = 0$ ,  $C(u) = \text{const}$ , уравнение (9), как показал еще С. Ли, инвариантно относительно группы Галилея. Групповой анализ нелинейного уравнения (9) (при  $F(u) = 0$ ) осуществил Л.В. Овсянников [9]. В [5] обращено внимание на следующее свойство уравнений (9): ни одно нелинейное уравнение из класса (9) не инвариантно относительно преобразований Галилея, т.е. для уравнений (9) ( $F(u) \neq 0$ ,  $C(u) \neq \text{const}$ ) не выполняется принцип относительности Галилея. Поэтому для построения математической модели нелинейных процессов теплопроводности и диффузии необходимо решить следующую задачу [5]: описать эволюционные уравнения

$$u_0 + F(x, u, u_1, u_2) = 0, \quad u_0 = \partial u / \partial x_0, \quad x_0 \equiv t \quad (10)$$

инвариантные относительно группы Галилея  $G(1, n)$  и ее расширений. Если число простоанственных переменных  $n \leq 3$ , то галилеевски-инвариантные уравнения полностью описывает следующая теорема.

**Теорема 3.** Уравнение (10) инвариантно относительно группы Галилея только в таких случаях:

1) при  $n = 1$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_1(v_1), \quad v_1 = \Delta u = u_{11}; \quad (11)$$

2) при  $n = 2$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_2(v_1, v_2), \quad v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{12}, \quad (12)$$

$$v_1 = \Delta u = u_{11} + u_{22};$$

3) при  $n = 3$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_3(v_1, v_2, v_3), \quad v_1 = \Delta u, \quad (13)$$

$$v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad v_3 = \det \|u_{ij}\|,$$

где  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — произвольные гладкие функции.

Доказательство теоремы 3 получено Серовой М.М. и автором [5]. Если алгебру  $AG(1, n)$  дополнить операторами, которые порождают масштабные и проективные преобразования, то функции  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  конкретизируются, т.е. класс допустимых галилеевски-инвариантных уравнений (10) сильно сужается. Например, в двумерном случае [5]  $F = \lambda u_i u_i + \alpha_1(v_1 - 4v_2)^{1/2}$ ,  $i = 1, 2$ .

Таким образом, ДУЧП второго порядка, описывающие нелинейные пространственные процессы теплопроводности и диффузии, имеют вид (10), (13). Далее, на примере волнового уравнения (5), (6) покажем, как строить некоторые классы точных решений нелинейных ДУЧП.

4. Для построения частных решений ДУЧП используем анзац

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad (14)$$

предложенный в [4]. С помощью этого анзаца построены широкие классы точных решений многих нелинейных уравнений математической физики. В (14)  $\varphi(\omega)$  — функция, подлежащая определению, зависит от инвариантных переменных  $\omega(x) = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ . Явный вид функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  определяется из условия “разделения” переменных, т.е. из требования, чтобы в уравнение для  $\varphi(\omega)$  не входили явно переменные  $(x_0, \dots, x_n)$ . Инвариантные переменные  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  являются первыми интегралами соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа [4, 7]. По алгебре инвариантности ДУЧП строится уравнение Эйлера–Лагранжа. Число неэквивалентных анзацев зависит от размерности алгебры инвариантности уравнения.

Формула (14), конечно, не исчерпывает все возможные анзацы для данного уравнения. Так, широкий класс частных решений уравнений Гамильтона (4), Монжа–Ампера [10, 11] можно найти в неявном виде, используя анзац [4, 5]

$$W(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad (15)$$

где  $W(u)$  — произвольная гладкая функция от  $u$ ,  $\omega = \omega(x, u)$ .

Рассмотрим волновое уравнение (5) с нелинейностью (6) в пространстве  $R(1, 3)$ . Если реализовать приведенный алгоритм для уравнения (5), (6), то один из возможных анзацев (14) имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} u(x) &= [(cx)^2 + (dx)^2]^{2/(1-r)} \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad r \neq 1, \quad \omega_1 = \frac{ax}{bx}, \\ \omega_3 &= [(cx)^2 + (dx)^2] ((ax) \cdot (bx))^{-1}, \quad \omega_2 = \ln [(cx)^2 + (dx)^2] + 2\theta \operatorname{arctg} \frac{cx}{dx}, \\ a^2 &= -b^2 = -c^2 = -d^2 = 1, \quad ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0, \\ a^2 &= a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2, \quad ab = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3, \\ ax &\neq 0, \quad bx \neq 0, \quad dx \neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Анзац (16) редуцирует уравнение (5), (6) к ДУЧП с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} (1 + \omega_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1^2} - 4(1 + \theta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_2^2} + \omega_3^2 [\omega_3 (\omega_1^{-1} - \omega_1) - 4] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_3^2} - \\ - 2\omega_3^2 (1 + \omega_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1 \partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_2 \partial \omega_3} - 2\omega_3 \omega_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1} + 4k \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2} - \\ - k^2 \varphi + \lambda_1 \varphi^2 = 0, \quad k = 2/(r - 1). \end{aligned} \quad (17)$$

Найти частные решения уравнения (17) трудно, поэтому нужно редуцировать его к уравнению с двумя независимыми переменными, а затем полученное ДУЧП редуцировать к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Переход к ОДУ можно осуществить и непосредственно из уравнения (17), если предположить, например, что  $\varphi$  зависит только от одной переменной  $\omega_1$ . В ряде случаев нелинейные ОДУ удается решить аналитически [4–7] или построить приближенные решения с помощью метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [12]. Заметим,

что некоторые редуцированные уравнения обладают значительно высшей симметрией, чем исходное уравнение. Этот факт свидетельствует о новых возможностях для конструктивного построения широких классов решений.

Приведем два многопараметрических семейства точных решений уравнения Даламбера (5) с нелинейностью (6), полученных по указанной схеме

$$u = [(a_\nu x^\nu)^2 + b_\nu x^\nu \cdot c_\nu x^\nu]^{1/(1-r)}, \quad (18)$$

где параметры  $a, b, c$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_\nu b^\nu &= a_\nu c^\nu = b_\nu b^\nu = c_\nu c^\nu = 0, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \\ 2a_\nu a^\nu &= b_\nu b^\nu = \lambda_1(r-1)^2(r-3)^{-1}, \quad r \neq 3, \quad r \neq 1; \end{aligned}$$

$$u = [\Phi(a_\nu x^\nu) + b_\nu x^\nu]^{2/(1-r)}, \quad (19)$$

причем  $a_\nu a^\nu = a_\nu b^\nu = 0, b_\nu b^\nu = -\frac{1}{2}\lambda_1(1-r)^2(1+r)^{-1}, r \neq -1, \Phi$  — произвольная гладкая функция.

Формула (19) задает решение уравнения (5), (6) через произвольную функцию  $\Phi$ , поэтому ее можно использовать для изучения соответствующей начальной или граничной задачи.

Эффективная реализация анзаца (14) для нелинейных систем ДУЧП типа Дирака и Максвелла–Дирака осуществлена в работах [13, 14].

5. Приведем несколько простых приемов, позволяющих строить семейство частных решений нелинейных пуанкаре-инвариантных ДУЧП. Ради конкретности рассмотрим уравнение Даламбера (5) с кубической нелинейностью. Перейдем от ДУЧП к ОДУ посредством вычеркивания слагаемых  $\partial^2 u / \partial x_1^2, \partial^2 u / \partial x_2^2, \partial^2 u / \partial x_3^2$  в уравнении (5). Тогда получим

$$\partial^2 u / \partial x_0^2 + \lambda F(u) = 0, \quad F(u) = u^3. \quad (20)$$

Уравнение (20) имеет, помимо хорошо известных решений в классе эллиптических функций, простое частное решение

$$u_1(x) = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} x_0^{-1}, \quad \lambda \neq 0. \quad (21)$$

Воспользовавшись преобразованиями из группы Лоренца  $x'_\mu = a_{\mu\nu} x^\nu$ , размножим решения (21) до решений, зависящих от всех переменных  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ :

$$u_2 = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} (a_\mu x^\mu)^{-1}, \quad a_\mu a^\mu = 1. \quad (22)$$

Используя конформные преобразования

$$x'_\mu = \sigma^{-1} (x_\mu + c_\mu x^2), \quad u'(x') = \sigma u(x), \quad \sigma = 1 + 2c_\nu x^\nu + c^2 x^2, \quad (23)$$

расширим решения (22) до семипараметрического семейства решений  $u_3 = \sigma^{-1} u_2(x_\mu \rightarrow x'_\mu)$ . Очевидно, что уравнению (5) можно сопоставить, например, ОДУ вида  $\partial^2 u / \partial x_1^2 + \lambda F(u) = 0, F(u) = u^3$ . В этом случае получим такие семейства решений конформно-инвариантного уравнения (5):

$$\tilde{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} (a_\alpha x^\alpha)^{-1}, \quad a_\alpha a^\alpha = -1, \quad (24)$$

$$\tilde{u}_3 = \sigma^{-1} \tilde{u}_2(x_\mu \rightarrow x'_\mu). \quad (25)$$

Следует отметить, что размножать решения ДУЧП можно не только с помощью преобразований, образующих группу Ли. Например, уравнение

$$\square u + \lambda(x_\alpha x^\alpha)^{-1} u = 0 \quad (26)$$

не инвариантно относительно конформных преобразований (23), но инвариантно относительно инверсии

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu/x^2, \quad x^2 \neq 0. \quad (27)$$

Преобразование (27) не образует группу Ли. Если  $u_1$  — решение уравнения (26), то новое решение  $u_2$  строится по формуле

$$u_2 = \frac{1}{x^2} u_1 \left( x_\mu \rightarrow \frac{x_\mu}{x^2} \right). \quad (28)$$

Формулу (28) можно рассматривать как обобщение известной теоремы Кельвина для уравнения Лапласа на линейные и нелинейные волновые уравнения. Описанный прием пригоден также и для отыскания частных решений галилеево-инвариантных уравнений (10) [15].

Другой способ построения частных решений ДУЧП состоит в замене многомерного уравнения (5) системой двумерных ДУЧП вида

$$\partial^2 u / \partial x_0^2 - \partial^2 u / \partial x_1^2 + F(u) = 0, \quad (29)$$

$$\partial^2 u / \partial x_2^2 + \partial^2 u / \partial x_3^2 = 0. \quad (30)$$

Двумерную систему (29), (30) легче решить, чем исходное многомерное уравнение (5). Построив частные решения системы, размножим их до неразмножаемых относительно групп  $\tilde{P}(1, 3)$  или  $C(1, 3)$ . В случае, когда  $F(u) = \lambda \exp u$ , все решения уравнения (29) имеют вид (8). Подставив (8) в (30), получим уравнение для определения двух произвольных функций  $f_1$  и  $f_2$ . Если  $F(u) = \sin u$ , уравнение (29) имеет, как хорошо известно, солитонные решения.

**Замечание 4.** Неразмножаемые решения уравнений (5)–(7) относительно групп  $G(1, 3)$ ,  $P(1, 3)$  и  $C(1, 3)$  можно использовать для квантования нелинейных волновых уравнений. Один из возможных путей состоит в следующем: разложить пуанкаре-инвариантное семейство решений уравнения (5) в интеграл Фурье, а затем, как и в случае линейных уравнений, воспользоваться хорошо известными приемами.

6. В предыдущих пунктах для отыскания частных решений существенно использована симметрия ДУЧП. Естественно поставить следующий вопрос: возможна ли редукция многомерного ДУЧП в случае, когда уравнение не обладает симметрией? Для положительного ответа на этот вопрос нужно построить уравнение, которое, например, не инвариантно относительно группы Лоренца  $O(1, 3)$ , но допускает редукцию относительно лоренц-инвариантного анзаца. Такие уравнения построены И.М. Цифрой и автором. Одно из них имеет вид

$$\square u = (\lambda_0/x_0)^2 (\partial u / \partial x_0)^2 + (\lambda_1/x_1)^2 (\partial u / \partial x_1)^2 + (\lambda_2/x_2)^2 (\partial u / \partial x_2)^2 + (\lambda_3/x_3)^2 (\partial u / \partial x_3)^2, \quad (31)$$

где  $\lambda_0, \dots, \lambda_3$  — произвольные параметры,  $x_\mu \neq 0$ . Уравнение (31) не инвариантно относительно преобразований из группы  $O(1,3)$ , но имеет лоренц-инвариантные решения. Решения (31) ищем с помощью лоренц-инвариантного анзаца

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_\mu x^\mu. \quad (32)$$

Уравнение (31) после подстановки (32) редуцируется к ОДУ

$$4\omega d^2\varphi/d\omega^2 + 8d\varphi/d\omega = 4\lambda^2(d\varphi/d\omega)^2. \quad (33)$$

Частное решение уравнения (33) имеет вид

$$\varphi = -\frac{2}{\sqrt{a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\sqrt{a^2}} \quad \text{при } \lambda^2 = -a^2 < 0,$$

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2} + \omega}{\sqrt{a^2} - \omega} \right| \quad \text{при } \lambda^2 = -a^2 > 0.$$

Таким образом, уравнение (31), не обладающее лоренц-симметрией, имеет лоренц-инвариантные решения. Этот факт обусловлен тем, что некоторые подмножества в множестве всех решений уравнения (31) имеют более широкую симметрию, чем множество всех решений уравнения (31). В рассматриваемом примере дополнительное условие, выделяющее лоренц-инвариантные решения, имеет вид

$$J_{\mu\nu}u(x) = 0, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu \partial/\partial x_\nu - x_\nu \partial/\partial x_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \quad (34)$$

$J_{\mu\nu}$  — генератор группы  $O(1,3)$ . Вместо (34) можно использовать и менее жесткие условия, например  $(J_{\mu\nu}u)(J_{\mu\nu}u) = 0$  или  $J_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = 0$ .

Уравнение (31) совместно с дополнительными условиями (34) инвариантно относительно  $O(1,3)$ , т.е. уравнение (31) на множестве решений линейных уравнений (34) лоренц-инвариантно.

Все изложенное выше относительно конкретного уравнения (31) обобщается и на случай произвольного ДУЧП

$$L(x, u, u_1, u_2) = 0. \quad (35)$$

Пусть  $\{\hat{Q}_A\}$  — совокупность операторов из алгебры инвариантности уравнения (35) [16], т.е. операторы  $\{\hat{Q}_A\}$ ,  $A = \overline{1, N}$ , переводят решение в решение. В рассмотренном примере  $\{\hat{Q}_A\} = \{J_{\mu\nu}\}$  — набор шести операторов, задающих группу Лоренца. Для построения алгебры инвариантности необходимо использовать обобщенное условие инвариантности

$$\hat{Q}_A L(x, u, u_1, u_2) \Big|_{\substack{L=0 \\ \{\hat{Q}_A u\}=0}} = 0, \quad (36)$$

где  $\{\hat{Q}_A u\} = 0$  — совокупность следующих уравнений:

$$\hat{Q}_A u = 0, \quad D\hat{Q}_A u = 0, \quad \dots, \quad D^n \hat{Q}_A u = 0, \quad (37)$$

$D$  — оператор полного дифференцирования. Если в уравнении (36) не учитывать дополнительные уравнения (37), то обобщенное условие инвариантности совпадает с классическим условием инвариантности С. Ли. Уравнения

$$D\hat{Q}_A u = 0, \quad D^2 \hat{Q}_A u = 0 \quad (38)$$

представляют собой дифференциальные следствия из уравнения  $\hat{Q}_A u = 0$ . Уравнение (38) можно интерпретировать как дифференциальные связи, наложенные на исходное уравнение (35). Примером ДУЧП со связями может быть система

$$\square u = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0. \quad (40)$$

В [17] с учетом обобщенного условия инвариантности (36) найдена бесконечномерная алгебра инвариантности системы (39), (40). Использование классического определения инвариантности к системе (39), (40) дает конечномерную алгебру инвариантности. Многочисленные применения обобщенного условия инвариантности к линейным уравнениям математической физики рассмотрены в [18].

В случае, когда операторы  $\{\hat{Q}_A\}$  являются дифференциальными операторами первого порядка  $\hat{Q}_A = \xi_A^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^A(x, u)$ ,  $\mu = \bar{0}, \bar{n}$ , первое уравнение из (37) можно использовать для нахождения функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  в анзаце (14) при редукции ДУЧП к ОДУ, т.е.

$$\hat{Q}_A u = \xi_A^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \{f(x)\varphi(\omega) + g(x)\} + \eta \{f(x)\varphi(\omega) + g(x)\} = 0.$$

**Замечание 5.** Приведем системы дифференциальных уравнений с нелинейными связями, которые могут иметь физические приложения:

$$\square \Psi = -m^2 \Psi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial x_a} \frac{\partial \rho}{\partial x^a} \pm m^2 \right\}^{1/2},$$

$$\rho = \lambda_1 \left( \Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \Psi \right) + \lambda_2 \Psi^\dagger \Psi;$$

$$\square \Psi = -m^2 \Psi, \quad \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad j_\mu = F_1(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi + F_2(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi,$$

где  $\Psi$  — четырехкомпонентный спинор,  $\Psi^\dagger$  — сопряженный спинор,  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные гладкие функции.

**Замечание 6.** Укажем еще один способ решения нелинейных систем уравнений, например, вида

$$u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3; \quad \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} = 0.$$

Дополним эти уравнения линейными волновыми уравнениями

$$\square u_\mu = 0, \quad \square \Psi = 0.$$

Построив широкие классы частных решений линейных уравнений и подставив их в нелинейные, можно найти семейства точных решений исходной нелинейной системы. При этом желательно, чтобы система нелинейного и линейного уравнений имела нетривиальную симметрию и, конечно, была совместна.

1. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н., Введение в нелинейную механику, Киев, Изд-во АН УССР, 1937, 220 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Наука, 1955, 450 с.
3. Митропольский Ю.А., Мосеевков Б.И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, Киев, Вища шк., 1976, 589 с.
4. Фушич В.И. Симметрия в задачах математической физики, в кн: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
5. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в кн: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
6. Фушич В.И., Серов Н.И., О некоторых точных решениях многомерного нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа, *Докл. АН СССР*, 1984, **278**, № 4, 847–851.
7. Fushchych W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
8. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.
9. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
10. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Let. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498–502.
11. Фушич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
12. Шульга М.В., О точных и приближенных решениях одного нелинейного волнового уравнения, в кн: Методы нелинейной механики и их приложения, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 149–155.
13. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrostatics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215–217.
14. Фушич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 20–30.
15. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.
16. Фушич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
17. Шульга М.В., Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.
18. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.



# О векторных лагранжианах для электромагнитного и спинорного полей

*В.И. ФУЩИЧ, И.Ю. КРИВСКИЙ, В.М. СИМУЛИК*

Vector Lagrange functions have been constructed and analyzed for the electromagnetic fields  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  in terms of field strengths, for spinor fields  $\Psi$  and for system of interacting fields  $(\vec{E}, \vec{H})$  and  $\Psi$ . The Noether's theorem has been generalized in the case of vector Lagrangians and the conserved quantities has been found for the electromagnetic and spinor fields.

Построены и проанализированы векторные функции Лагранжа для электромагнитного поля в терминах напряженностей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  спинорного поля  $\Psi$ , а также для системы взаимодействующих полей  $(\vec{E}, \vec{H})$  и  $\Psi$ . Обобщена теорема Нетер на случай векторных лагранжианов, и вычислены сохраняющиеся величины для электромагнитного и спинорного полей.

## Введение

Поиск новых симметрии уравнений Максвелла и законов сохранения для электромагнитного поля по-прежнему может приводить к обнаружению неизвестных ранее свойств и закономерностей [1–3], которыми обладают эти замечательные уравнения. В работах [4–9] эта задача решается в рамках лагранжева подхода на основе различных функций Лагранжа для электромагнитного поля в терминах напряженностей с использованием теоремы Нетер [10, 11] и ее обобщения [12, 13] на случай нелиевских (негеометрических) симметрий, многочисленные примеры которых приведены в [1–3].

Известны многие попытки [14–18] построения лагранжева подхода для электромагнитного поля в терминах напряженностей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  электрического и магнитного полей без привлечения потенциалов  $A^\mu$  в качестве вариационных переменных. Для поля напряженностей  $(\vec{E}, \vec{H})$  вариационный принцип сформулирован в [14] в форме Гамильтона. В [15] выписана без какого-либо анализа простейшая функция Лагранжа, дающая часть из уравнений Максвелла. Необходимые уточнения функции Лагранжа, предложенной в [15], и анализ сохраняющихся величин на ее основе выполнены в [4, 5]. Такая функция Лагранжа, однако, оказалась нулевой компонентой 4-вектора группы Пуанкаре. В [7] этот лагранжиан обобщен до 4-вектора и на этой основе построен скалярный лагранжиан, однако, явно зависящий от координаты  $x \in R_x$ . Скалярные лагранжианы подробно обсуждены в [8, 9].

Анализ предложенных в [6, 16] формулировок  $L$ -подхода для уравнений Максвелла в форме Майораны–Оппенгеймера (диракоподобной форме) показывает, что построенным в [6, 16] функциям Лагранжа присущи те же трудности, что и лагранжианам [4, 5, 15] (заметим, что лагранжиан в [16] неоправданно объявлен

скаляром). Варианты скалярных функций Лагранжа предложены в [17] с помощью привлечения электрического и магнитного токов в качестве вариационных переменных. Однако уравнения Эйлера–Лагранжа (ЭЛ) для лагранжианов в [17] дают только уравнения Максвелла с токами, тогда как нетеровские токи в [17] сохраняются только для уравнений Максвелла, свободных от электрических и магнитных токов, а такие уравнения не получаются как уравнения ЭЛ для лагранжианов в [17]<sup>1</sup>.

Использование векторного лагранжиана в качестве альтернативы к скалярному предложено в [18], где, однако, построена только псевдовекторная относительно полной группы Пуанкаре функция Лагранжа, а взаимодействие со спинорным полем, удовлетворяющим уравнению Дирака, ввести не удалось.

Цель настоящей работы — построение и детальный анализ векторных (относительно собственной и полной группы Пуанкаре) функций Лагранжа для свободных и системы взаимодействующих электромагнитного  $(\vec{E}, \vec{H})$  и спинорного  $\Psi$  полей, анализ симметричных свойств этой модели и отыскание сохраняющихся величин на основе обобщения теоремы Нетер на случай векторных лагранжианов.

В разделе 2 анализируются симметричные свойства уравнений Максвелла для электромагнитного поля в терминах напряженностей и уравнений для потенциалов. Проиллюстрировано наличие у уравнений Максвелла таких симметрий, которыми уравнения для потенциалов, в принципе, обладать не могут. Попутно отмечено, что в пространстве  $\Psi_0$  решений уравнений Максвелла реализуются два различных представления конформной группы  $C(1,3)$  — кинематическое и динамическое.

В разделе 3 обращается внимание на то, что не существует скалярной функции Лагранжа (в терминах напряженностей), для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнениями Максвелла. Поэтому уравнения Максвелла переписаны в эквивалентной форме, а именно, в виде равенства нулю тензора 3-го ранга. Уравнения Максвелла в тензорной форме могут быть получены в качестве уравнений ЭЛ, но для векторных функций Лагранжа.

В разделе 4 рассмотрена функция Лагранжа в терминах тензора напряженностей электромагнитного поля, которая является вектором относительно собственной ортохронной группы Пуанкаре  $P(1,3)$ . Обобщена теорема Нетер о законах сохранения на случай векторных лагранжианов, найден явный вид сохраняющихся токов, порождаемых произвольным преобразованием инвариантности свободных уравнений Максвелла.

В разделе 5 построена векторная, относительно полной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1,3)$ , функция Лагранжа для поля  $(\vec{E}, \vec{H})$ . Проанализированы ее преимущества над  $P(1,3)$ -векторной функцией Лагранжа.

В разделе 6 рассмотрены два варианта векторных уравнений для спинорного поля (эквивалентных уравнению Дирака) и предложен векторный подход для этого поля. Построена векторная функция Лагранжа для системы минимально и локально взаимодействующих электромагнитного  $(\vec{E}, \vec{H})$  и спинорного  $\Psi$  полей.

В разделе 7 приведены выводы и комментарии к основным полученным в настоящей работе результатам.

<sup>1</sup>Полагая, например, в функции Лагранжа (2.6) из [17]  $j^l = 0$  получаем лагранжиан  $\mathcal{L}_1 = -(1/2)F_{\mu\nu,\alpha}F^{\mu\nu,\alpha}$ , для которого лагранжева производная по  $F^{\rho\sigma}$  дает уравнения  $\square F^{\rho\sigma} = 0$ , которые не эквивалентны свободным уравнениям Максвелла.

## 2. Симметричные свойства уравнений для электромагнитного поля в терминах напряженностей и потенциалов

Уравнения Максвелла

$$\partial_0 \vec{E} = \text{rot } \vec{H} - \vec{j}, \quad \text{div } \vec{E} = \rho, \quad \partial_0 \vec{H} = -\text{rot } \vec{E}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (1)$$

для напряженностей  $\vec{E} = (E^i)$ ,  $\vec{H} = (H^i)$  электромагнитного поля (в гауссовой системе единиц, в которой  $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ ) в терминах тензора напряженностей

$$F \equiv (F^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{H}): \quad F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk} H^k, \quad F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} \quad (2)$$

в обозначениях

$$Q^\mu \equiv F^{\mu\nu}_{,\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu}(x), \quad R^\mu \equiv \varepsilon F^{\mu\nu}_{,\nu}, \quad \varepsilon F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (3)$$

$$j \equiv (j^\mu), \quad j^0 = \rho, \quad \vec{j} = (j^i), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \equiv \overline{0, 3}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

принимают вид

$$Q^\mu - j^\mu = 0, \quad R^\mu = 0. \quad (5)$$

Системы уравнений (1) и (5) эквивалентны, поскольку  $Q = (Q^\mu)$  и  $R = (R^\mu)$ :

$$Q^0 = \text{div } \vec{E}, \quad Q^i = (-\partial_0 \vec{E} + \text{rot } \vec{H})^i \equiv -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ijk} \partial_j H^k, \quad (6)$$

$$R^0 = \text{div } \vec{H}, \quad R^i = (-\partial_0 \vec{H} - \text{rot } \vec{E})^i \equiv -\partial_0 H^i - \varepsilon^{ijk} \partial_j E^k. \quad (7)$$

Уравнения Максвелла в форме (5) имеют ковариантный вид, а именно, два вектора  $\vec{Q} = (Q^\mu - j^\mu)$ ,  $\vec{R} = (R^\mu)$  относительно собственной ортохронной группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  равны нулю. Поэтому естественной и логичной является задача построения релятивистической инвариантной лагранжевой подхода ( $L$ -подхода) именно в терминах тензора напряженностей  $F$  (2) электромагнитного поля, а не в терминах вектора-потенциала  $A = (A^\mu)$ . Это актуально хотя бы потому, что описание электромагнитного поля в терминах тензора напряженностей  $F$  (2) и описание этого поля в терминах вектора-потенциала  $A = (A^\mu)$ , удовлетворяющего системе уравнений

$$\partial_\mu \partial^\nu A_\nu - \square A_\mu = j_\mu, \quad \square \equiv \partial^\mu \partial_\mu, \quad (8)$$

— неэквивалентные описания во многих аспектах. Действительно, стандартная замена переменных

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (9)$$

переводит уравнения (5) в уравнения (9); однако для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}^A = -\frac{1}{4} (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu})(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}) + A_\mu j^\mu, \quad (10)$$

приводящей к уравнениям (8), преобразование  $A \rightarrow F$  (9) не является преобразованием форм-инвариантности даже для свободного электромагнитного поля, поскольку функция (10) (с  $j = 0$ ) после замены (9), т.е. функция

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4 = (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) / 2, \quad (11)$$

рассматриваемая как функция тензора  $F$  (2) (а не комбинаций (9) производных  $A_{\mu,\nu}$ ), приводит к бессодержательным уравнениям ЭЛ:

$$\delta\mathcal{L}/\delta F^{\rho\sigma} = -F_{\rho\sigma}/2 = 0. \quad (12)$$

Далее, с теоретико-групповой точки зрения  $F$  и  $A$  — это существенно разные объекты:  $F = (F^{\mu\nu})$  (2) есть (антисимметричный) тензор 2-го ранга, тогда как  $A = (A^\mu)$  есть тензор 1-го ранга относительно группы Лоренца. На языке неприводимых представлений собственной ортохронной группы Лоренца  $O(1,3)$  это означает, что поле  $A = (A^\mu)$  преобразуется по представлению  $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  группы  $O(1,3)$ , тогда как поле  $F = (F^{\mu\nu})$  (2) преобразуется по представлению  $D(1,0) \oplus D(0,1)$  этой группы. Более того, множества  $\Psi_0 = \{F\}$  и  $\Psi'_0 = \{A\}$  решений уравнений (5) и (6) инвариантно относительно существенно различных представлений группы симметрии безмассовых уравнений — конформной группы  $C(1,3) \supset P(1,3)$ .

В этой связи укажем (см., например, [1, 2, 12]), что через матричные генераторы  $S_{\mu\nu}$  группы  $O(1,3)$ , удовлетворяющие соотношениям

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}, \quad (13)$$

и через генераторы  $C(1,3)$  — преобразований в пространстве-времени

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mathfrak{M}_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \quad d = x^\mu\partial_\mu, \quad K_\mu = 2x_\mu d - x^2\partial_\mu, \quad (14)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial_\mu, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho, \quad (15a)$$

$$[\mathfrak{M}_{\mu\nu}, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}\mathfrak{M}_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\mathfrak{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}\mathfrak{M}_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\mathfrak{M}_{\mu\rho}, \quad (15b)$$

$$[\partial_\mu, d] = \partial_\mu, \quad [\partial_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu}d - \mathfrak{M}_{\mu\nu}), \quad [\mathfrak{M}_{\mu\nu}, d] = 0, \quad (15v)$$

$$[K_\mu, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}K_\sigma - g_{\mu\sigma}K_\rho, \quad [d, K_\mu] = K_\mu, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \quad (15г)$$

генераторы произвольного представления группы  $C(1,3)$  (т.е. в любом множестве  $\Psi$  многокомпонентных функций над  $R_x$ ) выражаются как

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad j_{\mu\nu} = \mathfrak{M}_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}, \quad \hat{d} = d - \tau = x^\mu\partial_\mu - \tau, \quad (16a)$$

$$\hat{K}_\mu = 2x_\mu\hat{d} - x^2\partial_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu = K_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu - 2\tau x_\mu, \quad (16б)$$

где  $\tau$  — любая матрица, коммутирующая с  $S_{\mu\nu}$  (степенью конформности мы называем матрицу  $\tau$ ).

Принципиальное различие описания электромагнитного поля в терминах тензора  $F$  (2) или вектора  $A$  с теоретико-групповой точки зрения состоит в том, что множество  $\Psi_0 = \{F\}$  решений уравнений Максвелла (5) инвариантно относительно алгебры  $AC(1,3)$  (16) со степенью конформности  $\tau = -2$  и с матрицами  $S_{\mu\nu}$ , задаваемыми равенствами

$$(S_{\mu\nu}F)_{\rho\sigma} \equiv S_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}, \quad (17)$$

тогда как множество  $\Psi'_0 = \{A\}$  решений уравнения (8) инвариантно относительно алгебры  $AC(1, 3)$  (16) со степенью конформности  $\tau = -1$  и с матрицами  $S_{\mu\nu}$ , задаваемыми равенствами

$$(S_{\mu\nu}A)_\rho \equiv S_{\mu\nu}A_\rho = A_\mu g_{\nu\rho} - A_\nu g_{\mu\rho}. \quad (18)$$

Кстати, утверждение о том, что  $F(2)$  преобразуется по представлению  $D(1, 0) \oplus D(0, 1)$  группы  $O(1, 3)$ , а  $A = (A^\mu)$  — по представлению  $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  этой группы, следует именно из явного вида (17) и (18) генераторов  $S_{\mu\nu}$  представлений группы  $O(1, 3)$  в множествах  $\Psi_0 = \{F\}$  и  $\Psi'_0 = \{A\}$ .

**Замечание 1.** Пусть  $A = (A^\mu)$  трактуется как вектор не только относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3) \supset O(1, 3)$ , но и относительно группы  $C(1, 3) \supset P(1, 3)$ , т.е. постулируется, что при  $C(1, 3)$ -преобразованиях

$$x \rightarrow x' = \Phi(x, \alpha) \stackrel{i}{=} \left( 1 + a^\mu p_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu} + \varkappa d + b^\mu K_\mu \right) x \quad (19)$$

в пространстве-времени  $R_x$  набор  $A = (A^\mu)$  четырех функций над  $R_x$  преобразуется по правилу

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \frac{\partial \Phi^\mu(x, \alpha)}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \Phi^{-1}(x', \alpha)} \quad (20)$$

(символ “ $i$ ” в (19) обозначает “инфинитезимально”, а  $\Phi^{-1}(x, \alpha)$  в (20) есть преобразование в  $R_x$ , обратное к  $\Phi(x, \alpha)$ ;

$$\alpha \equiv (a, \omega, \varkappa, b), \quad a \equiv (a^\mu), \quad \omega \equiv (\omega^{\mu\nu}), \quad b \equiv (b^\mu), \quad (21)$$

суть вещественные параметры  $C(1, 3)$ -преобразований в  $R_x$ ). Тогда инфинитезимально преобразование (20) имеет вид

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) \stackrel{i}{=} \left( 1 - a^\varepsilon \partial_\varepsilon - \frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} j_{\rho\sigma} - \varkappa \hat{d} - b^\rho \hat{K}_\rho \right) A^\mu(x), \quad (22)$$

в котором генераторы задаются формулами (16) с  $S_{\mu\nu}$  (18) со степенью конформности  $\tau = 1$ . Но оператор (16б) с  $S_{\mu\nu}$  (18) и  $\tau = 1$  не является генератором преобразований инвариантности уравнений (8) (с  $j = 0$ ) для  $A = (A^\mu)$  (он является генератором преобразований инвариантности уравнений (8) лишь при  $\tau = -1$ ). Аналогично этому, если  $F = (F^{\mu\nu})$  трактовать как (антисимметричный) тензор группы  $C(1, 3)$ , т.е. постулировать, что при  $C(1, 3)$ -преобразованиях (19) тензор  $F$  (2) преобразуется по закону

$$F^{\mu\nu}(x) \rightarrow F'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial \Phi^\mu(x, \alpha)}{\partial x^\rho} \frac{\partial \Phi^\nu(x, \alpha)}{\partial x^\sigma} F^{\rho\sigma} \Big|_{x=\Phi^{-1}(x', \alpha)}, \quad (23)$$

то для (23) инфинитезимально получаем формулу

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu}(x) \stackrel{i}{=} \left( 1 - a^\rho \partial_\rho - \frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} j_{\rho\sigma} - \varkappa \hat{d} - b^\rho \hat{K}_\rho \right) F^{\mu\nu}(x), \quad (24)$$

в которой генераторы задаются формулами (16) с  $S_{\mu\nu}$  (17) и со степенью конформности  $\tau = 2$ . Но оператор (16б) с  $S_{\mu\nu}$  (17) и  $\tau = 2$  не является генератором преобразований инвариантности уравнений Максвелла (5) (с  $j = 0$ ) для  $F(2)$  (он

является генератором преобразований инвариантности уравнений (5) лишь при  $\tau = -2$ ).

В этой связи преобразование (23) следует интерпретировать как кинематическое  $C(1,3)$ -преобразование в том смысле, что оно задает правило пересчета значений тензора  $F(2)$  в одной и той же (произвольно фиксированной) точке пространства-времени, но в разных системах отсчета, связанных  $C(1,3)$ -преобразованием (19), в то время как преобразование (24) с  $\tau = -2$  (и порождаемое им конечное  $C(1,3)$ -преобразование) есть динамическое преобразование, т.е. преобразование инвариантности уравнений Максвелла (5)  $j = 0$  в одной и той же (произвольно фиксированной) инерциальной системе отсчета. Аналогично трактуется преобразование (20) (инфинитезимально — преобразование (22) с  $\tau = 1$ ) и преобразование (22) с  $\tau = -1$ . Для подгруппы  $P(1,3) \subset C(1,3)$  кинематические и динамические преобразования (20) или (23) как не зависящие от  $\tau$ , совпадают.

**Замечание 2.** Стандартная квантовая электродинамика формулируется в терминах потенциалов, на которые налагается также дополнительное условие (калибровка) в той или иной ковариантной форме, например условие Лоренца, т.е. вектор  $A = (A^\mu)$  считается удовлетворяющим не системе уравнений (8), а системе

$$\square A_\mu = j_\mu, \quad \partial A \equiv \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (25)$$

Однако система (25)  $j = 0$ , в отличие от системы (8) с  $j = 0$ , вообще  $C(1,3)$ -неинвариантна, хотя условие Лоренца  $\partial A = 0$  инвариантно относительно преобразований (22) с  $\tau = -3$ , но уравнение Даламбера  $\square A = 0$ , вообще говоря, не инвариантно относительно преобразований (22) ни при каком  $\tau$  (более точно: оператор (16б) не является генератором преобразований инвариантности уравнения  $\square A = 0$  ни при каком  $\tau$ )<sup>2</sup>. Кроме того, уравнения (8) или (25) для потенциалов не позволяют описать давно установленную [19–21] симметрию свободного поля, задаваемую преобразованием дуальности (названным в [2] преобразованием Хевисайда–Ламора–Райнича) и как следствие — установленную и [4, 5] 32-мерную алгебру инвариантности и соответствующую ей группу. В этом смысле можно говорить о потере симметричных свойств при переходе от описания электромагнитного поля в терминах тензора  $F(2)$  к описанию этого поля в терминах потенциала  $A = (A^\mu)$ .

### 3. Тензорная форма уравнений Максвелла

Общепринято требовать, чтобы функция Лагранжа для того или иного поля (или системы полей) была скаляром (псевдоскаляром) относительно группы Лоренца (или более широкой группы преобразований). И формулировка квантовой электродинамики именно в терминах потенциалов связана, видимо, с тем, что в терминах тензора напряженностей  $F(2)$  не существует скалярной функции Лагранжа, для которой уравнения Эйлера–Лагранжа (ЭЛ) совпадали бы непосредственно с уравнениями Максвелла (5). Справедливость этого утверждения очевидна уже из того, что лагранжева производная от скаляра по тензору 2-го ранга есть тензор  $\tilde{2}$ -го ранга, тогда как уравнения (5) имеют вид равенства нулю двух векторов  $\tilde{Q} = (Q^\mu - j^\mu)$  и  $R = (R^\mu)$  (3). Поэтому при построении

<sup>2</sup>Интересно отметить, что не существует  $C(1,3)$ -инвариантного подмножества решений системы уравнений (25). Действительно, равенство  $\square \hat{K}_\rho A_\mu = 0$  выполняется вместе с  $\square A_\mu = 0$  только при условиях  $\partial A = 0$  и  $2\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$ , а последнее эквивалентно условию  $A(x) = \text{const}$ .

$L$ -подхода для электромагнитного поля напряженностей  $F(2)$  естественно отказаться от стандартного требования (псевдо)скалярности функции Лагранжа и рассмотреть возможность построения  $L$ -подхода, использующего в качестве функции Лагранжа не скалярные коварианты. Ковариантом минимальной размерности, для которого уравнения ЭЛ эквивалентны уравнениям Максвелла (5), оказывается (см. раздел 4) вектор  $\mathcal{L}_\mu$  относительно собственной ортохронной группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  (псевдовектор относительно полной группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , включающей отражения); при использовании переменной  $\bar{F}$ , дуально сопряженной к  $F(2)$ , в качестве независимой лагранжевой переменной таким ковариантом оказывается (см. раздел 5) вектор  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  относительно полной группы Пуанкаре  $\bar{P}(1, 3)$ , и эта возможность является предпочтительной (в дальнейшем краткими терминами  $P$ -ковариант или  $\bar{P}$ -ковариант будем при необходимости различать коварианты относительно групп  $P(1, 3)$  или  $\bar{P}(1, 3)$ ).

Лагранжева производная от вектора  $\mathcal{L}_\mu$  по тензору 2-го ранга  $F(2)$  есть тензор 3-го ранга. Поэтому для построения  $L$ -подхода, основанного на концепции векторной функции Лагранжа, необходимо переписать уравнения Максвелла в виде равенства нулю тензора 3-го ранга.

**Теорема 1.** При любых  $ab \neq 0 \neq a'b'$  система уравнений

$$T_{\mu\rho\sigma} \equiv a[g_{\mu\rho}(Q_\sigma - j_\sigma) - g_{\mu\sigma}(Q_\rho - j_\rho)] + b\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R^\nu = 0, \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = \overline{0, 3}, \quad (26)$$

а также система уравнений

$$T'_{\mu\rho\sigma} \equiv a'(g_{\mu\rho}R_\sigma - g_{\mu\sigma}R_\rho) + b'\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(Q^\nu - j^\nu) = 0, \quad (27)$$

эквивалентна исходной системе уравнений Максвелла (5).

**Доказательство.** Если расписать тензора  $T_{\mu\rho\sigma}$  и  $T'_{\mu\rho\sigma}$  по компонентам, то легко убедиться, что из всех уравнений (26) или (27) независимы только 8 уравнений, причем уравнения  $T_{0\rho\sigma} = 0$  (или  $T'_{0\rho\sigma} = 0$ ) дают лишь первое и третье уравнения в системе (1), а уравнения  $T_{i\rho\sigma} = 0$  (или  $T'_{i\rho\sigma} = 0$ ) содержат всю систему уравнений (1) (т.е. все уравнения (5)).

Система уравнений (26) имеет вид равенства нулю тензора 3-го ранга относительно группы  $\bar{P}(1, 3)$ , тогда как система уравнений (27) имеет вид равенства нулю псевдотензора 3-го ранга этой группы. В этом смысле система (26) имеет преимущество над системой (27). При необходимости подчеркнуть указанное различие систем (26) и (27), систему (26) кратко называем  $\bar{P}$ -системой, а систему (27) —  $\bar{P}$ -псевдосистемой.

#### 4. $P$ -векторная функция Лагранжа

Наиболее общий вид  $P$ -векторной функции Лагранжа  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\mu)$ , которая может быть построена из тензоров  $F(2)$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $\mathcal{E}(3)$  и  $j(4)$  и для которой уравнения ЭЛ могут привести к уравнениям первого порядка для  $F(2)$ , с точностью до 4-дивергентных слагаемых таков:

$$\mathcal{L}_\mu = F_{\mu\alpha}(a_1Q^\alpha + a_2R^\alpha + q_1j^\alpha) + \varepsilon F_{\mu\alpha}(a_3Q^\alpha + a_4R^\alpha + q_2j^\alpha). \quad (28)$$

Производные Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\delta\mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_\mu}{\partial F^{\rho\sigma}} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}_\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_\nu}, \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad (29)$$

от функций (28) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}^\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} = & (a_1 - a_4)(g_{\mu\rho}Q_\sigma - g_{\mu\sigma}Q_\rho - F_{\mu\rho,\sigma} - F_{\sigma\mu,\rho}) + \\ & + a_2[2(g_{\mu\rho}R_\sigma - g_{\mu\sigma}R_\rho) + \varepsilon F_{\rho\sigma,\mu}] - a_3[2(\varepsilon F_{\mu\rho,\sigma} + \varepsilon F_{\sigma\mu,\rho} + \varepsilon F_{\rho\sigma,\mu}) - \\ & - q_1(g_{\mu\rho}j_\sigma - g_{\mu\sigma}j_\rho) - q_2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}j^\nu]. \end{aligned} \quad (30)$$

Из сравнения (30) с (26) и (27) с учетом тождества

$$-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Q^\nu = \varepsilon F_{\mu\rho,\sigma} + \varepsilon F_{\rho\sigma,\mu} + \varepsilon F_{\sigma\mu,\rho} \quad (31)$$

видно, что лагранжева производная (30) может совпадать только с тензором  $T'_{\mu\rho\sigma}$  в (27) и требование такого совпадения с необходимостью приводит к следующим условиям на коэффициенты в  $T'$  (27) и  $\mathcal{L}^\mu$  (28):

$$a' = -b' = 2a_2 = -2a_3 = -q_2, \quad a_1 - a_4 = q_1 = 0. \quad (32)$$

При этих условиях функция Лагранжа (28) принимает вид

$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu}) \equiv a_1(F^{\mu\nu}Q_\nu + \varepsilon F^{\mu\nu}R_\nu) + a_2[F^{\mu\nu}R_\nu - \varepsilon F^{\mu\nu}(Q_\nu - j_\nu)], \quad (33)$$

а ее уравнения ЭЛ —

$$\frac{\delta \mathcal{L}^\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} = T'_{\mu\rho\sigma} \equiv 2a_2[g_{\mu\rho}R_\sigma - g_{\mu\sigma}R_\rho - \varepsilon_{\mu\rho\sigma\nu}(Q^\nu - j^\nu)] = 0. \quad (34)$$

Воспользовавшись обозначениями (3) и тождеством

$$\varepsilon F^{\mu\alpha}\varepsilon F_{\alpha\beta}{}^{,\beta} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta,\mu} - F_{\alpha\beta}F^{\mu\beta,\alpha}, \quad (35)$$

распишем функцию (33) в более наглядном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F^{\alpha\beta}, F_{,\nu}^{\alpha\beta}) \equiv & a_1 \left( F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}{}^{,\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta,\mu} - F_{\alpha\beta}F^{\mu\beta,\alpha} \right) + \\ & + a_2(F^{\mu\alpha}\varepsilon F_{\alpha\beta}{}^{,\beta} - \varepsilon F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}{}^{,\beta} + \varepsilon F^{\mu\alpha}j_\alpha). \end{aligned} \quad (36)$$

Приведенное рассмотрение убеждает, что в  $L$ -подходе, базирующемся на концепции векторной функции Лагранжа (в векторном  $L$ -подходе), используются четыре функции  $\mathcal{L}^\mu : R^{30} \rightarrow R^1$  (33), порождающие четыре действия  $W^\mu : \Psi \rightarrow R^1$ , задаваемые формулами

$$W^\mu(F) \equiv \int d^4x \mathcal{L}^\mu(F(x), \partial_\nu F(x)), \quad F \in \Psi, \quad \mu = \overline{0,3} \quad (37)$$

(в качестве области  $\Psi$  определения действия (37) без ограничения общности рассмотрения можно выбрать, например, множество шестерок  $F(2)$  дважды непрерывно-дифференцируемых функций  $F^{\mu\nu}$  над  $R_x$ ). Следовательно, принцип наименьшего действия в векторном  $L$ -подходе формулируется иначе, чем в  $L$ -подходе, базирующемся на скалярной функции Лагранжа. А именно, в применении к электромагнитному полю  $F(2)$  принцип наименьшего действия в векторном  $L$ -подходе переформулируется в виде следующего утверждения.



**Теорема 2.** Пересечение  $\Psi = \cap \Psi_0^\mu$  множеств  $\Psi_0^\mu$  экстремалей четырех действий (37), задаваемых  $P$ -векторной функцией Лагранжа (33), совпадает с множеством решений уравнений Максвелла (1).

**Доказательство.** Справедливость этой теоремы следует из вычисленного выше явного вида (34) уравнений ЭЛ для (33) и из теоремы 1 эквивалентности системы  $T'$ -уравнений (27) уравнениям Максвелла (5), т.е. (1). Теорема доказана.

Итак, принцип наименьшего действия, сформулированный в форме теоремы 2 на основе  $P$ -векторной функции Лагранжа  $\mathcal{L}^\mu$  (33) в терминах тензора напряженностей  $F$  (2) и тензора скоростей  $F_{,\mu}$  как вариационных переменных, может дать только одну из двух систем (26), (27), эквивалентных исходной системе уравнений Максвелла (5), а именно,  $\tilde{P}$ -псевдосистему (27). Причем этот принцип устраняет произвол в константах  $a', b'$  в системе (27), после чего без ограничения общности можно положить  $a' = -b' = 1$ . Из доказательства теоремы 2 видно, что справедливо также утверждение.

**Следствие.** Из тензоров  $F^{\mu\nu}(2)$ ,  $F_{,\alpha}^{\mu\nu}$  и  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  нельзя построить  $P$ -векторной функции Лагранжа, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с  $\tilde{P}$ -системой (26).

Рассмотрим теперь вопрос о том, как вычисляются законы сохранения в векторном  $L$ -подходе.

**Теорема 3.** Пусть

$$\hat{q} : F(x) \rightarrow F'(x) = \hat{q}F(x) \tag{38}$$

— произвольное преобразование инвариантности уравнений Максвелла (5) с  $j = 0$ . Тогда тензор тока  $\tilde{\Theta}^\mu_\nu$ , построенный на основе  $\mathcal{L}^\mu$  (31) по формуле

$$\hat{q} \rightarrow \tilde{\Theta}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}} \hat{q}F^{\rho\sigma}, \tag{39}$$

симметричен и его дивергенция исчезает для любого решения уравнений (5) с  $j = 0$ :

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \tilde{\Theta}^{\nu\mu}, \quad \partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\nu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 0. \tag{40}$$

**Доказательство.** Для функции Лагранжа  $\mathcal{L}^\mu$  (33) находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}^\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}} = g^{\mu\alpha} (a_1 F_{\alpha\beta} + a_2 \varepsilon F_{\alpha\beta}) \Delta_{\rho\sigma}^{\beta\nu} + (a_2 F^{\mu\alpha} + a_1 \varepsilon F^{\mu\alpha}) \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} g^{\beta\nu}, \tag{41}$$

где

$$\Delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \equiv \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu. \tag{42}$$

С учетом тождеств

$$\Delta_{\rho\sigma}^{\beta\nu} F'^{\rho\sigma} = 2F'^{\beta\nu}, \quad \varepsilon F^{\mu\alpha} \varepsilon F'_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha} F'^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \delta_\beta^\mu F^{\rho\sigma} F'_{\rho\sigma} \tag{43}$$

для тока (39) получаем формулу

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = a_1 \Theta^{\mu\nu} + a_2 \Theta'^{\mu\nu}, \tag{44}$$

где

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}(F_{\alpha\beta}F'^{\beta\nu} + F'_{\alpha\beta}F^{\beta\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}, \quad (45)$$

$$\Theta'^{\mu\nu} = (F_{\alpha\beta}\varepsilon F'^{\beta\mu} - \varepsilon F_{\alpha\beta}F'^{\beta\mu})g^{\alpha\nu}. \quad (46)$$

С учетом тождества

$$-\varepsilon F_{\alpha\beta}F'^{\beta\mu} = F^{\mu\beta}\varepsilon F'_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\mu}F^{\rho\sigma}\varepsilon F'_{\rho\sigma} \quad (47)$$

для (46) получаем также представление

$$\Theta'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(F_{\alpha\beta}\varepsilon F'^{\beta\nu} + \varepsilon F'_{\alpha\beta}F^{\beta\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\varepsilon F'_{\alpha\beta}. \quad (48)$$

Отсюда видно, что

$$\Theta'^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}(\hat{q} \rightarrow \varepsilon\hat{q}), \quad \Theta^{\mu\nu} = \Theta'^{\mu\nu}(\hat{q} \rightarrow -\varepsilon\hat{q}). \quad (49)$$

Из представлений (45), (48) наглядно видна симметричность тензоров  $\Theta$ ,  $\Theta'$ , а вследствие (44) — симметричность тензора  $\tilde{\Theta}$  (39). Воспользовавшись антисимметричностью тензоров  $F^{\mu\nu}$  и  $F'^{\mu\nu}$  и уравнениями Максвелла (5) с  $j = 0$ , непосредственно убеждаемся, что  $\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Theta'^{\mu\nu} = 0$ ; это завершает доказательство равенств (40).

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение теоремы Нетер [10, 11] о законах сохранения на случай векторных лагранжианов, поскольку утверждение этой теоремы (формулы (39), (40)) оказывается справедливым для произвольного уравнения, допускающего векторную функцию Лагранжа такую, что  $\mathcal{L}^{\mu} = 0$  на множестве  $\Psi_0$  решений этого уравнения. Такое обобщение оказалось возможным, поскольку условия стандартной теоремы Нетер [10, 11] (детальную формулировку этих условий см. в [12, 13]) являются на самом деле только достаточными, но не необходимыми, как отмечено в [12, 13]. Проиллюстрируем здесь это утверждение на конкретном примере.

Часть преобразований инвариантности уравнений Максвелла являются одновременно преобразованиями инвариантности множеств экстремалей (т.е. уравнений ЭЛ) каждой из четырех функций Лагранжа  $\mathcal{L}^{\mu}$  (33) в отдельности. Для таких преобразований инвариантности ЗС следуют из стандартной теоремы Нетер [10, 11]. Например, оператор  $\partial_{\rho}$  пространственно-временных трансляций является генератором преобразования инвариантности уравнений ЭЛ для каждой из четырех функций  $\mathcal{L}^{\mu}$  (33).

Имеется, однако, множество преобразований инвариантности уравнений Максвелла (5), которые не являются преобразованиями инвариантности уравнений ЭЛ для некоторых из лагранжианов  $\mathcal{L}^{\mu}$  (33), но, тем не менее, как следует из теоремы 2, ток  $\Theta^{\mu\nu}$ , вычисленный по формуле (39), сохраняется. Примером такого преобразования является содержащееся в группе Пуанкаре преобразование пространственно-временных, т.е. чисто лоренцевых вращений, порождаемое генератором  $\hat{j}_{0k}$ , выписанным ниже. Действительно, для нулевой компоненты  $\mathcal{L}^0$  вектора  $\mathcal{L}^{\mu}$  (33) (с  $j = 0$ ) уравнения ЭЛ получаются в виде только части уравнений Максвелла:

$$Q_k = R_k = 0 \iff \partial_0 \vec{E} = \text{rot } \vec{H}, \quad \partial_0 \vec{H} = -\text{rot } \vec{E}. \quad (50)$$

А эти уравнения сами по себе (т.е. без привлечения остальных уравнений в (1)) не инвариантны относительно чисто лоренцевых вращений.

Приведем здесь доказательство этого утверждения, используя следующую форму уравнений Максвелла (1) (см. [2]):

$$\hat{L}_1\varphi = 0, \quad \hat{L}_2\varphi = 0, \quad (51)$$

где

$$\hat{L}_1 \equiv \begin{pmatrix} \partial_0 & -\vec{S}\vec{\partial} \\ \vec{S}\vec{\partial} & \partial_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_2 \equiv \begin{pmatrix} \text{div} & 0 \\ 0 & \text{div} \end{pmatrix}, \quad \varphi \equiv \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Так что в (52) оператор  $\vec{S}\vec{\partial} \equiv \text{rot}$ , а обозначение  $\text{div}$  в (52) есть следующая  $3 \times 3$ -матрица:

$$\text{div} \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

В этих обозначениях генератор  $\hat{j}_{0k}$  чисто лоренцевых вращений имеет вид

$$\hat{j}_{0k} = x_0\partial_k - x_k\partial_0 - S_{0k}, \quad (55)$$

где

$$S_{0k} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -S_k \\ S_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Непосредственным вычислением коммутаторов легко убедиться, что

$$[\hat{L}_1, \hat{j}_{0k}]\varphi = \hat{L}_1\varphi + \hat{L}_2\varphi. \quad (57)$$

Отсюда видно, что уравнения ЭЛ (50) для функции  $\mathcal{L}^0$  в (33), которые в терминах  $\varphi$  (52) имеют вид  $\hat{L}_1\varphi = 0$ , действительно не инвариантны относительно преобразований, порождаемых генератором  $j_{0k}$  (55). Тем не менее, как утверждает теорема 3, ток (39)  $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}(\hat{q} = j_{0k}) \equiv \tilde{\Theta}_{0k}^{\mu\nu}$ , соответствующий генератору  $\hat{J}_{0k}$  (55), сохраняется,  $\partial_\mu \tilde{\Theta}_{0k}^{\mu\nu} = 0$ .

Сделаем ряд замечаний о сохраняющихся токах (39), окончательно имеющих вид

$$\hat{q} \rightarrow \tilde{\Theta}^{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}} \hat{q} \hat{F}^{\rho\sigma} = (a_1\Theta + a_2\Theta')^{\mu\nu} \equiv a_1\Theta^{\mu\nu}(\hat{q}) + a_1\Theta^{\mu\nu}(\varepsilon\hat{q}), \quad (58)$$

где токи  $\Theta$  и  $\Theta'$  даны формулами (45) и (48) соответственно.

В формуле (58) токи  $\Theta$  и  $\Theta'$  при  $a_1$  и  $a_2$  сохраняются в отдельности, и вследствие (49) совокупность всех независимых ЗС, порождаемая некоторым множеством  $\{\hat{q}\}$  преобразований инвариантности свободных уравнений Максвелла по формуле (58), совпадает с совокупностью всех независимых ЗС, порождаемой

удвоенным набором преобразований инвариантности  $\{\hat{q}, \varepsilon\hat{q}\}$  по формуле (45) или (48). Таким образом, с точки зрения анализа независимых ЗС формула (58) содержит излишнюю информацию. Можно, конечно, положить  $a_1 = 0$  в  $\mathcal{L}^\mu$  (33) и, следовательно, в (58), и, как видно из (34), это не повлияет на уравнения ЭЛ для  $\mathcal{L}^\mu$  (именно такая “укороченная” функция Лагранжа предложена в [18]). Однако сопоставление “оператор симметрии — закон сохранения” по формуле (58) с  $a_1 = 0$ , т.е. по формуле (48), являются неестественным, если иметь в виду группу Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ . Действительно,  $\tilde{P}$ -тензорному генератору  $\hat{q}$  формула (48) ставит в соответствие  $\tilde{P}$ -псевдотензорный ток  $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}(\varepsilon\hat{q})$  и наоборот. Например, для вектора  $\partial_\rho$  трансляций формула (48) дает  $\tilde{P}$ -псевдотензор Липкина (Zilch) [22]:

$$\partial_\rho \rightarrow \Theta^{\mu\nu}(\hat{q} = \partial_\rho) = Z_\rho^{\mu\nu} \equiv (-F^{\mu\nu} \varepsilon F_{\alpha\beta, \rho} + \varepsilon F^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta, \rho}) g^{\beta\nu}. \quad (59)$$

Результат (59) — следствие того, что функция Лагранжа  $\mathcal{L}^\mu$  (33) с  $a_1 = 0$  есть  $\tilde{P}$ -псевдотензор. Естественное соответствие “ $\tilde{P}$ -ковариант  $\hat{q}$  —  $\tilde{P}$ -ковариант  $\Theta$ ” можно получить по формуле (58), если положить  $a_2 = 0$ . Функция  $\mathcal{L}^\mu$  (33) с  $a_2 = 0$  является  $\tilde{P}$ -вектором, но она не дает уравнений Максвелла или им эквивалентных. А соответствие (58) при  $a_1 a_2 \neq 0$  вообще не  $\tilde{P}$ -ковариантно, поскольку функция  $\mathcal{L}^\mu$  (33) с  $a_1 a_2 \neq 0$  не является  $\tilde{P}$ -ковариантом. Требование же  $\tilde{P}$ -векторности функции Лагранжа  $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$  (эквивалентное требованию  $a_2 = 0$  в (33)) превращает в тождества ее уравнения ЭЛ.

Детальный анализ сохраняющихся токов (45), (48) или (58) для генераторов  $\hat{q}$  различных конкретных алгебр приводится в следующем разделе. Здесь укажем на другие недостатки  $P$ -векторной функции Лагранжа  $\mathcal{L}^\mu$  (33). Эта функция неоправданно выделяет одну из двух полностью эквивалентных и релятивистски ковариантных систем (26), (27): как видно из теоремы 2 и ее следствия,  $P$ -векторная функция Лагранжа  $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$  может привести лишь к  $\tilde{P}$ -псевдосистеме (27), причем только  $\tilde{P}$ -псевдовекторное слагаемое в  $\mathcal{L}^\mu$  (33) вносит вклад в уравнения ЭЛ, тогда как в выражение (58) для ЗС вносит вклад и  $\tilde{P}$ -векторное слагаемое в (31). И, как ясно из доказательства теоремы 2, вообще не существует  $\tilde{P}$ -векторной функции  $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$ , которая могла бы привести к уравнениям Максвелла или им эквивалентным. Наконец, как видно из (33), лагранжиан взаимодействия в этой модели является  $\tilde{P}$ -псевдовектором:

$$\mathcal{L}^{I\mu} = a_2 \varepsilon F^{\mu\nu} j_\nu, \quad \mathcal{L}^{I0} = a_2 \vec{j} \cdot \vec{H}, \quad \mathcal{L}^{Ii} = a_2 (\vec{j} \times \vec{E} - \rho \vec{H})^i. \quad (60)$$

Физическая неудовлетворительность такого взаимодействия ясна уже из того, что плотность электрического заряда  $\rho = j^0$  в (60) оказывается здесь связанной не с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ , а с напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ .

### 5. $\tilde{P}$ -векторная функция Лагранжа

Оказывается возможным устранить все указанные выше недостатки векторного  $L$ -подхода и построить  $L$ -подход на базе  $\tilde{P}$ -векторной функции Лагранжа в терминах напряженностей, если помимо лагранжевых переменных  $F, F_{,\mu}$ , ввести в качестве независимых лагранжевых переменных дуально сопряженные к ним переменные  $\bar{F}, \bar{F}_{,\mu}$ . Общий вид  $\tilde{P}$ -векторной функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu(F, F_{,\nu}, \bar{F}, \bar{F}_{,\nu}), \quad \mathcal{L}_\mu : R^{60} \rightarrow R^1,$$

с точностью до 4-дивергентных слагаемых таков:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu = & a_1 F_{\mu\nu} Q^\nu + a_2 F_{\mu\nu} \bar{R}^\nu + a_3 \varepsilon F_{\mu\nu} R^\nu + a_4 \varepsilon F_{\mu\nu} \bar{Q}^\nu + a_5 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{Q}^\nu + \\ & + a_6 \bar{F}_{\mu\nu} R^\nu + a_7 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} \bar{R}^\nu + a_8 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} Q^\nu + (q_1 F_{\mu\nu} + q_2 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu}) j^\nu. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь, помимо обозначений (3), использованы также обозначения

$$\bar{Q}^\mu \equiv \bar{F}^{\mu\nu}, \quad \bar{R}^\mu \equiv \varepsilon \bar{F}^{\mu\nu}, \quad \varepsilon \bar{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{F}^{\rho\sigma}. \quad (62)$$

Лагранжевы производные от функции (61) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} = & (a_1 - a_2 - a_3 - a_6)(g_{\mu\rho} Q_\sigma - g_{\mu\sigma} Q_\rho) + (a_4 - a_6) F_{\rho\sigma, \mu} + \\ & + (-a_1 + a_3 + a_4 + a_8)(F_{\mu\rho, \sigma} + F_{\sigma\mu, \rho}) + q_1(g_{\mu\rho} j_\sigma - g_{\mu\sigma} j_\rho), \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \bar{F}^{\rho\sigma}} = & (a_2 + a_5 + a_6 - a_7)(g_{\mu\rho} R_\sigma - g_{\mu\sigma} R_\rho) + (a_2 - a_8) \varepsilon F_{\rho\sigma, \mu} - \\ & - (a_4 + a_5 - a_7 + a_8)(\varepsilon F_{\mu\rho, \sigma} + \varepsilon F_{\sigma\mu, \rho}) + q_2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j^\nu, \end{aligned} \quad (64)$$

Из сравнения (63) и (64) с (26) и (27) с учетом тождеств (31) и

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^\sigma = F_{(\mu\nu, \rho)} \equiv F_{\mu\nu, \rho} + F_{\nu\rho, \mu} + F_{\rho\mu, \nu} \quad (65)$$

видно, что уравнения ЭЛ для  $\mathcal{L}_\mu$  (61) дают обе системы уравнений (26) и (27) при следующих условиях на коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 - a_3 - a_6 = -q_1 = a \neq 0, \quad a_4 - a_6 = -a_1 + a_3 + a_4 + a_8 = b \neq 0, \\ a_2 + a_5 + a_6 - a_7 = a' \neq 0, \quad -a_2 + a_8 = a_4 + a_5 - a_7 + a_8 = -q_2 = b' \neq 0, \end{aligned} \quad (66)$$

которые эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} a_8 - a_2 = a = -b' = -q_1 \equiv q \neq 0, \quad a_6 - a_4 = a' = -b \neq 0, \\ a_1 - a_3 - a_6 - a_8 = a_2 + a_4 + a_5 - a_7 = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Таким образом, здесь доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пересечение  $\Psi_0 = \bigcap_{\mu} \Psi_0^\mu$  множеств  $\Psi_0^\mu$  экстремалей четырех действий

$$\begin{aligned} W^\mu(F, \bar{F}) = \int d^3x \mathcal{L}^\mu(F(x), \bar{F}(x), \partial_\nu F(x), \partial_\nu \bar{F}(x)), \\ F, \bar{F} \in \Psi, \quad \mu = \bar{0}, \bar{3}, \end{aligned} \quad (68)$$

задаваемых функцией Лагранжа  $\mathcal{L}_\mu$  (61), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (67), совпадает с множеством решений уравнений Максвелла (1).

Интересно отметить, что, в отличие от функции Лагранжа  $\mathcal{L}_\mu$  (33),  $\bar{P}$ -векторная функция Лагранжа  $\mathcal{L}_\mu$  (61), построение которой стало возможным лишь благодаря привлечению дуально сопряженной переменной  $\bar{F}$  в качестве независимой лагранжевой переменной, не выделяет какую-либо из эквивалентных систем (26), (27), в том числе и при наличии взаимодействия с током:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} = T_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \bar{F}^{\rho\sigma}} = T'_{\mu\rho\sigma} = 0. \quad (69)$$

Кроме того, как видно из (26), (27) и (69), сформулированный теоремой 4 принцип наименьшего действия, основанный на  $\mathcal{L}_\mu$  (61), не требует никаких ограничений на отношения  $a/b$  или  $a'/b$ , и это естественно, поскольку каждая из систем уравнений ЭЛ (69) эквивалентна системе уравнений Максвелла (1) при любых значениях отношений  $a/b \neq 0$ ,  $a'/b \neq 0$ .

Формула для токов  $\Theta_\nu^\mu$ , соответствующих генераторам  $\hat{q}$ , при наличии переменной  $\bar{F}$  приобретает вид

$$\hat{q} \rightarrow \Theta_\nu^\mu \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\mu}} F'^{\rho\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial \bar{F}^{\rho\sigma}_{,\mu}} \bar{F}'^{\rho\sigma} \right), \quad (70)$$

где  $F' \equiv \hat{q}F$ ,  $\bar{F}' \equiv \overline{\hat{q}F} = \varepsilon \hat{q}F$ . Для  $\mathcal{L}_\mu$  (61) получаем (при  $j = 0$ ):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\mu}} = (a_1 - a_8) F_{\nu\alpha} \Delta_{\rho\sigma}^{\alpha\mu} + (a_3 + a_6) \varepsilon F_{\nu\alpha} \mathcal{E}_{\rho\sigma}^{\alpha\mu}, \quad (71a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial \bar{F}^{\rho\sigma}_{,\mu}} = (a_2 - a_7) F_{\nu\alpha} \mathcal{E}_{\rho\sigma}^{\alpha\mu} + (a_4 + a_5) \varepsilon F_{\nu\alpha} \Delta_{\rho\sigma}^{\alpha\mu}. \quad (71b)$$

Подстановка (71) в (70) дает

$$\Theta_\nu^\mu = (a_1 - a_2 + a_7 - a_8) F_{\nu\alpha} F'^{\alpha\mu} + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \varepsilon F_{\nu\alpha} \varepsilon F'^{\alpha\mu}. \quad (72)$$

С учетом предпоследнего равенства в (67) и тождества

$$\varepsilon F_{\nu\alpha} \varepsilon F'^{\alpha\mu} = F^{\mu\alpha} F'_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \quad (73)$$

для тока (70) окончательно получаем

$$\hat{q} \rightarrow \Theta_\nu^\mu = A (F^{\mu\alpha} F'_{\alpha\nu} + F'^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}), \quad (74)$$

где

$$A \equiv a_1 - a_2 + a_7 - a_8 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6. \quad (75)$$

Итак, ток (70) для лагранжиана (61) задается формулой (70), т.е. совпадает со слагаемым при  $a_1$  в формуле (44) для тока, порождаемого лагранжианом (33). Это означает, что  $\bar{P}$ -векторный лагранжиан  $\mathcal{L}_\mu$  (61), в отличие от  $P$ -векторного лагранжиана  $\mathcal{L}_\mu$  (33), приводит к правильной тензорной структуре сохраняющихся токов для любых преобразований инвариантности в том смысле, что тензорным (псевдотензорным) генераторам  $\hat{q}$  формула (74) ставит в соответствие тензорные (псевдотензорные) сохраняющиеся токи. Заметим, что тензор  $\Theta^{\mu\nu}$  (74) симметричен, поэтому его дивергенция исчезает относительно любого из индексов:  $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0$ .

Функция (61) обладает и тем преимуществом по сравнению с функцией (33), что все ее слагаемые вносят вклад как в уравнения ЭЛ (69), так и в законы сохранения (70).

Приведем анализ сохраняющихся токов (74) для генераторов  $\hat{q} = (\partial, \hat{j}, \hat{d}, \hat{K})$  конформной алгебры  $C(1, 3)$  инвариантности свободных уравнений Максвелла (1)

(т.е. с  $j = 0$ ), напомним, что генераторы  $\hat{q} \in C(1, 3)$  в терминах тензора напряженностей  $F$  (2) имеют вид (16) с  $\tau = -2$  и  $S_{\mu\nu}$  (17). Положив  $A = 1$ , находим, что генераторы  $\partial_\rho$  по формуле (74) дают тривиальный ток:

$$\partial_\rho \rightarrow \Theta^{\mu\nu}(\hat{q} = \partial_\rho) = (\partial_\rho)^{\mu\nu} \equiv \partial_\rho T^{\mu\nu}. \quad (76)$$

Здесь появляется стандартный тензор энергии-импульса для поля  $F = (\vec{E}, \vec{H})$ :

$$T_\nu^\mu = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad T_\mu^0 = \mathcal{P}_\mu, \quad (77)$$

$$\mathcal{P}_0 \equiv \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad \mathcal{P}_j \equiv (\vec{E} \times \vec{H})_j. \quad (78)$$

Для анализа интегральных сохраняющихся величин

$$\bar{\Theta}^\mu = \int d^3x \Theta^{0\mu}(x) = \text{const}, \quad \Theta^{0\mu}(x) = \Theta^{0\mu}(\hat{q}) \equiv (\hat{q})^{0\mu}, \quad (79)$$

достаточно привести плотности  $\Theta^{0\mu}$ , опуская слагаемые с пространственными производными, не вносящие вклад в интеграл  $\bar{\Theta}^\mu$  (79). Из формулы (74) получаем для плотностей  $\Theta^{0\mu}$ , соответствующих остальным генераторам алгебры  $C(1, 3)$ :

$$\hat{J}_{\rho\sigma} \rightarrow J_{\rho\sigma}^{0\mu} = \delta_\rho^\mu \mathcal{P}_\sigma - \delta_\sigma^\mu \mathcal{P}_\rho, \quad \hat{d} \rightarrow D^{0\mu} = \mathcal{P}^\mu, \quad (80)$$

$$\hat{K}_\rho \rightarrow \mathcal{K}_\rho^{0\mu} = 2(\delta_\rho^\mu \mathcal{D} + J_{\rho\sigma} g^{\sigma\mu}), \quad (81)$$

где

$$\mathcal{D} \equiv x^\mu \mathcal{P}_\mu, \quad J_{\rho\sigma} \equiv x_\rho \mathcal{P}_\sigma - x_\sigma \mathcal{P}_\rho. \quad (82)$$

Как видно,  $C(1, 3)$ -генераторы (16) приводят в соответствии с формулами (74), (79) к сохраняющимся величинам, выражены через хорошо известную серию основных сохраняющихся величин для электромагнитного поля  $F = (\vec{E}, \vec{H})$ , полученную еще Бессель-Хагеном [23] на основе  $L$ -подхода для векторного поля  $A = (A^\mu)$  потенциалов, а именно следующую серию:

$$P_\rho = \int d^3x \mathcal{P}_\rho(x), \quad J_{\rho\sigma} = \int d^3x (x_\rho \mathcal{P}_\sigma(x) - x_\sigma \mathcal{P}_\rho(x)), \quad (83)$$

$$D = \int d^3x \mathcal{D}(x), \quad K_\rho = \int d^3x (2x_\rho \mathcal{D}(x) - x^2 \mathcal{P}_\rho(x)).$$

Интересно отметить, что ввиду тождества

$$F^{\mu\nu} \varepsilon F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_\alpha^\mu F^{\alpha\beta} \varepsilon F_{\alpha\beta} = 0, \quad (84)$$

преобразование дуальности  $\varepsilon$  дает по формуле (74) тождественный нуль,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Нетривиальные ЗС дают генераторы установленной в [3, 4] алгебры  $A_{32} \supset C(1, 3)$  инвариантности (свободных) уравнений Максвелла (1), имеющие вид композиции  $\hat{q}' = \varepsilon \hat{q}$   $C(1, 3)$ -генераторов  $\hat{q}$  (16) и генератора  $\varepsilon$ . Интегральные сохраняющиеся величины, вычисленные по формулам (70), (79) для  $\varepsilon C(1, 3)$ -генераторов  $\hat{q}' =$

$(\varepsilon\partial, \varepsilon^{\hat{c}}j, \varepsilon\hat{d}, \varepsilon\hat{K})$ , выражаются через серию сохраняющихся величин, найденную Линкиным [22] и другими авторами [24–28], не используя лагранжев подход:

$$\begin{aligned} Z_{\rho}^{\mu} &= \int d^3x Z_{\rho}^{\mu}(x), & Z_{\rho\sigma}^{\mu} &= \int d^3x (x_{\rho}Z_{\sigma}^{\mu} - x_{\sigma}Z_{\rho}^{\mu}), \\ Z^{\mu} &= \int d^3x x^{\nu}Z_{\nu}(x), & \overset{c}{Z}_{\rho}^{\mu} &= \int d^3x (2x_{\rho}x^{\sigma}Z_{\sigma} - x^2Z_{\rho}^{\mu}), \end{aligned} \quad (85)$$

где плотности  $Z$  сохраняющихся величин (85) выражаются через тензор Линкина

$$Z_{\rho}^{\mu} \equiv Z_{\rho}^{0|\mu}, \quad Z_{\rho}^{\nu|\mu} = F^{\nu\alpha}\varepsilon F_{\alpha\rho}^{\cdot\mu} - \varepsilon F^{\nu\alpha}F_{\alpha\rho}^{\cdot\mu}. \quad (86)$$

Сохраняющиеся велиины (85) [22, 26, 27] (см. также [4, 6, 7–9]), тождественно равны нулю для линейно поляризованных волн  $F = (\vec{E}, \vec{H})$  и отличны от нуля только для циркулярно поляризованных состояний электромагнитного поля, причем максимум достигается при круговой поляризации поля  $F = (\vec{E}, \vec{H})$ . Из-за отмеченного поляризационного характера ЗС (85), которым они существенно отличаются от ЗС (83), дополнительные к (83) ЗС (85) можно считать второстепенными по сравнению с основными ЗС (83).

## 6. Векторный $L$ -подход для спинорного поля и взаимодействующих полей

Для введения взаимодействия тензорного электромагнитного поля  $F = (\vec{E}, \vec{H})$  и спинорного поля  $\Psi$  прежде всего необходимо переписать стандартное уравнение Дирака в следующей эквивалентной форме [29] (которую назовем уравнением Дирака в векторной форме):

$$\gamma_{\mu}(i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\Psi(x) \equiv (\hat{p}_{\mu} - 2i\hat{S}_{\mu\nu}p^{\nu} - m\gamma_{\mu})\Psi(x) = 0, \quad (87)$$

где

$$\hat{p}_{\mu} \equiv i\partial_{\mu}, \quad \hat{S}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - g_{\mu\nu}), \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad \Psi = (\Psi^{\alpha}). \quad (88)$$

Разумеется, система 16 уравнений (87) эквивалентна стандартному уравнению Дирака

$$(i\gamma_{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0 \iff (i\gamma_{\mu}\partial_{\mu} - m)_{\beta}^{\alpha}\Psi^{\beta}(x) = 0 \quad (89)$$

(т.е. системе четырех уравнений для  $\Psi^{\alpha}$ ). Более того, уравнение (87) с любым фиксированным  $\mu \in \overline{0, 4}$  эквивалентно уравнению (89).

С учетом равенств

$$\bar{\gamma}_{\mu} \equiv \gamma_0\gamma_{\mu}^{\dagger}\gamma_0 = \gamma_{\mu}, \quad \bar{S}_{\mu\nu} = \hat{S}_{\mu\nu}, \quad \bar{p}^{\mu} = -\hat{p}^{\mu}, \quad (90)$$

из (87) следует, что уравнение для спинора  $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\gamma^0$  (сопряженного по Дираку спинора  $\bar{\Psi}$ ) имеет вид

$$\bar{\Psi}(-\overleftarrow{p}_{\mu} - 2iS_{\mu\nu}\overleftarrow{p}_{\nu} - m\gamma_{\mu}) = 0, \quad \bar{\Psi}\overleftarrow{p}_{\mu} \equiv i\partial_{\mu}\bar{\Psi} = i\bar{\Psi}_{,\mu}. \quad (91)$$

**Теорема 5.** *Не существует функции Лагранжа в терминах независимых лагранжевых переменных  $\Psi, \bar{\Psi}$ , для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнениями (87), (91).*



**Доказательство.** Общий вид вектор-функции в переменных  $\Psi, \bar{\Psi}, \Psi_{,\mu}, \bar{\Psi}_{,\mu}$ , для которой уравнения ЭЛ являются уравнениями 1-го порядка по переменной  $x$ , таков:

$$\mathcal{L}_\mu = a_1 \bar{\Psi} \Psi_{,\mu} + a_2 \bar{\Psi}_{,\mu} \Psi + a_3 \bar{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi^{,\nu} + a_4 \bar{\Psi}^{,\nu} S_{\mu\nu} \Psi + a_5 \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi. \quad (92)$$

Лагранжевы производные от функции (92) имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \Psi} = (a_2 - a_1) \bar{\Psi}_{,\mu} + (a_4 - a_3) \bar{\Psi}^{,\nu} S_{\mu\nu} + a_5 \bar{\Psi} \gamma_\mu, \quad (93)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \bar{\Psi}} = (a_1 - a_2) \Psi_{,\mu} + (a_3 - a_4) S_{\mu\nu} \Psi^{,\nu} + a_5 \gamma_\mu \Psi. \quad (94)$$

Как видно, требование одновременного выполнения равенств

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} = -i \bar{\Psi}_{,\mu} + 2 \bar{\Psi}^{,\nu} S_{\mu\nu} - m \bar{\Psi} \gamma_\mu, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\Psi}} = i \Psi_{,\mu} + 2 S_{\mu\nu} \Psi^{,\nu} - m \gamma_\mu \Psi \quad (95)$$

противоречиво:  $a_4 - a_3 = 2 = a_3 - a_4$ . Теорема доказана.

**Замечание 3.** Уравнение (87) с  $\mu = 0$  есть хорошо известное уравнение Дирака в форме Шредингера, которое выпишем вместе с эрмитово сопряженным и сопряженным по Дираку уравнением:

$$i \Psi_{,0} = (-i \gamma^0 \gamma^k \Psi_{,k} + \gamma^0 m \Psi), \quad (96)$$

$$-i \Psi^\dagger_{,0} = i \Psi^\dagger_{,k} \gamma^0 \gamma^k + m \Psi^\dagger, \quad (97)$$

$$-i \bar{\Psi}_{,0} = -i \bar{\Psi}_{,k} \gamma^0 \gamma^k + m \bar{\Psi}. \quad (98)$$

Теорема 4 утверждает, в частности, что не существует функции Лагранжа в переменных  $\Psi, \bar{\Psi}$ , для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнениями (96), (98). В то же время, существует функция Лагранжа в терминах  $\Psi, \Psi^\dagger$ , для которой уравнения ЭЛ совпадают с уравнениями (96), (97).

Этот пример убеждает, что для построения  $L$ -подхода, ассоциированного с уравнением (87) с произвольно фиксированным  $\mu$ , необходимо использовать сопряжение, отличное от сопряжения по Дираку. Подходящим оказывается следующее сопряжение:

$$\Psi \rightarrow \overset{\mu}{\bar{\Psi}} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu, \quad (\gamma^0 \gamma^\mu)^{-1} = (\gamma^0 \gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu, \quad (99)$$

которое назовем  $\mu$ -сопряжением. Учтывай, что

$$\overset{\mu}{\gamma}_\mu \equiv \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu = \gamma_\mu, \quad \overset{\mu}{S}_{\mu\nu} = -\hat{S}_{\mu\nu}, \quad \overset{\mu}{p}^\nu = -\hat{p}^\nu, \quad \mu - ns \quad (100)$$

(символ  $\mu - ns$  означает, что в (100) и всюду ниже  $\mu$  фиксировано, по нему суммирование не подразумевается), из (87) находим, что уравнение для  $\mu$ -сопряженного спинора в (99) имеет вид

$$\overset{\mu}{\bar{\Psi}} (-\overset{\leftarrow}{p}_\mu + 2i S_{\mu\nu} \overset{\leftarrow}{p}^\nu - m \gamma_\mu) = 0, \quad \mu - ns. \quad (101)$$

Важно отметить, что не только при сопряжении по Дираку, но и при  $\mu$ -сопряжении (99) уравнение (87) переходит в явно ковариантное уравнение.

Общий вид вектор-функции Лагранжа (101) в терминах  $\Psi$ ,  $\overset{\mu}{\Psi}$ , для которой уравнения ЭЛ могут совпадать с уравнениями (87), таков:

$$\mathcal{L}_\mu = a_1 \overset{\mu}{\Psi} \Psi_{,\mu} + a_2 \overset{\mu}{\Psi}_{,\mu} \Psi + a_3 \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi^{,\nu} + a_4 \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi + a_5 \overset{\mu}{\Psi} \gamma_\mu \Psi, \quad \mu - ns. \quad (102)$$

Для этой функции лагранжевы производные имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \Psi} = (a_2 - a_1) \overset{\mu}{\Psi}_{,\mu} + (a_4 - a_3) \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\nu} + a_5 \overset{\mu}{\Psi} \gamma_\mu, \quad \mu - ns, \quad (103)$$

а  $\delta \mathcal{L}_\mu / \delta \overset{\mu}{\Psi}$  совпадает с правой частью (94). Теперь требование одновременного выполнения равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\delta \Psi} &= -i \overset{\mu}{\Psi}_{,\mu} - 2 \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\nu} - m \overset{\mu}{\Psi} \gamma_\mu, \\ \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \overset{\mu}{\Psi}} &= i \Psi_{,\mu} + 2 S_{\mu\nu} \Psi^{,\nu} - m \gamma_\mu \Psi, \quad \mu - ns, \end{aligned} \quad (104)$$

приводит к условиям

$$a_1 - a_2 = i, \quad a_3 - a_4 = 2, \quad a_5 = -m. \quad (105)$$

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 6.** Для уравнения (87) векторная функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu &= \frac{i}{2} \left( \alpha_1 \overset{\mu}{\Psi} \Psi_{,\mu} - \alpha_2 \overset{\mu}{\Psi}_{,\mu} \Psi \right) + \left( \alpha_3 \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi^{,\nu} - \alpha_4 \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\nu} \Psi \right) - \\ &\quad - m \overset{\mu}{\Psi} \gamma_\mu \Psi, \quad \mu - ns, \end{aligned} \quad (106)$$

где константы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  удовлетворяют условиям

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 1. \quad (107)$$

Заметим, что произвол в этих константах влияет на  $\mathcal{L}_\mu$  лишь с точностью до 4-дивергенции, поэтому наблюдаемые величины не зависят от этого произвола.

Для любой пары  $\Psi, \Psi'$  решений уравнения Дирака (т.е. для любого преобразования инвариантности  $\Psi \rightarrow \Psi' = \hat{q}\Psi$  уравнения (89) или эквивалентного ему уравнения (87)) сохраняющиеся токи, вычисляемые по функции Лагранжа (106) на основе теоремы 3 (формула (39)), имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_\mu^\nu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial \Psi^{,\nu}} \Psi' + \overset{\mu}{\Psi}' \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial \overset{\mu}{\Psi}_{,\nu}} = \frac{i}{2} \left( \alpha_1 \overset{\mu}{\Psi} \Psi' - \alpha_2 \overset{\mu}{\Psi}' \Psi \right) \delta_\mu^\nu + \\ &\quad + \left( \alpha_3 \overset{\mu}{\Psi} S_{\mu\alpha} \Psi' - \alpha_4 \overset{\mu}{\Psi}' S_{\mu\alpha} \Psi \right) g^{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (108)$$

Токи (108) сохраняются только при условиях

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_4, \quad (109)$$

при которых функция Лагранжа (106) выглядит как

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{\alpha_1}{2} \bar{\Psi}^\mu (i\Psi_{,\mu} + 2S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu}) - \frac{\alpha_2}{2} \left( i\bar{\Psi}_{,\mu}^\mu + 2\bar{\Psi}^{\mu,\nu} S_{\mu\nu} \right) \Psi - m\bar{\Psi}^\mu \gamma_\mu \Psi, \quad (110)$$

$$\mu - ns, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)/2 = 1,$$

а токи (108) приобретают следующую форму:

$$\tau_\mu^\nu = \alpha_1 \tau_{1\mu}^\nu - \alpha_2 \tau_{2\mu}^\nu, \quad (111)$$

где

$$\tau_{1\mu}^\nu = \bar{\Psi}^\mu \left( \frac{i}{2} \delta_\mu^\nu + S_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} \right) \Psi', \quad \tau_{2\mu}^\nu = \tau_{1\mu}^\nu \Big|_{\Psi \leftrightarrow \Psi'}. \quad (112)$$

Используя уравнение Дирака в векторной форме (87) и построенную для него векторную функцию Лагранжа (110), легко выписать функцию Лагранжа для системы локально взаимодействующих электромагнитного  $F = (\vec{E}, \vec{H})$  и спинорного  $\Psi$  полей. Для этого ток  $j = (j^\nu)$  в функции Лагранжа (61) (описывающей поле  $F$ , взаимодействующее с электрическим током  $j$ ) следует понимать как ток спинорного поля и записать его через  $\mu$ -сопряженные спиноры  $\Psi, \bar{\Psi}$  с данным (произвольно фиксированным)  $\mu = \overline{0, 3}$ :

$$j^\nu \equiv e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi = e \bar{\Psi}^\mu \gamma^\mu g^{\mu\nu} \gamma^\nu \Psi, \quad \mu - ns. \quad (113)$$

Интересно отметить, что векторная функция Лагранжа для системы взаимодействующих полей  $F$  и  $\Psi$ , образованная сложением функции (110) и функции (61) с током  $j^\nu$  (113) при условиях (67), не приводит к уравнению Дирака со взаимодействием с полем  $F$ , поскольку в физической области, где  $\bar{F} = \varepsilon F$ ,

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu^I}{\delta \bar{\Psi}} \equiv (q_1 F_{\mu\nu} + q_2 \bar{F}_{\mu\nu}) \gamma^\mu g^{\mu\nu} e \gamma^\nu \Psi = 0, \quad \mu - ns, \quad (114)$$

из-за содержащегося в (67) условия  $q_1 = q_2$ . Этот результат есть следствие исходного предположения  $q_1 q_2 \neq 0$ . Можно, однако, с самого начала положить в  $\mathcal{L}_\mu$  (61)  $q_2 = 0$ , в качестве уравнения для электромагнитного поля  $F$  с током  $j \neq 0$  использовать лишь  $\tilde{P}$ -тензорное уравнение (26), а  $\tilde{P}$ -псевдотензорное уравнение (27) считать допустимым лишь при  $j = 0$ , когда теория дуально инвариантна и когда уравнения (26) при замене  $F \rightarrow \varepsilon F \Rightarrow Q \rightarrow R, R \rightarrow -Q$  переходят в уравнения (27) (заметим, что при  $j \neq 0$  указанная замена не связывает уравнения (26) и (27), что отражает отсутствие дуальной инвариантности теории с  $j \neq 0$  и оправдывает выделение в этом случае  $\tilde{P}$ -системы (26), как основной). При указанных выше условиях векторная функция Лагранжа для системы взаимодействующих электромагнитного  $F = (\vec{E}, \vec{H})$  и спинорного  $\Psi$  полей принимает вид

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu^F + \mathcal{L}_\mu^\Psi + \mathcal{L}_\mu^I, \quad (115)$$

где  $\mathcal{L}_\mu^F$  дано формулой (61) с  $j = 0$ ,  $\mathcal{L}_\mu^\Psi$  — формулой (110), а

$$\mathcal{L}_\mu^I = -aF_{\mu\nu}e^{\frac{\mu}{\nu}}\bar{\Psi}\gamma^\mu g^{\mu\mu}\gamma^\nu\Psi, \quad \mu - ns. \quad (116)$$

С учетом эквивалентности системы (26) исходной системе уравнений Максвелла (5), т.е. (1), полная система уравнений, на основе функции Лагранжа (115), имеет вид

$$Q_\mu - e\Psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\Psi = 0, \quad R_\mu = 0, \quad (117)$$

$$[-aeF_{\mu\nu}\gamma^\mu g^{\mu\mu}\gamma^\nu + \gamma_\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)]\Psi = 0, \quad \mu - ns. \quad (118)$$

Умножив уравнение (118) на  $\gamma^\mu$  слева и просуммировав по  $\mu$ , получим следующее уравнение для спинорного поля  $\Psi$ , взаимодействующего с полем  $F$ :

$$\left[-\frac{ea}{4}(F_{0\nu} + F_{1\nu} + F_{2\nu} + F_{3\nu})\gamma^\nu + i\gamma^\nu\partial_\nu - m\right]\Psi = 0, \quad (119)$$

которое в терминах напряженностей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , имеет вид

$$\left\{\frac{ea}{4}\left[\vec{E}\vec{\gamma} - \gamma^0(E^1 + E^2 + E^3) + (\vec{H} \times \vec{\gamma})^1 + (\vec{H} \times \vec{\gamma})^2 + (\vec{H} \times \vec{\gamma})^3\right] + i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right\}\Psi = 0. \quad (120)$$

Построенную теорию легко обобщить на случай взаимодействия поля ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) с полем произвольной массы и спина. Для этого вместо уравнения (87) следует использовать другое уравнение Дирака в векторной форме [29], а именно:

$$\gamma_\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu - \gamma_4m)\Psi \equiv (\hat{p}_\mu - 2iS_{\mu\nu}\hat{p}^\nu - 2iS_{\mu 4}m)\Psi = 0. \quad (121)$$

Это уравнение, как и уравнение (87), есть результат иного способа “извлечения квадратного корня” из уравнения Клейна–Гордона (ср. замечание 3 в [29]).

Здесь, как и в случае уравнения (87), не существует функции Лагранжа в терминах  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$ , для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнением (121) и сопряженным к нему по Дираку. В терминах же  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$  функция Лагранжа для уравнения (121) имеет вид

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{\alpha_1}{2}\bar{\Psi}(i\Psi_{,\mu} + 2S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu}) - \frac{\alpha_2}{2}(i\bar{\Psi}_{,\mu} + 2\bar{\Psi}^{,\nu}S_{\mu\nu})\Psi - 2im\bar{\Psi}S_{\mu 4}\Psi, \quad (122)$$

$$\mu - ns, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1.$$

Заметим, что сохраняющийся ток, вычисляемый по формуле (108) с  $\mathcal{L}_\mu$  (122), совпадает с током (111), а взаимодействие с электромагнитным полем вводится по аналогии с предыдущим случаем.

Для теории с произвольным спином уравнение, аналогичное (121), имеет вид

$$(\hat{p}_\mu - 2iS_{\mu N}\hat{p}^N)\Psi = 0, \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad N = \overline{0, 4}, \quad (123)$$

где  $\hat{p}^4 = m$ , а  $S_{MN}$  ( $M, N = \overline{0, 4}$ ) являются генераторами подходящих матричных представлений однородной группы Де Ситтера  $O(1, 4)$ . Для этого уравнения функция Лагранжа и сохраняющиеся токи строятся в полной аналогии с предыдущим

случае, включая и вопрос о введении взаимодействия поля  $\Psi$  в (123) с полем  $F = (\vec{E}, \vec{H})$ .

Наконец, отметим известный еще со времен Дирака факт, что наличие магнитных монополей лишь улучшает красоту и симметрию теории электромагнетизма. Это в полной мере относится и к построенной здесь на основе векторных лагранжианов модели, в которую магнитный монополь естественным образом включается добавлением к функции Лагранжа (115) члена с магнитным током и зарядом. Заметим, что при этом установленная в [4, 5] 32-мерная алгебра инвариантности  $A_{32}$ , которая раньше имела место только для свободных уравнений Максвелла, может быть сохранена и при включении взаимодействия, если потребовать дуальной симметрии и для токов, т.е., чтобы при преобразовании  $F \rightarrow \epsilon F$  токи преобразовывались как

$$j \rightarrow \bar{j}, \quad \bar{j} \rightarrow -j, \quad (124)$$

где  $j = (j^\mu)$  — обычный электрический 4-вектор тока, а  $\bar{j} = (\bar{j}^\mu)$  — магнитный ток, создаваемый монополями.

### 7. Некоторые комментарии и выводы

Перечислим основные свойства построенной здесь лагранжевой модели для электромагнитного поля в терминах напряженностей и системы взаимодействующих электромагнитного и спинорного полей.

Хотя уравнения Максвелла (1) в терминах тензора напряженностей  $F = (F^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{H})$  (2) имеют явно ковариантный вид (5) и в этом смысле ничем не отличается от релятивистских уравнений для любых других ковариантных полей, уравнения (5) не позволяют построить стандартный  $L$ -подход, который основывается на скалярной (псевдоскалярной) функции Лагранжа. Более того, не существует функции Лагранжа в форме какого-либо коварианта, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы непосредственно с уравнениями (5), т.е. с исходными уравнениями Максвелла (1).

Можно перейти от уравнений (5) к эквивалентным им тоже явно ковариантным уравнениям — в тензорной форме (26) или псевдотензорной форме (27) — и построить  $L$ -подход, основанный на концепции векторной функции Лагранжа. Причем векторный  $L$ -подход требует соответствующей переформулировки стандартного принципа наименьшего действия. Такая переформулировка, содержится в теореме 2. Однако система уравнений ЭЛ для  $P$ -векторной функции Лагранжа в терминах напряженностей  $F$  (и тензора полевых скоростей  $F_{,\alpha} \equiv (F^{\mu\nu}_{,\alpha})$ ) совпадает лишь с  $\tilde{P}$ -псевдотензорной системой (27) и не может приводить к  $\tilde{P}$ -тензорной системе (26), что связано с  $\tilde{P}$ -псевдотензорностью слагаемого при  $a_2$  в  $\mathcal{L}_\mu$  (33) (полная функция (33), являясь  $P$ -вектором, не является  $\tilde{P}$ -ковариантом). Обе системы (26) и (27) в векторном  $L$ -подходе можно получить, если в качестве независимых лагранжевых переменных привлечь также дуально сопряженные переменные  $\bar{F}, \bar{F}_{,\alpha}$  — в этом случае не существует  $\tilde{P}$ -векторная функция Лагранжа (61), для которой уравнения ЭЛ (63), (64) совпадают с уравнениями (26), (27).

$\tilde{P}$ -векторный лагранжиан (61) имеет еще два преимущества. Во-первых, по формуле (39) (обобщающей стандартную теорему Нетер о ЗС на случай векторного  $L$ -подхода) лагранжиан (61) дает естественное соответствие “тензорный (псевдотензорный) генератор  $\hat{q}$  преобразования инвариантности уравнений Максвелла —

тензорный (псевдотензорный) ток  $\Theta_\mu^\nu$  (70)". Во-вторых, в  $\tilde{P}$ -векторном  $L$ -подходе удается ввести минимальное и локальное  $\tilde{P}$ -векторное взаимодействие электромагнитного поля  $F = (\vec{E}, \vec{H})$  со спинорным полем. Для этого оказалось необходимым построить нестандартный, а именно, векторный  $L$ -подход и для спинорного поля  $\Psi$ , причем один из вариантов последнего, основанный на уравнении Дирака в векторной форме (121), обобщается на случай полей произвольного спина.

В заключение отметим, что векторный  $L$ -подход обладает рядом недостатков. Во-первых, соответствие "оператор симметрии — закон сохранения", требующее, чтобы генераторам  $\partial_\mu$  трансляций в пространстве-времени  $R_x$  сопоставлялись именно энергия-импульс  $P_\mu$  электромагнитного поля, а не что-либо другое, т.е. чтобы сохранение энергии  $P_0$  в (80) было следствием однородности времени, а сохранение импульса  $\vec{P}$  в (80) — однородности пространства, оказывается неустранимо нарушенным в рассмотренных выше моделях с (псевдо)векторными лагранжианами. Более того, в  $L$ -подходе с (псевдо)векторной функцией Лагранжа "оператор симметрии — закон сохранения" оказывается неоднозначным: одному генератору  $\hat{q}$  алгебры инвариантности соответствуют четыре сохраняющиеся величины. В рамках концепции векторного лагранжиана вопрос об однозначности соответствия "оператор симметрии — закон сохранения" нельзя решить на основе теоремы Нетер.

Правда, можно по другому обобщать теорему Нетер на случай векторных лагранжианов, поставив в соответствие генератору  $\hat{q}$  не ток  $\Theta^{\mu\nu}$  (70), (74), а свертку

$$\hat{q} \rightarrow \bar{\Theta}^\mu = x^\nu \Theta_\nu^\mu, \quad \partial_\mu \bar{\Theta}^\mu = 0, \quad (125)$$

которая сохраняется благодаря свойству симметрии тензора (74),  $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$ .

Легко убедиться, что если принять обобщение (125) теоремы Нетер, то

$$\partial_\rho \rightarrow T_\rho^\mu - \partial_\rho x^\nu T_\nu^\mu, \quad (126)$$

где  $T_\rho^\mu$  — стандартный тензор энергии-импульса (77), так что при переходе к интегральным сохраняющимся величинам из (126) получаем физически удовлетворительное соответствие  $\partial_\rho \rightarrow P_\rho$ . Другими словами, по формулам (125), (126) получаем, что сохранение энергии-импульса  $P_\rho$  электромагнитного поля есть следствие траясляционной инвариантности теории. Благодаря выполнению условия (126), соответствие "оператор симметрии — закон сохранения", даваемое формулой (125), можно считать физически приемлемым и для всех остальных операторов  $\hat{q}$  преобразований инвариантности уравнений Максвелла.

Однако обобщение теоремы Нетер, заданное формулой (125), можно трактовать как существенный и, возможно, мало оправданный отход от стандартных принципов лагранжева подхода. Это замечание подтверждается тем, что результат (126) естественным образом получается и рамках стандартных принципов  $L$ -подхода для электромагнитного поля  $F = (\vec{E}, \vec{H})$  при использовании скалярных функций Лагранжа для этого поля. Такой подход был предложен нами в [7] (еще до работы Садбери [18]) и основывался на скалярной функции Лагранжа, построенной в виде свертки  $\mathcal{L} = \lambda^\mu \mathcal{L}_\mu$ ,  $\lambda^\mu = x^\mu - e^\mu$ . Детальное обсуждение такого  $L$ -подхода, включая вычисление и анализ сохраняющихся величин — следствий 32-мерной алгебры инвариантности  $A_{32}$ , приведено в [8, 9]. Использование  $\tilde{P}$ -скалярной функции Лагранжа оказалось предпочтительным не только потому, что стандартная теорема Нетер приводит к обычному соответствию "оператор симметрии — закон

сохранения”, но и потому, что в таком  $L$ -подходе естественным образом вводится  $\vec{P}$ -скалярное взаимодействие электромагнитного  $(\vec{E}, \vec{H})$  и спинорного  $\Psi$  полей.

1. Фушич В.И., Никитин А.Г., О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака, *Физика элементар. частиц и атом. ядра.*, 1983, **14**, вып. 1, 5–57.
2. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
3. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equations, *J. Phys. A.*, 1987, **20**, 537–549.
4. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О лагранжевом подходе для электромагнитного поля в терминах напряженностей и законах сохранения, Препринт 87.13, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1985, 53 с.
5. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Лагранжиан электромагнитного поля в терминах напряженностей и законы сохранения, *Укр. физ. журн.*, 1985, **30**, № 10, 1457–1459.
6. Симулик В.М., Лагагранжев и теоретико-алгебраический анализ диракоподобной формы уравнений Максвелла, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 130–133.
7. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Инвариантный лагранжиан в электродинамике без потенциалов, *Вопросы атомной науки и техники. Сер. общ. и ядер. физика*, 1986, вып. 1, 29–30.
8. Кривский И.Ю., Симулик В.М.,  $P_{\pm}^{\dagger}$ -скалярная функция Лагранжа и законы сохранения для электромагнитного поля в терминах напряженностей, Препринт 86.35, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1986, 49 с.
9. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Релятивистски инвариантная формулировка лагранжева подхода к электродинамике в терминах напряженностей, Препринт 86.41, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1985, 39 с.
10. Noether E., Invariant variations probleme, *Kgl. Ges. Wiss., Nachr., Cöttingen Math., Phys., Kl.*, 1918, 235–257 (перевод в сб.: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, 611–630).
11. Hill E.L., Hamilton’s principle and the conservation theorems of mathematical physics, *Rev. Mod. Phys.*, 1951, **23**, № 3, 253–260.
12. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О теореме Нетер для преобразований трех типов, Препринт 85.12, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1985, 61 с.
13. Кривский И.Ю., Теорема Нетер о законах сохранения для нелиевских преобразований инвариантности, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 134–139.
14. Anderson N., Arthurs A.M., A variational principle for Maxwell’s equations, *Intern. J. Electron*, 1978, **45**, № 3, 333–334.
15. Rosen J., Redundancy and superfluity for electromagnetic fields and potentials, *Amer. J. Phys.*, 1980, **48**, № 12, 1071–1073.
16. Giannetto E.A., Majorana-Oppenheimer formulation of quantum electrodynamics, *Lett. Nuovo Cim.*, 1985, **44**, № 3, 140–144.
17. Gersten A., Conserved currents of the Maxwell’s equations with electric and magnetic sources, Preprint GERN, TH.4688/87, 14 p.
18. Sudbery A., A vector Lagrangian for the electromagnetic field, *J. Phys. A*, 1986, **19**, № 2, L33–L36.
19. Heaviside O., On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field, *Phil. Trans. Roy. Soc., London (A)*, 1892, **83**, 423–480.
20. Larmor I., Collected papers, London, Clarendon press, 1928, 275 p.
21. Rainich G.Y., Electrodynamics in the general relativity theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–136.
22. Lipkin P.M., Existence of a new conservation law in electromagnetic theory, *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, № 5, 696–700.

23. Bessel-Hagen E., Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik, *Math. Ann.*, 1921, **84**, 258–276.
24. Fradkin D.M., Conserved quantities associated with symmetry transformations of relativistic free particle equations of motion, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 7, 1022–1026.
25. Kibble T.W.B., Conservation laws for free fields, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 7, 1028–1040.
26. Candlin P.I., Analysis of the new conservation laws in electromagnetic theory, *Nuovo Cim.*, 1965, **37**, № 4, 620–627.
27. O'Connell R.F., Tompkins D.R., Physical interpretation of generalized conservation laws, *Nuovo Cim.*, 1965, **39**, № 1, 391.
28. O'Connell R.F., Tompkins D.R., Generalized solutions for Maxwell's free fields and consequent generalized conservation laws, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 12, 1952–1954.
29. Фушич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситера и уравнения в пятимерном подходе, *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, № 3, 360–382.



# On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equations

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

We show that any relativistic wave equation for a particle with mass  $m > 0$  and arbitrary spin  $s$  is invariant under the Lie algebra of the group  $GL(2s + 1, C)$ . The explicit form of basis elements of this algebra is given for any  $s$ . The complete sets of the symmetry operators of the Dirac and Maxwell equations are obtained, which belong to the classes of the first- and second-order differential operators with matrix coefficients. Corresponding new conservation laws and constants of motion are found.

## 1. Introduction

The classical Lie approach is the main mathematical apparatus used for the analysis of the symmetry of partial differential equations [1, 30]. This approach was that from which it was established that the Poincaré group is the maximal symmetry group of the Dirac equation [2, 22] and that the maximal symmetry of Maxwell's equations is determined by the conformal group replenished by the Heaviside–Larmor–Rainich transformation. However, in spite of its power and universality, the Lie approach does not make it possible to find all the symmetry operators of the given equation. Actually it gives the possibility of finding only such symmetry operators which are the first-order differential operators.

Using the non-Lie approach [5, 6, 8, 9], in which the invariance group generators may be differential operators of any order and even integro-differential operators, the new invariance groups of a number of relativistic wave equations have been found. It has been demonstrated that the Dirac equation was invariant under the group  $SU(2) \times SU(2)$  [5, 6, 12] and that the Kemmer–Duffin–Petiau equation for the vector field was invariant under the group  $SU(3) \times SU(3)$  [29, 12]. The non-Lie approach gave the possibility of finding the additional symmetry of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations describing the particles in an external electromagnetic field [13, 27]. The hidden symmetry of Maxwell's equations has also been found and is described by the eightparameter transformation group including the subgroup of Heaviside–Larmor–Rainich transformations [13, 14, 15, 17].

In this paper we continue to study the symmetry of the Dirac, Weyl and Maxwell equations and of relativistic wave equations for any spin particles. The main results obtained here may be formulated as follows.

(i) We found that any Poincaré-invariant wave equation for a particle of arbitrary spin  $s$  and mass  $m = 0$  is additionally invariant under the  $2(2s+1)(2s+1)$ -dimensional Lie algebra which is isomorphic to the Lie algebra of the group  $GL(2s + 1, C)$ . The explicit form of basis elements of this invariance algebra is found for any value of  $s$ . Thus the additional symmetry of an arbitrary relativistic wave equation is described whereas previously one studied, as a rule, the symmetry properties of specific equations.

(ii) In our earlier work we restricted ourselves to studying symmetry operators of relativistic wave equations which belong to a finite-dimensional Lie algebra [17]. Here we also consider the symmetry operators belonging to the classes of first and second-order differential operators with matrix coefficients which, generally speaking, are not the basis elements of any finite-dimensional Lie algebra, but are closely connected with conservation laws. The complete set of symmetry operators of the Dirac equation in the class of first-order differential operators with matrix coefficients (class  $\mathfrak{M}_1$ ) is found. We also obtain the symmetry operators of the Weyl and Maxwell equations which form the basis of the Lie superalgebra.

(iii) The new conservation laws and motion constants, which are connected with hidden symmetry of the Dirac and Maxwell equations, are found.

The results of this paper supplement and in some sense complete, those obtained by us and expanded by a number of other authors [3, 31, 24, 32] by studying the additional symmetry of Poincaré-invariant wave equations.

## 2. The additional symmetry of Poincaré-invariant wave equations for arbitrary spin particles

In this section we demonstrate that any relativistic wave equation for a particle of non-zero mass and spin  $s = 0$  has more extensive symmetry than Poincaré invariance, and describe this additional symmetry exactly.

Let us write an arbitrary linear (differential or integro-differential) equation in the following symbolic form

$$L\psi = 0, \quad (2.1)$$

where  $L$  is a linear operator defined on a vector space  $H$ ,  $\psi \in H$ .

Let  $Q$  be an operator defined on  $H$ . We say that  $Q$  is the symmetry operator of the equation (2.1), if

$$L(Q\psi) = 0 \quad (2.2)$$

for any  $\psi$  satisfying (2.1).

**Definition.** Equation (2.1) is Poincaré-invariant and describes a particle of mass  $m$  and spin  $s$  if it has 10 symmetry operators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , which form the basis of the Lie algebra of the Poincaré group, and any solution  $\psi$  satisfies the conditions

$$P_\mu P^\mu \psi = m^2 \psi, \quad W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1) \psi, \quad (2.3)$$

where  $W_\mu$  is the Lubansky–Pauli vector

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma. \quad (2.4)$$

Below we consider only such equations (2.1) which satisfy the given definition and so may be interpreted as equations for a relativistic particle of spin  $s$  and mass  $m$ . The symmetry operators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  of such an equation satisfy the commutation relations

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [P_\mu, J_{\nu\sigma}] &= i(g_{\mu\nu} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

which characterise the Lie algebra of the Poincaré group  $P(1, 3)$ . The eigenvalues of the corresponding Casimir operators  $P_\mu P^\mu$  and  $W_\mu W^\mu$  are fixed and given by the relations (2.3). Let us emphasise that we do not make any supposition with regards to the explicit form of the operators  $P_\mu$  and  $J_{\mu\nu}$  — they can be as differential operators of first order as non-local (integro-differential) ones.

**Theorem 1.** *Any Poincaré-invariant equation for a particle of mass  $m$  and spin  $s$  is invariant under the algebra<sup>1</sup>  $GL(2s + 1, C)$ .*

**Proof.** Let  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  be the symmetry operators of the equation (2.1) satisfying the commutation relations (2.5). Then by the definition (2.3) the following combinations

$$Q_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{m^2} [\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^\rho P^\sigma \pm i(P_\mu W_\nu - P_\nu W_\mu)] \quad (2.6)$$

are also the symmetry operators of these equations.

Using (2.5) and the relations

$$[W_\mu, P_\nu] = 0, \quad [W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho W^\sigma \quad (2.7)$$

can make sure that the operators (2.6) satisfy the conditions

$$[Q_{\mu\nu}^\pm, Q_{\lambda\sigma}^\pm] = i(g_{\mu\sigma} Q_{\nu\lambda}^\pm + g_{\nu\lambda} Q_{\mu\sigma}^\pm - g_{\mu\lambda} Q_{\nu\sigma}^\pm - g_{\nu\sigma} Q_{\mu\lambda}^\pm) m^{-4} (P_\mu P^\mu)^2, \quad (2.8)$$

$$C_1 = \frac{1}{4} Q_{\mu\nu}^\pm Q^{\pm\mu\nu} = -m^4 W_\lambda W^\lambda P_\sigma P^\sigma, \quad (2.9)$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Q^{\pm\mu\nu} Q^{\pm\rho\sigma} = \mp i m^{-4} W_\mu W^\mu P_\sigma P^\sigma.$$

It follows from (2.3) and (2.8) that on the set of the equation (2.1) solutions the operators (2.6) satisfy the commutation relations

$$[Q_{\mu\nu}^\pm, Q_{\lambda\sigma}^\pm] \psi = i(g_{\mu\sigma} Q_{\nu\lambda}^\pm + g_{\nu\lambda} Q_{\mu\sigma}^\pm - g_{\mu\lambda} Q_{\nu\sigma}^\pm - g_{\nu\sigma} Q_{\mu\lambda}^\pm) \psi, \quad (2.10)$$

which characterise the Lie algebra of the group  $SL(2, C)$ . From (2.3) and (2.9) one obtains the eigenvalues of corresponding Casimir operators

$$C_1 \psi = \frac{1}{2} (l_0^2 + l_1^2 - 1) \psi, \quad C_2 \psi = i l_0 l_1 \psi, \quad (2.11)$$

where  $l_0 = s, l_1 = \pm(s + 1)$ .

So we have demonstrated that any Poincaré-invariant equation for a particle of non-zero mass and spin  $s \neq 0$  is additionally invariant under the algebra  $SL(2, C)$ , the basis elements of which belong to the enveloping algebra of the  $P(1, 3)$  and are given exactly by the relations (2.6). According to (2.11) the operators (2.6) realise the representation  $D(l_0, l_1) = D(s, \pm(s + 1))$  of the algebra  $GL(2, C)$ . Now we see that this invariance algebra may be extended to  $2(2s + 1)$ -dimensional Lie algebra isomorphic to the algebra  $GL(2s + 1, C)$ . Exactly the basis elements of the algebra  $GL(2s + 1, C)$  have the following form on the set of the equation (2.1) solutions:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+k, n} &= a_{nk} (Q_{23}^+ - Q_{02}^+) P_n^s, & \lambda_{n, n+k} &= a_{kn} P_n^s (Q_{23}^+ + Q_{02}^+), \\ \tilde{\lambda}_{mn} &= Q_1 \lambda_{mn}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

<sup>1</sup>We use the same notation for the groups and for the corresponding Lie algebras.

where

$$P_n^s = \prod_{n' \neq n} \frac{Q_{12} - s - 1 + n'}{n' - n}, \quad Q_1 = \frac{\varepsilon_{abc}}{2s(s+1)} Q_{0a}^+ Q_{bc}^+,$$

$$m, n = 1, 2, \dots, 2s+1, \quad k = 0, 1, \dots, 2s-n$$

and  $a_{kn}$  are the coefficients determined by the recurrent relations

$$a_{0n} = 1, \quad a_{1n} = [n(2s+1-n)]^{-1/2},$$

$$a_{\lambda n} = a_{\lambda-1n} a_{\lambda-1n+\lambda-1}, \quad \lambda = 2, 3, \dots, 2s-n.$$

Actually the polynomials of the symmetry operators  $Q_{\mu\nu}^+$  given by the relations (2.12) manifestly are the symmetry operators of equation (2.1). Operators (2.11) form the basis of the algebra  $GL(2s+1, C)$  inasmuch as they satisfy the following commutation relations

$$[\lambda_{ab}, \lambda_{cd}] = -[\tilde{\lambda}_{ab}, \lambda_{cd}] = \delta_{bc} \lambda_{ad} - \delta_{ad} \lambda_{bc},$$

$$[\lambda_{ab}, \tilde{\lambda}_{cd}] = \delta_{bc} \tilde{\lambda}_{ad} - \delta_{ad} \tilde{\lambda}_{bc}, \quad a, b, c, d = 1, 2, \dots, 2s+1$$
(2.13)

which characterise the algebra  $GL(2s+1, C)$ . The relations (2.13) are correct on the set of the equation (2.1) solutions. The validity of these solutions can be verified by direct calculation using the equivalent matrix representation for the basis elements of the algebra  $SL(2, C)$  (which is evaluated according to (2.11))

$$Q_{ab}^+ = \varepsilon_{abc} S_c, \quad Q_{0a}^+ = -S_a.$$

Here  $S_a$  are the matrices which realise the representation  $D(s)$  of the  $SO(3)$  algebra in the Gelfand–Zetlin basis [21]. Thus the theorem is proved.

So if equation (2.1) is Poincaré invariant and describes a particle of spin  $s$  and mass  $m > 0$ , it is invariant also under the algebra  $GL(2s+1, C)$ , the basis elements of which belong to the enveloping algebra of the algebra  $P(1, 3)$ . The operators (2.12) together with the Poincaré generators  $P_\mu$  and  $J_{\mu\nu}$  form the basis of the  $10+2(2s+1)$ -dimensional Lie algebra isomorphic to the algebra  $P(1, 3) \oplus GL(2s+1, C)$ . The last statement can easily be verified by moving to the new basis  $P_\mu \rightarrow P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu} \rightarrow J_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}$ ,  $\lambda_{mn} \rightarrow \lambda_{mn}$ ,  $\tilde{\lambda}_{mn} \rightarrow \tilde{\lambda}_{mn}$ , where

$$Q_{12} = \sum_n (s-n+1) \lambda_{mn}, \quad Q_{03} = \sum_n (s-n+1) \tilde{\lambda}_{mn},$$

$$Q_{23} = \sum_n \frac{1}{2a_{1n}} (\lambda_{n n+1} + \lambda_{n+1 n}), \quad Q_{31} = -i[Q_{12}, Q_{23}],$$

$$Q_{02} = i[Q_{23}, Q_{03}], \quad Q_{01} = -i[Q_{31}, Q_{03}].$$

The theorem proved has a constructive character insofar as it gives the explicit form of the basis elements of additional invariance algebra via the Poincaré generators. Starting, for example, from the Poincaré generators for the Dirac equation

$$P_\mu = p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$
(2.14)

where  $\gamma_\mu$  are the Dirac matrices, one obtains by the formula (2.6) the additional symmetry operators of this equation found earlier by Fushchych and Nikitin [12]. In an analogous way to formulae (2.6) and (2.12), the additional invariance algebras of the Kemmer–Duffin–Petiau and Proca equations may be obtained (see [12, 17, 19, 20]) and even the invariance algebra of infinite-component wave equations [18] may be found.

Let us note that relativistic wave equations for a particle of spin  $s > 0$  also possess such additional invariance algebras which belong to the class of integro-differential operators [5, 8, 9, 16, 17, 29, 27] and, generally speaking, are not numbered among the enveloping algebras of the algebra  $P(1, 3)$ .

### 3. Symmetry operators of the Dirac equation in the class $\mathfrak{M}_1$

Here we consider in detail the symmetry properties of the Dirac equation

$$L\psi \equiv (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.1)$$

It is well known that the symmetry of equation (3.1) which can be found in the classical Lie approach is exhausted by invariance under the algebra  $P(1, 3)$ , the basis elements of which are given in (2.14), and under a corresponding group of transformations, i.e. the Poincaré group.

Theorem 1 gives the possibility of extending the set of symmetry operators of the Dirac equation. Actually, using formulae (2.6), (2.14) and (3.1) one obtains the additional symmetry operators [12, 17]

$$Q_{\mu\nu}^\pm = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + \frac{i}{2m}(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu)(1 \pm i\gamma_4). \quad (3.2)$$

The operators (3.2) are the first-order differential operators with matrix coefficients (i.e. belong to the class  $\mathfrak{M}_1$ ) and so they cannot be found in the frames of classical Lie approach. But these operators (with fixed sign  $\pm$ ) form the basis of 16-dimensional Lie algebra together with the Poincaré generators (2.14). It follows from the above that the Dirac equation is invariant under the 16-parameter group including the Lorentz transformations (generated by  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$ ) and the transformations which are generated by the operators (3.2). Specifically these transformations have the form

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(2i\theta Q)\psi = (\cos \theta - \gamma_1 \gamma_2 \sin \theta) \frac{i}{m} (1 \mp i\gamma_4) \sin \theta \left( \gamma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \gamma_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)$$

if  $Q = Q_{12}^\pm$  etc [12].

It may be interesting to know whether the operators (2.14) and (3.3) exhaust all symmetry operators of the Dirac equation in the class  $\mathfrak{M}_1$ . It turns out that this is not so.

Here we find the complete set of symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_1$  for equation (3.1) which, however, do not form the basis of Lie algebra.

**Theorem 2.** *The Dirac equation has 26 linearly independent symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_1$ . These operators include the Poincaré generators (2.14), identity operator and fifteen operators given below*

$$\begin{aligned} \eta_\mu &= \frac{1}{4}i\gamma_4(p_\mu - m\gamma_\mu), & \omega_{\mu\nu} &= mS_{\mu\nu} + \frac{1}{2}i(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu), \\ A_\mu &= \omega_{\mu\nu}x^\nu + x^\nu\omega_{\mu\nu} - i\gamma_\mu, & B &= i\gamma_4(D - m\gamma_\mu x^\mu), \end{aligned} \quad (3.3)$$

where

$$D = x^\mu p_\mu + \frac{3}{2}i, \quad S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}i[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.3')$$

**Proof.** To find all linearly independent symmetry operators of the Dirac equation in the class  $\mathfrak{M}_1$  it is necessary to obtain the general solution of the following operator equations

$$[L, Q] = f_Q L, \quad (3.4)$$

where  $L = \gamma^\mu p_\mu - m$ ,  $Q$  and  $f_Q$  are unknown operators belonging to  $\mathfrak{M}_1$ :

$$Q = \tilde{A}^\mu p_\mu + \tilde{B}, \quad f_Q = \tilde{C}^\mu p_\mu + \tilde{D},$$

$\tilde{A}_\mu$ ,  $\tilde{B}_\mu$ ,  $\tilde{C}_\mu$  and  $\tilde{D}$  are  $4 \times 4$  matrices depending on  $x = (x_0, \mathbf{x})$ .

Relations (3.4) mean that the operators on the RHS and LHS give the same result acting on arbitrary solutions of the Dirac equation. On the set of these solutions operator  $p_0$  can be expressed via the operators  $p_a$  with matrix coefficients:  $p_0\psi = H\psi \equiv (\gamma_0 m + \gamma_0 \gamma_a p_a)\psi$ . In other words it is sufficient to restrict oneself by considering symmetry operators of a form such that

$$Q = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + G, \quad (3.5)$$

where  $\mathbf{B}$  and  $G$  are  $4 \times 4$  matrices depending on  $x$ . For the operators (3.5) the invariance condition (3.4) reduces to the following form:

$$[p_0 - H, Q] = f_Q(p_0 - H), \quad (3.6)$$

where  $f_Q \equiv 0$  insofar as the commutator on the LHS cannot depend on  $p_0$ .

An unknown operator (3.5) can be expanded via a complete set of the Dirac matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= I\mathbf{d}^0 + i\gamma_4 \mathbf{d}^1 + \gamma_\nu \mathbf{n}^\nu + S_{\mu\nu} \mathbf{m}^{\mu\nu} + \gamma_4 \gamma_\nu \mathbf{b}^\nu, \\ G &= I a^0 + i\gamma_4 a^1 + \gamma_\nu c^\nu + S_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \gamma_4 \gamma_\nu g^\nu, \end{aligned} \quad (3.7)$$

where  $\mathbf{d}^0$ ,  $\mathbf{d}^1$ ,  $\mathbf{n}^\nu$ ,  $\mathbf{m}^{\mu\nu}$ ,  $\mathbf{b}^\nu$ ,  $a^0$ ,  $a^1$ ,  $c^\nu$ ,  $f^{\mu\nu}$ ,  $g^\nu$  are unknown functions on  $x$ .

Substituting (3.5) and (3.7) into (3.6) and equating coefficients by the linearly independent matrices and differential operators one comes to the following system of partial differential equations:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^0 &= \mathbf{b}^0 = 0, & n_b^a &= i\varepsilon_{abc} d_c^2, & b_b^a &= i\varepsilon_{abc} d_c^3, \\ m_b^{0a} &= i\delta_{ab} \mathbf{A}^0, & m_c^{ab} &= \varepsilon_{abc} \mathbf{A}^1, & a, b, c &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_a^\mu}{\partial x_b} &= -\frac{\partial d_b^\mu}{\partial x_a}, & \frac{\partial d_a^\mu}{\partial x_a} &= \frac{\partial d_b^\mu}{\partial x_b}, & a \neq b, & m \operatorname{div} \mathbf{d}^0 = 0, & m \operatorname{div} \mathbf{d}^1 = 2i m a^1, \\ \dot{\mathbf{d}}^2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{d}^3, & \dot{\mathbf{d}}^3 &= \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{d}^2, & \dot{\mathbf{d}}^i &= -\operatorname{grad} \mathbf{A}^i, & \operatorname{div} \mathbf{d}^i = -3\mathbf{A}^i, & i = 0, 1, \\ c^a &= -\frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^2)_a, & c^0 &= -\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{d}^3 + m \mathbf{A}^0, & g^0 &= \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{d}^2, \\ g^a &= -\frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^3)_a - i m d_a^1, & \dot{a}^0 &= -\frac{1}{2} i \operatorname{div} \mathbf{d}^0, & \operatorname{grad} a^0 &= -\frac{3}{2} i \dot{\mathbf{d}}^0, \\ a^1 &= -\frac{1}{2} i \operatorname{div} \dot{\mathbf{d}}^1 + \frac{1}{3} m \operatorname{div} \mathbf{d}^2, & \operatorname{grad} a^1 &= -m \dot{\mathbf{d}}^2 - \frac{3}{2} i \dot{\mathbf{d}}^1, \\ f^{0a} &= \frac{1}{2} \dot{a}_a^0 - \frac{1}{4} i (\operatorname{rot} \mathbf{d}^1)_a, & f^{ab} &= \varepsilon_{abc} \left[ \frac{1}{2} i \dot{d}_c^1 + \frac{1}{4} (\operatorname{rot} \mathbf{d}^0)_c + m d_c^2 \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

where the dot denotes the derivative on  $x_0$  and there is no sum by the repeated indices. The symbol  $\mathbf{d}^\mu$  denotes a vector with components  $(d_1^\mu, d_2^\mu, d_3^\mu)$  (analogous notation is used for other vector quantities).

The first line in (3.9) gives the equations in the Killing form. Using this circumstance it is not difficult to obtain the general solution of the system (3.9) for  $m \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^0 &= \mathbf{x} \times \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\rho}x_0 + \boldsymbol{\nu}, & \mathbf{d}^1 &= \boldsymbol{\xi} + \lambda\mathbf{x}, & \mathbf{d}^2 &= \mathbf{x} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\zeta}, \\ \mathbf{d}^3 &= \boldsymbol{\varepsilon}x_0 + \mu\mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma}, & g^0 &= 0, & g^a &= -im(\xi_a + \lambda x_a), \\ f^{0a} &= \frac{1}{2}\rho_a, & f^{ab} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}(2m\zeta_c - \eta_c) + m(x_a\varepsilon_b - x_b\varepsilon_a), \\ c^0 &= -\mu - m(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{x} + \varkappa), & c^a &= \varepsilon^a, & A^0 &= -\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{x} - \varkappa, \\ A^1 &= -\lambda x_0 + \omega, & a^0 &= \Omega, & a^1 &= -\frac{3}{2}i\lambda. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Here the Greek letters denote arbitrary constants.

So the general solution of the system (3.9) depends on 26 arbitrary numerical parameters. Substituting (3.7), (3.8) and (3.10) into (3.5) and using equation (3.1), one obtains a general expression for the symmetry operator  $Q \in \mathfrak{M}_1$  for the Dirac equation as a linear combination of the Poincaré group generators (2.14), identity operator and the operators (3.3). The theorem is proved.

So we have obtained the complete set of the symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_1$  for the Dirac equation with  $m \neq 0$ . Besides the Poincaré group generators (2.14) this set includes four operators which coincide on the set of the equation (3.1) solutions with Lubansky–Pauli vector (2.4), six operators  $\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu}^+ + Q_{\mu\nu}^-)$ , trivial identity operator and five symmetry operators  $B$  and  $A_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , which belong to the enveloping algebra generated by the Poincaré generators.

The operators (3.3) satisfy the following commutation relations

$$\begin{aligned} [B, P_\mu] &= -2i\eta_\mu, & [B, \eta_\mu] &= -\frac{1}{2}i(P_\mu + mA_\mu), \\ [A_\mu, P_\nu] &= \frac{1}{m}[\eta_\mu, \eta_\nu] = -2i\omega_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

However these operators do not form the basis of the Lie algebra inasmuch as the commutators  $[\omega_{\mu\nu}, \omega_{\lambda\sigma}]$  do not belong to the class  $\mathfrak{M}_1$ .

One of the most interesting consequences of the symmetry described in theorem 2 is the existence of new conservation laws for the Dirac equation. Corresponding new conserved currents have the form

$$\begin{aligned} \eta_{\nu\mu} &= \frac{1}{4} \left( \bar{\psi}\gamma_4\gamma_\nu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\gamma_\nu\gamma_4\psi \right) + m\bar{\psi}\gamma_4 S_{\mu\nu}\psi, \\ \omega_{\mu\rho\nu} &= \frac{1}{4}i \left( \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^0} S_{\nu\mu}\psi + \bar{\psi}S_{\nu\rho} \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \bar{\psi}S_{\nu\mu} \frac{\partial\psi}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu} S_{\mu\nu}\psi \right) + \\ &+ \frac{1}{2}m\bar{\psi}[S_{\mu\nu}, \gamma_\lambda]_+\psi, & B_\nu &= 2x^\mu\eta_{\mu\nu}, & A_{\mu\nu} &= 2x^\lambda\omega_{\mu\lambda\nu}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

The tensors  $\eta_{\mu\nu}$ ,  $\omega_{\mu\rho\nu}$ ,  $A_{\mu\nu}$  and the vector  $B_\nu$  correspond to the symmetry operators  $\eta_\mu$ ,  $\omega_{\mu\rho}$ ,  $A_\mu$  and  $B$ . All quantities (3.11) satisfy the continuity equations

$$p^\nu\eta_{\mu\nu} = 0, \quad p^\nu\omega_{\mu\rho\nu} = 0, \quad p^\nu A_{\mu\nu} = 0, \quad p^\nu B_\nu = 0$$

and so generate conservation laws.

#### 4. Additional symmetry of the Weyl and massless Dirac equations

Here we study the symmetry of the Weyl equation

$$\sigma^\mu p_\mu \varphi = 0, \quad (4.1)$$

where  $\varphi$  is the two-component spinor and  $\sigma^\mu$  the Pauli matrices. Putting

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi + \varphi^* \\ i(\varphi^* - \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

one may rewrite this equation in the Dirac form

$$\gamma^\mu p_\mu \psi = 0, \quad (4.3)$$

where  $\gamma^\mu$  are the Dirac matrices in the Majorana representation. So we consider the symmetry properties of equation (4.3) in order to obtain the results which are valued as for the Weyl equation as for the massless Dirac one.

**Theorem 3.** *The massless Dirac equation has 46 symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_1$ . These operators are*

$$P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D, F, FP_\mu, FJ_{\mu\nu}, FK_\mu, FD, I, \quad (4.4a)$$

$$\hat{A}_\mu = \hat{\omega}_{\mu\nu} x^\mu + x^\nu \hat{\omega}_{\mu\nu} - \gamma_\mu, \quad \hat{\omega}_{\mu\nu} = \gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu, \quad F\hat{A}_\mu, \quad (4.4b)$$

where  $K_\mu = 2x_\mu D - p_\mu x_\nu x^\nu + 2S_{\mu\nu} x^\nu$ ,  $F = i\gamma_4$ ,  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  and  $D$  are given in (2.14) and (3.5').

**Proof.** This can be carried out in full analogy with the proof of theorem 2. The general solution of the system (3.8) for the case  $m = 0$  has the form

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^\alpha &= \mathbf{x} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mu}^\alpha + \frac{1}{2} \mu^\alpha (x_0^2 - \mathbf{x}^2) + \mathbf{x} \times \boldsymbol{\eta}^\alpha + \nu^\alpha \mathbf{x} + \rho^\alpha x_0 \mathbf{x} + \lambda^\alpha + \omega^\alpha x_0, \\ \alpha = 0, 1, \quad \mathbf{d}^2 &= \mathbf{x} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi} \mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta} x_0 + \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{d}^3 = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} x_0 + \boldsymbol{\varkappa}, \\ A^\alpha &= - \left[ \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mu}^\alpha x_0 + \frac{1}{2} \rho^\alpha (x_0^2 + \mathbf{x}^2) + \nu^\alpha x_0 + \omega^\alpha \mathbf{x} + \chi^\alpha \right], \\ a^\alpha &= -\frac{3}{2} i (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mu}^\alpha + \rho^\alpha x_0 + \delta^\alpha), \quad c^0 = \sigma, \quad x^a = -\varepsilon_a, \quad g^0 = \xi, \\ g^a &= -\zeta_a, \quad f^{0a} = \frac{1}{2} (-\eta_a^1 + \rho^0 x_a + \mu_a^0 x_0 + \omega_a^0), \\ f^{ab} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (\mu_c^1 x_0 + \rho_1^1 x_c + \omega_c^1 + \eta_c^0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

and includes 46 independent parameters denoted by the Greek letters. Substituting (3.5) and (4.5) into (3.7) and using equation (4.3) one obtains a general expression for the symmetry operator of the massless Dirac equation in the form of a linear combination of the operators (4.4). Thus the theorem is proved.

Among the operators (4.4) there are exactly fourteen symmetry operators, which do not belong to the enveloping algebra generated by the conformal group generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$ ,  $K_\mu$ ,  $D$  and by the operator  $F = i\gamma_4$ . These essentially new symmetry operators are given in (4.4b).

Operators (4.4) transform the real wave function  $\psi$  (4.2) into real wave function  $\psi' = Q\psi$  and so they are also the symmetry operators for the Weyl equation (4.1).



Incidentally the linear transformations of  $\psi$  (4.2) generate linear and antilinear transformations of a two-component Weyl spinor.

The operators (4.4) do not form a basis of the Lie algebra. However, one may consider different subsets of the operators (4.4) which have the structure of the Lie algebra or superalgebra. Thus the operators (4.4a) form the basis of 32-dimensional Lie algebra including the Lie algebra of the conformal group. The operators  $J_{\mu\nu}$ ,  $\hat{\omega}_{\mu\nu}$ ,  $F$  and  $\lambda_\mu = FP_\mu$  satisfy the following commutation and anticommutation relations:

$$\begin{aligned} [\hat{\omega}_{\mu\nu}, \hat{\omega}_{\lambda\sigma}]_+ &= -2i[J_{\mu\nu}, p_\lambda p_\sigma] = 2(g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma + g_{\nu\sigma}p_\mu p_\lambda - g_{\mu\sigma}p_\nu p_\lambda - g_{\nu\lambda}p_\mu p_\sigma), \\ [J_{\mu\nu}, \hat{\omega}_{\lambda\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma}\hat{\omega}_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\hat{\omega}_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\hat{\omega}_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\hat{\omega}_{\mu\lambda}), \quad F^2 = I, \\ [\hat{\omega}_{\mu\nu}, \lambda_\rho]_+ &= [\omega_{\mu\nu}, F]_+ = 0, \quad [\lambda_\mu, \lambda_\nu]_+ = 2p_\mu p_\nu, \quad [\lambda_\mu, F]_+ = 2P_\mu, \end{aligned} \quad (4.6)$$

where the symbol  $[A, B]_+$  denotes the anticommutator  $[A, B]_+ = AB + BA$ .

It follows from (2.5) and (4.6) that the set of symmetry operators  $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, p_\mu p_\nu, I, F, \lambda_\mu, \hat{\omega}_{\mu\nu}\}$  form the basis of the Lie superalgebra (which includes ten symmetry operators  $p_\mu p_\nu$  not belonging to the class  $\mathfrak{M}_1$ ).

## 5. The symmetry and supersymmetry of Maxwell's equations

We shall write Maxwell's equations for the electromagnetic field in vacuum in the following form [17]:

$$\begin{aligned} L_1\psi &\equiv (i\partial/\partial x_0 + \sigma_2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\psi = 0, \\ L_2^a\psi &\equiv (p_a - \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}p_a)\psi = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Here

$$\sigma_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_a = i \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

where 1 and 0 are unit and zero  $3 \times 3$  matrices,  $s_a$  are the generators of irreducible representation  $D(1)$  of the group  $SO(3)$  with the matrix elements  $(s_a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}$ . The symbol  $\psi$  denotes the six-component function,  $\psi = \text{column } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)$ , where  $E_a$  and  $H_a$  are the components of the vectors of electric and magnetic fields strengths.

It is well known that the Maxwell equations are invariant under the conformal group  $C(1, 3)$  and under the group  $H$  of Heaviside–Larmor–Rainich transformations. Moreover it was found [14, 15, 16, 17] that these equations also have the additional hidden symmetry in the class of integro-differential operators which is determined by the algebra  $GL(2, C)$ . It was demonstrated also that  $GL(2, C)$  is the most extensive invariance algebra of the Maxwell equations if one supposes the symmetry operators do not depend on  $x$ .

Here we study the symmetry of the Maxwell equations in quite another aspect. The requirement that the symmetry operators belong to a finite-dimensional Lie algebra is very important if one is interested in studying the symmetry groups of the equations considered. However for many applications (e.g. for constructing conservation laws) this requirement is not essential. So we do not require that the symmetry operators of Maxwell's equations should belong to a finite-dimensional Lie algebra but restrict the class of operators considered by the second-order differential operators with constant

matrix coefficients. In other words we consider the symmetry operators of a form such that

$$Q = d_{ab}p_a p_b + c_b p_b + g, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

where  $d_{ab}$ ,  $c_b$  and  $g$  are  $6 \times 6$  numerical matrices. The operators (5.3) do not depend on  $p_0$  inasmuch as one may always  $p_0\psi$  via  $\sigma_2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}\psi$  according to equation (5.1). Let us denote the class of the operators (5.3) by the symbol  $\mathfrak{M}_2$ .

We shall see that the Maxwell equations have non-trivial symmetry operators in the class  $\mathfrak{M}_2$  which do not belong to the enveloping algebra of the conformal group generators. On the other hand the analysis of more extensive classes of the Maxwell equation symmetry operators is very complicated and cannot be carried out within the framework of the present paper.

The invariance condition for equation (5.1) under the operators (5.3) may be written in the following general form [17]

$$[L_1, Q] = \alpha_Q^1 L_1 + \beta_Q^{1a} L_2^a, \quad [L_2^a, Q] = \alpha_Q^{2a} L_1 + \beta_Q^{2a,d} L_2^d, \quad (5.4)$$

where in our case  $\alpha_Q^1 = \alpha_Q^{2a} \equiv 0$  since the commutators on the LHS cannot depend on  $p_0$ , and

$$\beta_Q^{1a} = g_{bc}^a p_b p_c + f_b^a p_b + h^a, \quad \beta_Q^{2a,d} = g_{bc}^{a,d} p_b p_c + f_c^{a,d} p_c + h^{a,d}, \quad (5.5)$$

where  $g_{bc}^k$ ,  $f_b^k$ ,  $h^k$  are numerical matrices,  $k = a$  or  $k = a, d$ .

Any of the matrices in (5.3) and (5.5) can be represented as a linear combination of the matrices  $D_c^\nu$  and  $G_{cd}^\nu$ , where

$$D_c^\nu = \sigma_\nu S_c, \quad G_{cd}^\nu = \sigma_\nu (\delta_{cd} - S_c S_d - S_d S_c).$$

Here  $\sigma_\nu$  are the  $6 \times 6$  Pauli matrices commuting with  $S_a$  of (5.2). Calculating the commutators in (5.4) and equating the coefficients by the linearly independent matrices and differential operators one may prove the following statement.

**Theorem 4.** *The Maxwell equations (5.1) have ten linearly independent symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_2$  which do not belong to the enveloping algebra of the Lie algebra of the group  $C(1, 3) \otimes H$ . These operators have the form*

$$Q_{ab} = \sigma_1 q_{ab}, \quad \tilde{Q}_{ab} = \sigma_3 q_{ab}, \quad (5.6)$$

where

$$q_{ab} = [(\mathbf{S} \times \mathbf{p})_a, (\mathbf{S} \times \mathbf{p})_b] - p^2 \delta_{ab}, \quad p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

**Proof.** The proof can be carried out in full analogy with the proofs of theorems 2 and 3 and so can be omitted. We note only that equations (5.3)–(5.5) are satisfied by the 46 linearly independent operators given below:

$$\begin{aligned} &\sigma_0, \quad i\sigma_0 p_a, \quad \sigma_0 p_a p_b, \quad \sigma_0 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, \quad ip_a \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, \quad i\sigma_2, \\ &\sigma^2 p_a, \quad i\sigma_2 p_a p_b, \quad \sigma_2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, \quad i\sigma_2 p_a \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, \quad Q_{ab}, \quad \tilde{Q}_{ab}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

where  $Q_{ab}$  and  $\tilde{Q}_{ab}$  are given in (5.6). All operators of (5.7) with the exception of  $Q_{ab}$  and  $\tilde{Q}_{ab}$  can be expressed via  $P_a$ ,  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} J_{ab} P_c$  and  $\sigma_2$ , where  $J_{ab}$  and  $P_a$

are the Poincaré generators given by the formulae (2.14) with  $\frac{1}{4}i[\gamma_a, \gamma_b] \rightarrow \varepsilon_{abc}S_c$ ,  $\sigma_2$  is the matrix of (5.2) (which is the generator of the Heaviside–Larmor–Rainich transformations).

**Note 1.** From twenty operators (5.6) exactly ten are linearly independent in so far as

$$(Q_{11} + Q_{22} + Q_{33})\psi = (\tilde{Q}_{11} + \tilde{Q}_{22} + \tilde{Q}_{33})\psi = 0,$$

where  $\psi$  is an arbitrary solution of equations (5.1).

**Note 2.** The operators  $\alpha_Q^1$ ,  $\beta_Q^{1a}$  and  $\alpha_Q^{2a}$  from (5.4) which correspond to the symmetry operators (5.6) are zero matrices. For  $\beta_{Q_{ab}}^{2c,d}$  and  $\beta_{Q_{ab}}^{2c,d}$  one obtains by direct calculation

$$\beta_{Q_{bc}}^{2a,d} = i\sigma_2\beta_{Q_{bc}}^{2a,d} = -\sigma_1\delta_{ad}[(\mathbf{S} \times \mathbf{p})_a, (\mathbf{S} \times \mathbf{p})_b]_+.$$

So we have determined the complete set of the Maxwell equation symmetry operators in the class  $\mathfrak{M}_2$ . Using the notation given in (5.2) and below formula (5.2), it is not difficult to represent the transformations  $\psi \rightarrow Q_{ab}\psi$  and  $\psi \rightarrow \tilde{Q}_{ab}\psi$  generated by operators (5.6), in the terms of the electromagnetic field strengths

$$E_c \rightarrow g_{ab}^{cd}H_d, \quad H_c \rightarrow g_{ab}^{cd}E_d, \tag{5.8}$$

$$E_c \rightarrow g_{ab}^{cd}E_d, \quad H_c \rightarrow -q_{ab}^{cd}H_d, \tag{5.9}$$

where

$$g_{ab}^{cd} = p_ap_b\delta_{cd} - p_ap_c\delta_{bd} - p_bp_c\delta_{ad} + p^2(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{bc}\delta_{ad} - \delta_{ab}\delta_{cd}).$$

The invariance of Maxwell’s equations under transformations (5.8) and (5.9) can be easily verified by direct calculation.

The operators (5.6) do not form a basis of a Lie algebra. However, one may consider subsets of the operators (5.6) which can be extended to the Lie superalgebras. One of these subsets includes the following operators:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}c_aQ_{bc}, & Q^2 &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}c_a\tilde{Q}_{bc}, \\ Q^3 &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, & Q^4 &= \frac{1}{2}c_ac_bp_ap_b, & Q^5 &= p^2, \end{aligned} \tag{5.10}$$

where  $c_a$  are arbitrary numbers satisfying the condition  $c_ac_a = 1$ . The operators (5.10) satisfy the relations

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b]_+ &= 2\delta_{ab}(Q^a)^2, & (Q^1)^2 &= (Q^2)^2 = Q^6 \equiv (Q^4 - Q^5)^2, \\ (Q^3)^2\psi &= Q^5\psi, & [Q^a, Q^4] &= [Q^a, Q^5] = [Q^4, Q^5] = 0 \end{aligned}$$

and so form the basis of the Lie superalgebra together with the operator  $Q^6$ . This superalgebra can be extended by adding the operators  $Q^{6+a} = i\sigma^2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}Q^a$ ,  $Q^{9+a} = i\sigma^2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}(Q^a)^2$  and  $Q^{12+a} = p^2(Q^a)^2$ ,  $a = 1, 2, 3$ , which satisfy the relations

$$\begin{aligned} [Q^{6+a}, Q^{6+b}]_+ &= 2\delta_{ab}Q^{12+b}, & [Q^{6+a}, Q^b]_+ &= 2\delta_{ab}Q^{6+b}, \\ [Q^{9+a}, Q^B] &= [Q^{12+a}, Q^B] = 0, & B &= 1, 2, \dots, 15. \end{aligned}$$

In conclusion let us give the explicit form of the motion constants of the electromagnetic field which correspond to the symmetry operators (5.6). Due to the Maxwell

equations the following bilinear combinations do not depend on  $x_0$  and so are conserved in time

$$\begin{aligned}
 I_{ab} &= \int d^3x \psi^T Q_{ab} \psi = \int d^3x [(\operatorname{rot} \mathbf{H})_a (\operatorname{rot} \mathbf{H})_b - (\operatorname{rot} \mathbf{E})_a (\operatorname{rot} \mathbf{E})_b + \\
 &\quad + E_a p^2 E_b - H_a p^2 H_b], \\
 \tilde{I}_{ab} &= \int d^3x \psi^T \tilde{Q}_{ab} \psi = \int d^3x [E_a p^2 H_b + H_a p^2 E_b - \\
 &\quad - (\operatorname{rot} \mathbf{E})_a (\operatorname{rot} \mathbf{H})_b - (\operatorname{rot} \mathbf{H})_a (\operatorname{rot} \mathbf{E})_b].
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

In contrast with the classical motion constants (energy, momentum, etc) the integral combinations (5.11) depend not only on  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  but also on the derivatives of these vectors.

So starting from the symmetry operators (5.6) found above we obtain ten new constants of motion for the electromagnetic field in vacuum given by relations (5.11). These motion constants, in contrast to the Lipkin ones [25, 4, 23, 26], have nothing to do with the Lorentz or conformal invariance of the Maxwell equations inasmuch as the corresponding symmetry operators (5.6) do not belong to the enveloping algebra of the algebra  $C(1,3) \oplus H$ .

**Acknowledgment.** We would like to thank the referee for his useful comments.

**Note added in proof.** In the formulation of theorem 3 we have omitted six symmetry operators of the massless Dirac equation, which have the form  $Q_{\mu\nu} = -Q_{\nu\mu} = [K_\nu, A_\mu]$ . So this equation has 52 linearly independent symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_1$ . All the symmetry operators  $Q \in \mathfrak{M}_1$  for the Dirac equation with  $m \neq 0$  belong to the enveloping algebra of algebra  $P(1,3)$  inasmuch as operator  $B$  (3.3) can be represented as  $D\psi = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma} \psi$  on the set of the Dirac equation solutions.

1. Ames W.F., *Nonlinear partial differential equations in engineering*, Vol. 1, New York, Academic, 1965.
2. Danilov Yu.A., Preprint IAE-1976, Kurchalov Insitute of Atomic Energy, 1968.
3. Da Silveira, *Nuovo Cimento A*, 1980, **56**, 385–395.
4. Fradkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 879–890.
5. Fushchych W.I., Preprint ITP-E-70-32, Institute for Theoretical Physics, Kiev, 1970.
6. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **7**, 3–12 (*Theor. Math. Phys.*, **7**, 3–11).
7. Fushchych W.I., *Nuovo Cimento Lett.*, 1973, **6**, 133–138.
8. Fushchych W.I., *Nuovo Cimento Lett.*, 1974, **11**, 508–512.
9. Fushchych W.I., On the new method of investigation of the group properties of systems of partial differential equations, in *Group-Theoretical Methods in Mathematical Physics*, Kiev, Naukova Dumka, 1978, 5–44.
10. Fushchych W.I., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1979, **246**, 846–850.
11. Fushchych W.I., *Ukr. Mat. Zurn.*, 1981, **33**, 834–837 (*Ukr. Math. J.*, **33**, 632–635).
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Nuovo Cimento Lett.*, 1977, **19**, 347–352.
13. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Nuovo Cimento Lett.*, 1978, **21**, 541–545.
14. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Nuovo Cimento Lett.*, 1979, **24**, 220–224.
15. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, **12**, 747–757.

16. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Czech. J. Phys. B*, 1982, **32**, 476–480.
17. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983 (Engl. transl., Dordrecht, Reidel, 1986).
18. Fushchych W.I., Onufriychuck S.P., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, **235**, 1056–1059.
19. Fushchych W.I., Vladimirov V.A., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1981, **287**, 1105–1108.
20. Fushchych W.I., Vladimirov V.A., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 1921–1925.
21. Gelfand I.M., Zetlin M.L., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950, **71**, 1017–1020.
22. Ibragimov N.H., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, **185**, 1226–1228.
23. Kibble T.W.B., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 1022–1025.
24. Kotelnikov G.A., *Nuovo Cimento B*, 1982, **72**, 68–78.
25. Lipkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 696–700 .
26. Michelsson J., Niederle J., *Lett. Math. Phys.*, 1984, **8**, 195–205.
27. Nikitin A.G., On the invariance group of Kemmer–Duffin–Petiau equations for particle with anomalous , in Group-Theoretical Methods in Mathematical Physics, Kiev, Naukova Dumka, 1978, 81–95.
28. Nikitin A.G., Symmetries of the Weyl equation, in Group-Theoretical Studies of Mathematical Physics equations, Kiev, Naukova Dumka, 1985, 31–35.
29. Nikitin A.G., Segeda Yu.N., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1976, **29**, 82–94 (*Theor. Math. Phys.*, **29**, 943–954).
30. Ovsjannikov L.V., The Group Analysis of Differential Equations, Moscow, Nauka, 1978.
31. Stražev V.I., *Vest. Akad. Nauk BSSR*, 1981, **5**, 75–80.
32. Stražev V.I., Shkol'nikov P.L., *Izv. Vuzov Fiz.*, 1984, **4**, 81–88.

# On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation

W.I. FUSHCHYCH, N.I. SEROV

Some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation are found. The formulae for generating solutions of the Schrödinger-invariant equations are adduced.

The linear heat equation and its complex generalisation, i.e. the Schrödinger equation

$$(P_0 - P_a^2/2m)u = 0, \quad P_0 = i\partial/\partial x_0, \quad P_a = -i\partial/\partial x_a, \quad a = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

where

$$u = u(x_0, \mathbf{x}), \quad x_0 \equiv t, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

and  $m$  is the particle mass, is invariant under the generalised Galilei group  $G_2(1, 3)$ . The basis elements of the Lie algebra  $AG_2(1, 3)$  have the following form:

$$P_0 = i\partial/\partial x_0, \quad P_a = -i\partial/\partial x_a, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad (2)$$

$$G_a = x_0 P_a + m x_a, \quad I = u\partial/\partial u, \quad a, b = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

$$D = 2x_0 P_0 - \mathbf{xP} + \frac{3}{2}i, \quad (4)$$

$$A = x_0 \left( x_0 P_0 - \mathbf{xP} + \frac{3}{2}i \right) + \frac{1}{2}m\mathbf{x}^2. \quad (5)$$

The same algebra for the one-dimensional equation had been found over a hundred years ago by S. Lie [8]. For the three-dimensional equation (1) this algebra had been found by Hagen [7] and Niederer [9] (see also Fushchych and Nikitin [4, 5]). The elements  $D$  and  $A$  generate the scale and projective transformations respectively. We denote the group generated by operators (2)–(4) and its Lie algebra by symbols  $G_1(1, 3)$  and  $AG_1(1, 3)$ . The group and the algebra generated by (2)–(5) are denoted as  $G_2(1, 3)$  and  $AG_2(1, 3)$ .

We now consider the following non-linear generalisation of (1):

$$(P_0 - P_a^2/2m)u + F(x, u, u^*) = 0, \quad (6)$$

where  $F$  is an arbitrary differentiable function. To construct the families of exact solutions of (6) we have to know the symmetry of (6) which obviously depends on the structure of the non-linearity.

**Theorem.** Equation (6) is invariant under the following algebras:

$$AG(1,3) \quad \text{iff} \quad F = \phi(|u|)u, \quad (7)$$

where  $\phi$  is an arbitrary smooth function, and

$$AG_1(1,3) \quad \text{iff} \quad F = \lambda|u|^k u, \quad (8)$$

where  $\lambda, k$  are arbitrary parameters, the operator of scale transformations  $D$  having the form  $D = x_0 P_0 - \mathbf{xP} + 2i/k$ ,  $k \neq 0$ , and

$$AG_2(1,3) \quad \text{iff} \quad F = \lambda|u|^{4/n} u, \quad (9)$$

where  $n = 3$  is the number of spatial variables in the Schrödinger equation [2, 3].

To give the proof of the theorem, which we omit because of its clumsiness, it is necessary to apply the Lie method to (6). The detailed account of this method is given by Ovsyannikov [10] and Bluman and Cole [1]. We can make sure that (6) with non-linearities (7)–(9) admits the groups  $G, G_1$  and  $G_2$  by direct verification.

Later on we shall construct the exact solutions of the Schrödinger equation with non-linearity (9), i.e.

$$(P_0 - P_a^2/2m)u + \lambda|u|^{4/3}u = 0. \quad (10)$$

It follows from the theorem that only the equation with fractional non-linearity is invariant under the group  $G_2(1,3)$ .

Following Fushchych [2] we seek solutions of (10) with the help of the ansatz

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (11)$$

where  $\varphi$  is the function to calculate. This function depends only on three invariant variables  $\omega_1, \omega_2$  and  $\omega_3$  being the first integrals of the Euler–Lagrange system of equations:

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x, u)} = \frac{dx_1}{\xi^1(x, u)} = \frac{dx_2}{\xi^2(x, u)} = \frac{dx_3}{\xi^3(x, u)} = \frac{du}{\eta(x, u)}, \quad (12)$$

where  $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$  and  $\eta$  are coordinates of the infinitesimal operator of the group  $G_2(1,3)$ , i.e. the following functions:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= ax_0^2 + 2bx_0 + d_0, & \boldsymbol{\xi} &= (ax_0 + b)\mathbf{x} + \mathbf{g}x_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x} + \mathbf{d}, \\ \eta &= - \left[ \text{Im} \left( \frac{1}{2}a\mathbf{x}^2 + \mathbf{g}\mathbf{x} \right) + \frac{3}{2}(ax_0 + b) \right] u, \end{aligned}$$

where  $a, b, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, d_0$  and  $\mathbf{d}$  are parameters of the group  $G_2(1,3)$ .

Functions  $f(x)$  also are found from the system (12). The method of seeking  $f(x)$  and variables  $\omega$  is given in more detail in [2, 6].

Ansatz (11) reduces (10) to the equations for function  $\varphi$  which depends only on three variables  $\omega_1, \omega_2$  and  $\omega_3$ . Thus to construct solutions of (10) using ansatz (11) it is necessary to have the explicit form of the function  $f(x)$  and the new invariant

variables  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . Not going into details we write them. Depending on relations between parameters of the group  $G_2(1, 3)$  there are nine sets  $f(x)$  and  $\omega(x)$ :

- 1)  $f(x) = (1 - x_0^2)^{-3/4} \exp \left[ \frac{1}{2} imx_0 x^2 / (1 - x_0^2) \right]$ ,  $\omega_1 = (\alpha x)(1 - x_0^2)^{-1/2}$ ,  
 $\omega_2 = x^2 (1 - x_0^2)^{-1}$ ,  $\omega_3 = \tanh^{-1} x_0 + \tan^{-1}(\beta x / \gamma x)$ ;
- 2)  $f(x) = x_0^{-3/2} \exp \left( -\frac{1}{2} ix^2 x_0^{-1} \right)$ ,  $\omega_1 = (\alpha x)x_0^{-1}$ ,  
 $\omega_2 = x^2 x_0^{-2}$ ,  $\omega_3 = x_0^{-1} + \tan^{-1}(\beta x / \gamma x)$ ;
- 3)  $f(x) = (1 + x_0^2)^{-3/4} \exp \left( -\frac{1}{2} imx_0 x^2 (1 + x_0^2)^{-1} \right)$ ,  
 $\omega_1 = (\alpha x)(1 + x_0^2)^{-1/2}$ ,  $\omega_2 = x^2 (1 + x_0^2)^{-1}$ ,  
 $\omega_3 = -\tan^{-1} x_0 + \tan^{-1}(\beta x / \alpha x)$ ;
- 4)  $f(x) = x_0^{-3/4}$ ,  $\omega_1 = (\alpha x)x_0^{-1/2}$ ,  $\omega_2 = x^2 x_0^{-1}$ ,  
 $\omega_3 = -\ln x_0 + \tan^{-1}(\beta x / \gamma x)$ ;
- 5)  $f(x) = x_0^{-3/4}$ ,  $\omega_1 = (\alpha x)x_0^{-1/2}$ ,  $\omega_2 = (\beta x)x_0^{-1/2}$ ,  $\omega_3 = (\gamma x)x_0^{-1/2}$ ;
- 6)  $f(x) = 1$ ,  $\omega_1 = \alpha x$ ,  $\omega_2 = x^2$ ,  $\omega_3 = -x_0 + \tan^{-1}(\beta x / \gamma x)$ ;
- 7)  $f(x) = 1$ ,  $\omega_1 = \alpha x$ ,  $\omega_2 = x^2$ ,  $\omega_3 = x_0$ ;
- 8)  $f(x) = \exp \left( -\frac{1}{2} im\alpha x / x_0 \right)$ ,  $\omega_1 = \alpha x + x_0 \beta x$ ,  
 $\omega_2 = \alpha x + x_0 \gamma x$ ,  $\omega_3 = x_0$ ;
- 9)  $f(x) = 1$ ,  $\omega_1 = \alpha x$ ,  $\omega_2 = \beta x$ ,  $\omega_3 = x_0$ ,

where  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  are constant vectors satisfying the conditions

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha = 0.$$

We adduce the explicit form of the reduced equations for the function  $\varphi$ , obtained from ansatz (11) in all nine cases:

- 1)  $L\varphi + 6\varphi_2 - 2im\varphi_3 + m^2\omega_2\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,  
 $L\varphi \equiv \varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1}\varphi_{33} + 4\omega_1\varphi_{12}$ ,
- 2)  $L\varphi + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 3)  $L\varphi + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - m^2\omega_2\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 4)  $L\varphi + im\omega_1\varphi_1 + 2(im\omega_2 + 3)\varphi_2 + 2im\varphi_3 + \frac{3}{2}im\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 5)  $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + im(\omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2 + \omega_3\varphi_3) + \frac{3}{2}im\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 6)  $L\varphi + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 7)  $\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\omega_1\varphi_{12} + 6\varphi_2 - 2im\varphi_3 - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 8)  $\omega_3 \left[ (1 + \omega_3^2)(\varphi_{11} + \varphi_{22}) + \varphi_{12} \right] - 2im(\omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2 + \omega_3\varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi) - 2\lambda m\omega_3|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,
- 9)  $2im\varphi_3 - \varphi_{11} - \varphi_{22} - 2\lambda m|\varphi|^{4/3}\varphi = 0$ ,



where

$$\varphi_a = \partial\varphi/\partial\omega_a, \quad \varphi_{ab} = \partial^2\varphi/\partial\omega_a\partial\omega_b, \quad a, b = \overline{1, 3}.$$

We did not succeed in finding the exact solutions of all of the reduced equations. However, some of them had been solved. Let us write the final form of several exact solutions of (10).

$$u(x) = (1 - x_0^2)^{-3/4} \exp\left[\frac{1}{2}im\mathbf{x}^2(1 - x_0)^{-1}\right], \quad \lambda = \frac{3}{2}i. \quad (13)$$

$$u(x) = (c_0x_0 - \mathbf{c}\mathbf{x})^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}im\mathbf{x}^2x_0^{-1}\right\}, \quad (14)$$

where  $c_0, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  are arbitrary constants, satisfying the condition  $\mathbf{c}^2 = \frac{8}{15}\lambda m$ .

$$u(x) = x_0^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}im(\mathbf{x}^2 - \mathbf{r}\mathbf{x})x_0^{-1}\right], \quad \mathbf{r}^2 = -8\lambda/m. \quad (15)$$

$$u(x) = \left(\frac{8}{3}\lambda\mathbf{x}^2\right)^{-3/4} \exp\left(-\frac{1}{2}im\mathbf{x}^2x_0^{-1}\right). \quad (16)$$

$$u(x) = x_0^{-3/2}\varphi(\omega_1) \exp\left(-\frac{1}{2}im\mathbf{x}^2x_0^{-1}\right), \quad \omega_1 = \mathbf{\alpha}\mathbf{x}/x_0, \quad (17)$$

where function  $\varphi(\omega_1)$  is defined by the elliptic integral

$$\int_0^\varphi d\tau \left(k_1 + \tau^{10/3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{6}{5}\lambda m\right)^{1/2} (\omega_1 + k_2), \quad (18)$$

where  $k_1, k_2$  are arbitrary constants.

$$u(x) = x_0^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}im\mathbf{x}^2x_0^{-1}\right) \varphi(\omega_2), \quad \omega_2 = \mathbf{x}^2/x_0, \quad (19)$$

where function  $\varphi(\omega_2)$  is the solution of the Emden–Fowler equation

$$2\omega_2\varphi_{22} + 3\varphi_2 - \lambda m\varphi^{7/3} = 0. \quad (20)$$

$$u(x) = x_0^{-3/4}\varphi(\omega_1), \quad \omega_1 = (\mathbf{\alpha}\mathbf{x})x_0^{-1/2}, \quad (21)$$

where function  $\varphi(\omega_1)$  is defined by elliptic integral (18).

$$u(x) = \varphi(\omega_2), \quad \omega_2 = \mathbf{x}^2, \quad (22)$$

where  $\varphi(\omega_2)$  is the solution of (20).

$$u(x) = (c_0/3\lambda)^{3/4}x_0^{-1/2} \exp\left(ic_0x_0^{-1/3} - \frac{1}{2}im\mathbf{c}\mathbf{x}/x_0\right), \quad (23)$$

where  $\mathbf{c}^2 = 1$  and  $c_0 = \text{const}$ .

$$u(x) = (c_0/\lambda)^{3/4} \exp(ic_0x_0), \quad (24)$$

$$u(x) = (\lambda_2 x_0)^{-3/4} \exp\left(-i\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 x_0)^{-3/4}\right), \quad (25)$$

where  $\lambda = \frac{3}{4}(\lambda_1 + i\lambda_2)$  and  $\lambda_1, \lambda_2$  are arbitrary real constants.

$$u(x) = (c\mathbf{x})^{-3/2}, \quad c^2 = \frac{8}{15}\lambda m. \quad (26)$$

Formulae (13)–(26) give multiparameter families of exact solutions of the non-linear Schrödinger equation (10). Some of them are of non-perturbative type due to a singularity with respect to the coupling constant  $\lambda$ . Obtained solutions may be used in quantum field theory, and in many non-linear problems of solid state and plasma physics.

In conclusion we adduce the formulae of extension of solutions of (10). If  $u = u_1(x)$  is a given solution of (10) then the new solutions  $u_2, u_3$  may be found by formulae

$$u_2 = u_1(x_0, \mathbf{x} + \mathbf{v}x_0) \exp\left[im\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 x_0 + \mathbf{v}\mathbf{x}\right)\right],$$

$$u_3 = u_1\left(\frac{x_0}{1-ax_0}, \frac{\mathbf{x}}{1-ax_0}\right) (1-ax_0)^{-3/2} \exp\left(\frac{1}{2}im\frac{a\mathbf{x}^2}{1-ax_0}\right),$$

where  $a, \mathbf{v}$  are arbitrary constants. These formulae follow from the fact that (10) admits both groups  $G(1, 3)$  and  $G_2(1, 3)$ .

1. Bluman G.W., Cole J.D., *Similarity methods for differential equations*, Berlin, Springer, 1974.
2. Fushchych W.I., in *Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics*, Kiev, Mathematical Institute, 1981, 6.
3. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, 571.
4. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Fiz. Elem. Chast. Atom. Jadra*, 1981, **12**, 1158 (in Russian).
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Symmetry of Maxwell's equations*, Kiev, Naukova Dumka, 1983 (Engl. transl., Dordrecht, Reidel, 1987).
6. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645.
7. Hagen C.R., *Phys. Rev. D*, 1972, **5**, 377.
8. Lie S., *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328.
9. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 808.
10. Ovsyannikov L.V., *Group analysis of differential equations*, Moscow, Nauka, 1978 (Engl. transl., New York, Academic, 1982).

# О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака

*В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ*

Ansätze are constructed which reduce the Poincaré-invariant equation for the spinor field  $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$  to a system of partial differential equations for the four-component function  $\varphi(\omega)$  depending on three invariant variables  $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ . Multi-parameter families of exact solutions of the nonlinear Dirac equation with the mass term are found. The  $P(1, 3)$ -nonequivalent Ansätze for a vector field are constructed.

Построены анзацы, с помощью которых пуанкаре-инвариантные уравнения для спинорного поля  $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$  сводятся к системе дифференциальных уравнений для четырехкомпонентной функции  $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  зависящей от трех инвариантных переменных. Найдены многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака. Построены  $P(1, 3)$ -неэквивалентные анзацы для векторного поля.

## Введение

Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака для массивного поля

$$[i\gamma\partial - m - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k] \Psi = 0, \quad (1)$$

где  $\Psi = \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$  — 4-компонентный спинор;  $\gamma\partial \equiv \gamma^\nu\partial_\nu = \gamma_0\partial_0 + \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3$ ,  $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x_\nu$ ,  $\nu = 0, \dots, 3$ ;  $\gamma_\nu$  — матрицы Дирака  $4 \times 4$ ;  $m$ ,  $k$ ,  $\lambda$  — произвольные действительные параметры.

О применении уравнений типа (1) к проблемам квантовой теории поля см. [1].

Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (1) является группа Пуанкаре  $P(1, 3)$ , генераторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial_0, & P_a &= -\partial_a, & a &= 1, 2, 3, & J_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \\ M_{\mu\nu} &\equiv x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, & S_{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы (2), как известно (см., например, [2]), образуют алгебру Пуанкаре  $AP(1, 3)$ :

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [P_\sigma, J_{\mu\nu}] &= g_{\sigma\mu}P_\nu - g_{\sigma\nu}P_\mu, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

В случае, когда  $m = 0$ ,  $k = \frac{1}{3}$  ( $(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3}$  — нелинейность Гюрши), уравнение (1) инвариантно относительно конформной группы  $C(1, 3) \supset P(1, 3)$ . С помощью конформной симметрии уравнения (1) (при  $m = 0$ ,  $k = \frac{1}{3}$ ) в [3, 4] построен широкий класс точных решений нелинейного уравнения Дирака. Более сложные нелинейные конформно-инвариантные уравнения Дирака рассмотрены в [5]. Исследования пуанкаре-инвариантных и масштабно-инвариантных решений уравнения (1) (при  $m = 0$  и произвольном  $k$ ) посвящены работы [4, 6].

В настоящей работе на основе идей и методов Ли в явном виде построены анзацы для отыскания решений произвольного пуанкаре-инвариантного уравнения для поля со спином  $\frac{1}{2}$ . Найдены пуанкаре-инвариантные многопараметрические семейства решений уравнения (1) для  $m \neq 0$  и произвольного  $k$ .

Решения уравнения (1), следуя [7], ищем в виде

$$\Psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \quad (3)$$

где  $\varphi(\omega)$  — 4-компонентная функция, зависящая от трех новых переменных  $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ . Спинор  $\Psi(x)$  в исходном уравнении (1) зависит от четырех переменных  $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ , следовательно, анзац (3) редуцирует (сводит) систему (1) к системе с меньшим числом независимых переменных. Матрица  $A(x)$  и новые переменные  $\omega(x)$  находятся из условий [3, 4]

$$Q_1 A(x) = 0, \quad Q_1 \equiv a^\mu P_\mu + C^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, \quad (4)$$

$$Q_2 \omega(x) = 0, \quad Q_2 \equiv a^\mu P_\mu + C^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где  $a^\mu$ ,  $C^{\mu\nu} = -C^{\nu\mu}$  — произвольные параметры.

В том частном случае, когда  $\varphi(\omega)$  зависит только от одной переменной, уравнение (1) с помощью анзаца (3) редуцируется к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Решая систему ОДУ, найдем семейства частных решений уравнения (1). Для реализации этого алгоритма необходимо построить в явном виде матрицы  $A(x)$  и переменные  $\omega(x)$ .

В разделе 1, воспользовавшись результатами Патеры, Винтернитца, Цассенхазы [8] по классификации  $P(1, 3)$ -неэквивалентных подалгебр алгебры Пуанкаре  $AP(1, 3)$ , в явном виде мы получили  $P(1, 3)$ -неэквивалентные анзацы (3). В разделе 2 приведены редуцированные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) для функции  $\varphi(\omega)$ , полученные в результате подстановки анзацев из раздела 1. Для этих редуцированных систем ДУЧП или ОДУ найдены некоторые точные решения, из которых затем построены  $P(1, 3)$ -неразмножаемые семейства решений уравнения (1). В разделе 3 построены явно ковариантные  $P(1, 3)$ -неэквивалентные анзацы для векторного поля.

### 1. $P(1, 3)$ -неэквивалентные анзацы для спинорного поля

Описание анзацев (3) для спинорного поля с алгеброй инвариантности (2) сводится к решению системы (4), которая представляет собой систему шестнадцати ДУЧП первого порядка для матричных элементов матрицы  $A(x)$ . Не вдаваясь в подробности этих довольно громоздких вычислений, приведем здесь ее решение в виде табл. 1, где приведены  $P(1, 3)$ -неэквивалентные анзацы для спинорного поля ( $\alpha \neq 0$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ). При составлении этой таблицы мы воспользовались результатом [8] о том, что алгебра Пуанкаре  $AP(1, 3)$  имеет только 13 одномерных неэквивалентных подалгебр. В соответствии с этим существуют 13 пуанкаре-неэквивалентных анзацев вида (3). Инвариантные переменные  $\omega(x)$  для этих анзацев построены в [9].

На одном конкретном примере продемонстрируем, как находить явный вид анзацев (3). Возьмем в качестве  $Q_1$  оператор № 4 из табл. 1, т.е.  $Q_1 = J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2$ . Уравнения (4), (5) в этом случае принимают вид

$$\left(x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\right) A(x) = 0, \quad (x_1\partial_2 - x_2\partial_1)\omega(x) = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе Лагранжа–Эйлера

$$\frac{dx_0}{0} = \frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{0},$$

для которой легко выписать первые интегралы  $x_1^2 + x_2^2$ ,  $x_0$ ,  $x_3$ . Следовательно, в качестве инвариантных переменных  $\omega(x)$  можно выбрать  $x_1^2 + x_2^2 = \omega_1$ ,  $x_0 = \omega_2$ ,  $x_3 = \omega_3$ .

Матрицу  $A(x)$  ищем в виде  $A(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 f(x) \right\}$ ,  $f(x)$  — некоторая скалярная функция; тогда

$$\begin{aligned} & \left( x_1 \partial_2 - x_1 \partial_1 - \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \right) \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 f(x) \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 [(x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 - 1) f(x)] \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 f(x) \right\} = 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = f.$$

Интегрируя это последнее уравнение, получаем  $f(x) = -\operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}$ , и таким образом, матрица  $A(x)$  имеет вид

$$A(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right\}.$$

Совершенно аналогично проводятся вычисления и для других случаев.

Все анзацы, выписанные в табл. 1, представляют собой полный набор  $P(1, 3)$ -неэквивалентных анзацев для спинорного поля. Они не переводимы друг в друга с помощью операции группового размножения решений. Отметим также, что из спинорного поля можно легко построить поля для других спинов, например скалярное  $\Phi = \bar{\Psi} \Psi$ , векторное  $A_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$ , тензорное  $F_{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi$  и т.д., поэтому анзацы для спинорного поля представляют особый интерес.

## 2. Редукция уравнения (1) и точные решения

Подставим анзацы из табл. 1 в уравнение (1). После довольно громоздких вычислений получим следующие уравнения для  $\varphi(\omega)$  ( $F \equiv \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/3} + m$ ):

$$\gamma_1 \varphi_{\omega_1} + \gamma_2 \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} + iF \varphi = 0, \tag{6.1}$$

$$\gamma_0 \varphi_{\omega_1} + \gamma_1 \varphi_{\omega_2} + \gamma_2 \varphi_{\omega_3} + iF \varphi = 0, \tag{6.2}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi_{\omega_1} + \gamma_2 \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} + iF \varphi = 0, \tag{6.3}$$

$$\gamma_2 \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \gamma_0 \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} + iF \varphi = 0, \tag{6.4}$$

Таблица 1

№	Алгебра	Инвариантные переменные $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$	Анзацы
1	$P_0$	$x_1, x_2, x_3$	$\Psi(x) = \varphi(\omega)$
2	$P_3$	$x_0, x_1, x_2$	$\Psi(x) = \varphi(\omega)$
3	$P_0 + P_1$	$x_0 + x_1, x_2, x_3$	$\Psi(x) = \varphi(\omega)$
4	$J_{12}$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_0, x_3$	$\Psi(x) = \exp\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \times$ $\times \arctg \frac{x_1}{x_2}\}\varphi(\omega)$
5	$J_{03}$	$(x_0^2 - x_3^2)^{1/2}, x_1, x_2$	$\Psi(x) = \exp\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \times$ $\times \ln(x_0 + x_3)\}\varphi(\omega)$
6	$J_{02} + J_{12}$	$x_0 + x_1,$ $(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}, x_3$	$\Psi(x) = \exp\{-\frac{x_2}{2(x_0+x_1)} \times$ $\times \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\}\varphi(\omega)$
7	$\alpha J_{23} - J_{01}$	$(x_0^2 - x_1^2)^{1/2}, \alpha \ln(x_0 + x_1) +$ $+ \arctg \frac{x_2}{x_3}, (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$	$\Psi(x) = \exp\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) -$ $- \frac{1}{2}\arctg \frac{x_2}{x_3}\}\varphi(\omega)$
8	$J_{23} - \frac{\varepsilon}{2}(P_0 + P_1)$	$x_0 + x_1, \varepsilon(x_0 - x_1) +$ $+ \arctg \frac{x_2}{x_3}, (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$	$\Psi(x) = \exp\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \times$ $\times \arctg \frac{x_2}{x_3}\}\varphi(\omega)$
9	$J_{12} + \alpha P_0$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$ $x_0 + \alpha \arctg \frac{x_1}{x_2}, x_3$	$\Psi(x) = \exp\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \times$ $\times \arctg \frac{x_1}{x_2}\}\varphi(\omega)$
10	$J_{12} - \alpha P_3$	$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$ $x_3 + \alpha \arctg \frac{x_1}{x_2}, x_0$	$\Psi(x) = \exp\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \times$ $\times \arctg \frac{x_1}{x_2}\}\varphi(\omega)$
11	$J_{01} - \alpha P_2$	$(x_0^2 - x_1^2)^{1/2},$ $x_2 + \alpha \ln(x_0 + x_1), x_3$	$\Psi(x) = \exp\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \times$ $\times \ln(x_0 + x_1)\}\varphi(\omega)$
12	$J_{02} + J_{12} +$ $+ P_0 - P_1$	$x_0 - x_1 + (x_0 + x_1)x_2 +$ $+ \frac{1}{6}(x_0 + x_1)^3,$ $x_2 + \frac{1}{4}(x_0 + x_1)^3, x_3$	$\Psi(x) = \exp\{\frac{1}{4}(x_0 + x_1) \times$ $\times \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\}\varphi(\omega)$
13	$J_{02} + J_{12} - \varepsilon P_3$	$x_0 + x_1, (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2},$ $x_2 + \varepsilon(x_0 + x_1)x_3,$	$\Psi(x) = \exp\{-\frac{x_2}{2(x_0+x_1)} \times$ $\times \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\}\varphi(\omega)$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + \frac{1}{2} \left[ (\gamma_0 + \gamma_3)\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}(\gamma_0 - \gamma_3) \right] \varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} & (\gamma_0 + \gamma_1) \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \\ & + \left[ (\gamma_0 + \gamma_1) \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} - \gamma_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \right] \varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + \frac{1}{2} \left[ (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}(\gamma_0 - \gamma_1) \right] \varphi_{\omega_1} + \\ & + \left[ \alpha(\gamma_0 + \gamma_1) + \frac{1}{\omega_3}\gamma_2 \right] \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \left( \frac{1}{2\omega_3}\varphi + \varphi_{\omega_3} \right) + iF\varphi = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi_{\omega_1} + \left[ \varepsilon(\gamma_0 - \gamma_1) + \frac{1}{\omega_3}\gamma_2 \right] \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \left( \frac{1}{2\omega_3}\varphi + \varphi_{\omega_3} \right) + iF\varphi = 0, \quad (6.8)$$

$$\gamma_2 \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left( \frac{\alpha}{\omega_1}\gamma_1 + \gamma_0 \right) \varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (6.9)$$

$$\gamma_2 \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left( \frac{\alpha}{\omega_1} \gamma_1 + \gamma_3 \right) \varphi_{\omega_2} + \gamma_0 \varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + \frac{1}{2} \left[ (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1 + (\gamma_0 - \gamma_1)\frac{1}{\omega_1} \right] \varphi_{\omega_1} + [\gamma_2 + \alpha(\gamma_0 + \gamma_1)] \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (6.11)$$

$$[\gamma_0 - \gamma_1 + (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_2] \varphi_{\omega_1} + \gamma_2 \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (6.12)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left[ (\gamma_0 + \gamma_1) \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} - \gamma_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \right] \varphi_{\omega_2} + \left[ (\gamma_0 + \gamma_1) \frac{\omega_3}{\omega_1} + \gamma_2 + \varepsilon\omega_1\gamma_3 \right] \varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0. \quad (6.13)$$

Здесь  $\varphi_{\omega_a} \equiv \partial\varphi/\partial\omega_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ ; каждое из уравнений (6.1)–(6.13) получено с помощью анзаца соответствующего номера из табл. 1.

Для того чтобы найти некоторые частные решения систем (6.1)–(6.13), совершим в них (там, где это возможно) прямую редукцию к системам ОДУ или к системам ДУЧП с двумя независимыми переменными. Соответственно будем иметь ( $F \equiv \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^k + m$ )

$$\gamma_1 \varphi_{\omega_1} + iF\varphi = 0, \quad (7.1)$$

$$\gamma_0 \varphi_{\omega_1} + iF\varphi = 0, \quad (7.2)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi_{\omega_1} + \gamma_2 \varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0, \quad (7.3)$$

$$\gamma_2 \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + iF\varphi = 0, \quad (7.4)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + \gamma_1 \varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0, \quad (7.5)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + \frac{1}{2} \left[ (\gamma_0 + \gamma_3)\omega_1 + \frac{1}{\omega_1}(\gamma_0 - \gamma_3) \right] \varphi_{\omega_1} + iF\varphi = 0, \quad (7.5a)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (7.6)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left[ (\gamma_0 + \gamma_1) \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} - \gamma_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \right] \varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0, \quad (7.6a)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + \gamma_3 \left( \frac{1}{2\omega_3} \varphi + \varphi_{\omega_3} \right) + iF\varphi = 0, \quad (7.7)$$

$$\left[ \varepsilon(\gamma_0 - \gamma_1) + \frac{1}{\omega_3} \gamma_2 \right] \varphi_{\omega_2} + \gamma_3 \left( \frac{1}{2\omega_3} \varphi + \varphi_{\omega_3} \right) + iF\varphi = 0, \quad (7.8)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi_{\omega_1} + \gamma_3 \left( \frac{1}{2\omega_3} \varphi + \varphi_{\omega_3} \right) + iF\varphi = 0, \quad (7.8a)$$

$$\gamma_2 \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left( \frac{\alpha}{\omega_1} \gamma_1 + \gamma_0 \right) \varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0, \quad (7.9)$$

$$\gamma_2 \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left( \frac{\alpha}{\omega_1} \gamma_1 + \gamma_3 \right) \varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0, \quad (7.10)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [\gamma_2 + \alpha(\gamma_0 + \gamma_1)]\varphi_{\omega_2} + iF\varphi = 0, \quad (7.11)$$

$$\gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \quad (7.12)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \left( \varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \varphi \right) + \left[ (\gamma_0 + \gamma_1) \frac{\omega_3}{\omega_1} + \gamma_2 + \varepsilon\omega_1\gamma_3 \right] \varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0. \quad (7.13)$$

(каждому уравнению (7.1)–(7.13) отвечает анзац соответствующего номера табл. 1 с  $\varphi(\omega)$ , зависящей от одной или двух инвариантных переменных  $\omega$ ).

Выпишем некоторые решения систем (7.1)–(7.13) ( $\chi$  — постоянный спинор),  $f(\omega)$  — произвольная дифференцируемая действительная функция,  $\varkappa = \lambda(\bar{\chi}\chi)^k + m$ :

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\varkappa\gamma_1\omega_1\}\chi, \quad (8.1)$$

$$\varphi(\omega) = \exp\{-i\varkappa\gamma_0\omega_1\}\chi, \quad (8.2)$$

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\varkappa\gamma_2\omega_2\} \exp\{i(\gamma_0 + \gamma_1)f(\omega_1)\}\chi, \quad (8.3)$$

$$\varphi(\omega) = (\gamma_0 + \gamma_1) \exp\{-i(m\gamma_2\omega_2 + f(\omega_1))\}\chi, \quad (8.3a)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} \exp\{i\gamma_2g(\omega_1)\}\chi,$$

$$g(\omega_1) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-k}(\bar{\chi}\chi)^k\omega_1^{1-k} + m\omega_1, & k \neq 1, \\ \lambda(\bar{\chi}\chi) \ln \omega_1 + m\omega_1, & k = 1, \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\varphi(\omega) = \exp\left\{i\gamma_1 \left[ \varkappa - \frac{i}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) \right] \omega_2 \right\} \chi, \quad (8.5)$$

$$\varphi(\omega) = (\gamma_0 + \gamma_1) \exp\{-i(m\gamma_3\omega_3 + f(\omega_1))\}\chi, \quad (8.6)$$

$$\varphi(\omega) = \omega_3^{-1/2}(\gamma_0 + \gamma_1) \exp\{-im\gamma_3\omega_3\}\chi, \quad (8.7)$$

$$\varphi(\omega) = \omega_3^{-1/2} \exp\{i\gamma_3g(\omega_3)\} \exp\{i(\gamma_0 + \gamma_1)f(\omega_1)\}\chi,$$

$$g(\omega_3) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-k}(\bar{\chi}\chi)^k\omega_3^{1-k} + m\omega_3, & k \neq 1, \\ \lambda(\bar{\chi}\chi) \ln \omega_3 + m\omega_3, & k = 1, \end{cases} \quad (8.8)$$

$$\varphi(\omega) = \exp\left\{i[\gamma_2 + \alpha(\gamma_0 + \gamma_1)] \left( \varkappa - \frac{i}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \right) \omega_2 \right\} \chi, \quad (8.11)$$



$$\varphi(\omega) = \exp\{i\gamma_2 \kappa \omega_2\} \chi. \quad (8.12)$$

Решения (8.1)–(8.12) инвариантны только относительно подгрупп группы  $P(1, 3)$ . Исходное же уравнение (1) пуанкаре-инвариантно, поэтому применим к (8.1)–(8.12) операцию группового размножения решений [3, 4]. В результате получим следующие многопараметрические семейства решений уравнения (1), имеющие явно ковариантный вид и обладающие свойством  $P(1, 3)$ -неразмножаемости (понятие  $G$ -неразмножимых решений введено в работе [10]):

$$\Psi(x) = \exp\{i\kappa(\gamma a) ay\} \chi,$$

$$\Psi(x) = \exp\{-i\kappa(\gamma d) dy\} \chi,$$

$$\Psi(x) = \exp\{i\kappa(\gamma b) by\} \exp\{i(\gamma a + \gamma d) f(ay + dy)\} \chi,$$

$$\Psi(x) = (\gamma a + \gamma d) \exp\{-i[m(\gamma b) by + f(ay + dy)]\} \chi,$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma b) \operatorname{arctg} \frac{ay}{by}\right\} \exp\{i(\gamma b) g(\omega)\} \chi,$$

$$\omega = [(ay)^2 + (by)^2]^{1/2},$$

$$\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma c)(\gamma d) \ln(cy + dy)\right\} \exp\left\{(\gamma a) \left[i\kappa + \frac{1}{2}(\gamma c + \gamma d) ay\right]\right\} \chi,$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \exp\left\{-\frac{by}{2(ay + dy)}(\gamma b)(\gamma a + \gamma d)\right\} \times \\ \times (\gamma a + \gamma d) \exp\{-i[m(\gamma c) cy + f(ay + dy)]\} \chi, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma b)(\gamma c) \operatorname{arctg} \frac{by}{cy} - \frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma d) \ln(ay + dy)\right\} \times \\ \times (\gamma a + \gamma d) \exp\{-im(\gamma c)\omega\} \chi, \quad \omega = [(by)^2 + (cy)^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma b)(\gamma c) \operatorname{arctg} \frac{by}{cy}\right\} \exp\{i(\gamma c) g(\omega)\} \times \\ \times \exp\{i(\gamma a + \gamma d) f(ay + dy)\} \chi, \quad \omega = [(by)^2 + (cy)^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma d)(\gamma a) \ln(ay + dy)\right\} \times \\ \times \exp\left\{i[\gamma b + \alpha(\gamma a + \gamma d)] \left[\kappa - \frac{1}{2}i(\gamma a + \gamma d) (by + \alpha \ln(ay + dy))\right]\right\} \chi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{4}(\gamma a + \gamma d)(\gamma b)(ay + dy)\right\} \times \\ \times \exp\left\{i\kappa(\gamma b) \left(by + \frac{1}{4}(ay + dy)^2\right)\right\} \chi. \end{aligned}$$

В формулах (9)  $\varkappa = \lambda(\bar{\chi}\chi)^k + m$ ,  $y_\mu = x_\mu + \delta_\mu$ ;  $\delta_\mu$ ,  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_\mu$ ,  $d_\mu$  — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a^2 \equiv a_\mu a^\mu = b^2 = c^2 = -d^2 = -1, \quad ab = bc = da = ac = bd = 0, \quad (10)$$

$f(\omega)$  — произвольная дифференцируемая функция,

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-k}(\bar{\chi}\chi)^k \omega^{1-k} + m\omega, & k \neq 1, \\ \lambda(\bar{\chi}\chi) \ln \omega + m\omega, & k = 1 \end{cases}$$

**Замечание.** Приведенные нами анзацы, вообще говоря, не исчерпывают всех анзацев, при которых нелинейное уравнение Дирака редуцируется к уравнениям с меньшим числом независимых и зависимых переменных [11].

Так, например, анзац вида (получен совместно с Р.З. Ждановым)

$$\Psi(x) = \left[ f(u) + i \left( \gamma_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \right) g(u) \right] \chi, \quad \chi = \text{const},$$

где  $u = u(x)$  — скалярная функция, удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} = \varepsilon, \quad \square u = \frac{N}{u}, \quad N = -2, -1, 0, \dots, 3, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (11)$$

редуцирует нелинейное уравнение Дирака (1) к системе ОДУ для скалярных функций  $f$  и  $g$ :

$$\begin{aligned} \dot{f} &= g \left( \lambda (f^2 + \varepsilon g^2)^k + m \right), \\ \dot{g} &= -f \left( \lambda (f^2 + \varepsilon g^2)^k + m \right) - \frac{N}{u} g \quad \left( \dot{f} \equiv \frac{df}{du}, \dot{g} \equiv \frac{dg}{du} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Обобщая результат Коллинза [12], выпишем общее решение системы (11)

$$u(x) = \begin{cases} [(ay)^2 + (by)^2 + (cy)^2]^{1/2}, & \varepsilon = -1, \quad N = -2, \\ [(ay)^2 + (by)^2]^{1/2}, & \varepsilon = -1, \quad N = -1, \\ ay + F(by + dy), & \varepsilon = -1, \quad N = 0, \\ dy, & \varepsilon = 1, \quad N = 0, \\ [(dy)^2 - (ay)^2]^{1/2}, & \varepsilon = 1, \quad N = 1, \\ [(dy)^2 - (ay)^2 - (by)^2]^{1/2}, & \varepsilon = 1, \quad N = 2, \\ \sqrt{y^\nu y_\nu}, & \varepsilon = 1, \quad N = 3, \end{cases}$$

где  $y_\nu = x_\nu + \delta_\nu$ ,  $\delta_\nu$ ,  $a_\nu$ ,  $b_\nu$ ,  $c_\nu$ ,  $d_\nu$  — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (10),  $F$  — произвольная дифференцируемая функция.

Решения системы (12) будут опубликованы в другой работе.

### 3. Неэквивалентные анзацы для векторного поля

Как уже упоминалось, зная анзацы для спинорного поля, можно построить по формуле  $A_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$  анзацы для векторного поля  $A_\mu$ .

Таблица 2

№	Инвариантные переменные $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$	Анзацы
1	$ax, bx, cx$	$A_\mu(x) = B_\mu(\omega)$
2	$dx, ax, bx$	$A_\mu(x) = B_\mu(\omega)$
3	$ax + dx, bx, cx$	$A_\mu(x) = B_\mu(\omega)$
4	$[(ax)^2 + (bx)^2]^{1/2}, dx, cx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + (1 - \frac{bx}{\omega_1})(b_\mu b_\sigma + a_\mu a_\sigma) + \frac{ax}{\omega_1}(b_\mu b_\sigma - b_\sigma a_\mu)]B^\sigma(\omega)$
5	$[(dx)^2 - (cx)^2]^{1/2}, ax, bx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + \frac{(dx+cx)^2-1}{2(dx+cx)}(d_\mu c_\sigma - c_\mu d_\sigma) - \frac{(dx+cx-1)^2}{2(dx+cx)}(c_\mu c_\sigma - d_\mu d_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
6	$dx + cx,$ $[(dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2]^{1/2}, cx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + \frac{bx}{ax+dx}(d_\mu + a_\mu)b_\sigma - b_\mu(a_\sigma + d_\sigma) + \frac{1}{2}(\frac{bx}{ax+dx})^2(b_\mu b_\sigma + (a_\mu + d_\mu) \times (a_\sigma + d_\sigma))]B^\sigma(\omega)$
7	$[(dx)^2 - (ax)^2]^{1/2},$ $\alpha \ln(dx + ax) + \arctg \frac{bx}{cx},$ $[(bx)^2 + (cx)^2]^{1/2}$	$A_\mu(x) = \{g_{\mu\sigma} - \frac{(dx+ax-1)^2}{2(dx+ax)}(a_\mu a_\sigma + d_\mu d_\sigma) + \frac{(dx+ax)^2-1}{2(dx+ax)}(d_\mu a_\sigma - d_\sigma a_\mu) + (1 - \frac{cx}{\omega_3}) \times (b_\mu b_\sigma + c_\mu c_\sigma) + \frac{bx}{\omega_3}(c_\mu b_\sigma - b_\mu c_\sigma)\}B^\sigma(\omega)$
8	$dx + ax, \varepsilon(dx - ax) +$ $+\arctg \frac{bx}{cx}, [(bx)^2 + (cx)^2]^{1/2}$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + (1 - \frac{cx}{\omega_3})(b_\mu b_\sigma + c_\mu c_\sigma) + \frac{bx}{\omega_3}(c_\mu b_\sigma - b_\mu c_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
9	$[(ax)^2 + (bx)^2]^{1/2},$ $dx + \alpha \arctg \frac{ax}{bx}, cx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + (1 - \frac{bx}{\omega_1})(b_\mu b_\sigma + a_\mu a_\sigma) + \frac{ax}{\omega_1}(b_\mu a_\sigma - b_\sigma a_\mu)]B^\sigma(\omega)$
10	$[(ax)^2 + (bx)^2]^{1/2},$ $cx + \alpha \arctg \frac{ax}{bx}, dx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + (1 - \frac{bx}{\omega_1})(b_\mu b_\sigma + a_\mu a_\sigma) + \frac{ax}{\omega_1}(b_\mu a_\sigma - b_\sigma a_\mu)]B^\sigma(\omega)$
11	$[(dx)^2 - (ax)^2]^{1/2},$ $bx + \alpha \ln(dx + ax), cx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + \frac{(dx+ax)^2-1}{2(dx+ax)}(d_\mu a_\sigma - d_\sigma a_\mu) - \frac{(dx+ax-1)^2}{2(dx+ax)}(a_\mu a_\sigma + d_\mu d_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
12	$dx - ax + (dx + ax)bx +$ $+\frac{1}{6}(dx + ax)^3,$ $bx + \frac{1}{4}(dx + ax)^2, cx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}(dx + ax)(b_\mu(a_\sigma + d_\sigma) - (a_\mu + d_\mu)b_\sigma) + \frac{1}{8}(dx + ax)^2 \times ((a_\mu + d_\mu)(a_\sigma + d_\sigma) + b_\mu b_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
13	$dx + ax,$ $[(dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2]^{1/2},$ $bx + \varepsilon(dx + ax)cx$	$A_\mu(x) = [g_{\mu\sigma} + \frac{bx}{ax+dx}((a_\mu + d_\mu)b_\sigma - b_\mu(a_\sigma + b_\sigma)) + \frac{1}{2}(\frac{bx}{dx+ax})^2 \times (b_\mu b_\sigma + (a_\mu + d_\mu)(a_\sigma + d_\sigma))]B^\sigma(\omega)$

Примечание. Здесь  $\alpha \neq 0, \varepsilon = \pm 1; a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$  — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (10).

Ниже с помощью результатов раздела 1 построены  $P(1,3)$ -неэквивалентные явно ковариантные анзацы для векторного поля. Эти анзацы можно использовать для поиска решений уравнений электродинамики, релятивистской гидродинамики, уравнений Янга–Миллса и многих других.  $P(1,3)$ -неэквивалентные анзацы для векторного поля приведены в табл. 2.

1. Нелинейная квантовая теория поля, Сб. статей под ред. Д.Д. Иваненко, М., ИЛ, 1959.
2. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, К., Наук. думка, 1983.
3. Фушич В.И., Штелен В.М., ДАН СССР, 1983, **269**, 88–92.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., J. Phys. A, 1983, **16**, 271–277.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., Phys. Lett. B, 1985, **159**, 189–191.
6. Фушич В.И., Жданов Р.З., в кн. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, К., Ин-т математики АН УССР, 1985, 20–30.

7. Фушич В.И., в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, К., Ин-т математики АН УССР, 1981, 6.
8. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
9. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
10. Фушич В.И., в кн. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, К., Ин-т математики АН УССР, 1985, 4–19.
11. Фушич В.И., *Укр. матем. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
12. Collins C.B., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–173.

# On a reduction and solutions of non-linear wave equations with broken symmetry

W.I. FUSHCHYCH, I.M. TSYFRA

A generalised definition for invariance of partial differential equations is proposed. Exact solutions of the equations with broken symmetry are obtained.

Let us consider the non-linear wave equation

$$\begin{aligned} \square u + F_1(u) &= 0, & u &= u(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ \square &= \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2, & \partial_\mu &= \partial/\partial x_\mu, & \mu &= 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $F_1(u)$  is an arbitrary smooth function. The ansatz

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x) \quad (2)$$

suggested by Fushchych [5] was used to construct the family of exact solutions of equations (1).  $f(x)$ ,  $g(x)$  are given functions,  $\varphi(\omega)$  is the function to be determined and  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  are new invariant variable. Wide classes of exact solutions of equation (1) have been constructed by Fushchych and Serov [7, 8], Fushchych et al [10] and Fushchych and Shtelen [9]. It is important to note that Poincaré invariance of equation (1) was used.

The possibility of using an ansatz of type (2) to find exact solutions of the non-linear wave equations with broken symmetry naturally arises in connection with the fact that many equations of theoretical physics are not invariant with respect to the Poincaré, Galilei and Euclidean groups. A more specific formulation of this problem is as follows: are we able to construct the solutions of wave equations not invariant with respect to the Lorentz groups, for example, but nevertheless with the help of the Lorentz-invariant ansatz?

The present letter suggests an affirmative answer to this question, i.e. we construct the many-dimensional non-linear wave equations with broken symmetry. The multi-parametrical exact solutions of these equations are found with the help of ansatz (2), previously used to find exact solutions of Poincaré- and Galilei-invariant equations only. It is obvious that ansatz (2) cannot be applied to the equations with arbitrary breakdown of symmetry, which is why the equation with the breakdown of symmetry should have some hidden symmetry. The set of equations with such symmetry was considered by Fushchych and Nikitin [6]. We do not deal with the symmetry of all the solutions of the equations but only with a definite subset of solutions, which may be much wider than the symmetry of the equation itself. This idea will be used below.

Let us consider the wave equation with broken symmetry

$$Lu \equiv \square u + F(x, u, u) = 0, \quad (3)$$

where  $F(x, u, u)$  is an arbitrary smooth function, depending on  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $u \equiv (\partial u / \partial x_0, \partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \partial u / \partial x_3)$ . Following Fushchych [3] we generalise the Lie definition of invariance of equation (3).

**Definition.** We shall say that equation (3) is invariant with respect to some set of operators  $\hat{Q} = \{\hat{Q}_A\}$ ,  $A = 1, 2, \dots, N$ , a number of linearly independent operators, if the following condition is fulfilled:

$$\hat{Q}_A L u \Big|_{\substack{Lu=0, \\ \{\hat{Q}_A u\}=0}} = 0, \quad (4)$$

where  $\{\hat{Q}_A u\} = 0$  is a set of equations

$$\hat{Q}_A u = 0, \quad D\hat{Q}_A u = 0, \quad D^2\hat{Q}_A u = 0, \quad \dots, \quad D^n\hat{Q}_A u = 0, \quad (5)$$

where  $D$  is an operator of total differentiation. Condition (4) is a necessary condition for reduction of differential equations.

Definition (4) is a generalisation of the Lie definition (see, e.g., Ovsyannikov [12])

$$\hat{Q}_A L u \Big|_{Lu=0} = 0, \quad (6)$$

where  $\hat{Q}_A$  are a number of first-order differential operators forming a Lie algebra.

To demonstrate the efficacy of definition (4) and to find exact solutions of equation (3) we choose the function  $F$  in a form

$$F = - \left( \frac{\lambda_0}{x_0} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\lambda_1}{x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\lambda_2}{x_2} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\lambda_3}{x_3} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2, \quad (7)$$

where  $\lambda_\mu$  are arbitrary parameters and  $x_\mu \neq 0$ .

**Theorem.** The maximal local (in the Lie sense) invariance group of equations (3) and (7) is the two-parametrical group of the transformations

$$x_\mu = e^a x_\mu, \quad u' = e^{2a} u \quad (8)$$

and

$$u' = u + c, \quad c = \text{constant},$$

where  $a$  is real parameter.

The proof of the theorem is reduced to application of the well known Lie algorithm and we do not present it here. One can make sure non-linearity breaks the rotational and translational symmetry.

Now we show that the Lorentz-non-invariant equations (3) and (7) are reduced to an ordinary differential equation with the help of the Lorentz-invariant ansatz

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (9)$$

Substituting (9) into (3) and (7) we obtain the ordinary differential equation

$$\omega \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + 2 \frac{d\varphi}{d\omega} = -\lambda^2 \left( \frac{d\varphi}{d\omega} \right)^2, \quad \lambda^2 = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2. \quad (10)$$

Solving equation (10), we obtain

$$\varphi(\omega) = 2 (-\lambda^2)^{-1/2} \tan^{-1} \left[ \omega (-\lambda^2)^{-1/2} \right], \quad -\lambda^2 > 0, \quad (11)$$

$$\varphi(\omega) = -(\lambda^2)^{-1/2} \ln \left( \frac{(\lambda^2)^{1/2} + \omega}{(\lambda^2)^{1/2} - \omega} \right), \quad -\lambda^2 < 0. \quad (12)$$

Thus the Lorentz-non-invariant (in the Lie sense) equations (3) and (7) are reduced to an ordinary differential equation.

Formulae (11) and (12) give a Lorentz-invariant family of solutions of equations (3) and (7). It means that the following set of conditions is fulfilled:

$$J_{\mu\nu}u(x) = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$J_{0a} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (14)$$

for the set of solutions (11) and (12).

The operators (14) generate Lorentz transformations. Equations (13) are the concrete realisation of the first equation of (5). In this case the index  $A$  varies from 1 to 6.

Thus, equations (13) pick out a Lorentz-invariant subset of the set of all solutions of equations (3) and (7). In other words, equations (3) and (7) are Lorentz-invariant in the sense of definition (4).

Now let us consider the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \Delta u (\nabla u)^2, \quad \lambda = \frac{1}{3} m^2. \quad (15)$$

It is simple to verify that equation (15) is not invariant with respect to Galilean transformations, generated by operators

$$G_a = t \frac{\partial}{\partial x_a} + m x_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (16)$$

In this case equations  $\{\hat{Q}_A u\} = 0$  are

$$G_a u = t \frac{\partial u}{\partial x_a} - m x_a u = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_a u) = 0. \quad (18)$$

Thus equation (15) is invariant under transformations generated by operators (16) in the sense of definition (4). It means that the subset of solutions of equations (15) picked out by means of conditions (17) and (18) is invariant under Galilean transformations while equation (15) is not invariant under these transformations.

The Galilean-invariant ansatz has the form

$$u = \varphi(t) + m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2t, \quad \omega = t, \quad f = 1. \quad (19)$$

Substituting (19) into (15), we obtain

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad u = m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2t + At + C, \quad (20)$$

where  $A$  and  $C$  are arbitrary constants.

A generalised definition of the invariance (4) can be applied to the system of partial differential equations.

Let us consider, for example, a non-linear Dirac system of equations:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \partial^\mu \psi + g [2\bar{\psi}(x_\mu \partial^\mu) \psi - (x^2/c_\alpha x^\alpha) \bar{\psi}(c_\mu \partial^\mu) \psi] M^{-1}(x)(\bar{\psi}\psi)^{1/3} \psi &= 0, \\ M(x) = 2(c_\alpha x^\alpha)^{-1} \bar{\psi} S_{\mu\nu} c^\mu \beta^\nu \psi + \bar{\psi} \psi, & \\ S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} i(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad \mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3, & \end{aligned} \quad (21)$$

where  $g$ ,  $\beta_\mu$ ,  $c_\alpha$  are arbitrary parameters.

Equation (21) is not invariant under conformal transformations. Nevertheless, it is reduced to the system of ordinary differential equations

$$i\gamma_\mu \beta^\mu \frac{d\varphi}{d\omega} + g(\bar{\varphi}\varphi)^{1/3} \varphi = 0 \quad (22)$$

with the help of the conformally invariant ansatz (4)

$$\psi(x) = [\gamma_\mu x^\mu / (x^2)^2] \varphi(\omega), \quad \omega = \beta_\mu x^\mu / x^2, \quad \beta^2 \neq 0, \quad x^2 = x_\mu x^\mu \neq 0, \quad (23)$$

where  $\varphi(\omega)$  is the four-component spinor depending on a variable  $\omega$ . The general solution of equation (22) is the vector function

$$\varphi = \exp \left[ -i \frac{\gamma_\mu \beta^\mu}{\beta^2} g(\bar{\chi}\chi)^{1/3} \omega \right] \chi, \quad (24)$$

where  $\chi$  is a constant spinor.

Equation (21) is invariant under the transformations generated by the operator  $c_\mu K^\mu$  on a set of solutions of the equations

$$\begin{aligned} c_\mu K^\mu \psi &= 0, \\ c^\mu K_\mu &= 2(cx)(x\partial) - x^2(c\partial) + 2(cx) - (\gamma c)(\gamma x). \end{aligned} \quad (25)$$

In conclusion we note that an idea like the one set forward here was used by Bluman and Cole [2], Ames [1], Fokas [3] and Olver and Rosenau [11], as was kindly indicated by the referee.

We are grateful to the referee for his valuable remarks.

1. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol.2, New York, Academic, 1972.
2. Bluman G.W., Cole I.D., *J. Math. Mech.*, 1969, **18**, 1025–1042.
3. Fokas A.S., PhD thesis, California Institute of Technology, 1979.



4. Fushchych W.I., *Dokl. Akad. Nauk*, 1979, **246**, 846–850.
5. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Kiev, Mathematical Institute, 1981, 6–28.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetry of Maxwell Equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983.
7. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A: Math Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
8. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl. Akad. Nauk*, 1983, **273**, 543.
9. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
10. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, 189–191.
11. Olver P.J., Rosenau P., *Phys. Lett. A*, 1986, **114**, 107–112.
12. Ovsyannikov L.V., The group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978.

# Об одном обобщении метода разделения переменных для линейных систем дифференциальных уравнений

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

Показано, что процедура построения решений в разделенных переменных тесно связана с исследованием совместности некоторой переопределенной системы дифференциальных уравнений.

1. Метод разделения переменных является одним из наиболее эффективных классических методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Его тесная связь с теоретико-групповыми свойствами уравнений была понята совсем независимо [1, 2]. Она состоит в том, что решение в разделенных переменных и параметры разделения являются соответственно собственной функцией и собственными значениями некоторого набора операторов  $\{\Sigma_i\}$  симметрии рассматриваемого уравнения. Иначе говоря, справедливы равенства

$$L\psi \equiv \{a_\mu(x)\partial_{x_\mu} + a(x)\}\psi(x) = 0, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \quad (1)$$

$$\Sigma_i\psi = \lambda_i\psi, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

где  $a_\mu, a$  — переменные  $(m \times m)$ -матрицы,  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ ,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $\lambda_i = \text{const}$ ,  $\Sigma_i$  — дифференциальные операторы, образующие  $(n-1)$ -мерную абелеву алгебру Ли симметрии уравнения (1), т.е. они удовлетворяют условиям

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = \Sigma_i\Sigma_j - \Sigma_j\Sigma_i = 0, \quad (3)$$

$$[L, \Sigma_i]\psi \Big|_{L\psi=0} = 0. \quad (4)$$

Поэтому решения уравнения (1), удовлетворявшие условиям (2), естественно называть решениями в разделенных переменных.

Система дифференциальных уравнений (1), (2) является переопределенной и условия (3), (4) обеспечивают ее совместность. Наше основное наблюдение состоит в том, что требования (3), (4) можно значительно ослабить и тем самым обобщить классическое определение разделения переменных.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Система уравнений

$$\begin{aligned} L\psi &= 0, \\ Q_i\psi &\equiv \{b_i^\mu(x)\partial_{x_\mu} + b_i(x)\}\psi(x) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $b_i^\mu$ ,  $b_i$  — переменные матрицы  $(m \times m)$ , совместна, если

$$\begin{aligned} [Q_i, L] &= B_i^k Q_k + B_i L, \\ [Q_i, Q_j] &= R_{ij}^k Q_k + R_{ij} L, \quad i, j, k = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a^0(x) & a^1(x) & \cdots & a^{n-1}(x) \\ b_1^0(x) & b_1^1(x) & \cdots & b_1^{n-1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1}^0(x) & b_{n-1}^1(x) & \cdots & b_{n-1}^{n-1}(x) \end{pmatrix} = m \times n \quad (7)$$

условия (6) являются необходимыми и достаточными.

В (6)  $B_i^k$ ,  $B_i$ ,  $R_{ij}^k$ ,  $R_{ij}$  — некоторые дифференциальные операторы первого порядка с матричными коэффициентами.

**Доказательство.** Проведем доказательство в предположении, что условие (7) выполнено.

Если в (4)  $b_i^\mu(x) = \delta_i^\mu \delta_i(x)$ , где  $\delta_i^\mu$  — символ Кронекера, то система (5) может быть записана в виде

$$\partial_{x_\mu} \psi = A_\mu(x) \psi, \quad (8)$$

причем  $A_0 = -a_0^{-1}(a_i A_i + a)$ .

Хорошо известно (см., например, [3]), что необходимые и достаточные условия совместности системы дифференциальных уравнений (8) таковы:

$$[\partial_{x_\mu} - A_\mu, \partial_{x_\nu} - A_\nu] = \partial_{x_\nu} A_\mu - \partial_{x_\mu} A_\nu + [A_\mu, A_\nu] = 0. \quad (9)$$

Следовательно, для системы (8) утверждения теоремы справедливы. Идея доказательства состоит в том, что система (5) может быть получена из (8) последовательным применением преобразований эквивалентности

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L, \\ Q_i &\rightarrow Q'_i = \begin{cases} Q_i, & i \neq k, \\ W_i Q_i, & i = k, \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где  $W_i = W_i(x)$  — невырожденные переменные матрицы  $(m \times m)$ .

**Замечание.** Если в (6)  $R_{ij} \equiv 0$ ,  $B_i^k \equiv 0$ ,  $B_i$  —  $(m \times m)$ -матрицы,  $R_{ij}^k$  — константы, то требование (6) означает, что операторы  $Q_i$  образуют  $(n-2)$ -мерную алгебру Ли инвариантности уравнения (1). Если же  $R_{ij} \equiv 0$ ,  $B_i^k \equiv 0$ , то  $Q_i$  — нелиевские операторы симметрии уравнения (1) (см. [4]). Наконец, если не все  $R_{ij}$ ,  $P_i^k$  равны нулю, то мы имеем дело с так называемой нарушенной симметрией [5–6].

**Следствие.** Пусть операторы  $Q_i$  образуют супералгебру Ли инвариантности уравнения (1), тогда система (5) совместна.

Таким образом, для того чтобы строить решения в разделенных переменных систем дифференциальных уравнений в частных производных, необходимо уметь классифицировать алгебраические объекты типа (5), частным случаем которых являются алгебры и супералгебры Ли. К настоящему времени эта задача нами частично решена лишь для алгебр Ли и некоторых простейших супералгебр.

Из доказательства теоремы следует, что при выполнении условия (7) систему (5) можно заменить эквивалентной ей системой дифференциальных уравнений (8). Если известно частное решение уравнений (9), то, подставляя его в систему (8) и находя ее общее решение, получаем решение в разделенных переменных исходной системы дифференциальных уравнений (1). Оказывается, что в ряде случаев с систему (9) решать проще, чем систему (1).

**2.** Эффективность нашего подхода продемонстрируем на линейном уравнении Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_{x_\mu} - m)\psi(x) = 0, \quad (11)$$

где  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака размерности  $(4 \times 4)$ ,  $\psi(x)$  — четырехкомпонентный дираковский спинор.

Стандартное определение разделения переменных в уравнении Дирака (в декартовых координатах) таково [7, 8]:

$$\psi(x) = V_0(x_0)V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3)\chi, \quad (12)$$

где  $V_\mu$  — переменные  $(4 \times 4)$ -матрицы. Решения вида (12) получаются из (8), если положить  $A_i = A_i(x_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . При этом условия (9) примут вид

$$\partial_{x_i} A_0 = [A_i(x_i), A_0], \quad (13)$$

$$[A_i(x_i), A_j(x_j)] = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

где  $A_0 = -\gamma_0 \gamma_k A_k - im\gamma_0$ .

**Предложение 1.** Система дифференциальных уравнений (13), (14) совместна.

Чтобы доказать это утверждение, необходимо убедиться в справедливости тождества

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} A_0 = \partial_{x_i} [A_j, A_0] = \partial_{x_j} [A_i, A_0] = \partial_{x_j} \partial_{x_i} A_0.$$

Но

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} [A_j, A_0] &= [A_j, \partial_{x_i} A_0] = [A_j, [A_i, A_0]] = \\ &= [A_i, [A_j, A_0]] = [A_i, \partial_{x_j} A_0] = \partial_{x_j} [A_i, A_0], \end{aligned}$$

что и требовалось.

**Предложение 2.** Общее решение системы уравнений (8) имеет вид

$$\psi(x) = \exp\{A_0 x_0\} U_1(x_1) U_2(x_2) U_3(x_3) \chi, \quad (15)$$

где

$$U_i(x_i) = I + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\theta_i}^{x_i} A_i(x_i) \cdots \int_{\theta_i}^{x_i} A_i(x_i) d^n x_i}_{n \text{ раз}}, \quad (16)$$

$A_i(x_i)$  — произвольные  $(4 \times 4)$ -матрицы, удовлетворяющие условиям (13), (14),  $\chi$  — произвольный постоянный спинор.

**Доказательство.** Покажем, что формула

$$\psi(x) = \exp\{A_0 x_0\} \varphi(\vec{x}) \quad (17)$$

даёт решение системы (8), если

$$\partial_{x_i} \varphi = A_i(x_i) \varphi, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (18)$$

Действительно, в силу того, что  $\partial_{x_0} A_0 \equiv 0$ , имеем  $\partial_{x_0} \psi = A_0 \psi$ , кроме того,

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \psi &= \partial_{x_i} \left\{ \sum_n \frac{(x_0)^n}{n!} A_0^n \right\} \varphi(\vec{x}) = \\ &= \left\{ \sum_n \frac{(x_0)^n}{n!} A_0^n \right\} \partial_{x_i} \varphi + \left\{ \sum_n \frac{(x_0)^n}{n!} \partial_{x_i} A_0^n \right\} \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} A_0^n &= \frac{\partial A_0}{\partial x_i} A_0^{n-1} + A_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_i} A_0^{n-2} + \dots + A_0^{n-1} \frac{\partial A_0}{\partial x_i} = \\ &= [A_i, A_0] A_0^{n-1} + \dots + A_0^{n-1} [A_i, A_0] = [A_i, A_0^n], \end{aligned} \quad (20)$$

то, подставляя (19), (20) в (8), получаем

$$\exp\{A_0 x_0\} (\partial_{x_i} \varphi - A_i \varphi) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что общее решение системы уравнений (18) может быть записано в виде

$$\varphi(x) = U_1(x_1) U_2(x_2) U_3(x_3) \chi,$$

где  $U_i$  — матрицант  $i$ -го уравнения из (18) задается формулой (16). Для этого необходимо воспользоваться тождеством

$$\left[ A_i, \underbrace{\int_{\theta_j}^{x_j} A_j(x_j) \cdots \int_{\theta_j}^{x_j} A_j(x_j) d^n x_j}_{n \text{ раз}} \right] = 0,$$

из которого  $[A_i(x_i), U_j(x_j)] = 0$ ,  $i \neq j$ .

Особенно простой вид имеют формулы (13)–(16) в том случае, когда матрицы  $A_i$  постоянные. Из (13), (14) следует, что они должны удовлетворять следующей нелинейной алгебраической системе матричных уравнений:

$$[A_i, A_j] = 0, \quad [\gamma_0 \gamma_k A_k + im \gamma_0, A_i] = 0, \quad (21)$$

при этом решение уравнения (11)

$$\psi(x) = \exp\{-(\gamma_0 \gamma_k A_k + im \gamma_0) x_0 + A_j x_j\} \chi. \quad (22)$$

Удается найти общее решение соотношений (21), однако, полученный результат очень громоздкий. Приведем здесь только некоторые частные решения

$$\begin{aligned} A_1 &= -im \gamma_1, & A_2 &= \theta \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, & A_3 &= \theta \gamma_1, \\ A_1 &= \theta_1 + \theta_2 \gamma_0 + \theta_3 \gamma_1 \gamma_2 + \theta_4 \gamma_3 \gamma_4, & A_2 &= \gamma_2 \gamma_1 A_1, & A_3 &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$\theta, \theta_1, \dots, \theta_4$  — произвольные комплексные константы.

Подставляя (23) в (24), получаем многопараметрические семейства точных решений уравнения Дирака.

Отметим, что операторы  $Q_i = \partial_{x_i} - A_i$ , образуя алгебру Ли, вообще говоря, не являются операторами симметрии уравнения Дирака, так как

$$[L, Q_i] = [\gamma_0, A_i]\gamma_0 L + \gamma_0[\gamma_0\gamma_k, A_i]Q_k, \quad i = \overline{1, 3}.$$

1. Миллер У., Разделение переменных, М., Мир, 1981, 340 с.
2. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н., Точные решения релятивистских волновых уравнений, Новосибирск, Наука, 1982, 142 с.
3. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, М., Изд-во иностр. лит., 1947, 359 с.
4. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
5. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1987, 214 p.
7. Cook A.H., On separable solutions of Dirac's equation for the electron, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1982, **333**, 247–278.
8. Kalnius E.G., Miller W., Williams G.C., Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables, *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, № 8, 1893–1900.

# On some exact solutions of a system of non-linear differential equations for spinor and vector fields

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

The problem of finding ansätze for a non-linear Dirac equation which is invariant under the extended Poincaré group is solved. With the help of these ansätze some multi-parameter families of exact solutions of non-linear Dirac and Dirac-Maxwell equations are constructed.

## 1. Introduction

In the present work using ideas and methods of S. Lie (see [12, 2]) we have constructed large classes of exact solutions of the non-linear Dirac equation

$$(\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k})\psi(x) = 0, \quad k \neq 0, \quad (1.1)$$

where  $\gamma_\mu$  are  $4 \times 4$  Dirac matrices,  $p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ ,  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $\psi$  is a four-component spinor and  $k, \lambda$  are parameters, and of the system of eight non-linear equations,

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu p^\mu + \lambda_1\gamma_\mu\mathcal{A}^\mu + m_1)\psi(x) &= 0, \\ p_\nu p^\nu\mathcal{A}_\mu - p_\mu p^\nu\mathcal{A}_\nu &= \exp(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) + \mathcal{A}_\mu(m_2 + \lambda_2\mathcal{A}^\nu\mathcal{A}_\nu), \end{aligned} \quad (1.2)$$

where  $\mathcal{A}_\mu(x)$  is the vector potential of the electromagnetic field and  $e, \lambda_1, \lambda_2, m_1, m_2$  are constants. If we choose  $m_2 = \lambda_2 = 0$ , then system (1.2) coincides with equations of the classical electrodynamics describing interaction of electromagnetic and spinor fields.

To construct multiparameter families of exact solutions of (1.1) and (1.2) we essentially use their symmetry properties and the ansatz

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega) + B(x) \quad (1.3)$$

suggested by Fushchych [3, 4] and effectively realised by Fushchych and Shtelen [6, 7] and Fushchych and Serov [5] for a number of non-linear wave equations.  $A(x)$  is a  $4 \times 4$  matrix and  $B(x)$  is a four-component spinor, algorithms for their construction being cited below, and  $\varphi(\omega)$  is the column vector, components of which depend in general on three invariant variables  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  (for more details see Fushchych [3, 4]). Later we shall consider the case when  $B(x) = 0$ .

On using finite transformations it is established that equation (1.1) is invariant under the extended Poincaré group  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$ , i.e. under the Poincaré group  $\mathcal{P}(1, 3)$  supplemented by a group of scale transformations.

Basis elements of the Lie algebra  $A\tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$  have the form

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_\mu, & J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \\ D &= x_\mu p^\mu - ik, & S_{\mu\nu} &= (i/4)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A general scheme for constructing solutions of the system (1.1) (solutions of the system (1.2) are obtained in an analogous way) is as follows. We look for solutions of equation (1.1) which are invariant under the subgroup of the group  $\tilde{P}(1,3)$  generated by linear combination of all basis elements of  $AP(1,3)$

$$Q = C^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + C^{00} D + C^\mu P_\mu, \quad (1.5)$$

where  $C^{\mu\nu}$ ,  $C^{00}$ ,  $C^\mu$  are constants and  $\mu, \nu = \overline{0,3}$ .

The matrix  $A(x)$  is a solution of the following system of partial differential equations (PDE):

$$QA(x) = 0. \quad (1.6)$$

Invariant variables are the first integrals of the Euler–Lagrange system of ordinary differential equations (ODE)

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x)} = \frac{dx_a}{\xi^a(x)}, \quad a = \overline{1,3}, \quad (1.7)$$

where  $\xi^\mu = C^{\mu\nu} x_\nu + C^{00} x^\mu + C^\mu$ .

If one knows an explicit form of the matrix  $A(x)$  then after substituting (1.3) into the corresponding equation we shall obtain an equation for a spinor  $\varphi(\omega)$  depending on three invariant variables  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  only. This means that ansatz (1.3) with the chosen matrix  $A(x)$  provides separation of variables in equation (1.1). Solutions of the corresponding equation for  $\varphi(\omega)$  being substituted in (1.3) yield the solutions of the initial equation.

To realise this scheme it is necessary first of all to construct in an explicit form matrices  $A(x)$  satisfying (1.6). So one has to solve the first-order linear system of 16 PDE with variable coefficients. It is rather difficult to solve such a system by standard methods, which is why we use the following trick. The operator  $Q$  is transformed into another operator

$$Q' = WQW^{-1} \quad (1.8)$$

with the help of the invertible operator

$$W(x, p) = \exp(\theta\Sigma), \quad W^{-1}(x, p) = \exp(-\theta\Sigma), \quad (1.9)$$

where

$$\Sigma = \theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^{00} D + \theta^\mu P_\mu. \quad (1.10)$$

Transformation  $W$  is so chosen that operator  $Q'$  is as simple as possible. This purpose can always be achieved because of the Poincaré invariance of system (1.1). From the physical point of view this means that the non-linear Dirac equation is solved in the fixed reference system. The construction of the solutions which do not depend on the reference system (ungenerable solutions) is the next step.



### 2. Construction of the matrix $A(x)$

Before proceeding with a direct solution of the system (1.6) let us simplify it using the method described in the introduction. To do this we need the Campbell–Hausdorff formula

$$\exp(\theta Q_1)Q_2 \exp(-\theta Q_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \{Q_1, Q_2\}^k, \tag{2.1}$$

$$\{Q_1, Q_2\}^0 = Q_2, \quad \{Q_1, Q_2\}^n = [Q_1, \{Q_1, Q_2\}^{n-1}],$$

where  $Q_1, Q_2$  are operators and  $[A, B] = AB - BA$ .

A fundamental role is played by the following lemma.

**Lemma.** *The operator  $Q = C^{\mu\nu}J_{\mu\nu} = A_k M_k + B_l N_l$ , where  $M_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}J_{lm}$ ,  $N_k = J_{0k}$ , by a transformation  $Q \rightarrow Q' = VQV^{-1}$ , where  $V = \exp(\theta^{\mu\nu}J_{\mu\nu})$ , can be reduced to one of the following forms:*

$$(i) \quad Q' = \alpha J_{01} + \beta J_{23}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2)^2 \neq 0,$$

$$(ii) \quad Q' = \alpha(J_{01} + J_{12}), \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = 0.$$

**Proof.** Let us introduce new operators

$$J_a = (i/2)(M_a + iN_a), \quad K_a = (i/2)(M_a - iN_a), \quad a = \overline{1, 3}.$$

One can easily check that the following commutational relations hold:

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \quad [K_a, K_b] = i\varepsilon_{abc}K_c, \quad [J_a, K_b] = 0 \tag{2.2}$$

so  $Q = a_k J_k + b_l K_l$ , where  $a_k = -B_k - iA_k$  and  $b_l = B_l - iA_l$ .

Using (2.1) and (2.2) one obtains

$$Q' = V_1 Q V_1^{-1} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} J_1 + \left[ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} \right]^* K_1 = \alpha J_{01} + \beta J_{23},$$

where

$$V_1 = \exp[-i \tan^{-1}(a_2/a_3)J_1] \exp\left\{i \tan^{-1}\left[a_1(a_2^2 + a_3^2)^{-1/2} + \pi/2\right]J_2\right\} \times \exp[-i \tan^{-1}(b_2/b_3)K_1] \exp\left\{i \tan^{-1}\left[b_1(b_2^2 + b_3^2)^{-1/2} + \pi/2\right]K_2\right\}. \tag{2.3}$$

It is evident that these formulae lose their validity in the case

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Therefore one can use this approach only in case (i). Let us now consider case (ii). It follows from (2.1) that

$$\begin{aligned} \exp(\theta M_a)A_k M_k \exp(-\theta M_a) &= \\ &= A_k M_k \cos \theta + A_a M_a (1 - \cos \theta) + \varepsilon_{akl} A_k M_l \sin \theta \end{aligned} \tag{2.4}$$

(no summation is performed over  $a$ ),

$$\begin{aligned} \exp(\theta M_a)B_l N_l \exp(-\theta M_a) &= \\ &= B_l N_l \cos \theta + B_a N_a (1 - \cos \theta) + \varepsilon_{akl} B_k N_l \sin \theta \end{aligned} \tag{2.5}$$

(no summation is performed over  $a$ ).

Using identities (2.4) and (2.5), one can be convinced that the following equality holds:

$$Q' = V_2 Q V_2^{-1} = V_2 (A_k M_k + B_l N_l) V_2^{-1} = -|\mathbf{A}| \operatorname{sgn} A_3 (J_{01} + J_{12}),$$

where

$$V_2 = \exp [\tan^{-1} (A_1/A_2) M_3] \exp \left\{ \tan^{-1} \left[ (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} / A_3 \right] M_1 \right\} \times \\ \times \exp \left[ \left[ \left\{ \tan^{-1} [B_3 |\mathbf{A}| / (B_2 A_1 - B_1 A_2)] + \pi \theta (B_1 A_2 - B_2 A_1) \right\} M_3 \right] \right], \\ \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

This completes the proof. Let us prove the main statement.

**Theorem.** *The operator  $Q = A_k M_k + B_l N_l + C^{00} D + C^\mu P_\mu$  with the help of transformation (1.8) can be reduced to one of the following forms:*

$$(A) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2,$$

$$(i) \quad Q' = J_{01} + J_{12} + aD, \quad (2.6)$$

$$(ii) \quad Q' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3 - P_0, \quad (2.7)$$

$$(iii) \quad Q' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3, \quad (2.8)$$

$$(B) \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2)^2 \neq 0,$$

$$(iv) \quad Q' = J_{23} + aD, \quad (2.9)$$

$$(v) \quad Q' = J_{01} + bJ_{23} + aD, \quad (2.10)$$

$$(vi) \quad Q' = J_{01} + bJ_{23} + D + \beta P_0, \quad (2.11)$$

$$(vii) \quad Q' = J_{01} + P_2, \quad (2.12)$$

$$(viii) \quad Q' = J_{23} + \alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_1, \quad (2.13)$$

$$(C) \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} = 0,$$

$$(ix) \quad Q' = D, \quad (2.14)$$

$$(x) \quad Q' = P_0 + P_1, \quad (2.15)$$

$$(xi) \quad Q' = P_0, \quad (2.16)$$

$$(xii) \quad Q' = P_1. \quad (2.17)$$

**Proof.** If  $\mathbf{A} \neq 0$ ,  $\mathbf{B} \neq 0$  then it follows from the lemma that there exists an operator  $V_1$  ( $V_2$ ) of the form (1.9) such that

$$(a) \quad \text{under } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = 0, \\ V_1 Q V_1^{-1} = \alpha (J_{01} + J_{12}) + \theta D + \theta^\mu P_\mu,$$

$$(b) \quad \text{under } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2)^2 \neq 0, \\ V_2 Q V_2^{-1} = \alpha J_{01} + \beta J_{23} + \theta D + \theta^\mu P_\mu.$$

It is clear from (1.6) and (1.7) that operators  $Q$  and  $\alpha Q$ ,  $\alpha \neq 0$ , generate the same invariant solutions. One may suppose that  $\alpha = 1$ .

We need the following formulae which are consequences of the Campbell–Hausdorff formula:

$$\exp(i\lambda^\mu P_\mu) J_{\alpha\beta} \exp(-i\lambda^\mu P_\mu) = J_{\alpha\beta} + (\lambda_\beta P_\alpha - \lambda_\alpha P_\beta), \quad (2.18)$$

$$\exp(i\lambda^\mu P_\mu) D \exp(-i\lambda^\mu P_\mu) = D - \lambda^\mu P_\mu, \quad (2.19)$$

$$\exp(i\lambda^\mu P_\mu) P_\alpha \exp(-i\lambda^\mu P_\mu) = P_\alpha. \quad (2.20)$$

Let us consider the case (a):

$$\begin{aligned} Q' \rightarrow Q'' &= \exp(i\lambda^\mu P_\mu) (J_{01} + J_{12} + \theta D + \theta^\alpha P_\alpha) (\exp(-i\lambda^\mu P_\mu)) = \\ &= J_{01} + J_{12} + \theta D + \theta^\mu P_\mu + \lambda_1 P_0 - \lambda_2 P_1 - \lambda_1 P_2 - \theta \lambda^\alpha P_\alpha. \end{aligned}$$

Under  $\theta \neq 0$  one can always choose  $\lambda_\alpha$  that

$$Q'' = J_{01} + J_{12} + \theta D$$

and under  $\theta = 0$  so that

$$Q'' = J_{01} + J_{12} + \alpha P_0 + \beta P_3, \quad \alpha \leq 0.$$

If in the last operator  $\alpha \neq 0$ , then

$$\begin{aligned} Q''' &= \exp(-i \ln |\alpha| D) (J_{01} + J_{12} + \alpha P_0 + \beta P_3) \exp(i \ln |\alpha| D) = \\ &= J_{01} + J_{12} - P_0 + \beta P_3. \end{aligned}$$

If  $\alpha = 0$  then

$$Q'' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3.$$

Let us now consider case (b). If  $\alpha \neq 0$  then on dividing into  $\alpha$  and on transforming the operator  $Q$  according to (2.18)–(2.20) we obtain

$$\begin{aligned} Q' &= \exp(i\lambda^\mu P_\mu) (J_{01} + bJ_{23} + \theta D + \theta^\mu P_\mu) \exp(-i\lambda^\mu P_\mu) = \\ &= J_{01} + (\lambda_1 P_0 - \lambda_0 P_1) + bJ_{23} + b(\lambda_3 P_2 - \lambda_2 P_3) + \theta D - \theta \lambda^\mu P_\mu + \theta^\mu P_\mu. \end{aligned}$$

Under  $\theta \neq \pm 1$ ,  $\theta^2 + b^2 \neq 0$  it is always possible to choose  $\lambda_\mu$  so that

$$Q' = J_{01} + bJ_{23} + \theta D.$$

Under  $\theta = \pm 1$  it is possible to choose  $\lambda_\mu$  so that

$$Q' = J_{01} + bJ_{23} + \delta D + \beta P_0.$$

Under  $\theta = b = 0$  there exist such  $\lambda_\mu$  that

$$Q' = J_{01} + P_2.$$

Under  $\alpha = 0$  using formulae (2.18)–(2.20) one can check that the operator  $Q$  can be reduced to one of the following forms:

$$Q' = J_{23} + aD, \quad \theta \neq 0,$$

$$Q' = J_{23} + \alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_1, \quad \theta = 0.$$

The only thing left is to consider the case  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , i.e.  $Q = \theta D + \theta^\mu P_\mu$ . Using formulae (2.18)–(2.20) it is easy to be convinced that under  $\theta = 0$

$$\exp[(i/\theta)\theta^\mu P_\mu](\theta D + \theta^\mu P_\mu) \exp[-(i/\theta)\theta^\mu P_\mu] = \theta D.$$

If  $\theta = 0$  then analysing three possibilities  $\theta_\mu \theta^\mu = 0$ ,  $\theta_\mu \theta^\mu > 0$ ,  $\theta_\mu \theta^\mu < 0$  we obtain operators (2.15)–(2.17). The theorem is proved.

**Note 1.** When proving the theorem we used only commutational relations of an algebra  $A\tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$  and we did not use its concrete representation.

**Note 2.** It is seen from the proof that  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$ -invariant solutions are exhausted by solutions generated from ones invariant under operators (2.6)–(2.17) with the help of transformations from  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$ .

This theorem essentially simplifies the problem of finding ansätze because instead of integrating the system (1.6) where  $Q$  is an operator of the general form (1.5), it is enough to find a partial solution of this system with  $Q$  having the form (2.6)–(2.17).

For example, let us consider case (2.9). The matrix  $A(x)$  is a solution of the following matrix system of PDE

$$x_2 A_{x_3} - x_3 A_{x_2} + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 A + a x_\mu A_{x_\mu} - a k A = 0, \quad (2.21)$$

where  $A_{x_a} = \partial A / \partial x_a$ ,  $a = \overline{0, 3}$ .

We look for a partial solution of (2.21) of the form

$$A(x) = f(x) \exp(g(x) \gamma_2 \gamma_3). \quad (2.22)$$

Substituting (2.22) into (2.21) we obtain

$$\left[ x_2 f_{x_3} - x_3 f_{x_2} + a x_\mu f_{x_\mu} - a k f + f \left( x_2 g_{x_3} - x_3 g_{x_2} + a x_\mu g_{x_\mu} + \frac{1}{2} \right) \gamma_2 \gamma_3 \right] \times \\ \times \exp(g(x) \gamma_2 \gamma_3) = 0.$$

A partial solution of the last system is given by formulae

$$f(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2}, \quad g(x) = -\frac{1}{2} \tan^{-1}(x_2/x_3).$$

Finally

$$A(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right] (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2}.$$

In the same way we have obtained matrices  $A(x)$  which correspond to operators (2.6)–(2.17)

$$(i) \ a \neq 0, \ A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp \left[ \frac{1}{2} a^{-1} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \ln(x_0 - x_2) \right], \quad (2.23)$$

$$a = 0, \ A(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} x_1 (x_0 - x_2)^{-1} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \right], \quad (2.24)$$

$$(ii) \ A(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) (x_2 - x_0) \right], \quad (2.25)$$

$$(iii) A(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \beta^{-1} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) x_3 \right], \quad (2.26)$$

$$(iv) A(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right], \quad (2.27)$$

$$(v) a \neq -1, A(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times \\ \times \exp \left[ \frac{1}{2} (a+1)^{-1} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right], \quad (2.28)$$

$$a = -1, A(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right], \quad (2.29)$$

$$(vi) A(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times \\ \times \exp \left[ \frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2} \tan^{-1}(x_2/x_3) \gamma_2 \gamma_3 \right], \quad (2.30)$$

$$(vii) A(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right], \quad (2.31)$$

$$(viii) A(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right], \quad (2.32)$$

$$(ix) A(x) = x_0^{-k} I, \quad (2.33)$$

$$(x) A(x) = I, \quad (2.34)$$

$$(xi) A(x) = I, \quad (2.35)$$

$$(xii) A(x) = I, \quad (2.36)$$

where  $I$  is a unit  $4 \times 4$  matrix.

### 3. Ansätze for the non-linear Dirac equation (1.1)

As pointed out in the introduction, to find invariant variables  $\omega_1(x)$ ,  $\omega_2(x)$ ,  $\omega_3(x)$  it is necessary to find all the first integrals of the Euler–Lagrange system of ODE

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = C_{\mu\nu} x^\nu + C_{00} x_\mu + C_\mu. \quad (3.1)$$

Because of the lemma proved above, one can restrict oneself to the following cases of the system (3.1):

$$(i) C_{01} = -C_{12} = 1, \quad C_{00} = a, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

$$(ii) C_{01} = -C_{12} = 1, \quad C_0 = -1, \\ C_3 = -\beta, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

$$(iii) C_{01} = -C_{12} = 1, \quad C_3 = -\beta, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

$$(iv) C_{23} = -1, \quad C_{00} = a, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

$$(v) C_{01} = 1, \quad C_{23} = -b, \quad C_{00} = a, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

$$(vi) C_{01} = 1, \quad C_{23} = -b, \quad C_{00} = 1, \\ C_0 = \beta, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

$$(vii) C_{01} = 1, \quad C_2 = -1, \quad \text{rest coefficients are equal to } 0,$$

- (viii)  $C_{23} = -1$ ,  $C_0 = \alpha_1$ ,  $C_1 = -\alpha_2$ , rest coefficients are equal to 0,  
 (ix)  $C_{\mu\nu} = 0$ ,  $C_{00} = 1$ ,  $C_\mu = 0$ ,  
 (x)  $C_{\mu\nu} = C_{00} = 0$ ,  $C_0 = -C_1 = 1$ ,  $C_2 = C_3 = 0$ ,  
 (xi)  $C_{\mu\nu} = C_{00} = 0$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ,  $C_0 = 1$ ,  
 (xii)  $C_{\mu\nu} = C_{00} = 0$ ,  $C_0 = C_2 = C_3 = 1$ ,  $C_1 = -1$ .

Solution of the system (3.1) in cases (i)–(xii) above is carried out in the usual way, so we write down its first integrals omitting intermediate calculations.

$$(i) \ a \neq 0, \ \omega_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)x_3^{-2}, \ \omega_2 = (x_0 - x_2)x_3^{-1}, \quad (3.2)$$

$$\omega_3 = ax_1(x_0 - x_2)^{-1} - \ln(x_0 - x_2),$$

$$a = 0, \ \omega_1 = x_0 - x_2, \ \omega_2 = x_3, \ \omega_3 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad (3.3)$$

$$(ii) \ \omega_1 = x_3 + \beta(x_0 - x_2), \ \omega_2 = 2x_1 + (x_0 - x_2)^2, \quad (3.4)$$

$$\omega_3 = 3x_3 + 3x_1(x_0 - x_2) + (x_0 - x_2)^3,$$

$$(iii) \ \omega_1 = x_0 - x_2, \ \omega_2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \ \omega_3 = \beta x_1 - (x_0 - x_2)x_3, \quad (3.5)$$

$$(iv) \ \omega_1 = x_0x_1^{-1}, \ \omega_2 = \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \tan^{-1}(x_2/x_3), \quad (3.6)$$

$$\omega_3 = (x_2^2 + x_3^2)(x_0x_1)^{-1},$$

$$(v) \ a \neq -1, \ \omega_3 = b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \tan^{-1}(x_2/x_3), \quad (3.7)$$

$$\omega_1 = (x_0 + x_1)^{2a} (x_0^2 - x_1^2)^{-(a+1)}, \ \omega_2 = (x_0^2 - x_1^2) (x_2^2 + x_3^2)^{-1},$$

$$a = -1, \ \omega_1 = x_0 + x_1, \ \omega_2 = (x_0^2 - x_1^2) (x_2^2 + x_3^2)^{-1}, \quad (3.8)$$

$$\omega_3 = b \ln(x_2^2 + x_3^2) - 2 \tan^{-1}(x_2/x_3),$$

$$(vi) \ \omega_1 = (2x_0 + 2x_1 + \beta) \exp[2\beta^{-1}(x_1 - x_0)], \quad (3.9)$$

$$\omega_2 = (2x_0 + 2x_1 + \beta) (x_2^2 + x_3^2)^{-1},$$

$$\omega_3 = b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \tan^{-1}(x_2/x_3),$$

$$(vii) \ \omega_1 = x_0^2 - x_1^2, \ \omega_2 = \ln(x_0 + x_1) - x_2, \ \omega_3 = x_3, \quad (3.10)$$

$$(viii) \ \omega_1 = x_2^2 + x_3^2, \ \omega_2 = \tan^{-1}(x_2/x_3) + \beta_1x_0 + \beta_2x_1, \quad (3.11)$$

$$\omega_3 = \alpha_2x_0 + \alpha_1x_1, \ -\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1,$$

$$(ix) \ \omega_a = x_a x_0^{-1}, \ a = \overline{1, 3}, \quad (3.12)$$

$$(x) \ \omega_1 = x_0 + x_1, \ \omega_2 = x_2, \ \omega_3 = x_3, \quad (3.13)$$

$$(xi) \ \omega_a = x_a, \ a = \overline{1, 3}, \quad (3.14)$$

$$(xii) \ \omega_1 = x_0, \ \omega_2 = x_2, \ \omega_3 = x_3. \quad (3.15)$$

Now substituting (2.23)–(2.36) and (3.2)–(3.15) into (1.3) under  $B(x) = 0$  we obtain the following set of ansätze for the non-linear Dirac equation (1.1):

$$(i) \quad \psi(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp \left[ \frac{1}{2} a^{-1} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \ln(x_0 - x_2) \right] \varphi(\omega), \quad (3.16)$$

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} x_1 (x_0 - x_2)^{-1} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \right] \varphi(\omega), \quad (3.17)$$

$$(ii) \quad \psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) (x_0 - x_2) \right] \varphi(\omega), \quad (3.18)$$

$$(iii) \quad \psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \beta^{-1} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) x_3 \right] \varphi(\omega), \quad (3.19)$$

$$(iv) \quad \psi(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right] \varphi(\omega), \quad (3.20)$$

$$(v) \quad \psi(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times \\ \times \exp \left[ \frac{1}{2} (a+1)^{-1} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right] \varphi(\omega), \quad (3.21)$$

$$\psi(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right] \varphi(\omega), \quad (3.22)$$

$$(vi) \quad \psi(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times \\ \times \exp \left[ \frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right] \varphi(\omega), \quad (3.23)$$

$$(vii) \quad \psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right] \varphi(\omega), \quad (3.24)$$

$$(viii) \quad \psi(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3) \right] \varphi(\omega), \quad (3.25)$$

$$(ix) \quad \psi(x) = x_0^{-k} \varphi(\omega), \quad (3.26)$$

$$(x) \quad \psi(x) = \varphi(\omega), \quad (3.27)$$

$$(xi) \quad \psi(x) = \varphi(\omega), \quad (3.28)$$

$$(xii) \quad \psi(x) = \varphi(\omega). \quad (3.29)$$

The problem of finding all the ansätze for  $\tilde{\mathcal{P}}(1,3)$ -invariant solutions is therefore completely solved. The second step of the algorithm — the reduction of the Dirac equation — will be realised in the next section.

#### 4. Reduction of the non-linear Dirac equation (1.1)

It was pointed out above that substitution of ansatz (1.3) into (1.1) results in a reduction by one of a number of independent variables. This means that the equation obtained will depend on the three independent variables  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Omitting cumbersome calculations we write down resulting systems of PDE:

$$(i) \quad k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)(\omega_1 + a^{-2}\omega_2^2\omega_3^2) + (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_2^2 - 2a^{-1}\gamma_1\omega_3\omega_2^2 - 2\gamma_3\omega_1\omega_2] \varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2] \varphi_{\omega_2} + [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)] \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_1^{-1}\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \gamma_3\varphi_{\omega_2} + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_3\omega_1^{-1}] \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.2)$$

$$(ii) \quad [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} + \frac{3}{2}(2\gamma_2) + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.3)$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2}\beta^{-1}\gamma_4(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 - 2\beta^{-1}\gamma_1\omega_3 + (\gamma_0 - \gamma_2)(\beta^{-2}\omega_3^2 + \omega_2)\omega_1^{-1}] \varphi_{\omega_2} + (\beta\gamma_1 - \gamma_3\omega_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.4)$$

$$(iv) \quad \frac{1}{2}(1 - 2k)\gamma_3\varphi + (\omega_1\omega_3)^{1/2}(\gamma_0 - \gamma_1\omega_1)\varphi_{\omega_1} + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} + [2\gamma_3 - (\gamma_0 + \gamma_1\omega_1)\omega_3^{1/2}\omega_1^{-1/2}] \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.5)$$

$$(v) \quad \left[ -k \left( \gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{-1/2(a+1)} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} \right) + \frac{1}{2}(a+1)^{-1}(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{-1/2(a+1)} + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \varphi - 2(a+1)\omega_1 \left( \gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} \right) \varphi_{\omega_1} + 2 \left[ \gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \omega_2\varphi_{\omega_2} + 2(a\gamma_2 + b\gamma_3)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.6)$$

$$\left[ -k \left( \gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2} \right) + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)\omega_1^{1/2} + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \varphi + (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + 2\omega_2 \left( \gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2} - 2\gamma_3\omega_2^{1/2} \right) \varphi_{\omega_2} + 2(b\gamma_3 - \gamma_2)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.7)$$

$$(vi) \quad \frac{1}{2}[(1 - 2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3\omega_2]\varphi + 2[(\beta - 1)\gamma_0 + (\beta + 1)\gamma_1]\omega_1\varphi_{\omega_1} + 2\omega_2 \left( \gamma_0 + \gamma_1 - \omega_2^{1/2}\gamma_3 \right) \varphi_{\omega_2} + 2(\gamma_2 + b\gamma_3)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.8)$$



$$\begin{aligned} \text{(vii)} \quad & \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_1(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + \\ & + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \text{(viii)} \quad & \frac{1}{2}\omega_1^{-1/2}\varphi + 2\omega_1^{1/2}\gamma_3\varphi_{\omega_1} + \left(\omega_1^{-1/2}\gamma_2 + \beta_1\gamma_0 + \beta_2\gamma_1\right)\varphi_{\omega_2} + \\ & + (\alpha_2\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{(ix)} \quad -k\gamma_0\varphi + (\gamma_a - \omega_a\gamma_0)\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.11)$$

$$\text{(x)} \quad (\gamma_0 + \gamma_1)\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.12)$$

$$\text{(xi)} \quad \gamma_a\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.13)$$

$$\text{(xii)} \quad \gamma_0\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.14)$$

where  $\varphi_{\omega_a} = \partial\varphi/\partial\omega_a$  and  $a = \overline{1, 3}$ .

A partial solution of one of the equations (4.1)–(4.14) through formulae (3.16)–(3.29) gives a partial solution of the non-linear Dirac equation. To obtain a partial solution of the reduced equation one can again apply the reduction procedure. But it demands a knowledge of the symmetry of equations (4.1)–(4.14). Investigation of symmetrical properties of equations in question is a very interesting problem (for example, equation (4.12) possesses an infinite-parameter symmetry group) and it will be considered in a future paper. We shall perform the direct reduction (if it is possible) of systems (4.1)–(4.14) to systems of ODE.

Let us suppose that in (4.1)  $\varphi = \varphi(\omega_2)$ . It follows that

$$k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + \omega_2(\gamma_0 - \gamma_2 - \omega_2\gamma_3)\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.15)$$

Similarly, if one chooses  $\varphi = \varphi(\omega_3)$  then

$$k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_2 - \gamma_0)(1 + \omega_3) + a\gamma_1]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.16)$$

(4.15) and (4.16) are non-linear systems of ODE.

Equation (4.2) gives the following system of ODE:

$$(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.17)$$

From (4.3) it follows that

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.18)$$

$$2\gamma_1\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.19)$$

Systems (4.4) and (4.5) can be reduced to the systems of ODE of the form

$$2\beta(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + (\gamma_0 - \gamma_2)\gamma_4\varphi = 2i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{2}(1 - 2k)\gamma_3\varphi + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.21)$$

We did not succeed in reducing systems (4.6)–(4.8) to ODE. From (4.9) one can obtain three systems of ODE:

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1 + \gamma_0 - \gamma_1]\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.24)$$

Equation (4.10) gives the system

$$\frac{1}{2}\gamma_3\omega_1^{-1/2} + 2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (4.25)$$

Equations (4.11)–(4.14) are reduced to the following systems of ODE:

$$-k\gamma_0\varphi + (\gamma_a - \omega_a\gamma_0)\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.26)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.27)$$

$$\gamma_a\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (4.28)$$

$$\gamma_0\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi \quad (4.29)$$

(no summation is carried over  $a$ ).

Symmetry properties of the non-linear Dirac equation therefore enable us to reduce the problem of finding its partial solution to an essentially simpler one of integration of systems of ode (4.15)–(4.29). To solve these systems one can apply various methods including numerical ones.

### 5. Construction of exact solutions of the non-linear Dirac equation (1.1)

We shall consider only systems of ODE solvable in quadratures, but we shall not consider cases which give already known solutions. The general solution of (4.19) has the form

$$\varphi(\omega_2) = \exp[-(i\lambda/2)(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1\omega_2]\chi,$$

where  $\chi$  is an arbitrary constant spinor.

Substituting the above result into (3.18), we obtain a solution of the initial equation (1.1):

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_2)(x_0 - x_2)\right] \times \\ & \times \exp\left\{-(i\lambda/2)(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]\right\} \chi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Let us next consider equation (4.21). Under  $k = \frac{1}{2}$  its general solution has the form

$$\varphi(\omega_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}i\lambda\bar{\chi}\chi(1 + a^2)^{-1}(\gamma_3 + a\gamma_2)\omega_2\right]\chi, \quad (5.2)$$

where  $\chi$  is a constant spinor.

Under  $k \neq \frac{1}{2}$ ,  $a \neq 0$ , we did not succeed in integrating the corresponding equation. If  $a = 0$ , then making a change of variables we obtain

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_2) &= \exp\left[\frac{1}{4}(2k-1)\omega_2\right] \phi(\omega_2), \\ 2 \exp\left[\frac{1}{4}(1-2k)k^{-1}\omega_2\right] \gamma_3 \phi_{\omega_2} &= i\lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi. \end{aligned}$$

The general solution of the last equation is given by the formula

$$\phi = \exp\left\{(2i\lambda k)(1-2k)^{-1}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \exp\left[\frac{1}{4}(2k-1)k^{-1}\omega_2\right] \gamma_3\right\} \chi,$$

where  $\chi$  is the arbitrary constant spinor.

Substituting the above results into (3.20) we obtain the following solutions of the non-linear Dirac equation.

If  $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}i\lambda\bar{\chi}\chi(1+a^2)^{-1}(\gamma_3 + a\gamma_2) [\ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \tan^{-1}(x_2/x_3)]\right\} \chi. \end{aligned} \tag{5.3}$$

If  $k \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \tan^{-1}(x_2/x_3)\right] \times \\ &\times \exp\left[2i\lambda k(1-2k)^{-1}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (x_2^2 + x_3^2)^{(2k-1)/4} \gamma_3\right] \chi. \end{aligned} \tag{5.4}$$

It is important to note that equation (4.3) can be reduced to the two-dimensional Dirac equation. This fact can be used for obtaining new non-trivial classes of solutions of (1.1). If we choose in (4.3),  $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$  then

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \tag{5.5}$$

Having made a change of variables

$$z_1 = \omega_1, \quad z_2 = \frac{1}{2}\omega_2$$

and denoting

$$\Gamma_1 = \gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2), \quad \Gamma_2 = \gamma_1$$

we obtain

$$\Gamma_1\varphi_{z_1} + \Gamma_2\varphi_{z_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \tag{5.6}$$

where  $\Gamma_a\Gamma_b + \Gamma_b\Gamma_a = 2g_{ab}$  and  $a, b = \overline{1, 2}$ .

(i) We look for a solution of (5.6) in the form

$$\varphi(z) = (\Gamma_a z_a f(z_b z_b) + ig(z_b z_b))\chi, \tag{5.7}$$

where  $\chi$  is a constant spinor and  $f, g$  are unknown scalar functions. Substitution of (5.7) into (5.6) gives the system of ODE

$$f + \omega \frac{df}{d\omega} = \frac{1}{2} \lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (g^2 - \omega f^2)^{1/2k} g,$$

$$\frac{dg}{d\omega} = \frac{1}{2} \lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (g^2 - \omega f^2)^{1/2k} f.$$

The partial solution of this system is given by the formulae ( $k < 0$ )

$$f = |k|^{1/2} \left( \mp \frac{(k^2 + |k|)^{1/2}}{\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right)^k \omega^{-(k+1)/2},$$

$$g = \mp (1 + |k|^{-1})^{-1/2} \left( \mp \frac{(k^2 + |k|)^{1/2}}{\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right)^k \omega^{-k/2}.$$
(5.8)

(ii) We shall look for a solution of (5.6) in the form

$$\varphi(z) = \Gamma_a z_a (z_b z_b)^{-1} \phi(\beta_a z_a / z_b z_b), \quad a, b = \overline{1, 2},$$
(5.9)

where  $\phi = \phi(\omega)$  is a four-component spinor,  $\omega = (\beta_a z_a) / (z_b z_b)$  and  $k = \frac{1}{2}$ . It follows from (5.6) that  $\phi(\omega)$  satisfies the system of ODE of the form

$$(\Gamma_a \beta_a) \frac{d\phi}{d\omega} = i \lambda (\bar{\phi}\phi) \phi,$$

whose general solution has the form

$$\phi(\omega) = \exp \left[ -i \lambda (\bar{\chi}\chi) (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{-1} (\Gamma_a \beta_a) \omega \right] \chi.$$
(5.10)

Using formulae (3.18), (5.7)–(5.10) we obtain the following solutions of the nonlinear Dirac equation (1.1).

If  $k < 0$

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right] \left[ \left\{ [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times [x_3 + \beta(x_0 - x_2)] + \frac{1}{2} \gamma_1 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \right\} f(\omega) + ig(\omega) \right] \chi,$$
(5.11)

where

$$\omega = [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + \frac{1}{4} [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]^2$$

and  $f(\omega), g(\omega)$  are defined by (5.8).

If  $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right] \left\{ [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] \times \right. \\ & \times [x_3 + \beta(x_0 - x_2)] + \frac{1}{2} \gamma_1 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \left. \right\} \omega^{-1} \times \\ & \times \exp \left[ -i\lambda(\bar{\chi}\chi) (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{-1} \left\{ \beta_1 [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_1 \right\} \right] \times \\ & \times \left\{ \beta_1 [x_3 + \beta(x_0 - x_2)] + \frac{1}{2} \beta_2 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \right\} \omega^{-1} \left. \right\} \chi, \end{aligned} \tag{5.12}$$

where

$$\omega = [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + \frac{1}{4} [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]^2.$$

Let us point out one of the possible ways of obtaining ungenerable families of solutions. On applying the procedure of generation of solutions by Lorentz rotations in the plane  $(x_0, x_1)$  to the solution (5.1) one obtains

$$\begin{aligned} \psi_2(x) = & \exp \left( -\frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x'_0 - x'_2) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_1 [2x'_1 + (x'_0 - x'_2)^2] \right\} \chi, \\ x'_0 = & x_0 \cosh \theta + x_1 \sinh \theta, \quad x'_1 = x_1 \cosh \theta + x_0 \sinh \theta, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3. \end{aligned}$$

Let us rewrite this expression in the equivalent form

$$\begin{aligned} \psi_2(x) = & \exp \left( -\frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 \cosh \theta + x_1 \sinh \theta - x_2) \right] \times \\ & \times \exp \left( \frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \left\{ -\frac{1}{2} i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_1 \times \right. \\ & \times [2x_1 \cosh \theta + 2x_0 \sinh \theta + (x_0 \cosh \theta + x_1 \sinh \theta - x_2)^2] \left. \right\} \times \\ & \times \exp \left( \frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \chi. \end{aligned}$$

On taking into consideration the identities

$$\exp \left( -\frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) \gamma_\alpha \exp \left( \frac{1}{2} \theta \gamma_0 \gamma_1 \right) = \begin{cases} \gamma_0 \cosh \theta + \gamma_1 \sinh \theta, & \alpha = 0, \\ \gamma_1 \cosh \theta + \gamma_0 \sinh \theta, & \alpha = 1, \\ \gamma_\alpha, & \alpha = 2, 3, \end{cases}$$

we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} \psi_2(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2} (\gamma_1 \cosh \theta + \gamma_0 \sinh \theta) (\gamma_0 \sinh \theta + \gamma_1 \cosh \theta - \gamma_2) \times \right. \\ & \left. \times (x_0 \cosh \theta + x_1 \sinh \theta - x_2) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \lambda (\bar{\chi}' \chi')^{1/2k} (\gamma_1 \cosh \theta + \gamma_0 \sinh \theta) \times \right. \\ & \left. \times [2x_1 \cosh \theta + 2x_0 \sinh \theta + (x_0 \cosh \theta + x_1 \sinh \theta - x_2)^2] \right\} \chi', \end{aligned}$$

where  $\chi' = \exp(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_1)\chi$ .

Using rest transformations from  $O(1, 3) \subset \tilde{\mathcal{P}}(1, 3)$  in the same way one can find a family of solutions of equation (1.1) of the form

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} (\gamma a) (\gamma b) b x \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \lambda (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} (\gamma a) [2ax + (bx)^2] \right\} \chi, \quad (5.13)$$

where parameters  $a_\mu, b_\mu$  satisfy the conditions

$$aa = -1, \quad bb = ab = 0, \quad \gamma a = \gamma_\mu a^\mu, \quad bx = b_\mu x^\mu, \quad ab = a_\mu b^\mu.$$

Applying the formula for generating solutions by scale transformations

$$\psi_2(x) = e^{-k\alpha} \psi_1(x'), \quad x'_\mu = e^\alpha x_\mu, \quad \alpha = \text{const}$$

one can obtain

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \theta (\gamma a) (\gamma b) b x \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \lambda (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} (\gamma a) [2ax + \theta(bx)^2] \right\} \chi. \quad (5.14)$$

At last, generating from (5.14) new solutions by the group of translations, we obtain an ungenerable family of solutions of the non-linear Dirac equation (1.1).

(i)  $k \in \mathbb{R}^1, k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2} \theta (\gamma a) (\gamma b) b z \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \lambda (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} (\gamma a) [2az + \theta(bz)^2] \right\} \chi, \\ z_\mu = & x_\mu + \theta_\mu, \quad \gamma a = \gamma_\mu a^\mu, \quad bz = b_\mu z^\mu, \quad az = a_\mu z^\mu, \end{aligned}$$

where  $\chi$  is an arbitrary constant spinor and  $\theta, \theta_\mu, a_\mu, b_\mu$  are constants satisfying the following constraints:

$$aa = -1, \quad bb = 0, \quad ab = 0. \quad (5.15)$$

The same procedure when applied to (5.3), (5.4), (5.11) and (5.12) gives ungenerable families of the form

(ii)  $k \in \mathbb{R}^1, k \neq 0, \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) = & [(az)^2 + (bz)^2]^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\gamma a) (\gamma b) \tan^{-1}(az/bz) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ i2\lambda k (2k - 1)^{-1} (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} (\gamma b) [(az)^2 + (bz)^2]^{(2k-1)/4k} \right\} \chi, \end{aligned} \quad (5.16)$$

where  $aa = -1, bb = -1, ab = 0, z_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \theta_\mu$  being arbitrary constants, and  $\chi$  is an arbitrary constant spinor.

(iii)  $k = \frac{1}{2},$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= [(az)^2 + (bz)^2]^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma b) \tan^{-1}(az/bz) \right] \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2}i\lambda\bar{\chi}\chi (1 + \theta^2)^{-1} (\gamma b + \theta\gamma a) \times \right. \\ &\left. \times \{ \ln [(az)^2 + (bz)^2] + 2\theta \tan^{-1}(az/bz) \} \right] \chi, \end{aligned}$$

where  $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$  and  $a_\mu, b_\mu, \theta_\mu, \theta$  are arbitrary constants satisfying conditions (5.16).

(iv)  $k = \frac{1}{2},$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp \left[ \frac{1}{4}(\gamma c)(\gamma b)bz \right] \left\{ (\gamma a + \beta\gamma b)(az + \beta bz) + \frac{1}{4}\gamma c [cz + (bz)^2] \right\} \omega^{-1} \times \\ &\times \exp \left\{ -i\lambda\bar{\chi}\chi (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{-1} \left[ \beta_1(\gamma a + \beta\gamma b) + \frac{1}{2}\beta_2\gamma c \right] \times \right. \\ &\left. \times \left[ \beta_1(az + \beta bz) + \frac{1}{2}\beta_2 (cz + (bz)^2) \right] \omega^{-1} \right\} \chi, \\ \omega &= (az + \beta bz)^2 + \frac{1}{4} [cz + (bz)^2]^2, \quad z_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \end{aligned}$$

and  $\theta_\mu, a_\mu, b_\mu, c_\mu, \beta, \beta_i$  are arbitrary constants satisfying the conditions

$$ab = bc = ca = bb = 0, \quad aa = -1, \quad cc = -4. \tag{5.17}$$

(v)  $k < 0,$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp \left[ \frac{1}{4}(\gamma c)(\gamma b)bz \right] \left[ \left\{ (\gamma a + \beta\gamma b)(az + \beta bz) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{4}(\gamma c) [cz + (bz)^2] \right\} f(\omega) + ig(\omega) \right] \chi, \\ z_\mu &= x_\mu + \theta_\mu, \quad \omega = (az + \beta bz)^2 + \frac{1}{4} [cz + (bz)^2]^2 \end{aligned}$$

with  $f(\omega), g(\omega)$  from (5.8). Parameters  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, \theta_\mu$  satisfy conditions (5.17) and  $\chi$  is an arbitrary constant spinor.

(vi)  $k \in \mathbb{R}^1, k \neq 0,$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp \left[ \frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma b) \ln(az + bz) \right] \exp \left\{ \left[ \frac{1}{2}(\gamma c)(\gamma a + \gamma b) + \right. \right. \\ &\left. \left. + i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma c - \gamma a - \gamma b) \right] [\ln(az + bz) - cz] \right\} \chi, \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma b) \ln(az + bz) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ \left[ \frac{1}{2}(\gamma c)(\gamma a + \gamma b) - i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma c \right] (cz) \right\} \chi, \end{aligned} \quad (5.19)$$

where  $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $\chi$  is an arbitrary constant spinor and  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_\mu$  are arbitrary constants satisfying conditions

$$-aa = bb = -1, \quad cc = -1, \quad ab = bc = ca = 0.$$

(vii)  $k \in \mathbb{R}^1$ ,  $k \neq 0$ ,

$$\psi(x) = \exp \left[ \frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma b)bz \right] \exp \left[ -i\lambda(\gamma c + \beta\gamma b)(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(cz + \beta bz) \right] \chi, \quad (5.20)$$

where  $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $\chi$  is an arbitrary constant spinor and  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_\mu$ ,  $\theta_\mu$  are arbitrary constants satisfying the conditions

$$aa = cc = -1, \quad ab = bc = ca = bb = 0. \quad (5.21)$$

In conclusion of this section, let us consider the special case of equation (1.1) when  $k = \frac{3}{2}$ . It is common knowledge that the corresponding non-linear Dirac equation is conformally invariant [10, 13]. This enables us to obtain a larger family of solutions with the help of a procedure of generating solutions by special conformal transformations, corresponding formulae having the form [7]

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \sigma^{-2}(x)(1 - (\gamma x)(\gamma \theta))\psi_1(x'), \\ x'_\mu &= (x_\mu - \theta_\mu(xx))\sigma^{-1}(x), \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta x + (\theta\theta)(xx). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Using solutions (5.14) under  $k = \frac{3}{2}$  as  $\psi_1(x)$  we obtain a new solution of the conformally invariant equation (1.1)

$$\begin{aligned} \psi(x) = & [1 - (\gamma x)(\gamma \theta)]\sigma^{-2}(x) \exp \left\{ \frac{1}{2}\tilde{\theta}(\gamma a)(\gamma b)(bx - (b\theta)(xx))\sigma^{-1}(x) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/3}\gamma a[2(ax - (a\theta)(xx))\sigma(x) + \right. \\ & \left. + \tilde{\theta}(bx - (b\theta)(xx))^2]\sigma^{-2}(x) \right\} \chi, \end{aligned} \quad (5.23)$$

where  $aa = -1$ ,  $bb = 0$ ,  $ab = 0$  and  $\theta_\mu$ ,  $\tilde{\theta}$  are arbitrary constants.

The same procedure when applied to solutions (5.18)–(5.20) under  $k = \frac{3}{2}$  give some new solutions of the non-linear Dirac equation.

## 6. Exact solutions of the system (1.2)

We shall seek solutions of (1.2) when  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$ , the following ansatz being used:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \gamma b \exp(if(ax))\chi, \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= b_\mu g_1(ax) + a_\mu g_2(ax), \end{aligned} \quad (6.1)$$

where  $bb = 0$ ,  $ax = a_\mu x^\mu$  and  $f$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  are arbitrary differentiable functions.



Substitution of (6.1) into (1.2) gives the system of ODE

$$\begin{aligned}\lambda_1 g_2 &= \dot{f}, \\ (aa)\ddot{g}_1 &= -2eb\theta - \lambda_2 g_1 (2abg_1 g_2 + (aa)g_2^2), \\ -(ab)\ddot{g}_1 &= -\lambda_2 g_2 (2abg_1 g_2 + (aa)g_2^2),\end{aligned}\quad (6.2)$$

where a dot means differentiation with respect to  $\omega = ax$ ,  $b\theta = b_\mu \theta^\mu$ ,  $aa = a_\mu a^\mu$ ,  $ab \neq 0$ ,  $\theta_\mu = \bar{\chi} \gamma_\mu \chi$ ,  $\mu = \bar{0}, \bar{3}$ .

We have succeeded in integrating the system (6.2) in the case  $aa = 0$ ,  $ab \neq 0$ , i.e.

$$\begin{aligned}\lambda_1 g_2 &= \dot{f}, \\ g_2 g_1^2 &= -(eb\theta)/(\lambda_2 ab), \\ \ddot{g}_1 &= 2\lambda_2 g_1 g_2^2.\end{aligned}\quad (6.3)$$

From the second equation it follows that

$$g_2 = -(eb\theta)/(\lambda_2 ab) g_1^{-2}. \quad (6.4)$$

Substituting (6.4) into (6.3) we obtain ODE for determination of  $g_1(\omega)$

$$\ddot{g}_1 = (k^2/\lambda_2) g_1^{-3}, \quad k = \sqrt{2}(eb\theta)/(ab). \quad (6.5)$$

Integration of the last ODE yields

$$\omega + C_2 = \begin{cases} 2|\lambda_2|^{1/2}|k|^{-1}g_1^2, & \lambda_2 < 0, \\ C_1^{-1} (C_1 g_1^2 - k^2/\lambda_2)^{1/2}, & C_1 \neq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Finally

$$C_1 \neq 0, \quad g_1 = \pm C_1^{-1/2} [(C_1 \omega + C_2)^2 + k^2/\lambda_2]^{-1}, \quad (6.7)$$

$$\lambda_2 < 0, \quad g_1 = \pm (k/|\lambda_2|) \left( 2|k||\lambda_2|^{-1/2} \omega + C_2 \right)^{-1}. \quad (6.8)$$

Substituting the above results into (6.4) we find expressions for  $g_2(\omega)$

$$C_1 \neq 0, \quad g_2 = -(kC_1/\lambda_2) [(C_1 \omega + C_2)^2 + k^2/\lambda_2]^{-1}, \quad (6.9)$$

$$\lambda_2 < 0, \quad g_2 = -(k/|\lambda_2|) \left( 2|k||\lambda_2|^{-1/2} \omega + C_2 \right)^{-1}. \quad (6.10)$$

Substituting these expressions into the first equation from (6.3) we obtain  $f(\omega)$

$$C_1 \neq 0, \quad f(\omega) = -\lambda_1 \lambda_2^{-1/2} \tan^{-1} \left[ k^{-1} \lambda_2^{1/2} (C_1 \omega + C_2) \right], \quad (6.11)$$

$$\lambda_2 < 0, \quad f(\omega) = \lambda_1 |\lambda_2|^{-1/2} \ln \left( 2k |\lambda_2|^{-1/2} \omega + C_2 \right), \quad (6.12)$$

where  $C_1, C_2$  are arbitrary constants.

Substitution of (6.7)–(6.12) into (6.1) gives two families of solutions of the initial equation (1.2)

(i)  $\lambda_2 \neq 0$ ,  $C_1 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \gamma b \exp \left\{ -i\lambda_1 \lambda_2^{-1/2} \tan^{-1} \left[ \lambda_2^{1/2} k^{-1} (C_1 a x + C_2) \right] \right\} \chi, \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= \pm b_\mu C_1^{-1/2} \left[ (C_1 a x + C_2)^2 - k^2 \lambda_2^{-1} \right]^{1/2} - \\ &\quad - a_\mu (k C_1 / \lambda_2) \left[ (C_1 a x + C_2)^2 - k^2 / \lambda_2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

(ii)  $\lambda_2 < 0$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \gamma b \exp \left[ -i\lambda_1 |\lambda_2|^{-1/2} \ln \left( 2k |\lambda_2|^{-1/2} a x + C_3 \right) \right] \chi, \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= \pm b_\mu \left( 2k |\lambda_2|^{-1/2} a x + C_3 \right)^{1/2} - a_\mu (k / |\lambda_2|) \left( 2k |\lambda_2|^{-1/2} a x + C_3 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

where  $k = \sqrt{2} e b^\mu (\bar{\chi} \gamma_\mu \chi) / (ab)$ ,  $C_1, C_2, C_3$  are arbitrary constants and  $\chi$  is an arbitrary constant spinor.

Let us note that the solutions obtained depend analytically on parameters  $\lambda_1, e$  while parameter  $\lambda_2$  is included in a singular way. It means that solutions (6.13) and (6.14) cannot be obtained in the framework of perturbation theory by expanding in a series with respect to a small parameter  $\lambda_2$ .

On introducing as usual the tensor of the electromagnetic field  $F_{\mu\nu} = \partial \mathcal{A}_\nu / \partial x_\mu - \partial \mathcal{A}_\mu / \partial x_\nu$  we obtain

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \pm (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu) C_1^{1/2} \left[ (C_1 a x + C_2)^2 - k^2 / \lambda_2 \right]^{-1/2}, \\ F_{\mu\nu} &= \pm (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu) k |\lambda_2|^{-1/2} \left( 2k |\lambda_2|^{-1/2} a x + C_3 \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

for solutions (6.13) and (6.14) respectively.

To obtain new families of solutions of the system (1.2) one can use its symmetry under conformal group  $C(1,3)$  [9]. The formula for generating solutions by special conformal transformations has the form [8]

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \sigma^{-2} [1 - (\gamma x)(\gamma \theta)] \psi_1(x'), \\ \mathcal{A}_\mu^{(2)}(x) &= \sigma^{-2}(x) [g_{\mu\nu} \sigma(x) + 2(\theta_\mu x_\nu - \theta_\nu x_\mu + 2\theta x x_\mu \theta_\nu - \\ &\quad - x x \theta_\mu \theta_\nu - \theta \theta x_\mu x_\nu)] \mathcal{A}_{(1)}^\nu(x'), \\ x'_\mu &= (x_\mu - \theta_\mu x x) \sigma^{-1}(x), \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta x + (\theta \theta)(x x). \end{aligned}$$

Using (6.13) and (6.14) as  $\psi_1(x)$  and  $\mathcal{A}_\mu^{(1)}(x)$  one can construct new multiparameter families of exact solutions of (1.2) but we omit corresponding formulae because of their cumbersome character.

## 7. Conclusion

In the present work, large classes of exact solutions of the non-linear Dirac equation and of the system of non-linear equations of quantum electrodynamics were constructed. Solutions obtained by Akdeniz [1], Fushchych and Shtelen [6, 7], Kortel [11], Merwe [14] and Takahashi [15] can be obtained with the help of ansätze (3.16)–(3.29).

Most of the solutions depend analytically on constants  $\lambda, \lambda_i, e$ . However solutions (6.13) and (6.14) have a non-perturbative character because of their singular dependence on the parameter  $\lambda_2$ .

We have constructed ansätze which reduced the four-dimensional systems (1.1) and (1.2) to three-, two- and one-dimensional systems of PDE. It is important to note that these ansätze can be applied to any spinor equations which are invariant under the extended Poincaré group  $\mathcal{P}(1, 3)$ .

### Appendix

It is important to note that the ansätze (3.16)–(3.29) do not exhaust all possible ansätze for the Dirac equation (1.1). To reduce (1.1) to ODE one can use the following ansatz:

$$\psi(x) = [ig(\omega) + f(\omega)\gamma_\mu\partial\omega/\partial x_\mu]\chi, \tag{A1}$$

where  $g, f$  are unknown real-valued functions,  $\chi$  is an arbitrary constant spinor and  $\omega = \omega(x)$  is a real-valued function satisfying conditions of the form

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu \omega + A(\omega) &= 0, \\ (p_\mu \omega)(p^\mu \omega) + B(\omega) &= 0, \quad A, B : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{A2}$$

Substitution of (A1) into (1.1) gives a system of ode for determination of  $f$  and  $g$ . We now list some multiparameter families of exact solutions of the non-linear Dirac equation (1.1) obtained in this way.

(i)  $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

$$\psi(x) = \left[ -i \sinh \left( \lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \omega \right) + \gamma_\mu (\partial\omega/\partial x_\mu) \cosh \left( \lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \omega \right) \right] \chi,$$

where  $\omega(x)$  is determined by the following equalities:

$$(a) \quad \omega = bx \cos \varphi_1 + cx \sin \varphi_1 + \varphi_2, \tag{A3}$$

$$(b) \quad ax + bx \cos \phi_1 + cx \sin \phi_1 + \phi_2 = 0, \tag{A4}$$

and  $\varphi_i = \varphi_i(ax + dx)$ ,  $\phi_i = \phi_i(\omega + dx)$  are arbitrary differentiable functions.

(ii)  $k > 1$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) = \omega^{-k} \left\{ \pm (1 - k^{-1})^{1/2} + \omega^{-1} [(bx + \varphi_1)(\gamma b + (\gamma a + \gamma d)\dot{\varphi}_1) + \right. \\ \left. + (cx + \varphi_2)(\gamma c + (\gamma a + \gamma d)\dot{\varphi}_2)] \right\} \chi, \end{aligned} \tag{A5}$$

$$\omega = [(bx + \varphi_1)^2 + (cx + \varphi_2)^2]^{1/2},$$

where  $\varphi_i = \varphi_i(ax + dx)$  are arbitrary differentiable functions and the dot means differentiation with respect to  $ax + dx$ .

(iii)  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned} \psi(x) = (1 + \theta^2 \omega^2)^{-3/2} [i - \theta((\gamma a)(ax) - (\gamma b)(bx) - (\gamma c)(cx))] \chi, \\ \omega = [(ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{A6}$$

and the following condition holds:

$$3\theta - \lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} = 0.$$

In (A3)–(A6)  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$  are arbitrary parametrs satisfying the following conditions:

$$-aa = bb = cc = dd = -1, \quad ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0.$$

1. Akdeniz K.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **33**, 40–44.
2. Ames W.F., *Nonlinear partial differential equations in engineering*, New York, Academic, 1972.
3. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in *Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics*, Kiev, Mathematical Institute, 1981, 6–28.
4. Fushchych W.I., On symmetry and some exact solutions of some many-dimensional equations of mathematical physics, in *Theoretical-Algebraic Methods in Mathematical Physics Problems*, Kiev, Mathematical Institute, 1983, 4–23.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl. Akad. Nauk*, 1983, **273**, 543–546.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Dokl. Akad. Nauk*, 1983, **269**, 88–92.
7. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215–217.
9. Fushchych W.I., Tsifra I.M., *Teor. Mat. Fiz.*, 1985, **64**, 41–50.
10. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 980–987.
11. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 210–215.
12. Lie S., *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig, Teubner, 1891.
13. Mack G., Salam A., *Ann. Phys., NY*, 1969, **53**, 174–202.
14. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, 485–487.
15. Takahashi K., *J. Math. Phys.*, 1979, **20**, 1232–1238.

# О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Получен ряд общих результатов о подалгебрах алгебры Ли  $AC(1, n)$  конформной группы  $C(1, n)$  пространства Минковского  $R_{1,n}$ , исследуемых относительно  $C(1, n)$ -сопряженности. Найдены в явном виде максимальные, максимальные разрешимые, максимальные абелевы и одномерные подалгебры алгебры  $AC(1, n)$ . Проведена классификация всех подалгебр алгебры  $AC(1, 4)$ . Посредством симметричной редукции найдены некоторые точные решения уравнения эйконала.

## Введение

Конформная группа  $C(1, n)$  является группой инвариантности ряда важных уравнений теоретической и математической физики [1]. Поэтому подгруппы этой группы можно использовать для построения точных решений таких уравнений. Если ограничиться связными подгруппами группы  $C(1, n)$ , то задача об их классификации относительно  $C(1, n)$ -сопряженности сводится к задаче о классификации подалгебр алгебры Ли  $AC(1, n)$  группы  $C(1, n)$  относительно  $C(1, n)$ -сопряженности. Такая классификация была проведена для  $n = 2$  [2]. В работах [3, 4] классифицированы подалгебры алгебр  $A\tilde{P}(1, 3)$ ,  $AOpt(1, 3)$ , что позволяет говорить о почти завершенной классификации подалгебр алгебры  $AC(1, 3)$ .

В данной работе для произвольного  $n \geq 2$  изучается структура подалгебр алгебры  $AC(1, n)$ . Работа является продолжением исследований, выполненных в [5–9]. В § 1 приведено модифицированное изложение известных результатов о реализациях конформной группы и ее алгебры Ли. В § 2, используя результаты работ [10, 11], мы даем описание максимальных подалгебр алгебры  $AC(1, n)$ . В §§ 3, 4 исследуются подалгебры алгебр  $A\tilde{P}(1, n)$ ,  $AOpt(1, n)$  соответственно. Здесь же изложена классификация подалгебр алгебр  $A\tilde{P}(1, 4)$ ,  $AOpt(1, 4)$  относительно  $C(1, 4)$ -сопряженности. В § 5 выделены максимальные разрешимые, максимальные абелевы и одномерные подалгебра алгебры  $AC(1, n)$ . § 6 посвящен классификации подалгебр алгебры  $AC(1, 4)$ . В приложении приведены некоторые точные решения уравнения эйконала.

## § 1. Реализация конформной группы и ее алгебры Ли

Пусть  $R_{1,n}$  ( $n \geq 2$ ) — пространство Минковского с метрикой  $g_{\alpha\beta}$ , где  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = 1$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ). Отображение  $x_i = x_i(y_0, y_1, \dots, y_n)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) области  $U \subset R_{1,n}$  в  $R_{1,n}$  называется конформным, если

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} g^{kl} \frac{\partial x_l}{\partial y_\beta} = \lambda(x) g_{\alpha\beta}, \quad (\lambda(x) \neq 0; x = x(y); x, y \in U; \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n).$$

Согласно теореме Лиувилля конформное преобразование области  $U$  является композицией движения, дилатации и инверсии или композицией движения и дилатации. Под движениями подразумеваются элементы группы  $O(1, n)$  и сдвиги (трансляции)  $T_{\vec{a}} : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$ , под дилатациями (разтяжениями) — отображения  $\vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}$  ( $\lambda \in R, \lambda > 0$ ), а инверсиями называют отображения

$$\hat{S} : \vec{x} \rightarrow \left( \frac{x_0}{\vec{x}^2}, \frac{x_1}{\vec{x}^2}, \dots, \frac{x_n}{\vec{x}^2} \right), \quad \hat{S}T_{\vec{a}},$$

где  $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{x}^2 = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$ .

Пусть  $O(2, n+1)$  — группа изометрии псевдоэвклидова пространства  $R_{2, n+1}$ . Эта группа сохраняет конус

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_{n+3}^2 = 0$$

и действует на этом конусе точно. Пусть

$$x_\mu = z_{\mu+2}(z_{n+3} - z_1)^{-1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда

$$\vec{x}^2 = \frac{z_{n+3} + z_1}{z_{n+3} - z_1}, \quad z_1 = \frac{\vec{x}^2 - 1}{\vec{x}^2 + 1} z_{n+3}, \quad z_{\mu+2} = \frac{2z_{n+3}}{\vec{x}^2 + 1} x_\mu \quad (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

Пусть  $C = (c_{\alpha\beta})$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n+3$ ) — элемент  $O(2, n+1)$ . Отображение  $\vec{x}' = C\vec{x}$  индуцирует отображение  $\varphi_C : \vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ , которое в развернутом виде запишется так:

$$x'_{\mu-2} = \frac{2c_{\mu\nu}x^{\nu-2} + (c_{\mu, n+3} + c_{\mu 1})\vec{x}^2 + (c_{\mu, n+3} - c_{\mu 1})}{2(C_{n+3, \nu} - c_{1\nu})x^{\nu-2} + a\vec{x}^2 + b}, \quad (1.1)$$

где  $\mu, \nu = 2, \dots, n+2$ ;  $a = c_{n+3, n+3} - c_{11} - c_{1, n+3} + c_{n+3, 1}$ ,  $b = c_{n+3, n+3} + c_{11} - c_{1, n+3} - c_{n+3, 1}$ .

**Теорема 1.1.** *Отображение  $\varphi : O(2, n+1) \rightarrow C(1, n)$ , сопоставляющее матрице  $C \in O(2, n+1)$  локальное преобразование  $\varphi_C$  пространства  $R_{1, n}$ , является гомоморфизмом группы  $O(2, n+1)$  на группу  $C(1, n)$  с ядром  $\{\pm E_{n+3}\}$ .*

**Доказательство.** Если

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2, n+2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & c_{n+2, 2} & \cdots & c_{n+2, n+2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то формула (1.1) примет вид  $x'_{\mu-2} = c_{\mu\nu}x^{\nu-2}$  ( $\mu, \nu = 2, \dots, n+2$ ). Пусть  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R_{1, n}$ ,

$$E_{1, n} = \text{diag}[1, \underbrace{-1, \dots, -1}_n], \quad E_m = \text{diag}[\underbrace{1, \dots, 1}_m],$$

$\vec{a}^T$  — вектор-столбец, получаемый из  $\vec{a}$  в результате транспонирования,

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{a}^2}{2} + 1 & \vec{a}E_{1,n} & \frac{\vec{a}^2}{2} \\ -\vec{a}^T & E_{n+1} & \vec{a}^T \\ -\frac{\vec{a}^2}{2} & \vec{a}E_{1,n} & \frac{\vec{a}^2}{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $C \in O(2, n + 1)$ , а преобразование (1.1) примет вид  $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, n$ ). Если

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \\ 0 & E_{n+1} & 0 \\ \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \end{pmatrix},$$

то  $x'_\mu = \lambda x_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, n$ ). Если  $C = -E_{1,n+2}$ , то

$$x'_\mu = \frac{x_\mu}{\lambda^2} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

На основании проведенных рассуждений и теоремы Лиувилля заключаем, что каждое конформное преобразование имеет вид  $\varphi_C$ , где  $C \in O(2, n + 1)$ . Теперь покажем, что для каждой матрицы  $C \in O(2, n + 1)$  отображение  $\varphi_C$  является конформным.

Если  $T_{\vec{a}}$  — сдвиг пространства  $R_{1,n}$  на вектор  $\vec{a}$ , то  $\hat{S}T_{\vec{a}}\hat{S}$  задается формулой

$$x'_\mu = \frac{x_\mu + \vec{x}^2 a_\mu}{2g^{\rho\nu} a_\rho x_\nu + \vec{a}^2 \vec{x}^2 + 1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

Композиция  $\hat{S}T_{\vec{a}}\hat{S}$  и преобразования подобия

$$x''_\mu = \lambda b_{\mu\nu} x'^\nu + c_\mu$$

совпадают с преобразованием

$$x''_\mu = \frac{(\lambda b_{\mu\nu} + 2c_\mu g_{\rho\nu} a^\rho) x^\nu + (\lambda b_{\mu\nu} a^\nu + \vec{a}^2 c_\mu) \vec{x}^2 + c_\mu}{2g_{\rho\nu} a^\rho x^\nu + \vec{a}^2 \vec{x}^2 + 1}. \quad (1.2)$$

Если  $b \neq 0$ , то формулу (1.1) можно записать таким образом:

$$x'_{\mu-2} = \frac{2b^{-1} c_{\mu\nu} x^{\nu-2} + b^{-1} (c_{\mu,n+3} + c_{\mu 1}) \vec{x}^2 + b^{-1} (c_{\mu,n+3} - c_{\mu 1})}{2b^{-1} (c_{n+3,\nu} - c_{1\nu}) x^{\nu-2} + b^{-1} a \vec{x}^2 + 1}. \quad (1.3)$$

Нетрудно установить, что преобразование (1.3) является преобразованием (1.2).

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\text{diag}[J, E_{n+1}]$ ,  $\text{diag}[1, 1, \dots, J, \dots, 1]$  содержатся в  $O(2, n + 1)$ . Отображение  $\varphi$  сопоставляет каждой из этих матриц отображение вида (1.3), т.е. конформное преобразование пространства  $R_{1,n}$ . Умножение матрицы  $C \in O(2, n + 1)$  на

одну из указанных матриц слева или справа равносильно перестановке в матрице  $C$  соответственно столбцов или строк.

Если в формуле (1.1)  $b = 0$ , то, переставляя в матрице  $C$  строки и столбцы, мы получим матрицу  $\bar{C}$ , для которой  $\bar{b} \neq 0$ . Но в таком случае  $\varphi_{\bar{C}}$  — конформное преобразование, а значит,  $\varphi_C$  — также конформное преобразование.

На основании всего изложенного можно сделать вывод, что  $\varphi$  — гомоморфизм  $O(2, n+1)$  на  $C(1, n)$ . Нетрудно установить, что ядро  $\varphi$  состоит из  $\pm E_{n+3}$ . Теорема доказана.

Группу  $C(1, n)$  будем рассматривать как группу Ли, для которой гладкое многообразие индуцируется гладким многообразием группы  $O(2, n+1)$ .

Гомоморфизм  $\varphi : O(2, n+1) \rightarrow C(1, n)$  индуцирует гомоморфизм  $f$  алгебры  $AO(2, n+1)$  на алгебру  $AC(1, n)$ . Но алгебра  $AO(2, n+1)$  при  $n > 1$  является простой. Поэтому  $\text{Ker } f = 0$ , а значит,  $f$  — изоморфизм  $AO(2, n+1)$  на  $AC(1, n)$ . Исходя из этого факта, получаем коммутационные соотношения для алгебры  $AC(1, n)$ .

Пусть  $\Omega_{ab}$  ( $a, b = 1, \dots, n+3$ ) — генераторы стандартного базиса алгебры  $AO(2, n+1)$ . Тогда базис алгебры  $AC(1, n)$  образуют  $J_{\alpha\beta}$ ,  $P_\alpha$ ,  $K_\alpha$ ,  $D$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$ ;  $\alpha \neq \beta$ ), где

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta} &= f(\Omega_{\alpha+2, \beta+2}) \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n), \\ P_\alpha &= f(\Omega_{1, \alpha+2} - \Omega_{\alpha+2, n+3}) \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n), \\ K_\alpha &= f(\Omega_{1, \alpha+2} + \Omega_{\alpha+2, n+3}) \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n), \quad D = -f(\Omega_{1, n+3}). \end{aligned}$$

Выписанные генераторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \quad [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \\ [P_\alpha, P_\beta] &= 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}K_\gamma - g_{\alpha\gamma}K_\beta, \quad [K_\alpha, K_\beta] = 0, \\ [D, P_\alpha] &= P_\alpha, \quad [D, K_\alpha] = -K_\alpha, \quad [D, J_{\alpha\beta}] = 0, \quad [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta}D - J_{\alpha\beta}) \\ &(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Как следует из доказательства теоремы 1.1,  $J_{\alpha\beta}$ ,  $P_\alpha$ ,  $D$  являются генераторами псевдповращений, трансляций (сдвигов), дилатации соответственно. Далее матрице  $-E_{1, n+2}$  гомоморфизм  $\varphi$  сопоставляет инверсию  $\hat{S}$ . Так как

$$E_{1, n+2}(\Omega_{1, \alpha+2} - \Omega_{\alpha+2, n+3})E_{1, n+2} = -(\Omega_{1, \alpha+2} + \Omega_{\alpha+2, n+3}),$$

то  $\hat{S}P_\alpha\hat{S} = -K_\alpha$ . Значит,  $K_\alpha$  является генератором однопараметрической группы  $\hat{S} \exp(\theta P_\alpha) \hat{S}$ .

Теперь найдем векторные поля, отвечающие конформным преобразованиям пространства  $R_{1, n}$ . Известно, что

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \partial_\alpha, \quad J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad D = -x^\alpha\partial_\alpha \\ &\left( \alpha = 0, 1, \dots, n, \quad a, b = 1, \dots, n, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned}$$



Далее,

$$\begin{aligned}
 (\hat{S}\partial_\alpha\hat{S})f(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \hat{S}\partial_\alpha f\left(\frac{x_0}{\bar{x}^2}, \frac{x_1}{\bar{x}^2}, \dots, \frac{x_n}{\bar{x}^2}\right) = \\
 &= \hat{S}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(-\frac{x_0}{(\bar{x}^2)^2}\right)(2g_\alpha^\beta x_\beta) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{(\bar{x}^2)^2}\right)(2g_\alpha^\beta x_\beta) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(-\frac{x_n}{(\bar{x}^2)^2}\right)(2g_\alpha^\beta x_\beta) + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{1}{\bar{x}^2}\right\} = \\
 &= \hat{S}\left\{\left(-\frac{2g_\alpha^\beta x_\beta}{\bar{x}^2}\right)\left[\frac{x_0}{\bar{x}^2}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{x_1}{\bar{x}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \frac{x_n}{\bar{x}^2}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(\frac{x_0}{\bar{x}^2}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\bar{x}^2}\right)^2 - \dots - \left(\frac{x_n}{\bar{x}^2}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right\} = \\
 &= -(2g_\alpha^\beta x_\beta)x_\gamma\frac{\partial f}{\partial x_\gamma} + g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}.
 \end{aligned}$$

Мы получили, что

$$K_\alpha = 2g_\alpha^\beta x_\beta x_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\gamma} - g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

**Теорема 1.2.** Если отождествить алгебры  $AC(1, n)$  и  $AO(2, n + 1)$ , то группа  $C(1, n)$ -автоморфизмов алгебры  $AC(1, n)$  совпадает с ее группой  $O(2, n + 1)$ -автоморфизмов.

**Доказательство.** Пусть  $X, Y, Z \in AO(2, n + 1)$ ,  $g \in O(2, n + 1)$ ,  $f : AO(2, n + 1) \rightarrow AC(1, n)$  — изоморфизм, индуцированный гомоморфизмом  $\varphi : O(2, n + 1) \rightarrow C(1, n)$ . Если

$$g \exp(tX)g^{-1} = \exp(tY),$$

то

$$\varphi(g)\varphi(\exp(tX))\varphi(g)^{-1} = \varphi(\exp(tY)).$$

Отсюда заключаем, что  $gXg^{-1} = Y$ ,  $\varphi(g)f(X)\varphi(g)^{-1} = f(Y)$ . Значит, каждый  $O(2, n + 1)$ -автоморфизм алгебры  $AC(1, n)$  является  $C(1, n)$ -автоморфизмом.

Наоборот, пусть мы имеем  $C(1, n)$ -автоморфизм алгебры  $AC(1, n)$ :  $\varphi(g)f(X)\varphi(g)^{-1} = f(Y)$ . Если  $g \exp(tX)g^{-1} = \exp(tZ)$ , то  $\varphi(g)f(X)\varphi(g)^{-1} = f(Z)$ . Отсюда следует, что  $f(Y) = f(Z)$ , а потому  $Y = Z$ . Значит, данный  $C(1, n)$ -автоморфизм индуцируется  $O(2, n + 1)$ -автоморфизмом  $gXg^{-1} = Y$ . Теорема доказана.

## § 2. Максимальные подалгебры конформной алгебры

В дальнейшем будем отождествлять прообраз с образом при изоморфизме  $f$  алгебры  $AO(2, n + 1)$  на алгебру  $AC(1, n)$ . В связи с этим мы получаем два набора обозначенки для одного и того же базиса. Пусть  $I_{ab}$  — матрица порядка  $n + 3$ , имеющая единицу на пересечении  $a$ -й строки и  $b$ -го столбца и нули на всех остальных местах. Тогда базис алгебры  $AO(2, n + 1)$  составляют матрицы:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{12} &= I_{12} - I_{21}, & \Omega_{ab} &= -I_{ab} + I_{ba} \quad (a < b, a, b = 3, \dots, n + 3), \\
 \Omega_{ia} &= -I_{ia} - I_{ai} \quad (i = 1, 2, a = 3, \dots, n + 3).
 \end{aligned}$$

Базисные элементы удовлетворяет таким коммутационным соотношениям:

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac},$$

где  $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \dots = -\rho_{n+3, n+3} = 1$ ,  $\rho_{ab} = 0$  при  $a \neq b$  ( $a, b = 1, 2, \dots, n+3$ ).

Эти же базисные элементы мы обозначаем и таким образом:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha+2, \beta+2} &= J_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n, \alpha < \beta), \quad \Omega_{1, \alpha+2} = \frac{1}{2}(K_{\alpha} + P_{\alpha}), \\ \Omega_{\alpha+2, n+3} &= \frac{1}{2}(K_{\alpha} - P_{\alpha}) \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n), \quad -\Omega_{1, n+3} = D. \end{aligned}$$

Пусть  $R_{2, n+1} = \langle Q_1, \dots, Q_{n+3} \rangle$  —  $(2+n+1)$ -мерное псевдоевклидово пространство с метрикой

$$\rho(X, X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_{n+3}^2, \quad X = x_i Q^i.$$

Если  $W$  — невырожденное подпространство пространства  $R_{2, n+1}$ , то через  $O(W)$  обозначим группу изометрий пространства  $W$ , а через  $AO(W)$  — ее алгебру Ли.

Подалгебра  $F \subset AO(W)$  называется неприводимой, если в  $W$  не существует  $F$ -инвариантного подпространства, отличного от  $O$  и  $W$ . В противном случае  $F$  называется приводимой. Если для каждого  $F$ -инвариантного подпространства  $W'$  в  $W$  существует такое  $F$ -инвариантное подпространство  $W''$  в  $W$ , что  $W = W' \oplus W''$ , то алгебра  $F$  называется вполне приводимой.

Чэнь Су-шин и Гринберг [10] установили, что алгебра  $AO(1, m)$  ( $m \geq 2$ ) не имеет неприводимых подалгебр, отличных от  $AO(1, m)$ . Тауфик [11] показал, что всякая полупростая неприводимая подалгебра алгебры  $AO(2, m)$  ( $m \geq 3$ ) переходит автоморфизмом этой алгебры в одну из следующих алгебр:

- 1)  $AO(2, m)$ ; 2)  $ASU(1, m|2)$  ( $m$  — четное);
- 3)  $\langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45} \rangle$  ( $m = 3$ ).

Если  $m$  — нечетное число, то неприводимая подалгебра алгебры  $AO(2, m)$  является полупростой, а потому совпадает с  $AO(2, m)$ . Если  $m = 2k$  и  $F$  — полупростая неприводимая подалгебра алгебры  $AO(2, m)$ , то  $F$  разлагается в прямую сумму фактора Леви и одномерного центра  $\langle Z \rangle$ . С точностью до  $O(2, m)$ -сопряженности  $Z = \Omega_{12} - \Omega_{34} - \dots - \Omega_{2k+1, 2k+2}$ . Централизатор  $L$  элемента  $Z$  в  $AO(2, m)$  состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \mu_{11}J & \lambda_{12}E + \mu_{12}J & \dots & \lambda_{1, k+1}E + \mu_{1, k+1}J \\ \lambda_{12}E - \mu_{12}J & \mu_{22}J & \dots & \lambda_{2, k+1}E + \mu_{2, k+1}J \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{1, k+1}E - \mu_{1, k+1}J & -\lambda_{2, k+1}E + \mu_{2, k+1}J & \dots & \mu_{k, k+1}J \end{pmatrix},$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,  $L = ASU(1, k) \oplus \langle Z \rangle$ . Отсюда на основании результата Тауфика заключаем, что с точностью до  $O(2, 2k)$ -сопряженности алгебра  $ASU(1, k) \oplus \langle Z \rangle$  является единственной максимальной неприводимой подалгеброй алгебры  $AO(2, 2k)$ .

Пусть  $F$  — подалгебра алгебры  $AO(2, n + 1)$  и пусть  $F$  не имеет в  $R_{2, n+1}$  инвариантных изотропных подпространств. Тогда  $F$  — вполне приводимая алгебра. Существует такое ортогональное разложение  $R_{2, n+1} = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ , что  $F$  допускает разложение в подпрямую сумму  $F = F_1 \dot{+} \dots \dot{+} F_s$ , где  $F_i$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(W_i)$  ( $i = 1, \dots, s$ ).

Пусть  $\rho_i(X, X)$  — ограничение метрики  $\rho(X, X)$  на  $W_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Если  $(2, m)$  — сигнатура  $\rho_1(X, X)$ , то на основании теоремы Витта о продолжении изометрий можно предполагать, что  $W_1 = R_{2, m} = \langle Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+2} \rangle$ ,  $W_2 = \langle Q_{m+3}, \dots, Q_{k_2} \rangle$ ,  $\dots$ ,  $W_s = \langle Q_{k_{s-1}+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle$ . В этом случае  $F_1$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(2, m)$ , а  $F_2, \dots, F_s$  — неприводимые подалгебры ортогональных алгебр  $AO(k_2 - m - 2), \dots, AO(n + 3 - k_{s-1})$  соответственно. Фактор Леви алгебры  $F_1$  является прямым слагаемым алгебры  $F$ .

Если  $\rho_i(X, X)$  имеет сигнатуру  $(1, m_i)$  ( $i = 1, 2$ ), то по теореме Витта будем предполагать, что  $W_1 = \langle Q_1, Q_3, \dots, Q_{m_1+2} \rangle$ ,  $W_2 = \langle Q_2, Q_{m_1+3}, \dots, Q_{m_1+m_2+2} \rangle$ ,  $W_3 = \langle Q_{m_1+m_2+3}, \dots, Q_{k_3} \rangle$ ,  $\dots$ ,  $W_s = \langle Q_{k_{s-1}+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle$ . В этом случае  $F_1 = AO(1, m_1)$ ,  $F_2 = AO(1, m_2)$ ,  $F_1 \dot{+} F_2$  — прямое слагаемое алгебры  $F$ , причем, если  $F_1 \dot{+} F_2 \neq F_1 \oplus F_2$ , то  $m_1 = m_2$  и  $F_1 \dot{+} F_2$  — диагональ в  $F_1 \oplus F_2$ .

**Определение.** Пусть  $W$  — подпространство пространства  $R_{2, n+1}$ . Нормализатором  $W$  в  $AO(2, n + 1)$  называется множество  $\text{Nor } W = \{X \in AO(2, n + 1) | (\forall Y \in W) (XY \in W)\}$ .

Легко видеть, что  $\text{Nor } W$  является подалгеброй Ли алгебры  $AO(2, n + 1)$ . Непосредственными вычислениями устанавливаем справедливость следующего предложения.

**Предложение 2.1.** Нормализатор одномерного изотропного пространства  $\langle Q_1 + Q_{n+3} \rangle$  совпадает с алгеброй

$$A\tilde{P}(1, n) = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle \dot{\oplus} (AO(1, n) \oplus \langle D \rangle),$$

а нормализатор двумерного изотропного пространства  $\langle Q_1 + Q_{n+3}, Q_2 + Q_{n+2} \rangle$  совпадает с алгеброй

$$AOpt(1, n) = \langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \dot{\oplus} (AO(n - 1) \oplus \langle C, S, T, Z \rangle),$$

где  $AO(1, n) = \langle J_{\alpha\beta} | \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n - 1 \rangle$ ,  $AO(n - 1) = \langle J_{ab} | a, b = 1, \dots, n - 1 \rangle$ ,  $M = P_0 + P_n$ ,  $G_a = J_{0a} - J_{an}$  ( $a = 1, \dots, n - 1$ ),  $C = J_{0n} - D$ ,  $Z = J_{0n} - D$ ,  $S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n)$ ,  $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n)$ .

Алгебра  $A\tilde{P}(1, n)$  называется расширенной алгеброй Пуанкаре, а алгебра  $AOpt(1, n)$  — оптической алгеброй пространства  $R_{1, n}$ . Последнее название связано с тем, что  $AOpt(1, n)$  является нормализатором в  $AC(1, n)$  изотропного подпространства  $\langle P_0 + P_n \rangle$  пространства  $R_{1, n}$ , порожденного изотропным или световым вектором  $P_0 + P_n$ .

**Предложение 2.2.** Если  $n$  — четное число и  $n > 2$ , то алгебра  $AO(2, n + 1)$  не имеет собственных неприводимых подалгебр. Алгебра  $AO(2, 3)$  обладает одной собственной неприводимой подалгеброй

$$\langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45} \rangle.$$

Если  $n$  — нечетное число и  $n > 1$ , то алгебра  $AO(2, n + 1)$  имеет одну максимальную (собственную) неприводимую подалгебру, совпадающую с  $ASU(1, (n + 1)/2) \oplus \langle Z \rangle$ . Максимальные приводимые подалгебры алгебры  $AO(2, n + 1)$  исчерпываются относительно  $O(2, n + 1)$ -сопряженности такими алгебрами:

- 1)  $A\tilde{P}(1, n)$ ; 2)  $AOpt(1, n)$ ;
- 3)  $AO_1(1, k) \oplus AO_2(1, n - k)$ , где  $AO_1(1, k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 1, 3, \dots, k + 2 \rangle$ ,  $AO_2(1, n + 1 - k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 2, k + 3, \dots, n + 3 \rangle$  ( $k = 2, \dots, [n + 1/2]$ ;  $n \geq 3$ );
- 4)  $AO(2, k) \oplus AO(n - k)$ , где  $AO(n - k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = k + 3, \dots, n + 3 \rangle$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

**Доказательство.** Пусть  $F$  — подалгебра алгебры  $AO(2, n + 1)$ ,  $W$  — вырожденное подпространство пространства  $R_{2, n + 1}$ , инвариантное относительно  $F$ . Пространство  $W$  содержит  $F$ -инвариантное изотропное подпространство, сопряженное  $\langle Q_1 + Q_{n+3} \rangle$  или  $\langle Q_1 + Q_{n+3}, Q_2 + Q_{n+2} \rangle$ . На основании предложения 2.1 алгебра  $F$   $O(2, n)$ -сопряжена подалгебре одной из алгебр:  $A\tilde{P}(1, n)$ ,  $AOpt(1, n)$ .

Остальные случаи рассмотрены при исследовании вполне приводимых подалгебр алгебры  $AO(2, n + 1)$ . Предложение доказано.

### 3. О подалгебрах расширенной алгебры Пуанкаре

В работах [6, 8] получен ряд общих результатов о подалгебрах алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ , рассматриваемых с точностью до  $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности, а также проведена классификация всех подалгебр алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$  относительно  $\tilde{P}(1, 4)$ -сопряженности. В этом параграфе мы переформулируем те предложения о подалгебрах алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ , где замена  $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности на  $C(1, n)$ -сопряженность дает некоторое упрощение перечня рассматриваемых подалгебр.

Пусть  $h = \exp \frac{\pi}{4}(K_0 + P_0 + K_n - P_n)$ . Тогда  $hG_a h^{-1} = P_a$ ,  $hP_a h^{-1} = -G_a$ ,  $hJ_{0n} h^{-1} = -D$ ,  $hDh^{-1} = -J_{0n}$ ,  $hMh^{-1} = M$ .

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:  $\langle X_1, \dots, X_s \rangle$  — векторное пространство или алгебра Ли над  $R$  с генераторами  $X_1, \dots, X_s$ ;

$$\begin{aligned} V[k, l] &= \langle G_k, \dots, G_l \rangle \quad (k \leq l), \quad W[k, l] = \langle P_k, \dots, P_l \rangle \quad (k \leq l); \\ \mathfrak{M}[r, t] &= \langle M, P_r, \dots, P_t, G_r, \dots, G_t \rangle \quad (r \leq t); \\ AH(0) &= O, \quad AH(2d) = AH(2d + 1) = \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2d-1, 2d} \rangle \quad (d \geq 1); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$K + L$  — подпрямая сумма алгебр  $K$  и  $L$ ;

$$\Delta[r, t] = \langle G_r + \alpha_r P_r, \dots, G_t + \alpha_t P_t, M \rangle,$$

где  $r \leq t$ ,  $0 < \alpha_r \leq \dots \leq \alpha_t = 1$ .

**Теорема 3.1.** Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$  исчерпываются относительно  $C(1, n)$ -сопряженности такими алгебрами:

$$\begin{aligned} &W[0, n]; \quad \Delta[1, s] \oplus W[s + 1, n - 1] \quad (s = 1, \dots, n - 2); \\ &\Delta[1, s] \oplus V[s + 1, t] \oplus W[t + 1, n - 1] \quad (s = 1, \dots, n - 3; \quad 2t \leq n - 1 + s); \\ &\langle G_1 + 2T, M \rangle \oplus W[2, n - 1]; \quad \langle M + 2T \rangle \oplus AH(n) \quad (n \equiv 0 \pmod{2}); \\ &AH(n - 2) \oplus \langle G_{n-1} + 2T, M \rangle \quad (n \equiv 0 \pmod{2}); \\ &AH(2d) \oplus \langle T \rangle \oplus W[2d + 1, n] \quad (d = 1, \dots, [n - 1/2]); \\ &AH(2d) \oplus \Delta[2d + 1, s] \oplus W[s + 1, n - 1] \quad (d = 1, \dots, [n - 3/2]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & AH(2d) \oplus \Delta[2d+1, s] \oplus V[s+1, t] \oplus W[t+1, n-1] \quad (2t \leq n-1+s; \\
 & d=1, \dots, [n-4/2]); \\
 & AH(2d) \oplus V[2d+1, s] \oplus W[s+1, n-1] \quad (2s \leq n-1+2d; \\
 & d=1, \dots, [n-3/2]); \\
 & AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1} + 2T, M \rangle \oplus W[2d+2, n-1] \quad (d=1, \dots, [n-3/2]); \\
 & AH(n-1) \oplus \langle J_{0n}, D \rangle; \quad AH(n-1) \oplus \langle M, J_{0n} + D \rangle; \\
 & AH(2d) \oplus \langle J_{0n} \rangle \oplus W[2d+1, n-1] \quad (d=0, 1, \dots, [n-2/2]).
 \end{aligned}$$

Теорема 3.1 вытекает из следствия 1 из теоремы 4.2 и следствия 1 из теоремы 5.1 [8].

**Теорема 3.2.** Пусть  $n \geq 3$ ,  $t = 1, \dots, [n-1/2]$ ;  $s = 1, \dots, [n-2/2]$ ;  $\alpha_1 = 1$ ,  $0 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t \leq 1$ ;  $X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \dots + \alpha_t J_{2t-1, 2t}$ . Одномерные подалгебры алгебры  $AP(1, n)$  исчерпываются относительно  $C(1, n)$ -сопряженности следующими алгебрами:

$$\begin{aligned}
 & \langle P_0 \rangle; \langle M \rangle; \langle P_1 \rangle; \langle G_1 + P_2 \rangle; \langle G_1 + 2T \rangle; \langle X_t \rangle; \langle X_t + P_0 \rangle; \langle X_t + M \rangle; \\
 & \langle X_t + P_{2t+1} \rangle; \langle X_s + G_{2s+1} + 2T \rangle; \langle X_r + G_{2r+1} + P_{2r+2} \rangle \quad (r = 1, \dots, [n-3/2]); \\
 & \langle J_{0n} \rangle; \langle D + \alpha J_{0n} \rangle \quad (0 < \alpha \leq 1); \langle J_{0n} + P_1 \rangle; \langle D + J_{0n} + M \rangle; \\
 & \langle X_t + \alpha D + \beta J_{0n} \rangle \quad (\alpha > 0, \alpha \geq \beta \geq 0); \langle X_t + \alpha(D + J_{0n} + M) \rangle; \\
 & \langle X_s + P_{2s+1} + \alpha J_{0n} \rangle \quad (\alpha > 0); \langle J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_{n/2-1} J_{n-1, n} + \gamma D \rangle; \\
 & \langle J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_{n/2-1} J_{n-1, n} + 2T \rangle,
 \end{aligned}$$

где  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{n/2-1} \leq 1$ .

Теорема 3.2 доказывается на основании следствия 2 из теоремы 4.2 и следствия 2 из теоремы 5.1 [8].

Пусть  $\tilde{F}_0$  — такая подалгебра алгебры  $U \bowtie F$ , что ее проекция на  $F$  совпадает с  $F_0$ . Запись  $\tilde{F}_0 + U_j$  означает, что  $U_j \subset U$ ,  $[F_0, U_j] \subset U_j$  и  $\tilde{F}_0 \cap U \subset U_j$ . Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах  $\tilde{F}_0 + U_1, \dots, \tilde{F}_0 + U_s$ , то употребляем обозначение  $\tilde{F}_0 : U_1, \dots, U_s$ . Пусть  $(i_1, \dots, i_q) = \langle P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \rangle$ ;  $(awb) = \langle P_a + wP_b \rangle$  ( $w > 0$ );  $(04) = \langle M \rangle$ .

**Теорема 3.3** Расщепляемые подалгебры алгебры  $AP(1, 4)$  исчерпываются относительно  $C(1, 4)$ -сопряженности такими алгебрами:

$$\begin{aligned}
 & O, (0), (4), (04), (0, 4), (04, 1), (1, 4), (0, 1, 4), (04, 1, 2), (1, 2, 4), (0, 1, 2, 4), (04, 1, 2, 3), \\
 & (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3, 4); \\
 & \langle J_{12} \rangle: O, (0), (4), (1, 2), (3, 4), (0, 4), (04, 3), (0, 1, 2), (04, 1, 2), (1, 2, 4), (0, 3, 4), \\
 & (0, 1, 2, 4), (04, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3, 4); \\
 & \langle J_{12} + J_{34} \rangle: O, (0), (1, 2), (0, 1, 2), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3, 4); \\
 & \langle J_{12} + cJ_{34} \rangle: O, (0), (1, 2), (3, 4), (0, 1, 2), (0, 3, 4), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3, 4) \quad (0 < c < 1); \\
 & \langle J_{04} \rangle: O, (04), (1), (0, 4), (04, 1), (1, 2), (0, 1, 4), (04, 1, 2), (1, 2, 3), (04, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), \\
 & (0, 1, 2, 3, 4); \\
 & \langle J_{12} + cJ_{04} \rangle: O, (3), (04), (1, 2), (0, 4), (04, 3), (0, 3, 4), (04, 1, 2), (1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), \\
 & (04, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3, 4) \quad (c > 0); \\
 & \langle G_3 \rangle: (1), (04, 1), (1, 2), (04, 1w3), (04, 3), (0, 3, 4), (04, 1w3, 2), (04, 1, 2), (04, 1, 3), \\
 & (0, 1, 3, 4), (04, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3, 4); \\
 & \langle G_3 - J_{12} \rangle: O, (04), (04, 3), (1, 2), (0, 3, 4), (04, 1, 2), (04, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3, 4);
 \end{aligned}$$

- $\langle J_{12}, J_{34} \rangle: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle J_{04}, J_{12} \rangle: O, (3), (04), (0,4), (04,3), (1,2), (0,3,4), (1,2,3), (04,1,2), (0,1,2,4),$   
 $(04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_3, J_{12} \rangle: (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2 \rangle: (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_3, J_{04} \rangle: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2),$   
 $(04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} \rangle: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4)$   
 $(c > 0);$   
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle: O, (0), (4), (04), (0,4), (1,2,3), (0,1,2,3), (1,2,3,4), (04,1,2,3),$   
 $(0,1,2,3,4);$   
 $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle: O, (1), (1,2), (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_3, J_{04}, J_{12} \rangle: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{12} \rangle: (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04} \rangle: O, (3), (04), (04,1), (04,3), (04,1w3), (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2),$   
 $(0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{12} + cJ_{04} \rangle: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4)$   
 $(c > 0);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3 - J_{12} \rangle: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} \rangle: O, (1,2), (0,3,4), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{34} \rangle: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12} \rangle: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} \rangle: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} \rangle: O, (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + cJ_{04} \rangle: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) (c > 0);$   
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} \rangle: O, (04), (0,4), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04} \rangle: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $AO(4): O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);$   
 $AO(1,3): O, (4), (0,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} \rangle: O, (04), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);$   
 $AO(1,4): O, (0,1,2,3,4);$

Теорема 3.3 доказывается на основании теоремы 4.1 [6].

**Теорема 3.4.** *Нерасщепляемые подалгебры алгебры  $AP(1,4)$ , не сопряженные расщепляемым подалгебрам этой алгебры, исчерпываются относительно  $S(1,4)$ -сопряженности такими алгебрами:*

- $\langle J_{12} + P_0 \rangle: O, (04), (4), (04,3), (1,2), (3,4), (04,1,2), (1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4);$   
 $\langle J_{12} + P_3 \rangle: O, (04), (0), (4), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4);$   
 $\langle J_{12} + P_0 + P_3 \rangle: O, (4), (1,2), (1,2,4);$   
 $\langle J_{12} + J_{34} + P_0 \rangle: O, (1,2), (1,2,3,4);$   
 $\langle J_{12} + cJ_{34} + M \rangle: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) (0 < c < 1);$   
 $\langle J_{04} + P_1 \rangle: O, (04), (0,4);$   
 $\langle J_{04} + P_2 \rangle: (1), (04,1), (0,1,4);$   
 $\langle J_{04} + P_3 \rangle: (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4);$   
 $\langle J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4) (c > 0);$

- $\langle G_3 + P_1 \rangle: O, (04), (04,3), (0,3,4);$   
 $\langle G_3 + P_2 \rangle: (1), (04,1), (04,1w3), (04,1,3), (0,1,3,4);$   
 $\langle G_3 + 2T \rangle: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (04,1w3,2), (04,1,2),$   
 $(04,1,3), (04,1,2,3);$   
 $\langle G_3 - J_{12} + 2T \rangle: O, (04), (04,3), (1,2), (04,1,2), (04,1,2,3);$   
 $\langle J_{12} + P_0, J_{34} + \delta P_0 \rangle: O, (1,2), (1,2,3,4) (\delta \geq 0);$   
 $\langle J_{12}, J_{34} + M, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3 \rangle: O, (04), (0,4), (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4) (\delta \geq 0);$   
 $\langle J_{04}, J_{12} + P_3 \rangle: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4);$   
 $\langle J_{12} + M, G_3 + \delta T \rangle (\delta = 0, 2); \langle J_{12}, G_3 + 2T \rangle; \langle J_{12} + \delta P_3, G_3 + 2T, M \rangle (\delta \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + M, G_3 + \delta T, P_1, P_2 \rangle (\delta = 0, 2); \langle J_{12}, G_3 + 2T, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle J_{12} + \delta T, G_3 + 2T, M, P_3 \rangle (\delta \geq 0); \langle J_{12} + 2T, G_3, M, P_3 \rangle;$   
 $\langle J_{12} + \delta P_3, G_3 + 2T, M, P_1, P_2 \rangle (\delta \geq 0); \langle J_{12} + \delta T, G_3 + 2T, M, P_1, P_2, P_3 \rangle (\delta \geq 0);$   
 $\langle J_{12} + 2T, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_3, G_2 + \mu P_2 + \delta P_3 \rangle (\mu > 0, \delta \geq 0);$   
 $\langle G_1, G_2 + P_2, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1 + P_2 + \gamma P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \delta P_3, M \rangle (\mu > 0, \gamma > 0 \vee \gamma = 0, \delta \geq 0);$   
 $\langle G_1 + P_2 + \gamma P_3, G_2 - P_1, M \rangle (\gamma \geq 0); \langle G_1 + \alpha P_3, G_2 + P_2 + \beta P_3, M \rangle (\alpha > 0);$   
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \mu P_2, M, P_3 \rangle (\mu \geq 0); \langle G_1, G_2 + P_2, M, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, M, P_1 \rangle (\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0);$   
 $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, M, P_1 \rangle (\beta \geq 0); \langle G_1 + P_3, G_2, M, P_1 \rangle;$   
 $\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + 2T, M, P_1 \rangle (\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0);$   
 $\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, M, P_1 + wP_3 \rangle (w > 0);$   
 $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, M, P_1 + wP_3 \rangle (w > 0);$   
 $\langle G_1 + P_3, G_2, M, P_1 + wP_3 \rangle (w > 0); \langle G_1 + P_3, G_2, M, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle G_1 + 2T, G_2 + \beta P_3, M, P_1, P_2 \rangle (\beta \geq 0); \langle G_1 + P_2, G_2, M, P_1, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1 + P_2, G_2 + \alpha T, M, P_1, P_3 \rangle (\alpha > 0); \langle G_1, G_2 + 2T, M, P_1, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2 + P_3, M, P_1 + wP_3, P_2 \rangle (w > 0);$   
 $\langle G_1 + 2T, G_2 + \alpha P_3, M, P_1 + wP_3, P_2 \rangle (\alpha \geq 0, w > 0);$   
 $\langle G_1 + P_3, G_2, P_0, P_1, P_2, P_4 \rangle; \langle G_1 + 2T, G_2, M, P_1, P_2, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_3, J_{04} + P_1 \rangle: O, (04), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2);$   
 $\langle G_3, J_{04} + P_2 \rangle: (1), (04,1), (04,1w3), (04,1,3), (0,1,3,4);$   
 $\langle G_3, J_{04} + P_3 \rangle: (04), (04,1), (04,1,2);$   
 $\langle G_3, J_{04} + P_1 + \alpha P_2, M, P_1 + wP_3 \rangle (\alpha > 0, w > 0);$   
 $\langle G_3, J_{04} + P_1 + \alpha P_3, M \rangle (\alpha > 0); \langle G_3, J_{04} + P_2 + \alpha P_3, M, P_1 \rangle (\alpha > 0);$   
 $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle: (04), (04,1,2) (c > 0);$   
 $\langle G_3, J_{04} + P_3, J_{12} + \delta P_3 \rangle: (04), (04,1,2) (\delta \geq 0);$   
 $\langle G_3, J_{04}, J_{12} + P_3 \rangle: (04), (04,1,2);$   
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} + \alpha P_3, M \rangle (\alpha = 0, 1);$   
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12}, M, P_3 \rangle; \langle G_1, G_2, J_{12} + 2T, M, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2, J_{12} + P_3, P_0, P_1, P_2, P_4 \rangle; \langle G_1, G_2, J_{12} + 2T, M, P_1, P_2, P_3 \rangle;$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 \rangle: (04), (04,3), (04,1w3), (04,1w3,2);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_2 \rangle: (04,1), (04,1w3), (04,1,3);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3 \rangle: O, (04), (04,1), (04,1,2), (0,1,2,4);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 + \alpha P_2, M, P_1 + wP_3 \rangle (\alpha > 0, w > 0);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 + \alpha P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, J_{04} + P_2 + \alpha P_3, M, P_1 \rangle (\alpha > 0);$   
 $\langle G_1, G_2, J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4) (c > 0);$   
 $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, M \rangle (\beta > 0 \vee \beta = 0, \delta \neq 0);$

- $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, M \rangle$  ( $\delta - \beta^2 \mu \neq 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 0 \vee \beta = 0$ ,  $\gamma \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 + P_3, G_3 - P_2, M, P_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2 + P_3, G_3 - P_2 + \mu P_3, M, P_1 \rangle$  ( $\mu > 0$ ,  $\beta > 0 \vee \beta = 0$ ,  $\gamma \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2, G_3 + P_3, M, P_1 \rangle$  ( $\beta > 0$ );  
 $\langle G_1 + P_3, G_2, G_3, M, P_1, P_2 \rangle$ ;  $\langle G_1 + \alpha P_3, G_2, G_3 + 2T, M, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle G_1 + 2T, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ;  $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} - G_3, M, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, J_{12} - G_3 + 2T, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{34} + P_0 \rangle$ :  $O, (1,2,3,4)$ ;  
 $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3, J_{12} + \alpha P_3 \rangle$ :  $O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4)$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12} + P_3 \rangle$ :  $O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4)$ ;  
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \alpha P_3, J_{12} + \delta P_3, M \rangle$  ( $\alpha \neq 0$ ,  $\delta = 0, 1$ );  
 $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12}, M, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, G_3 + 2T, J_{12} + \alpha P_3, M, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha = 0, 1$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3 + 2T, J_{12} + \alpha T, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$  ( $\alpha = 0, 1$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + 2T, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_1, M \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_2, M, P_1 \rangle$ ;  $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_3, M, P_1, P_2 \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + cJ_{04} + P_3 \rangle$ :  $(04), (04,1,2)$  ( $c > 0$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_3, J_{12} + \alpha P_3 \rangle$ :  $(04), (04,1,2)$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}, J_{12} + P_3 \rangle$ :  $(04), (04,1,2)$ .

Доказательство теоремы 3.4 проводим на основании теоремы 4.3 [6].

**Теорема 3.5.** *Расщепляемые подалгебры алгебры  $A\tilde{P}(1,4)$ , не сопряженные подалгебрам алгебры  $AP(1,4)$ , исчерпываются относительно  $C(1,4)$ -сопряженности такими алгебрами:*

- $\langle J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $(0), (0,4), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (0,1,2,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle J_{12} + J_{34} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle J_{12} + cJ_{34} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O, (0), (1,2), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4)$   
 $(0 < c < 1)$ ;  
 $\langle J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O, (04), (1), (0,4), (04,1), (1,2), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,3), (04,1,2,3),$   
 $(0,1,2,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle J_{12} + cJ_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O, (3), (04), (1,2), (0,4), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (1,2,3),$   
 $(0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4)$  ( $c > 0$ );  
 $\langle G_3 \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $(0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle G_3 - J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $(0,3,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle J_{12}, J_{34} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha D \rangle$ :  $(1,2), (0,1,2)$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle J_{04}, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O, (3), (04), (0,4), (04,3), (1,2), (0,3,4), (1,2,3), (04,1,2),$   
 $(0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle G_3, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $(0,3,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle G_1, G_2 \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $(0,1,2,4), (0,1,2,3,4)$ ;  
 $\langle G_3, J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $(1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2),$   
 $(04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4)$ ;



- $\langle G_3, J_{12} + cJ_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle D \rangle$ : (0), (4), (0,4), (0,1,2,3), (1,2,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle \oplus \langle D \rangle$ :  $O$ , (1), (1,2), (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);  
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14} \rangle \oplus \langle D \rangle$ :  $O$ , (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_3, J_{04}, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, J_{12} + cJ_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) ( $c > 0$ );  
 $\langle G_1, G_2, G_3 + D, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ ;  $\langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle \boxplus (\langle G_1, G_2, G_3 - J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle)$ ;  
 $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O$ , (1,2), (0,3,4), (0,1,2,3,4);  
 $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{12} - J_{34} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O$ , (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $(\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} \rangle \dagger \langle D \rangle) \boxminus \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ ;  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + cJ_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ :  $O$ , (04), (0,4), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $AO(4) \oplus \langle D \rangle$ :  $O$ , (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);  
 $AO(1, 3) \oplus \langle D \rangle$ :  $O$ , (4), (0,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} \rangle \dagger \langle D \rangle$ : (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);  
 $AO(1, 4) \oplus \langle D \rangle$ :  $O$ , (0,1,2,3,4).

Доказательство теоремы 3.5 проводится на основании теоремы 4.1 [6]. Отметим, что перечень подалгебр алгебры  $AO(1, 4) \oplus \langle D \rangle$  приведен в лемме 6.1 [8]. Дальнейшее упрощение этого перечня проводим при помощи автоморфизма  $\exp \frac{\pi}{4}(K_0 + P_0 + K_n - P_n)$ .

**Теорема 3.6.** *Нерасщепляемые подалгебры алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$ , не сопряженные подалгебрам алгебры  $AP(1, 4)$ , исчерпываются относительно  $C(1, 4)$ -сопряженности такими алгебрами:*

- $\langle J_{04} - D + 2T \rangle$ :  $O$ , (1), (04), (1,2), (04,1), (1,2,3), (04,1,2), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T) \rangle$ :  $O$ , (04), (3), (04,3), (1,2), (1,2,3), (04,1,2), (04,1,2,3) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{04} + D + M, J_{12} + \alpha M \rangle$ :  $O$ , (3), (1,2), (1,2,3) ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} + D, J_{12} + M \rangle$ :  $O$ , (3), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle J_{04} - D + 2T, J_{12} + \alpha T \rangle$ : (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, J_{12} + 2T \rangle$ : (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T \rangle$ : (04), (04,1), (04,1w3), (04,3), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{04} - 2D, G_3 + 2T \rangle$ :  $O$ , (1), (1,2);

- $\langle J_{04} - D, G_3 + P_1 \rangle$ :  $O$ , (04), (04,3), (0,3,4);  
 $\langle J_{04} - D, G_3 + P_2 \rangle$ : (1), (04,1), (04,1w3), (04,1,3), (0,1,3,4);  
 $\langle J_{04} - D + 2T, G_3 + \alpha P_1, M, P_3 \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D + 2T, G_3 + \alpha P_2, M, P_1, P_3 \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D + 2T, G_3 \rangle$ : (04,3), (04,1,3), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{04} + D + M, G_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - 2D), G_3 + 2T \rangle$ : (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - 2D), G_3 + 2T \rangle$ :  $O$ , (1,2) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - 2D + 2T), G_3 \rangle$ : (04,3), (04,1,2,3) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} + D + M), G_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{04} - 2D, G_3 + 2T \rangle$ : (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{12}, J_{04} - 2D, G_3 + 2T \rangle$ :  $O$ , (1,2);  
 $\langle J_{12} + \alpha T, J_{04} - D + 2T, G_3 \rangle$ : (04,3), (04,1,2,3) ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle J_{12} + 2T, J_{04} - D, G_3 \rangle$ : (04,3), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{12} + \alpha M, J_{04} + D + M, G_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle J_{12} + M, J_{04} + D, G_3, P_1, P_2 \rangle$ ;  
 $\langle J_{04} - 2D, G_1, G_2 + 2T \rangle$ : (04,1), (04,1,2), (04,1,2w3), (04,1,3), (04,1,2,3);  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_3, G_2 + \mu P_2 + \delta P_3 \rangle$  ( $\mu > 0, \delta \geq 0$ );  $\langle J_{04} - D, G_1, G_2 + P_2, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \delta P_3, M \rangle$  ( $\mu > 0, \lambda > 0 \vee \lambda = 0, \delta \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 - P_1, M \rangle$  ( $\lambda \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + \alpha P_3, G_2 + P_2 + \delta P_3, M \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \mu P_2, P_3, M \rangle$  ( $\mu \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1, G_2 + P_2, M, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, M, P_1 \rangle$  ( $\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, M, P_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  $\langle J_{04} - D, G_1 + P_3, G_2, M, P_1 \rangle$ ;  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, M, P_1 + w P_3 \rangle$  ( $w > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, M, P_1 + w P_3 \rangle$  ( $w > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_3, G_2, M, P_1 + w P_3 \rangle$  ( $w > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_3, G_2, M, P_1, P_2 \rangle$ ;  $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2, G_2, M, P_1, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle J_{04} - D, G_1, G_2 + P_3, M, P_1 + w P_3, P_2 \rangle$  ( $w > 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_3, G_2, P_0, P_1, P_2, P_4 \rangle$ ;  
 $\langle J_{04} - D + 2T, G_1 + \beta P_3, G_2, M, P_1, P_2 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D + 2T, G_1, G_2, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - D), G_1 + P_2, G_2 - P_1 \rangle$ : (04), (04,3) ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T), G_1, G_2, M, P_1, P_2, s P_3 \rangle$  ( $c > 0, s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{12} + 2T, J_{04} - D, G_1, G_2, M, P_1, P_2, s P_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{12} + \delta T, J_{04} - D + 2T, G_1, G_2, M, P_1, P_2, s P_3 \rangle$  ( $\delta \geq 0, s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{12}, J_{04} - D, G_1 + P_2, G_2 - P_1, M, s P_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{04} - 2D, G_1, G_2, G_3 + 2T, M, P_1, P_2, s P_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, M \rangle$  ( $\mu > 0, \beta > 0 \vee \beta = 0, \gamma \geq 0, \delta - \beta^2 \mu \neq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, M \rangle$  ( $\beta \geq 0, \delta \neq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + \beta P_2, G_2 + P_3, G_3 - P_2, M, P_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2 + P_3, G_3 - P_2 + \mu P_3, M, P_1 \rangle$  ( $\mu > 0, \beta > 0 \vee \beta = 0, \gamma \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2, G_3 + P_3, M, P_1 \rangle$  ( $\beta > 0 \vee \beta = 0, \gamma \geq 0$ );  
 $\langle J_{04} - D, G_1 + P_3, G_2, G_3, M, P_1, P_2 \rangle$ ;  $\langle J_{04} - D + 2T, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ;

- $\langle J_{12} + c(J_{04} - 2D), G_1, G_2, G_3 + 2T, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $c > 0, s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - D), G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, M \rangle$  ( $c > 0, \beta \neq 0$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - D), G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, M, P_3 \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12} + c(J_{04} - D + 2T), G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$  ( $c > 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{13}J_{23}, J_{04} - D + 2T \rangle$ :  $O, (04), (1,2,3), (04,1,2,3)$ ;  
 $\langle J_{12}, J_{04} - 2D, G_1, G_2, G_3 + 2T, M, P_1, P_2, sP_3 \rangle$  ( $s = 0, 1$ );  
 $\langle J_{12} + 2T, J_{04} - D, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle J_{12} + \delta T, J_{04} - D + 2T, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$  ( $\delta \geq 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{04} - D, G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, M \rangle$  ( $\beta \neq 0$ );  
 $\langle J_{12}, J_{04} - D, G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, M, P_3 \rangle$ ;  
 $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - D + 2T, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3 \rangle$ .

Доказательство теоремы 3.6 проводится на основании теоремы 6.2 [8].

#### § 4. О подалгебрах оптической алгебры

В этом параграфе мы выделим те подалгебры алгебры  $AOpt(1, n)$ , которые не сопряжены подалгебрам алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ . Используя общие свойства таких подалгебр, опишем максимальные абелевы и одномерные подалгебры алгебры  $AOpt(1, n)$ . Затем проведем классификацию относительно  $C(1, 4)$ -сопряженности всех подалгебр алгебры  $AOpt(1, 4)$ , не сопряженных подалгебрам алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$ .

Генераторы алгебры  $AOpt(1, n)$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 [G_a, J_{bc}] &= g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, & [G_a, G_b] &= 0, & [P_a, G_b] &= \delta_{ab}M, \\
 [G_a, M] &= [P_a, M] = [J_{ab}, M] = 0, & [C, S] &= 2S, & [C, T] &= -2T, & [T, S] &= C, \\
 [Z, C] &= 0, & [Z, S] &= 0, & [Z, T] &= 0, & [Z, M] &= -2M, & [Z, G_a] &= -G_a, \\
 [Z, P_a] &= -P_a, & [C, G_a] &= G_a, & [C, P_a] &= -P_a, & [C, M] &= 0, & [S, G_a] &= 0, \\
 [S, P_a] &= -G_a, & [S, M] &= 0, & [T, G_a] &= P_a, & [T, P_a] &= 0, & [T, M] &= 0 \\
 (a, b, c &= 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned}$$

Значит,  $\langle C, S, T \rangle = ASL(2R)$ ,  $\langle C, S, T, Z \rangle = AGL(2, R)$ ,  $AOpt(1, n) = AS\widetilde{Sch}(n-1) \oplus \langle Z \rangle$ .

**Предложение 4.1.** *Подалгебры алгебры  $AGL(2, R)$  исчерпываются относительно  $GL(2, R)$ -сопряженности такими алгебрами:*

$$\begin{aligned}
 &O; \langle C \rangle; \langle T \rangle; \langle S + T \rangle; \langle Z \rangle; \langle C + \lambda Z \rangle \ (\lambda > 0); \langle T + Z \rangle; \\
 &\langle S + T + \lambda Z \rangle \ (\lambda > 0); \langle C, T \rangle; \langle C, Z \rangle; \langle T, Z \rangle; \langle S + T, Z \rangle; \\
 &\langle C + \lambda Z, T \rangle \ (\lambda \neq 0); \langle C, S, T \rangle; \langle C, T, Z \rangle; \langle C, S, T, Z \rangle.
 \end{aligned}$$

*Записанные алгебры попарно не сопряжены.*

Предложение 4.1 доказывается методом Ли-Гурса.

В дальнейшем, говоря о подалгебрах алгебры  $AGL(2, R)$ , мы будем иметь в виду подалгебры, выписанные в предложении 4.1.

Через  $\pi, \tau$  обозначим проектирования алгебры  $AOpt(1, n)$  на  $AO(n-1) \oplus AGL(2, R), AGL(2, R)$  соответственно.

**Предложение 4.2.** *Пусть  $L$  — подалгебра алгебры  $AOpt(1, n)$ . Если  $\tau(L) \subset \langle C, T, Z \rangle$ , то  $L$  сопряжена подалгебре алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ .*

**Доказательство.** Так как

$$\begin{aligned} C &= -J_{0n} - D = \Omega_{1,n+3} - \Omega_{2,n+2}, \\ T &= \frac{1}{2}(P_0 - P_n) = \frac{1}{2}(\Omega_{12} - \Omega_{2,n+3} - \Omega_{1,n+2} + \Omega_{n+2,n+3}), \\ Z &= J_{0n} - D = \Omega_{1,n+3} + \Omega_{2,n+2}, \quad M = P_0 + P_n, \end{aligned}$$

то изотропное пространство  $\langle Q_1 + Q_{n+3} \rangle$  является инвариантным относительно алгебры

$$F = \langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \bowtie (AO(n-1) \oplus \langle C, T, Z \rangle).$$

Отсюда вытекает, что алгебра  $F$ , а значит, и любая ее подалгебра, сопряжена подалгебре алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ . Предложение доказано.

Предложение 4.2 позволяет ограничиться рассмотрением тех подалгебр  $L$  алгебры  $AOpt(1, n)$ , для которых  $\tau(L)$  совпадает с одной из алгебр:

$$\langle S + T \rangle, \langle S + T + \lambda Z \rangle (\lambda > 0), \langle S + T, Z \rangle, \langle C, S, T \rangle, AGL(2, R). \quad (4.1)$$

Если  $\tau(L) = \langle S + T \rangle$  или  $\tau(L) = \langle C, S, T \rangle$ , то  $L \subset \widetilde{ASch}(n-1)$ . В этом случае применимы результаты [9]. Дальнейшее упрощение получаемых алгебр достигается применением автоморфизма  $\exp(\theta Z)$ . Теперь допустим, что  $\tau(L)$  — одна из остальных алгебр (4.1). Если в  $\mathfrak{M}[1, n-1]$  существует одномерный  $\pi(L)$ -подмодуль, то он аннулируется проекцией алгебры  $\pi(L)$  на  $AO(n-1) \oplus ASL(2, R)$  [9]. Так как  $[Z, M] = -2M$ ,  $[Z, G_a] = -G_a$ ,  $[Z, P_a] = -P_a$ , то в силу теоремы 2.1 [9] алгебра  $\pi(L)$  является вполне приводимой алгеброй линейных преобразований пространства  $\mathfrak{M}[1, n-1]$  (см. обозначения (3.1)) и аннулирует в этом пространстве только нулевое подпространство. Отсюда на основании предложения 2.1 [8] заключаем, что  $\pi(L)$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $\mathfrak{M}[1, n-1] \bowtie \pi(L)$ . Следовательно,  $L = W \bowtie \pi(L)$ , где  $W \subset \mathfrak{M}[1, n-1]$ . Так как неприводимые  $\langle S + T + \lambda Z \rangle$ -подмодули модуля  $\mathfrak{M}[1, n-1]/\langle M \rangle$  двумерны, а  $\langle M \rangle$  и  $\langle G_a \rangle$  не изоморфны, как  $\langle Z \rangle$ -модули, то по лемме 3.1 [8]  $W$  содержит свою проекцию на  $\langle M \rangle$ . Мы не теряем общности, если при описании  $W$  будем предполагать, что проекция  $L$  на  $\langle Z \rangle$  является нулевой. Другими словами, при нахождении инвариантных пространств  $W$  можно считать, что речь идет о подалгебрах алгебры Шредингера. Это значит, что снова можно воспользоваться результатами работы [9].

**Теорема 4.1.** *Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $AOpt(1, n)$ , не сопряженные подалгебрам алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ , исчерпываются относительно  $C(1, n)$ -сопряженности такими алгебрами:*

$$\begin{aligned} AH(n-1) \oplus \langle S + T, M \rangle, \quad AH(n-1) \oplus \langle S + T, Z \rangle, \\ AH(2d) \oplus \langle J(d+1, r) + S + T \rangle \oplus \langle M \rangle \oplus \Pi(d+1, r), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J(d+1, r) &= J_{2(d+1)-1, 2(d+1)} + \dots + J_{2r-1, 2r}, \\ \Pi(d+1, r) &= \langle G_{2(d+1)-1} + P_{2(d+1)}, \dots, G_{2r-1} + P_{2r} \rangle \\ (d &= 0, 1, \dots, [n-3/2]; r = d+1, \dots, [n-1/2]). \end{aligned}$$

*Записанные алгебры попарно не сопряжены.*

Теорема 4.1 доказывается на основании следствия из теоремы 4.1 [9] и предложения 4.2.

**Теорема 4.2.** Пусть  $n \geq 3$ ;  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ;

$$X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \dots + \alpha_t J_{2t-1, 2t},$$

где  $\alpha_1 = 1$ ,  $0 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t$  при  $t \neq 1$ ;  $t = 1, \dots, [n - 1/2]$ . Одномерные подалгебры алгебры  $AOpt(1, n)$ , не сопряженные подалгебрам алгебры  $A\dot{P}(1, n)$ , исчерпываются относительно  $C(1, n)$ -сопряженности такими алгебрами:

$$\begin{aligned} &\langle S + T \rangle, \langle S + T \pm M \rangle, \langle X_t + \alpha(S + T) \rangle, \langle S + T + \alpha Z \rangle, \\ &\langle X_t + \alpha(S + T) \pm M \rangle, \langle X_t + S + T + G_1 + P_2 \rangle, \langle X_t + \alpha(S + T) + \beta Z \rangle. \end{aligned}$$

Теорема 4.2 доказывается на основании следствия 2 из теоремы 4.1 [9] и предложения 4.2.

**Теорема 4.3.** Пусть  $F$  — подалгебра алгебры  $AOpt(1, 4)$ , не сопряженная ни одной из подалгебр алгебры  $A\dot{P}(1, 4)$ . Тогда  $F$   $C(1, 4)$ -сопряжена одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned} &\langle S + T \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, P_1, M \rangle, \langle G_1 - \lambda^{-1}P_2, G_2 + \lambda P_1, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \\ &\langle G_1 - \lambda^{-1}P_2, G_2 + \lambda P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle \quad (0 < \lambda \leq 1); \\ &\langle S + T \pm M \rangle; \langle S + T + \alpha J_{12} \pm M \rangle \quad (\alpha > 0); \\ &\langle S + T + \alpha J_{12} \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, M \rangle, \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \\ &\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle \\ &(\alpha > 0); \\ &\langle S + T + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 - \alpha G_3, M \rangle \quad (\alpha > 0); \\ &\langle S + T + 2J_{12} + \gamma M, G_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2}G_3 \rangle \quad (\gamma = 0, \pm 1); \\ &\langle S + T + J_{12} \rangle: \langle G_1 + P_2 \rangle, \langle G_1 + P_2, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \\ &\langle G_1 + P_2, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle; \\ &\langle S + T + J_{12} \pm M, G_1 + P_2 \rangle; \\ &\langle S + T + J_{12} + G_1 + P_2 \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_2 - P_1, M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \\ &\langle G_2 - P_1, G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \langle G_2 - P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle, \\ &\langle G_2 - P_1, G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle; \\ &\langle J_{12}, S + T \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \\ &\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\ &\langle J_{12} + \alpha M, S + T + \beta M \rangle \quad (\alpha \geq 0, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0); \\ &AO(3) \oplus \langle S + T \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\ &AO(3) \oplus \langle S + T \pm M \rangle; \\ &\langle S + T \rangle + \langle Z \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, P_1, M \rangle, \langle G_1 - \lambda^{-1}P_2, G_2 + \lambda P_1, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \\ &\langle G_1 - \lambda^{-1}P_2, G_2 + \lambda P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle \quad (0 < \lambda \leq 1); \\ &\langle S + T + \alpha J_{12} \rangle + \langle Z \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, M \rangle, \\ &\langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle, \\ &\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\ &\langle S + T + 2J_{12} + \lambda Z, G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 - \alpha G_3, M \rangle \quad (\alpha > 0, \lambda > 0); \\ &\langle S + T + 2J_{12}, Z, G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 - \alpha G_3, M \rangle \quad (\alpha > 0); \\ &\langle S + T + J_{12} \rangle + \langle Z \rangle: \langle G_1 + P_2 \rangle, \langle G_1 + P_2, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \\ &\langle G_1 + P_2, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1 + P_2, G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle S + T + J_{12} + G_1 + P_2 \rangle \uplus \langle Z \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_2 - P_1, M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \\
& \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \langle G_2 - P_1, G_1 - P_2, G_2 + P_1, M \rangle, \langle G_2 - P_1, G_3, P_3, M \rangle, \\
& \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_2 - P_1, G_1 - P_2, G_2 + P_1, G_3, P_3, M \rangle; \\
& \langle J_{12}, S+T \rangle \uplus \langle Z \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1+P_2, G_2-P_1, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \\
& \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& AO(3) \oplus (\langle S + T \rangle \uplus \langle Z \rangle): O, \langle M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& \langle C, S, T \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, P_1, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& \langle J_{12} \rangle \oplus \langle C, S, T \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \\
& \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& AO(3) \oplus \langle C, S, T \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& \langle C, S, T, Z \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, P_1, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& \langle C, S, T \rangle \oplus (\langle J_{12} \rangle \uplus \langle Z \rangle): O, \langle M \rangle, \langle G_3, P_3, M \rangle, \langle G_1, G_2, P_1, P_2, M \rangle, \\
& \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle; \\
& AO(3) \oplus \langle C, S, T, Z \rangle: O, \langle M \rangle, \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3, M \rangle.
\end{aligned}$$

Теорема 4.3 доказывается на основании теорем 5.4, 5.5 [9] и предложения 4.2.

Отметим, что встречающиеся в теореме 4.3 подпрямые суммы вида  $\langle X \rangle \uplus \langle Z \rangle$  — это алгебры  $\langle X + \lambda Z \rangle$  ( $\lambda > 0$ ),  $\langle X, Z \rangle$ . Под  $\langle J_{12}, S + T \rangle \uplus \langle Z \rangle$  следует понимать одну из алгебр  $\langle J_{12} + \lambda Z, S + T + \mu Z \rangle$  ( $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ),  $\langle J_{12}, S + T, Z \rangle$ , причем, если  $\lambda < 0$  или  $\mu < 0$ , то проекция  $F$  на  $\langle G_1, G_2, P_1, P_2 \rangle$  совпадает с  $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 \rangle$ .

## § 5. Разрешимые подалгебры конформной алгебры

В этом параграфе мы приведем модифицированное изложение результата работы [7] о максимальных разрешимых подалгебрах алгебры  $AC(1, n)$ , а также проведем классификацию максимальных абелевых и одномерных подалгебр алгебры  $AC(1, n)$ .

Напомним, что

$$\begin{aligned}
\Omega_{12} &= \frac{1}{2}(P_0 + K_0), \quad \Omega_{\alpha+2, \beta+2} = J_{\alpha\beta}, \\
\Omega_{n+2, n+3} &= \frac{1}{2}(K_n - P_n) \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n), \quad M = P_0 + P_n, \\
G_a &= J_{0a} - J_{an} \quad (a = 1, \dots, n-1), \quad C = -J_{0n} - D, \\
Z &= J_{0n} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n), \quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n), \quad D = -\Omega_{1, n+3}.
\end{aligned}$$

**Теорема 5.1.** *Если  $n$  — четное число и  $n \geq 4$ , то алгебра  $AC(1, n)$  обладает относительно  $C(1, n)$ -сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами:*

$$\begin{aligned}
& \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n} \rangle; \\
& \langle P_0, P_1, \dots, P_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n}, D \rangle; \\
& \langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, C, T, Z \rangle; \\
& \langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, S + T, Z \rangle.
\end{aligned}$$

Их размерности равны соответственно

$$\frac{n+2}{2}, \frac{3n+4}{2}, \frac{5n+2}{2}, \frac{5n}{2}.$$

Если  $n$  — нечетное число и  $n \geq 3$ , то алгебра  $AC(1, n)$  обладает относительно  $C(1, n)$ -сопряженности тремя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\begin{aligned} &\langle P_0 + K_0, P_n - K_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1} \rangle; \\ &\langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1}, C, T, Z \rangle; \\ &\langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1}, S + T, Z \rangle. \end{aligned}$$

Их размерности равны соответственно

$$\frac{n+3}{2}, \frac{5n+3}{2}, \frac{5n+1}{2}.$$

Во всех случаях записанные алгебры попарно несопряжены.

**Доказательство.** Пусть  $L$  — максимальная разрешимая подалгебра алгебры  $AO(2, n+1)$ . Если все неприводимые  $L$ -инвариантные подпространства пространства  $R_{2, n+1}$  невырождены, то  $L = \langle \Omega_{12}, \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+1, n+2} \rangle$  при четном  $n$  и  $L = \langle \Omega_{12}, \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+2, n+3} \rangle$  при нечетном  $n$ . Если в  $R_{2, n+1}$  существует изотропное  $L$ -инвариантное подпространство, то  $L$  сопряжена подалгебре алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$  или алгебры  $AOpt(1, n)$ .

В [8] установлено, что если  $n$  — нечетное число, то алгебра  $A\tilde{P}(1, n)$  обладает относительно  $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй

$$\langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1}, C, T, Z \rangle, \quad (5.1)$$

а если  $n$  — четное число, то алгебра  $A\tilde{P}(1, n)$  обладает относительно  $\tilde{P}(1, n)$ -сопряженности двумя максимальными разрешимыми подалгебрами

$$\langle P_0, P_1, \dots, P_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n}, D \rangle, \quad (5.2)$$

$$\langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-3, n-2}, C, T, Z \rangle. \quad (5.3)$$

Согласно [9], при любом  $n$  алгебра  $AOpt(1, n)$  имеет относительно  $\widetilde{Sch}(n-1)$ -сопряженности две максимальные разрешимые подалгебры

$$\langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus (AH(n-1) \oplus \langle C, T, Z \rangle), \quad (5.4)$$

$$\langle M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle \oplus (AH(n-1) \oplus \langle S + T, Z \rangle). \quad (5.5)$$

Алгебры (5.1), (5.3) совпадают с алгеброй (5.4). Алгебра (5.2) не сопряжена ни одной из подалгебр алгебр (5.4), (5.5), поскольку алгебра (5.2) не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве  $R_{1, n}$ . Несопряженность алгебр (5.4) и (5.5) вытекает из того, что эти алгебры имеют разные размерности. Теорема доказана.

**Теорема 5.2.** Максимальные абелевы подалгебры алгебры  $AC(1, n)$  ( $n \geq 2$ ) исчерпываются относительно  $C(1, n)$ -сопряженности максимальными абелевыми подалгебрами алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ , описанными в теореме 3.1, максимальными абелевыми подалгебрами алгебры  $AOpt(1, n)$ , не сопряженными подалгебрами алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$  и описанными в теореме 4.1, а также алгебрами

$$\langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-1, n} \rangle \quad (n - \text{четное}),$$

$$\langle P_0 + K_0, P_n - K_n, J_{12}, J_{34}, \dots, J_{n-2, n-1} \rangle \quad (n - \text{нечетное}),$$

Справедливость теоремы 5.2 вытекает из теорем 3.1, 4.1, 5.1.

**Теорема 5.3.** *Одномерные подалгебры алгебры  $AC(1, n)$  ( $n \geq 3$ ) исчерпываются относительно  $C(1, n)$ -сопряженности одномерными подалгебрами алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$ , описанными в теореме 3.2, одномерными подалгебрами алгебры  $AOpt(1, n)$ , несопряженными подалгебрам алгебры  $A\tilde{P}(1, n)$  и описанными в теореме 4.2, а также такими алгебрами:*

$$\begin{aligned} & \langle P_0 + K_0 \rangle, \langle \alpha(P_0 + K_0) + J_{12} \rangle, \\ & \langle \alpha(P_0 + K_0) + J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_s J_{2s+1, 2s+2} \rangle \\ & (\alpha > 0, 0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_s \leq 1, s = 1, \dots, [n - 2/2]), \\ & \langle \alpha(P_0 + K_0) + J_{12} + \gamma_1 J_{34} + \dots + \gamma_{(n-3)/2} J_{n-2, n-1} + \gamma_{(n-1)/2} (K_n - P_n) \rangle, \\ & \langle J_{12} + \gamma_1 J_{34} + \dots + \gamma_{(n-3)/2} J_{n-2, n-1} + \gamma_{(n-1)/2} (K_n - P_n) \rangle, \end{aligned}$$

где  $n$  — нечетное,  $\alpha > 0, 0 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{(n-1)/2} \leq 1$ .

Доказательство теоремы 5.3 проводится на основании теорем 3.2, 4.2, 5.2.

## § 6. Классификация подалгебр алгебры $AC(1, 4)$

Множество подалгебр алгебры  $AC(1, 4) = AO(2, 5)$  разобьем на три класса: 1) подалгебры, не имеющие в пространстве  $R_{2,5}$  инвариантных изотропных подпространств; 2) подалгебры, имеющие в  $R_{2,5}$  инвариантное одномерное изотропное подпространство; 3) подалгебры, имеющие в  $R_{2,5}$  инвариантное изотропное подпространство размерности 2 и не имеющие в  $R_{2,5}$  инвариантных изотропных подпространств размерности 1,

Перечни подалгебр второго и третьего классов дают теоремы 3.3–3.6, 4.3. Остается описать подалгебры первого класса.

**Предложение 6.1.** *Подалгебра  $F$  алгебры  $AO(2, 5)$  не имеет в  $R_{2,5}$  инвариантных изотропных подпространств тогда и только тогда, когда она сопряжена одной из следующих алгебр:*

- 1)  $AO(2k)$ , где  $k = 3, 4, 5$ ;
- 2)  $ASU(1, 2) = \langle \Omega_{12} + \Omega_{34}, \Omega_{12} + \Omega_{56}, \Omega_{13} + \Omega_{24}, \Omega_{15} + \Omega_{26}, \Omega_{35} + \Omega_{46}, \Omega_{14} - \Omega_{23}, \Omega_{16} - \Omega_{25}, \Omega_{36} - \Omega_{45} \rangle$ ;
- 3)  $ASU(1, 2) \oplus \langle \Omega_{12} - \Omega_{34} - \Omega_{56} \rangle$ ;
- 4)  $K = \langle \Omega_{12} - \Omega_{34} - \Omega_{56}, \Omega_{13} + \Omega_{24}, \Omega_{15} + \Omega_{26}, \Omega_{35} + \Omega_{46} \rangle$ ;
- 5)  $\Delta = \langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45} \rangle$ ;
- 6)  $\Delta \oplus \langle \Omega_{67} \rangle$ ;  $AO(2, 3) \oplus \langle \Omega_{67} \rangle$ ;
- 7)  $AO(2, 2) \oplus L$ , где  $L \subset AO(3) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 5, 6, 7 \rangle$ ;
- 8)  $\langle \Omega_{14} + \Omega_{23}, \Omega_{24} - \Omega_{13}, \Omega_{12} - \Omega_{34} \rangle \oplus \langle \Omega_{12} + \Omega_{34} \rangle \uparrow L$ , где  $L \subset AO(3)$ ;
- 9)  $AO(2, 1) \oplus L$ , где  $L \subset AO(4) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 4, 5, 6, 7 \rangle$ ;
- 10)  $\langle \Omega_{12} \rangle \oplus L$ , где  $L \subset AO(5) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$ ;
- 11)  $\langle \Omega_{12} + \alpha\Omega_{34} + \beta\Omega_{56} \rangle$ , где  $\alpha > 0, \beta = 0$  или  $\beta \geq \alpha, \alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ;
- 12)  $\langle \Omega_{34} + \alpha\Omega_{12}, \Omega_{56} + \beta\Omega_{12} \rangle$ , где  $\alpha > 0, \beta \geq 0, \alpha \neq 1$  при  $\beta = 0$ ;
- 13)  $\langle \alpha\Omega_{12} + \Omega_{34} - \Omega_{56} \rangle \oplus \langle \Omega_{34} + \Omega_{56}, \Omega_{35} - \Omega_{46}, \Omega_{36} + \Omega_{45} \rangle, (\alpha > 0)$ ;
- 14)  $\langle \Omega_{12} + \alpha\Omega_{67} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \Omega_{35}, \Omega_{45} \rangle$ , где  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ;
- 15)  $\langle \Omega_{13}, \Omega_{14}, \Omega_{34} \rangle \oplus \langle \Omega_{25}, \Omega_{26}, \Omega_{56} \rangle$ ;
- 16)  $\langle \Omega_{13} + \Omega_{25}, \Omega_{14} + \Omega_{26}, \Omega_{34} + \Omega_{56} \rangle$ ;
- 17)  $\langle \Omega_{ab} | a, b = 1, 3, 4 \rangle \oplus \langle \Omega_{ab} | a, b = 2, 5, 6, 7 \rangle$ ;
- 18)  $\langle \Omega_{ab} | a, b = 1, 3, 4 \rangle \oplus \langle \Omega_{ab} | a, b = 5, 6, 7 \rangle$ .



**Доказательство.** Согласно предложению 2.2 алгебра  $AO(2, 5)$  не имеет собственных неприводимых подалгебр. Максимальные приводимые подалгебры алгебры  $AO(2, 5)$ , не имеющие инвариантных изотропных подпространств, исчерпываются относительно  $O(2, 5)$ -сопряженности такими алгебрами:

- $\alpha$ )  $AO(2, k) \oplus AO(5-k)$ , где  $AO(5-k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = k+3, \dots, 7 \rangle$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ );  
 $\beta$ )  $AO_1(1, 2) \oplus AO_2(1, 3)$ , где  $AO_1(1, 2) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 1, 3, 4 \rangle$ ,  $AO_2(1, 3) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 2, 5, 6, 7 \rangle$ .

Алгебра  $AO(2, 4)$  имеет такие неприводимые подалгебры:  $AO(2, 4)$ ,  $ASU(1, 2)$ ,  $ASU(1, 2) \oplus \langle \Omega_{12} - \Omega_{34} - \Omega_{56} \rangle$ ,  $K$ .

Алгебра  $\Delta$  является единственной собственной неприводимой подалгеброй алгебры  $AO(2, 3)$ . Как показано в [7], алгебра  $AO(2, 2)$  содержит только одну собственную неприводимую подалгебру  $\langle \Omega_{14} + \Omega_{23}, \Omega_{24} - \Omega_{13}, \Omega_{12} - \Omega_{34} \rangle \oplus \langle \Omega_{12} + \Omega_{34} \rangle$ . Следовательно, в случае  $\alpha$ ) мы получаем алгебры 1)–14), а в случае  $\beta$ ) — алгебры 15)–18). Предложение доказано.

**Теорема 6.1.** *Подалгебры алгебры  $AC(1, 4)$  исчерпываются относительно  $C(1, 4)$ -сопряженности подалгебрами алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$  (теоремы 3.3–3.6), подалгебрами алгебры  $AO_{pt}(1, 4)$ , не сопряженными подалгебрам алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$  (теорема 4.3) и такими алгебрами:*

- $AC(1, k)$ , где  $k = 2, 3, 4$ ;  
 $\langle P_0 + K_0 + 2J_{12}, P_0 + K_0 + 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24}, P_2 + K_2 - 2J_{01}, P_4 + K_4 - 2J_{03}, J_{14} - J_{23} \rangle \oplus \Gamma$ , где  $\Gamma = 0$  или  $\Gamma = \langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34} \rangle$ ;  
 $\langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24} \rangle$ ;  
 $\langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03}, -P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, P_0 + K_0 - 4J_{23} \rangle \oplus \Gamma$ , где  $\Gamma = 0$  или  $\Gamma = \langle K_4 - P_4 \rangle$ ;  
 $AC(1, 2) \oplus \langle J_{34} \rangle$ ;  $AC(1, 1)$ ;  $AC(1, 1) \oplus \langle J_{23} \rangle$ ;  $AC(1, 1) \oplus \langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle$ ;  
 $\langle J_{01} - D, K_0 - P_0 - K_1 - P_1, -P_0 - K_0 + K_1 - P_1 \rangle \oplus \langle P_0 + K_0 + K_1 - P_1 \rangle \oplus L$ , где  $L$  — одна из алгебр  $O$ ,  $\langle J_{23} \rangle$ ,  $\langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle$ ;  
 $\langle J_{01} - D, K_0 - P_0 - K_1 - P_1, -P_0 - K_0 + K_1 - P_1, P_0 + K_0 + K_1 - P_1 + \alpha J_{23} \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle P_0, K_0, D \rangle \oplus L$ , где  $L$  совпадает с одной из алгебр:  $O$ ,  $\langle J_{12} \rangle$ ,  $\langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $\langle J_{12}, J_{34} \rangle$ ,  $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$ ,  $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle$ ,  $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} \rangle$ ,  $AO(4)$ ;  
 $\langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} \rangle$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 2$ );  
 $\langle P_0 + K_0 + \alpha J_{12} + \beta J_{34} \rangle$  ( $0 < \alpha \leq \beta$ ,  $\alpha \neq 2$ ,  $\beta \neq 2$ );  
 $\langle J_{12} + \alpha(P_0 + K_0), J_{34} + \beta(P_0 + K_0) \rangle$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  при  $\beta = 0$ );  
 $\langle J_{12} - J_{34} + \alpha(P_0 + K_0) \rangle \oplus \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle P_0 + K_0 + \alpha(K_4 - P_4) \rangle \oplus \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle P_0 + K_0 \rangle \oplus L$ , где  $L$  — одна из алгебр  $O$ ,  $\langle J_{12} \rangle$ ,  $\langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $\langle J_{12}, J_{34} \rangle$ ,  $AO(3)$ ,  $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle$ ,  $AO(3) \oplus \langle K_4 - P_4 \rangle$ ,  $\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}/2(K_4 - P_4), J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}/2(K_3 - P_3) \rangle$ ,  $\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} \rangle$ ,  $AO(4)$ ,  $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3, K_4 - P_4 \rangle$ ;  
 $\langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle$ ;  
 $\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + 2J_{04}, J_{12} + J_{34} \rangle$ ;  
 $\langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, K_0 - P_0, K_3 - P_3, K_4 - P_4 \rangle$ ;  
 $\langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle K_3 - P_3, K_4 - P_4, J_{34} \rangle$ .

Доказательство теоремы опирается на предложение 6.1 и описание подалгебр алгебры  $AO(5)$  [5].

## Приложение

Уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1$$

инвариантно относительно алгебры  $AC(1, 4)$  [12]. При нахождении вещественных решений уравнения эйконала посредством симметричной редукции можно ограничиться подалгебрами алгебры  $AC(1, 4)$ , не содержащими  $M, T, M + 2T$ .

Используя подалгебры коразмерности 2 алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$ , обладающие ненулевой проекцией на  $\langle D \rangle$ , мы получаем для них такие системы функционально независимых инвариантов:

- 1)  $ux_2^{-1}, (x_0^2 - x_1^2)x_2^{-2}$ ;
- 2)  $ux_3^{-1}, (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)x_3^{-2}$ ;
- 3)  $(x_0^2 - u^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, 2\alpha \operatorname{arctg}(x_2x_1^{-1}) - \ln[(x_0 - u)(x_0 + u)^{-1}]$ ;
- 4)  $(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2)x_3^{-2}, (1 + \alpha)\alpha^{-1} \ln x_3 - \ln(x_0 - x_2)$ ;
- 5)  $(x_0^2 - x_3^2 - u^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, (1 + \alpha) \ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha \ln(x_0 - x_3) - 2\beta \operatorname{arctg}(x_2x_1^{-1})$ ;
- 6)  $(x_0^2 - x_1^2 - u^2)x_2^{-2}, \alpha \ln(x_0 - x_1) - (1 + \alpha) \ln x_2$ ;
- 7)  $(x_1^2 + x_2^2 + u^2)(x_0^2 - x_3^2)^{-1}, (1 + \alpha) \ln(x_0 + x_3) + (1 - \alpha) \ln(x_0 - x_3)$ ;
- 8)  $[(x_0 - x_1)u - x_2](x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2}, x_0 - x_1$ ;
- 9)  $\left(\frac{\beta x_2}{x_0 - x_3 + \alpha} + \frac{x_1}{x_0 - x_3} - u\right) \left(x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_3}{x_0 - x_3 + \alpha} x_2^2 - x_3^2\right)^{-1/2}, x_0 - x_3$ ;
- 10)  $(x_0^2 - x_3^2 - u^2)(x_0 - x_3)^{-1} + 2 \operatorname{arctg}(x_2x_1^{-1}), (x_0 - x_3)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ ;
- 11)  $(x_1^2 + u^2)x_2^{-2}, (x_0^2 - x_3^2)x_2^{-2}$ ;
- 12)  $(x_0^2 - x_3^2 - u^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha \operatorname{arctg}(x_2x_1^{-1})$ ;
- 13)  $(x_0^2 - x_3^2 - u^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, 2 \ln(x_0 - x_3) - \ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha \operatorname{arctg}(x_2x_1^{-1})$ ;
- 14)  $u^2(x_0 - x_1)^{-1}, x_0 + x_1 + \ln(x_0 - x_1)$ ;
- 15)  $u^2(x_0 - x_1)^{-1}, (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)(x_0 - x_1)^{-1} + \ln(x_0 - x_1)$ ;
- 16)  $(x_1^2 + x_2^2 + u^2)(x_0 - x_3)^{-1}, x_0 + x_3 + \ln(x_0 - x_3)$ ;
- 17)  $(x_0^2 - x_3^2 - u^2)(x_0 - x_3)^{-1} + \ln(x_0 - x_3) + 2\alpha \operatorname{arctg}(x_2x_1^{-1}), (x_0 - x_3)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ ;
- 18)  $u[(x_0 - x_1)^2 - 4x_2]^{-1},$   
 $w = 3 \ln[(x_0 - x_1)^2 - 4x_2] - 2 \ln[6(x_0 + x_1) - 6x_2(x_0 - x_1) + (x_0 - x_1)^3]$ ;
- 19)  $(x_1^2 + u^2)^{1/2}[(x_0 - x_1)^2 - 4x_2]^{-1}, w$ ;
- 20)  $(x_3^2 + u^2)x_0^{-2}, (x_1^2 + x_2^2)x_0^{-2}$ .

Если  $w^1, w$  — основные инварианты подалгебры коразмерности 2 алгебры  $A\tilde{P}(1, 4)$ , то анзац  $w^1 = \varphi(w)$  редуцирует уравнение эйконала к обыкновенному дифференциальному уравнению  $F(\dot{\varphi}, \varphi, w) = 0$ . Используя найденные системы инвариантов 1)–20), получаем такие редуцированные уравнения:

$$4w\dot{\varphi} - (\varphi - 2w\dot{\varphi})^2 = 1; \quad (1,2)$$

$$(\varphi + \alpha^2\varphi^2)\dot{\varphi}^2 + \varphi^4 - \varphi^3 = 0; \quad (3)$$

$$\gamma^2\dot{\varphi}^2 - 4(1 - \gamma\varphi)\dot{\varphi} + 4(\varphi^2 - \varphi) = 0, \quad \gamma = (1 + \alpha)\alpha^{-1}; \quad (4)$$

$$[(1 + \alpha^2) + \beta^2]\dot{\varphi}^2 + 2[(1 + \alpha)\varphi - \alpha]\dot{\varphi} + \varphi^2 - \varphi = 0; \quad (5)$$

$$(1 + \alpha)^2 \dot{\varphi}^2 + 4[\alpha - (1 + \alpha)\varphi]\dot{\varphi} + 4\varphi(\varphi - 1) = 0; \quad (6)$$

$$(1 - \alpha^2)\dot{\varphi}^2 + 2\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 - \varphi = 0; \quad (7)$$

$$2\varphi\dot{\varphi} - w^{-1}\varphi^2 - w^{-1}(1 + w^2) = 0; \quad (8)$$

$$2w\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 - w^{-2} - \beta^2(w + \alpha)^{-2} = 1; \quad (9)$$

$$w^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} + 1 = 0; \quad (10)$$

$$(w - w^2)\dot{\varphi}^2 + 2w\varphi\dot{\varphi} - \varphi^2 - \varphi = 0; \quad (11)$$

$$(1 + \alpha^2)\dot{\varphi}^2 + 2\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 - \varphi = 0; \quad (12)$$

$$(1 + \alpha^2)\dot{\varphi}^2 + 2(1 - \varphi)\dot{\varphi} + \varphi^2 - \varphi = 0; \quad (13)$$

$$\dot{\varphi}^2 + \varphi\dot{\varphi} - \varphi = 0; \quad (14-16)$$

$$w^3\dot{\varphi}^2 + w\dot{\varphi} + \alpha w - 1 = 0; \quad (17)$$

$$144(e^w - 1)\dot{\varphi}^2 - 96\varphi\dot{\varphi} - 16\varphi^2 = 1; \quad (18, 19)$$

$$(\varphi - w\dot{\varphi})^2 - w\dot{\varphi}^2 = \varphi. \quad (20)$$

Редуцированное уравнение мы снабдили номером той системы инвариантов, которой оно соответствует.

Укажем некоторые точные решения уравнения эйконала, полученные из решений редуцированных уравнений (1)–(10).

$$1) \quad u = (C^2 + 1)(2C)^{-1}(x_0^2 - x_1^2)^{1/2} + (C^2 - 1)(2C)^{-1}x_2, \\ u = \pm (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2};$$

$$2) \quad u = (C^2 + 1)(2C)^{-1}(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} + (C^2 - 1)(2C)^{-1}x_3, \\ u = \pm (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2};$$

$$3) \quad u = \pm x_0;$$

$$4) \quad u = \pm \{C(x_0 - x_2) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \delta x_3^2\}^{1/2} \quad (\delta = 0, 1); \\ u = \pm \{C^2(x_0 - x_2)^2 - 2Cx_3(x_0 - x_2) + (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)\}^{1/2}; \\ u = \pm \{x_3^2[1 - C(x_0 - x_2)]^{-1} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\}^{1/2};$$

$$5) \quad u = \pm (x_0^2 - x_3^2)^{1/2}; \\ u = \pm \{(x_1^2 + x_2^2)[1 - C(x_0 - x_3)]^{-1} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\}^{1/2}; \\ u = \pm \{C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_3^2\}^{1/2}; \\ u = \pm \{C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\}^{1/2};$$

- 6)  $u = \pm \{C(x_0 - x_1) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\}^{1/2}$ ;  
 $u = \pm \{x_2^2[1 - C(x_0 - x_1)]^{-1} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\}^{1/2}$ ;
- 7)  $u = \pm \{C(x_0 + x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\}^{1/2}$ ;
- 8)  $u = (x_0 - x_1)^{-1} \left\{ x_2 + (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} \times \right.$   
 $\left. \times [(x_0 - x_1)^2 + C(x_0 - x_1) - 1]^{1/2} \right\}$ ;
- 9)  $u = \pm \left\{ \frac{(x_0 - x_3)^3 + (C + \alpha)(x_0 - x_3)^2 + (C\alpha - \beta^2 - 1)(x_0 - x_3) - \alpha}{(x_0 - x_3)^2(x_0 - x_3 + \alpha)} \right\}^{1/2}$   
 $\times \left( x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_3}{x_0 - x_3 + \alpha} - x_2^2 - x_3^2 \right)^{1/2} + \frac{\beta x_2}{x_0 - x_3 + \alpha} + \frac{x_1}{x_0 - x_3}$ ;
- 10)  $u = \pm \{ (x_0 - x_3)(t^{-\sigma} + 2\sigma \operatorname{arctg} t + 2 \operatorname{arctg} (x_2 x_1^{-1}) + x_0 + x_3 + C) \}^{1/2}$ ,  
 $t = (2(x_0 - x_3))^{-1} \left\{ [(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_0 - x_3)^2]^{1/2} - (x_1^2 + x_2^2) \right\}$ ,  $\sigma = \pm 1$ .

1. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
4. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
5. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, **38**, № 1, 67–72.
6. Баранник Л.Ф., Фушич В.И., Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, n)$ , Препринт № 85.90, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 52 с.
7. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фушич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре  $AP(2, n)$ , Препринт № 85.89, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
8. Barannik L.F., Fushchych W.I., On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1, n)$ , *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, № 7, 1445–1458.
9. Баранник Л.Ф., Фушич В.И., О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера, Препринт № 87.16, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 48 с.
10. Chen Su-Shing, On subgroups of the noncompact real exceptional Lie group  $F_4^*$ , *Math. Ann.*, 1973, **204**, № 4, 271–284.
11. Тауфик М.С., О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли, в сб. Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, Яросл. гос. ун-т, 1980, 86–115.
12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.

# Exact solutions of multidimensional nonlinear Dirac's and Schrödinger's equations

W.I. FUSHCHYCH

A class of nonlinear spinor equations invariant under the extended Poincaré group and conformal group is described. New Ansätze for spinor fields are suggested. Multiparameter families of exact solutions for the multidimensional families of exact solutions for the multidimensional nonlinear Dirac and Schrödinger equations are obtained.

In this paper I present some new results, obtained in Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR in Kiev by R. Zhdanov, W. Shtelen, N. Serov and me on multiparameter families of exact solutions of nonlinear Dirac and Schrödinger equations

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + F_1(x, \Psi^*, \Psi) \Psi = 0, \quad (1)$$

$$\left( p_0 + \frac{1}{2m} p_a p_a \right) u + F_2(x, u, u^*) = 0, \quad (2)$$

where  $\Psi \equiv \Psi(x) = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  is 4-component spinor,  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $\Psi^*$  is complex conjugated spinor,  $\gamma_\mu$  are  $4 \times 4$  Dirac matrices,  $u \equiv u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_0 \equiv t$ ,  $u^*$  is complex conjugated wave function,

$$p_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad p_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$F_1, F_2$  are arbitrary smooth function,  $m$  is the particle mass.

Fifty years ago D. Ivanenko (1938) considered the simplest equation of the type (1), the case in which

$$F_1 = \lambda(\bar{\Psi}\Psi), \quad (3)$$

where  $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma_0$  is Dirac-conjugated spinor,  $\lambda$  is arbitrary parameter.

W. Heisenberg and his collaborators (1954–1959) have analysed the equation (1) from a different point of view with the nonlinearity

$$F_1 = \lambda \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_4 \Psi \gamma^\mu \gamma_4, \quad \gamma_4 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (4)$$

The main efforts of W. Heisenberg directed into the construction of unified quantum field theory based on eq. (1) with the nonlinearities (3), (4). In the works by R. Finkelstein and his collaborators (1951–1956) eq. (1) has been studied from the classical point of view, i.e. they studied the exact and approximate solutions of spinor systems of the type (1).

Some exact solutions of the Dirac equation were obtained by F. Kortel (1956), D. Kurgeleidze (1957), K.G. Akdezin., A. Smailogic (1984), A.O. Barut, B.W. Xu (1982), K. Takahashi (1979).

The classical Lie's method for finding exact solutions of multidimensional nonlinear Schrödinger equation and d'Alembert equation was applied by Fushchych (1981, 1983), Fushchych and Serov (1983, 1987), Gagnon and Winternitz (1988), Grundland, Harmad and Winternitz (1984), Tajiri (1983).

Evidently if we do not specify the functions  $F_1, F_2$  in eqs. (1), (2) there is no hope to get any profound information about exact solutions of these equations. To specify the functions  $F_1$  and  $F_2$  we shall study the symmetry properties of equations (1), and (2). In what follows, I shall essentially use the classical ideas of S. Lie in application to nonlinear wave equations.

The wide symmetry of equations (1), (2) makes it possible to reduce the multidimensional partial differential equation (PDE) a set of systems of ordinary differential equations (ODE). Many of these ODEs can be solved exactly. In this way we are able to construct many parameter families of exact solutions of the multidimensional wave equations (1), (2).

**1. The symmetry of the nonlinear spinor equation.** In this section we will present the theorems concerning the symmetry properties of equation (1).

**Theorem 1.** *Equation (1) is invariant under the Poincaré group  $P(1, 3)$  iff*

$$F_1(x, \Psi^*, \Psi) = F_{11}(s) + F_{12}(s)\gamma_4 + F_{13}(s)\gamma^\mu(\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi) + F_{14}(s)S^{\mu\nu}(\bar{\Psi}\gamma_4S_{\mu\nu}\Psi),$$

$$s = (\bar{\Psi}\gamma_4\Psi, \bar{\Psi}\Psi), \quad S_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad (1.1)$$

where  $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}$  are arbitrary smooth scalar functions of the invariant variable  $s$ .

**Theorem 2.** *Equation (1) is invariant under the extend Poincaré group  $\tilde{P}(1, 3)$ , i.e. the  $P(1, 3)$  group expanded by the one-parameter group of scale transformations of the type*

$$x'_\mu = x_\mu \exp(\theta), \quad \Psi'_{x'} = \Psi(x) \exp(k\theta),$$

iff

$$F_{1i} = (\bar{\Psi}\Psi)^{-1/2k} \tilde{F}_{1i}, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$F_{1j} = (\bar{\Psi}\Psi)^{-\frac{(1+2k)}{2k}} \tilde{F}_{1j}, \quad j = 3, 4, \quad (1.3)$$

where  $\tilde{F}_{1i}, \tilde{F}_{1j}$  are arbitrary functions of  $\frac{(\bar{\Psi}\Psi)}{(\bar{\Psi}\gamma_4\Psi)}$ .

**Theorem 3.** *Equation (1) is invariant under the conformal group  $C(1, 3) = \langle P(1, 3), D, K_\mu \rangle$*

$$x'_\mu = \{x_\mu - c_\mu(x \cdot x)\}\sigma^{-1}(x), \quad \sigma(x) = 1 - 2c_\mu x^\mu + c^2 x^2,$$

$$\Psi'(x) = \sigma(x)\{1 - (\gamma \cdot c)(\gamma \cdot x)\}\Psi$$

iff

$$F_{1i} = (\bar{\Psi}\Psi)^{1/3} \tilde{F}_{1i}, \quad i = 1, 2, \quad k = -3/2, \quad (1.4)$$

$$F_{1j} = (\bar{\Psi}\Psi)^{-2/3} \tilde{F}_{1j}, \quad j = 3, 4. \quad (1.5)$$

**Note 1.** The conformally-invariant Dirac–Gürsey equation (1956)

$$\{\gamma_\mu p^\mu + D(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3}\}\Psi = 0 \tag{1.6}$$

belongs to the class (1), (1.4).

**Note 2.** The equation of the type

$$\{\gamma_\mu p^\mu + D\gamma_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) \cdot [(\bar{\Psi}\gamma_\alpha\Psi)(\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi)]^{-1/3}\}\Psi = 0 \tag{1.7}$$

is invariant under the conformal group  $C(1,3)$ .

**2. The Ansatzes for  $\tilde{P}(1,3)$ -invariant equation.** To be specific let us consider the nonlinear spinor equation of the type

$$\{\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/2k}\}\Psi = 0, \tag{2.1}$$

where  $\lambda, k$  are arbitrary constants,  $k \neq 0$ .

We look for solutions of (2.1) in the form Fushchych (1981)

$$\Psi = A(x)\phi(\omega), \tag{2.2}$$

where  $A(x)$  is  $4 \times 4$  matrix,  $\phi(\omega)$  is 4-component column-function depending on three new variables  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ .

For the Ansatz (2.2) to work effectively it is necessary to find  $A(x), \omega$  in a form which after a substitution of (2.2) into (1) would yield an equation for  $\phi(\omega)$  depending only on new variables  $\omega$ .

This requirement is met if the following equalities are satisfied:

$$QA(x) \equiv \left( \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta \right) A(x) = 0, \tag{2.3}$$

$$\zeta^\mu \frac{\partial \omega^l}{\partial x_\mu} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

where  $\zeta^\mu(x), \eta(x)$  are the coefficients of the infinitesimal operators  $Q = \{Q_1, Q_2, \dots\}$  of the group  $\tilde{P}(1,3)$ . In our case the generators of the  $\tilde{P}(1,3)$  have the form

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

Thus the problem of describing Ansatzes of the form (2.2) reduces to the construction of the general solution to the system of equations (2.3), (2.4) with the given  $\zeta^\mu, \eta$ .

As an example let us consider the case where in (2.3), (2.4) the operators  $Q$  have the simple form

$$Q = \{Q_1 = J_{03}, Q_2 = P_1, Q_3 = P_2\}.$$

Then the system (2.3), (2.4) has the form

$$\left( x_0 p_3 - x_3 p_0 + \frac{i}{2} \gamma_0 \gamma_3 \right) A(x) = 0, \quad p_1 A(x) = 0, \quad p_2 A(x) = 0, \tag{2.6}$$

$$(x_0 p_3 - x_3 p_0)\omega = 0, \quad p_1 \omega = 0, \quad p_2 \omega = 0. \tag{2.7}$$

It follows from (2.7) that  $\omega = \omega(x_0, x_3) = x_0^2 - x_3^2$ . We look for the solutions to (2.6) in the form

$$A(x) = \exp\{\gamma_0 \gamma_3 g(x)\}. \quad (2.8)$$

After a substitution of (2.8) into (2.6), we obtain

$$x_0 \frac{\partial g}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial g}{\partial x_0} - \frac{1}{2} = 0. \quad (2.9)$$

The particular solution of eq. (2.9) is given by the expression

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(x_0 + x_3).$$

Thus we have

$$A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\}. \quad (2.10)$$

Without going into the technical details on solving the system (2.3), (2.4) we give some expressions for the matrix  $A(x)$  and  $\omega$ .

**Example 2.1.**

$$A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp\left\{\frac{1}{2a} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \ln(x_0 - x_2)\right\}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) x_3^{-2}, & \omega_2 &= (x_0 - x_2) x_3^{-2}, \\ \omega_3 &= a x_1 (x_0 - x_2)^{-1} - \ln(x_0 - x_2), & a &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

If the parameter  $a = 0$ , then

$$A(x) = \exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0 - x_3)} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0)\right\}. \quad (2.13)$$

**Example 2.2.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_2 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_2}{x_3}\right\}, & \beta &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (2x_0 + 2x_1 + \beta) \exp\{2(x_1 - x_0)\beta^{-1}\}, \\ \omega_2 &= (2x_0 + 2x_1 + \beta) (x_2^2 + x_3^2)^{-1}, & \omega_3 &= b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_2}{x_3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

**3. 3.1. Reduced equations.** The Ansatz (2.2) with the matrices (2.10), (2.11), (2.14) and new variables  $\omega$  gives the following reduced equations

$$\begin{aligned} k(\gamma_2 - \gamma_0)\phi &+ [(\gamma_0 - \gamma_2)(\omega_1 + a^{-2}\omega_2^2\omega_3^2) + (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_2^2 - \\ &- 2a^{-1}\gamma_1\omega_3\omega_2^2 - 2\gamma_3\omega_1\omega_2] \frac{\partial \phi}{\partial \omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2] \frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} + \\ &+ [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)] \frac{\partial \phi}{\partial \omega_3} = i\lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi, \end{aligned} \quad (3.1)$$



$$(\gamma_0 + \gamma_1) \frac{\partial \phi}{\partial \omega_1} + \gamma_2 \frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} + \gamma_3 \frac{\partial \phi}{\partial \omega_3} = i\lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2}(1 - 2k)\gamma_3 \phi + 2(\gamma_3 + a\gamma_2) \frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} = i\lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi. \quad (3.3)$$

The Ansatz (2.2) with the matrix  $A(x) = 1$ ,  $\omega_1 = x_0 + x_3$ ,  $\omega_2 = x_1$ ,  $\omega_3 = x_2$  leads to the equation

$$(\gamma_0 + \gamma_3) \frac{\partial \phi}{\partial \omega_1} + \gamma_1 \frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} + \gamma_2 \frac{\partial \phi}{\partial \omega_3} = i\lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi. \quad (3.4)$$

It turns out that some of the reduced equations possess substantially more symmetries than the initial equation (2.1). For example the equation (3.4) is invariant under infinite-dimensional Lie algebras. More exactly, the following statement is true:

**Theorem 4.** *The system (3.4) is invariant under the infinitely dimensional algebra whose basis elements have the form*

For the case  $k = 1$

$$Q_1 = \Phi_1(\omega_1) \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \Phi_2(\omega_2) \frac{\partial}{\partial \omega_3} + \frac{1}{2}[\Phi_1\gamma_1 + \Phi_2\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3),$$

$$Q_2 = -\omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_3} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$Q_3 = \Phi_0(\omega_1) \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \dot{\Phi}_0(\omega_1) \left( \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_3} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) + \dot{\Phi}_0 + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}_0(\omega_1)(\gamma_1\omega_2 + \gamma_2\omega_1)(\gamma_0 + \gamma_3),$$

$$Q_4 = \Phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3).$$

For the case  $k \neq 1$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial \omega_1}, \quad Q_2 = -\omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_3} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3.$$

$$Q_3 = \Phi_1(\omega_1) \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \Phi_2(\omega_1) \frac{\partial}{\partial \omega_3} + \frac{1}{2}[\dot{\Phi}_1(\omega_2)\gamma_1 + \Phi_2(\omega_1)\gamma_2](\gamma_2 + \gamma_3),$$

$$Q_4 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_3} + k,$$

$$Q_5 = \Phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3),$$

where  $\Phi_0(\omega_1)$ ,  $\Phi_1(\omega_1)$ ,  $\Phi_2(\omega_1)$ ,  $\Phi_3(\omega_1)$  are arbitrary smooth functions, a dot designates differentiation with respect to  $\omega_1$ .

**3.2. The reduction of the nonlinear spinor equation to a system of ODE.** Here we give the explicit form of some ODE's to which the Dirac equation is reduced:

$$i\gamma_2 \dot{\phi}(\omega) = \lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi, \quad (3.5)$$

$$\frac{i}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} + i[\omega(\gamma_0 - \gamma_3)]\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k} \phi, \quad (3.6)$$

$$\frac{i}{2}\omega^{-1/2}\gamma_2\phi + 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k}\phi, \quad (3.7)$$

$$\frac{i}{2}[\omega(\omega + 1)]^{-1}(2\omega + 1)[\gamma_0 + \gamma_3]\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k}\phi, \quad (3.8)$$

$$i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} + i\left[(\gamma_0 + \gamma_3)\omega^{-1} + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\right]\phi = \lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k}\phi, \quad (3.9)$$

$$i\omega^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\phi} = \lambda(\bar{\phi}\phi)^{1/2k}\phi, \quad \dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{d\omega}. \quad (3.10)$$

The full list of the systems of ordinary differential equations is given in Fushchych and Zhdanov (1988).

**4. The explicit solutions of the Dirac equation.** Some of the ODE's can be integrated in quadratures.

I. Case  $k = 1/2$ , with the nonlinearity  $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)$ ,  $\omega = x_2^2 + x_3^2$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{tg}^{-1}\frac{x_2}{x_3}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-i\lambda\frac{\bar{\chi}\chi}{2(1+a^2)}(\gamma_3 + a\gamma_2) \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \operatorname{tg}^{-1}\frac{x_2}{x_3}\right\} \chi, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\chi$  is constant spinor,  $a$  is a real parameter.

II. Case  $k \neq 1/2$ , nonlinearity  $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/2k}$ ,  $\omega = x_2^2 + x_3^2$ ,

$$\Psi(x) = (x_2^2 + x_3^2) \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{tg}^{-1}\frac{x_2}{x_3}\right\} \exp\left\{\frac{2i\lambda k}{1-2k}(x_2^2 + x_3^2)^{\frac{2k-1}{4k}}\gamma_3\right\} \chi. \quad (4.2)$$

III. Case  $k \neq 1/2$ , nonlinearity  $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/2k}$ ,  $\omega = x_0 + x_3$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left\{\left[-\frac{1}{2}(\dot{\Phi}_1\gamma_1 + \dot{\Phi}_2\gamma_2) + \Phi_3\gamma_4\right](\gamma_0 + \gamma_3)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1(x_1 + \Phi_1)\right\} \chi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

where  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  arbitrary smooth functions of  $\omega$ .

IV. Case  $k = 1$ , nonlinearity  $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/2}$ ,

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_0 x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{3/2}} \exp\left\{i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2} \frac{\gamma_0 x_0}{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}\right\} \chi. \quad (4.4)$$

Now, making use of the Poincaré invariance of the Dirac equation, is not difficult to construct new multiparameter families of exact solutions of the equation starting from those obtained above. The two following examples illustrate the procedure of generating solutions.

V. Case  $k = 1/2$ , nonlinearity  $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)$ ,

$$\begin{aligned} \Psi &= [(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2]^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \operatorname{tg}^{-1}\frac{a \cdot z}{b \cdot z}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-i\lambda\frac{\bar{\chi}\chi}{2(1+\theta^2)}(\gamma \cdot b + \theta\gamma \cdot a) \times \right. \\ &\times \left. \left[\ln((a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2) + 2\theta \operatorname{tg}^{-1}\frac{a \cdot z}{b \cdot z}\right]\right\} \chi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $\theta$ ,  $\theta_\mu$  are arbitrary parameters satisfying conditions

$$a \cdot a = a_\mu a^\mu = -1, \quad b \cdot b = b_\mu b^\mu = -1, \quad a \cdot b = 0, \\ \gamma \cdot a \equiv \gamma_0 a_0 - \gamma_1 a_1 - \gamma_2 a_2 - \gamma_3 a_3, \quad \theta = (\theta_0^2 - \theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2}.$$

VI. Case  $k \neq 1/2$ , nonlinearity  $\lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/2k}$ ,

$$\Psi(x) = [(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \operatorname{tg}^{-1} \frac{a \cdot z}{b \cdot z} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -i \frac{2\lambda k}{1-2k} (\gamma \cdot b)(\bar{\chi}\chi)^{1/2} [(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2]^{\frac{1-2k}{4k}} \right\} \chi. \tag{4.6}$$

Formulas (4.5), (4.6) give multiparameter families of exact solutions of the Dirac equations. These families are nongenerating with respect to the group  $\tilde{P}(1, 3)$  in the sense that solutions (4.5), (4.6) have the same symmetries as the equation (2.1).

**5. Conformally invariant solutions.** Conformally invariant Dirac–Gürsey equation has the form

$$\left\{ \gamma_\mu P^\mu + (\bar{\Psi}\Psi)^{1/3} \right\} \Psi = 0. \tag{5.1}$$

With the help of a conformally invariant ansatz we can construct the following solutions

$$\Psi(x) = \frac{\gamma \cdot x}{(x \cdot x)^2} \exp\{i\lambda k(\gamma \cdot \beta)\omega\}\chi, \quad k = 1/3, \tag{5.2}$$

$$\omega = \frac{\beta_\mu x^\mu}{x_\nu x^\nu}, \quad x_\nu x^\nu \neq 0, \quad \beta_\mu \beta^\mu > 0;$$

$$\Psi(x) = \sigma^2(x)[1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \beta)] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\theta}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)[b \cdot x - (b \cdot \theta)(x \cdot x)]\sigma^{-1}(x) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2}\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/3}(\gamma \cdot a)[2(a \cdot x) - (a \cdot \theta)(x \cdot x)]\sigma(x) + \right. \\ \left. + \theta(b \cdot x - (b \cdot \theta)(x \cdot x))^2\sigma^{-2}(x) \right\} \chi, \tag{5.3}$$

$$a \cdot b = b \cdot b = 0, \quad a \cdot a = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = -1,$$

$$c^2 = c_\alpha c^\alpha, \quad x^2 = x_\mu x^\mu.$$

Formulae (5.2), (5.3) give multiparameter families of exact solutions of the equation (5.1). The family (5.3) is nongenerating with respect to the group  $C(1, 3)$ .

If  $\Psi_1(x)$  is a solution of equation (5.1) then

$$\Psi_2(x) = \sigma^{-2}(x)[1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot c)]\Psi_1(x'), \\ x' = \left\{ x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)} \right\} \tag{5.4}$$

will also be a solution (5.4) is the formula for multiplication of solutions of Dirac equation.

**6. How to construct solutions of the nonlinear d'Alambert equation via solutions of the Dirac equation?** Complex scalar field can be represented as

$$u(x) = \bar{\Psi}\Psi \exp\{i\theta(x)\}, \quad (6.1)$$

where  $\Psi(x)$  is a solution of the Dirac equation,  $\theta(x)$  is a phase. In the simplest case, when

$$\bar{\Psi}\Psi = c = \text{const}, \quad \theta(x) = \tau_\mu x^\mu \quad (6.2)$$

formula (6.1) gives a plane-wave solution of the linear d'Alambert equation. In most cases solutions of the nonlinear Dirac equation generate a scalar field (6.1) which satisfies the nonlinear d'Alambert equation

$$p_\mu p^\mu u = k|u|^r u, \quad (6.3)$$

$k, r$  are constants.

Let us exhibit some exact solutions of the equation (6.3) obtained this way

$$u(x) = c(x_1^2 + x_2^2) \exp\{i\phi_0(x_0 + x_3)\}, \quad r = 2, \quad (6.4)$$

$$u(x) = c \left[ (x_1 + \phi_1(x_0 + x_3))^2 + (x_2 + \phi_2(x_0 + x_3))^2 \right]_x^{-1/2} \times \\ \times \exp\{i\phi_0(x_0 + x_3)\}, \quad r = 2, \quad (6.5)$$

$$u(x) = c(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{-2}, \quad r = 1/2, \quad (6.6)$$

$$u(x) = c(x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \exp\{i\phi(x_0 + x_1)\}, \quad r = 2. \quad (6.7)$$

In formulae (6.4)–(6.7)  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi$  are arbitrary smooth functions.

So, solutions of the nonlinear Dirac spinor equation give a possibility to construct solutions to the nonlinear d'Alambert equation.

All these ideas and results were considered in more detail by Fushchych (1981, 1987), Fushchych and Shtelen (1983, 1987), Fushchych, Shtelen and Zhdanov (1985), Fushchych and Zhdanov (1987, 1988, 1989), Fushchych and Nikitin (1987) (see Appendix).

**7. The solutions of the multidimensional Schrödinger equation.** Let us consider the following nonlinear equation

$$\left( i \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{1}{2m} \Delta \right) u + F(x, u, u^*) = 0, \quad u \equiv u(x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3). \quad (7.1)$$

It is well known that if  $F = 0$ , then linear Schrödinger equation (see Sofus Lie (1881), Hagen (1972), Niederere (1972), Kalnins and Miller (1987)) is invariant under the generalised Galilei group, which will be denoted by the symbols  $G_2(1, 3)$ . The basis elements of the Lie algebra  $AG_2(1, 3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D, A, I \rangle$  have the following form:

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad I = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (7.2) \\ G_a = x_0 P_a + m x_a, \quad D = 2x_0 P_0 - x_a P_a + \frac{3}{2} i, \quad A = x_0 D + \frac{m}{2} x_a^2.$$

Symbols  $AG_1(1, 3)$ ,  $AG(1, 3)$  denote the following Lie algebras

$$AG_1(1, 3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, D, I \rangle,$$

$$AG(1, 3) = \langle P_0, P_a, J_{ab}, G_a, I \rangle.$$

To construct families of exact solutions of (7.1) in explicit form we have to know the symmetries of (7.1) which obviously depends on the structure of the function  $F$ .

By Lie's algorithm (as given by Ovsyannikov (1978), Olver (1986)), the following statement can be proved.

**Theorem 5.** *Equation (7.1) is invariant under the following algebras:*

$$AG(1, 3) \text{ iff } F = \Phi(|u|)u, \tag{7.3}$$

where  $\Phi$  is arbitrary smooth function, and

$$AG_1(1, 3) \text{ iff } F = \lambda|u|^k u, \tag{7.4}$$

where  $\lambda, k$  are arbitrary parameters, the operator of scale transformations  $D$  having the form  $D = x_0 P_0 - x_a P_a + 2i/k$ ,  $k \neq 0$ , and

$$AG_2(1, 3) \text{ iff } F = \lambda|u|^{4/n} u. \tag{7.5}$$

Later on we shall construct the exact solutions of the equation (7.1) with nonlinearity (7.5), i.e.

$$\left( p_0 - \frac{p_a^2}{2m} \right) u + \lambda|u|^{4/3} u = 0. \tag{7.6}$$

Following Fushchych (1981) we seek solutions of (7.6) with the help of the ansatz

$$u = f(x)\phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \tag{7.7}$$

where  $\phi$  is the function to be calculated. To construct solutions of (7.6) using ansatz (7.7) it is necessary to have the explicit form of the function  $f(x)$  and the new invariant variables  $\omega_1, \omega_2$  and  $\omega_3$ . Next I shall present two Ansätze of the type (7.7).

$$1. \quad f(x) = (1 - x_0^2)^{-3/4} \exp \left\{ \frac{im}{2} \frac{x_0 \vec{x}^2}{1 - x_0^2} \right\}, \quad \omega_1 = \vec{\alpha} \vec{x} (1 - x_0^2)^{-1/2},$$

$$\omega_2 = \vec{x}^2 (1 - x_0^2)^{-1}, \quad \omega_3 = \arctan x_0 + \arctan \frac{\vec{\beta} \vec{x}}{\vec{\gamma} \vec{x}},$$

where  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  are constant vectors satisfying the conditions

$$\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2 = 1, \quad \vec{\alpha} \vec{\beta} = \vec{\beta} \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \vec{\alpha} = 0.$$

The Ansätze (7.6), (7.7) give the following reduced equation

$$L\phi + 6 \frac{\partial \phi}{\partial \omega_2} - 2im \frac{\partial \phi}{\partial \omega_3} + m^2 \omega_2 \phi - 2\lambda m |\phi|^{4/3} \phi = 0, \tag{7.8}$$

$$L\phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1^2} + 4\omega_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_2^2} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_3^2} + 4\omega_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}.$$

2. The second Ansatz has the form

$$f(x) = x_0^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{im}{2} x^2 x_0^{-1} \right\}, \quad (7.9)$$

$$\omega_1 = (\vec{\alpha}\vec{x})x_0^{-1}, \quad \omega_2 = \vec{x}^2 x_0^{-2}, \quad \omega_3 = x_0^{-1} + \arctan \frac{\vec{\beta}\vec{x}}{\vec{\gamma}\vec{x}}. \quad (7.10)$$

The Ansatz (7.9), (7.10) reduce the equation (7.6) to

$$L\phi + 6\frac{\partial\phi}{\partial\omega_2} + 2im\frac{\partial\phi}{\partial\omega_3} - 2m|\phi|^{4/3}\phi = 0.$$

**8. Solutions of the equation (7.6).** In this paragraph I present some explicit solutions of the equation (7.6)

$$u = (1 - x_0^2)^{-3/4} \exp \left\{ \frac{im}{2} \vec{x}(1 - x_0)^{-1} \right\}, \quad \lambda = \frac{3}{2}i; \quad (8.1)$$

$$u = (c_0 x_0 - \vec{c}\vec{x})^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{im}{2} \vec{x}^2 x_0^{-1} \right\}, \quad (8.2)$$

where  $c_0, \vec{c}$  are arbitrary parameters satisfying the following condition  $\vec{c}^2 = \frac{8}{15}\lambda m$ ;

$$u = x_0^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{im}{2} (\vec{x}^2 - \vec{r}\vec{x})x_0^{-1} \right\}, \quad \vec{r}^2 = -\frac{8\lambda}{m}; \quad (8.3)$$

$$u = \left( \frac{8}{3}\lambda m \vec{x}^2 \right)^{-3/4} \exp \left\{ -\frac{im}{2} \vec{x}^2 x_0^{-1} \right\}; \quad (8.4)$$

$$u = x_0^{-3/2} \phi(\omega_1) \exp \left\{ -\frac{im}{2m} \vec{x}^2 x_0^{-1} \right\}, \quad \omega_1 = \frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{x_0}, \quad (8.5)$$

function  $\phi(\omega_1)$  is defined by the elliptic integral

$$\int_0^\phi \frac{d\tau}{(k_1 + \tau^{10/3})^{1/2}} = \left( \frac{6}{5}\lambda m \right)^{1/2} (\omega_1 + k_2),$$

where  $k_1, k_2$  are arbitrary parameters.

$$u = x_0^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{im}{2} \vec{x}^2 x_0^{-1} \right\} \phi(\omega_2), \quad \omega_2 = \vec{x}^2 x_0^{-1}, \quad (8.6)$$

where function  $\phi(\omega_2)$  is a solution of Erdem–Fauler equation

$$2\omega_2 \frac{d^2\phi}{d\omega_2^2} + 3\frac{d\phi}{d\omega_2} - \lambda m \phi^{7/3} = 0.$$

The formulae (8.1)–(8.6) give multiparameter families of exact solutions of the equation (7.6). Some of them are of non-perturbative type due to a singularity with respect to the coupling constant  $\lambda$ .

In conclusion we give formulae for multiplication of solutions. If  $u_1$  is a solution of the equation with the nonlinearity  $4/3$  then the functions  $u_2, u_3$  defined by

$$u_2 = u_1(x_0, \vec{x} + \vec{v}x_0) \exp \left\{ im \left( \frac{\vec{v}x_0}{2} + \vec{v}\vec{x} \right) \right\},$$

$$u_3 = u_2 \left( \frac{x_0}{dx_0 - 1}, \frac{\vec{x}}{1 - dx_0} \right) (1 - dx_0)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{im}{2} \frac{d\vec{v}^2}{1 - dx_0} \right\},$$

also satisfy equation (7.6). Here  $d, \vec{v}$  are arbitrary parameters.

The Ansätze that have been presented here may also be applied to the equation

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta u + \lambda \left\{ \frac{\partial |u|^2}{\partial x_a} \frac{\partial |u|^{-1}}{\partial x_a} \right\} u = 0,$$

which is also invariant under the group  $G_2(1,3)$ .

More full consideration solutions of equation (7.6) was given Fushchych and Serov (1987), Fushchych and Cherniha (1986).

**Acknowledgement.** Author wishes to acknowledge Peter Olver and Avner Friedman for the invitation and the hospitality of the Institute for Mathematics and its Applications at the University of Minnesota.

1. Akdeniz K.G., Smailagic A., *Lett. Math. Phys.*, 1984, **8**, 175.
2. Barut A.O., Xu B.W., *Physica D*, 1982, **6**, 137.
3. Finkelstein R., Fronsdal, Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 1571.
4. Fushchych W., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
5. Fushchych W., Serov N., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
6. Fushchych W., Serov N., On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
7. Fushchych W., On symmetry and exact solutions of some multidimensional equations of mathematical physics, in Algebraic-theoretical methods in mathematical physics problems, Kiev, Institute of Mathematics, 1983, 4–23.
8. Fushchych W., On symmetry and exact solutions of the multidimensional wave equations, *Ukr. Math. Zhurn.*, 1987, **39**, 116–123.
9. Fushchych W., Shtelen W., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
10. Fushchych W., Shtelen W., On reduction and exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *Teoret. and Math. Fiziks (USSR)*, 1987, **72**, 142–154.
11. Fushchych W., Shtelen W., Zhdanov R.Z., On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions, *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, 189–191.
12. Fushchych W., Zhdanov R.Z., On some exact solutions of the systems of nonlinear differential equations for spinor and vector fields, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 4173–4190.
13. Fushchych W., Zhdanov R.Z., On the reduction and some new exact solutions of the non-linear Dirac and Dirac–Klein–Gordon equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, **21**, L5–L9.
14. Fushchych W., Zhdanov R.Z., Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations, (to appear).
15. Fushchych W., Nikitin A., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publ. Comp., 1987.

16. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, **21**, 1493–1513.
17. Grundland A.M., Harmad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 491.
18. Hagen C., *Phys. Rev. D*, 1972, **5**, 377.
19. Heisenberg W., *Rev. Mod. Phys.*, 1957, **29**, 269.
20. Ivanenko D., *Sov. Phys.*, 1938, **13**, 141.
21. Kalnins E.G., Miller W., *R*-separation of variables for the time-dependent Hamilton–Jacobi and Schrödinger equations, *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, 1005–1015.
22. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 729.
23. Kurdgelaidze D., *Jurn. Exp. Theor. Fiz. (USSR)*, 1957, **32**, 1156.
24. Lie S., *Arch. Math.*, 1881, **6**, 377.
25. Niederere U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 808.
26. Olver P., *Application of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1986.
27. Ovsyannikov L., *Group analysis of differential equations*, Academic, New York, 1982.
28. Tajiri M., *J. Phys. Soc. Japan*, 1983, **52**, 1908–1917.
29. Takahashi K., *J. Math. Phys.*, 1979, **20**, 1232.



# Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2, 3)$ и симметричная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ЛАГНО, В.И. ФУЩИЧ

**1. Введение.** Рассмотрим нелинейное ультрагиперболическое уравнение Даламбера в  $(2 + 3)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве

$$\square u = F \left( u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \right), \quad (1)$$

где

$$\square u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} - u_{55}, \quad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad u \equiv u(x), \quad (2)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad \mu, \nu = 1, \dots, 5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = (u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 - (u_5)^2, \quad u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \quad (3)$$

$F$  — произвольная гладкая функция.

Редукция волнового уравнения (1) в  $(1 + 3)$ -мерном пространстве осуществлена в [1, 2]. Пятимерное уравнение (1)–(3) можно рассматривать как естественное обобщение линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока; оно часто встречается в квантовой теории с фундаментальной длиной [3], в супергравитации, в квантовой теории частиц с переменной массой и спином [4].

К настоящему времени нет каких-либо эффективных методов решения многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Для ДУЧП специального вида, обладающих нетривиальной симметрией, одним из конструктивных способов исследования многомерных ДУЧП является метод редукции. Основы этого метода были заложены в классических трудах Софуса Ли и в настоящее время они интенсивно применяются и развиваются в различных направлениях [1, 2, 5–7].

Уравнение (1) инвариантно относительно группы Пуанкаре  $P(2, 3)$  — группы вращений и сдвигов в пятимерном псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой  $(+ + - - -)$ . Алгебру Ли этой группы обозначим символом  $AP(2, 3)$ .

Провести редукцию какого-либо ДУЧП означает следующее [1, 5]: описать, например, все анзацы вида

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega_1, \dots, \omega_s), \quad 1 \leq s \leq 4, \quad (4)$$

при которых уравнение (1) сводится к уравнению для неизвестной функции  $\varphi(\omega)$ ,  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ , и в это уравнение входят только “новые” переменные  $\omega$ . Число “новых” переменных  $\omega$ , по крайней мере, на единицу меньше числа “старых” переменных  $x = \{x_1, \dots, x_5\}$ . Ясно, что для редукции уравнения (1) необходимо в явном виде построить функцию  $f(x)$  и переменные  $\omega$ . С этой целью исследуем решетку подалгебр алгебры инвариантности  $AP(2, 3)$  уравнения (1). Зная неэквивалентные подалгебры алгебры  $AP(2, 3)$ , найдем все наборы переменных  $\omega$ , при которых анзац (4) (рассматриваем простейший случай, когда  $f(x) = 1$ ) сведет пятимерное уравнение (1) к нескольким ДУЧП в  $s$ -мерном пространстве относительно переменных  $\omega$ .

Итак, основной задачей редукции (более точно симметричной редукции) является описание всех неэквивалентных подалгебр алгебры  $AP(2, 3)$ . Полное решение этой задачи для алгебры  $AP(2, 2)$  и одного класса подалгебр алгебры  $AP(2, 3)$  дано в настоящей работе, и на ее основе получена система редуцированных уравнений для (1). В литературе исследована относительно определенной сопряженности решетка подалгебр таких алгебр:  $AP(1, 3)$  [8],  $AO(1, 4)$  [9],  $AP(1, 4)$  [10],  $AP(2, 2)$  [11],  $\tilde{AP}(1, 4)$  [12].

В п. 2 первой части работы введены необходимые понятия и определения, в п. 3 описаны все подалгебры коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ . В п. 1 второй части работы проведена классификация подалгебр алгебры  $AP(2, 2)$ , в п. 2 построены инварианты подалгебр алгебр  $AP(2, 2)$  и  $AP(2, 3)$ , а в п. 3 осуществлена симметричная редукция уравнения (1).

**2. Основные понятия.** Обобщенной группой Пуанкаре  $P(2, n)$  называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Lambda & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\Lambda \in O(2, n)$ ,  $Y \in R^{(2+n)}$ . Алгебра Ли  $AP(2, n)$  этой группы определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \\ [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] &= g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \dots = -g_{n+1, n+2} = 1$ ,  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, n+2$ .

Если считать, что  $AP(2, n)$  является алгеброй Ли векторных полей на  $R(2, n)$ , то инфинитезимальные операторы (5) представляются такими дифференциальными операторами первого порядка:  $J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_\beta - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_\alpha$  (псевдовращения),  $P_\alpha = \partial_\alpha$  (трансляции), где  $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n+2$ ).

Пусть  $G$  — подгруппа Ли группы  $P(2, n)$   $\langle X_1, \dots, X_s \rangle = AG$ -алгебра Ли группы  $G$ . Не тождественно постоянная функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+2})$  называется инвариантом группы  $G$ , если  $f(x)$  постоянна на  $G$ -орбите каждой точки  $x \in R(2, n)$ . Известно [6], что  $f(x)$  является инвариантом  $G$  тогда и только тогда, когда

$$X_i f(x) = 0 \quad (6)$$

для всех  $i = 1, \dots, s$ . Пусть  $r_*$  — общий ранг касательного отображения группы  $G$  [6], а  $m = n+2 - r_*$ . Если  $r_* < n+2$ , то существует система  $m$  функционально

независимых инвариантов  $f_1(x), \dots, f_m(x)$ , обладающая тем свойством, что любой инвариант группы  $G$  имеет вид  $\Psi(f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Эту систему инвариантов будем называть полной системой инвариантов группы  $G$  или алгебры  $AG$ . Число  $r_*$  назовем рангом алгебры  $AG$ , а число  $m$  — коразмерностью  $AG$ .

Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — подалгебры алгебры  $AP(2, n)$ . Если для некоторого элемента  $C \in P(2, n)$  подалгебры  $CL_1C^{-1}$  и  $L_2$  обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры  $L_1, L_2$  будем называть эквивалентными. В этом случае используем обозначение  $L_1 \approx L_2$ .

Если функции  $f_i(x), i = 1, \dots, k$ , являются инвариантами ненулевой подалгебры  $L$  алгебры  $AP(2, n)$ , то  $L$  будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций. Алгебра инвариантности называется минимальной, если она неэквивалентна ни одной своей собственной подалгебре. Из эквивалентности минимальных алгебр инвариантности не вытекает их сопряженность относительно группы внутренних автоморфизмов группы  $P(2, n)$ . Например, алгебры  $\langle J_{13} - J_{35}, P_1 + P_5 \rangle, \langle P_3, P_1 + P_5 \rangle$  являются минимальными алгебрами инвариантности для функций  $x_1 - x_5, x_2, x_4$  в пространстве  $R(2, 3)$ . Очевидно, эти алгебры не являются  $P(2, 3)$ -сопряженными. В то же время, поскольку для любых  $X_1, X_2 \in AP(2, n)$  имеем  $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$ , то для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры  $AP(2, n)$  существует одна максимальная алгебра инвариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций.

**Предложение 1.** Пусть  $L_1, L_2$  — подалгебры алгебры  $AP(2, n)$ . Для того чтобы  $L_1 \approx L_2$ , необходимо и достаточно, чтобы максимальные алгебры инвариантности полных систем инвариантов подалгебр  $L_1$  и  $L_2$ , были  $P(2, n)$ -сопряженными.

**Доказательство.** Если  $L_1 \approx L_2$ , то для некоторого элемента  $C \in P(2, n)$  алгебры  $CL_1C^{-1}$  и  $L_2$  обладают одними и теми же инвариантами. Пусть  $K_i$  — максимальная алгебра инвариантности полной системы инвариантов алгебры  $L_i, i = 1, 2$ . Очевидно,  $CK_1C^{-1}$  и  $K_2$  обладают одними и теми же инвариантами, откуда в силу единственности максимальной алгебры инвариантности заключаем, что  $CK_1C^{-1} = K_2$ . Наоборот, если  $CK_1C^{-1} = K_2$  для  $C \in P(2, n)$ , то  $CL_1C^{-1}$  и  $L_2$  имеют одни и те же инварианты, а значит,  $L_1 \approx L_2$ . Предложение доказано.

**3. Подалгебры коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ .** Поскольку в [7] найдены подалгебры коразмерности 1 алгебры  $AP(1, 3)$ , а во второй части работы будет получен перечень всех подалгебр для алгебры  $AP(2, 2)$ , то следует исключить из рассмотрения подалгебры вида  $\langle P_1 \rangle \oplus K, L \oplus \langle P_5 \rangle$ , где  $L \subset AP(2, 2), K \subset AP(1, 3) = \langle P_a \rangle \oplus \langle J_{ab} | a, b = 2, 3, 4, 5 \rangle$ . В дальнейшем через  $\mathcal{L}$  будем обозначать минимальную подалгебру коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ , не эквивалентную  $AO(2, 3), \langle P_1 \rangle \oplus K, L \oplus \langle P_5 \rangle$  и обладающую тем свойством, что ее проекция  $\pi(\mathcal{L})$  на  $AO(2, 3)$  принадлежит нормализатору  $AOpt(1, 2)$  двумерного изотропного пространства  $\langle P_1 + P_5, P_2 + P_4 \rangle$  в  $AO(2, 3)$ .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M &= J_{12} - J_{25} + J_{14} - J_{45}, & D &= -J_{15} + J_{24}, & Z &= J_{15} + J_{24}, \\ S &= \frac{1}{2}(J_{12} + J_{45} - J_{14} - J_{25}), & T &= \frac{1}{2}(J_{12} + J_{45} + J_{14} + J_{25}), \\ G_3 &= J_{13} - J_{35}, & H_3 &= J_{23} - J_{34}, & N_1 &= P_1 + P_5, & N_2 &= P_2 + P_4, \end{aligned}$$

$$Y_1 = P_1 - P_5, \quad Y_2 = P_2 - P_4, \quad AGL(2, R) = \langle D, S, T \rangle \oplus \langle Z \rangle, \\ U = \langle Y_1, Y_2, N_1, N_2, P_3 \rangle.$$

Записанные элементы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [D, S] = 2S, \quad [T, D] = 2T, \quad [T, S] = D, \quad [M, Z] = 2M, \quad [G_3, Z] = G_3, \\ [H_3, Z] = H_3, \quad [Z, Y_1] = Y_1, \quad [Z, Y_2] = Y_2, \quad [N_1, Z] = N_1, \quad [N_2, Z] = N_2, \\ [D, G_3] = G_3, \quad [H_3, D] = H_3, \quad [Y_1, D] = Y_1, \quad [D, Y_2] = Y_2, \quad [D, N_1] = N_1, \\ [N_2, D] = N_2, \quad [S, H_3] = G_3, \quad [Y_1, S] = Y_2, \quad [S, N_2] = N_1, \quad [G_3, T] = H_3, \\ [T, Y_2] = Y_1, \quad [N_1, T] = N_2, \quad [G_3, H_3] = M, \quad [Y_1, G_2] = 2P_3, \quad [P_3, G_3] = N_1, \\ [Y_2, H_3] = 2P_3, \quad [P_3, H_3] = N_2, \quad [Y_1, M] = 2N_2, \quad [M, Y_2] = 2N_1 \end{aligned} \quad (7)$$

(нулевые коммутаторы опущены).

В [11] показано, что  $AOpt(1, 2) = \langle M, G_3, H_3 \rangle \oplus AGL(2, R)$ . Очевидно,  $\mathcal{L} \subset U \oplus AOpt(1, 2)$ . Через  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$  будем обозначать проектирования  $\mathcal{L}$  соответственно на  $AGL(2, R)$ , пространство  $\langle P_3, H_3, G_3 \rangle$  и  $AO(2, 3)$ . Исследование алгебры  $\mathcal{L}$  проводится в леммах 1–7 и теореме 1 в зависимости от ее проекции  $\tau(\mathcal{L})$ . Если  $\tau(L_1) \neq L_2$ , но  $L_1 \approx L_2$ , то в перечне подалгебр будет фигурировать только алгебра  $L_1$ .

**Лемма 1.** Если  $\tau(\mathcal{L}) = 0$ , то  $\mathcal{L}$  эквивалентна одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = \langle G_3 + 2Y_2 + \alpha N_2, H_3 + Y_1 + \beta Y_2, M + 2P_3, N_1 \rangle, \quad \alpha, \beta \in R, \\ \mathcal{L}_2 = \langle G_3 + Y_2, H_3 + Y_1, M, N_1, N_2 \rangle, \\ \mathcal{L}_3 = \langle G_3 + Y_1, H_3 + Y_2, M, N_1, N_2 \rangle, \\ \mathcal{L}_4 = \langle G_3 + Y_1, H_3 - Y_2, M, N_1, N_2 \rangle. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$ . С точностью до автоморфизма  $\exp(\theta^i Y_j + \theta_3 P_3)$ ,  $i = 1, 2$ , алгебра  $\mathcal{L}$  содержит элементы  $X_1 = G_3 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha N_2 + \delta M$ ,  $X_2 = H_3 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \sigma M$ . Очевидно, проекция  $\sigma X_1 - \delta X_2$  на  $\langle M \rangle$  равна нулю. Отсюда заключаем, что с точностью до автоморфизма  $\exp \theta(S + T)$  можно предполагать, что  $\delta = 0$ . Автоморфизм  $\exp(\theta G_3)$  позволяет обратить в нуль и коэффициент  $\sigma$ . Если  $P_3 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Y_2 + \delta_1 N_1 + \delta_2 N_2 \in \mathcal{L}$ , то  $\mathcal{L}$  содержит  $N_1 + 2\gamma_1 P_3$ ,  $N_2 + 2\gamma_2 P_3$ ,  $2\gamma_1 N_1$ , а потому  $N_1, N_2, P_3 \in \mathcal{L}$ . Но в таком случае  $\mathcal{L} \approx L \oplus \langle P_5 \rangle$ , где  $L \subset AP(2, 2)$ . Противоречие. Пусть  $X_3 = [X_1, X_2]$ . Очевидно,  $X_3 = M + 2(\alpha_2 - \lambda_1)P_3$ , где  $\alpha_2 - \lambda_2 \neq 0$ ,  $[X_3, X_1] = (4\alpha_2 - 2\lambda_1)N_1 - 2\alpha_1 N_2$ ,  $[X_3, X_2] = 2\lambda_2 N_1 + (2\alpha_2 - 4\lambda_1)N_2$ . Если  $\mathcal{L}$  содержит ненулевой элемент вида  $\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2$ , то, применяя автоморфизм  $\exp \theta(S + T)$ , получаем  $N_1 \in \mathcal{L}$ . Так как  $\langle M + \mu P_3, N_1, N_2 \rangle \approx \langle P_3, N_1, N_2 \rangle$ , то  $N_2 \notin \mathcal{L}$ . Поэтому можно предполагать, что  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 2\lambda_1$ . С точностью до автоморфизма  $\exp(\theta, Z)$  получаем  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ .

Пусть  $\varepsilon \mathcal{L} = \langle G_3, P_3 \rangle$ . Тогда, применяя автоморфизм  $\exp(\theta_1, Y_1 + \theta_2 H_3 + \theta_3 P_3)$ , убеждаемся, что  $\mathcal{L}$  содержит элементы  $X_1 = G_3 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \beta N_2$ ,  $X_2 = P_3 + \gamma M + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu N_2$ ,  $X_3 = [X_2, X_1] = (1 + 2\gamma \alpha_2)N_1 - 2\gamma \alpha_1 N_2 + 2\lambda_1 P_3$ ,  $X_4 = [X_3, X_1] = 2\lambda_1 N_1$ . За счет автоморфизма  $\exp(\theta_1 H_3 + \theta_2 Y_1)$  можно допускать, что  $\lambda_2 = 0$  при  $\gamma \neq 0$ . Если  $\lambda_1 \neq 0$ , то  $N_1, P_3 - \gamma \alpha_1 \lambda_1^{-1} N_2 \in \mathcal{L}$ . Автоморфизм  $\exp(\theta H_3)$  позволяет выделить  $P_3$ , что противоречит определению  $\mathcal{L}$ . Значит,  $\lambda_1 = 0$ . Так как  $\dim \mathcal{L} \geq 4$ , то  $\mathcal{L}$  содержит ненулевой элемент  $\delta_1 N_1 + \delta_2 N_2 + \sigma M + \rho Y_2$ . Анализируя возможные случаи, приходим к выводу, что  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$ , где  $\varepsilon(\mathcal{L}') = \langle G_3 \rangle$ .

Если  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3 \rangle$ , то  $\mathcal{L}$  сопряжена алгебре  $\langle G_3 + Y_1, Y_2, N_1, N_2 \rangle$ , а последняя эквивалентна алгебре  $L \oplus \langle P_5 \rangle$ , где  $L \subset AP(2, 2)$ . Если  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle P_3 \rangle$ , то  $P_3 \in \mathcal{L}$  или  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$ , где  $\varepsilon(\mathcal{L}') = 0$ . Если  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$ , то с точностью до автоморфизмов  $\exp(\theta(S+T))$ ,  $\exp(\theta_1 J_{15} + \theta_2 J_{24})$ ,  $\exp(\theta T)$  алгебра  $\mathcal{L}$  сопряжена одной из алгебр  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_4$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если  $\tau(\mathcal{L}) = \langle D \rangle$ , то  $\mathcal{L}$  эквивалентна одной из алгебр

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 &= \langle D + \alpha P_3, G_3 + \beta Y_2, M + P_3, N_1 \rangle, \quad \beta \neq 0, \\ \mathcal{L}_6 &= \langle D, G_3 + Y_2, M - 2P_3, N_2 \rangle, \quad \mathcal{L}_7 = \langle D + \alpha P_3, G_3 + Y_2, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0, \\ \mathcal{L}_8 &= \langle D, G_3 + Y_2, N_1, N_2 \rangle, \quad \mathcal{L}_9 = \langle D + \alpha P_3, M + P_3, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Так как  $D$  действует вполне приводимо на  $U$  и аннулирует в  $U$  только  $\langle M, P_3 \rangle$ , то в силу предложения 2.1 [12]  $D + \gamma M + \delta P_3 \in \mathcal{L}$ . На основании леммы 3.1 [12] пространство  $\mathcal{L} \cap U$  разлагается в сумму своих проекций на  $\langle M, P_3 \rangle$ ,  $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$ ,  $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$ . Если  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$ , то ранг алгебры  $\mathcal{L}$  равен 5. Пусть  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, P_3 \rangle$ . С точностью до сопряженности  $G_3 + \lambda Y_2 \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Проекция  $\mathcal{L}$  на  $\langle Y_1 \rangle$  равна 0. Если  $M + \mu P_3 \in \mathcal{L}$ ,  $\mu \neq 0$ , то  $D + \delta P_3 \in \mathcal{L}$ . При  $\delta \neq 0$  получаем алгебру  $\mathcal{L}_5$ . Если  $N_2 \in \mathcal{L}$ , то  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_6$ . Допустим, что  $M + \mu P_3 \notin \mathcal{L}$ ,  $\mu \neq 0$ . В этом случае  $N_1, N_2 \in \mathcal{L}$ , а потому  $\mathcal{L}$  эквивалентна  $\mathcal{L}_7$ .

Пусть  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Автоморфизм, соответствующий  $\text{diag}[J, 1, J]$ , сводит случай  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle H_3, P_3 \rangle$  к случаю  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, P_3 \rangle$ .

Пусть  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$ . Тогда  $\mathcal{L}$  содержит  $G_3 + \beta Y_2$ ,  $H_3 + \beta Y_1 + \delta N_2$ ,  $M$ . Если  $\beta \neq 0$ , то  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_8$ . Если  $\beta = 0$ , то  $\mathcal{L} \approx AO(2, 3)$ . Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Если  $\tau(\mathcal{L}) = \langle D + \lambda Z \rangle$ ,  $\lambda > 0$ , то  $\mathcal{L}$  эквивалентна одной из алгебр

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10} &= \langle 3D + Z + \mu P_3, M + Y_1, Y_2, N_1 \rangle, \quad \mu > 0, \\ \mathcal{L}_{11} &= \langle D + Z + \alpha P_3, G_3 + Y_1, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0, \\ \mathcal{L}_{12} &= \langle 3D + Z, M + Y_1, H_3, N_1 \rangle. \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Если  $\tau(\mathcal{L}) = \langle T \rangle$ , то  $\mathcal{L}$  эквивалентна одной из алгебр

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{13} &= \langle T + G_3 + \alpha Y_1 + Y_3, H_3 + 2Y_1 + \beta N_1, M - 2P_3, N_3 \rangle, \quad \alpha, \beta \in R, \\ \mathcal{L}_{14} &= \langle T + G_3 + \alpha Y_1 + Y_2, H_3 + Y_1, M, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha \in R. \end{aligned}$$

Доказательство лемм 3, 4 аналогично доказательству лемм 1, 2.

**Лемма 5.** Если  $\tau(\mathcal{L}) = \langle D, T \rangle$ , то  $\mathcal{L}$  эквивалентна  $\mathcal{L}_{15} = \langle D, T, H_3 + Y_1, M + 2P_3 \rangle$ .

**Доказательство.** На основании предложения 2.1 и леммы 3.1 [12] алгебра  $\mathcal{L}$  содержит  $\langle D + \alpha M + \beta P_3, T \rangle$ , а  $\mathcal{L} \cap U$  разлагается в сумму своих проекций на  $\langle M, P_3 \rangle$ ,  $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$ ,  $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$ , причем, если  $K$  — проекция  $\mathcal{L} \cap U$  на  $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$ , то  $[T, K]$  содержится в проекции  $\mathcal{L} \cap U$  на  $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$ . Легко видеть, что  $\langle T, N_2 \rangle \approx \langle Y_1, N_2 \rangle$ ,  $\langle T, Y_1 + \delta N_2 \rangle \approx \langle Y_1, N_2 \rangle$ . Если  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$ , то  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{15}$ . Пусть  $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$ . Тогда  $\mathcal{L}$  содержит  $G_3 + \gamma Y_2$ ,  $H_3 - \gamma Y_1$ . Так как  $[G_3 + \gamma Y_2, H_3 - \gamma Y_1] = M + 4\gamma P_3$ , то  $\gamma = 0$ . Отсюда вытекает, что  $\mathcal{L} \approx AO(2, 3)$ . Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 6.** Если  $\tau(\mathcal{L}) = \langle D + \lambda Z, T \rangle$ ,  $\lambda \neq 0$ , то  $\mathcal{L}$  сопряжена одной из следующих алгебр:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{16} &= \langle D + 3Z, T + G_3, N_1, N_2 \rangle, \\ \mathcal{L}_{17} &= \langle D + 3Z + \alpha P_3, T + G_3, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0, \\ \mathcal{L}_{18} &= \langle D + 3Z, T + G_3, M, H_3 + \gamma N_2 \rangle, \quad \gamma > 0, \\ \mathcal{L}_{19} &= \langle D + 3Z, T + N_1, M, H_3 \rangle.\end{aligned}$$

**Доказательство.** На основании коммутационных соотношений (7) имеем

$$\begin{aligned}[D + \lambda Z, \alpha T + \beta G_3 + \gamma H_3 + \delta P_3 + \rho_1 Y_1 + \rho_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \sigma M] = \\ = -2\alpha T + (1 - \lambda)(\beta G_3 + \mu_1 N_1) - (1 + \lambda)(\gamma H_3 + \mu_2 N_2) + (\lambda - 1)\rho_1 Y_1 + \\ + (\lambda + 1)\rho_2 Y_2 - 2\lambda\sigma M.\end{aligned}$$

Пусть  $\lambda \neq \pm 1/3, \pm 1, \pm 3$ . В силу предложения 2.1 и леммы 3.1 из [12] алгебра  $\mathcal{L}$  содержит  $D + \lambda Z + \mu P_3$ ,  $T$ , а пространство  $\mathcal{L} \cap U$  разлагается в сумму своих проекций на  $\langle M \rangle$ ,  $\langle Y_1 \rangle$ ,  $\langle Y_2 \rangle$ ,  $\langle G_3, N_1 \rangle$ ,  $\langle H_3, N_2 \rangle$ ,  $\langle P_3 \rangle$ . Если  $G_3 + \gamma N_1 \in \mathcal{L}$ , то  $\mathcal{L}$  содержит  $[G_3 + \gamma N_1, T] = H_3 + \gamma N_2$ , а также  $M$ . В этом случае  $\mathcal{L} = \langle D + \lambda Z, M, G_3 + \gamma N_1, H_3 + \gamma N_2, T \rangle$ , а потому  $\mathcal{L} \approx AO(2, 3)$ .

Если  $\lambda = 1/3$ , то  $\mathcal{L}$  содержит  $3D + Z + \mu P_3$ ,  $T$ , а  $\mathcal{L} \cap U$  разлагается в сумму своих проекций на  $\langle M, Y_1 \rangle$ ,  $\langle Y_2 \rangle$ ,  $\langle G_3, N_1 \rangle$ ,  $\langle H_3, N_2 \rangle$ ,  $\langle P_3 \rangle$ . Отсюда вытекает, что если  $\mu = 0$ , то  $\mathcal{L} \approx AO(2, 3)$  или  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{19}$ ; если  $\mu \neq 0$ , то  $\dim \mathcal{L} = 3$ . Если  $\lambda = -1/3$ , то  $\mathcal{L}$  содержит  $3D - Z + \mu P_3$ ,  $T$ , а  $\mathcal{L} \cap U$  разлагается в сумму своих проекций на  $\langle Y_1 \rangle$ ,  $\langle M, Y_2 \rangle$ ,  $\langle G_3, N_1 \rangle$ ,  $\langle H_3, N_2 \rangle$ ,  $\langle P_3 \rangle$ . Поскольку  $[T, Y_2] = Y_1$ ,  $\langle T, Y_1 \rangle \approx \langle N_2, Y_1 \rangle$ , то проекция  $\mathcal{L}$  на  $\langle Y_1, Y_2 \rangle$  равна нулю. Если  $\mu = 0$ , то  $\mathcal{L}$  сопряжена подалгебре алгебры  $AO(2, 3)$ . Если  $\mu \neq 0$ , то  $\dim \mathcal{L} = 3$ .

Случаи  $\lambda = \pm 1, \pm 3$  рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 7.** Если  $Z \in \tau(\mathcal{L})$ , то  $\mathcal{L}$  сопряжена одной из алгебр

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{20} &= \langle D + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \geq 0, \\ \mathcal{L}_{21} &= \langle S + T + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha, \beta \geq 0.\end{aligned}$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству предыдущих лемм.

**Теорема 1.** Подалгебры коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ , не эквивалентные  $AO(2, 3)$ ,  $\langle P_1 \rangle \oplus K$ ,  $L \oplus \langle P_5 \rangle$ , исчерпываются относительно эквивалентности алгебрами, описанными в леммах 1–7.

**Доказательство.** Ограничимся рассмотрением случаев алгебр  $\mathfrak{C} \subset AP(2, 3)$ , проекции которых на  $AO(2, 3)$  не сопряжены подалгебрам алгебры  $AOpt(1, 2)$ . Пусть  $G_a = J_{1a} - J_{a5}$ ,  $a = 2, 3, 4$ ,  $AO(2, 4) = \langle J_{cd} | c, d = 2, 3, 4 \rangle$ ,  $A\dot{P}(1, 2)' = \langle G_2, G_3, G_4 \rangle \oplus (AO(2, 4) \oplus \langle J_{15} \rangle)$ . Так как  $J_{15} = (Z - D)/2$ ,  $G_2 = (M + 2S)/2$ ,  $G_4 = (M - 2S)/2$ , то  $J_{15}, G_2, G_3, G_4 \in AOpt(1, 2)$ . Отсюда вытекает, что подалгебра  $\mathfrak{F}$  алгебры  $A\dot{P}(1, 2)'$  не сопряжена подалгебре алгебры  $AOpt(1, 2)$  тогда и только тогда, когда ее проекция  $\mathfrak{X}$  на  $AO(2, 4)$  не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве  $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle$ . Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда сопряжена одной из алгебр  $AO(2, 4)$ ,  $\langle J_{34} \rangle$ .

Пусть  $\mathcal{L}$  — подалгебра коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ , не эквивалентная  $AO(2, 3)$ ,  $\langle P_1 \rangle \oplus K$ ,  $L \oplus \langle P_5 \rangle$ ;  $\pi$  — проектирование  $\mathcal{L}$  на  $AO(2, 3)$ ;  $\mathfrak{F} = \pi(\mathcal{L}) \subset A\dot{P}(1, 2)'$ ,  $\mathfrak{X} = \langle J_{34} \rangle$ . В силу леммы 3.1 [12] алгебра  $\mathcal{L}$  содержит свою проекцию  $W$

на  $\langle G_3, G_4, P_3, P_4 \rangle$ . Если  $W = 0$ , то функция  $x_3^2 + x_4^2$  будет инвариантом  $\mathcal{L}$ , а потому  $\mathcal{L} \approx \langle J_{34}, P_1, P_2, P_5 \rangle$ . Если  $P_3, P_4 \in W$ , то  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$ , где  $\pi(\mathcal{L}') \subset AO_{opt}(1, 2)$ . Пусть  $W \neq 0$  и  $P_3, P_4 \notin W$ . Тогда  $W$  обладает базисом  $G_3 + \alpha P_3 + \beta P_4, G_4 - \beta P_3 + \alpha P_4$ . Коммутатор этих элементов совпадает с  $2\beta N_1$ . Если  $\beta \neq 0$ , то  $N_1 \in \mathcal{L}$ . Отсюда легко получить, что  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$ , где  $\pi(\mathcal{L}') \subset AO_{opt}(1, 2)$ . Если  $\beta = 0$ , то с точностью до автоморфизма  $\exp(\theta Y_1)$  имеем  $W = \langle G_3, G_4 \rangle$ . Если проекция  $\mathcal{L}$  на  $\langle J_{15} \rangle$  равна 0, то  $x_1 - x_5$  является инвариантом  $\mathcal{L}$ , а потому  $\mathcal{L} \approx \langle N_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ . Если проекция  $\Omega$  на  $\langle N_1, G_2 \rangle$  отлична от 0, то  $\mathcal{L}$  содержит свою проекцию  $\Omega$  на  $\langle N_1, G_2 \rangle$ . Допустим, что  $\Omega = \langle G_2 + \gamma N_1 \rangle$ . Применяя автоморфизм  $\exp(\theta P_2)$ , получаем  $G_2 \in \Omega$ . Если  $N_1 \in \Omega$ , то  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$ , где  $\pi(\mathcal{L}') \subset AO_{opt}(1, 2)$ . Если  $N_1 \notin \Omega$ , то  $\mathcal{L} \approx AO(2, 3)$  или  $\mathcal{L} \approx L \oplus \langle P_5 \rangle$ .

Случай  $\mathfrak{F} = \pi(\mathcal{L})$ ,  $\mathfrak{R} = AO(2, 4)$  рассматривается аналогично. Если проекция  $\mathcal{L}$  на  $AO(2, 3)$  не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве  $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$ , то  $\mathcal{L}$  эквивалентна одной и алгебр  $AO(2, 3)$ ,  $\langle P_1 \rangle \oplus K$ ,  $L \oplus \langle P_5 \rangle$ . Теорема доказана.

1. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические методы исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear manydimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
3. Кадышевский В.Г., Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий, *Физика элементар., частиц и атом. ядра*, 1980, **11**, вып. 1, 5–36.
4. Фушич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе, *Теор. мат. физика*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
5. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
8. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
9. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in de Sitter space, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 5, 717–728.
10. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group  $P(1, 4)$ , *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.
11. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фушич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре  $AP(2, n)$ , Препринт № 85.89, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
12. Barannik L.F., Fushchych W.I., On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1, n)$ , *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, № 7, 1003–1017.

# Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченною швидкістю

*В.І. ФУЩИЧ, А.С. ГАЛІЦИН, А.С. ПОЛУБИНСЬКИЙ*

The fourth-order partial differential equation  $Lu = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)u(x, t) = 0$ , where  $L_2 = L_1 L_1$ ,  $L_1$  is a classical heat conductivity operator is suggested to describe the heat and diffusion processes. The fundamental solution of the operator and some finite self-similar solutions are obtained.

В цьому повідомленні для опису теплових і дифузійних процесів запропоновано диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку, інваріантне відносно групи Галілея. Порівняно з класичним лінійним рівнянням параболічного типу воно більш коректно описує еволюційні процеси і дозволяє досліджувати їх спеціальні режими, зокрема — зі скінченною швидкістю розповсюдження збурень.

Оскільки класичне рівняння теплопровідності передбачає нескінченну швидкість розповсюдження збурень, що приводить до ряду відомих парадоксів [1–3], для описання процесів зі скінченною швидкістю рядом авторів було запропоноване гіперболічне рівняння, яке враховує релаксацію теплового потоку [2–4]. Однак всі нестационарні рівняння, в які входять другі похідні по часу, не інваріантні відносно перетворення Галілея, причому для більшості з них не виконується ні принцип Галілея, ні принцип Пуанкаре–Ейнштейна [5, 6]. Це свідчить про те, що гіперболічне рівняння не має відповідних симетрійних властивостей і, таким чином, не відображає основні фізичні закони збереження.

Розглянемо рівняння вигляду

$$Lu \equiv (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)u(x, t) = 0, \quad (1)$$

де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — дійсні параметри,  $L_2 = L_1 L_1$ ,

$$L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \varkappa^2 \nabla^2, \quad (2)$$

$\varkappa$  — фізичний параметр,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Далі (1) будемо називати для скорочення біпараболічним рівнянням; при  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$  воно співпадає з класичним рівнянням теплопровідності. Можна показати, що (1) інваріантне відносно групи Галілея  $G(3, 1)$ . Тому природно чекати, що його можна використовувати для описання процесів дифузійного типу, які не залежать від того, в яких інерційних системах вони спостерігаються.

При виведенні рівняння (1) із закону збереження енергії тепловий потік може бути визначений різними співвідношеннями. Зокрема, його можна задати у вигляді

$$q(x, t) = -\lambda \text{grad } u - \mu \text{grad } L_1 u; \quad \lambda, \mu = \text{const}. \quad (3)$$

Звідси при  $\mu = 0$  випливає закон Фур'є.



Рівняння (1) при  $\text{sgn } \alpha_1 = \text{sgn } \alpha_2$  зберігає асиметрію відносно часу  $t$ , що має місце для класичного рівняння теплопровідності, і відповідає принципу зростання ентропії.

Змінні в рівнянні (1) не розділяються в класичному розумінні, однак час може бути виключений перетворенням Лапласа, що приводить до рівняння в зображеннях

$$\alpha_2 \nabla^2 \nabla^2 \hat{u} - \varkappa^2 (\alpha_1 + 2\alpha_2 p) \nabla^2 \hat{u} + p(\alpha_1 + \alpha_2 p) \hat{u} = (\alpha_1 + \alpha_2 p) u(x, 0) + \alpha_2 \left( \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - 2\varkappa^2 \nabla^2 u(x, 0) \right), \quad (4)$$

де  $p$  — параметр перетворення. Звідси, зокрема, випливає, що коректними початковими умовами для рівняння (1) поряд з

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_2(x), \quad \nabla^2 u(x, 0) = u_2(x) \quad (5)$$

є умови

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - 2\varkappa^2 \nabla^2 u(x, 0) = u_3(x). \quad (6)$$

З другого боку, у випадку всього простору  $E_n$  перетворенням Фур'є рівняння (1) зводиться до звичайного диференційного рівняння

$$\alpha_2 \tilde{u}'' + (\alpha_1 + 2\alpha_2 \varkappa^2 \sigma^2) \tilde{u}' + (\alpha_1 + \alpha_2 \varkappa^2 \sigma^2) \varkappa^2 \sigma^2 \tilde{u} = 0, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

де  $\tilde{u}$  — образ фур'є-функції,  $u, \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \in E_n$ . Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\tilde{u}(\sigma; t) = c_1 e^{-\varkappa^2 \sigma^2 t} (1 + c_2 e^{-\alpha_1 t / \alpha_2}), \quad \alpha_2 \neq \infty. \quad (8)$$

Якщо визначити фундаментальний розв'язок  $G_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{r}, \tau)$  біпараболічного оператора  $L$  як узагальнену функцію, що задовольняє рівняння  $LG(\mathbf{r}, \tau) = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta(\tau)$ , де  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $\boldsymbol{\rho}' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ ,  $\tau = t - t'$ ,  $\delta(\cdot)$  — дельта-функція, і ввести фундаментальний розв'язок  $Q(\mathbf{r}, \tau)$  класичного оператора теплопровідності  $L_1$  [7], то між ними існує наступний зв'язок:

$$G_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{r}, \tau) = Q(\mathbf{r}, \tau) \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 \tau / \alpha_2}), & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 < \infty, \\ \tau, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \end{cases} \quad (9)$$

де [1, 2]

$$Q(\mathbf{r}, \tau) = \frac{4\pi \Theta(\tau)}{(2\varkappa \sqrt{\pi \tau})^n} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\varkappa^2 \tau}}$$

( $\Theta(\tau)$  — одинична функція Хевісайда). При цьому можна довести, що

$$G_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{r}, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} G_{0,1}(\mathbf{r}, \tau), \quad G_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{r}, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} Q(\mathbf{r}, \tau), \quad (10)$$

тобто при достатньо малих  $\tau$  фундаментальний розв'язок оператора  $L$  веде себе по  $\tau$  як фундаментальний розв'язок оператора  $L_2$ , а для достатньо великих  $\tau$  його характер визначається поведінкою фундаментального розв'язку оператора  $L_1$ .

При  $r \neq 0$  мають місце наступні асимптотичні співвідношення:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_{\alpha_1 \alpha_2}(r, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} \alpha_1 = \operatorname{sgn} \alpha_2, \\ \infty, & \text{якщо } \operatorname{sgn} \alpha_1 \neq \operatorname{sgn} \alpha_2, \end{cases} \quad (11)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_{0,1}(r, \tau) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } n = 1, \\ 1/r^2, & \text{якщо } n = 2, \\ 0, & \text{якщо } n = 3, 4, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Побудована функція  $G_{\alpha_1 \alpha_2}(r, \tau)$  задовольняє умови причинності і взаємності [1], характерні для фундаментального розв'язку класичного оператора  $L_1$ . Нижче наводяться розв'язки деяких спеціальних задач для одновимірного рівняння (1) та відзначаються їх властивості.

Нехай початковий розподіл температури на всій осі задовольняє співвідношення (6), де

$$u_0(x) = \begin{cases} w, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad u_3(x) = 0. \quad (13)$$

У цьому випадку рівняння (1) має наступні розв'язки:

$$u = \begin{cases} s(x, t), & \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \\ s(x, t) - \frac{w}{4\kappa\sqrt{\pi t}} \left[ (a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\kappa^2 t}} + (a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\kappa^2 t}} \right], & \alpha_1 = 0, \\ s(x, t) - \frac{\alpha_2 w}{\alpha_1} \frac{1 - e^{-\alpha_1 t/\alpha_2}}{4\kappa t \sqrt{\pi t}} \left[ (a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\kappa^2 t}} + (a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\kappa^2 t}} \right], & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 < \infty, \end{cases} \quad (14)$$

де

$$s(x, t) = \frac{w}{2} \left[ \operatorname{erf} \frac{a-x}{2\kappa\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{a+x}{2\kappa\sqrt{t}} \right]$$

( $\operatorname{erf} z$  — інтеграл ймовірності [1, 2, 10]). Результати обчислень по формулах (14) показали, що до деякого фіксованого моменту часу  $t = t_0$   $u(x, t)$  є монотонно спадаючими функціями від  $x$ ; при  $t > t_0$  для розв'язків (14б) та (14в), на відміну від класичного випадку (14а), характерна поява одиначної хвилі, що рухається в напрямку осі  $x$  з спадаючою по  $t$  амплітудою. При цьому має місце нерівність  $0 < u(x, t) \leq w$ .

Якщо ж замість другої умови в (13) задати (5), де  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ , то розв'язок такої задачі буде відрізнятися від (14в) лише знаком другого члена. Виявляється, що тут вказана нерівність не має місця: існує таке  $t = t_0$ , що при  $t > t_0$   $u(x, t)$  змінює знак на осі  $x$ , причому  $u \rightarrow -0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Це явище має місце для будь-яких, скільки завгодно малих  $\alpha_2 > 0$ .

Покладемо в (1)  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ , і будемо шукати автотодельний розв'язок вигляду [8]

$$u_A(x, t) = e^{\beta t} \varphi(\xi), \quad \xi = x - vt \quad (\beta, v = \text{const}). \quad (15)$$

Тепловий потік тут, у відповідності з (3), визначається формулою

$$q = \mu e^{\beta t} (\chi^2 \varphi''' + v \varphi'' - \beta \varphi'), \quad (16)$$

а  $\varphi(\xi)$  визначається із диференційного рівняння

$$\chi^4 \varphi^{IV} + 2\chi^2 v \varphi''' + (v^2 - 2\beta \chi^2) \varphi'' - 2\beta v \varphi' + \beta^2 \varphi = 0. \quad (17)$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi = c_1 e^{r_1 \xi} + c_2 e^{r_2 \xi} + \xi (c_3 e^{r_1 \xi} + c_4 e^{r_2 \xi}), \quad r_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\beta \chi^2}}{2\chi^2}. \quad (18)$$

Можна довести, що серед множини функцій (18) містяться розв'язки, що задовольняють умови

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) > 0, \quad \xi < 0, \quad \varphi(0) = 0, \\ \beta \varphi(0) - v \varphi'(0) - 2\chi^2 \varphi''(0) = 0, \quad q(0) = 0. \end{aligned}$$

Вони забезпечують неперервність початкових даних, що впливають з (6), та потоку в точці  $\xi = 0$ . Тому існують розв'язки рівняння  $L_2 u = 0$  з всюду неперервним  $q$ , фінітні по  $x$ :  $u_A(x, t) > 0$  при  $x < vt$ ,  $u_A(x, t) = 0$  при  $x \geq vt$ . Таким чином, це рівняння придатне для описання процесів з скінченною швидкістю розповсюдження збурень, причому таких розв'язків три:

$$\begin{aligned} \varphi &= \begin{cases} c_1 \left( e^{-\frac{v}{\chi^2} \xi} - \frac{v}{\chi^2} \xi - 1 \right), & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad (\beta = 0); \end{cases} \\ \varphi &= \begin{cases} c_2 \xi \left( \frac{4r_2 + v/\chi^2}{4r_1 + v/\chi^2} e^{r_1 \xi} - e^{r_2 \xi} \right), & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad \left( \beta = -\frac{v^2}{8\chi^2} \right); \end{cases} \\ \varphi &= \begin{cases} c_3 \left[ e^{r_2 \xi} - e^{r_1 \xi} + \frac{v(r_2 - r_1)\xi e^{r_1 \xi}}{\chi^2(4r_1 + v/\chi^2)} + \frac{v\sqrt{v^2 + 4\beta\chi^2}}{2\chi^2(v^2 + 8\beta\chi^2)} \times \right. \\ \quad \left. \times \left( \sqrt{v^2 + 4\beta\chi^2} - v \right) \xi \left( e^{r_2 \xi} - \frac{4r_2 + v/\chi^2}{4r_1 + v/\chi^2} e^{r_1 \xi} \right) \right], & \xi < 0, \\ 0, & \xi \geq 0, \quad \left( -\frac{v^2}{8\chi^2} < \beta < 0 \right), \end{cases} \end{aligned}$$

де  $c_j, j = \overline{1,3}$  — довільні постійні.

Приклади фінітних розв'язків класичних нелінійних рівнянь теплопровідності, що мають подібні властивості, наведені в [8, 9].

На півосі  $x \geq 0$  будемо шукати автомодельні розв'язки рівняння  $L_2 u = 0$  для степеневого межового режиму [8]

$$u(0, t) = (1 + t)^\alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

вигляду

$$u_A(x, t) = (1 + t)^\alpha \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{1 + t}} \quad (0 \leq \xi < \infty). \quad (19)$$

Неважко показати, що  $\varphi(\xi)$  задовольняє рівняння

$$\left(\varkappa^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} - (\alpha - 1)\right) \left(\varkappa^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha \varphi\right) = 0, \quad \varphi(0) = 1. \quad (20)$$

Його розв'язок виражається через функції Ерміта [10]:

$$\begin{aligned} \varphi = & c_1 H_{2\alpha} \left(i \frac{\xi}{2\varkappa}\right) + c_2 H_{2(\alpha-1)} \left(i \frac{\xi}{2\varkappa}\right) + \\ & + e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2}} \left[ c_3 H_{-2(\alpha+1)} \left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right) + c_4 H_{-2(\alpha-1)} \left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

де  $c_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  — довільні постійні. Із асимптотичних представлень функцій Ерміта випливає, що

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq 1, c_1 = c_2 = 0, \\ 1 & \text{при } \alpha = 1, c_1 = 0. \end{cases}$$

Доведена наступна

**Теорема 1.** Нехай  $u_A(x, t)$  — автомодельний розв'язок рівняння  $L_2 u = 0$  вигляду (19), обмежений на нескінченності. Тоді:

1) якщо  $0 < \alpha < 1$ , то вибором постійних  $c_2, c_3$  і  $c_4$  в (21) можна визначити фінітний по  $x$  розв'язок з всюди неперервним тепловим потоком, що описує хвилю з скінченною швидкістю розповсюдження збурень;

2) якщо  $\alpha > 1$ , то  $u_A(x, t)$  — монотонна функція своїх аргументів, що описує розповсюдження збурень з нескінченною швидкістю.

Нехай  $x \geq 0$ , а при  $x = 0$  для рівняння  $L_2 u = 0$  задано межовий режим з загостренням [8]

$$u(0, t) = (T - t)^{-\alpha}, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (22)$$

тобто  $u(0, t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow T^-$ . Автомодельний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$u_A(x, t) = (T - t)^{-\alpha} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{T - t}}. \quad (23)$$

Можна показати, що  $\varphi(\xi)$  задовольняє рівняння

$$\left(\varkappa^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2} \frac{d}{d\xi} - (\alpha + 1)\right) \left(\varkappa^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2} \frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha \varphi\right) = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad (24)$$

а його розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi = & c_1 H_{-2\alpha} \left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right) + c_2 H_{-2(\alpha+1)} \left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right) + \\ & + e^{\frac{\xi^2}{4\varkappa^2}} \left[ c_3 H_{2\alpha-1} \left(\frac{i\xi}{2\varkappa}\right) + c_4 H_{2\alpha+1} \left(\frac{i\xi}{2\varkappa}\right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Доведена наступна

**Теорема 2.** В степеневому межовому режимі з загостренням при будь-якому  $\alpha > 0$  рівняння  $L_2 u = 0$  не має фінітних автомодельних розв'язків вигляду (23), обмежених на нескінченності, і описує розповсюдження збурень з нескінченною швидкістю.

1. Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, в 2 т., М., Изд-во иностр лит., 1958, Т. 1, 930 с.
2. Лыков А.В., Теория теплопроводности, М., Высш. шк., 1967, 599 с.
3. Толубинский Е.В., Теория процессов переноса, Киев, Наук. думка, 1969, 259 с.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Обобщенная термомеханика, Киев, Наук. думка, 1976, 310 с.
5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–22.
6. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, 3491–3503.
7. Положий Г.Н., Уравнения математической физики, М., Высш. шк., 1964, 560 с.
8. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 477 с.
9. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А., Математическое моделирование процессов тепло-массо-переноса (эволюция диссипативных структур), М., Наука, 1987, 352 с.
10. Никифиров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики, М., Наука, 1984, 319 с.

# On vector and pseudovector Lagrangians for electromagnetic field

W.I. FUSHCHYCH, I. KRIVSKY, V. SIMULIK

A Lagrange function in terms of electromagnetic field strengths is constructed which is a 4-vector with respect to the total Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$  and whose Euler–Lagrange equations are equivalent to the Maxwell equations. The advantages of the Lagrange function proposed in comparison with the known pseudovector with respect to the  $\tilde{P}(1,3)$  group Lagrange function are shown. The conserved quantities on the basis of corresponding generalization of Noether theorem are found.

A development of Lagrange approach ( $L$ -approach) in electro-dynamics in terms of field-strength tensor  $F = (F^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{H})$  of electromagnetic field, without using the potentials  $A_\mu$ , was discussed in [1–4]. It is easy to show, that in terms of  $(\vec{E}, \vec{H})$  there is no scalar, with respect to the Poincaré group  $P(1,3)$ , Lagrange function, for which the Euler-Lagrange (EL) equations coincide with the Maxwell equations.

The purpose of this work is to construct a vector (with respect to the total Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$  i.e.,  $P(1,3)$  group including the space and time reflections) Lagrange function in terms of  $(\vec{E}, \vec{H})$ , with the help of which the system of equations equivalent to the Maxwell equations can be received from the EL equations. The conserved quantities are constructed on the basis of corresponding generalization of Noether theorem. Further we will call such Lagrange vector-function a Lagrange vector.

Let us represent the Maxwell equations

$$\partial_0 \vec{E} = \text{rot } \vec{H} - \vec{j}, \quad \text{div } \vec{E} = \rho, \quad \partial_0 \vec{H} = -\text{rot } \vec{E}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (1)$$

in a manifestly covariant form

$$Q^\mu = j^\mu, \quad R^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

where

$$Q^\mu \equiv F_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad R^\mu \equiv \varepsilon F_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad \varepsilon F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (3)$$

$F = (F^{\mu\nu})$  is a tensor of electromagnetic field:

$$F = (F^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{H}) : \quad F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk} H^k, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \quad (4)$$

$j$  is a 4-vector of current:

$$j \equiv (j^\mu) = (\rho, \vec{j}), \quad j^0 = \rho, \quad \vec{j} = (j^i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

and  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  is a completely antisymmetric unit tensor,  $\varepsilon^{0123} = 1$ :

$$x = (x^\mu) \in R(1,3), \quad \partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu. \quad (6)$$

The explicit form of the components  $Q^\mu$ ,  $R^\mu$  is the following

$$Q^0 = \operatorname{div} \vec{E}, \quad Q^i = (-\partial_0 \vec{E} + \operatorname{rot} \vec{H})^i \equiv -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ijk} \partial_j H^k, \quad (7)$$

$$R^0 = \operatorname{div} \vec{H}, \quad R^i = (-\partial_0 \vec{H} + \operatorname{rot} \vec{E})^i \equiv -\partial_0 H^i + \varepsilon^{ijk} \partial_j E^k. \quad (8)$$

Now consider the tensor  $T_{\mu\rho\sigma}$  and pseudotensor  $T'_{\mu\rho\sigma}$  of 3-rd rank (with respect to  $\tilde{P}(1,3)$  group), which are constructed from 4-vectors  $Q^\mu$ ,  $R^\mu$  (3):

$$T_{\mu\rho\sigma} \equiv a[g_{\mu\rho}(Q_\sigma - j_\sigma) - g_{\mu\sigma}(Q_\rho - j_\rho)] + b\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R^\nu, \quad (9)$$

$$T'_{\mu\rho\sigma} \equiv a'(g_{\mu\rho}R_\sigma - g_{\mu\sigma}R_\rho) + b'\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(Q^\nu - j^\nu), \quad (10)$$

$a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  are constant coefficients.

**Theorem 1.** For any  $ab \neq 0 \neq a'b'$  each of the set of equations

$$T_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad (11)$$

$$T'_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad (12)$$

is equivalent to the initial Maxwell equations (2).

One can easily verify the validity of this statement by rewriting the components of tensors  $T$ ,  $T'$  (11), (12) in the evident form.

Only the  $\tilde{P}$ -tensor set of equations (11) and  $\tilde{P}$ -pseudotensor set of equations (12) will be used in this work for the construction of  $\tilde{P}$ -vector  $L$ -approach for the electromagnetic field  $F = (\vec{E}, \vec{H})$ .

Let us introduce in addition to the Lagrange variables for tensor electromagnetic field new Lagrange variables  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}_{,\mu}$  which are dually conjugated to  $F$ ,  $F_{,\mu}$  (on the manifold  $\phi_0$  of the solutions of Maxwell's equations  $\bar{F} = \varepsilon F$  see (3)). The general form of  $\tilde{P}$ -vector Lagrange function

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu(F, F_{,\nu}, \bar{F}, \bar{F}_{,\nu}), \quad \mathcal{L}_\mu : R^{60} \rightarrow R^1 \quad (13)$$

up to a total 4-divergence terms is the following:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu = & a_1 F_{\mu\nu} Q^\nu + a_2 F_{\mu\nu} \bar{R}^\nu + a_3 \varepsilon F_{\mu\nu} R^\nu + a_4 \varepsilon F_{\mu\nu} \bar{Q}^\nu + a_5 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{Q}^\nu + \\ & + a_6 \bar{F}_{\mu\nu} R^\nu + a_7 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} \bar{R}^\nu + a_8 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} Q^\nu + (q_1 F_{\mu\nu} + q_2 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu}) j^\nu. \end{aligned} \quad (14)$$

Here we are using also notations

$$\bar{Q}^\mu \equiv \bar{F}_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad \bar{R}^\mu \equiv \bar{F}_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad \varepsilon \bar{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{F}_{\rho\sigma}. \quad (15)$$

**Theorem 2.** The EL equations for  $\tilde{P}$ -vector  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\mu)$  are equivalent to the Maxwell equations if and only if the following conditions on the coefficients in (14) are fulfilled

$$\begin{aligned} a_8 - a_2 = a = -b' = -q_1 \equiv -q = 0, \quad a_6 - a_4 = a' = -b \neq 0, \\ a_1 - a_3 - a_6 - a_8 = a_2 + a_4 + a_5 - a_7 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

**Proof.** The calculation of Lagrange derivatives  $\delta\mathcal{L}_\mu/\delta F_{\rho\sigma}$  and  $\delta\mathcal{L}_\mu/\delta \bar{F}_{\rho\sigma}$  from  $\mathcal{L}_\mu$  (14) leads to the result that the EL equations for the Lagrange vector (14) may coincide only with the equations (11), (12), and only in the following form

$$\delta\mathcal{L}_\mu/\delta F_{\rho\sigma} = T_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad \delta\mathcal{L}_\mu/\delta \bar{F}_{\rho\sigma} = T'_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad (17)$$

and it is possible only if the conditions (16) are fulfilled.  $\blacksquare$

The four component of the Lagrange vector (14) generate four actions

$$W^\mu(F, \bar{F}) = \int d^3x \mathcal{L}^\mu(F(x), \bar{F}(x), \partial_\nu F(x), \partial_\nu \bar{F}(x)), \quad (18)$$

where  $F, \bar{F}$  belong to the set  $\Phi$  of twice differentiable functions, and  $\Phi_0^\mu$  defines the set of extremals of the action (18) with a fixed  $\mu$ .

**Theorem 3.** *The intersection  $\Phi_0 = \cap_\mu \Phi_0^\mu$  of the sets  $\Phi_0^\mu$  of extremals of four actions (18) given by the Lagrange function  $\mathcal{L}_\mu$  (14) whose coefficients obey the equations (16), coincides with the set of solutions of Maxwell's equations (1).*

**Proof.** The validity of this theorem follows from the derivation of the evident form of EL equations for (14), i.e. from (17) and the theorem I about the equivalence of the systems of equations (11), (12) and the Maxwell equations (2), i.e. (1). ■

The  $\tilde{P}$ -vector Lagrangian (14), proposed here, has several advantages in comparison with the  $\tilde{P}$ -pseudovector Lagrangian from [3], which in our notation has the form

$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu}) = F^{\mu\nu} R_\nu - \varepsilon F^{\mu\nu} (Q_\nu - j_\nu). \quad (19)$$

Firstly, Lagrangian (19) leads only to the pseudotensor system of equations (12), i.e. it unreasonably separates the pseudo-tensor system of equations (12) in comparison with the tensor system of equations (11). That is a direct consequence of a pseudovector character of Lagrangian (19). Let us note, that without appealing to the additional Lagrange variable  $\bar{F}$  it is impossible to construct a  $\tilde{P}$ -vector Lagrange function: the demand of function  $\mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$  being a  $\tilde{P}$ -vector leads to the expression

$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu}) = F^{\mu\nu} Q_\nu + \varepsilon F^{\mu\nu} R_\nu, \quad (20)$$

for which the EL equations are the identities.

Secondly, as it is seen from the terms with the current in (19) the interaction Lagrangian in [3] also is a  $\tilde{P}$ -pseudovector one:

$$\mathcal{L}^I = \varepsilon F^{\mu\nu} j_\nu, \quad \mathcal{L}^{I_0} = \vec{j} \cdot \vec{H}, \quad \mathcal{L}^{I_i} = (\vec{j} \times \vec{E} - \rho \vec{H})^i. \quad (21)$$

A physically unsatisfactoriness of such an interaction is evident already from the fact, that density of electric charge in (21) is connected not with the electric field strengths but with the magnetic field strength  $\vec{H}$ .

Finally, thirdly, during the derivation of conserved quantities the Lagrange function (19) put into correspondence for  $\tilde{P}$ -tensor generator of the Poincaré group a pseudo-tensor conserved currents. This shortcoming together with the above mentioned ones, is overcome using the  $\tilde{P}$ -vector Lagrange function (14).

Derivation of conservation quantities in the framework of  $L$ -approach formulating here inquires a generalization of Noether theorem for the case of vector Lagrangians.

**Theorem 4.** *Let*

$$\hat{q} : F(x) \rightarrow F'(x) = \hat{g}F(x) \quad (22)$$



be the arbitrary transformation of invariance of equations (2) with  $j = 0$ . Then the tensor of current  $\theta_\nu^\mu$ , constructed on the basis of  $\mathcal{L}_\mu$  (14) (of course with  $j = 0$ ) according to the formula

$$\hat{q} \rightarrow \theta_\nu^\mu \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial F^{\rho\sigma}} F'^{\rho\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial \bar{F}^{\rho\sigma}} \bar{F}'^{\rho\sigma} \right), \tag{23}$$

$$F' \equiv \hat{q}F, \quad \bar{F}' \equiv \hat{q}\bar{F} = \varepsilon \hat{q}F.$$

is symmetric and its divergence vanishes for any solution of the equation (2) with

$$\partial_\mu \theta_\nu^\mu = 0. \tag{24}$$

**Proof.** Derivation of currents (23) for  $\mathcal{L}_\mu$  (14) with  $j = 0$  leads to the result

$$\hat{q} \rightarrow \theta_\nu^\mu = A \left( F^{\mu\alpha} F'_{\alpha\nu} + F'^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \right), \tag{25}$$

$$A = a_1 - a_2 + a_7 - a_8 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$$

Symmetry of the tensor (25) is evident and the equation (24) is a consequence of the Maxwell equations (2) with  $j = 0$ . ■

Note that in the vector  $L$ -approach the four conservation quantities correspond (according to the Noether theorem) to one generator of invariance transformation.

Let us give the analysis of conserved quantities which are the consequences of (25). We receive, taking  $A = 1$ , that generators of 4-translations  $\partial_\rho$  according to the formula (25) give the trivial current

$$\partial_\rho \rightarrow \theta^{\mu\nu}(\hat{q} = \partial_\rho) = (\partial_\rho)^{\mu\nu} \equiv \partial_\rho T^{\mu\nu}, \tag{26}$$

where  $T^{\mu\nu}$  is standard energy-moment tensor for the field

$$T_\nu^\mu = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad T_\mu^0 = \mathcal{P}_\mu, \tag{27}$$

$$\mathcal{P}_0 \equiv \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \quad \mathcal{P} \equiv (\vec{E} \times \vec{H})_j. \tag{28}$$

For the analysis of integral conserved quantities

$$\bar{\theta}^\mu = \int d^3x \theta^{0\mu}(x) = \text{const}, \quad \theta^{0\mu}(x) = \theta^{0\mu}(\hat{q}) \equiv (\hat{q}^{0\mu}) \tag{29}$$

it is sufficient to represent the densities  $\theta^{0\mu}$ , omitting the terms with spacelike derivatives, which do not contribute to the integral  $\bar{\theta}^\mu$  (29). We obtain from the formula (25) for the densities  $\theta^{0\mu}$ , corresponding to the rest of the generators of conformal algebra  $C(1,3)$  (the definition of algebra  $C(1,3)$  see, for example in [5]) the following expressions:

$$\hat{j}_{\rho\sigma} \rightarrow J_{\rho\delta}^{0\mu} = \delta_\rho^\mu \mathcal{P}_\sigma - \delta_\sigma^\mu \mathcal{P}_\rho, \quad d \rightarrow D^{0\mu} = \mathcal{P}^\mu, \tag{30}$$

$$\hat{K}_\rho \rightarrow K_\rho^{0\mu} = 2(\delta_\rho^\mu \mathcal{D} + \mathcal{J}_{\rho\sigma} \mathcal{G}^{\delta\mu}), \tag{31}$$

where

$$\mathcal{D} \equiv x^\mu \mathcal{P}_\mu, \quad \mathcal{J}_{\rho\sigma} \equiv x_\rho \mathcal{P}_\sigma - x_\sigma \mathcal{P}_\rho. \tag{32}$$

As one can see,  $C(1,3)$ -generators  $\hat{q} = (\hat{\partial}, \hat{j}, \hat{d}, \hat{k})$  lead here to the conserved quantities, which are expressed in terms of well-known series of main conservation quantities for the electromagnetic field  $F = (\vec{E}, \vec{H})$ , found by Bessel-Hagen [6] on the basis of  $L$ -approach for vector field  $A = (A^\mu)$  of potentials, namely:

$$\begin{aligned} P_\rho &= \int d^3x P_\rho(x), & J_{\rho\sigma} &= \int d^3x (x_\rho P_\sigma(x) - x_\sigma P_\rho(x)), \\ D &= \int d^3x \mathcal{D}(x), & K_\rho &= \int d^3x (2x_\rho \mathcal{D}(x) - x^2 P_\rho(x)). \end{aligned} \quad (33)$$

It is interesting to note, that according to the formula (25) the duality transformation  $\varepsilon$  gives identically zero. Nontrivial conservation laws are given here by the generators of the algebra  $A_{32} \supset C(1,3)$  of invariance of free Maxwell's equations (1) found in [1], which has the form of composition  $\hat{q}' = \varepsilon \hat{q}$  of  $C(1,3)$  generators  $\hat{q}$  and the generator  $\varepsilon$ . Integral conserved quantities, which are found on the basis of formulae (23) or (25) and (29) for  $\varepsilon C(1,3)$ -generators  $\hat{q}' = (\varepsilon \hat{\partial}, \varepsilon \hat{j}, \varepsilon \hat{d}, \varepsilon \hat{K})$  are expressed in terms of series

$$\begin{aligned} Z_\rho^\mu &= \int d^3x Z_\rho^\mu(x), & Z_{\rho\sigma}^\mu &= \int d^3x (x_\rho Z_\sigma^\mu - x_\sigma Z_\rho^\mu), \\ Z^\mu &= \int d^3x x^\nu Z_\nu^\mu(x), & Z_\rho^\mu &= \int d^3x (2x_\rho x^\sigma Z_\sigma^\mu - x^2 Z_\rho^\mu), \end{aligned} \quad (34)$$

of conserved quantities having polarization nature, of Lipkin [7] and others [8–10] (in [7–10] the conservation laws (34) were found without using the  $L$ -approach and Noether theorem). In (34) the densities  $Z$  of conserved quantities are expressed in the terms of Lipkin's Zilch tensor

$$Z_\rho^\mu \equiv Z_\rho^{0|\mu}, \quad Z_\rho^{\nu|\mu} = F^{\nu\alpha} \varepsilon F_{\alpha\rho}^{\cdot\mu} - \varepsilon F^{\nu\alpha} F_{\alpha\rho}^{\cdot\mu}. \quad (35)$$

1. Krivsky I.Y., Simulik V.M., *Ukrain. Fiz. Zh.*, 1985, **30**, 1457.
2. Krivsky I.Y., Simulik V.M., *Voprosy Atomn. Nauky Techn. Series: Obshchaya Yadern. Fiz.*, 1986, **34**, 20.
3. Sudbery A., *J. Phys. A*, 1986, **19**, L33.
4. Fushchych W.I., Krivsky I.Y., Simulik V.M., On vector Lagrangians for the electromagnetic and spinor fields, Preprint 87.54, Acad. Sci. Ukr. SSR., Ins. Mathematics, 1987.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983 (engl. transl. Dordrecht, Reidel, 1987).
6. Bessel-Hagen E., *Math. Ann.*, 1921, **84**, 258.
7. Lipkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 696.
8. Lipkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 879.
9. Kibble T.W.B., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 1022.
10. Fairlie D.B., *Nuovo Cim.*, 1965, **37**, 897.

# Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

The notion of the conventional invariance of differential equation is introduced. Some exact families of solutions of the nonlinear equation of acoustics are constructed.

В работах [1, 2] предложен следующий подход к решению нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Предположим, что некоторое ДУЧП не обладает нетривиальной группой инвариантности. Для построения решений уравнения присоединяем к нему такое дополнительное ДУЧП, чтобы полученная (переопределенная) система обладала широкими симметричными свойствами, если это удастся сделать, то далее, воспользовавшись симметричными свойствами системы, строим решения переопределенной системы ДУЧП.

В основе нелинейной акустики лежит уравнение (см., например, [3, 4])

$$L(u) = u_{00} - c(\mathbf{x}, u, u_1) \Delta u = 0, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \quad x_0 \equiv t, \quad u \equiv u(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_1, u_2$  — совокупность всех производных 1-го и 2-го порядка,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $c(\mathbf{x}, u, u_1)$  — произвольная гладкая функция.

Олвер и Розенау [4] построили семейства точных решений одномерного уравнения акустики вида

$$L(u) = u_{00} - uu_{11} = 0, \quad \Delta u \equiv u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad c(\mathbf{x}, u, u_1) = u. \quad (2)$$

Реализуем приведенный алгоритм для одномерного уравнения (2) и построим в явном виде классы точных решений уравнения (2). Решения, полученные в [4], входят в эти классы. Кроме того, многие наши результаты обобщаются на многомерные уравнения.

**Определение.** Пусть оператор первого порядка

$$Q = \xi^\mu(\mathbf{x}, u) \partial_\mu + \eta(\mathbf{x}, u) \partial_u, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

не принадлежит алгебре инвариантности уравнения (1). Будем говорить, что уравнение (1) условно инвариантно относительно оператора  $Q$ , если его соответствующее продолжение  $\tilde{Q}$  удовлетворяет условию

$$\tilde{Q}L(u, u_1, u_2) = \lambda_0 L(u, u_1, u_2) + \lambda_1 L_1(u, u_1, u_2), \quad (4)$$

$$L_1(u, u_1, u_2) = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{Q}L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1, \quad (6)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — некоторые функции от  $u, u_1, u_2$ .

Соотношение (5) представляет собой дополнительное условие к исходному уравнению (1), при котором уравнение (1) инвариантно относительно оператора  $Q$ . Формула (6) выражает тот факт, что дополнительное уравнение (5) инвариантно относительно оператора  $Q$ . Очевидно, что определение условий инвариантности содержательное только в том случае, когда уравнения (1), (5) совместны. Дополнительное условие (5) выделяет из всего множества решений уравнения (1) некоторое подмножество, которое имеет более широкую симметрию, чем все множество решений.

В общем случае построить в явном виде оператор  $Q$  и уравнение (5) трудно. Эта задача существенно упрощается, если в качестве условия (5) выбрать уравнение

$$Qu = 0. \quad (7)$$

В этом случае (4) имеет вид

$$\tilde{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1 (Qu). \quad (8)$$

Формула (8) дает конструктивный алгоритм для нахождения явного вида оператора  $Q$ .

С помощью алгоритма С. Ли можно показать, что уравнение (1) не инвариантно относительно преобразований Галилея. Выделим из множества решений уравнения (1) подмножество, которое инвариантно относительно преобразований Галилея.

**Теорема 1.** Уравнение (1) условно инвариантно относительно операторов Галилея

$$G_a = x_0 \partial_a + m x_a \partial_u, \quad m = \text{const}, \quad (9)$$

если

$$c(x, u, u_1) = F(\vec{v}, \vec{\nabla} v_2) + \frac{\vec{x}^2}{n x_0^2}, \quad n = 3, \quad (10)$$

где  $F$  — произвольная гладкая функция, вектор  $\vec{v}$  задается выражениями

$$v_1 = x_0, \quad v_2 = u - \frac{m \vec{x}^2}{2 x_0}, \quad v_3 = u_0 + \frac{(\vec{\nabla} u)^2}{2m}. \quad (11)$$

Дополнительное условие (7) имеет вид

$$G_a u = 0. \quad (12)$$

Доказательство теоремы (1) опускаем, поскольку оно сводится к применению хорошо известного (см., например, [5]) метода С. Ли к системе (1), (12).

Из уравнения (12) получаем анзац

$$u = \varphi(x_0) + \frac{m \vec{x}^2}{2 x_0}, \quad (13)$$

который редуцирует уравнение (1), (10) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x_0 \ddot{\varphi}(x_0) = n m F(x_0, \varphi, \dot{\varphi}).$$

Остановимся теперь подробно на одномерном уравнении (2). Оператор  $Q$  ищем в виде

$$Q = A(\mathbf{x})\partial_0 + B(\mathbf{x})\partial_1 + (a(\mathbf{x})u + b(\mathbf{x}))\partial_u, \quad (14)$$

$\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ ,  $A, B, a, b$  — гладкие функции  $\mathbf{x}$ .

**Теорема 2.** Уравнение (2) условно инвариантно относительно оператора (14), если функции  $A, B, a, b$  удовлетворяют следующей системе уравнений.

Случай 1.  $A \neq 0, B \neq 0$ .

$$\begin{aligned} a &= 2 \left( B_1 - A_0 + \frac{B}{A} A_1 \right), \quad b = 2 \frac{B}{A} B_0, \\ a_{00} + 2 \frac{a}{A} a_0 - \left[ \frac{a}{A} A_{00} + 2 \left( \frac{a}{A} \right)_1 B_0 \right] &= b_{11} - \left[ \frac{b}{A} A_{11} + 2 \left( \frac{b}{A} \right)_1 A_1 \right], \\ a_{11} = \frac{a}{A} A_{11} + 2 \left( \frac{a}{A} \right)_1 A_1, \quad b_{00} = -2 \frac{b}{A} a_0 + \left[ \frac{b}{A} A_{00} + 2 \left( \frac{b}{A} \right)_1 B_0 \right], \\ B_{11} - 2a_1 - \left[ \frac{B}{A} A_{11} + 2 \left( \frac{B}{A} \right)_1 A_1 \right] + 2 \frac{a}{A} A_1 &= 0, \\ B_{00} + 2 \frac{B}{A} a_0 - \left[ \frac{B}{A} A_{00} + 2 \left( \frac{B}{A} \right)_1 B_0 \right] + 2 \frac{a}{A} B_0 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Индексы внизу означают соответствующую производную.

Случай 2.  $A = 0, B \neq 0$ . Не умаляя общности, можно положить  $B = 1$ .

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad a_{11} + 3aa_1 + a^3 = 0, \quad b_{00} - bb_1 - ab^2 = 0, \\ b_{11} + ab_1 + (3a_1 + 2a^2)b = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Случай 3.  $A = 1, B = 0$ .

$$a_1 = 0, \quad a_{00} + aa_0 - a^3 = b_{11}, \quad b(b_0 + ab) = 0, \quad b_{00} + a_0b - a^2b = 0. \quad (17)$$

Доказательство теоремы основано на использовании формулы (8), ввиду громоздкости его не приводим.

Для построения явного вида операторов  $Q$  необходимо решить системы уравнений (15)–(17). В общем случае это не удастся сделать, поскольку они представляют собой нелинейную систему ДУЧП. Однако семейства частных решений системы (15)–(17) удалось построить. Явный вид этих решений и соответствующие им анзацы, которые редуцируют уравнение (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению, приведены в таблице, где приняты следующие обозначения:  $a_i, b_i$  — произвольные постоянные,  $i = \overline{1, 10}$ ;  $W(x_0)$  — функция Вейерштрасса, т.е. решения уравнения

$$\ddot{W} = W^2, \quad W = W(x_0), \quad (18)$$

Оператор $Q$	Анзац	Редуцированное уравнение
$\partial_1 + a_1 \partial_u$	$u = \varphi(x_0) + a_1 x_1$	$\varphi'' = 0$
$\partial_0 + (a_2 x_1 + a_3) \partial_u$	$u = \varphi(x_1) + x_0(a_2 x_1 + a_3)$	$\varphi'' = 0$
$\partial_0 + (a_4 x_0 + a_5) \partial_1 + 2a_4(a_4 x_0 + a_5) \partial_u$	$u = \varphi(\omega) + 2a_4 x_1$	$(\varphi - 2a_4 \omega - a_5^2) \varphi'' = a_4 \varphi'$
$\partial_1 + [W(x_0)x_1 + f(x_0)] \partial_u$	$u = \frac{1}{2} W(x_0)x_1^2 + f(x_0)x_1 + \varphi(x_0)$	$\varphi'' = W\varphi$
$x_0 \partial_0 + (u + a_7 x_1 + a_8) \partial_u$	$u = x_0 \varphi(x_1) - (a_7 x_1 + a_8)$	$\varphi'' = 0$
$x_0 \partial_0 + [x_0^3(a_9 x_1 + a_{10}) - 2u] \partial_u$	$u = x_0^{-2} \varphi(x_1) + \frac{1}{5} x_0^3(a_9 x_1 + a_{10})$	$\varphi'' = 6$
$x_1 \partial_1 + (u + b_1 x_0 + b_2) \partial_u$	$u = x_1 \varphi(x_0) - (b_1 x_0 + b_2)$	$\varphi'' = 0$
$x_1 \partial_1 + [u + \frac{1}{2} W(x_0)x_1^2 - f(x_0)] \partial_u$	$u = \frac{1}{2} W(x_0)x_1^2 + \varphi(x_0)x_1 + f(x_0)$	$\varphi'' = W\varphi$
$(x_0^2 - 1) \partial_0 + 2x_1 \partial_1 + (x_0 + 1)u \partial_u$	$u = (x_0 - 1) \varphi\left(\frac{x_0+1}{x_0-1} x_1\right)$	$\varphi'' = 0$
$x_0^3 \partial_0 + (3x_0^2 u - 15x_1^2 + b_3 x_1 + b_4) \partial_u$	$u = x_0^3 \varphi(x_1) + 3x_0^{-2} x_1^2 - \frac{1}{5} x_0^{-2} (b_3 x_1 + b_4)$	$\varphi'' = 0$
$x_0^2 x_1 \partial_1 + (x_0^2 u + 3x_1^2 + b_5 x_0^5 + b_6) \partial_u$	$u = x_1 \varphi(x_0) + 3x_0^{-2} x_1^2 - b_5 x_0^2 - b_6 x_0^{-2}$	$x_0^2 \varphi'' = 64$
$W(x_0) \partial_0 + W(x_0)u \partial_u$	$u = W(x_0) \varphi(x_1)$	$\varphi'' = 1$
$F(x_0) \partial_0 + [F(x_0)u + \frac{1}{2} x_1^2 + b_7 x_1 + b_8] \partial_u$	$u = F(x_0) \varphi(x_1) + \left(\frac{x_1^2}{2} + b_7 x_1 + b_8\right) F(x_0) \int F^{-2}(x_0) dx_0$	$\varphi'' = b_9$

$f(x_0)$  — решение уравнения Ламе

$$\ddot{f} = Wf, \quad (19)$$

$F(x_0)$  — решение уравнения

$$\ddot{F} = F^2 \left\{ \int F^{-2}(x_0) dx_0 + b_9 \right\}, \quad (20)$$

$\varphi$  — неизвестная функция, подлежащая определению,

$$\omega = \frac{1}{4}a_4x_0^2 + a_5x_0 - x_1.$$

Проинтегрировав редуцированные уравнения (см. колонку 4 таблицы) и подставив эти решения в соответствующие анзацы, получаем следующие классы точных решений нелинейного уравнения акустики (2):

$$\begin{aligned} u &= P_1(x_0)Q_1(x_1), \quad u = x_0^{-2} \{3x_1^2 + Q_1(x_1)\} + x_0^3 R_1(x_1), \\ u &= \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 + f^{-1}(x_0)x_1 + f^2(x_0), \\ u &= \varphi(\omega) + a_4x_0(a_4x_0 + 2a_5), \\ u &= \left\{ P_2(x_1) + Q_2(x_1) \int F^{-2}(x_0) dx_0 \right\} F(x_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $P_k(x)$ ,  $Q_k(x)$ ,  $R_k(x)$  — произвольные многочлены степени  $k$  ( $k = 1, 2$ ),  $f^k(x_0)$  — решения уравнения Ламе (19),  $\varphi(\omega)$  и  $\omega$  приведены в строке 3 таблицы.

В том частном случае, когда  $a_4 = 2$ ,  $a_5 = 0$ , оператор  $Q_3$  (см. строку 3 таблицы) совпадает с оператором работы [4].

Все результаты, полученные выше для одномерного уравнения (2), обобщаются на многомерное нелинейное уравнение акустики.

1. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
2. Фушич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–6.
3. Ames W.F., *Nonlinear partial differential equations in engineering*, New York, Academic Press, 1965, 495 p.
4. Olver P.J., Rosenau P., The construction of special solutions to partial differential equations, *Physics Letters A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1987, 400 с.

# Об условной инвариантности нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Монжа–Ампера относительно конформной алгебры

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Показано, что уравнения Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Монжа–Ампера условно инвариантны относительно конформной алгебры. Приведены некоторые конформно-инвариантные решения этих уравнений.

Рассмотрим нелинейное уравнения Даламбера

$$\square u + \lambda_1 u^k = 0, \quad (1)$$

Лиувилля

$$\square u + \lambda_2 \exp u = 0, \quad (2)$$

Борна–Инфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu) \square u + u^{\mu\nu} u_\nu u_\mu = 0, \quad (3)$$

Монжа–Ампера

$$|u_{\mu\nu}| = 0, \quad (4)$$

где  $u \equiv u(x) \in R_1$ ,  $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{n+1}$ ,  $u_\mu = \partial u / \partial x_\mu$ ,  $u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu$ ,  $u_{\mu\nu} = \partial^2 u / \partial x_\mu \partial x_\nu$ ,  $g^{\mu\nu}$  — метрический тензор пространства  $R_{n+1}$  с сигнатурой  $(+, -, \dots, -)$ ,  $|u_{\mu\nu}|$  — определитель, составленный из вторых производных функции  $u$ ;  $\mu, \nu = \overline{0, n}$ , по повторяющимся индексам предполагается суммирование,  $\lambda_1, \lambda_2, k$  — постоянные.

Рассмотрим также конформную алгебру  $C(1, n+1)$ , базисные операторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} P_a &= g^{AB} \partial_B \equiv g^{AB} \frac{\partial}{\partial x_B}, & J_{AB} &= x_A P_B - x_B P_A, & D &= x_A P_A, \\ K_A &= 2x_A D - x_B x^B P_a, & A, B &= \overline{0, n+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

и ее подалгебру

$$\begin{aligned} P_\mu &= g^{\mu\nu} \partial_\nu, & J_{\mu\nu} &= x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, & D &= x_A P_A, \\ K_\mu &= 2x_\mu D - x_B x^B P_\mu, & \mu, \nu &= \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $g^{AB}$  — метрический тензор пространства  $R_{1+n+1}$  с сигнатурой  $(+, -, \dots, -)$ .



Известно (см. [1–3]), что только при  $k = \frac{n+3}{n-1}$  ( $n \neq 1$ ) уравнение (1) инвариантно относительно конформной алгебры, а уравнения (2)–(4) конформно неинвариантны.

В настоящей работе показано, что уравнения (1)–(4) условно инвариантны (понятие условной инвариантности см. [4]) относительно конформной алгебры (5) или (6). Получены некоторые конформно-инвариантные решения этих уравнений.

**Теорема 1.** Уравнение (1) инвариантно относительно конформной алгебры (6) при условии:

$$\begin{aligned} u_\nu u^\nu &= \lambda_3^2 u^{k+1}, \\ \lambda_3^2 &= 2\lambda_1[n(k-1) - k - 1]^{-1}, \quad k \neq 1, \frac{n+3}{n-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

причем в формулах (6)  $x_{n+1} = 2u^{(1-k)/2}/\lambda_3(1-k)$ .

**Доказательство.** Нам необходимо доказать, что

$$\begin{aligned} X_2(\square u + \lambda_1 u^k) &= \tau_1(\square u + \lambda_1 u^k) + \tau_2(u_\nu u^\nu - \lambda_3^2 u^{k+1}), \\ X_1(u_\nu u^\nu - \lambda_3^2 u^{k+1}) &= \tau_3(u_\nu u^\nu - \lambda_3^2 u^{k+1}), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  — некоторые функции,  $X$  — инфинитизимальный оператор алгебры (6).  $X_1$  и  $X_2$  — первое и второе продолжения оператора  $X$ .

Согласно определению (см. [5]) инфинитизимальный оператор алгебры (6) имеет вид

$$X = \xi^\mu(x, u)\partial_\mu + \eta(x, u)\partial_u, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \xi^\mu(x, u) &= 2x_\mu b_\nu x^\nu - b_\mu \left( x_\nu x^\nu - \frac{4u^{1-k}}{\lambda_3^2(1-k)^2} \right) + c_{00}x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ \eta(x, u) &= 2(2b_\nu x^\nu + c_{00})u/(1-k), \end{aligned} \quad (10)$$

$b_\mu, c_{00}, c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}, d_\mu$  — параметры,  $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$ ,  $\mu, \nu = \overline{0, n}$ .

Первое и второе продолжения оператора  $X$  строятся по следующим формулам:

$$X_1 = X + \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta^\mu &= \frac{4u^{-k}}{\lambda_3^2(k-1)}(b_\nu u_\nu u_\mu - \lambda_3^2 b^\mu u^{k+1}) + 2\frac{k+1}{k-1}(2b_\nu x^\nu + c_{00}u_\mu) - \\ &- (2b^\mu x_\nu - 2b^\nu x_\mu + c_{\mu\nu})u_\nu; \end{aligned}$$

$$X_2 = X_1 + \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} = & 2 \frac{1+k}{1-k} (b_\mu u_\nu + b_\nu u_\mu) + \frac{2k}{1-k} (2b_\nu x^\nu + c_{00}) u_{\mu\nu} + \frac{4u^{-k} b_\alpha}{\lambda_3^2 (k-1)} \times \\ & \times (u_\mu u_{\nu\alpha} + u_\nu u_{\mu\alpha}) + \frac{2u^{-k-1}}{\lambda_3^2 (k-1)} b_\alpha u_\alpha [2u_{\mu\nu} - 2k u_\mu u_\nu + (k-1) \lambda_3^2 u^{k+1} g^{\mu\nu}] - \\ & - (2b_\alpha x^\nu - 2b^\nu x_\alpha + c_{\alpha\nu}) u_{\mu\alpha} - (2b_\alpha x^\mu - 2b^\mu x_\alpha + c_{\alpha\mu}) u_{\nu\alpha}. \end{aligned}$$

Искользуя формулы (9)–(12), убеждаемся в выполнении условий (8). Теорема доказана.

**Теорема 2.** Уравнение Лиувилля (2) инвариантно относительно конформной алгебры (6) при условии

$$u_\nu u^\nu = \frac{2\lambda_2}{n-1} \exp u \quad (n \neq 1), \quad (13)$$

причем в формулах (6)  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\lambda_2 \exp u}}$ .

**Теорема 3.** Уравнение  $\square u = F(u)$  инвариантно относительно конформной алгебры (6) при условии  $u_\nu u^\nu = G(u)$ , причем  $F(u) = n/\Phi\Phi' - \Phi''/(\Phi')^3$ ,  $G(u) = (\Phi')^{-2}$  в формулах (6)  $x_{n+1} = \Phi$ ,  $\Phi = \Phi(u)$  — произвольная дифференцируемая функция.

**Замечание 1.** Система уравнений

$$\begin{aligned} \square u &= n/\Phi(u)\Phi'(u) - \Phi''(u)/[\Phi'(u)]^3, \\ u_\nu u^\nu &= [\Phi'(u)]^{-2}, \end{aligned}$$

заменой  $w = \Phi(u)$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \square w &= n/w, \\ w_\nu w^\nu &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Конформная вариантность системы уравнений (14) установлена в работе [6].

**Теорема 4.** Уравнения Борна–Инфельда (3) и Монжа–Ампера (4) инвариантны относительно конформной алгебры (5) при условии

$$u_\nu u^\nu = 1, \quad (15)$$

причем в формулах (5)  $x_{n+1} = u$ .

Теоремы 2–4 доказываются аналогично теореме 1.

**Замечание 2.** Уравнения Борна–Инфельда (3) и Монжа–Ампера (4) являются дифференциальными следствиями уравнения эйконала (15). Для уравнения (4) этот факт доказан в [6], а для уравнения (3) следует из формулы

$$(1 - u_\nu u^\nu) \square u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \left( \square u - \frac{1}{2} u^\mu \partial_\mu \right) (1 - u_\nu u^\nu).$$

В силу замечания 2 такими решениями для уравнений (3) и (4) будут конформно инвариантные решения уравнения эйконала (15). Например, используя инварианты конформной алгебры (5), получаем следующий анзац

$$x_{n+1} = \sqrt{x_\nu x^\nu - \beta_\nu x^\nu \varphi(\omega)}. \quad (16)$$

Из (16) получается точное решение системы ДУЧП (14) вида

$$x_{n+1} \equiv w = \sqrt{x_\nu x^\nu + \gamma_\nu x^\nu}, \quad \gamma_\nu \gamma^\nu = 0.$$

1. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
2. Фушич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 679–682.
3. Фушич В.И., Серов Н.И., О некоторых точных решениях многомерного нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа, *Докл. АН СССР*, 1984, **278**, № 4, 847–851.
4. Фушич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint Institute for Mathematics and Applications, University of Minnesota, 1988, 5 p.

# Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності

В.І. ФУЩИЧ, М.І. СЕРОВ, В.І. ЧОПИК

A concept on the conditional invariance is introduced. It is proved that nonlinear heat conduction equation does not contradict the Galilean relativity principle, provided that its solutions satisfy the Hamilton–Jacobi equation.

Прийнято вважати, що нелінійні процеси тепломасопереносу описуються рівнянням

$$u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ c(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} = 0, \quad u \equiv u(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

$$u_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad x_0 \equiv t, \quad c(u) \neq \text{const}, \quad a = 1, 2, 3,$$

В [1] звернено увагу на те, що серед множини нелінійних рівнянь (1) не існує ні одного рівняння, для якого виконувався б принцип відносності Галілея, тобто рівняння (1) не інваріантне відносно операторів Галілея

$$G_a = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a u \frac{\partial}{\partial u}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Лінійне рівняння (1) (випадок  $c(u) = \text{const}$ ) інваріантне відносно операторів (2), які породжують перетворення Галілея

$$x'_a = x_a + v_a t, \quad (3)$$

$v_a$  — швидкість інерційної системи відліку  $K'$ , що рухається відносно системи  $K$  зі швидкістю  $v_a$ .

Із сказаного випливає [2], що або рівняння (1) непридатне для описування нелінійних процесів теплопровідності і його необхідно замінити іншим, або з множини розв'язків (1) потрібно виділити таку підмножину, яка була б інваріантною відносно перетворень Галілея.

Нижче реалізуємо другу можливість, тобто покажемо, що якщо до рівняння (1) дописати певну додаткову умову, то (1) разом з додатковим рівнянням, інваріантне відносно операторів типу (2).

Розглянемо диференційне рівняння в частинних похідних (ДРЧП)

$$L(\mathbf{x}, u, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}(n+1), \quad (4)$$

$$u_1 \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad u_2 \equiv \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_0}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n} \right), \dots$$

**Означення 1 (С. Лі).** Рівняння (4) інваріантне відносно операторів

$$X = \xi_\mu(\mathbf{x}, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(\mathbf{x}, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

якщо

$$\tilde{X}L \Big|_{L=0} = 0, \quad \text{або} \quad \tilde{X}L = \lambda(\mathbf{x}, u, u_1, \dots, u_n)L,$$

де  $\tilde{X}$  — відповідне продовження оператора  $X$ ,  $\lambda$  — довільна неперервно-диференційовна функція.

Нехай деякий оператор  $Q$  не належить алгебрі інваріантності рівняння (4) і його продовження задається формулою

$$\tilde{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1 L, \quad (6)$$

$$\tilde{Q}L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1, \quad (7)$$

$$L_1 \equiv L_1(\mathbf{x}, u, u_1, \dots, u_n) = 0, \quad (8)$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — довільні неперервно-диференційовні функції.

**Означення 2.** Будемо казати, що рівняння (4) умовно інваріантне, якщо воно разом з рівнянням (8) інваріантне відносно оператора  $Q$ , тобто виконуються умови (6), (7).

Додаткова умова (рівняння) виділяє із всієї множини розв'язків такі підмножини, які мають більш широкую симетрію, ніж вся множина розв'язків рівняння (4).

**Означення 3 [3].** Рівняння (4) назовемо  $Q$ -інваріантним, якщо

$$\tilde{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1(Qu). \quad (9)$$

Зрозуміло, що (9) це більш сильна умова, ніж (7). В [3] умова (9) використана для побудови точних розв'язків деяких нелінійних хвильових рівнянь.

**Теорема 1.** Рівняння (1) умовно інваріантне відносно операторів

$$G_a = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + M(u)x_a \frac{\partial}{\partial u}, \quad (10)$$

якщо (8) має вигляд

$$u_0 + \frac{1}{2}M^{-1}(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \quad (11)$$

$$M(u) = \frac{1}{2}uc^{-1}(u). \quad (12)$$

Для доведення теореми необхідно побудувати друге продовження оператора (10) і використати формулу (7). Звідси одержимо, що рівняння (1) буде умовно інваріантним, якщо рівняння (8) має вигляд (11), (12).

Для завершення доведення залишилося перевірити, що рівняння (11) інваріантне відносно операторів  $G_a$ , тобто

$$\tilde{G}_a \left\{ u_0 + \frac{1}{2}M^{-1}(u)(\vec{\nabla}u)^2 \right\} = 0. \quad (13)$$

У справедливості (13) легко пересвідчитись нескладними підрахунками. Таким чином теорему доведено.

**Теорема 2.** Рівняння (1)  $Q$ -інваріантне, якщо

$$c(u) = \frac{1}{2}m^{-1}u^r, \quad M(u) = 2mr^{-n-2}u^{1-r}, \quad (14)$$

де  $n$  — число просторових змінних (1),  $m \neq 0$ ,  $r \neq -2n^{-1}$  — довільні постійні.

**Наслідок 1.** Принцип відносності Галілея виконується для такої перевизначної системи:

$$\begin{aligned} u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ c(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} &= 0, \\ u_0 + \frac{1}{2}M^{-1}(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $M(u)$  визначається за формулою (12).

**Зауваження 1.** Система (15) заміною

$$W = 2m \int \frac{c(u)}{u} du \quad (16)$$

зводиться до системи рівнянь Лапласа і Гамільтона–Якобі

$$\begin{aligned} \Delta W &= 0, \\ W_0 + \frac{(\vec{\nabla} W)^2}{2m} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

**Теорема 3.** Максимальною (у розумінні С. Лі) алгеброю інваріантності рівняння (17) є розширена алгебра Галілея  $G_1(1, n+1)$  з базисними операторами

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_{n+1} = \frac{\partial}{\partial W}, \quad I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \\ D^1 &= 2x_0 P_0 + x_a P_a, \quad D^2 = 2W P_{n+1} + x_a P_a, \\ G_a^1 &= x_a P_a + m x_a P_{n+1}, \quad G_a^2 = W P_a + m x_a P_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Всі наведені теореми доводяться стандартним методом Лі.

**Теорема 4.** Рівняння (1) умовно інваріантне відносно операторів

$$G_a^2 = u \frac{\partial}{\partial x_a} + m x_a \frac{\partial}{\partial x_0}. \quad (19)$$

Умова (8) має вигляд

$$u_0 + \frac{1}{2m} \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0. \quad (20)$$

**Доведення.** Побудуємо друге продовження операторів (19) і подіємо ним на (1). Одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{G}_a^2 \left\{ u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a} \left( c(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) \right\} &= - \frac{\partial u}{\partial x_a} \left\{ u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a} \left( c(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) \right\} - \\ &- \frac{2c'(u)}{m} \frac{\partial u}{\partial x_a} \left\{ u_0 + \frac{1}{2m} \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} - 2mc(u) \left\{ u_0 + \frac{1}{2m} \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Із інваріантності рівняння Гамільтона–Якобі відносно  $G_a^2$  і (21) випливає справедливність теореми.

**Наслідок 2.** *Оператори  $G_a^2$  породжують такі скінченні перетворення:*

$$\begin{aligned}x'_0 &= \frac{m}{2}\tau^2 u + m\tau_a\tau_a + x_0, \\x'_a &= \tau_a u + x_a, \\u' &= u, \quad \tau^2 = \tau_a\tau_a, \quad \tau_a \text{ — груповий параметр.}\end{aligned}\tag{22}$$

Відзначимо, що перетворення (22) одержуються із стандартних перетворень Галілея заміною  $u \rightarrow x_0$ ,  $x_0 \rightarrow u$ .

**Теорема 5.** *Система рівнянь*

$$\begin{aligned}u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ c(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} &= 0, \\u_0 + \frac{1}{2m} \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} &= 0,\end{aligned}$$

при  $c(u) = \{(2n + n)m\}^{-1}u$  інваріантна відносно алгебри Лі з базовими операторами:

$$\begin{aligned}P_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad D^1 = 2x_0 P_0 + x_a P_a, \\D^2 &= 2u \frac{\partial}{\partial u} + x_a P_a, \quad G_a^2 = u P_a + m x_a P_0, \quad A = u^2 \frac{\partial}{\partial u} + u x_a P_a + \frac{m}{2} \mathbf{x}^2 P_0, \\K_a &= x_a x_0 P_0 + x_a x_b P_b + \left( \frac{x_0 u}{m} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 \right) P_a + x_a u \frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{x}^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2.\end{aligned}$$

Доведення теореми проводиться методом Лі.

1. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
2. Фушич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
3. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equation with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.

# О симметричных свойствах комплексно-значных нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

1. В квантовой теории для описания заряженного скалярного поля [1] широко используется уравнение Даламбера для комплексной функции. В настоящей работе исследованы симметричные свойства нелинейного волнового уравнения

$$\begin{aligned} \square u + F(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) &= 0, \\ \square u^* + F^*(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и его обобщения

$$\begin{aligned} L(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*, u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}^*) &= g^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)u_{\mu\nu} + \\ &+ \tilde{g}^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)u_{\mu\nu}^* + b(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) = 0, \\ L^*(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*, u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}^*) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u = u(x)$  — комплексная функция действительного переменного  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ; звездочка означает комплексное сопряжение. Латинские индексы изменяются от 1 до  $n$ , греческие — от 0 до  $n$ . По повторяющимся индексам подразумевается суммирование, например,  $u_\mu u_\mu = u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_n^2$ . Все рассматриваемые функции будем считать дифференцируемыми необходимое число раз:

$$u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad u_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Далее будут описаны уравнения (1) и (2), инвариантные относительно естественных решений алгебры Пуанкаре  $AP(1, n)$  с базисными операторами вида

$$\begin{aligned} A &= AP(1, n) : \\ P_\mu &= p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad p_\mu \equiv i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \\ g_{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, \dots, -1). \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве расширений будут рассмотрены алгебры с такими базисными операторами:

$$A_1 = A \oplus Q, \quad (4)$$

где  $Q$  — оператор заряда,

$$Q = u^* p_u - u p_{u^*}, \quad p_u = -i \frac{\partial}{\partial u}, \quad p_{u^*} = -i \frac{\partial}{\partial u^*};$$

$$A_2 = A \oplus D \quad \text{и} \quad A_3 = A_1 \oplus D_1, \quad (5)$$



где оператор дилатации имеет вид

$$D_1 = x_\mu p^\mu - \lambda(up_u + u^*p_{u^*}) \quad (6)$$

или

$$D_2 = x_\mu p^\mu - \lambda(p_u + p_{u^*}); \quad (7)$$

$$A_4 = A_2 \ni \{K_\mu\}, \quad A_5 = A_1 \in Q, \quad (8)$$

где  $K_\mu$  — операторы, порождающие конформные преобразования:

$$K_\mu = 2x_\mu D_1 - x_\nu x^\nu p_\mu, \quad (9)$$

$\lambda$  — произвольный параметр.

Для описания уравнений (1), (2), инвариантных относительно алгебр  $A, A_1, \dots, A_5$ , нам необходимо иметь явные выражения для инвариантов этих алгебр.

**2. Инварианты алгебр  $A, A_1, \dots, A_5$ .** Как хорошо известно [2, 3], дифференциальные инварианты нулевого и первого порядка алгебры Ли есть функционально независимые решения системы

$${}^1X_i \Phi(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) = 0, \quad (10)$$

где  ${}^1X_i$  — первые продолжения по Ли базисных операторов соответствующей алгебры. Для отыскания квазилинейных дифференциальных инвариантов второго порядка необходимо найти все линейно независимые решения уравнения

$${}^2X_i W(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*, u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}^*) = 0, \quad (11)$$

$$W(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*, u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}^*) = g^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)u_{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)u_{\mu\nu}^* + b(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*), \quad (12)$$

${}^2X_i$  — второе продолжение по Ли базисных операторов.

Воспользовавшись явным видом базисных операторов алгебр  $A, A_1, \dots, A_5$ , можно решить систему (10). Не вдаваясь в детали решения, приведем явный вид инвариантов:

$$A : \quad u, u^*, r_1 = u_\alpha u_\alpha, \quad r_2 = u_\alpha u_\alpha^*, \quad r_3 = u_\alpha^* u_\alpha^*; \quad (13)$$

$$A_1 : \quad u^2 + u^{*2}, \quad r_1 + r_3, \quad r_2^2 - r_1 r_3, \quad \Omega = r_1 u^{*2} - 2r_2 u u^* + r_3 u^2; \quad (14)$$

$$A_2 = A \ni D_1 : \quad \frac{u}{u^*}, \quad \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{r_3}{r_2}, \quad \frac{r_1^\lambda}{u^{2(\lambda-1)}}; \quad (15)$$

$$A_2 = A \ni D_2 : \quad u - u^*, \quad \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{r_3}{r_2}, \quad \exp u \cdot r_1^{\lambda/2};$$

$$A_3 : \quad \frac{(r_1 + r_3)^\lambda}{(u^2 + u^{*2})^{\lambda-1}}, \quad \frac{r_2^2 - r_1 r_3}{(r_1 + r_3)^2}, \quad \frac{\Omega}{(u^2 + u^{*2})(r_1 + r_3)}; \quad (16)$$

$$A_4 (\lambda = 0) : u, u^*, \frac{r_1}{r_2}, \frac{r_3}{r_2}; \quad (17)$$

$$A_4 (\lambda \neq 0) : \frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^{4-2/\lambda}};$$

$$A_5 (\lambda = 0) : u^2 + u^{*2}, \frac{r_2^2 - r_1 r_3}{(r_1 + r_3)^2}, \frac{\Omega}{r_1 + r_3}; \quad (18)$$

$$A_5 (\lambda \neq 0) : \Omega(u^2 + u^{*2})^{1/\lambda-2}.$$

Решая систему уравнений второго порядка (11), получаем базис квазилинейных инвариантов второго порядка:

$$A : \square u, R_1 = u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta}, R_2 = u_\alpha u_\beta^* u_{\alpha\beta}, R_3 = u_\alpha^* u_\beta^* u_{\alpha\beta}, \quad (19)$$

$$\square u^*, R_4 = u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta}^*, R_5 = u_\alpha u_\beta^* u_{\alpha\beta}^*, R_6 = u_\alpha^* u_\beta^* u_{\alpha\beta}^*;$$

$$A_1 : H_1 = u \square u + u^* \square u^*, H_2 = i(u \square u^* - u^* \square u),$$

$$H_3 = B_1(-R_1 + R_3 + 2R_5) + B_2(-R_6 + R_4 + 2R_2),$$

$$H_4 = i[B_2(-R_1 + R_3 + 2R_5) - B_1(-R_6 + R_4 + 2R_2)], \quad (20)$$

$$H_5 = u(R_1 + R_3) + u^*(R_4 + R_6), H_6 = i[u(R_4 + R_6) - u^*(R_1 + R_3)],$$

$$H_7 = u(R_3 - R_5) + u^*(R_4 - R_2), H_8 = i[u(R_4 - R_2) - u^*(R_3 - R_5)],$$

здесь  $B_1 = u^3 - 3u^{*2}u$ ,  $B_2 = B_1^*$ ;

$$A_2 : \frac{u \square u}{r_1}, \frac{u^* \square u^*}{r_3}, \frac{u R_i}{r_2^2}, i = 1, \dots, 6;$$

$$A_3 : \frac{H_1}{r_1 + r_3}, \frac{H_2}{r_1 + r_3}, \frac{H_3}{(u^2 + u^{*2})(r_1 + r_3)^2}, \frac{H_4}{(u^2 + u^{*2})(r_1 + r_3)^2}, \quad (21)$$

$$\frac{H_i}{(r_1 + r_3)^2}, i = 5, \dots, 8;$$

$$A_4 (\lambda = 0) : Z_1 = \frac{1}{r_2^2}(r_1 \square u + (n-1)R_1), Z_2 = \frac{1}{r_2^2}(r_1 \square u^* + (n-1)R_2),$$

$$Z_3 = \frac{1}{r_2^2}(-r_3 \square u + 2r_2 \square u^* + (n-1)R_3), Z_4 = Z_3^*, Z_5 = Z_2^*, Z_6 = Z_1^*;$$

$$A_4 (\lambda \neq 0) : Y_1 = u^{2/\lambda-2} \left\{ 2u \square u - \frac{2\lambda + n - 1}{\lambda} r_1 \right\}, Y_2 = Y_1^*,$$

$$Y_3 = (uu^*)^{2/\lambda-4} u^2 \{ 2(1-\lambda)(r_1 u^* - r_2 u)^2 +$$

$$+ 2\lambda u(u^{*2} R_1 - 2uu^* R_2 + u^2 R_3) - r_1 \Omega \}, Y_4 = Y_3^*;$$

$$A_5 (\lambda = 0) : \frac{r_2^2}{(r_1 + r_3)^2} \{ B_1(-Z_1 + Z_3 + 2Z_5) + B_2(-Z_6 + Z_4 + 2Z_2) \},$$

$$\frac{ir_2^2}{(r_1 + r_3)^2} \{ B_2(-Z_1 + Z_3 + 2Z_5) - B_1(-Z_6 + Z_4 + 2Z_2) \},$$

$$\frac{r_2^2}{(r_1 + r_3)^2} \{ u(Z_1 + Z_3) + u^*(Z_4 + Z_6) \},$$

$$\begin{aligned} & \frac{ir_2^2}{(r_1+r_3)^2} \{u(Z_4+Z_6) - u^*(Z_1+Z_3)\}, \\ & \frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2} \{u(Z_3-Z_5) + u^*(Z_4-Z_2)\}, \\ & \frac{ir_2^2}{(r_1+r_3)^2} \{u(Z_4-Z_2) - u^*(Z_3-Z_5)\}; \\ A_5 \ (\lambda \neq 0) : & \frac{u^2+u^{*2}}{\Omega} \left\{ u \square u + u^* \square u^* - \frac{2\lambda+n-1}{2\lambda} (r_1+r_3) \right\}, \\ & \frac{u^2+u^{*2}}{\Omega} \{2\lambda u(u^{*2}R_1 - 2uu^*R_2 + u^2R_3) + \\ & + 2u^*\lambda(u^{*2}R_4 - 2uu^*R_5 + u^2R_6 + 2(1-\lambda)(r_1u^* - r_2u)^2 + \\ & + 2(1-\lambda)(r_3u - r_2u^*)^2 - (r_1+r_3)\Omega\}, \\ & \frac{u^2+u^{*2}}{\Omega} \{ (2\lambda-1)(u^* \square u - u \square u^*) \Omega - \\ & - (2\lambda+n-1)(u^*(u^{*2}R_1 - 2uu^*R_2 + u^2R_3) - \\ & - u(u^{*2}R_4 - 2uu^*R_5 + u^2R_6)) \}; \end{aligned}$$

$r_i, \Omega$  — обозначения, использовавшиеся при записи инвариантов нулевого и первого порядка. Приведенные системы инвариантов являются полными при  $n \geq 3$ .

**3. Симметрия уравнений (1), (2).** Полную информацию об инвариантности уравнения (1) относительно алгебр дает следующая

**Теорема 1.** Система (1) инвариантна относительно алгебр

$$\begin{aligned} A, & \text{ если } F = \varphi(u, u^*, r_1, r_2, r_3); \\ A_1, & \text{ если } F = f(\omega)u + ig(\omega)u^* \end{aligned}$$

(здесь и далее  $f$  и  $g$  обозначены произвольные действительные функции,  $\varphi$  и  $\varphi^*$  — произвольные комплексные,  $\omega$  — инварианты (13)–(18) соответствующих алгебр);

$$\begin{aligned} A_2 &= A \boxplus D_1, \text{ если } F = u^{1-2/\lambda} \varphi(\omega); \\ A_2 &= A \boxplus D_2, \text{ если } F = \exp u \cdot \varphi(\omega); \\ A_3, & \text{ если } F = (u^2 + u^{*2})^{-4/\lambda} (uf(\omega) + iu^*g(\omega)); \\ A_4, & \text{ если } \lambda = \frac{1-n}{2}, \quad F = u^{(n+3)/(n-1)} \varphi(\omega); \\ A_5, & \text{ если } F = (u^2 + u^{*2})^{2/(n-1)} (uf(\omega) + iu^*g(\omega)). \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы необходимо использовать лиевское условие инвариантности в виде

$$X_i L \Big|_{\substack{L=0 \\ L^*=0}} = 0 \tag{22}$$

и разрешить его относительно неизвестной функции  $F$  при заданных базисных операторах алгебр  $A, A_1, \dots, A_5$ .

**Теорема 2.** Уравнение

$$(u_\alpha u_\alpha - 1)(u_\alpha^* u_\alpha^* - 1) = (u_\alpha u_\alpha^*)^2 \quad (23)$$

является единственным уравнением первого порядка, инвариантным относительно алгебры Пуанкаре  $AP(1, n+2)$ , группа Ли которой задана в пространстве  $(x, u, u^*)$ .

Уравнение (23) можно рассматривать как комплексный аналог уравнения Гамильтона (эйконала)  $u_\alpha u_\alpha - 1 = 0$  [5].

**Теорема 3.** Единственной системой вида (2), инвариантной относительно алгебры  $AP(1, n+2)$ , является система

$$\begin{aligned} (r_2^2 - (r_3 - 1)(r_1 - 1))\square u + (r_3 - 1)R_1 - 2r_2R_2 + (r_1 - 1)R_3 &= 0, \\ (r_2^2 - (r_1 - 1)(r_3 - 1))\square u^* + (r_3 - 1)R_4 - 2r_2R_5 + (r_1 - 1)R_6 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Система (24) представляет собой комплексное обобщение уравнения типа Эйлера–Лагранжа [4]:

$$\square u(1 - u_\nu u_\nu) + u_\nu u_\mu u_{\mu\nu} = 0.$$

**Определение.** Две системы уравнений

$$L_1 = 0, \quad L_1^* = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_2^* = 0,$$

где  $L_1, L_2$  имеют вид (2), называются эквивалентными с точностью до решений уравнений первого порядка, или просто эквивалентными, если возможно следующее представление:

$$L_1 = fL_2 + gL_2^*, \quad L_1^* = f^*L_2^* + g^*L_2,$$

где  $ff^* - gg^* \neq 0$ ;  $f, g$  зависит от  $u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*$ .

**Теорема 4.** Уравнения (2) инвариантны относительно алгебр  $A, A_1, \dots, A_5$  только в том случае, если они эквивалентны следующей системе:

$$\alpha^i(\omega)W^i + \alpha(\omega), \quad \alpha^{i*}W^{*i} + \alpha^*(\omega) = 0,$$

где  $\omega$  — дифференциальные инварианты нулевого и первого порядка,  $W^i$  — инварианты второго порядка вида (12) соответствующих алгебр.

**4. Примеры.** Приведем пример системы, инвариантной относительно конформной группы  $C(1, 3)$  в четырехмерном пространстве  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ :

$$\square u = u^3 \varphi \left( \frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^6} \right), \quad \square u^* = u^{*3} \varphi \left( \frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^6} \right),$$

Эта система является комплексным обобщением единственного конформно-инвариантного уравнения  $\square u + \lambda u^3 = 0$  для действительной функции.

Уравнение

$$\begin{aligned} \square u - \frac{n-1}{2} \{ (R_3 - R_5)r_1 + (R_4 - R_2)r_2 \} (r_1 r_3 - r_2^2)^{-1} = \\ = (u^2 + u^{*2})^{-1} (f(r_1 u + r_2 u^*) + i(r_2 u - r_1 u^*)g) = 0, \end{aligned}$$

где  $f, g$  — действительные функции от инвариантов нулевого и первого порядка, инвариантные относительно алгебры  $AC(1, n)$  с нулевой конформной степенью.

Уравнения

$$u \square u - \frac{n+1}{2} r_1 = \Phi \left( \frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^2} \right),$$

$$\frac{2u}{\Omega} (u^{*2} R_1 - 2uu^* R_2 + u^2 R_3) = r_1 + \Phi \left( \frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^2} \right)$$

инвариантны относительно  $AC(1, n)$  с конформной степенью 1;  $r_i, \Omega, R_j$  — обозначения, использовавшиеся при записи инвариантов первого и второго порядка. К приведенным уравнениям, конечно, следует дописать комплексно-сопряженные.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973, 416 с.
2. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, М., ИЛ, 1947, 358 с.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Фушич В.И., Серов Н.И., ДАН, 1984, **278**, № 4, 847–851.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.

# On the reduction and some new exact solutions of the non-linear Dirac and Dirac–Klein–Gordon equations

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

New ansätze for spinor fields are suggested. Using these, we construct multiparameter families of exact solutions of the non-linear many-dimensional Dirac and Dirac–Klein–Gordon equations, some solutions including arbitrary functions.

In this letter we have constructed new families of exact solutions of the following equations:

$$(\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar{\psi}\psi)^k)\psi(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu p^\mu - (\lambda_1|u|^{k_1} + \lambda_2(\bar{\psi}\psi)^{k_2})]\psi(x) &= 0, \\ [p_\mu p^\mu - (\mu_1|u|^{k_1} + \mu_2(\bar{\psi}\psi)^{k_2})^2]u(x) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

where  $\gamma_\mu$  are  $(4 \times 4)$ -Dirac matrices,  $\psi = \psi(x)$  is a four-component spinor,  $u = u(x)$  is a complex scalar function,  $p_0 = i\partial/\partial x_0$ ,  $p_a = -i\partial/\partial x_a$ ,  $a = \overline{1,3}$ ;  $\lambda$ ,  $k$ ,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  and  $k_i$  are constants. Hereafter we use the summation convention.

Solutions obtained by us differ from those already known in the literature [1–8]. These solutions can be useful in the relativistic quantum field theory.

To construct exact solutions of equation (1) we use the following ansätze:

$$\psi(x) = [ig_1(\omega) + \gamma_4 g_2(\omega) - (if_1(\omega) + \gamma_4 f_2(\omega))\gamma_\mu p^\mu \omega]\chi, \quad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= [G_1(\omega_1, \omega_2) + i(\gamma_\mu a^\mu + \gamma_\mu d^\mu)G_2(\omega_1, \omega_2) + \\ &+ i(\gamma_\mu b^\mu)F_1(\omega_1, \omega_2) + (\gamma_\mu a^\mu + \gamma_\mu d^\mu)(\gamma_\nu b^\nu)F_2(\omega_1, \omega_2)]\chi, \end{aligned} \tag{4}$$

where  $\omega = \omega(x)$  are scalar functions satisfying conditions of the form

$$p_\mu p^\mu \omega + A(\omega) = 0, \quad (p_\mu \omega)(p^\mu \omega) + B(\omega) = 0, \tag{5}$$

where  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $A$  and  $B$  are arbitrary differentiable functions,  $\omega_1 = a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$ ,  $\omega_2 = b_\nu x^\nu$  and  $\chi$  is an arbitrary constant spinor. Hereafter  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_\mu$  and  $d_\mu$  are arbitrary real parameters satisfying the following conditions:

$$\begin{aligned} -a_\mu a^\mu &= b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = d_\mu d^\mu = -1, \\ a_\mu b^\mu &= a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0. \end{aligned}$$

Substitution of ansätze (3) and (4) into the initial equation (1) leads to the following systems of differential equations for unknown functions  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $F_i$ ,  $G_i$ :

$$\begin{aligned} B\dot{f}_1 + Af_1 &= \tilde{\lambda}[g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^k g_1, \\ \dot{g}_1 &= -\tilde{\lambda}[g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^k f_1, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{g}_2 &= \tilde{\lambda}[g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^k f_2, \\
 B\dot{f}_2 + Af_2 &= -\tilde{\lambda}[g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^k g_2, \\
 \tilde{\lambda} &= \lambda(\bar{\chi}\chi)^k, \quad \dot{f}_i = df_i/d\omega, \quad \dot{g}_i = dg_i/d\omega, \quad i = 1, 2, \\
 F_{\omega_2}^1 &= -\tilde{\lambda}[(G^1)^2 - (F^1)^2]^k G^2, \quad G_{\omega_2}^1 = -\tilde{\lambda}[(G^1)^2 - (F^1)^2]^k F^1, \\
 G_{\omega_1}^1 + F_{\omega_2}^2 &= -\tilde{\lambda}[(G^1)^2 - (F^1)^2]^k G^2 - G_{\omega_2}^2 + F_{\omega_1}^1 = \tilde{\lambda}[(G^1)^2 - (F^1)^2]^k F^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Not going into details of the integration of systems (5) and (6) we shall write down exact solutions of the non-linear Dirac equation (1) obtained through the substitution of expressions for  $f_i, g_i$  into ansatz (3)

(i)  $k < \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \omega^{-1/2k} \{ \mp(1 - 4k)^{1/2} (-iC_1 + \gamma_4 C_2) + (C_1 - i\gamma_4 C_2) \times \\
 &\quad \times [(\gamma b)(by) + (\gamma c)(cy) + (\gamma d)(dy)] \omega^{-1} \} \chi, \\
 \omega &= [(by)^2 + (cy)^2 + (dy)^2]^{1/2}, \quad C_j = \text{const}
 \end{aligned} \tag{8}$$

and the condition holds

$$\pm(1 - 4k)^{1/2} - 2k\tilde{\lambda}[4k(C_1^2 - C_2^2)]^k = 0;$$

(ii)  $k > \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \omega^{-1/2k} \{ \mp(4k - 1)^{1/2} (-iC_1 + \gamma_4 C_2) + (C_1 - i\gamma_4 C_2) \times \\
 &\quad \times [(\gamma a)(ay) - (\gamma b)(by) - (\gamma c)(cy)] \omega^{-1} \} \chi, \\
 \omega &= [(ay)^2 - (by)^2 - (cy)^2]^{1/2}, \quad C_j = \text{const}
 \end{aligned} \tag{9}$$

and the condition holds

$$\pm(4k - 1)^{1/2} - 2k\tilde{\lambda}[4k(C_1^2 - C_2^2)]^k = 0;$$

(iii)  $k > \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \omega^{-1/2k} [ \mp(6k - 1)^{1/2} (-iC_1 + \gamma_4 C_2) + (C_1 - i\gamma_4 C_2)(\gamma y) \omega^{-1} ] \chi, \\
 \omega &= (yy)^{1/2}, \quad C_j = \text{const}
 \end{aligned} \tag{10}$$

and the condition holds

$$\pm(6k - 1)^{1/2} - 2k\tilde{\lambda}[6k(C_1^2 - C_2^2)]^k = 0;$$

(iv)  $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \{ i g_1(\omega) + \gamma_4 g_2(\omega) + (f_1(\omega) - i\gamma_4 f_2(\omega)) [ \gamma b + (\gamma a + \gamma d) \dot{F}(ay + dy) ] \} \chi, \\
 f_1 &= C_1 \cosh[\tilde{\lambda}(C_3^2 - C_1^2)^k \omega + C_2], \quad f_2 = C_3 \cosh[\tilde{\lambda}(C_3^2 - C_1^2)^k \omega + C_4], \\
 g_1 &= C_1 \sinh[\tilde{\lambda}(C_3^2 - C_1^2)^k \omega + C_2], \quad g_2 = C_3 \sinh[\tilde{\lambda}(C_3^2 - C_1^2)^k \omega + C_4], \\
 \omega &= by + F(ay + dy), \quad C_j = \text{const},
 \end{aligned} \tag{11}$$

where  $F$  is an arbitrary differentiable function;

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= [ i g_1(\omega) + \gamma_4 g_2(\omega) + (f_1(\omega) - i\gamma_4 f_2(\omega)) (\gamma a) ] \chi, \\
 f_1 &= C_1 \sin[\tilde{\lambda}(C_1^2 - C_3^2)^k \omega + C_2], \quad f_2 = C_3 \cos[\tilde{\lambda}(C_1^2 - C_3^2)^k \omega + C_4], \\
 g_1 &= C_1 \cos[\tilde{\lambda}(C_1^2 - C_3^2)^k \omega + C_2], \quad g_2 = C_3 \sin[\tilde{\lambda}(C_1^2 - C_3^2)^k \omega + C_4], \\
 C_j &= \text{const}, \quad \omega = ay;
 \end{aligned} \tag{12}$$

(v)  $k = 1/m$ ,  $m = 2, 3$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (1 + \theta^2 \omega^2)^{-(m+1)/2} [iC_1 + \gamma_4 C_2 - \theta(C_1 + i\gamma_4 C_2)] \times \\ &\quad \times \begin{cases} [(\gamma a)(ay) - (\gamma b)(by) - (\gamma c)(cy)], & m = 2, \\ \gamma y, & m = 3, \end{cases} \\ \omega &= \begin{cases} [(ay)^2 - (by)^2 - (cy)^2]^{1/2}, & m = 2, \\ (yy)^{1/2}, & m = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

and the condition holds

$$(m+1)\theta - \tilde{\lambda}(C_1^2 - C_2^2)^{1/m} = 0.$$

In the formulae (8)–(13) the following notations were used:

$$\begin{aligned} ay &\equiv a_\mu y^\mu, \quad \gamma a \equiv \gamma_\mu a^\mu, \quad \gamma y \equiv \gamma_\mu y^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ y_\mu &= x_\mu + \theta_\mu, \quad \theta_\mu = \text{const}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda(\bar{\chi}\chi)^k. \end{aligned} \quad (14)$$

If  $g_2 \equiv f_2 \equiv 0$ ,  $\omega = x_\mu x^\mu$  then (3) coincides with the ansatz suggested by Heisenberg in [1]. That is why exact solutions of the equation (1) obtained with the help of the Heisenberg ansatz in [2–4] belong to classes (10) and (13).

It was Gürsey who showed that under  $k = \frac{1}{3}$  equation (1) is conformally invariant [9]. This makes it possible to construct new families of exact solutions using the solution generation technique (see [6]). As is shown in [6] the formula of generating solutions by final transformations of the four-parameter special conformal group has the form

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \sigma^{-2}(x)[1 - (\gamma x)(\gamma \alpha)]\psi_1(x'), \\ x'_\mu &= (x_\mu - \alpha_\mu x x)\sigma^{-1}(x), \\ \sigma(x) &= 1 - 2\alpha x + (\alpha\alpha)(xx), \quad \alpha_\mu = \text{const}, \quad \mu = \overline{0, 3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Using (9)–(13) under  $k = \frac{1}{3}$  as  $\psi_1(x)$  one can obtain multi-parameter families of solutions of the non-linear Dirac equation (1) which are invariant under the conformal group  $C(1, 3)$ .

System (7) proved to be an integrable one. Substituting its general solution into the ansatz (4) we obtain a multi-parameter family of exact solutions of the equation (1) depending on four arbitrary functions

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left\{ \phi_1 \cosh(\phi bx) + \phi_2 \sinh(\phi bx) + i(\gamma a + \gamma d)[(bx/2\phi)\dot{\phi} \times \right. \\ &\quad \times (\phi_2 \cosh(\phi bx) + \phi_1 \sinh(\phi bx) + \phi_3 \cosh(\phi bx) + \phi_4 \sinh(\phi bx))] + \\ &\quad + i(\gamma b)(\phi \sinh(\phi bx) + \phi_2 \cosh(\phi bx)) + (\gamma a + \gamma d)(\gamma b) \times \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{\phi_2 \dot{\phi}}{\phi^2} - \frac{\phi_1}{\phi} - \frac{\phi_2 \dot{\phi}}{2\phi} bx \right) \sinh(\phi bx) + \left( \frac{\phi_2 \dot{\phi}}{\phi^2} - \frac{\phi_2}{\phi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\phi_1 \dot{\phi}}{2\phi} bx \right) \cosh(\phi bx) + \phi_3 \sinh(\phi bx) + \phi_4 \cosh(\phi bx) \right] \Big\} \chi, \\ \dot{\phi} &= \frac{d\phi}{d\omega}, \quad \dot{\phi}_i = \frac{d\phi_i}{d\omega}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (16)$$



where

$$\begin{aligned} \gamma a &\equiv \gamma_\mu a^\mu, & \gamma b &\equiv \gamma_\mu b^\mu, & bx &\equiv b_\mu x^\mu, \\ \phi(\omega) &= -\lambda(\bar{\chi}\chi)^k [(\phi_1(\omega))^2 - (\phi_3(\omega))^2]^k, \end{aligned}$$

$\phi_1, \dots, \phi_4$  are arbitrary differentiable functions of  $\omega = a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$ .

We note that it is not difficult to construct an explicit form of the energy-momentum tensor

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}i(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_\nu - \bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\psi) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}i(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_\mu - \bar{\psi}_\mu\gamma_\mu\psi) - \frac{\lambda}{k+1}(\bar{\psi}\psi)^{k+1} \end{aligned}$$

corresponding to obtained solutions. For the solutions (8)–(10) one has

$$T_{\mu\nu} \stackrel{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \theta_{\mu\nu}\omega^{-(k+1)/k}, \quad \theta_{\mu\nu} = \text{const.} \tag{17}$$

If  $0 < k < \frac{1}{4}$  (for (8)) or  $k > \frac{1}{6}$  (for (10)) then  $T_{\mu\nu}$  has a non-integrable singularity in the point  $x_\mu = -\theta_\mu$ , in other points of the Minkowsky space  $R(1, 3)$  expression (17) being integrable. In the case  $k > \frac{1}{4}$  (for (9))  $T_{\mu\nu}$  has a singularity on the cone

$$ay = \pm[(by)^2 + (cy)^2]^{1/2}$$

while at other points it is integrable.

Ansätze (3), (4) proved to be very useful while constructing solutions of the system (2). We shall write down some of the families of exact solutions obtained, omitting intermediate calculations.

(i)  $k_1 > 1, k_1 > \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \omega^{-1/2k_2} \{ \mp(4k_2 - 1)^{1/2}(-iC_1 + \gamma_4 C_2) + (C_1 - i\gamma_4 C_2) \times \\ &\quad \times [(\gamma a)(ay) - (\gamma b)(by) - (\gamma c)(cy)]\omega^{-1} \} \chi, \end{aligned} \tag{18}$$

$$u(x) = E\omega^{-1/k_1}, \quad C_i = \text{const}, \quad \omega = [(ay)^2 - (by)^2 - (cy)^2]^{1/2}$$

and the following conditions hold:

$$\begin{aligned} (1 - k_1)k_1^{-2} + \{\mu_1|E|^{k_1} + \mu_2(\bar{\chi}\chi)^{k_2} [(C_1^2 - C_2^2)4k_2]^{k_2}\}^2 &= 0, \\ \pm(4k_2 - 1)^{1/2} - 2k_2\{\lambda_2|E|^{k_1} + \lambda_2(\bar{\chi}\chi)^{k_2} [4k_2(C_1^2 - C_2^2)]^{k_2}\}^2 &= 0. \end{aligned}$$

(ii)  $k_1 = 2/(m - 1), k_2 = 1/m, m = 2, 3$

$$\begin{aligned} \psi(x)(1 + \theta^2\omega^2)^{-(m+1)/2} \chi [iC_1 + \gamma_4 C_2 - \theta(C_1 + i\gamma_4 C_2)] \times \\ \times \begin{cases} (\gamma a)(ay) - (\gamma b)(by) - (\gamma c)(cy), & m = 2, \\ \gamma y, & m = 3, \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

$$u(x) = E(1 + \theta^2\omega^2)^{(1-m)/2}, \quad \omega = \begin{cases} [(ay)^2 - (by)^2 - (cy)^2]^{1/2}, & m = 2, \\ (yy)^{1/2}, & m = 3, \end{cases}$$

where  $\theta, C_i$  and  $E$  are constants satisfying conditions

$$\begin{aligned} \theta^2(m^2 - 1) &= [\mu_1|E|^{2/(m-1)} + \mu_2(\bar{\chi}\chi)^{1/m}(C_1^2 - C_2^2)^{1/m}]^2, \\ \theta(m + 1) &= [\lambda_1|E|^{2/(m-1)} + \lambda_2(\bar{\chi}\chi)^{1/m}(C_1^2 - C_2^2)^{1/m}]. \end{aligned}$$

In (18), (19) we have used notations of (14).

1. Heisenberg W., *Z. Naturf. A*, 1954, **9**, 292.
2. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 210.
3. Akdeniz K.G., Smailagic A., *Nuovo Cimento A*, 1979, **51**, 345.
4. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, 485.
5. Kurdgelaidze D.F., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1959, **36**, 842.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271.
7. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., in Group Theoretical Studies of the Mathematical Physics Problems, Kiev, Math. Inst., 1985, 20.
8. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 4173.
9. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 988.

# Non-local ansätze for the Dirac equation

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

Using non-local (non-Lie) symmetry of the linear Dirac equation we have constructed a number of new ansätze reducing it to systems of ordinary differential equations.

It is well known (see e.g. [1]) that the Poincaré group  $P(1,3)$  is a maximal local (in Lie's sense) invariance group of the linear Dirac equation

$$(i\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad m = \text{const}, \quad (1)$$

where  $\psi = \psi(x_0, \mathbf{x})$  is a four-component spinor,  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ ,  $\mu = \overline{0,3}$  and  $\gamma_\mu$  are imaginary  $4 \times 4$  matrices satisfying the Clifford algebra

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I \equiv 2I \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = \overline{1,3}, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

In [2, 3] ansätze reducing the Dirac equation to systems of ordinary differential equations (ODE) were constructed, the subgroup structure of the group  $P(1,3)$  investigated in detail by Patera et al [4, 5] being used.

As shown in [1, 6, 7] equation (1) possesses non-local (non-Lie) symmetry. So far this additional non-local symmetry has not been used to construct ansätze reducing the Dirac equation to systems of ODE. In the present paper we construct a number of such ansätze following an approach suggested in [3, 8].

If one puts

$$\Gamma_\mu = \text{diag}(-i\gamma_\mu, -i\gamma_\mu), \quad \Psi^T = (\text{Re } \psi, \text{Im } \psi)^T$$

then equation (1) becomes

$$(\Gamma_\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0. \quad (2)$$

It is common knowledge that the complete set of first-order symmetry operators of the Dirac equation (2) is not a Lie algebra. We have succeeded in picking out the subset which forms the Lie algebra of the Poincaré group:

$$P_\mu = [1 + \varepsilon(\Gamma_4 + \Gamma_5)]\partial^\mu + \varepsilon m(\Gamma_4 + \Gamma_5)\Gamma_\mu, \quad (3)$$

$$J_{\mu\nu} = -x_\mu\partial^\nu + x_\nu\partial^\mu - \frac{1}{4}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu), \quad (4)$$

where  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$  for  $\mu, \nu = \overline{0,3}$  and

$$\Gamma_4 + \Gamma_5 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

It is important to note that operators (3) generate a non-local group of transformations

$$\Psi' = [1 - \varepsilon m(\Gamma_4 + \Gamma_5)\theta^\mu \Gamma_\mu] \Psi + \varepsilon(\Gamma_4 + \Gamma_5)\theta_\mu \Psi_{x_\mu}, \quad x'_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \quad (5)$$

where  $\theta_\mu$  are group parameters.

According to [4, 8] there exists a correspondence between three-dimensional sub-algebras of the algebra (3) and (4) and ansätze reducing the Dirac equation (2) to ODE. Omitting very cumbersome intermediate calculations we write the final result for the non-local ansätze for the spinor field.

1.  $\langle P_0 + P_3, P_1, P_2 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp \left[ \varepsilon m \Gamma_{45} \left( \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + \frac{1}{2} \eta \Gamma_{03} \right) \right] \varphi(\xi).$$

2.  $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + \Gamma_3 x_3)] \varphi(x_0).$$

3.  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 - \Gamma_0 x_0)] \varphi(x_3).$$

4.  $\langle J_{03}, P_1, P_2 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)] \exp \left( -\frac{1}{2} \Gamma_0 \Gamma_3 \ln \xi \right) \varphi(x_0^2 - x_3^2).$$

5.  $\langle J_{03}, P_0 + P_3, P_1 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp \left[ \varepsilon m \Gamma_{45} \left( \Gamma_1 x_1 + \frac{1}{2} \eta \Gamma_{03} \right) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \Gamma_0 \Gamma_3 \ln \xi \right) \varphi(x_2).$$

6.  $\langle J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_3 x_3 - \Gamma_0 x_0)] \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \varepsilon \Gamma_{45} \Gamma_2 + \frac{1}{2\alpha} \Gamma_0 \Gamma_3 (\varepsilon \Gamma_{45} - 1) \right] x_2 \right\} \varphi(x_1).$$

7.  $\langle J_{03} + \alpha P_2, P_0 + P_3, P_1 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp \left[ \varepsilon m \Gamma_{45} \left( \Gamma_1 x_1 + \frac{1}{2} \eta \Gamma_{03} \right) \right] \exp \left\{ x_2 \left[ m \xi^2 \Gamma_2 (1 + 2\varepsilon \Gamma_{45}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \xi \Gamma_2 \Gamma_{03} - 3\alpha \varepsilon m \xi \Gamma_{45} - \varepsilon m \xi^2 \Gamma_2 \Gamma_{45} \Gamma_0 \Gamma_3 \right] \right\} \varphi(\xi).$$

8.  $\langle J_{12}, P_0, P_3 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_3 x_3 - \Gamma_0 x_0)] \exp \left[ \frac{1}{2} \Gamma_1 \Gamma_2 \tan^{-1} \frac{x_1}{x_2} \right] \varphi(x_1^2 + x_2^2).$$

9.  $\langle J_{12} + \alpha P_0, P_1, P_2 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)] \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \frac{1}{2\alpha} \Gamma_1 \Gamma_2 (1 - \varepsilon \Gamma_{45}) - \varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_0 \right] x_0 \right\} \varphi(x_3).$$

$$10. \langle J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp[\varepsilon m \Gamma_{45}(\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)] \times \\ &\times \exp\left\{\left[\varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_3 + \frac{1}{2\alpha}(1 - \varepsilon \Gamma_{45})\Gamma_1 \Gamma_2\right] x_2\right\} \varphi(x_0). \end{aligned}$$

$$11. \langle J_{12} + P_0 + P_3, P_1, P_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp[\varepsilon m \Gamma_{45}(\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)] \times \\ &\times \exp\left\{\frac{1}{2}\eta\left[\varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_{03} + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \Gamma_{45})\Gamma_1 \Gamma_2\right]\right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$12. \langle G_1, P_0 + P_3, P_2 \rangle$$

$$\Psi(x) = \exp\left[\varepsilon m \Gamma_{45}\left(\Gamma_2 x_2 + \frac{1}{2}\eta \Gamma_{03}\right)\right] \exp\left[-\frac{x_2}{2\xi} \Gamma_{03}(\Gamma_1 + \varepsilon m x_2 \Gamma_{45})\right] \varphi(\xi).$$

$$13. \langle G_1, P_0 + P_3, P_1 + \alpha P_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left\{\varepsilon m \Gamma_{45}\left[x_1(\Gamma_1 + \alpha \Gamma_2) + \frac{1}{2}\eta \Gamma_{03}\right]\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{\alpha x_1 - x_2}{\alpha \xi}\left[\frac{1}{2}\Gamma_1 \Gamma_{03} - \varepsilon m \xi \Gamma_{45}(\Gamma_1 + \alpha \Gamma_2)\right]\right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$14. \langle G_1 + P_2, P_0 + P_3, P_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left[\varepsilon m \Gamma_{45}\left(x_1 \Gamma_1 + \frac{1}{2}\eta \Gamma_{03}\right)\right] \times \\ &\times \exp\left\{x_2\left[\varepsilon m \Gamma_{45}(\Gamma_2 - \xi \Gamma_1) + \frac{1}{2}(\varepsilon \Gamma_{45} - 1)\Gamma_{03} \Gamma_1\right]\right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$15. \langle G_1 + P_0, P_0 + P_3, P_2 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left[\varepsilon m \Gamma_{45}\left(x_2 \Gamma_2 + \frac{1}{2}\eta \Gamma_{03}\right)\right] \times \\ &\times \exp[m x_1(\Gamma_1 + \xi \Gamma_{03} + 3\varepsilon \Gamma_1 \Gamma_{45} - 4\varepsilon \xi \Gamma_{45} \Gamma_{03})] \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$16. \langle G_1 + P_0, P_0 + P_3, P_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left[\varepsilon m \Gamma_{45}\left(x_1 \Gamma_1 + \frac{1}{2}\eta \Gamma_{03}\right)\right] \times \\ &\times \exp[m \Gamma_2 x_2(3\varepsilon \Gamma_{45} + \varepsilon \xi \Gamma_{45} \Gamma_{03} \Gamma_1 - 1)] \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$17. \langle G_1 + P_0, P_1 + \alpha P_2, P_0 + P_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp\left\{\varepsilon m \Gamma_{45}\left[\frac{1}{2}\eta \Gamma_{03} + \frac{x_2}{\alpha}(\Gamma_1 + \alpha \Gamma_2)\right]\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{m}{\alpha^2 + 1}(1 - 2\varepsilon \Gamma_{45})[(\Gamma_2 - \alpha \Gamma_1) - \alpha \xi \Gamma_{03} + \varepsilon(\alpha \Gamma_1 - \Gamma_2)\Gamma_{45}]\right\} \times \\ &\times \left\{\varepsilon \Gamma_{45}\left[\Gamma_0 \Gamma_3 + \frac{1}{\alpha}\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_{03} \Gamma_1 - 1\right] - 1\right\} (\alpha x_1 - x_2) \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$18. \langle J_{03} + \alpha J_{12}, P_0, P_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_3 x_3 - \Gamma_0 x_0)] \times \\ &\times \exp \left[ \frac{1}{2\alpha} (\Gamma_0 \Gamma_3 + \alpha \Gamma_1 \Gamma_2) \tan^{-1} \frac{x_1}{x_2} \right] \varphi(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

$$19. \langle J_{03} + \alpha J_{12}, P_1, P_2 \rangle$$

$$\Psi(x) = \exp [\varepsilon m \Gamma_{45} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)] \exp \left[ -\frac{1}{2} (\Gamma_0 \Gamma_3 + \alpha \Gamma_1 \Gamma_2) \ln \xi \right] \varphi(x_0^2 - x_3^2).$$

$$20. \langle G_1, G_2, P_0 + P_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp \left( \frac{1}{2} \varepsilon m \eta \Gamma_{45} \Gamma_{03} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{m}{\xi} \Gamma_{03} [\varepsilon (x_1^2 + x_2^2) \Gamma_{45} + \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2] \right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$21. \langle G_1 + P_2, G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2, P_0 + P_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp \left( \frac{1}{2} \varepsilon m \eta \Gamma_{45} \Gamma_{03} \right) [f_1 + \varepsilon \Gamma_{45} (g_1 \Gamma_1 + g_2 \Gamma_2 + g_3 \Gamma_{03}) + \\ &+ \Gamma_{03} (h_1 \Gamma_1 + h_2 \Gamma_2) + \varepsilon u \Gamma_{45} \Gamma_{03} \Gamma_1 \Gamma_2] \varphi(\xi), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \quad g_1 = \frac{\alpha m}{\tau} (\xi x_2 - x_1), \quad g_2 = \frac{m}{\tau} [\xi x_1 + (\beta \xi - \alpha) x_2], \\ h_1 &= \frac{1}{2\tau} [\alpha x_2 - (\xi + \beta) x_1], \quad h_2 = \frac{1}{2\tau} (x_1 - \xi x_2), \quad g_3 = -\frac{m}{2\tau} (\alpha + 1) x_1 x_2, \\ u &= -\frac{m}{2\tau} (-x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_1 x_2), \quad \tau = \xi(\xi + \beta) - \alpha. \end{aligned}$$

$$22. \langle G_1, G_2 + P_1 + \beta P_2, P_0 + P_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp \left( \frac{1}{2} \varepsilon m \eta \Gamma_{45} \Gamma_{03} \right) \exp \left[ -\frac{x_1}{2\xi} \Gamma_{03} (\varepsilon m x_1 \Gamma_{45} + \Gamma_1) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\varepsilon m x_2^2}{2(\xi + \beta)} \Gamma_{45} \Gamma_{03} \right\} \exp \left\{ \frac{x_2}{(\xi + \beta)^2} \left[ \varepsilon \Gamma_{45} \left( \frac{1}{2\xi} \Gamma_{03} \Gamma_1 + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + m(\Gamma_1 + \beta \Gamma_2) \right) (\xi + \beta) + \frac{1 - \xi}{2\xi} (\xi + \beta - \varepsilon \beta \Gamma_{45}) \Gamma_{03} \Gamma_1 \right] \right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

$$23. \langle G_1, G_2 + P_2, P_0 + P_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp \left( \frac{1}{2} \varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_{03} \eta \right) \exp \left[ -\frac{x_1}{2\xi} \Gamma_{03} (\varepsilon m x_1 \Gamma_{45} + \Gamma_1) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\varepsilon m x_2^2}{2(\xi + 1)} \Gamma_{45} \Gamma_{03} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{x_2}{(\xi + 1)^2} \left[ \varepsilon m (\xi + 1) \Gamma_{45} \Gamma_2 + \frac{1}{2} (\varepsilon \Gamma_{45} - \xi - 1) \Gamma_{03} \Gamma_2 \right] \right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

24.  $\langle J_{03}, G_1, P_2 \rangle$

$$\Psi(x) = \exp(\varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_2 x_2) \exp\left[-\frac{x_1}{2\xi} \Gamma_{03} \Gamma_1\right] \exp\left(-\frac{1}{2} \Gamma_0 \Gamma_3 \ln \xi\right) \varphi(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2).$$

25.  $\langle J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2, G_1, P_0 + P_3 \rangle$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \exp\left(\frac{1}{2} \varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_{03} \eta\right) \exp\left[-\frac{x_1}{2\xi} \Gamma_{03} (\varepsilon m x_1 \Gamma_{45} + \Gamma_1)\right] \times \\ & \times \exp\left\{\frac{m x_2}{\xi^2} [-\xi \Gamma_2 + \beta(1 + \Gamma_{45}) \Gamma_{03}] [\xi \Gamma_{45} (\Gamma_0 \Gamma_3 - 1) - \xi + \right. \\ & \left. + \Gamma_{03} \Gamma_{45} (\alpha \Gamma_1 + \beta \Gamma_2) + \Gamma_{03}]\right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

26.  $\langle J_{12} + P_0 + P_3, G_1, G_2 \rangle$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \exp\left\{-\frac{1}{2\xi} \Gamma_{03} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2)\right\} \times \\ & \times \exp\left\{\frac{x_0^2 - \mathbf{x}^2}{2\xi} \left[\varepsilon m \Gamma_{45} \Gamma_{03} + \frac{1}{2} \Gamma_1 \Gamma_2 (\varepsilon \Gamma_{45} - 1)\right]\right\} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

27.  $\langle J_{03} + \alpha J_{12}, G_1, G_2 \rangle$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \exp\left[\frac{1}{2\xi} (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2) \Gamma_{03}\right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2} (\Gamma_0 \Gamma_3 + \alpha \Gamma_1 \Gamma_2) \ln \xi\right] \varphi(x_0^2 - \mathbf{x}^2). \end{aligned}$$

The following notations were used in the above ansätze:

$$\begin{aligned} G_k = J_{0k} + J_{k3}, \quad k = 1, 2, \quad \xi = x_3 + x_0, \quad \eta = x_3 - x_0, \\ \Gamma_{03} = \Gamma_0 + \Gamma_3, \quad \Gamma_{45} = \Gamma_4 + \Gamma_5, \end{aligned}$$

$\alpha$  and  $\beta$  are constants,  $\varphi(z)$  is a new unknown spinor and  $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$  is a subalgebra of the algebra (3) and (4) having basis elements  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

Let us adduce an example of reduced ODE. If one substitutes ansatz 8 into (2) then the equation for  $\varphi(z)$  becomes

$$\left[2z^{1/2} \Gamma_2 \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} z^{-1/2} \Gamma_2 - m + 2\varepsilon m (\Gamma_4 + \Gamma_5)\right] \varphi(z) = 0.$$

**Note 1.** If one puts  $\varepsilon = 0$  in (3) then (3) and (4) generate the local Lie group  $P(1, 3)$ . That is why, on putting  $\varepsilon = 0$  into the ansätze above, one obtains Poincaré-invariant ansätze for the spinor field constructed in [3].

**Note 2.** The above non-local ansätze can be applied to the construction of exact solutions of non-linear Lorentz-invariant spinor equations admitting the group (5). One example of such equations is

$$\{\partial_\mu \partial^\mu + \lambda [\bar{\Psi} (\Gamma_4 + \Gamma_5) \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi] (\Gamma_4 + \Gamma_5)\} \Psi = 0,$$

where  $\lambda$  is constant and  $\bar{\Psi} = \Psi^T \Gamma_0 \Gamma_4$ . This problem will be considered in a future publication.

1. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Symmetries of Maxwell's equations*, Dordrecht, Reidel, 1987.
2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 4173.
3. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *Fiz. Elem. Cast. Atom. Jadra (USSR)*, 1988, **19**, 1154–1196.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597.
5. Kamran N., Legare M., McLenaghan R.G., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1988, **29**, 403.
6. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **7**, 3.
7. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 508.
8. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., in *Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics*, Kiev, Mathematical Institute, 1987, 17.



# On some new exact solutions of nonlinear d’Alembert and Hamilton equations

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

Some new exact solutions of d’Alembert–Hamilton and d’Alembert equations are obtained. The necessary conditions of integrability of over-determined d’Alembert–Hamilton system of nonlinear differential equations are established.

1. It was the Euler’s idea (1734–1740 y.) that problem of integrating partial differential equations (PDE) could be solved by reducing them to ordinary equations (ODE). But one can not apply this idea to arbitrary PDE. Therefore it was suggested by Fushchych [4, 5] to restrict oneself by PDE possessing wide symmetry groups. This program was realized for some nonlinear wave equations by Fushchych and Serov [7], Fushchych and Shtelen [8] and Fushchych and Zhdanov [9] (see also [1, 11, 12]). The vast list of references on this point can be found in Fushchych and Nikitin [6].

When reducing PDE to ODE one has always to deal with the problem of investigating compatibility of some systems of PDE. For example, nonlinear d’Alembert equation

$$\square u = F_1(u), \quad \square = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2 \quad (1)$$

with the aid of ansatz [4]

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = \omega(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (2)$$

is reduced to the ODE having variable coefficients [7]

$$\omega_\mu \omega^\mu \ddot{\varphi} + \square \omega \dot{\varphi} = F_1(\varphi), \quad (3)$$

where  $\omega_\mu \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu}$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ ,  $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{d\omega}$ . Hereafter the summation over repeated indices in Minkowsky space having the metric  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  is supposed, i.e.  $\omega_\mu \omega^\mu \equiv g^{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu = \omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2$ .

We demand new variable  $\omega$  to satisfy d’Alembert and Hamilton equations simultaneously

$$\square \omega = F_2(\omega), \quad (4)$$

$$\omega_\mu \omega^\mu = F_3(\omega). \quad (5)$$

As a result equation (3) takes the form

$$F_3(\omega) \ddot{\varphi} + F_2(\omega) \dot{\varphi} = F_1(\varphi). \quad (6)$$

Winternitz and collaborators (see [1, 11]) construct new variables  $\omega$  by using subgroup structure of the Poincaré group  $P(1,3)$ . One can be easily convinced that invariants obtained in this way satisfy system (4), (5).

So to obtain set of variables  $\omega$  making possible to reduce multi-dimensional PDE (1) to ODE one has to consider the problem of compatibility of system (4), (5) and then to integrate it.

In the present paper compatibility of equations (4), (5) is investigated, i.e. all smooth functions ensuring the compatibility of d'Allembert–Hamilton system are described.

The direct application of Cartan's method of investigation of compatibility of over-determined PDE [2] is rather difficult. To avoid arising difficulties we essentially use symmetry properties of system (4), (5) [7, 8].

System (4), (5) via the change of dependent variable  $z = z(\omega)$  can be reduced to the following system

$$\square\omega = F(\omega), \quad (7)$$

$$\omega_{\mu}\omega^{\mu} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}, \quad (8)$$

ODE (6) taking the form

$$\lambda\ddot{\varphi} + F(\omega)\dot{\varphi} = F_1(\varphi). \quad (9)$$

Before formulating the principal result of the paper we adduce without proof some auxiliary statements.

**Lemma 1.** *Solutions of system (7), (8) satisfy the identities*

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu_1}\omega^{\mu\nu_1} &= -\lambda\dot{F}(\omega), \\ \omega_{\mu\nu_1}\omega^{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2}^{\mu} &= \frac{1}{2!}\lambda^2\dot{F}(\omega), \\ \omega_{\mu\nu_1}\omega^{\nu_1\nu_2}\ddot{\omega}^{\nu_2\nu_3}\omega^{\mu} &= \frac{1}{n!}(-\lambda)^n\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

where  $\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2\omega}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}$ ,  $\alpha, \beta = \overline{0, 3}$ .

**Lemma 2.** *Solutions of the system (7), (8) satisfy the following equality:*

$$\det(\omega_{\mu\nu}) = 0. \quad (10')$$

Let us now formulate the principal statement.

**Theorem 1.** *The necessary condition of compatibility of overdetermined system (7), (8) is as follows*

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, \\ \lambda(\omega + C_1)^{-1}, \\ 2\lambda(\omega + C_1)[(\omega + C_1)^2 + C_2]^{-1}, \\ 3\lambda[(\omega + C_1)^2 + C_2][(\omega + C_1)^3 + 3C_2(\omega + C_1) + C_3]^{-1}, \end{cases} \quad (11)$$

where  $C_1, C_2, C_3$  are arbitrary constants.

**Proof.** By direct (and rather tiresome) verification one can be convinced that the following identity holds

$$\begin{aligned} 6(\omega_{\mu\nu_1}\omega^{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2\nu_3}\omega^{\nu_3\mu}) - 8(\omega_{\mu}^{\mu})(\omega_{\mu\nu_1}\omega^{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2}^{\mu}) - \\ - 3(\omega_{\mu\nu_1}\omega^{\mu\nu_1})^2 + 6(\omega_{\mu}^{\mu})^2(\omega_{\mu\nu_1}\omega^{\mu\nu_1}) - (\omega_{\mu}\omega^{\mu})^4 = 24\det(\omega_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (12)$$

Substituting (10), (10’) into (12) one obtains nonlinear ODE for  $F(\omega)$

$$\lambda^3 \ddot{F} + 4\lambda^2 F \ddot{F} + 3\lambda^2 \dot{F}^2 + 6\lambda \dot{F} F^2 + F^4 = 0, \tag{13}$$

where  $\dot{F} \equiv \frac{dF}{d\omega}$ .

General solution of equation (13) is given by formulae (11). Theorem is proved.

**Note 1.** Compatibility of three-dimensional d’Alembert–Hamilton system has been investigated in detail by Collins [3]. Collins essentially used geometrical methods which could not be generalized to higher dimensions.

Using Lie’s method (see e.g. [10]) one can prove the following statement.

**Theorem 2.** *The sytem of PDE (7), (8) is invariant under the 15-parameter conformal group  $C(1, 3)$  iff*

$$F(\omega) = 3\lambda(\omega + C)^{-1}, \quad \lambda > 0, \quad C = \text{const}. \tag{14}$$

**Note 2.** Formula (14) can be obtained from (11) by putting  $C_2 = C_3 = 0$ . So Theorem 2 demonstrates close connection between compatibility of a system of PDE and its symmetry.

**Note 3.** It is common knowledge that PDE (7) is invariant under the group  $C(1, 3)$  iff  $F(\omega) = \lambda\omega^3$  [7]. Consequently, an additional constraint (8) changes essentially symmetry properties of d’Alembert equation (choosing  $F_3(\omega)$  in a proper way one can obtain conformally-invariant system of the form (4), (5) under arbitrary  $F_2(\omega)$ ).

**2.** Let us list explicit form of some exact solutions of d’Alembert–Hamilton system and reduced ODE for function  $\varphi(\omega)$ .

№	$\lambda$	$F(\omega)$	$\omega = \omega(x)$	ODE for $\varphi(\omega)$
1.	1	0	$a_\mu x^\mu$	$\ddot{\varphi} = F_1(\varphi)$
2.	1	$\omega^{-1}$	$[(a_\mu x^\mu)^2 - (b_\mu x^\mu)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + \omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
3.	1	$2\omega^{-1}$	$[(a_\mu x^\mu)^2 - (b_\mu x^\mu)^2 - (c_\mu x^\mu)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 2\omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
4.	1	$3\omega^{-1}$	$(x_\mu x^\mu)^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 3\omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
5.	-1	0	$(b_\mu x^\mu) \cos h_1 + (c_\mu x^\mu) \sin h_1 + g_1$ $a_\mu x^\mu - (b_\mu x^\mu) \cos h_2 -$ $-(c_\mu x^\mu) \sin h_2 - g_2 = 0$	$\ddot{\varphi} = -F_1(\varphi)$
6.	-1	$-\omega^{-1}$	$[(b_\mu x^\mu + h_1)^2 + (c_\mu x^\mu + h_2)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + \omega^{-1} \dot{\varphi} = -F_1(\varphi)$
7.	-1	$-2\omega^{-1}$	$[(b_\mu x^\mu)^2 + (c_\mu x^\mu)^2 + (d_\mu x^\mu)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 2\omega^{-1} \dot{\varphi} = -F_1(\varphi)$
8.	0	0	$h_1$	$0 = F_1(\varphi)$

Here  $h_1, g_1$  are arbitrary smooth functions on  $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$ ,  $h_2, g_2$  – on  $\omega + d_\mu x^\mu$ ;  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$  are arbitrary real parameters satisfying conditions of the form

$$-a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = d_\mu d^\mu = -1,$$

$$a_\mu b^\mu = a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0.$$

3. Natural generalization of the formula (2) is given by ansatz of the form [4]

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega). \quad (15)$$

Some multi-parameter families of exact solutions of nonlinear d'Alambert equation with nonlinearity  $F_1 = \tau u^k$ ,  $\tau, k = \text{const}$ , were constructed with the help of ansatz (15) by Fushchych and Serov [7].

Omitting intermediate calculations we write down new family of solutions of equation (1) under  $F_1 = \tau u^k$  obtained via ansatz (15)

$$u(x) = R^{-1} \left[ C_6 + \frac{1}{2}\tau(1-k)^2 \int R^{1-k}(\omega) d\omega \right]^{1/(1-k)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2}(a_\mu x^\mu - d_\mu x^\mu) - \frac{1}{2}\dot{R}R^{-1} [(b_\mu x^\mu)^2 + (c_\mu x^\mu)^2] + \right. \\ \left. + f_0 [(b_\mu x^\mu)^2 - (c_\mu x^\mu)^2] + f_1 b_\mu x^\mu + f_2 \right\}^{1/(1-k)},$$

where

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2}C_1 R^{-2}(\omega), \\ f_1(\omega) = \frac{1}{2}C_4 R(\omega) \exp \left\{ 4C_1 \int R^{-2}(\omega) d\omega \right\}, \\ f_2(\omega) = C_4 \int R(\omega) \exp \left\{ 4C_1 \int R^{-2}(\omega) d\omega \right\} d\omega + C_5,$$

and  $\omega = a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$ ,  $C_1, \dots, C_6 = \text{const}$ .

Function  $R = R(\omega)$  is determined by formulae

$$R(\omega) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} [(C_2\omega + C_3)^2 - 16C_1^2]^{1/2}, \\ (8\varepsilon C_1\omega + C_2)^{1/2}, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

1. Beckers J., Patera J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 72–83.
2. Cartan E., *Les systèmes différentiels extérieurs et leur applications scientifiques*, Paris, Hermann, 1946.
3. Collins C.B., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–172.
4. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
5. Fushchych W.I., On symmetry and some exact solutions of some many-dimensional equations of mathematical physics, in Theoretical-algebraic methods in mathematical physics problems, Kiev, Institute of Mathematics, 1983, 4–23.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Symmetries of Maxwell's equations*, Dordrecht, D. Reidel Publ. Comp., 1987.
7. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear multidimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.

8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Conformal symmetry and new exact solutions of  $SU_2$  Yang–Mills theory, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.
9. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some exact solutions of a system of non-linear differential equations for spinor and vector fields, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 4173–4190.
10. Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, Springer-Verlag, New York, 1986.
11. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of fundamental group of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597–1624.
12. Grundland A.M., Harmad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 491–506.

# Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

Построены широкие семейства точных решений нелинейных уравнений для классического дираковского поля. Предложены новые нелинейные конформно-инвариантные уравнения для спинорного поля.

Vast families of exact solutions of the nonlinear equations for classical Dirac field are constructed. New nonlinear conformally-invariant equations for spinor field are suggested.

## Введение

Шестьдесят лет тому назад, в 1928 г. в журнале “Proceedings of the Royal Society” [1] Поль Адриен Морис Дирак опубликовал открытое им принципиально новое уравнение теоретической и математической физики

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

которое, наряду с уравнениями Ньютона, Максвелла, Шредингера, лежит в основе современной теоретической физики\*. В (1)  $\psi(x)$  — четырехкомпонентная комплекснозначная функция;  $x = (x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3) \in R(1, 3)$  — четырехмерное псевдоевклидово пространство;  $\gamma_\mu$  — четырехрядные матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ,  $m$  — масса частицы.

Проблеме построения линейных многокомпонентных уравнений, обобщающих уравнение Дирака (1), для частиц произвольного спина посвящено огромное число работ (см., например, [2–6] и литературу в [6]).

Луи де Бройль высказал идею о том, что частицы (поля) со спинами  $s = 0, 1, 3/2, \dots$  должны строиться на основе спинорного уравнения Дирака (1). Линейной реализации этой идеи посвящены работы по теории линейных релятивистских уравнений для частиц произвольного спина.

Первой нелинейной попыткой реализации идеи де Бройля была статья Д. Иваненко [7], в которой предложено нелинейное обобщение уравнения Дирака в виде

$$[\gamma_\mu p^\mu - m + \lambda(\bar{\psi}\psi)]\psi(x) = 0. \quad (3)$$

В начале 50-х годов В. Гейзенберг [8–11] выдвинул программу по разработке единой теории поля на основе следующего нелинейного обобщения уравнения (1):

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_4\psi)\gamma^\mu\gamma_4]\psi(x) = 0, \quad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \quad (4)$$

Простейшее конформно-инвариантное нелинейное спинорное уравнение получил Ф. Гюрши [12]:

$$\left[ \gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3} \right] \psi(x) = 0. \quad (5)$$

Широкий класс конформно-инвариантных нелинейных уравнений типа Дирака, отличных от (4), (5), предложен в [13]. Одно из них имеет вид

$$\left[ \gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu[(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)]^{-1/3} \right] \psi(x) = 0.$$

В [14, 15] предложен простой способ построения нелинейных спинорных уравнений, которые по своим симметричным свойствам существенно отличаются от уравнений (1)–(5). Наиболее простое уравнение такого класса получается с помощью замены

$$\gamma_\mu \rightarrow \bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (6)$$

Сделав в (1) замену (6) и положив  $m = 0$ , приходим к нелинейному уравнению [14]

$$(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)p^\mu\psi = 0. \quad (7)$$

Можно доказать, что система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (7) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры Ли.

В литературе существует немного работ, в которых построены в явном виде точные решения нелинейных спинорных уравнений [16–22].

В настоящей статье, в основу которой положены работы авторов [23–28], построены классы точных решений нелинейных спинорных уравнений. Речь пойдет о построении многопараметрических семейств классических (неквантовых) решений нелинейных спинорных систем.

Структура обзора такова. В разд. 1 изучена симметрия нелинейного уравнения Дирака

$$\left[ \gamma_\mu p^\mu + F(\psi^*, \psi) \right] \psi(x) = 0, \quad (8)$$

где  $F(\psi^*, \psi)$  — произвольная четырехрядная матрица, элементы которой являются гладкими функциями восьми полевых переменных  $\psi^*, \psi$ . Описаны все матрицы  $F(\psi^*, \psi)$ , при которых уравнение (8) инвариантно относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$  — группы Пуанкаре, дополненной однопараметрической группой масштабных преобразований, конформной группы  $C(1, 3) \supset \tilde{P}(1, 3) \supset P(1, 3)$ .

В разд. 2 описаны анзацы

$$\psi(x) = A(x)\psi(\omega), \quad (9)$$

предложенные в [23] и систематически описанные в [24–28], которые редуцируют систему (8) к системе для четырех функций, зависящих только от трех новых инвариантных переменных  $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ . Дираковский спинор  $\psi(x)$  зависит от четырех переменных  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ . В (9)  $A(x)$  — некоторая невырожденная матрица размерности  $4 \times 4$ , явный вид которой будет найден. В том случае, когда  $\varphi$  зависит только от одной независимой переменной, анзац

(9) редуцирует уравнение (8) к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Многие из таких ОДУ удастся решить точно и тем самым построить точные решения исходного нелинейного спинорного уравнения (8).

В разд. 3 приведены редуцированные уравнения для спинорного уравнения типа (8). Явный вид многопараметрических семейств решений спинорного уравнения приведен в разд. 4. Симметрия редуцированных уравнений обсуждена в разд. 5. Двумерным нелинейным спинорным моделям посвящен заключительный раздел.

Исследованию симметричных свойств и построению точных решений многомерных нелинейных волновых уравнений

$$\square u + F(u) = 0$$

посвящены работы [14, 15, 23, 29]. Широкие классы точных решений многомерного уравнения Шредингера с дробной степенью

$$\left( p_0 - \frac{1}{2m} p_a p_a \right) u(t, \mathbf{x}) = \lambda |u|^{4/3} u(t, \mathbf{x})$$

построены в [30]. Решению лоренц-инвариантных волновых уравнений с дифференциальными связями посвящены статьи [28, 31].

### 1. Нелинейные спинорные уравнения инвариантные относительно групп $P(1, 3)$ , $\tilde{P}(1, 3)$ , $C(1, 3)$

В этом разделе описаны все уравнения вида (8), инвариантные относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  и ее расширений — расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$  и конформной группы  $C(1, 3)$ . Напомним, что расширенной группой Пуанкаре называется 11-параметрическая группа преобразований  $\{P(1, 3), D(1)\}$ , где  $D(1)$  — однопараметрическая группа масштабных преобразований

$$x'_\mu = e^\theta x_\mu, \quad \psi'(x') = e^{k\theta} \psi(x), \quad k, \theta = \text{const}. \quad (10)$$

15-параметрическая конформная группа  $C(1, 3)$  включает в себя расширенную группу Пуанкаре и 4-параметрическую группу специальных конформных преобразований (которую мы будем обозначать  $K(4)$ ):

$$\begin{aligned} x'_\mu &= (x_\mu - \theta_\mu x \cdot x) \sigma^{-1}(x); \\ \psi'(x') &= \sigma(x) [1 - (\gamma \cdot \theta)(\gamma \cdot x)] \psi(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\sigma(x) = 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x)$ ;  $\theta_\mu$  — параметры группы  $K(4)$ . Здесь и в дальнейшем используется сокращенная запись скалярного произведения в псевдоевклидовом пространстве  $R(1, 3)$ :

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (12)$$

**Теорема 1.** Уравнение (8) является пуанкаре-инвариантным, если и только если

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \gamma_4 + F_3 \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi) + F_4 S^{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi), \\ S_{\mu\nu} &= \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ ;  $F_1, F_2, F_3, F_4$  — произвольные скалярные функции от  $\bar{\psi} \psi, \bar{\psi} \gamma_4 \psi$ .



Мы приводим схему доказательства, в основе которой лежит инфинитезимальный алгоритм Ли [32–34]. Разлагая матрицу  $F(\psi^*, \psi)$  по базису  $\gamma$ -матриц (см., например, [35])

$$F = a(\psi^*, \psi)I + b^\mu(\psi^*, \psi)\gamma_\mu + c^{\mu\nu}(\psi^*, \psi)S_{\mu\nu} + d^\mu(\psi^*, \psi)\gamma_\mu\gamma_4 + e(\psi^*, \psi)\gamma_4 \quad (14)$$

и используя критерий инвариантности, получаем, что необходимым и достаточным условием инвариантности уравнения (8) относительно группы Пуанкаре является выполнение следующих равенств:

$$\begin{aligned} Q_{0k}a &= 0, \quad Q_{0k}e = 0, \quad Q_{0k}b_\mu + b^\alpha(g_{\alpha 0}g_{\mu k} - g_{\alpha k}g_{\mu 0}) = 0, \\ Q_{0k}d_\mu + d^\alpha(g_{\alpha 0}g_{\mu k} - g_{\alpha k}g_{\mu 0}) &= 0, \\ Q_{0k}c_{\mu\nu} + c^{\alpha\beta}(g_{\alpha k}\delta_{\beta 0}^{\mu\nu} + g_{\beta 0}\delta_{\alpha k}^{\mu\nu} - g_{\alpha 0}\delta_{\beta k}^{\mu\nu} - g_{\beta k}\delta_{\alpha 0}^{\mu\nu}) &= 0, \quad k = \overline{1, 3}, \\ Q_{0a} &= (S_{0a}\psi)^\alpha \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha} + (\bar{\psi}S_{0a})^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^\alpha}, \quad a = \overline{1, 3}, \\ \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} &= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu, \quad \alpha, \beta, \mu, \nu = \overline{0, 3}, \quad \delta_\beta^\alpha \text{ — символ Кронекера.} \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью простых, хотя и довольно громоздких рассуждений, удастся построить общее решение системы ДУЧП (15). Подставляя найденный результат в (14) с учетом тождеств Фирца–Паули

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}S_{\mu\nu}\psi)(\bar{\psi}S^{\mu\nu}\psi) + (\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2 &= 0, \\ (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_4\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\gamma^\mu\psi) &= 0, \\ (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_4\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\gamma^\mu\psi) - (\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2 &= 0, \end{aligned}$$

получаем утверждение теоремы.

**Замечание.** Нетрудно убедиться, что уравнение Гейзенберга является частным случаем уравнений (8), (13).

**Теорема 2.** Уравнение (8) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ , если и только если  $F(\psi^*, \psi)$  имеет вид (13), причем

$$\begin{aligned} F_i &= (\bar{\psi}\psi)^{-1/2k} \tilde{F}_i, \quad i = 1, 2, \\ F_j &= (\bar{\psi}\psi)^{-(1+2k)/2k} \tilde{F}_j, \quad j = 3, 4, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_4$  — произвольные функции от  $\bar{\psi}\psi/\bar{\psi}\gamma_4\psi$ .

**Теорема 3.** Уравнение (8) инвариантно относительно конформной группы  $C(1, 3)$ , если и только если  $F(\psi^*, \psi)$  имеет вид (13), (16) при  $k = -3/2$ .

Доказательство двух последних утверждений проводится с помощью метода Ли (см. [33, 34]), мы его опускаем. Отметим лишь, что достаточность теоремы 3 может быть установлена непосредственной проверкой, обозначим

$$\begin{aligned} G(\psi^*, \psi) &= \gamma_\mu p^\mu \psi + \left\{ (\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2\gamma_4)(\bar{\psi}\psi)^{1/3} + \right. \\ &\quad \left. + [\tilde{F}_3\gamma^\mu(\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi) + \tilde{F}_4S^{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma_4S_{\mu\nu}\psi)](\bar{\psi}\psi)^{-2/3} \right\} \psi. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда справедливы следующие тождества:

$$G(\psi^{*'}, \psi') = e^{-5/2\theta} G(\psi^*, \psi), \quad (18)$$

если  $\psi^{*'}, \psi'$  имеют вид (10) при  $k = -3/2$ ;

$$G(\psi^{*'}, \psi') = \sigma^2(x)[1 - (\gamma \cdot \theta)(\gamma \cdot x)]G(\psi^*, \psi), \quad (19)$$

если  $\psi^{*'}, \psi'$  имеют вид (11). Из (18), (19) следует, что уравнение инвариантно относительно групп преобразований (10), (11), что и требовалось доказать.

**Замечание.** Если положить в (16)  $\tilde{F}_2 \equiv \tilde{F}_3 \equiv \tilde{F}_4 \equiv 0$ ,  $\tilde{F}_1 = \lambda = \text{const}$ ,  $k = -3/2$ , то мы получим конформно-инвариантное спинорное уравнение Гюрши (5).

Как уже отмечалось во введении, существуют пуанкаре-инвариантные спинорные уравнения, принципиально отличные от уравнений вида (8). Одной из таких моделей является система нелинейных ДУЧП (7), на множестве решений которой реализуется представление бесконечномерной алгебры Ли. Этот факт дает возможность построить общее решение уравнения (7). Используя классические методы интегрирования систем ДУЧП первого порядка с одинаковой главной частью (см., например, [37]), получаем, что общее решение спинорного уравнения (7) задается следующими формулами:

$$F^\alpha(x_\mu(j \cdot j) - j_\mu(j \cdot x), \psi, \psi^*) = 0,$$

где  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ;  $F^\alpha : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}^4 \rightarrow \mathbf{C}^1$  — произвольные дифференцируемые (в смысле действительного анализа) функции.

### Анзацы для спинорного поля

В этом разделе изложен метод построения анзацев (9), редуцирующих уравнения вида (8) к ДУЧП меньших размерностей. Построены анзацы для спинорного поля, инвариантные относительно расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1,3)$ .

**Постановка задачи.** Будем говорить, что анзац (9) редуцирует уравнение (8) к ДУЧП меньшей размерности, если существуют четырехрядные матрицы  $R(x)$ ,  $R_1(\omega)$ ,  $R_2(\omega)$ ,  $R_3(\omega)$ ,  $Q(\omega, \varphi, \varphi^*)$ , для которых справедливо равенство

$$[\gamma_\mu p^\mu \psi + F(\psi^*, \psi)\psi]_{\psi=A(x)\varphi(\omega)} = R(x) \left\{ R_i \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i} + Q\varphi \right\}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что если  $\varphi(\omega)$  удовлетворяет уравнению

$$R_i \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i} + Q\varphi = 0, \quad (21)$$

то дираковский спинор, построенный по формуле (9), является решением исходного уравнения (8).

Следовательно, задача состоит в построении возможно более широких классов анзацев, удовлетворяющих условию (20). Подставляя анзац (9) в левую часть равенства (20) и приравнивая матричные коэффициенты при  $\partial\varphi/\partial\omega_i$ , получаем уравнения на  $\omega_i(x)$ ,  $A(x)$ :

$$\begin{aligned} i\gamma_\mu \frac{\partial A}{\partial x_\mu} &= RH(\omega), \\ i\gamma_\mu \frac{\partial \omega_a}{\partial x_\mu} A &= RR_a(\omega), \quad a = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$F((A\varphi)^*, A\varphi)A = R(x)\tilde{Q}(\omega, \varphi, \varphi^*), \quad \tilde{Q} + H = Q.$$

На первый взгляд, система ДУЧП (22) ничуть не проще, чем (8). Тем не менее теоретико-алгебраические методы дают эффективный алгоритм для построения широких классов частных решений системы (22). Из общей теории инвариантных решений следует, что если матрица  $A(x)$  и скалярные функции  $\omega_1(x)$ ,  $\omega_2(x)$ ,  $\omega_3(x)$  удовлетворяют условиям

$$QA(x) \equiv \left( \xi^\mu(x) \frac{\partial A}{\partial x_\mu} + \eta(x)A \right) = 0, \quad (23)$$

$$Q_d \omega_a \equiv \xi^\mu(x) \frac{\partial \omega_a}{\partial x_\mu} = 0, \quad a = \overline{1, 3}, \quad (24)$$

где  $Q$  — оператор симметрии уравнения (8), то анзац (9) редуцирует (8) к трехмерному ДУЧП (см. [33, 38, 39]).

Сформулируем теперь общую схему построения решений нелинейного уравнения Дирака, инвариантного относительно расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ . В качестве оператора  $Q$  выбираем линейную комбинацию базисных операторов алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре  $A\tilde{P}(1, 3)$ :

$$Q = c^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + c^{00} D + c^\mu P_\mu, \quad (25)$$

где  $P_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ ,  $J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}$ ,  $D = x_\mu P^\mu + ik$ ,  $c^{\mu\nu}$ ,  $c^{00}$ ,  $c^\mu$  — константы,  $\mu, \nu = \overline{0, 3}$ .

Решая систему ДУЧП (23), (24) с  $Q$  из (25), находим анзацы вида (9). Подстановка последних в (8) приводит к ДУЧП, зависящим от трех переменных  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Решая полученные уравнения и подставляя результаты в (9), находим точные решения исходного ДУЧП (8).

Таким образом, задача построения точных решений нелинейного уравнения Дирака разбивается на два этапа. Содержанием первого из них является интегрирование ДУЧП (23), (24) и построение анзацев (9). На втором этапе ищутся частные решения редуцированных ДУЧП.

Мы реализуем эту схему для нелинейного уравнения Дирака вида

$$\left[ \gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k} \right] \psi(x) = 0. \quad (26)$$

**Построение матриц  $A(x)$ .** Для того чтобы найти явный вид матрицы  $A(x)$ , необходимо проинтегрировать систему ДУЧП (23) с оператором  $Q$  вида (25). Но (23) — это система 16 уравнений с переменными коэффициентами, решить ее стандартными методами непросто. Поэтому, прежде чем интегрировать систему (23), упростим ее, воспользовавшись инвариантностью нелинейного уравнения (26) относительно расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ . Для этого сделаем в (23) следующую замену:

$$A'(x) = \exp\{\Sigma\}A(x), \quad (27)$$

где  $\Sigma = \theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^{00} D + \theta^\mu P_\mu$ ,  $\theta^{\mu\nu}$ ,  $\theta^{00}$ ,  $\theta^\mu = \text{const}$ .

Причем  $\Sigma$  выбирается таким образом, чтобы уравнение на  $A'(x)$  имело наиболее простой вид. Из (23), (27) нетрудно получить, что  $A'(x)$  удовлетворяет системе ДУЧП вида

$$[\exp\{\Sigma\}Q \exp\{-\Sigma\}]A'(x) = 0. \quad (28)$$

Следовательно, необходимо выбрать параметры  $\theta^{\mu\nu}$ ,  $\theta^{00}$ ,  $\theta^\mu$  так, чтобы оператор

$$Q' = \exp\{\Sigma\}Q \exp\{-\Sigma\} \quad (29)$$

имел наиболее простой вид. Эта задача решается следующей теоремой, которую мы приводим без доказательства.

**Теорема 4.** *Оператор (25) с помощью преобразования (29) может быть приведен к одному из операторов вида*

1.  $Q' = J_{01} + J_{12} - aD;$
2.  $Q' = J_{01} + J_{12} + P_0 + \beta P_3;$
3.  $Q' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3;$
4.  $Q' = J_{23} - aD;$
5.  $Q' = J_{01} + bJ_{23} - aD;$
6.  $Q' = J_{01} + bJ_{23} - D - \beta P_0;$
7.  $Q' = J_{01} + P_2;$
8.  $Q' = J_{23} + \alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_1;$
9.  $Q' = D;$
10.  $Q' = P_0 + P_3;$
11.  $Q' = P_0;$
12.  $Q' = P_3,$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — произвольные действительные параметры.

Таким образом, вместо того чтобы решать систему (23) с оператором  $Q$  общего вида, достаточно решить систему (28) с операторами  $Q$  вида (30), что значительно проще.

Рассмотрим, например, оператор  $Q' = J_{01} + J_{12} - aD$ , для него система (28) имеет вид

$$\left[ -ax_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + (x_2 - x_0) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2) - ak \right] A(x) = 0. \quad (31)$$

Решение (31) ищем в виде

$$A(x) = f(x) \exp\{g(x)\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0)\}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), получаем следующую систему для определения  $f(x)$ ,  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} -ax_\mu f_{x_\mu} + (x_2 - x_0)f_{x_1} - x_1(f_{x_0} + f_{x_2}) - akf &= 0, \\ -ax_\mu g_{x_\mu} + (x_2 - x_0)g_{x_1} - x_1(g_{x_0} + g_{x_2}) + \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Частное решение уравнений (33) дается формулами

$$f(x) = (x_0 - x_2)^{-k}, \quad g(x) = \frac{1}{2a} \ln(x_0 - x_2), \quad a \neq 0,$$

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{x_1}{2}(x_0 - x_2)^{-1}, \quad a = 0.$$

Подставляя полученный результат в (32), находим  $A(x)$ :

$$a \neq 0, \quad A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp \left\{ \frac{1}{2a} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \ln(x_0 - x_2) \right\},$$

$$a = 0, \quad A(x) = \exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 - x_2)} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \right\}.$$

Матрицы  $A(x)$ , соответствующие остальным операторам из (30), находятся аналогично, приводим окончательный результат:

1.  $a \neq 0, \quad A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp \left\{ \frac{1}{2a} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \ln(x_0 - x_2) \right\},$   
 $a = 0, \quad A(x) = \exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 - x_2)} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \right\};$
2.  $A(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (x_0 - x_2) \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \right\};$
3.  $A(x) = \exp \left\{ \frac{x_3}{2\beta} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \right\};$
4.  $A(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\};$
5.  $a \neq 0, a \neq -1, \quad A(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times$   
 $\times \exp \left\{ \frac{1}{2(a+1)} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\},$   
 $a = -1, \quad A(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times$   
 $\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\},$   
 $a = 0, \quad A(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\};$
6.  $A(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times$   
 $\times \exp \left\{ \frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\};$
7.  $A(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right\};$
8.  $A(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\};$
9.  $A(x) = x_0^{-k} I;$       10–12.  $A(x) = I,$

где  $I$  — единичная матрица размерности  $4 \times 4$ .

**Анзацы для уравнения (26).** Для того чтобы построить инвариантные переменные  $\omega_1(x)$ ,  $\omega_2(x)$ ,  $\omega_3(x)$ , необходимо проинтегрировать систему ДУЧП (23), взяв в качестве  $\xi^\mu(x)$  коэффициенты операторов (30). Интегрирование системы

(24) проводится стандартными методами теории линейных ДУЧП первого порядка, мы приводим полученный результат в виде таблицы, где  $-\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1$ .

Таблица 1

№ п/п	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
1.1	$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)x_3^{-2}$	$(x_0 - x_2)x_3^{-1}$	$ax_1(x_0 - x_2)^{-1} - \ln(x_0 - x_2)$
1.2	$x_0 - x_2$	$x_3$	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$
2	$x_3 + \beta(x_0 - x_2)$	$2x_1 + (x_0 - x_2)^2$	$3x_3 + 3x_1(x_0 - x_2) + (x_0 - x_2)^3$
3	$x_0 - x_2$	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$	$\beta x_1 - (x_0 - x_2)x_3$
4	$x_0x_1^{-1}$	$\ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \arctg \frac{x_2}{x_3}$	$(x_2^2 + x_3^2)(x_0^2 - x_1^2)^{-1}$
5.1	$(x_0^2 - x_1^2)^{-a-1} \times$ $\times (x_0 + x_1)^{2a}$	$(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \arctg \frac{x_2}{x_3}$
5.2	$x_0 + x_1$	$(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) - 2 \arctg \frac{x_2}{x_3}$
5.3	$x_0^2 - x_1^2$	$x_2^2 + x_3^2$	$b \ln(x_0 + x_1) + \arctg \frac{x_2}{x_3}$
6	$(2x_0 + 2x_1 + \beta) \times$ $\times \exp \left\{ \frac{2}{\beta}(x_1 - x_0) \right\}$	$(2x_0 + 2x_1 + \beta)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \arctg \frac{x_2}{x_3}$
7	$x_0^2 - x_1^2$	$\ln(x_0 + x_1) - x_2$	$x_3$
8	$x_2^2 + x_3^2$	$\arctg \frac{x_2}{x_3} + \beta_1x_0 + \beta_2x_1$	$\alpha_2x_0 + \alpha_1x_1$
9	$x_1x_0^{-1}$	$x_2x_0^{-1}$	$x_3x_0^{-1}$
10	$x_0 + x_1$	$x_2$	$x_3$
11	$x_1$	$x_2$	$x_3$
12	$x_0$	$x_1$	$x_2$

Подставляя формулы (34) и результаты из табл. 1 в (9), получаем набор анзацев, инвариантных относительно расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ :

$$1.1. \psi(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp \left\{ \frac{1}{2a} \gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2) \ln(x_0 - x_2) \right\} \varphi(\omega_{1.1}); \quad (35)$$

$$1.2. \psi(x) = \exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 - x_2)} \gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2) \right\} \varphi(\omega_{1.2}); \quad (36)$$

$$2. \psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0)(x_2 - x_0) \right\} \varphi(\omega_2); \quad (37)$$

$$3. \psi(x) = \exp \left\{ \frac{x_3}{2\beta} \gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0) \right\} \varphi(\omega_3); \quad (38)$$

$$4. \psi(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\omega_4); \quad (39)$$

$$5.1. \psi(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2(a+1)} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\omega_{5.1}); \quad (40)$$

$$5.2. \psi(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\omega_{5.2}); \quad (41)$$

$$5.3. \psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\omega_{5.3}); \quad (42)$$

$$6. \psi(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \times \exp \left\{ \frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\omega_6); \quad (43)$$

$$7. \psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right\} \varphi(\omega_7); \quad (44)$$

$$8. \psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\omega_8); \quad (45)$$

$$9. \psi(x) = x_0^{-k} \varphi(\omega_9); \quad (46)$$

$$10. \psi(x) = \varphi(\omega_{10}); \quad (47)$$

$$11. \psi(x) = \varphi(\omega_{11}); \quad (48)$$

$$12. \psi(x) = \varphi(\omega_{12}), \quad (49)$$

$\omega_i$  — набор инвариантов из табл. 1 под номером  $i$ .

**Редуцированные уравнения.** Подставляя анзацы (35)–(49) в нелинейное уравнение Дирака (26), получаем редуцированные уравнения для определения  $\varphi(\omega)$ , общая структура которых такова:

$$i(f^{a\mu}(\omega)\gamma_\mu)\varphi_{\omega_a} + i(g^\mu(\omega) + \gamma_4 h^\mu(\omega))\gamma_\mu\varphi + \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi = 0, \quad (50)$$

где  $f^{a\mu}$ ,  $g^\mu$ ,  $h^\mu$  — рациональные функции от  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ ,  $a = \overline{1, 3}$ . Выпишем полученные уравнения:

$$1.1. \quad k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)(\omega_1 + a^{-2}\omega_2^2\omega_3^2) + (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_2^2 - 2a^{-1}\gamma_1\omega_3\omega_2^2 - 2\gamma_3\omega_1\omega_2]\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2]\varphi_{\omega_2} + [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (51)$$

$$1.2. \quad \frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \gamma_3\varphi_{\omega_2} + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_3\omega_1^{-1}]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (52)$$

$$2. \quad [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} + \frac{3}{2}(2\gamma_2 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (53)$$

$$3. \quad \frac{1}{2\beta}\gamma_4(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \left[ (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 - \frac{2}{\beta}\gamma_1\omega_3 + (\gamma_0 - \gamma_2)(\beta^{-2}\omega_3^2 + \omega_2)\omega_1^{-1} \right]\varphi_{\omega_2} + (\beta\gamma_1 - \gamma_3\omega_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (54)$$

$$4. \quad \frac{1}{2}(1-2k)\gamma_3\varphi + (\omega_1\omega_3)^{1/2}(\gamma_0 - \gamma_1\omega_1)\varphi_{\omega_1} + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \\ + [2\gamma_3 - (\gamma_0 + \gamma_1\omega_1)\omega_3^{1/2}\omega_1^{-1/2}]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (55)$$

$$5.1. \quad \left[ -k(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(a+1)}(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{-1/2(a+1)} + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \varphi - \\ - 2(a+1)(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2(a+1)})\omega_1\varphi_{\omega_1} + \\ + 2[\omega_2(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) - \omega_2^{3/2}\gamma_3]\varphi_{\omega_2} + \\ + 2(a\gamma_2 + b\gamma_3)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (56)$$

$$5.2. \quad \left[ -k(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2}) + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)\omega_1^{1/2} + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \varphi + \\ + (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + [2\omega_2(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2}) - \\ - \gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi_{\omega_2} + 2\omega_2^{1/2}(b\gamma_3 - \gamma_2)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (57)$$

$$5.3. \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_3\omega_2^{-1/2})\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_1(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + \\ + 2\gamma_3\omega_2^{-1/2}\varphi_{\omega_2} + [b(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2\omega_2^{-1/2}]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (58)$$

$$6. \quad \frac{1}{2}[(1-2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi + 2\omega_1[\beta(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_0 - \gamma_1]\varphi_{\omega_1} + \\ + 2\omega_2[(\gamma_0 + \gamma_1) - \gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi_{\omega_2} + 2\omega_2^{1/2}(\gamma_2 + b\gamma_3)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (59)$$

$$7. \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1 + \gamma_0 - \gamma_1]\varphi_{\omega_1} + \\ + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (60)$$

$$8. \quad \frac{1}{2}\gamma_3\omega_1^{-1/2}\varphi + 2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + (\beta_1\gamma_0 + \beta_2\gamma_1 + \gamma_2\omega_1^{-1/2})\varphi_{\omega_2} + \\ + (\alpha_2\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (61)$$

$$9. \quad -k\gamma_0\varphi + (\gamma_a - \gamma_0\omega_a)\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (62)$$

$$10. \quad (\gamma_0 + \gamma_3)\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (63)$$

$$11. \quad \gamma_a\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad (64)$$

$$12. \quad \gamma_0\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (65)$$

где  $\varphi_{\omega_a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_a}$ ,  $a = \overline{1, 3}$ .



Следующим этапом нашего алгоритма является редукция полученных систем ДУЧП к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая структура получаемых при этом систем нелинейных ОДУ такова:

$$if^\mu(z)\gamma_\mu \frac{d\varphi}{dz} + i[g^\mu(z)\gamma_\mu + h^\mu(z)\gamma_\mu\gamma_4]\varphi + \lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi = 0,$$

где  $f^\mu$ ,  $g^\mu$ ,  $h^\mu$  — рациональные функции от  $z = z(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

Если в ДУЧП (51) положить  $\varphi = \varphi(\omega_2)$ , то для нахождения спинора  $\varphi(\omega_2)$  получаем следующую систему ОДУ:

$$k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2]\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (66)$$

если же выбрать  $\varphi = \varphi(\omega_3)$ , получаем систему ОДУ вида

$$k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (67)$$

Аналогичные рассуждения, будучи примененными к уравнениям (52)–(65), дают набор систем нелинейных ОДУ (в скобках указан номер ДУЧП, из которого получается рассматриваемое уравнение):

$$(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((52), 68)$$

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((53), 69)$$

$$2\gamma_1\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((53), 70)$$

$$2\beta(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \gamma_4(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi = 2i\lambda\beta(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((54), 71)$$

$$\frac{1}{2}(1 - 2k)\gamma_3\varphi + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((55), 72)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_3\omega_2^{-1/2})\varphi + 2\gamma_3\omega_2^{-1/2}\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((58), 73)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(1 - 2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi + \\ + 2\omega_2(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \end{aligned} \quad ((59), 74)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1 + \gamma_0 - \gamma_1]\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((60), 75)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((60), 76)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((60), 77)$$

$$\frac{1}{2}\omega_1^{-1/2}\gamma_3\varphi + 2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((61), 78)$$

$$-k\gamma_0\varphi + (\gamma_a - \gamma_0\omega_a)\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((62), 79)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((63), 80)$$

$$\gamma_a\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi; \quad ((64), 81)$$

$$\gamma_0\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad ((65), 82)$$

(по  $a$  нет суммирования).

Если удастся проинтегрировать одно из уравнений (66)–(82), то подстановка полученного результата в соответствующий анзац (35)–(49) дает точное решение нелинейного уравнения Дирака (26). Замечательным является то обстоятельство, что решения некоторых нелинейных систем ОДУ (66)–(82) удается построить в явном виде. Это связано с широкой группой инвариантности, допускаемой исходным ДУЧП (26).

**Точные решения нелинейного уравнения Дирака.** В силу того что системы (66)–(82) являются нелинейными, стандартные методы интегрирования ОДУ к ним неприменимы. Поэтому в каждом конкретном случае приходится использовать специфические приемы, мы приведем один из наиболее характерных.

“Линеаризуем” систему (69) следующим образом:

$$\begin{aligned} [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\frac{d\varphi}{d\omega_1} &= i\lambda(f(\omega_1))^{1/2k}\varphi, \\ \bar{\varphi}\varphi &= f(\omega_1). \end{aligned} \quad (83)$$

Первое уравнение без труда интегрируется, его общее решение имеет вид

$$\varphi(\omega_1) = \exp\left\{-i\lambda\int^{\omega_1}(f(z))^{1/2k}dz[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\right\}\chi,$$

где  $\chi$  — произвольный постоянный спинор.

Используя второе условие из (83), получаем

$$f(\omega_1) = \bar{\varphi}\varphi = \bar{\chi}\chi,$$

следовательно, общее решение (69) имеет следующий вид:

$$\varphi = \exp\left\{-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\omega_1\right\}\chi. \quad (84)$$

Совершенно аналогично получаем общее решение системы ОДУ (70):

$$\varphi = \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1\omega_2\right\}\chi. \quad (85)$$

Подстановка (84), (85) в формулу (37) дает точные решения нелинейного уравнения Дирака (26):

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)(x_0 - x_2)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-i\lambda[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)](\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(x_3 + \beta(x_0 - x_2))\right\}\chi; \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)(x_0 - x_2)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1(2x_1 + \beta(x_0 - x_2))^2\right\}\chi. \end{aligned} \quad (87)$$

Обратимся теперь к системе (68). Умножив ее слева на матрицу  $(\gamma_0 - \gamma_2)$  и воспользовавшись тождеством  $(\gamma_0 - \gamma_2)^2 = 0$ , получим условие совместности этой системы

$$(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi = 0.$$

Несложно показать, что если  $\varphi$  удовлетворяет этому условию, то  $\bar{\varphi}\varphi = 0$ . Следовательно,  $\bar{\psi}\psi = \bar{\varphi}\varphi = 0$ , т.е. множитель  $(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}$ , определяющий нелинейный характер ДУЧП (26), равен нулю. Такие решения мы не рассматриваем.

Кроме указанных случаев удастся проинтегрировать системы ОДУ (71), (72) (при  $(k - 1/2)a = 0$ ), (76)–(78), (80)–(82). При этом системы (71), (80) приводят к решениям с  $\psi\bar{\psi} = 0$ .

Подстановка полученных результатов в формулы (35)–(49) дает следующие классы точных решений нелинейного уравнения Дирака:

$$k = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -i\lambda \frac{\bar{\chi}\chi}{2(1+a^2)} (\gamma_3 + a\gamma_2) \left[ \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right] \right\} \chi; \quad (88)$$

$$k \neq \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2i\lambda k}{1-2k} (x_2^2 + x_3^2)^{(2k-1)/4k} \gamma_3 (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \right\} \chi; \quad (89)$$

$$k \neq 0, \quad \psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \left[ \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_1) \gamma_2 - i\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2) \right] (\ln(x_0 + x_1) - x_2) \right\} \chi; \quad (90)$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -i\gamma_3 \left[ \lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} + \frac{i}{2} (\gamma_0 + \gamma_1) \right] x_3 \right\} \chi; \quad (91)$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ -i\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_1 x_1 \right\} \chi; \quad (92)$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ i\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_0 x_0 \right\} \chi. \quad (93)$$

Построенные решения обладают тем недостатком, что переменные  $x_\mu$  входят в них несимметрично, в то время как в нелинейном уравнении Дирака (26) все переменные равноправны. На физическом языке это означает, что система (26) решается в фиксированной системе отсчета. Чтобы получить решения (точнее, семейства решений), не зависящие от системы отсчета, необходимо “размножить” (86)–(93) с помощью преобразований из расширенной группы Пуанкаре  $\hat{P}(1, 3)$  (о размножении решений см., например, [13, 25]).

Мы осуществим процедуру размножения решения (87), в остальных случаях рассуждения аналогичны. Формула размножения решений с помощью преобразований, генерируемых оператором  $J_{01}$ , имеет вид

$$\psi_2(x) = \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \psi_1(x'), \quad \theta = \text{const},$$

$$x'_0 = x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta, \quad x'_1 = x_1 \text{ch } \theta + x_0 \text{sh } \theta, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

Применяя эту формулу к (87), получаем:

$$\psi_2(x) = \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta - x_2) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_1 (2x_1 \text{ch } \theta + 2x_0 \text{sh } \theta + (x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta - x_2)^2) \right\} \chi. \quad (94)$$

Перепишем (94) в эквивалентном виде:

$$\psi_2(x) = \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta - x_2) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_1 [2x_1 \text{ch } \theta + 2x_0 \text{sh } \theta + \right.$$

$$\left. + (x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta - x_2)^2] \right\} \exp \left\{ \frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \chi.$$

Принимая во внимание тождества

$$\exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \gamma_\alpha \exp \left\{ \frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} = \begin{cases} \gamma_0 \text{ch } \theta + \gamma_1 \text{sh } \theta, & \alpha = 0, \\ \gamma_2 \text{ch } \theta + \gamma_0 \text{sh } \theta, & \alpha = 1, \\ \gamma_\alpha, & \alpha = 2, 3, \end{cases}$$

окончательно получаем:

$$\psi_2(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_1 \text{ch } \theta + \gamma_0 \text{sh } \theta) (\gamma_0 \text{ch } \theta + \gamma_1 \text{sh } \theta - \gamma_2) \times \right.$$

$$\times (x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta - x_2) \left. \right\} \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma_1 \text{ch } \theta + \gamma_0 \text{sh } \theta) \times \right.$$

$$\times [2x_1 \text{ch } \theta + 2x_0 \text{sh } \theta + (x_0 \text{ch } \theta + x_1 \text{sh } \theta - x_2)^2] \left. \right\} \tilde{\chi},$$

$$\tilde{\chi} = \exp \left\{ -\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \chi.$$

Используя остальные преобразования из группы Лоренца  $O(1,3) \subset \tilde{P}(1,3)$ , получаем следующее семейство решений:

$$\psi_3(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma \cdot b) ((\gamma \cdot a) + (\gamma \cdot d)) (a \cdot x + d \cdot x) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma \cdot b) [2b \cdot x + (a \cdot x + d \cdot x)^2] \right\} \chi. \quad (95)$$

Здесь и в дальнейшем  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$  — произвольные действительные параметры, удовлетворяющие соотношениям вида

$$-a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = d \cdot d = -1,$$

$$a \cdot b = a \cdot c = a \cdot d = b \cdot c = b \cdot d = c \cdot d = 0. \quad (96)$$

Размножая семейство (95) с помощью однопараметрической группы масштабных преобразований и группы сдвигов, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \psi_4(x) = & \exp \left\{ \frac{\theta}{2} (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) (a \cdot z + d \cdot z) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma \cdot b) [2b \cdot z + \theta(a \cdot z + d \cdot z)^2] \right\} \chi, \end{aligned} \quad (97)$$

$$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \quad \mu = \overline{0, 3}, \quad \theta_\mu, \theta = \text{const.}$$

В решение (97) все переменные входят на равных правах, и вид его не изменяется при переходе к другой инерциальной системе отсчета (иначе говоря, семейство решений (97) инвариантно относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ ).

Размножая аналогичным образом решения (86), (88)–(93), получаем следующие семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака (26):

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp \left\{ \frac{\theta}{2} (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) (a \cdot z + d \cdot z) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i\lambda [\gamma \cdot c + \beta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)] (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (c \cdot z + \beta(a \cdot z + d \cdot z)) \right\} \chi; \end{aligned} \quad (98)$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ i\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma \cdot a) (a \cdot z) \right\} \chi; \quad (99)$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ -i\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma \cdot b) (b \cdot z) \right\} \chi; \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) \ln \frac{1}{\theta} (a \cdot z + b \cdot z) \right\} \exp \left\{ \left[ \frac{1}{2\theta} (\gamma \cdot a + \gamma \cdot b) (\gamma \cdot c) - \right. \right. \\ & \left. \left. - i\lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (\gamma \cdot a + \gamma \cdot b - \gamma \cdot c) \right] (\theta \ln(a \cdot z + b \cdot z) - c \cdot z) \right\} \chi; \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) \ln \frac{1}{\theta} (a \cdot z + b \cdot z) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i(\gamma \cdot c) \left[ \lambda (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} + \frac{i}{2\theta} (\gamma \cdot a + \gamma \cdot b) \right] c \cdot z \right\} \chi; \end{aligned} \quad (102)$$

$$\text{при } k = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & [(b \cdot z)^2 + (c \cdot z)^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot c) \arctg \frac{b \cdot z}{c \cdot z} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{i\lambda (\bar{\chi}\chi)}{2(1 + \alpha^2)} (\alpha(\gamma \cdot b) + \gamma \cdot c) \left[ \ln((b \cdot z)^2 + (c \cdot z)^2) + 2\alpha \arctg \frac{b \cdot z}{c \cdot z} \right] \right\} \chi; \end{aligned} \quad (103)$$

$$\text{при } k \neq \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & [(b \cdot z)^2 + (c \cdot z)^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot c) \arctg \frac{b \cdot z}{c \cdot z} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{2i\lambda k}{1 - 2k} ((b \cdot z)^2 + (c \cdot z)^2)^{(2k-1)/4k} (\gamma \cdot c) \right\} \chi. \end{aligned} \quad (104)$$

В формулах (98)–(104)  $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta_\mu$  — произвольные постоянные,  $\chi$  — произвольный постоянный спинор.

Кроме прямой редукции систем ДУЧП (51)–(62) существуют и другие возможности построения точных решений. В частности, если в (53) положить  $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ , мы получим двумерное уравнение Дирака

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi. \quad (105)$$

Удается найти частные решения системы (105), которые, будучи подставленными в формулу (37), дают новые классы решений уравнения (26):

$$\text{при } k = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)(a \cdot z + d \cdot z)\right\} \times \\ & \times \left[ (\gamma \cdot b + \beta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d))(b \cdot z + \beta(a \cdot z + d \cdot z)) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\gamma \cdot c[2c \cdot z + (a \cdot z + d \cdot z)^2] \right] \times \\ & \times \omega^{-1} \exp\left\{-\frac{i\lambda(\bar{\chi}\chi)}{(\beta_1^2 + \beta_2^2)\omega}(\beta_1(\gamma \cdot b + \beta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)) + \right. \\ & \left. + \beta_2(\gamma \cdot c))\left[\beta_1(b \cdot z + \beta(a \cdot z + d \cdot z)) + \frac{1}{2}\beta_2(2c \cdot z + (a \cdot z + d \cdot z)^2)\right]\right\}\chi; \end{aligned} \quad (106)$$

$$\text{при } k < 0,$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)(a \cdot z + d \cdot z)\right\} \times \\ & \times \left\{ \left[ (\gamma \cdot b + \beta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d))(b \cdot z + \beta(a \cdot z + d \cdot z)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}\gamma \cdot c(2c \cdot z + (a \cdot z + d \cdot z)^2) \right] f(\omega) + ig(\omega) \right\}\chi. \end{aligned} \quad (107)$$

В (106), (107)  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — произвольные действительные параметры;  $\chi$  — произвольный постоянный спинор;  $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ ;

$$\begin{aligned} \omega = & (b \cdot z + \beta(a \cdot z + d \cdot z))^2 + \frac{1}{4}(2c \cdot z + (a \cdot z + (a \cdot z + d \cdot z)^2))^2; \\ g(\omega) = & \pm \left(\frac{1+|k|}{|k|}\right)^{1/2} \omega^{-1/2} f(\omega) = \mp \left(\frac{1+|k|}{|k|}\right)^{1/2} \left\{ \mp \frac{(k^2 + |k|)^{1/2}}{2\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right\}^k \omega^{-k/2}. \end{aligned}$$

В заключение этого раздела остановимся на случае, когда в (26)  $k = 3/2$ . Из теоремы 3 следует, что уравнение (26) при таком выборе нелинейности инвариантно относительно конформной группы  $C(1, 3)$ . Этот факт может быть использован для получения новых решений. Формула разложения решений с помощью группы специальных конформных преобразований (11) имеет вид [13, 25]:

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \sigma^{-2}(x)[1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \theta)]\psi_1(x'); \\ x'_\mu &= (x_\mu - \theta_\mu x \cdot x)\sigma^{-1}(x); \\ \sigma(x) &= 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x), \quad \theta_\mu = \text{const}, \quad \mu = \overline{0, 3}. \end{aligned}$$

Используя в качестве  $\psi_1(x)$  решения (98)–(102), (104) при  $k = 3/2$  получаем семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака–Гюрши (6), инвариантного относительно конформной группы  $C(1, 3)$  (мы опускаем соответствующие формулы).

### Симметрия редуцированных уравнений

Поскольку используемый алгоритм построения точных решений требует знания симметрии уравнения, то следующим этапом после редукции нелинейного уравнения Дирака (26) к системам ДУЧП (51)–(65) должно быть исследование симметричных свойств последних. Но уравнения (51)–(65) имеют весьма сложный вид, поэтому непосредственное применение алгоритма Ли для нахождения максимальной симметрии затруднительно (перспективным является использование для этих целей ЭВМ [40]). Следовательно, возникает задача поиска более эффективных методов исследования теоретико-алгебраических свойств систем редуцированных ДУЧП.

**Алгебры инвариантности уравнений (51)–(65).** В основе нашего подхода к исследованию симметричных свойств уравнений (51)–(65) лежит следующее утверждение.

Пусть  $G$  — группа Ли преобразований,  $H$  — однопараметрическая подгруппа  $G$ , являющаяся нормальным делителем. Кроме того, задано ДУЧП с группой инвариантности  $G$ .

**Теорема 5.** Уравнение, полученное из исходного ДУЧП редукцией по  $H$ -инвариантным решениям, инвариантно относительно группы  $G/H$  (наклонная черта обозначает факторизацию).

Доказательство этого утверждения можно найти в [33].

Мы будем использовать эквивалентную формулировку этой теоремы в терминах алгебр Ли (это значительно упрощает все расчеты).

Если задано ДУЧП с алгеброй симметрии  $AG$  и одномерная подалгебра  $Q \in AG$ , являющаяся идеалом в  $AG$ , то уравнение, полученное из исходного редукцией по инвариантным решениям, инвариантно относительно алгебры Ли  $AG/Q$ .

В нашем случае в качестве одномерных подалгебр алгебры  $AG = AP(1, 3)$  выступают операторы (30). Но непосредственное применение теоремы невозможно, так как эти подалгебры, вообще говоря, не являются идеалами в  $A\tilde{P}(1, 3)$ .

Поэтому возникает промежуточная задача нахождения максимальных подалгебр  $A_1, \dots, A_{12}$  алгебры Ли  $A\tilde{P}(1, 3)$ , для которых подалгебры (30) будут идеалами.

Из теории алгебр Ли известно (см., например, [33]), что одномерная алгебра  $\{Q\}$  является идеалом в алгебре Ли  $\langle \Sigma_1, \dots, \Sigma_s \rangle$ , если и только если

$$[Q, \Sigma_i] = \lambda_i Q, \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, s},$$

где  $[Q_1, Q_2]$  — коммутатор.

Следовательно, оператор  $\theta_i^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_i^{00} D + \theta_i^\mu P_\mu$  принадлежит алгебре  $A_i$ , если и только если

$$[\theta_i^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_i^{00} D + \theta_i^\mu P_\mu, Q_i] = \lambda_i Q_i, \quad i = \overline{1, 12}. \quad (108)$$

Здесь  $\theta_i^{\mu\nu}$ ,  $\theta_i^{00}$ ,  $\theta_i^\mu$  — константы;  $Q_i$  — операторы (30), по  $i$  нет суммирования.

Вычисляя коммутаторы в левой части равенства (108) и приравнивая к нулю коэффициенты при линейно независимых операторах  $J_{\mu\nu}$ ,  $D$ ,  $P_\mu$ , получаем систему алгебраических уравнений на коэффициенты  $\theta_i^{\mu\nu}$ ,  $\theta_i^{00}$ ,  $\theta_i^\mu$ . Решая эти уравнения, находим явный вид базисных операторов алгебр  $A_1, \dots, A_{12}$ .

Следующим шагом является вычисление фактор-алгебр  $\{A_i/Q_i, i = \overline{1, 12}\}$ , которые, согласно теореме 5, генерируют группы инвариантности редуцированных ДУЧП (51)–(65).

Реализуем эту схему для алгебры  $\langle J_{01} + J_{12} - aD \rangle$ . Подставляя оператор  $Q_1 = J_{01} + J_{12} - aD$  в (108), получаем следующие условия на параметры  $\theta_1^{\mu\nu}$ ,  $\theta_1^{00}$ ,  $\theta_1^\mu$ :

$$\begin{aligned} \text{при } a \neq 0, \quad & \theta_1^{01} = \theta_1^{12}, \quad \theta_1^{03} = \theta_1^{32}, \quad \theta_1^{13} = \theta_1^{02} = 0, \quad \theta_1^0 = \theta_1^1 = \theta_1^2 = \theta_1^3 = 0; \\ \text{при } a = 0, \quad & \theta_1^{01} = \theta_1^{12}, \quad \theta_1^{03} = \theta_1^{32}, \quad \theta_1^0 = -\theta_1^2, \quad \theta_1^{13} = 0, \quad \theta_1^1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, базис алгебры Ли  $A_1$  составляют операторы:

$$\begin{aligned} a \neq 0, \quad & J_{01} + J_{12}, \quad J_{03} + J_{23}, \quad D; \\ a = 0, \quad & J_{03} + J_{32}, \quad J_{02}, \quad P_0 - P_2, \quad P_3, \quad D. \end{aligned}$$

Фактор-алгебра  $\tilde{A}_1 = A_1/Q_1$  порождается такими операторами:

$$\begin{aligned} a \neq 0, \quad & J_{10} + J_{12}, \quad J_{03} + J_{32}; \\ a = 0, \quad & J_{03} + J_{32}, \quad J_{02}, \quad P_0 - P_2, \quad P_3, \quad D. \end{aligned} \tag{109}$$

Чтобы получить окончательный вид алгебр симметрии ДУЧП (51), (52), необходимо переписать операторы (108) в новых переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi$  (т.е. сделать в (108) замену переменных (35), (36)), в результате имеем:

$$\begin{aligned} \text{при } a \neq 0, \quad & \tilde{A}_{1.1} = \left\langle a\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2); \right. \\ & \left. 2(\omega_1\omega_2 - \omega_2)\partial_{\omega_1} + \omega_2^2\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_2 - \gamma_0) \right\rangle; \\ \text{при } a = 0, \quad & \tilde{A}_{1.2} = \left\langle \omega_1\partial_{\omega_2} + 2\omega_1\omega_2\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2); \right. \\ & \left. \omega_1\partial_{\omega_1} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_2; \omega_1\partial_{\omega_3}; \partial_{\omega_2}; \omega_1\partial_{\omega_1} + \omega_2\partial_{\omega_2} + 2\omega_3\partial_{\omega_3} + k \right\rangle, \end{aligned} \tag{110}$$

где  $\partial_{\omega_a} = \frac{\partial}{\partial \omega_a}$ ,  $a = \overline{1, 3}$ .

Используя аналогичные рассуждения, получаем алгебры симметрии ДУЧП (53)–(65):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 = \left\langle -2\omega_1\partial_{\omega_1} + 2(1 - \beta^2 - \omega_2)\partial_{\omega_2} - 3(\omega_3 + \beta\omega_1)\partial_{\omega_3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}[\gamma_0\gamma_2 + \beta\gamma_3(\gamma_2 - \gamma_0)]; \partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_3} \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_3 = \left\langle 2\omega_2\partial_{\omega_2} + \omega_3\partial_{\omega_3} + k - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_2; \right. \\ \left. 2\omega_3\partial_{\omega_2} + (\omega_1^2 - \beta^2)\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2\beta}(\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_1\gamma_1 - \beta\gamma_3); \right. \\ \left. \omega_1\partial_{\omega_2} + \beta\omega_1\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2) \right\rangle; \end{aligned}$$



$$\tilde{A}_4 = \begin{cases} \langle Q_1; Q_2 \rangle, & a \neq 0, \\ \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4 \rangle, & a = 0; \end{cases}$$

при  $a \neq 0$ ,  $Q_1 = \partial_{\omega_1}$ ,  $Q_2 = (\omega_1^2 - 1)\partial_{\omega_1} + (\omega_1 + \omega_1^{-1})\omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$ ;

при  $a = 0$ ,  $Q_1 = \partial_{\omega_2}$ ,  $Q_2 = \omega_1^{-1/2}\omega_3^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_2\right\}(\omega_1\partial_{\omega_1} + \omega_3\partial_{\omega_3})$ ,

$$Q_3 = \omega_1^{1/2}\omega_3^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_2\right\}(-\omega_1\partial_{\omega_1} + \omega_3\partial_{\omega_3}),$$

$$Q_4 = (\omega_1^2 - 1)\partial_{\omega_1} + (\omega_1 + \omega_1^{-1})\omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1;$$

$$\tilde{A}_{5.1} = \left\langle \partial_{\omega_3}; -2\omega_1\partial_{\omega_1} + \frac{1}{2(a+1)}\gamma_0\gamma_1 \right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{5.2} = \left\langle \omega_1\partial_{\omega_1} - \frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1; \partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_1} + \omega_2\omega_1^{-1}\partial_{\omega_2} - \frac{k}{2}\omega_1^{-1} \right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{5.3} = \begin{cases} \langle Q_1; Q_2 \rangle, & b \neq 0, \\ \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4 \rangle, & b = 0; \end{cases}$$

при  $b \neq 0$ ,  $Q_1 = \partial_{\omega_3}$ ,  $Q_2 = 2\omega_1\partial_{\omega_1} + 2\omega_2\partial_{\omega_2} + k + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$ ;

при  $b = 0$ ,  $Q_1 = \partial_{\omega_3}$ ,  $Q_2 = 2\omega_1\partial_{\omega_1} + 2\omega_2\partial_{\omega_2} + k + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1$ ,

$$Q_3 = \omega_2^{-1/2}\cos\omega_3\left(2\omega_2\partial_{\omega_2} - \operatorname{tg}\omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\operatorname{tg}\omega_3\right),$$

$$Q_4 = \omega_2^{-1/2}\sin\omega_3\left(2\omega_2\partial_{\omega_2} + \operatorname{ctg}\omega_3\partial_{\omega_3} - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3\operatorname{ctg}\omega_3\right);$$

$$\tilde{A}_6 = \langle \omega_1\partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_3} \rangle;$$

$$\tilde{A}_7 = \langle \partial_{\omega_2}; \partial_{\omega_3} \rangle;$$

$$\tilde{A}_8 = \begin{cases} \langle Q_1; Q_2; Q_3 \rangle, & \alpha_1 = \pm\alpha_2, \\ \langle Q_1; Q_2 \rangle, & \alpha_1 \neq \pm\alpha_2; \end{cases}$$

при  $\alpha_1 = \pm\alpha_2$ ,  $Q_1 = \partial_{\omega_2}$ ,  $Q_2 = \mp 2\omega_1\partial_{\omega_1} -$

$$-(\beta_2 \pm \beta_1)\alpha_2^{-1}\omega_3\partial_{\omega_2} \mp 2\omega_3\partial_{\omega_3} \mp k + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1, \quad Q_3 = \beta_1\partial_{\omega_2} + \alpha_2\partial_{\omega_3};$$

при  $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$ ,  $Q_1 = \beta_1\partial_{\omega_2} + \alpha_2\partial_{\omega_3}$ ,  $Q_2 = \beta_2\partial_{\omega_1} + \alpha_1\partial_{\omega_3}$ ;

$$\tilde{A}_9 = \left\langle \omega_a\omega_b\partial_{\omega_b} - \partial_{\omega_a} - k\omega_a + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1; \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left(-\omega_b\partial_{\omega_c} + \omega_c\partial_{\omega_b} + \frac{1}{2}\gamma_b\gamma_c\right) \right\rangle, \quad a, b, c = \overline{1, 3};$$

$$\tilde{A}_{10} = \left\langle \omega_1\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3); \omega_1\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3); \omega_1\partial_{\omega_1} - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3; \right.$$

$$\left. \omega_2\partial_{\omega_3} - \omega_3\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3; \omega_a\partial_{\omega_a} + k; \partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_2}; \partial_{\omega_3} \right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{11} = \left\langle \varepsilon_{abc} \left( -\omega_b \partial_{\omega_c} + \omega_c \partial_{\omega_b} + \frac{1}{2} \gamma_b \gamma_c \right); \omega_a \partial_{\omega_a} + k; \partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_2}; \partial_{\omega_3} \right\rangle;$$

$$\tilde{A}_{12} = \left\langle \omega_1 \partial_{\omega_2} + \omega_2 \partial_{\omega_1} - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1; \omega_1 \partial_{\omega_2} + \omega_3 \partial_{\omega_1} - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3; \right. \\ \left. -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2; \omega_a \partial_{\omega_a} + k; \partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_2}; \partial_{\omega_3} \right\rangle.$$

Здесь  $\tilde{A}_i$  — алгебра симметрии 1-го уравнения из (51)–(65),  $\langle Q_1, \dots, Q_s \rangle$  — линейная оболочка операторов  $Q_1, \dots, Q_s$ .

В том, что  $\tilde{A}_{1,1}$ – $\tilde{A}_{1,2}$  действительно являются алгебрами симметрии редуцированных уравнений (51)–(65), можно убедиться непосредственной проверкой, используя метод Ли [33, 34].

Отметим, что описанный метод исследования симметрии редуцированных уравнений может быть реализован на ЭВМ. Кроме того, он может служить источником для получения новых представлений классических групп Ли. В частности, легко видеть, что

$$\tilde{A}_9 = AO(1, 3),$$

где  $AO(1, 3)$  — алгебра Ли группы Лоренца  $O(1, 3)$ .

Таким образом, на решениях ДУЧП (62) реализуется представление группы Лоренца  $O(1, 3)$ , принципиально отличное от представления группы Лоренца, которое реализуется на решениях исходного уравнения (26). Используя этот факт, можно получить следующее нелинейное представление алгебры  $AO(1, 3)$ :

$$P_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + i u^b \frac{\partial}{\partial u^a} - i u^a \frac{\partial}{\partial u^b}, \\ J_{0a} = x_0 P_a - x_a P_0 + i u_a u_b \frac{\partial}{\partial u^b} - i \frac{\partial}{\partial u^a}, \quad a, b = \overline{1, 3}.$$

Сделаем одно важное замечание. Теорема 5 не гарантирует того, что построенная группа будет максимальной группой симметрии редуцированного уравнения. В ряде случаев максимальная группа инвариантности значительно шире, чем это следует из теоремы 5.

**Теорема 6.** *Максимальная группа инвариантности ДУЧП (63) является бесконечнопараметрической, ее генераторы имеют вид:*

$$\text{при } k = 1, \quad Q_1 = \phi_1(\omega_1) \partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1) \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} [\dot{\phi}_1(\omega_1) \gamma_1 + \dot{\phi}_2(\omega_1) \gamma_2] (\gamma_0 + \gamma_3), \\ Q_2 = -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2, \\ Q_3 = \phi_0(\omega_1) \partial_{\omega_1} + \dot{\phi}_0(\omega_1) (\omega_2 \partial_{\omega_2} + \omega_3 \partial_{\omega_3}) + \dot{\phi}_0(\omega_1) + \\ + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_0(\omega_1) (\gamma_1 \omega_2 + \gamma_2 \omega_3) (\gamma_0 + \gamma_3), \\ Q_4 = \phi_3(\omega_1) \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_3); \tag{111}$$

$$\text{при } k \neq 1, \quad Q_1 = \partial_{\omega_1}, \quad Q_2 = -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2, \\ Q_3 = \phi_1(\omega_1) \partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1) \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} [\dot{\phi}_1(\omega) \gamma_1 + \dot{\phi}_2(\omega) \gamma_2] (\gamma_0 + \gamma_3), \\ Q_4 = \omega_a \partial_{\omega_a} + k, \quad Q_5 = \phi_3(\omega_1) \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_3), \tag{112}$$

где  $\phi_0(\omega_1), \dots, \phi_3(\omega_1)$  — произвольные гладкие функции, точка обозначает дифференцирование по  $\omega_1$ .

Доказательство, проводимое с помощью инфинитезимального метода Ли, очень громоздко, мы его опускаем.

**Следствие.** Пусть  $\phi_1 = \phi_1(\omega)$  — решение ДУЧП (63), тогда спинор  $\phi_2 = \phi_2(\omega)$ , построенный по формуле

$$\begin{aligned} \phi_2(\omega) = & \phi_0^{-1} \exp \left\{ \phi_3(\omega_1) \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_3) - \frac{1}{2} \dot{\phi}_i(\gamma_1) \gamma_i (\gamma_0 + \gamma_3) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \dot{\phi}_0(\omega_1) \phi_0^{-1}(\omega_1) [\gamma_1 (\omega_2 + \phi_1(\omega_1)) + \gamma_2 (\omega_3 + \phi_2(\omega_1))] (\gamma_0 + \gamma_3) \right\} \times \\ & \times \phi_1 \left( \int \phi_0(\omega_1) d\omega_1, \frac{\omega_2 + \phi_1(\omega_1)}{\phi_0(\omega_1)}, \frac{\omega_3 + \phi_2(\omega_1)}{\phi_0(\omega_1)} \right), \end{aligned} \quad (113)$$

также будет решением при  $k = 1$  (если  $k \neq 1$ , следует положить  $\phi_0(\omega_1) = 1$ ).

В справедливости этого утверждения можно убедиться прямой проверкой.

Используя формулу (113), можно получать семейства решений нелинейного уравнения Дирака, зависящие от трех (при  $k = 1$  — от четырех) произвольных функций.

Выберем, например, в качестве  $\phi_1(\omega)$  следующее частное решение уравнения (63):

$$\phi_1(\omega) = \exp \left\{ -i\lambda \gamma_1 \omega_2 (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} \right\} \chi. \quad (114)$$

Подставляя (114) в формулу (113) и размножая найденное решение преобразованиями из группы  $P(1, 3)$ , получаем следующие семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака (26):

$$\begin{aligned} \text{при } k = 1, \quad \psi(x) = & \phi_0^{-1} \exp \left\{ \phi_3 \gamma_4 (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) - \frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 \gamma \cdot b + \dot{\phi}_2 \gamma \cdot c) \times \right. \\ & \times (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) - \frac{1}{2} \dot{\phi}_0 \phi_0^{-1} [(\gamma \cdot b)(b \cdot y + \phi_1) + (\gamma \cdot c)(c \cdot y + \phi_2)] \times \\ & \left. \times (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) \right\} \exp \left\{ -i\lambda (\bar{\chi} \chi)^{1/2} (\gamma \cdot b)(b \cdot y + \phi_1) \phi_0^{-1} \right\} \chi; \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \text{при } k \neq 1, \quad \psi(x) = & \exp \left\{ \phi_3 \gamma_4 (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) - \frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 \gamma \cdot b + \dot{\phi}_2 \gamma \cdot c) \times \right. \\ & \left. \times (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) \right\} \exp \left\{ -i\lambda (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} (\gamma \cdot b)(b \cdot y + \phi_1) \right\} \chi, \end{aligned} \quad (116)$$

где  $\phi_0, \dots, \phi_3$  — произвольные гладкие функции от  $a \cdot y + d \cdot y$ ;  $\chi$  — произвольный постоянный спинор;  $y_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $\theta_\mu = \text{const}$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ .

Другими примерами уравнений, симметрия которых шире симметрии, описываемой теоремой 5, являются ДУЧП (64), (65) при  $k = 1$ . Можно показать, что при таком выборе нелинейности эти уравнения инвариантны относительно конформных групп  $C(3)$  и  $C(1, 2)$  соответственно. Это дает возможность строить новые семейства решений нелинейного уравнения Дирака (26) при  $k = 1$ , используя формулы размножения решений с помощью конечных преобразований группы специальных конформных преобразований. Минуя промежуточные выкладки, приводим полученные многопараметрические семейства точных решений уравнения (26):

при  $k = 1$

$$\psi(x) = U(x) \exp \left\{ -i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}(\gamma \cdot b)V_1 \right\} \chi; \quad (117)$$

$$\psi(x) = U(x) \exp \left\{ -2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2} (V_1^2 + V_2^2)^{1/4} (\gamma \cdot c) \right\} \chi. \quad (118)$$

В (117), (118) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U(x) &= \sigma^{-3/2}(x)[I + [(\gamma \cdot b)(b \cdot x) + (\gamma \cdot c)(c \cdot x) + \\ &+ (\gamma \cdot d)(d \cdot x)](\theta_1(\gamma \cdot b) + \theta_2(\gamma \cdot c) + \theta_3(\gamma \cdot d))]; \\ V_1 &= [b \cdot x + \theta_1((b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2 + (d \cdot x)^2)]\sigma^{-1}(x); \\ V_2 &= [c \cdot x + \theta_2((b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2 + (d \cdot x)^2)]\sigma^{-1}(x); \\ \sigma(x) &= 1 - 2(\theta_1 b \cdot x + \theta_2 c \cdot x + \theta_3 d \cdot x) + \bar{\theta}^2((b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2 + (d \cdot x)^2); \\ \bar{\theta}^2 &= \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2, \quad \theta_i = \text{const}. \end{aligned}$$

**Галилеевские-инвариантные уравнения, допускающие бесконечномерную алгебру симметрии.** Из теоремы 6 следует, что на подмножестве решений уравнения Дирака (26) реализуется представление бесконечномерной алгебры Ли, включающей в качестве подалгебры алгебру Ли группы Галилея  $G(1, 2)$ . Другими словами, условие

$$(P_0 + P_3)\psi = 0 \quad (119)$$

выделяет подмножество решений нелинейного уравнения Дирака (26), которое является гораздо более симметричным, чем все множество решений. Таким образом, условие (119), выделяющее согласно рассуждениям предыдущего подпункта нерелятивистскую часть множества решений уравнения (26), тем самым выделяет множество, инвариантное относительно бесконечномерной алгебры Ли  $A_\infty$ . Формально это может быть записано следующим образом:

$$AP(1, 3)/(P_0 + P_3) \cong AG(1, 2) \subset A_\infty. \quad (120)$$

Оказывается, что этот факт имеет место для очень широкого класса пуанкаре-инвариантных уравнений, а именно — уравнений типа Баба

$$[\beta_\mu p^\mu + m]\Psi(x) = 0, \quad m = \text{const}, \quad (121)$$

где  $\Psi = \{\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n\}$ ,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_l)$ ,  $l \geq 2$ ;  $\beta_\mu$  —  $(n \times n)$ -матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} [\beta_\lambda, S_{\mu\nu}] &= i(g_{\mu\lambda}\beta_\nu - g_{\nu\lambda}\beta_\mu), \\ S_{\mu\nu} &= i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1, -1), \quad 0 \leq \mu, \nu, \lambda \leq l. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что уравнение (121) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре с базисными операторами вида [6, 41]

$$P_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\nu P_\mu - x_\mu P_\nu + S_{\mu\nu}.$$

Потребуем, чтобы  $\Psi$  кроме уравнения (121) удовлетворяло и дополнительному условию вида (119)

$$(P_0 + P_l)\Psi(x) = 0.$$

Тогда для определения  $\Psi(\omega) = \Psi(x_0 + x_l, x_1, \dots, x_{l-1})$  получаем следующую систему ДУЧП:

$$\left[ i(\beta_0 + \beta_l)\partial_{\omega_0} + i \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j \partial_{\omega_j} + m \right] \Psi(\omega) = 0. \quad (122)$$

**Предложение 1.** Уравнение (122) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли с базисными операторами вида

$$\begin{aligned} Q_1 = \partial_{\omega_0}, \quad Q_2 = \Phi^k(\omega_0)\partial_{\omega_k} + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^k(\omega_0)([\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_l]), \\ k = 1, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (123)$$

где  $\partial_{\omega_\mu} = \frac{\partial}{\partial \omega_\mu}$ ;  $\mu = \overline{0, l-1}$ ;  $\dot{\Phi}^k = d\Phi/d\omega_0$ ;  $\Phi^k$  — произвольные дифференцируемые функции от  $\omega_0$ .

**Доказательство.** Для линейных уравнений справедливо следующее утверждение [6]: оператор  $Q$  является оператором симметрии уравнения

$$L(x)\Psi = 0,$$

если и только если существует матрица  $R(x)$ , такая, что

$$[Q, L] = R(x)L.$$

Докажем, что в нашем случае

$$[Q, L] = 0. \quad (124)$$

Действительно,

$$[Q_2, i(\beta_0 + \beta_l)\partial_{\omega_0} + i\beta_k\partial_{\omega_k} + m] = \frac{i}{2}(\beta_0 + \beta_l)\ddot{\Phi}^k(\omega_0)\{[\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_l]\}.$$

Покажем, что  $(\beta_0 + \beta_l)\{[\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_l]\} = 0$ , откуда и будет следовать формула (124). Выберем, например,  $k = 1$ ;

$$\begin{aligned} (\beta_0 + \beta_l)\{[\beta_0, \beta_1] - [\beta_1, \beta_l]\} &= (\beta_0 + \beta_l)(\beta_0\beta_1 - \beta_1\beta_0 - \beta_1\beta_l + \beta_l\beta_1) = \\ &= (\beta_0\beta_0\beta_1 - \beta_0\beta_1\beta_0) + (\beta_l\beta_1\beta_1 - \beta_l\beta_1\beta_l) + (\beta_l\beta_0\beta_1 - \beta_0\beta_1\beta_l) + \\ &+ (\beta_0\beta_l\beta_1 - \beta_l\beta_1\beta_0) = i\beta_1 - i\beta_1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказываем утверждение и для  $k = 2, \dots, l-1$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Утверждение теоремы остается в силе и для пуанкаре-инвариантных нелинейных обобщений уравнения Баба (121)

$$\beta_\mu p^\mu \Psi + F(\Psi^*, \Psi) = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, l. \quad (125)$$

Этот факт дает возможность строить классы точных решений систем ДУЧП (121), (125), включающие произвольные функции, используя формулы размножения решений типа (113).

**Замечание 2.** На решениях уравнения (122) реализуется следующее представление алгебры Галилея  $AG(1, l-1)$ :

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial \omega_0}, \quad P_a = -i \frac{\partial}{\partial \omega_a}, \quad a = \overline{1, l-1}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab},$$

$$G_a = \omega_0 P_a + \frac{1}{2}(S_{al} - S_{0a}), \quad a, b = \overline{1, l-1}.$$

Алгебра (123) не является, вообще говоря, максимальной алгеброй симметрии уравнения (122) (последняя может быть значительно шире). Примером служит следующее ДУЧП:

$$[(\gamma_0 + \gamma_4)P_0 - \gamma_a P_a + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}]\psi(\omega) = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (126)$$

**Теорема 7.** *Базис максимальной алгебры инвариантности уравнения (126) образуют следующие операторы:*

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial \omega_0}, \quad J_{ab} = \omega_a P_b - \omega_b P_a + \frac{i}{4}[\gamma_a, \gamma_b],$$

$$G = \Phi^a(\omega_0)P_a - \frac{i}{2}\dot{\Phi}^a(\omega_0)\gamma_a(\gamma_0 + \gamma_4); \quad (127)$$

$$\tilde{A} = \Phi^0(\omega_0)P_0 - \dot{\Phi}^0(\omega_0)\omega_a P_a + \frac{3}{2}\dot{\Phi}^0 + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}^0\gamma_a\omega_a(\gamma_0 + \gamma_4), \quad a, b = 1, 2, 3,$$

где  $\Phi^0, \dots, \Phi^3$  — произвольные дифференцируемые функции;  $\dot{\Phi}^\mu = d\Phi^\mu/d\omega_0$ ,  $\mu = \overline{1, 3}$ .

Доказательство проводится с помощью метода Ли, мы его не приводим.

**Следствие.** *Уравнение (126) инвариантно относительно алгебры Ли обобщенной группы Галилея  $G_2(1, 3)$  (обобщенной группой Галилея называется группа Галилея, дополненная однопараметрическими группами масштабных и проективных преобразований).*

Базис этой алгебры может быть выбран в виде

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial \omega_0}, \quad P_a = -i \frac{\partial}{\partial \omega_a}, \quad J_{ab} = \omega_a P_b - \omega_b P_a + \frac{i}{4}[\gamma_a, \gamma_b],$$

$$G_c = \omega_0 P_c - \frac{i}{2}\gamma_c(\gamma_0 + \gamma_4), \quad a, b, c = \overline{1, 3}, \quad D = \omega_\mu P^\mu + \frac{3i}{2}, \quad \mu = \overline{0, 3},$$

$$A = 2\omega_0\omega_\mu P^\mu - \omega_0 P_0 + 3i\omega_0 + i\gamma_a\omega_a(\gamma_0 + \gamma_4).$$

В силу этого ДУЧП (126) можно трактовать как нерелятивистский аналог] конформно-инвариантного уравнения Дирака-Гюрши (5). С другой стороны, если положить в (126)  $\lambda = 0$ , то полученное уравнение совпадает с уравнением Леви-Блонда для нерелятивистской частицы с нулевой массой [42].

Важно отметить, что симметричные свойства уравнения (126) не исчерпываются локальной симметрией (127). Непосредственной проверкой можно убедиться, что ДУЧП (126) допускает следующую нелокальную группу преобразований:

$$\psi' = \psi + (\gamma_0 + \gamma_4)E(\omega; \psi), \quad (128)$$

где  $E(\omega; \psi)$  — произвольное решение линейной системы ДУЧП

$$\begin{aligned} [\gamma_a P_a - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}]E &= 0, \\ \bar{\psi}(\gamma_0 + \gamma_4)E - \bar{E}(\gamma_0 + \gamma_4)\psi &= 0, \quad \bar{E} = E^\dagger \gamma_0. \end{aligned}$$

### Некоторые двумерные спинорные модели

Эффективность применения теоретико-алгебраических методов тем выше, чем шире симметрия рассматриваемого уравнения. Особый интерес в этой связи представляют двумерные ДУЧП, инвариантные относительно бесконечнопараметрической группы преобразований. Именно это свойство позволило построить общие решения двумерных уравнений Д'Аламбера [30], Лиувилля [43], газовой динамики [44], Монжа–Ампера [43], Тирринга с нулевой массой [45, 46], Борна–Инфельда [43], Максвелла–Дирака [47] и др.

Мы покажем, что список интегрируемых моделей может быть пополнен следующими нелинейными спинорными ДУЧП:

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda_1 \gamma_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)]\psi(x_0, x_1) = 0, \quad \mu = 0, 1; \quad (129)$$

$$[(\gamma_0 + \gamma_3)p_0 - \gamma_1 p_1 + \lambda_2 (\bar{\psi} \psi)^{1/2k}] \psi(x_0, x_1) = 0, \quad (130)$$

где  $\psi = \psi(x_0, x_1)$  — четырехкомпонентный спинор;  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_3$  —  $4 \times 4$ -матрицы Дирака;  $\lambda_1, \lambda_2, k$  — константы.

Уравнение (129) — это двумерный аналог уравнения Дирака–Гайзенберга (4), а ДУЧП (130) — двумерный аналог уравнения (126). Кроме того, (130) может быть получено из нелинейного уравнения Дирака (26), если положить  $\psi = \psi(x_0 + x_3, x_1)$ .

**Симметрия уравнений (129), (130).** Нам будет удобно выбрать в (129)  $\gamma$ -матрицы в следующем виде:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & \hat{0} \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_2, \sigma_3$  — матрицы Паули;  $\hat{0}$  — нулевая матрица размерности  $(2 \times 2)$ . Расписывая (129) покомпонентно и переходя к конусным переменным

$$\xi = x_0 - x_1, \quad \eta = x_0 + x_1,$$

получаем

$$\begin{aligned} i\partial_\xi \psi^0 &= -\lambda (|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2) \psi^0, \\ i\partial_\eta \psi^1 &= \lambda (|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2) \psi^1, \\ i\partial_\xi \psi^2 &= -\lambda (|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2) \psi^2, \\ i\partial_\eta \psi^3 &= \lambda (|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2) \psi^3, \end{aligned} \quad (131)$$

**Предложение 2.** *Максимальной локальной группой инвариантности системы (131) является бесконечнопараметрическая группа*

$$G = O_\xi(4) \times O_\eta(4) \times G_\infty, \quad (132)$$

где  $G_\infty$  — бесконечнопараметрическая группа Ли преобразований вида

$$\xi' = \int^\xi f_1^{-2}(z) dz, \quad \eta' = \int^\eta f_0^{-2}(z) dz,$$

$$\psi^{0'} = \psi^0 f_0(\eta), \quad \psi^{1'} = \psi^1 f_1(\xi), \quad \psi^{2'} = \psi^2 f_0(\eta), \quad \psi^{3'} = \psi^3 f_1(\xi),$$

$f_0, f_1$  — произвольные дифференцируемые функции,  $O_\xi(4)$  — группа преобразований, сохраняющих квадратичную форму  $|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2$ , параметры которой являются произвольными функциями от  $\xi$ ;  $O_\eta(4)$  — группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму  $|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2$ , параметры которой являются произвольными функциями от  $\eta$ .

**Предложение 3.** Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (130) генерируется следующими операторами:

при  $k \neq \frac{1}{2}$ ,

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad D = x_\mu P_\mu + k,$$

$$G = \Phi_1(x_0)P_1 + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(x_0)\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3),$$

$$Q = (\gamma_0 + \gamma_3)[\Phi_2(x_0)\gamma_2 + \Phi_3(x_0)\gamma_4];$$

при  $k = \frac{1}{2}$ ,

$$G = \Phi_1(x_0)P_1 + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(x_0)\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3),$$

$$A = \Phi_0(x_0)P_0 + \dot{\Phi}(x_0)x_1P_1 + \frac{1}{2}\dot{\Phi}(x_0) + \frac{x_1}{2}\ddot{\Phi}_0(x_0)\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3),$$

$$Q = (\gamma_0 + \gamma_3)[\Phi_2(x_0)\gamma_2 + \Phi_3(x_0)\gamma_4];$$

где  $\Phi_\mu(x_0)$  — произвольные дифференцируемые функции, точка обозначает дифференцирование по  $x_0$ .

**Замечание.** Симметричные свойства системы ДУЧП (131) значительно шире, чем инвариантность относительно локальной группы (132). В частности, (131) допускает группу нелокальных (интегральных) преобразований вида

$$\psi^{0'} = a\psi^0 \exp \left\{ i\lambda_1 \int [ (|b|^2 - 1) |\psi^1|^2 + (|d|^2 - 1) |\psi^3|^2 ] d\xi \right\},$$

$$\psi^{1'} = b\psi^1 \exp \left\{ -i\lambda_1 \int [ (|a|^2 - 1) |\psi^0|^2 + (|c|^2 - 1) |\psi^2|^2 ] d\eta \right\},$$

$$\psi^{2'} = c\psi^2 \exp \left\{ i\lambda_1 \int [ (|b|^2 - 1) |\psi^1|^2 + (|d|^2 - 1) |\psi^3|^2 ] d\xi \right\},$$

$$\psi^{3'} = d\psi^3 \exp \left\{ -i\lambda_1 \int [ (|a|^2 - 1) |\psi^0|^2 + (|c|^2 - 1) |\psi^2|^2 ] d\eta \right\},$$

где  $a, b, c, d$  — произвольные комплексные параметры. Отметим, что эта группа изоморфна группе  $C^4$  по умножению.

**Линеаризация и общее решение уравнений (129), (130).** Для того чтобы построить общее решение ДУЧП (131), мы воспользуемся методом нелокальной



линеаризации [43, 47], т.е. укажем в явном виде нелокальную замену переменных, приводящую (131) к системе линейных ДУЧП. Переходя в (131) к новым переменным по формулам

$$\begin{aligned}\psi^0 &= u^0(\xi, \eta) \exp \left\{ i\lambda_1 \int (|u^1|^2 + |u^3|^2) d\xi \right\}, \\ \psi^1 &= u^1(\xi, \eta) \exp \left\{ -i\lambda_1 \int (|u^0|^2 + |u^2|^2) d\eta \right\}, \\ \psi^2 &= u^2(\xi, \eta) \exp \left\{ i\lambda_1 \int (|u^1|^2 + |u^3|^2) d\xi \right\}, \\ \psi^3 &= u^3(\xi, \eta) \exp \left\{ -i\lambda_1 \int (|u^0|^2 + |u^2|^2) d\eta \right\},\end{aligned}\tag{133}$$

получаем следующие уравнения для нахождения неизвестных функций  $u^0, u^1, u^2, u^3$ :

$$\partial_\xi u^0 = 0, \quad \partial_\eta u^1 = 0, \quad \partial_\xi u^2 = 0, \quad \partial_\eta u^3 = 0.\tag{134}$$

Замена переменных (133) по виду напоминает замену Коула–Хопфа, приводящую уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности [48, 49]. Принципиальное отличие состоит в том, что замена (133) является обратимой при любых  $u^0, \dots, u^3$ , а замена Коула–Хопфа, вообще говоря, нет.

Интегрирование уравнений (134) дает

$$u^0 = U^0(\eta), \quad u^1 = U^1(\xi), \quad u^2 = U^2(\eta), \quad u^3 = U^3(\xi),\tag{135}$$

где  $U^0, \dots, U^3$  — произвольные комплекснозначные дифференцируемые функции.

Подставляя (135) в (133) и переходя от конусных переменных  $\xi, \eta$  к исходным, получаем общее решение уравнения (129):

$$\begin{aligned}\psi^0 &= U^0(x_0 + x_1) \exp \left\{ i\lambda_1 \int^{x_0 - x_1} [|U^1|^2 + |U^3|^2] d\xi \right\}, \\ \psi^1 &= U^1(x_0 - x_1) \exp \left\{ -i\lambda_1 \int^{x_0 + x_1} [|U^0|^2 + |U^2|^2] d\eta \right\}, \\ \psi^2 &= U^2(x_0 + x_1) \exp \left\{ i\lambda_1 \int^{x_0 - x_1} [|U^1|^2 + |U^3|^2] d\xi \right\}, \\ \psi^3 &= U^3(x_0 - x_1) \exp \left\{ -i\lambda_1 \int^{x_0 + x_1} [|U^0|^2 + |U^2|^2] d\eta \right\}.\end{aligned}\tag{136}$$

Отметим, что константа взаимодействия  $\lambda_1$  входит в (136) аналитическим образом. Устремляя  $\lambda_1$  к 0, получаем общее решение свободного двумерного уравнения Дирака

$$(\gamma_0 p_0 - \gamma_1 p_1) \psi(x_0, x_1) = 0.$$

Для того чтобы построить общее решение системы ДУЧП (130), заменим ее эквивалентной "линейной" системой вида

$$\begin{aligned} \gamma_1 \psi_{x_1} &= i\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \psi + (\gamma_0 + \gamma_3) F(x_0, x_1), \\ \psi_{x_0} &= -F(x_0, x_1), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{\psi} \psi)^{1/2k}. \end{aligned} \quad (137)$$

Первое из уравнений (137) — это линейная неоднородная система ОДУ ( $x_0$  входит в качестве параметра), общее решение которой может быть получено с помощью метода вариации произвольной постоянной

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp\{-i\lambda_2 \gamma_1 f(x_0, x_1)\} \times \\ &\times \left[ \varphi(x_0) - \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3) \int^{x_1} \exp\{-i\lambda_2 \gamma_1 f(x_0, z)\} F(x_0, z) dz \right]. \end{aligned} \quad (138)$$

Подставляя (138) в остальные уравнения из (137) и решая полученные соотношения, находим общее решение исходной системы ДУЧП (130):

$$\begin{aligned} \psi(x_0, x_1) &= \exp\{-i\lambda_2 f(x_0, x_1) \gamma_1\} \times \\ &\times \left[ \varphi(x_0) + \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3) \int^{x_1} \exp\{-i\lambda_2 \gamma_1 f(x_0, z)\} dz \times \right. \\ &\left. \times \left( \dot{\varphi}(x_0) - i\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_0} \gamma_1 \varphi(x_0) \right) \right], \end{aligned} \quad (139)$$

где  $\varphi = \varphi(x_0)$  — четырехкомпонентный спинор, произвольным образом зависящий от  $x_0$ ;  $f = f(x_0, x_1)$  — действительная скалярная функция, определяемая из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \left[ A_0 + A_1 \int^{x_1} \operatorname{ch}(2\lambda_2 f(x_0, z)) dz + A_2 \int^{x_1} \operatorname{sh}(2\lambda_2 f(x_0, z)) dz \right]^{1/2k}, \\ A_0 &= \bar{\varphi} \varphi, \quad A_1 = \bar{\varphi} \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{\varphi} - \dot{\bar{\varphi}} \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3) \varphi, \\ A_2 &= i(\bar{\varphi} (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{\varphi} - \dot{\bar{\varphi}} (\gamma_0 + \gamma_3) \varphi), \quad \dot{\varphi} = d\varphi/dx_0. \end{aligned} \quad (140)$$

Если формально устремить в (130)  $k \rightarrow +\infty$ , то это уравнений перейдет в линейное уравнение

$$[(\gamma_0 + \gamma_3) p_0 - \gamma_1 p_1 + \lambda_2] \psi(x) = 0. \quad (141)$$

Оказывается, что такой предельный переход возможен и в формулах (139), (140), в результате чего получаем общее решение ДУЧП (141):

$$\psi(x) = \exp\{-i\lambda_2 \gamma_1 x_1\} \left\{ \varphi(x_0) - \frac{i}{2\lambda_2} (\gamma_0 + \gamma_3) \exp\{-2i\lambda_2 x_1 \gamma_1\} \dot{\varphi}(x_0) \right\},$$

где  $\varphi = \varphi(x_0)$  — четырехкомпонентный спинор, произвольным образом зависящий от  $x_0$ .

Учитывая отмеченную выше связь между нелинейным уравнением Дирака (26) и системой ДУЧП (130), по формуле

$$\psi_1(x) = \psi(x_0 \rightarrow (x_0 + x_3), x_1 \rightarrow x_1),$$

где  $\psi(x_0, x_1)$  из (139), получаем семейство точных решений уравнения (26), включающее четыре произвольных комплекснозначных функции.

### Приложение 1

#### Анзацы, редуцирующие произвольное пуанкаре-инвариантное уравнение к системе ОДУ

С помощью анзацев, инвариантных относительно одномерных подалгебр алгебры Пуанкаре  $AP(1, 3)$ , удается уменьшить размерность пуанкаре-инвариантных уравнений на единицу. Следовательно, чтобы редуцировать четырехмерную систему ДУЧП к системе ОДУ, необходимо использовать анзацы, инвариантные относительно трехмерных подалгебр алгебры Пуанкаре  $AP(1, 3)$  [33]. Задача классификации всех неэквивалентных подалгебр алгебры Пуанкаре  $AP(1, 3)$  была решена в [50–53]. Общий вид анзаца, инвариантного относительно алгебры  $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \subset AP(1, 3)$ , таков:

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \quad (\text{П.1})$$

где  $\varphi = \varphi(\omega)$  — новый неизвестный спинор;  $A(x)$  —  $4 \times 4$ -матрица, удовлетворяющая системе ДУЧП

$$Q_i A(x) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.2})$$

$\omega = \omega(x)$  — новая инвариантная переменная, удовлетворяющая условиям вида

$$Q_i^{\text{dif}} \omega = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.3})$$

где  $Q_i^{\text{dif}}$  обозначает дифференциальную часть оператора  $Q_i$ . Интегрируя системы ДУЧП (П.2), (П.3), получаем следующий набор анзацев (результат приводится в виде табл. 2).

Подобным же образом можно было бы построить пуанкаре-инвариантные анзацы и для скалярного, векторного, тензорного полей. Однако существует значительно более простой способ получения таких анзацев. Величины  $\bar{\psi}\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$  преобразуются относительно группы Пуанкаре как скаляр, вектор и тензор соответственно. Поэтому, чтобы найти анзацы, инвариантные относительно трехмерных подалгебр алгебры Пуанкаре, достаточно подставить анзацы для  $\psi(x)$  из табл. 2 в следующие формулы:

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{\psi}\psi, & A_\mu(x) &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \\ F_{\mu\nu} &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi, & \mu, \nu &= \overline{0, 3}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

В результате получим:

$$u(x) = \Phi(\omega), \quad A_\mu(x) = a_{\mu\nu}(x)\Phi^\nu(\omega), \quad F_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu\alpha\beta}\Phi^{\alpha\beta}(\omega), \quad (\text{П.5})$$

где  $\Phi = \bar{\varphi}\varphi$ ,  $\Phi^\nu = \bar{\varphi}\gamma^\nu\varphi$ ,  $\Phi^{\alpha\beta} = \bar{\varphi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\varphi$ .

В частности, анзацы для скалярного поля, построенные в [53], могут быть получены таким способом. В [54] с использованием подгрупповой структуры группы  $P(1, 3)$  [50–53] построены классы точных решений нелинейного уравнения Дирака (8) при  $F = m + \lambda(\bar{\psi}\psi)^k$ ,  $m, \lambda, k = \text{const}$ .

Таблица 2

№ п/п	$\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$	$A(x)$	$\omega(x)$
1	$P_0, P_1, P_3$	$I$	$x_2$
2	$P_1, P_2, P_3$	$I$	$x_0$
3	$P_0 + P_3, P_1, P_2$	$I$	$x_0 + x_3$
4	$J_{03}, P_1, P_2$	$\exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_0^2 - x_3^2$
5	$J_{03}, P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_2$
6	$J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3$	$\exp \left\{ \frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0 \gamma_3 \right\}$	$x_1$
7	$J_{03} + \alpha P_2, P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left\{ \frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0 \gamma_3 \right\}$	$\alpha \ln(x_0 + x_3) - x_2$
8	$J_{12}, P_0, P_3$	$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right\}$	$x_1^2 + x_2^2$
9	$J_{12} + \alpha P_0, P_1, P_2$	$\exp \left\{ -\frac{x_0}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \right\}$	$x_3$
10	$J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2$	$\exp \left\{ \frac{x_3}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \right\}$	$x_0$
11	$J_{12} + P_0 + P_3, P_1, P_2$	$\exp \left\{ \frac{1}{4} (x_3 - x_0) \gamma_1 \gamma_2 \right\}$	$x_0 + x_3$
12	$G_1, P_0 + P_3, P_2$	$\exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	$x_0 + x_3$
13	$G_1, P_0 + P_3, P_1 + \alpha P_2$	$\exp \left\{ \frac{\alpha x_1 - x_2}{2\alpha(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	$x_0 + x_3$
14	$G_1 + P_2, P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left\{ \frac{x_2}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	$x_0 + x_3$
15	$G_1 + P_0, P_0 + P_3, P_2$	$\exp \left\{ -\frac{x_0 + x_3}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	$2x_1 + (x_0 + x_3)^2$
16	$G_1 + P_0, P_1, P_0 + P_3$	$\exp \left\{ -\frac{x_0 + x_3}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	$x_2$
17	$G_1 + P_0, P_1 + \alpha P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left\{ -\frac{x_0 + x_3}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	$2(x_2 - \alpha x_1) -$ $-\alpha(x_0 + x_3)^2$
18	$J_{03} + \lambda J_{12}, P_0, P_3$	$\exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda} (\gamma_0 \gamma_3 + \lambda \gamma_1 \gamma_2) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right\}$	$x_1^2 + x_2^2$
19	$J_{03} + \lambda J_{12}, P_1, P_2$	$\exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_0 \gamma_3 + \lambda \gamma_1 \gamma_2) \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_0^2 - x_3^2$
20	$G_1, G_2, P_0 + P_3$	$\exp \left\{ \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right\}$	$x_0 + x_3$
21	$G_1 + P_2,$ $G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \left[ x_2 \gamma_1 - \right. \right.$ $\left. - \frac{x_2(x_0 + x_3) - x_1}{(x_0 + x_3)(x_0 + x_3 + \beta) - \alpha} (x_0 + x_3 + \beta) \gamma_1 + \right.$ $\left. + \frac{x_2(x_0 + x_3) - x_1}{(x_0 + x_3)(x_0 + x_3 + \beta) - \alpha} \gamma_2 \right\}$	$x_0 + x_3$
22	$G_1, G_2 + P_1 +$ $+\alpha P_2, P_0 + P_3$	$\exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 + \right.$ $\left. + \frac{x_2}{2(x_0 + x_3)(x_0 + x_3 + \alpha)} \times \right.$ $\left. \times (\gamma_0 + \gamma_3) (\gamma_2(x_0 + x_3) - \gamma_1) \right\}$	$x_0 + x_3$
23	$G_1, G_2 + P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 + \right.$ $\left. + \frac{x_2}{2(x_0 + x_3 + 1)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_2 \right\}$	$x_0 + x_3$
24	$G_1, G_2 + P_0,$ $P_0 + P_3, P_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$2x_2 + (x_0 + x_3)^2$
25	$J_{03}, G_1, P_2$	$\exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\} \times$ $\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_0^2 - x_1^2 - x_3^2$

Продолжение табл. 2

№ п/п	$\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$	$A(x)$	$\omega(x)$
26	$J_{03}, G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0+x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\} \times$ $\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_2$
27	$J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left\{ \frac{x_1 - \alpha \ln(x_0+x_3)}{2(x_0+x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\} \times$ $\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_2 - \beta \ln(x_0 + x_3)$
28	$J_{03} + \beta P_2, G_1,$ $P_0 + P_3, P_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$x_2 - \beta \ln(x_0 + x_3)$
29	$G_1, G_2, J_{03}$	$\exp \left\{ \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0+x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right\} \times$ $\times \exp \left\{ -\frac{x_\mu x^\mu}{4(x_0+x_3)} \gamma_1 \gamma_2 \right\}$	$x_0 + x_3$
30	$J_{03} + \lambda J_{12}, G_1, G_2$	$\exp \left\{ \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0+x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right\} \times$ $\times \exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_0 \gamma_3 + \lambda \gamma_1 \gamma_2) \ln(x_0 + x_3) \right\}$	$x_\mu x^\mu$

$$\alpha, \beta, \lambda = \text{const}, G_i = J_{0i} - J_{i3}, i = \overline{1, 2}.$$

## Приложение 2

### Об одном обобщении метода разделения переменных для систем дифференциальных уравнений

В этом приложении мы приведем один из возможных подходов к построению решений в разделенных переменных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод разделения переменных является одним из классических методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Его тесная связь с теоретико-групповыми свойствами уравнений была понята совсем недавно [55, 56]. Она состоит в том, что решение в разделенных переменных и параметры разделения являются соответственно собственной функцией и собственными значениями некоторого набора операторов  $\{\Sigma_i\}$  симметрии рассматриваемого уравнения. Иначе говоря, справедливы равенства

$$L\psi \equiv \{a_\mu(x) \partial_{x_\mu} + a(x)\} \psi(x) = 0, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \quad (\text{П.6})$$

$$\Sigma_i \psi = \lambda_i \psi, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (\text{П.7})$$

где  $a_\mu, a$  — переменные  $m \times m$ -матрицы;  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ ,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $\lambda_i = \text{const}$ ,  $\Sigma_i$  — дифференциальные операторы, образующие  $(n-1)$ -мерную абелеву алгебру Ли симметрии уравнения (П.6), т.е. они удовлетворяют условиям

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = \Sigma_i \Sigma_j - \Sigma_j \Sigma_i = 0, \quad (\text{П.8})$$

$$[L, \Sigma_i] \psi|_{L\psi=0} = 0. \quad (\text{П.9})$$

Поэтому решения уравнения (П.6), удовлетворяющие условиям (П.7), естественно называть решениями в разделенных переменных.

Система дифференциальных уравнений (П.6), (П.7) является переопределенной, и условия (П.8), (П.9) обеспечивают ее совместность. Наше основное наблюдение состоит в том, что требования (П.8), (П.9) можно значительно ослабить и

тем самым обобщить классическое определение разделения переменных. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Система уравнений

$$\begin{aligned} L\psi &= 0, \\ Q_i\psi &= \{b_i^\mu(x)\partial_{x_\mu} + b_i(x)\}\psi(x) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

где  $b_i^\mu$ ,  $b_i$  — переменные матрицы  $(m \times m)$ , совместна, если

$$\begin{aligned} [Q_i, L] &= B_i^k Q_k + B_i L, \\ [Q_i, Q_j] &= R_{ij}^k Q_k + R_{ij}, \quad i, j, k = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

В случае, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a^0(x) & \cdots & a^{n-1}(x) \\ b_1^0(x) & \cdots & b_1^{n-1}(x) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n-1}^0(x) & \cdots & b_{n-1}^{n-1}(x) \end{pmatrix} = m \times n, \quad (\text{П.12})$$

условия (П.11) являются необходимыми и достаточными.

В (П.11)  $B_i^k$ ,  $B_i$ ,  $R_{ij}^k$ ,  $R_{ij}$  — некоторые дифференциальные операторы первого порядка с матричными коэффициентами.

**Доказательство.** Проведем доказательство в предположении, что условие (П.12) выполнено. Если в (П.10)  $b_i^\mu(x) = \delta_i^\mu b_i(x)$ , где  $\delta_i^\mu$  — символ Кронекера, то система (П.10) может быть записана в виде

$$\partial_{x_\mu} \psi = A_\mu(x)\psi, \quad (\text{П.13})$$

причем  $A_0 = -a_0^{-1}(a_k A_k + a)$ .

Хорошо известно (см., например, [57]), что необходимые и достаточные условия совместности системы дифференциальных уравнений (П.13) таковы:

$$[\partial_{x_\mu} - A_\mu, \partial_{x_\nu} - A_\nu] = \partial_{x_\nu} A_\mu - \partial_{x_\mu} A_\nu + [A_\mu, A_\nu] = 0. \quad (\text{П.14})$$

Следовательно, для системы (П.13) утверждение теоремы справедливо. Идея доказательства состоит в том, что система (П.10) может быть получена из (П.13) последовательным применением преобразований эквивалентности

$$L \rightarrow L, \quad Q_i \rightarrow Q'_i = \begin{cases} Q_i, & i \neq k, \\ W_i Q_i, & i = k, \end{cases} \quad (\text{П.15})$$

где  $W_i = W_i(x)$  — невырожденные переменные матрицы  $(m \times m)$ . Если покажем, что для преобразованной системы

$$\begin{aligned} L\psi &= 0, \\ Q'_i\psi &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

выполнены условия (П.11), то тем самым теорема будет доказана. Это осуществляется прямым вычислением. Рассмотрим, например, коммутатор  $[Q'_k, L]$ :

$$\begin{aligned} [Q'_k, L] &= [W_k Q_k, L] = [W_k, L]Q_k + W_k[Q_k, L] = \\ &= ([W_k, L] + W_k B_j^i) + W_k B_i L. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Выразив из (П.15)  $Q_i$  через  $Q'_i$  и подставив найденные выражения в (П.17), получим

$$[Q'_k, L] = B_k^{i'} Q'_k + B'_k L,$$

где

$$\begin{aligned} B_k^{i'} &= W_j B_j^i + [W_i, L] - [W_k, L] W_k^{-1} W_i - W_j B_j^k W_k^{-1} W_i, & i \neq k, \\ B_k^{j'} &= [W_k, L] W_k^{-1} + W_j B_j^k W_k^{-1}, & B'_k = W_j B_j \end{aligned}$$

(по  $k$  нет суммирования).

Проверка остальных соотношений из (П.11) проводится аналогично.

**Замечание.** Если в (П.11)  $R_{ij} \equiv 0$ ,  $B_i^k \equiv 0$ ,  $B_i$  —  $(m \times m)$ -матрицы,  $R_{ij}^k$  — константы, то требование (П.11) означает, что операторы  $Q_i$  образуют  $(n-1)$ -мерную алгебру Ли инвариантности уравнения (П.6). Если же  $R_{ij} \equiv 0$ ,  $B_i^k \equiv 0$ , то  $Q_i$  — нелиевские операторы симметрии уравнения (П.6) (см. [6]). Наконец, если не все  $R_{ij}$ ,  $B_i^k$  равны нулю, то мы имеем дело с так называемой нарушенной симметрией [31, 58].

**Следствие.** Пусть операторы  $Q_i$  образуют супералгебру Ли инвариантности уравнений (П.6), тогда система (П.10) совместна.

Таким образом, для того чтобы строить решения в разделенных переменных систем дифференциальных уравнений в частных производных, необходимо уметь классифицировать алгебраические объекты типа (П.11), частным случаем которых являются алгебры и супералгебры Ли. К настоящему времени эта задача нами частично решена лишь для алгебр Ли и некоторых простейших супералгебр.

Из доказательства теоремы следует, что при выполнении условия (П.12) систему (П.10) можно заменить эквивалентной ей системой дифференциальных уравнений (П.13). Если известно частное решение уравнений (П.14), то, подставляя его в систему (П.13) и находя ее общее решение, получаем решение в разделенных переменных исходной системы дифференциальных уравнений (П.6). Оказывается, что в ряде случаев систему (П.14) решать проще, чем систему (П.6).

Эффективность нашего подхода продемонстрируем на линейном уравнении Дирака

$$(i\gamma_\mu \partial_{x_\mu} - m)\psi(x) = 0, \quad (\text{П.18})$$

где  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака размерности  $(4 \times 4)$ ;  $\psi(x)$  — четырехкомпонентный дираковский спинор.

Стандартное определение разделения переменных в уравнении Дирака в декартовых координатах таково [56, 59, 60]:

$$\psi(x) = V_0(x_0)V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3)\chi, \quad (\text{П.19})$$

где  $V_\mu$  — переменные  $(4 \times 4)$ -матрицы. Решения вида (П.19) получаются из (П.13), если положить  $A_i = A_i(x_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

При этом условии (П.14) примут вид

$$\partial_{x_i} A_0 = [A_i(x_i), A_0], \quad (\text{П.20})$$

$$[A_i(x_i), A_j(x_j)] = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.21})$$

где  $A_0 = -\gamma_0 \gamma_k A_k - im\gamma_0$ .

**Предложение 1.** Система дифференциальных уравнений (П.20), (П.21) совместна.

Чтобы доказать это утверждение, необходимо убедиться в справедливости тождества

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} A_0 = \partial_{x_i} [A_j, A_0] = \partial_{x_j} [A_i, A_0] = \partial_{x_j} \partial_{x_i} A_0.$$

Но

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} [A_j, A_0] &= [A_j, \partial_{x_i} A_0] = [A_j, [A_i, A_0]] = \\ &= [A_i, [A_j, A_0]] = [A_i, \partial_{x_j} A_0] = \partial_{x_j} [A_i, A_0], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Предложение 2.** Общее решение системы уравнений (П.13) имеет вид

$$\psi(x) = \exp\{A_0 x_0\} U_1(x_1) U_2(x_2) U_3(x_3) \chi, \quad (\text{П.22})$$

где

$$U_i(x_i) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{\theta_i}^{x_i} A_i(x_i) \cdots \int_{\theta_i}^{x_i} A_i(x_i)}_n \underbrace{dx_i \cdots dx_i}_n,$$

$A_i(x_i)$  — произвольные  $(4 \times 4)$ -матрицы, удовлетворяющие условиям (П.20), (П.21);  $\chi$  — произвольный постоянный спинор.

**Доказательство.** Покажем, что формула

$$\psi(x) = \exp\{A_0 x_0\} \varphi(x) \quad (\text{П.23})$$

дает решение системы (П.13), если

$$\partial_{x_i} \varphi = A_i(x_i) \varphi, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (\text{П.24})$$

Действительно, в силу того, что  $\partial_{x_0} A_0 = 0$ , имеем

$$\partial_{x_0} \psi = A_0 \psi,$$

кроме того,

$$\partial_{x_i} \varphi = \partial_{x_i} \left\{ \sum_n \frac{x_0^n}{n!} A_0^n \right\} = \left\{ \sum_n \frac{x_0^n}{n!} A_0^n \right\} \partial_{x_i} \varphi + \left\{ \sum_n \frac{x_0^n}{n!} \partial_{x_i} A_0^n \right\} \varphi. \quad (\text{П.25})$$

Так как

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} A_0^n &= \frac{\partial A_0}{\partial x_i} A_0^{n-1} + A_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_i} A_0^{n-2} + \cdots + A_0^{n-1} \frac{\partial A_0}{\partial x_i} = \\ &= [A_i, A_0] A_0^{n-1} + \cdots + A_0^{n-1} [A_i, A_0] = [A_i, A_0^n], \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

то, подставляя (П.25), (П.26) в (П.13), получаем

$$\exp\{A_0 x_0\} (\partial_{x_i} \varphi - A_i \varphi) = 0.$$



Нетрудно убедиться, что общее решение (П.24) может быть записано в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) = U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)\chi,$$

где  $U_i$  — матрицант  $i$ -го уравнения из (П.24), задается формулой (П.22). Для этого необходимо воспользоваться тождеством

$$\left[ A_i, \underbrace{\int_{\theta_j}^{x_j} A_j(x_j) \cdots \int_{\theta_j}^{x_j} A_j(x_j)}_n \underbrace{dx_j \cdots dx_j}_n \right] = 0, \quad n \geq 1, \quad i \neq j,$$

из которого следует, что

$$[A_i(x_i), U_j(x_j)] = 0, \quad i \neq j.$$

Особенно простой вид имеют формулы (П.20)–(П.22) в том случае, когда матрицы  $A_i$  постоянные. Из (П.20), (П.21) следует, что они должны удовлетворять следующей нелинейной алгебраической системе матричных уравнений:

$$[A_i, A_j] = 0, \quad [\gamma_0 \gamma_k A_k + im \gamma_0, A_i] = 0, \quad (\text{П.27})$$

при этом решение уравнения (П.13)

$$\psi(x) = \exp\{-(\gamma_0 \gamma_k A_k + im \gamma_0)x_0 + A_i x_i\} \chi. \quad (\text{П.28})$$

Удается найти общее решение соотношений (П.27), однако полученный результат очень громоздкий. Приведем здесь только некоторые частные решения:

$$\begin{aligned} A_1 &= -im\gamma_1, & A_2 &= \theta\gamma_1\gamma_2\gamma_3, & A_3 &= \theta\gamma_1; \\ A_1 &= \theta_1 + \theta_2\gamma_0 + \theta_3\gamma_1\gamma_2 + \theta_4\gamma_3\gamma_4, & A_2 &= \gamma_2\gamma_1A_1, & A_3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

$\theta, \theta_1, \dots, \theta_4$  — произвольные комплексные константы.

Подставляя (П.29) в (П.28), получаем многопараметрические семейства точных решений уравнения Дирака.

Отметим, что операторы  $Q_i = \partial_{x_i} - A_i$ , образуя алгебру Ли, вообще говоря, не являются операторами симметрии уравнения Дирака, так как

$$[L, Q_i] = [\gamma_0, A_i]\gamma_0 L + \gamma_0[\gamma_0 \gamma_k, A_i]Q_k, \quad i = \overline{1, 3}.$$

В заключение приведем полученными нами решения системы дифференциальных уравнений (П.20), (П.21) вида

$$A_i(x_i) = c_i^1 + c_i^2 \gamma_i + c_i^3 \gamma_4 + c_i^4 \gamma_i \gamma_4, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.30})$$

где  $c_i^k = c_i^k(x_i)$ , по  $i$  нет суммирования:

$$\begin{aligned} 1. \quad c_1^1 &= \lambda_1 \cos \phi, & c_1^2 &= im + \lambda_1 \sin \phi, & c_1^3 &= c_1^4 = 0, \\ c_2^1 &= \lambda_3 \cos \varphi, & c_2^2 &= \lambda_3 \sin \varphi, & c_2^3 &= c_2^4 = 0, \\ c_3^1 &= \lambda_5, & c_3^2 &= c_3^3 = c_3^4 = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.31})$$

где

$$\phi = 2 \arctg \frac{1}{m} \{ \theta \operatorname{tg} (\lambda_2 - 2i\theta x_1) + i\lambda_1 \}, \quad \theta = m^2 + \lambda_1^2,$$

$$\varphi = 2 \arctg \{ \lambda_4 e^{-2\lambda_3 x_2} \}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_5 = \text{const};$$

$$\begin{aligned}
2. \quad c_k^1 &= \theta_{1k} (\theta_{2k} e^{2\theta_{1k} x_k} - 1) (\theta_{2k} e^{2\theta_{1k} x_k} + 1)^{-1}, \\
c_k^2 &= \theta_{2k} (\theta_{1k})^2 e^{2\theta_{1k} x_k} (\theta_{2k} e^{2\theta_{1k} x_k} + 1)^{-1}, \\
c_k^3 &= 0, \quad c_k^4 = i c_k^2, \quad k = \overline{1, 3},
\end{aligned} \tag{П.32}$$

где  $\theta_{1k}, \theta_{2k} = \text{const}$ ;

$$\begin{aligned}
3. \quad c_1^1 &= -i (1 + \lambda_2 e^{4i\theta x_1}) (1 - \lambda_2 e^{4i\theta x_1})^{-1}, \quad c_1^2 = i \lambda_1, \quad c_1^3 = \lambda_1, \\
c_1^4 &= \theta (1 + \lambda_2 e^{4i\theta x_1}) (1 - \lambda_2 e^{4i\theta x_1})^{-1}, \\
c_2^1 &= \lambda_3, \quad c_3^1 = \lambda_5, \quad c_2^k = c_3^k = 0, \quad k = \overline{2, 4}.
\end{aligned} \tag{П.33}$$

Подставляя формулы (П.30)–(П.33) в (П.22), получаем точные решения уравнения Дирака вида (П.19). Причем, в силу того, что операторы  $Q_i = \partial_{x_i} - A_i(x_i)$  не являются операторами симметрии уравнения (П.18), эти решения не могут быть получены в рамках подхода, используемого в [55, 56, 60].

1. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. A*, 1928, **117**, 610–625.
2. Gorson E.M., *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations*, London, 1953.
3. Фушич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, Вып. 3, 501–553.
4. Фушич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1981, **12**, Вып. 5, 1157–1219.
5. Фушич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1983, **14**, Вып. 1, 5–57.
6. Фушич В.И., Никитин А.Г., *Симметрия уравнений Максвелла*, Киев, Наукова думка, 1983.
7. Ivanenko D., *Phys. Z. Sowjet.*, 1938, **13**, 141–150.
8. Heisenberg W., *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1953, № 8, 111–122.
9. Heisenberg W., *Rev. Mod. Phys.*, 1957, **29**, 269–300.
10. *Нелинейная квантовая теория поля: Сб. статей*, М., Изд-во иностр. лит., 1959.
11. Finkelstein R., LeLevier R., Ruderman M., *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 326–335.
12. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 988–997.
13. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, 189–191.
14. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в *Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1983, 4–23.
15. Фушич В.И., О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений, в *Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985, 4–19.
16. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 729–735.
17. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, 485–487.
18. Barut A.O., Xu B.W., *Phys. Rev. D*, 1981, **23**, 3076–3077.
19. Barut A.O., Xu B.W., *Physica D*, 1982, **6**, 137–139.
20. Akdeniz K.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **33**, 40–44.
21. Akdeniz K.G., Smailagic A., *Lett. Math. Phys.*, 1984, **8**, 175–179.
22. Курдгелаидзе Д.Ф., *ЖЭТФ*, 1957, **32**, 1156–1162.
23. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в *Теоретико-алгебраические исследования в математической физике*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1981, 6–28.
24. Фушич В.И., Штелен В.М., *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, 88–92.
25. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 271–277.

26. Фушич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985, 20–30.
27. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *J. Phys. A*, 1987, **20**, 4173–4190.
28. Фушич В.И., *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, 116–123.
29. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.
30. Фушич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт 86.85, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1986.
31. Fushchych W.I., Tsifra I.M., *J. Phys. A*, 1987, **20**, L45–L48.
32. Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 1–3, Leipzig, 1888, 1890, 1893.
33. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
34. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
35. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1984.
36. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 365–369.
37. Курант Р., Уравнения с частными производными: Пер. с англ., М., Мир, 1964.
38. Morgan A.G.A., *Quart. J. Math. Oxford*, 1952, **3**, 250–259.
39. Биркгоф Г., Гидродинамика: Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1953.
40. Корняк В.В., Применение ЭВМ для исследования симметрий некоторых уравнений математической физики, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985, 114–119.
41. Bhabha H.J., *Rev. Mod. Phys.*, 1945, **17**, 200–215.
42. Levi-Leblonde J.-M., *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, 776–792.
43. Фушич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982.
44. Фушич В.И., Серова М.М., *Докл. АН СССР*, 1983, **268**, 1102–1104.
45. Thirring W., *Ann. Phys.*, 1958, **3**, 91–112.
46. Scarf F.L., *Phys. Rev.*, 1960, **117**, 693–695.
47. Фушич В.И., Тычинин В.А., Жданов Р.З., Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа–Ампера, Дирака, Препринт 85.34, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1985.
48. Cole L.D., *Quart. Appl. Math.*, 1951, **9**, 225–236.
49. Hopf E., *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1950, **3**, 201–230.
50. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597–1624.
51. Vacry H., Combe Ph., Sorba P., *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, 145–186.
52. Vacry H., Combe Ph., Sorba P., *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, 361–392.
53. Grunland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–807.
54. Фушич В.И., Штелень В.М., *ТМФ*, 1987, **72**, 35–44.
55. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, Пер. с англ., М., Мир, 1981.
56. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М. и др., Точные решения релятивистских волновых уравнений, Новосибирск, Наука, 1982.
57. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, Пер. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1947.
58. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Symmetries of Maxwell's equations*, Dordrecht, D. Reidel Publ. Company, 1987.
59. Cook A.H., *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1982, **383**, 247–278.
60. Kalnins E.G., Miller W., Williams G.C., *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, 1893–1900.

# Подалгебры аффинной алгебры $AIGL(3, R)$

А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

В работе проведена классификация с точностью до  $IGL(3, R)$ -сопряженности всех подалгебр алгебры Ли  $AIGL(3, R)$  группы  $IGL(3, R)$  неоднородных линейных преобразований вещественного трехмерного пространства. Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры  $AGL(n, R)$  являющейся алгеброй Ли полной линейной группы степени  $n$  над  $R$ , и изучены их свойства.

## Введение

Группа  $IGL(4, R)$  неоднородных линейных преобразований вещественного четырехмерного пространства и конформная группа  $C(2, 2)$  псевдоевклидова пространства  $R_{2,2}$  являются группами инвариантности важных уравнений теоретической и математической физики [1, 2]. Каждая из этих групп содержит в качестве подгруппы группу  $IGL(3, R)$  неоднородных линейных преобразований вещественного трехмерного пространства. Поэтому классификация подгрупп группы  $IGL(3, R)$  является одним из этапов классификации подгрупп группы  $IGL(4, R)$  и  $C(2, 2)$ . Так как нас интересуют только связные подгруппы группы  $IGL(3, R)$ , то задача их классификации относительно  $IGL(3, R)$ -сопряженности сводится к задаче классификации подалгебр алгебры Ли  $AIGL(3, R)$  группы  $IGL(3, R)$  относительно  $IGL(3, R)$ -сопряженности.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в [3]. В ней используется ряд общих принципов классификации подалгебр произвольной алгебры Ли, изложенных в работах [4, 5, 6]. В § 1 выделены вполне приводимые подалгебры алгебры  $AGL(n, R)$  являющейся алгеброй Ли полной линейной группы степени  $n$  над  $R$ , и изучены их свойства. В § 2 подалгебры алгебры  $AGL(3, R)$ , не являющиеся вполне приводимыми, разбиты на три класса и решена задача классификации подалгебр каждого из этих классов. В § 3 для каждой подалгебры  $F \subset AGL(3, R)$  находятся все ее расширения в алгебре  $AIGL(3, R)$ .

## § 1. Алгебра Ли $AGL(n, R)$ .

### Вполне приводимые подалгебры алгебры $AGL(n, R)$

Пусть  $V = R^n$  —  $n$ -мерное арифметическое векторное пространство над полем вещественных чисел  $R$ , состоящее из  $n$ -мерных столбцов,  $\{T_1, \dots, T_n\}$  — базис  $V$ , элементы которого являются единичными столбцами,  $\text{End } V$  — алгебра эндоморфизмов пространства  $V$ . Алгебру Ли, ассоциированную с алгеброй  $\text{End } V$ , будем обозначать символом  $AGL(V)$ . Для всякого  $f \in \text{End } V$  положим

$$f(T_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} T_k, \quad \alpha_{kj} \in R,$$

т.е.

$$(f(T_1), \dots, f(T_n)) = (T_1, \dots, T_n) \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

Тогда отображение

$$\text{End } V \ni f \rightarrow A = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R)$$

является изоморфизмом алгебр  $\text{End } V$  и  $M_n(R)$ . Здесь  $M_n(R)$  — алгебра квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $R$ . Таким образом, выбирая базис в  $V$ , мы можем отождествлять алгебры  $\text{End } V$  и  $M_n(R)$ . Аналогично мы отождествляем алгебры Ли  $AGL(V)$  и  $AGL(n, R)$ , ассоциированные соответственно с  $\text{End } V$  и  $M_n(R)$ .

Положим  $GL(V) = \{S \in AGL(V) \mid \det S \neq 0\}$ . Множество  $GL(V)$  является мультипликативной группой, которая называется полной линейной группой степени  $n$  над полем  $R$  и часто обозначается  $GL(n, R)$ . Группа  $GL(n, R)$  содержит подгруппу  $SL(n, R)$ , состоящую из всех матриц с определителем, равным 1. Она называется специальной линейной группой. Ее алгебра Ли  $ASL(n, R)$  определяется как множество всех матриц  $X \in AGL(n, R)$  с нулевым следом. Очевидно, имеет место разложение  $AGL(n, R) = ASL(n, R) \oplus \langle E_n \rangle$ , где  $E_n$  — единичная матрица.

Группой  $IGL(n, R)$  называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta \in GL(n, R)$ ,  $Y \in R^n$ .

Полагая  $[X, Z] = X \cdot Z$ ,  $[Z, Z'] = 0$  для произвольных  $X \in AGL(n, R)$ ,  $Z, Z' \in V$ , мы превратим векторное пространство  $V \dot{+} AGL(n, R)$  в алгебру Ли, которая является алгеброй Ли группы  $IGL(n, R)$ . Алгебра Ли  $AIGL(n, R)$  допускает изоморфное представление матрицами

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & Y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_1 \in AGL(n, R)$ ,  $Y_1 \in R^n$ .

Каждый внутренний автоморфизм  $g \rightarrow hgh^{-1}$  группы Ли  $G$  индуцирует автоморфизм  $X \rightarrow gXg^{-1}$  алгебры Ли  $AG$ . Этот автоморфизм мы будем называть  $G$ -автоморфизмом алгебры  $AG$  и обозначать символом  $\varphi_g$ . Подалгебры  $L_1$  и  $L_2$  алгебры  $AG$  будем называть  $G$ -сопряженными, если  $gL_1g^{-1} = L_2$ .

Пусть  $F$  — некоторая подалгебра алгебры  $AGL(V)$ . Подалгебра  $F$  называется неприводимой, а пространство  $V$   $F$ -неприводимым, если  $V$  содержит лишь тривиальные подпространства, инвариантные относительно  $F$ . Подалгебра  $F$  называется вполне приводимой, если для каждого  $F$ -инвариантного подпространства  $V_1 \subset V$  существует такое  $F$ -инвариантное подпространство  $V_2 \subset V$ , что  $V = V_1 \oplus V_2$ . Если  $F$  — вполне приводимая алгебра линейных преобразований векторного пространства  $V$ , то пространство  $V$  разлагается в прямую сумму  $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$  подпространств, каждое из которых инвариантно и неприводимо относительно  $F$ . Так как подалгебры алгебры  $AGL(V)$  мы изучаем с точностью до  $GL(V)$ -сопряженности, то в дальнейшем будем предполагать, что  $V_1 = \langle T_1, \dots, T_{k_1} \rangle$ ,  $V_2 = \langle T_{k_1+1}, \dots, T_{k_1+k_2} \rangle$ ,  $\dots$ ,  $V_s = \langle T_{\sigma_s+1}, \dots, T_n \rangle$ ,  $\sigma_s = k_1 + \cdots + k_{s-1}$ .

Если  $J \in F$ , то  $\text{ad } J$  можно рассматривать как линейное преобразование  $\hat{J}_i$  пространства  $V_i$ . Матрица  $\pi_i(J)$  преобразования  $\hat{J}_i$  в базисе  $\{T_{\sigma_i+1}, \dots, T_{\sigma_i+k_i}\}$  пространства  $V_i$  содержится в  $\text{AGL}(V_i)$ . Отображение  $\pi_i : F \rightarrow \text{AGL}(V_i)$  является гомоморфизмом, а  $\pi_i(F)$  — неприводимой подалгеброй алгебры  $\text{AGL}(V_i)$ . Так как отображение  $J \rightarrow (\pi_1(J), \dots, \pi_s(J))$  есть изоморфизм  $F$  в алгебру  $\pi_1(F) \times \dots \times \pi_s(F)$ , то будем говорить, что  $F$  разлагается относительно базиса  $\{T_1, \dots, T_n\}$  в подпрямое произведение алгебр  $\pi_1(F), \dots, \pi_s(F)$ , и записывать это так:

$$F = \pi_1(F) \times \dots \times \pi_s(F). \quad (1.1)$$

Пусть  $F_i = \{J \in F' \mid \pi_j(J) = 0 \text{ для всех } j \neq i\}$ , где  $F' = \pi_1(F) \times \dots \times \pi_s(F)$ . Легко видеть, что  $F_i$  — подалгебра алгебры  $F'$  и что наряду с разложением (1.1) мы имеем разложение  $F = F_1 \dot{+} \dots \dot{+} F_s$ . В дальнейшем алгебры  $F_1, \dots, F_s$  будем называть неприводимыми частями алгебры  $F$ . Условимся алгебру  $F_i$  отождествлять с алгеброй  $\pi_i(F)$ . В этом смысле будем говорить, что  $F_i$  — неприводимая подалгебра алгебры  $\text{AGL}(V_i)$ . Подалгебры  $F_i$  и  $F_j$  назовем эквивалентными, если  $k_i = k_j$  и существует такая матрица  $C \in \text{AGL}(V_i)$ , что  $C\pi_i(J)C^{-1} = \pi_j(J)$  для всех  $J \in F$ . Нетрудно убедиться, что рассматриваемое отношение на множестве  $\{F_1, \dots, F_s\}$  является отношением эквивалентности, а потому оно проводит разбиение множества неприводимых частей алгебры  $F$  на классы  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_t$ . Если  $F_{m_1}, F_{m_1}, \dots, F_{m_{r_i}} \in \mathfrak{A}_i$ , то через  $A_i$  обозначим подалгебру  $A_i = \{J \in F \mid \pi_j(J) = 0 \text{ для всех } j \neq m_1, m_2, \dots, m_{r_i}\}$ . Подалгебру  $A_i$  назовем примарной частью алгебры  $F$ . Очевидно,  $F$  является подпрямой суммой своих примарных частей. Разложение  $F = F_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_t$  будем называть каноническим разложением алгебры  $F$ .

**Теорема 1.1** Пусть  $F$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $\text{AGL}(V)$ ,  $A_1, \dots, A_t$  примарные части  $P, W$  — подпространство пространства  $V$ , инвариантное относительно  $F$ . Тогда  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_t \oplus W'$ , где  $[A_i, W_i] = W_i$ ,  $[A_i, W_j] = 0$  при  $i \neq j$ ,  $[F, W'] = 0$  ( $i, j = 1, \dots, t$ ). Если примарная алгебра  $A$  является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр  $\text{AO}(V_1), \text{AO}(V_2), \dots, \text{AO}(V_q)$ , то с точностью до  $\text{GL}(V)$ -сопряженности ненулевые подпространства  $U$  пространства  $V$  со свойством  $[A, U] = U$  исчерпываются пространствами  $V_1, V_1 \oplus V_2, \dots, V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_q$ .

Теорема 1.1 решает вопрос о классификации всех подпространств, инвариантных относительно вполне приводимой подалгебры  $F$  алгебры  $\text{AGL}(V)$ . Рассмотрим далее вопрос о нерасщепляемых расширениях подалгебры  $F$ . Допустим, что алгебра Ли  $L$  является полупрямой суммой идеала  $V$  и подалгебры  $K$ , где  $K \subset \text{AGL}(V)$ . Пусть  $\pi$  проектирование  $L$  на  $K$ , а  $\hat{F}$  — такая подалгебра  $L$ , что  $\hat{\pi}(\hat{F}) = F$ . Если для некоторого внутреннего автоморфизма  $\varphi$  алгебры  $L$  справедливо равенство  $\varphi(\hat{F}) = W \dot{\boxplus} F$ , где  $W \subset V$ , то алгебру  $\hat{F}$  будем называть расщепляемой в алгебре  $L$ . Если любая подалгебра  $\hat{F} \subset L$ , удовлетворяющая условию  $\hat{\pi}(\hat{F}) = F$ , является расщепляемой, то будем говорить, что алгебра  $F$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $L$ .

**Теорема 1.2 [3].** Пусть  $F$  вполне приводимая подалгебра алгебры  $\text{AGL}(V)$ ,  $K$  — произвольная подалгебра алгебры  $\text{AGL}(V)$  и  $F \subset K$ . Для того чтобы  $F$  обладала только расщепляемыми расширениями в алгебре  $\hat{K} = V \dot{\boxplus} K$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий: 1)  $F$  полупроста; 2)  $F$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ .

Теоремы 1.1 и 1.2 сводят задачу классификации относительно  $I GL(n, R)$ -сопряженности подалгебр  $F \subset L$ , удовлетворяющих условию  $\hat{\pi}(\hat{F}) = F$ , где  $F$  — вполне приводимая подалгебра алгебры  $AGL(n, R)$ , к задаче классификации относительно  $GL(V)$ -сопряженности неприводимых частей подалгебр алгебры  $AGL(V)$ .

Остановимся на вполне приводимых подалгебрах алгебры  $AGL(3, R)$ . С этой целью выпишем все неприводимые подалгебры алгебр  $AGL(3, R)$  и  $AGL(2, R)$ . Алгебра  $ASL(3, R)$  обладает с точностью до  $SL(3, R)$ -сопряженности тремя неприводимыми подалгебрами:

$$1) AO(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad 2) AO(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$3) ASL(3, R).$$

Все эти подалгебры полупросты. Неприводимыми в  $AGL(3, R)$  будут только такие подалгебры:

$$1) AO(3); \quad 2) AO(3) \oplus \langle S \rangle; \quad 3) AO(2, 1);$$

$$4) AO(2, 1) \oplus \langle S \rangle; \quad 5) ASL(3, R); \quad 6) AGL(3, R),$$

где  $S = \text{diag}[1, 1, 1]$ .

Алгебра  $AGL(2, R)$  состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

Базис этой алгебры выберем в следующем виде:

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно,  $AGL(2, R) = ASL(2, R) \oplus \langle \hat{D} \rangle$ , где  $ASL(2, R) = \langle \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3 \rangle$ . В алгебре  $ASL(2, R)$  с точностью до  $SL(2, R)$ -сопряженности имеются только две неприводимые подалгебры: 1)  $AO(2) = \langle \hat{A}_2 + \hat{A}_3 \rangle$ ; 2)  $ASL(2, R) = \langle \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3 \rangle$ . В алгебре  $AGL(2, R)$  с точностью до  $GL(2, R)$ -сопряженности существуют только следующие неприводимые подалгебры: 1)  $\langle \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \alpha \hat{D} \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ); 2)  $\langle \hat{A}_2 + \hat{A}_3, \hat{D} \rangle$ ; 3)  $ASL(2, R)$ ; 4)  $AGL(2, R)$ . Таким образом, алгебра  $AGL(3, R)$  содержит с точностью до  $GL(3, R)$ -сопряженности только следующие максимальные вполне приводимые подалгебры:

$$1) AO(3) \oplus \langle S \rangle; \quad 2) AO(2, 1) \oplus \langle S \rangle; \quad 3) ASL(3, R);$$

$$4) AGL(2, R) \oplus \langle S \rangle; \quad 5) \langle A_1 \rangle \oplus \langle D \rangle \oplus \langle S \rangle,$$

где  $A_1 = \text{diag}[\hat{A}_1; 0]$ ,  $D = \text{diag}[\hat{D}; 0]$ .

Обозначим класс вполне приводимых подалгебр алгебры  $AGL(3, R)$  через  $\mathfrak{M}_0$ . Из предыдущих результатов получаем полную классификацию подалгебр класса  $\mathfrak{M}_0$  с точностью до  $GL(3, R)$ -сопряженности, изложенную ниже.

Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_0$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$$AO(3) \oplus \langle S \rangle, \quad AO(2, 1) \oplus \langle S \rangle, \quad AO(3), \quad AO(2, 1), \quad ASL(3, R), \quad AGL(3, R),$$

$$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S \rangle \quad (\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0), \quad \langle A_2 + A_3 + \alpha D, S \rangle \quad (\alpha \geq 0),$$

$\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  $\langle A_2 + A_3, D, S \rangle$ ,  $ASL(2, R)$ ,  $ASL(2, R) \oplus \langle S \rangle$ ,  
 $ASL(2, R) \oplus \langle D + \alpha S \rangle$ ,  $AGL(2, R) \oplus \langle S \rangle$ ,  $\langle S \rangle$ ,  $\langle D + \beta S \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S \rangle$  ( $0 < \alpha < 1 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S \rangle$  ( $\alpha + 3\beta + 2 \geq 0, \alpha \geq 0$ ),  $\langle A_1 + \alpha D, S \rangle$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ),  
 $\langle D, S \rangle$ ,  $\langle A_1, D, S \rangle$ .

## § 2. Подалгебры алгебры $AGL(3, R)$ , не являющиеся вполне приводимыми

Пусть  $F$  — произвольная подалгебра алгебры  $AGL(n, R)$ , не являющаяся вполне приводимой, и пусть  $V_1$  — минимальное, отличное от нуля,  $F$ -инвариантное подпространство в  $V$ . Подпространство  $V_1$  неприводимо относительно  $F$ . Пусть, далее,  $V_2$  — минимальное  $F$ -инвариантное подпространство в  $V$ , содержащее  $V_1$ , но не совпадающее с  $V_1$ . Так как  $V_1$  —  $F$ -инвариантно, то определено действие алгебры  $F$  на факторпространстве  $V_2/V_1$ , которое будет  $F$ -неприводимым. Следовательно, мы можем построить композиционный ряд для  $V$ , т.е. последовательность  $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset V$ , состоящую из  $F$ -инвариантных подпространств в  $V$  и такую, что  $F$  действует неприводимо в каждом из факторпространств  $V_j/V_{j-1}$ . Ввиду того, что подалгебры алгебры  $AGL(V)$  мы изучаем с точностью до  $GL(V)$ -сопряженности, подпространства  $V_j$  можно выбрать таким образом, чтобы для каждого  $j = 1, 2, \dots, k$  векторы  $T_1, \dots, T_{l_j}$  образовывали базис  $V_j$  ( $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ ). При таком выборе базисов подпространств  $V_j$  алгебра  $F$  реализуется в базисе  $\{T_1, \dots, T_n\}$  матрицами

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & & & * \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_k \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_j$  пробегает неприводимую подалгебру алгебры  $AGL(V_j/V_{j-1})$ . Ее диагональную часть  $F_0$ , состоящую из матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_k \end{pmatrix},$$

будем называть вполне приводимой частью алгебры  $F$  в базисе  $\{T_1, \dots, T_n\}$  (или относительно композиционного ряда  $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset V$ ). Вполне приводимая часть  $F_0$  определяется алгеброй  $F$  однозначно с точностью до  $GL(n, R)$ -сопряженности.

Применительно к алгебре  $AGL(3, R)$  рассмотрим такие последовательности подпространств:

$$0 \subset \langle T_1, T_2 \rangle \subset \langle T_1, T_2, T_3 \rangle, \quad (2.1)$$

$$0 \subset \langle T_1 \rangle \subset \langle T_1, T_2, T_3 \rangle, \quad (2.2)$$

$$0 \subset \langle T_1 \rangle \subset \langle T_1, T_2 \rangle \subset \langle T_1, T_2, T_3 \rangle. \quad (2.3)$$



Будем говорить, что подалгебра  $F$  принадлежит классу  $\mathfrak{M}_1$  (соответственно  $\mathfrak{M}_2$  и  $\mathfrak{M}_3$ ), если ряд (2.1) (соответственно (2.2) и (2.3)) является композиционным рядом  $F$ -модуля  $V$ . Любая подалгебра  $F$ , относящаяся к классу  $\mathfrak{M}_1$ , состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & * \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

где  $\Delta$  пробегает неприводимую подалгебру алгебры  $AGL(2, R)$ ,  $a \in R$ . Подалгебра  $F$ , относящаяся к классу  $\mathfrak{M}_2$ , состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

где  $\Delta$  пробегает неприводимую подалгебру алгебры  $AGL(2, R)$ ,  $a \in R$ . Подалгебра  $F$ , относящаяся к классу  $\mathfrak{M}_3$ , реализуется матрицами

$$\begin{pmatrix} a & & * \\ & b & \\ 0 & & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in R.$$

Покажем, что подалгебры  $L_1$  и  $L_2$ , относящиеся к различным классам, не сопряжены между собой относительно группы  $GL(3, R)$ . Пусть, например,  $L_1 \in \mathfrak{M}_1$ ,  $L_2 \in \mathfrak{M}_2$ . Так как  $L_1$  не является вполне приводимой, то  $V$  содержит только одно нетривиальное  $L_1$ -инвариантное подпространство, совпадающее с  $\langle T_1, T_2 \rangle$ . Аналогично,  $V$  содержит только одно нетривиальное  $L_2$ -инвариантное подпространство, совпадающее с  $\langle T_1 \rangle$ . Отсюда вытекает, что не существует  $GL(3, R)$ -автоморфизма, который отображал бы  $L_1$  на  $L_2$ . Аналогично рассматривается остальные случаи.

Докажем, что задача классификации подалгебр класса  $\mathfrak{M}_1$  относительно  $GL(3, R)$ -сопряженности эквивалентна задаче классификации подалгебр класса  $\mathfrak{M}_2$  относительно  $GL(3, R)$ -сопряженности. С этой целью рассмотрим максимальную подалгебру  $M_1$ , относящуюся к классу  $\mathfrak{M}_1$ . Она совпадает с алгеброй всех матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

где  $a_i, b_i, c_i \in R$  и, очевидно, содержит любую подалгебру класса  $\mathfrak{M}_1$ . Базис алгебры  $M_1$  образуют матрицы  $S$ ,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\langle A_1, A_2, A_3, D \rangle \cong AGL(2, R)$ ,  $\langle P_1, P_2 \rangle \oplus \langle A_1, A_2, A_3, D \rangle \cong AIGL(2, R)$ , то алгебра  $M_1$  изоморфна алгебре  $AIGL(2, R) \oplus \langle S \rangle$ , где  $S$  — дилатация. Вполне приводимая часть алгебры  $M_1$  совпадает с  $\langle A_1, A_2, A_3, D \rangle \oplus \langle S \rangle \cong AGL(2, R) \oplus \langle S \rangle$ .

Пусть  $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}_1$  и существует  $GL(3, R)$ -автоморфизм  $\varphi$ , отображающий  $L_1$  на  $L_2$ . Так как, очевидно,  $\varphi(\langle T_1, T_2 \rangle) = \langle T_1, T_2 \rangle$ , то, следовательно  $\varphi = \varphi_c$  для некоторой матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \in \tilde{IGL}(2, R).$$

Таким образом, задача классификации с точностью до  $GL(3, R)$ -сопряженности подалгебр класса  $\mathfrak{M}_1$  сводится к задаче классификации подалгебр алгебры  $AIGL(2, R) \oplus \langle S \rangle$  с точностью до  $\tilde{IGL}(2, R)$ -сопряженности.

Аналогично, максимальная подалгебра  $M_2$ , относящаяся к классу  $\mathfrak{M}_2$  совпадает с алгеброй всех матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

где  $a_i, b_i, c_i \in R$ . Базис подалгебры  $M_2$  образуют матрицы  $S' = S$ .

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Алгебра  $M_2$ , изоморфная алгебре  $AIGL(2, R) \oplus \langle S' \rangle$  ( $S'$  — дилатация), содержит любую подалгебру класса  $\mathfrak{M}_2$ . Как и выше, доказываем, что классификация подалгебр класса  $\mathfrak{M}_2$  с точностью до  $GL(3, R)$ -сопряженности сводится к задаче классификации подалгебр алгебры  $AIGL(2, R) \oplus \langle S' \rangle$  с точностью до  $\tilde{IGL}(2, R)$ -сопряженности. Нетрудно убедиться, что линейное отображение

$$f: A_1 \rightarrow A'_1, \quad A_2 \rightarrow A'_2, \quad A_3 \rightarrow A'_3, \quad D \rightarrow D', \quad P_1 \rightarrow P'_1, \quad P_2 \rightarrow P'_2, \quad S \rightarrow S$$

является изоморфизмом алгебры  $M_1$  на алгебру  $M_2$ . Предположим, что задача классификации подалгебр алгебры  $M_1$  с точностью до  $\tilde{IGL}(2, R)$ -сопряженности решена. Тогда, используя изоморфизм  $f$ , автоматически получаем классификацию подалгебр алгебры  $M_2$  с точностью до  $\tilde{IGL}(2, R)$ -сопряженности.

Найдем, например, все подалгебры класса  $\mathfrak{M}_1$  алгебры  $M_1$  с точностью до  $IGL(2, R)$ -сопряженности. Так как алгебра  $\langle A_1, A_2, A_3, D \rangle$ , изоморфная алгебре  $AGL(2, R)$ , имеет только четыре неприводимых подалгебры (см. § 1) то подалгебры класса  $\mathfrak{M}_1$  алгебры  $M_1$  с нулевой проекцией на  $\langle S \rangle$  исчерпываются с точностью до  $IGL(2, R)$ -сопряженности такими подалгебрами:

$$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1, P_2 \rangle \ (\alpha \geq 0), \quad \langle A_2 + A_3 + D, P_1, P_2 \rangle,$$

$$AISL(2, R) = \langle P_1, P_2 \rangle \oplus ASL(2, R), \quad AIGL(2, R) = \langle P_1, P_2 \rangle \oplus AGL(2, R).$$

Расширяя эти подалгебры с помощью генератора  $S$ , получаем такие подалгебры класса  $\mathfrak{M}_1$  алгебры  $M_1$ :

$$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle \ (\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0),$$

$$\begin{aligned} &\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle \ (\alpha \geq 0), \ \langle A_2 + A_3, D, S, P_1, P_2 \rangle, \\ &\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2 \rangle \ (\alpha \geq 0, \ \beta \in R), \\ &AISL(2, R) \oplus \langle S \rangle, \ AISL(2, R) = \langle P_1, P_2 \rangle \ni ASL(2, R), \\ &AIGL(2, R) \oplus \langle S \rangle, \ AISL(2, R) \oplus \langle D + \alpha S \rangle \ (\alpha \in R). \end{aligned}$$

Заменив в этих подалгебрах все генераторы на генераторы со штрихами, получаем классификацию подалгебр класса  $\mathfrak{M}_2$  с точностью до  $GL(3, R)$ -сопряженности.

Перейдем к рассмотрению подалгебр класса  $\mathfrak{M}_3$ . Пусть  $F$  — одна из таких подалгебр. По определению  $F$ -модуль  $V$  обладает композиционным рядом.

$$0 \subset \langle T_1 \rangle \subset \langle T_1, T_2 \rangle \subset \langle T_1, T_2, T_3 \rangle. \tag{2.4}$$

Элемент  $\varphi \in GL(V)$ , оставляющий инвариантным ряд (2.4), будем называть автоморфизмом этого ряда. Множество всех автоморфизмов ряда (2.4) образует группу, которую обозначим через  $G_1$ . Группа  $G_1$  состоит, очевидно, из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \beta & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ .

Предположим, что для  $F$ -модуля  $V$  существует еще некоторый композиционный ряд, отличный от ряда (2.4). С точностью до сопряженности относительно группы  $G_1$  можно считать, что этот ряд имеет вид

$$0 \subset \langle T_{i_1} \rangle \subset \langle T_{i_1}, T_{i_2} \rangle \subset \langle T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3} \rangle, \tag{2.5}$$

где  $i_1, i_2, i_3$  — некоторая перестановка символов 1, 2, 3. Элемент  $\varphi \in GL(V)$ , отображающий ряд (2.4) на ряд (2.5), т.е. удовлетворяющий условиям  $\varphi(\langle T_1 \rangle) = \langle T_{i_1} \rangle$ ,  $\varphi(\langle T_1, T_2 \rangle) = \langle T_{i_1}, T_{i_2} \rangle$ , будем называть изоморфизмом ряда (2.4) на ряд (2.5). Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  — два произвольных изоморфизма ряда (2.4) на ряд (2.5). Тогда  $\varphi_1^{-1}\varphi_2$  является автоморфизмом композиционного ряда (2.4), и потому  $\varphi_1^{-1}\varphi_2 \in G_1$ . Следовательно,  $\varphi_2 \in \varphi_1 G_1$  и, значит, множество всех изоморфизмов ряда (2.4) на ряд (2.5) образует смежный класс группы  $GL(V)$  по подгруппе  $G_1$ . В качестве представителя этого смежного класса можно взять изоморфизм  $\theta$ , удовлетворяющий условиям:  $\theta(T_1) = T_{i_1}$ ,  $\theta(T_2) = T_{i_2}$ ,  $\theta(T_3) = T_{i_3}$ . Изоморфизм  $\theta$  можем рассматривать как подстановку  $\theta = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ T_{i_1} & T_{i_2} & T_{i_3} \end{pmatrix}$ , т.е. как элемент симметрической группы  $S_3$ . Обратно, любую подстановку  $\theta \in S_3$  мы можем рассматривать как изоморфизм ряда (2.4) на некоторый ряд (2.5). В частности, можно считать, что  $S_3 \subset GL(V)$ .

**Теорема 2.1.** *Если подалгебры  $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}_3$  сопряжены относительно группы  $GL(3, R)$ -автоморфизмов, то они сопряжены и относительно группы  $\{G_1, S_3\}$ . Здесь  $\{G_1, S_3\}$  группа, порожденная подгруппами  $G_1$  и  $S_3$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  —  $GL(3, R)$ -автоморфизм, отображающий алгебру  $L_1 \in \mathfrak{M}_3$  на алгебру  $L_2 \in \mathfrak{M}_3$ . Если

$$K_0 : \ 0 \subset \langle T_1 \rangle \subset \langle T_1, T_2 \rangle \subset \langle T_1, T_2, T_3 \rangle$$

— единственный композиционный ряд  $L_1$ -модуля  $V$ , то этим же свойством обладает и  $L_2$ -модуль  $V$ . Следовательно,  $f$  является автоморфизмом ряда  $K_0$ , а потому

$f \in G_1$ . Предположим, далее, что  $f(K_0) \neq K_0$ . Тогда существует композиционный ряд  $K'_1$   $L_1$ -модуля  $V$ , отличный от ряда  $K_0$ . Не нарушая общности, можно считать, что  $f(K'_1) = K_0$ ,  $f(K_0) = K_2$ , где  $K'_2$ -композиционный ряд  $L_2$ -модуля  $V$ . Нетрудно убедиться, что существует автоморфизм  $\theta_1 \in G_1$ , отображающий композиционный ряд  $K'_1$  на композиционный ряд

$$K_1: 0 \subset \langle T_{i_1} \rangle \subset \langle T_{i_1}, T_{i_2} \rangle \subset \langle T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3} \rangle,$$

где  $i_1, i_2, i_3$  некоторая перестановка символов 1, 2, 3. Аналогично, существует автоморфизм  $\theta_2 \in G_1$ , отображающий композиционный ряд  $K'_2$  на

$$K_2: 0 \subset \langle T_{j_1} \rangle \subset \langle T_{j_1}, T_{j_2} \rangle \subset \langle T_{j_1}, T_{j_2}, T_{j_3} \rangle.$$

Обозначим через  $L'_1$  и  $L'_2$  подалгебры  $L'_1 = \theta_1(L_1)$  и  $L'_2 = \theta_2(L_2)$ . Автоморфизм  $f' = \theta_2 f \theta_1^{-1}$  отображает  $L'_1$  на  $L'_2$  и  $f'(K_0) = K_2$ ,  $f'(K_1) = K_0$ . Отсюда вытекает, что  $f' = \theta \psi$ , где  $\theta \in S_3$ ,  $\psi \in G_1$ . Но тогда  $\theta_2 f \theta_1^{-1} = \theta \psi$ , откуда  $f = \theta_2^{-1} \theta \psi \theta_1$ , а значит,  $f \in \{G_1, S_3\}$ . Теорема доказана.

Пусть  $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}_3$  — две произвольные подалгебры, которые не сопряжены относительно группы  $G_1$  автоморфизмов композиционного ряда  $K_0$ , но сопряжены относительно группы  $\{G_1, S_3\}$ . Из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что  $L_1$ -модуль  $V$  и  $L_2$ -модуль  $V$  имеют по крайней мере два общих композиционных ряда  $K_0$  и  $K_1$ , причем можно предполагать, что автоморфизм  $\theta \in S_3$ , отображающий  $L_1$  на  $L_2$ , отображает  $K_0$  на  $K_1$ . Но тогда  $f$  отображает вполне приводимую часть алгебры  $L_1$  относительно композиционного ряда  $K_0$  на вполне приводимую часть алгебры  $L_2$  относительно композиционного ряда  $K_1$ . Поэтому класс подалгебр  $\mathfrak{M}_3$  можем разбить на четыре подкласса в зависимости от от структуры вполне приводимой части подалгебры.

Если вполне приводимая часть алгебры  $L \in \mathfrak{M}_3$  нулевая, то  $L_1$  отнесем к классу  $\mathfrak{M}_{3,0}$ . Если вполне приводимая часть алгебры  $L \in \mathfrak{M}_3$  совпадает с алгеброй  $\langle S \rangle$ , то  $L$  отнесем к классу  $\mathfrak{M}_{3,1}$ . Класс  $\mathfrak{M}_{3,2}$  образуют те подалгебры  $L \in \mathfrak{M}_3$ , вполне приводимая часть которых сопряжена с одной из следующих алгебр:  $\langle D + \beta S \rangle$ ,  $\langle A_1 + D + \beta S \rangle$ ,  $\langle A_1 - D + \beta S \rangle$  ( $\beta \in R$ ),  $\langle A_1 - D, S \rangle$ ,  $\langle A_1 + D, S \rangle$ ,  $\langle D, S \rangle$ . Все остальные подалгебры множества  $\mathfrak{M}_3$ , не содержащиеся ни в одном из классов  $\mathfrak{M}_{3,0}$ ,  $\mathfrak{M}_{3,1}$  и  $\mathfrak{M}_{3,2}$ , отнесем к классу  $\mathfrak{M}_{3,3}$ . Из предыдущих рассуждений вытекает, что если подалгебры  $L_1$  и  $L_2$  принадлежат различным классам  $\mathfrak{M}_{3,i}$  и  $\mathfrak{M}_{3,j}$  ( $i \neq j$ ;  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ), то они не сопряжены между собой относительно группы  $GL(3, R)$ -автоморфизмов.

В результате получаем полную классификацию подалгебр алгебры  $AGL(3, R)$ , не являющихся вполне приводимыми. Если речь идет о подалгебрах  $U_1 \bowtie F$ ,  $\dots, U_s \bowtie F$ , то будем употреблять обозначение  $F: U_1, \dots, U_s$ .

1) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_1$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$$\begin{aligned} &\langle A_2 + A_3, D, S, P_1, P_2 \rangle, \langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle (\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0), \\ &\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle (\alpha \geq 0), \langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2 \rangle (\alpha \geq 0), \\ &AISL(2, R) \oplus \langle S \rangle, AISL(2, R) = \langle P_1, P_2 \rangle \bowtie ASL(2, R), \\ &AISL(2, R) \oplus \langle S \rangle, AISL(2, R) \oplus \langle D + \alpha S \rangle (\alpha \in R). \end{aligned}$$

2) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_2$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$$\begin{aligned} &\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + \beta S, P'_1, P'_2 \rangle (\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0), \\ &\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D', S, P'_1, P'_2 \rangle (\alpha \geq 0), \langle A'_2 + A'_3 + \alpha S, D' + \beta S, P'_1, P'_2 \rangle (\alpha \geq 0), \end{aligned}$$

$\langle P'_1, P'_2 \rangle \ni (\langle A'_1, A'_2, A'_3 \rangle \oplus \langle S \rangle), \langle A'_2 + A'_3, D', S, P'_1, P'_2 \rangle,$   
 $AISL(2, R) = \langle P'_1, P'_2 \rangle \ni \langle A'_1, A'_2, A'_3 \rangle, \langle P'_1, P'_2 \rangle \ni (\langle A'_1, A'_2, A'_3 \rangle \oplus \langle D' + \alpha S \rangle),$   
 $\langle P'_1, P'_2 \rangle \ni (\langle A'_1, A'_2, A'_3 \rangle \oplus \langle D' \rangle \oplus \langle S \rangle).$

3) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_{3,0}$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$\langle A_3 \rangle, \langle A_3 + P_2 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle A_3, P_1 \rangle, \langle A_3 + P_2, P_1 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle.$

4) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_{3,1}$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$\langle S \rangle: \langle A_3 \rangle, \langle A_3 + P_2 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle A_3, P_1 \rangle, \langle A_3 + P_2, P_1 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle S + A_3 \rangle: \mathbf{0}, \langle P_1 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle A_3 + P_2, P_1 \rangle;$   
 $\langle S + A_3 + P_2 \rangle: \mathbf{0}, \langle P_1 \rangle; \langle S + P_1 \rangle: \langle P_2 \rangle, \langle A_3 + P_2 \rangle; \langle S + P_2, A_3, P_1 \rangle.$

5) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_{3,2}$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$\langle D + \beta S, sS \rangle: \langle P_1 \rangle, \langle A_3 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle A_3, P_1 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle D + \beta S + A_3, sS \rangle: \mathbf{0}, \langle P_1 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle D + \alpha A_3, S + A_3 \rangle: \mathbf{0}, \langle P_1 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle A_1 + D + \beta S, sS \rangle: \langle P_2 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle A_1 + D + \beta S + P_1, sS, P_2 \rangle, \langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + \beta S, sS \rangle: \langle A_3, P_1 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle A_1 - D + \beta S, P_2, sS, A_3, P_1 \rangle, \langle A_1 - D + \alpha P_2, S + P_2, A_3, P_1 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ).

6) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_{3,3}$  алгебры  $AGL(3, R)$ :

$\langle A_1 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0, \alpha \neq 1 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3, P_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3, \alpha \neq 1 \vee \alpha = 3, \beta \geq -2$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, A_3, P_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, sS \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1; s = 0, 1$ ):  $\langle A_3 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle A_1 - 3D + \beta S, sS \rangle$  ( $s = 0, 1$ ):  $\langle A_3 + P_2 \rangle, \langle A_3 + P_2, P_1 \rangle;$   
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1 \rangle$  ( $\alpha + 3\beta + 2 \geq 0$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S \rangle: \langle A_3 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle;$   
 $\langle A_1, D, S \rangle: \langle A_3 \rangle, \langle P_1, P_2 \rangle, \langle A_3, P_1 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 \rangle.$

### § 3. Подалгебры алгебры $AIGL(3, R)$

Пусть  $L$  — произвольная подалгебра алгебры  $AIGL(3, R) = V \ni AGL(3, R)$ ,  $\pi$  — проектирование  $L$  на  $AGL(3, R)$ . Если  $\pi(L) = F$ , то  $L$  будем называть расширением подалгебры  $F$  в алгебре  $AIGL(3, R)$ . В §§ 1, 2 были изучены подалгебры алгебры  $AGL(3, R)$  с точностью до  $GL(3, R)$ -сопряженности. В настоящем параграфе для каждой подалгебры  $F \subset AGL(3, R)$  мы опишем с точностью до  $IGL(3, R)$ -сопряженности все ее расширения в алгебре  $AIGL(3, R)$ . Все подалгебры алгебры  $AIGL(3, R)$  разобьем на четыре класса. Будем говорить, что подалгебра  $L \subset AIGL(3, R)$  принадлежит классу  $\tilde{\mathfrak{M}}_i$ , если  $L$  является расширением подалгебры  $F$  класса  $\mathfrak{M}_i$  алгебры  $AGL(3, R)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). В соответствии с разбиением класса  $\mathfrak{M}_i$  на подклассы  $\mathfrak{M}_{3,0}$ ,  $\mathfrak{M}_{3,1}$ ,  $\mathfrak{M}_{3,2}$ , и  $\mathfrak{M}_{3,3}$  класс  $\tilde{\mathfrak{M}}_3$  подалгебр алгебры  $AIGL(3, R)$  разбивается на подклассы  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,0}$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,2}$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,3}$ .

Задача описания всех расширений вполне приводимой подалгебры алгебры  $AGL(3, R)$  решена в § 1. Поэтому остановимся на описании расширений подалгебр, относящихся к одному из классов  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$  и  $\mathfrak{M}_3$ . Рассмотрим наиболее характерные случаи, встречающиеся при решении вышеуказанной задачи. Пусть, например,  $F = \langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$ . Подалгебра  $F$  относится к классу

$\mathfrak{M}_1$ . Изучение расщепляемых расширений подалгебры  $F$  сводится к нахождению подпространств пространства  $V$ , инвариантных относительно  $F$ . Из определения класса  $\mathfrak{M}_1$  вытекает, что  $V$  содержит только следующие  $F$ -инвариантные подпространства:  $0$ ,  $\langle T_1, T_2 \rangle$ ,  $V$ . Следовательно, получаем такие расщепляемые расширения подалгебры. Опишем нерасщепляемые расширения подалгебры  $F$ :  $F$ ,  $\langle T_1, T_2 \rangle \oplus F$ ,  $V \oplus F$ .

Опишем нерасщепляемые расширения подалгебры  $F$ . Вполне приводимая часть  $F_0$  подалгебры  $F$  равна  $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S \rangle$ . Если  $\beta \neq 0$ , то подалгебра  $F_0$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ . Но тогда в силу теоремы 1.2 подалгебра  $F_0$  обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре  $AIGL(3, R)$ . Следовательно, можно предполагать, что подалгебра  $L \subset AIGL(3, R)$ , удовлетворяющая условию  $\pi(L) = F$ , разлагается в полупрямую сумму  $L = N \oplus F_0$ , где  $N \subset \langle P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ . Отсюда вытекает, что  $L$  расщепляемое расширение подалгебры  $F$ , что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает, что  $\beta = 0$ . Подалгебра  $L$  содержит генератор  $A_2 + A_3 + \alpha D + \gamma T_3$ . Если  $L \cap V = 0$ , то отсюда вытекает, что  $L$  сопряжена с подалгеброй  $a$  если  $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1 + T_2, P_2 - T_1 \rangle$ , а если  $L \cap V = \langle T_1, T_2 \rangle$ , то  $L$  сопряжена с подалгеброй  $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \gamma T_3, P_1 + P_2, T_1 - T_2 \rangle$  ( $\gamma \neq 0$ ). Используя автоморфизм  $\varphi_c$ , определяемый матрицей  $C = \text{diag}[a, a, a]$ , можно считать, что  $\gamma = 1$ .

Пусть  $F = \langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ). Алгебра  $L$ , являющаяся расширением подалгебры  $F$ , содержит  $S$ , а потому  $L$ -расщепляемое расширение подалгебры  $F$ . Все остальные случаи рассматриваются аналогично. В результате получаем полную классификацию подалгебр алгебры  $AIGL(3, R)$  с точностью до  $IGL(3, R)$ -сопряженности изложенную ниже. Подпространство  $\langle T_{i_1}, \dots, T_{i_k} \rangle$  будем обозначать  $(i_1, \dots, i_k)$ .

1) Подалгебры класса  $\mathfrak{M}_{3,0}$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

$\langle A_3 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(3)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,2,3)$ ;

$\langle A_3 + T_2 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(3)$ ,  $(1,3)$ ;

$\langle A_3 + T_3 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ;

$\langle A_3 + P_2 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,2,3)$ ;

$\langle A_3 + P_2 + T_3 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ;

$\langle P_1, P_2 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,2,3)$ ;

$\langle P_1 + \varepsilon_1 T_2, P_2 + \varepsilon_2 T_3, T_1 \rangle$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ),

$\langle P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ,  $\langle P_1 + T_2, P_2 + \varepsilon T_1 \rangle$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ),

$\langle P_1, P_2 + T_2 \rangle$ ,  $\langle A_3, P_1 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,2,3)$ ;

$\langle A_3 + T_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ,  $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ,

$\langle A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ,  $\langle A_3 + T_2, P_1 + T_2 + \gamma T_3, T_1 \rangle$  ( $\gamma \neq 0$ ),

$\langle A_3 + T_2, P_1 \pm T_3 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ;

$\langle A_1 + \beta T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\beta| \leq 1$ ),

$\langle A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ,  $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1 \rangle$ ,

$\langle A_3 + T_2, P_1 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ;

$\langle A_3 + P_2, P_1 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,2,3)$ ;

$\langle A_3 + P_2, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ,

$\langle A_3 + P_2 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1 \rangle$ ,  $\langle A_3 + P_2, P_1 + T_2, T_1 \rangle$ ,

$\langle A_3 + P_2, P_1 + T_1 \rangle$ ,  $\langle A_3 + P_2 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ,

$\langle A_3, P_1, P_2 \rangle$ :  $0$ ,  $(1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,2,3)$ ;

$$\begin{aligned} & \langle A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_1 \rangle, \langle A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle, \\ & \langle A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle, \langle A_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle, \\ & \langle A_3 + T_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle, \langle A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle, \\ & \langle A_3 + \varepsilon_1 T_2 + \varepsilon_2 T_3, P_1 - \varepsilon_2 T_2, P_2 + \varepsilon_3 T_3, T_1 \rangle \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0, 1; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 0) \quad (1), \\ & (1,2), (1,2,3). \end{aligned}$$

2) Подалгебры класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

$$\begin{aligned} \langle S, A_3 \rangle: & 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3); \\ \langle S, A_3 + P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S, P_1, P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S, A_3, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S, A_3 + P_2, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S, A_3, P_1, P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + A_3 \rangle: & 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3); \\ \langle S + A_3, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3); \\ \langle S + A_3, P_1, P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + A_3, A_3 + P_2, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + A_3 + P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + A_3 + P_2, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + P_1, P_2 \rangle: & 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + P_1, A_3 + P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle S + P_2, A_3, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \end{aligned}$$

3) Подалгебры класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,2}$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

$$\begin{aligned} \langle D + \beta S, sS, P_1 \rangle \quad (s = 0, 1): & 0, (1), (2), (1,2), (1,3), (1,2,3); \\ \langle D - S + T_1, P_1 \rangle: & 0, (2); \\ \langle D - S + T_2, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,3); \\ \langle D + S, P_1 + T_3 \rangle: & 0, (1), (2), (1,2); \\ \langle D + T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle, \langle D + T_3, P_1 \rangle: & (1), (1,2); \\ \langle D, P_1 + T_2 \rangle: & 0, (1), (1,3); \\ \langle D + \beta S, sS, A_3 \rangle \quad (s = 0, 1): & 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3); \\ \langle D - S + T_2, A_3 \rangle: & (1), (1,3); \\ \langle D - S + T_2, A_3 + T_2 \rangle: & (1), (1,3); \\ \langle D - S + T_1, A_3 \rangle: & 0, (3); \\ \langle D - S + T_1, A_3 + T_2 \rangle: & 0, (3); \\ \langle D - S, A_3 + T_2 \rangle: & 0, (1), (3), (1,3); \\ \langle D + \varepsilon_1 T_3, A_3 + \varepsilon_2 T_3 \rangle \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1; \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0): & 0, (1), (1,2); \\ \langle D, S, P_1, P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle D + \beta S, P_1, P_2 \rangle: & 0, (1), (1,2), (1,2,3); \\ \langle D - S + T_1, P_1, P_2 \rangle, \langle D - S + T_2, P_1, P_2, T_1 \rangle, \\ \langle D + S, P_1, P_2 + T_3 \rangle: & (1), (1,2); \langle D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle, \\ \langle D, P_1 + T_2, P_2, T_1 \rangle, \langle D, P_1 + T_2, P_2 + \varepsilon T_1 \rangle \quad (\varepsilon = 0, 1), \\ \langle D + \beta S, sS, A_3, P_1 \rangle \quad (s = 0, 1): & 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3); \\ \langle D + S, A_3, P_1 + T_3 \rangle: & 0, (1), (1,2); \\ \langle D - S + T_2, A_3 + sT_2, P_1 \rangle: & (1), (1,3); \\ \langle D - S + T_1, A_3 + \varepsilon T_2, P_1 \rangle \quad (\varepsilon = 0, 1), \langle D, P_1 + T_1, P_2 \rangle, \\ \langle D - S, A_3 + T_2, P_1 \rangle: & 0, (1), (1,3); \\ \langle D + sT_3, A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1 \rangle \quad (s = 0, 1), \end{aligned}$$

- $\langle D + T_3, A_3, P_1 + sT_2, T_1 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ),  
 $\langle D, A_3, P_1 + T_2 \rangle$ : (1), (1,3);  $\langle D, A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ,  
 $\langle D + T_3, A_3 + sT_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ),  
 $\langle D + \beta S, sS, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle D - S + T_2, A_3 + sT_2, P_1, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): (1);  
 $\langle D - S + T_1, A_3 + sT_2, P_1, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ),  
 $\langle D - S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1);  $\langle D, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle D + T_3, A_3 + sT_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ),  
 $\langle D, A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle$ ,  $\langle D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle D + S, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle D + \beta S + A_3, sS \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D - S + A_3 + T_2 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,3);  
 $\langle D + A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D + \beta S + A_3, sS, P_1 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D - S + A_3 + T_2, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,3);  
 $\langle D + A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ,  $\langle D + A_3 + T_3, P_1 + \beta T_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle D + A_3, P_1 + T_2 \rangle$ : (1), (1,3);  $\langle D + A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle D + S + A_3, P_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D + \beta S + A_3, sS, P_1, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle D - S + A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle D + S + A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle D + A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle$ ,  $\langle D + A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle D + A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle D + \alpha A_3, S + A_3 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + D + \beta S, sS, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (2), (1,2), (2,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_2 + T_1 \rangle$ : 0, (2), (2,3);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_2 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2);  
 $\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 + D + T_3, P_2 \rangle$ : (2), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + T_1, P_2 \rangle$ : 0, (2), (2,3);  
 $\langle A_1 + D + \beta S, sS, P_1, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_1 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 + D - 2S + \varepsilon_1 T_2, P_1 + \varepsilon_2 T_2, P_2 \rangle$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$ ;  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ): 0, (1);  
 $\langle A_1 + D + T_3, P_1 + \varepsilon T_3, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ),  
 $\langle A_1 + D + T_1, P_1 + \varepsilon T_3, P_2, T_2 \rangle$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ),  
 $\langle A_1 + D, P_1 + T_3, P_2 \rangle$ : (2), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + \varepsilon_1 T_1, P_1 + \varepsilon_2 T_1, P_2 \rangle$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$ ;  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ),  
 $\langle A_1 + D + \beta S, sS, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + D - 4S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 + D + T_1, P_1, P_2, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + D - 2S + \varepsilon_1 T_2, A_3 + \varepsilon_2 T_3, P_1 - \varepsilon_2 T_2, T_1, P_2 \rangle$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$ ;  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ );  
 $\langle A_1 + D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_3, A_3 \rangle$ : (1), (1,2);



- $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_1, A_3 \rangle,$   
 $\langle A_1 + D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + D + T_1, A_3, P_1, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + D + \beta S + P_1, sS, P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ); 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + D - 2S + P_1 + T_2, P_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 + D + P_1 + T_3, P_2 \rangle$ : (2), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + P_1, P_2 + T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + D + 2S + P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + 2S + P_1, P_2 + T_1 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - D + \beta S, sS, A_3, P_1 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - D + T_3, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + \varepsilon T_2, P_1 + T_3 \rangle$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ),  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + \gamma T_2, P_1 + T_2 + T_3, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + \varepsilon T_2, P_1 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ),  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + \beta T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$  ( $|\beta| \leq 1$ ),  
 $\langle A_1 - D + \beta S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - D, S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + 2S + T_1, A_3, P_1, P_2 \rangle,$   $\langle A_1 - D + 2S + T_1, A_3, P_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + 2S + T_1, A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + T_3, A_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + T_2, A_3, P_1, P_2, +T_3, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_2, P_1, P_2, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, T_1, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_2 + T_3, P_1 - T_2, T_1, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + \beta S + P_2, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - D + P_2, S, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - D + 2S + P_2 + T_1, A_3, P_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S + P_2, A_3 + T_2, P_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + P_2 + T_3, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - D - 2S + P_2, A_3 + \gamma T_2 + T_3, P_1 - T_2, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S + P_2, A_3 + T_2, P_1, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D - 2S + P_2, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - D + \alpha P_2, S + P_2, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3).

 4) Подалгебры класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,3}$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

- $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0, \alpha \neq 1, \forall \alpha = 0, \beta > 0$ ): 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S + T_1, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ): 0, (2);

- $\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, P_1 + T_2, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + \alpha D - (1 + \alpha)S + T_2, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ): 0, (1);  
 $\langle A_1 + \alpha D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ): 0, (1);  
 $\langle A_1 + 3D + 2S, P_1 + T_3, P_2 + T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + \alpha D + (\alpha - 1)S, P_1 + T_3, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ): (2), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D + 2S, P_1, P_2 + T_1 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ): 0, (2);  
 $\langle A_1 + \alpha D, P_1, P_2 + T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + (\alpha + 1)S, P_1, P_2 + T_3 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1$ ): 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3, P_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3, \alpha \neq 1 \vee \alpha = 3, \beta > -2$ ): 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + 3D - 2S, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, P_1 + T_2, A_3 + T_3 \rangle,$   
 $\langle A_1 - S + T_2, P_1 + T_3, A_3, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 + 2S, D, A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 + T_3, D + \beta T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + \alpha D - (1 + \alpha)S + T_2, P_1, A_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3, \alpha \neq 1$ ): (1), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S + T_1, A_3, P_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + T_3, A_3, P_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ): (1), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + T_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + \gamma T_3, T_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3, T_1, T_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + (\alpha - 1)S, P_1 + T_3, A_3 \rangle$  ( $1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ): 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D - (3 + \alpha)S, P_1, A_3 + T_2 \rangle$  ( $1 < \alpha < 3, \alpha \neq 1$ ): 0, (1), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1, A_3 + T_3 \rangle$  ( $1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, A_3, P_1 \rangle$  ( $1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, sS, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1; s = 0, 1$ ): 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, A_3 + T_3 \rangle,$   
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S + T_1, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): 0, (3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - (1 + \alpha)S + T_2, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): (1), (1,3);  
 $\langle A_1 - 3D + T_3, A_3 + T_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 + \alpha D + T_3, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D - (3 + \alpha)S, A_3 + T_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): 0, (1), (3), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, sS, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1; s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S + T_1, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D - (1 + \alpha)S + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ),  
 $\langle A_1 - 5D + 2S, A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - 3D, A_3 + T_2, P_1 + T_1, P_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 - 2D - S, A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_3, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 + \alpha D - (3 + \alpha)S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): 0, (1);  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2 + T_3, T_1 \rangle,$   
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle,$   
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ),

- $\langle A_1 + \alpha D + 2S, A_3, P_1, P_2 + T_1 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ),  
 $\langle A_1 + \alpha D + (\alpha + 1)S, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - 3D + \beta S, sS, A_3 + P_2 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 3D + 4S + T_1, A_3 + P_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D + 2S + T_2, A_3 + P_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D + T_3, A_3 + P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - 3D + \beta S, sS, A_3 + P_2, P_1 \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 3D + 4S + T_1, A_3 + P_2, P_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D + 2S + T_2, A_3 + P_2, P_1, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D + T_3, A_3 + P_2, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D, A_3 + P_2, P_1 + T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + \beta T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + T_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - 3D - 4S, A_3 + P_2, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1, D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1, D, S, A_3 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2) (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, S, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, S, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ;  $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$ ;  $(0; -2)$ ): 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D - 2S, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + 2S, D, P_1, P_2 + T_1 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 + S, D + S, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 + S, D - S + T_1, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 + T_3, D + \beta T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1, D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  $\langle A_1, D, P_1, P_2 + T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1 \rangle$  ( $\alpha + 3\beta + 2 \geq 0$ ;  $(\alpha; \beta) \neq (-2; 0)$ ;  $(1; -1)$ ): 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + S, D - S, A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 + \beta T_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - S, D + S, P_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1, A_3, P_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + S, D - S + T_1, A_3, P_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + T_3, D + \beta T_3, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1, D + T_3, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 3S, D - S, A_3 + T_2 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,3);  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - S + T_2, D - S + \beta T_2, A_3 \rangle$ : (1), (1,3);

- $\langle A_1 - S, D - S + T_2, A_3 \rangle$ : (1), (1,3);  
 $\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1, A_3 \rangle$ : 0, (3);  
 $\langle A_1 + S, D - S + T_1, A_3 \rangle$ : 0, (3);  
 $\langle A_1 + T_3, D + \beta T_3, A_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1, D + T_3, A_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 3S, D - S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - S + T_2, D - S + \beta T_2, A_3, P_1, P_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 - S, D - S + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1, A_3, P_1, P_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + S, D - S + T_1, A_3, P_1, P_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_1 + S, D + S, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);

5) Подалгебры класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_1$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

- $F$ : 0, (1,2), (1,2,3) ( $F$  — подалгебра класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ );  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1 + T_2, P_2 - T_1 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  
 $\langle A_2 + A_3, D, P_1 + T_2, P_2 - T_1 \rangle$ ,  $\langle A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, D + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \delta T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\delta \geq 0$ ),  $\langle A_2 + A_3, D + T_3, T_2, P_2, T_1, P_1 \rangle$ .

6) Подалгебры класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_k$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

- $F$ : 0, (1), (1,2,3) ( $F$  — подалгебра класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + T'_1, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  
 $\langle A'_2 + A'_3 + T_1, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2 \rangle$ ,  $\langle A'_2 + A'_3 + T_1, D' + \alpha T_1, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\alpha > 0$ ).  
 $\langle A'_2 + A'_3, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ ),  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ),  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2 \rangle$ ,  $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, -T_2 \rangle$ ,  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ ),  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1 \rangle$   
 $\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, T_1 \rangle$ ,  $\langle A'_1, A'_2, A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2 \rangle$ ,  
 $\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, D' + 2S, T_1 \rangle$ ,

7) Подалгебры класса  $\tilde{\mathfrak{M}}_0$  алгебры  $AIGL(3, R)$ :

- $AO(3)$ : 0, (1,2,3);  $AO(2, 1)$ : 0, (1,2,3);  
 $AO(3) \oplus \langle S \rangle$ : 0, (1,2,3);  $AO(2, 1) \oplus \langle S \rangle$ : 0, (1,2,3);  
 $ASL(3, R)$ : 0, (1,2,3);  $AGL(3, R)$ : 0, (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3, D, S \rangle$ : 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $ASL(2, R)$ : 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $ASL(2, R) \oplus \langle S \rangle$ : 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $ASL(2, R) \oplus \langle D + \alpha S \rangle$ : 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $AGL(2, R) \oplus \langle S \rangle$ : 0, (3), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S, sS \rangle$  ( $s = 0, 1$ ): 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);

- $\langle D - S + T_2 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,3);  $\langle D + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S \rangle$  ( $0 < \alpha < 1 \vee \alpha = 0, \beta > 0$ ): 0, (1), (1,2), (2), (3), (1,3), (2,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S + T_1 \rangle$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ): 0, (2), (3), (2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - (1 + \alpha)S + T_2 \rangle$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ): 0, (1), (3), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D + T_3 \rangle$  ( $0 < \alpha < 1$ ): 0, (1), (2), (1,2);  
 $\langle S \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  $\langle A_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D, S \rangle$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ): 0, (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \geq 3\beta + 2$ ): 0, (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + 2S, D \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2), (2,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + S, D - S \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2), (2,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1 \rangle$ : 0, (2), (2,3);  
 $\langle A_1 + S, D - S + T_1 \rangle$ : 0, (2), (2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3 \rangle$ : 0, (1,2);  $\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \alpha T_3 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (1,2);  
 $\langle A_2 + A_3, D + T_3 \rangle$ : 0, (1,2);  $ASL(2, R) \oplus \langle D + T_3 \rangle$ : 0, (1,2).

1. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Фушич В.И., Штельен В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Баранник А.Ф., Фушич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт № 86.87, Киев, Институт математики АН УССР, 1986, 48 с.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
6. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.

# Подалгебры псевдоортогональной алгебры $AO(3, 3)$

А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

В работе проведена классификация всех подалгебр псевдоортогональной алгебры  $AO(3, 3)$  с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности.

## Введение

Ряд уравнений теоретической и математической физики инвариантны относительно группы  $C(2, 2)$  конформных преобразований псевдоевклидова пространства  $R_{2,2}$  [1]. Поэтому подалгебры алгебры Ли  $AC(2, 2)$  группы  $C(2, 2)$  можно использовать для поиска инвариантных и частично инвариантных решений таких уравнений. Известно (см. например [2]), что задача классификации подалгебр алгебры  $AC(2, 2)$  относительно  $C(2, 2)$ -сопряженности эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры  $AO(3, 3)$  относительно  $O(3, 3)$ -сопряженности. Решению последней задачи и посвящена настоящая работа. Работа тесно примыкает к исследованиям, выполненным в [3]. Следуя [3], все подалгебры алгебры  $AO(3, 3)$  мы разбиваем на три класса, характеризуя каждый из них изотропным рангом. В §§ 1, 2 изложена классификация подалгебр изотропных рангов 0 и 1 алгебры  $AO(3, 3)$ . В § 3 задача классификации подалгебр изотропного ранга 3 алгебры  $AO(3, 3)$  сведена к задаче классификации подалгебр алгебры  $AIGL(3, R)$ , являющейся алгеброй Ли группы  $IGL(3, R)$  неоднородных преобразований трехмерного вещественного пространства. Так как классификация подалгебр алгебры  $AIGL(3, 3)$  изложена в [4], то отсюда получаем классификацию подалгебр изотропного ранга 3 алгебры  $AO(3, 3)$ . При решении указанных выше задач используется ряд общих принципов классификации подалгебр произвольной алгебры Ли, изложенных в [5, 6, 7].

## § 1. Подалгебры изотропного ранга 0 алгебры $AO(3, 3)$

Пусть  $R$  — поле вещественных чисел,  $V = R_{3,3}$  — псевдоевклидово пространство сигнатуры  $(3, 3)$ ,  $\{Q_1, \dots, Q_6\}$  — ортонормированный базис пространства  $V$ . Псевдоортогональной группой  $O(3, 3)$  называется группа, сохраняющая форму  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6$ . Если в базисе  $\{Q_1, \dots, Q_6\}$  пространства  $V$  матрица  $f$  равна  $S$ , то  $f \in O(3, 3)$  тогда и только тогда, когда  $S^T J_{3,3} S = J_{3,3}$ , где

$$J_{3,3} = \begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & -E_3 \end{pmatrix},$$

$E_3$  — единичная матрица порядка 3,  $S^T$  — матрица, транспонированная к матрице  $S$ . Таким образом, группу  $O(3, 3)$  можно определить как группу всех квадратных матриц  $\Delta$  порядка 6 над полем вещественных чисел  $R$ , удовлетворяющих матричному уравнению  $\Delta^T J_{3,3} \Delta = J_{3,3}$ . Отсюда вытекает, что алгебра Ли  $AO(3, 3)$  группы  $O(3, 3)$  состоит из всех вещественных матриц  $X$ , удовлетворяющих соотношению  $X \cdot J_{3,3} + J_{3,3} \cdot X^T = 0$ . Пусть  $E_{ik}$  — матрица порядка 6, имеющая

единицу на пересечении  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца, и нули на всех остальных местах ( $i, k = 1, \dots, 6$ ). Базис алгебры  $AO(3, 3)$  образуют матрицы:  $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}$  ( $a < b$ ;  $a, b = 1, 2, 3$ ),  $J_{ai} = -E_{ai} - E_{ia}$  ( $a = 1, 2, 3$ ;  $i = 4, 5, 6$ ),  $J_{cd} = -E_{cd} + E_{dc}$  ( $c < d$ ;  $c, d = 4, 5, 6$ ).

Каждый внутренний автоморфизм  $\Delta \rightarrow C\Delta C^{-1}$  группы  $O(3, 3)$  индуцирует автоморфизм  $\varphi_c : X \rightarrow CXC^{-1}$  алгебры Ли  $AO(3, 3)$ . Этот автоморфизм мы будем называть  $O(3, 3)$ -автоморфизмом алгебры  $AO(3, 3)$ , соответствующим матрице  $C$ . Подалгебры  $L_1$  и  $L_2$  алгебры  $AO(3, 3)$  будем называть  $O(3, 3)$ -сопряженными, если  $CL_1C^{-1} = L_2$ .

Подалгебра  $L \subset AO(3, 3)$  называется подалгеброй класса 0, если  $V$  не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно  $L$ . Будем говорить, что подалгебра  $L \subset AO(3, 3)$  относится к классу  $r > 0$  или имеет изотропный ранг  $r$ , если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно  $L$ , равен  $r$ . Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра  $L$  алгебры  $AO(3, 3)$  имеет изотропный ранг 0, 1 или 3.

В настоящем параграфе мы изучим с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности подалгебры класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$ . Пусть  $L$  — одна из таких подалгебр. Тогда пространство  $V$  разлагается в прямую ортогональную сумму неприводимых  $L$ -подпространств  $V_1, \dots, V_s$  каждое из которых невырождено. Если  $(p_i, q_i)$  — сигнатура пространства  $V_i$ , в силу теоремы Витта можно предполагать, что  $V_i$  обладает базисом

$$Q_{j_i}, \dots, Q_{j_{p_i}}, Q_{j_{p_i+1}}, \dots, Q_{j_{p_i+q_i}}. \tag{1.1}$$

Здесь  $j_1 < \dots < j_{p_i} \leq 3, 3 < j_{p_i+1} < \dots < j_{p_i+q_i} \leq 6$ . Если  $J \in L$ , то  $\text{ad } J$  можно рассматривать как линейное преобразование  $\hat{J}_i$  пространства  $V_i$ . Матрица  $\pi_i(J)$  преобразования  $\hat{J}_i$  в базисе (1.1) пространства  $V_i$  содержится в  $AO(p_i, q_i)$ . Отображение  $\pi_i : L \rightarrow AO(p_i, q_i)$  является гомоморфизмом, а  $\pi_i(L)$  неприводимой подалгеброй алгебры  $AO(p_i, q_i)$ . Так как отображение  $J \rightarrow (\pi_1(J), \dots, \pi_s(J))$  есть изоморфизм  $L$  в алгебру  $\pi_1(L) \times \dots \times \pi_s(L)$ , то будем говорить, что  $L$  разлагается относительно базиса  $\{Q_1, \dots, Q_6\}$  в подпрямое произведение алгебр  $\pi_1(L), \dots, \pi_s(L)$  и записывать это так:

$$L = \pi_1(L) \times \dots \times \pi_s(L).$$

Пусть  $L_i = \{J \in L' \mid \pi_j(J) = 0 \text{ для всех } j \neq i\}$ , где  $L' = \pi_1(L) \times \dots \times \pi_s(L)$ . Легко видеть, что  $L_i$  — подалгебра алгебры  $L'$  и что мы имеем разложение  $L = L_1 + \dots + L_s$ . Условимся алгебру  $L_i$  отождествлять с алгеброй  $\pi_i(L)$ . В этом смысле мы будем говорить, что  $L_i$  — неприводимая подалгебра алгебры  $AO(p_i, q_i)$ . Таким образом, подалгебра  $L$  класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$  либо неприводимая, либо разлагается в подпрямую сумму неприводимых подалгебр.

**Теорема 1.1.** *Алгебра  $AO(3, 3)$  содержит с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности только одну собственную неприводимую подалгебру, которая сопряжена с алгеброй  $\langle J_{12} - J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} - J_{56}, J_{15} - J_{24}, J_{26} - J_{35}, J_{16} - J_{34} \rangle$ .*

**Доказательство.** Подалгебра  $L$  алгебры  $AO(3, 3)$  называется нормальной, если полупростая часть подалгебры  $L$  содержится в  $AO(3) \oplus AO(3)$ . Из результатов

работы [8] вытекает, что  $AO(3, 3)$  не содержит нормальных неприводимых подалгебр. Опишем неприводимые подалгебры алгебры  $AO(3, 3)$ , не являющиеся нормальными. Пусть  $L$  — одна из таких подалгебр и  $L = L_1 + L_2$  — ее разложение Картана, где  $L_1$  — максимальная компактная подалгебра алгебры  $L$ . В силу предположения относительно  $L$  можно считать, что  $L_1 = \langle J_{12} - J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} - J_{56} \rangle$ , т.е.  $L$  представляется матрицами

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

где  $X \in AO(3)$ . Пусть

$$K = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^T & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^T & 0 \end{pmatrix}$$

— два произвольных элемента, содержащихся в  $L_2$ . Так как

$$[K, T] = \begin{pmatrix} YZ^T - ZY^T & 0 \\ 0 & Y^TZ - Z^TY \end{pmatrix},$$

то

$$YZ^T - ZY^T = Y^TZ - Z^TY. \quad (1.2)$$

В случае, если  $Y = Y^T$ , а  $Z = Z_1 + Z_2$ , где  $Z_1^T = -Z_1$ ,  $Z_2^T = Z_2$ , равенство (1.2) принимает вид

$$YZ_1 + Z_1Y = 0. \quad (1.3)$$

Подпространство  $N$ , состоящее из векторов  $\begin{pmatrix} p \\ \lambda p \end{pmatrix}$ , инвариантно относительно подалгебры  $L_1$ . Если допустить, что для любого  $K \in L_2$  матрица  $Y$  симметрическая, то подпространство  $N$  инвариантно относительно  $L$ , что противоречит условию. Следовательно, можно предполагать, что  $Z$  не является симметрической матрицей. Тогда матрица  $Z$  разлагается в сумму кососимметрической матрицы  $Z_1$  и симметрической матрицы  $Z_2$ . С точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности можно допускать, что  $Z_1 = J_{12}$ .

Пусть

$$\begin{pmatrix} 0 & U \\ U^T & 0 \end{pmatrix},$$

— матрица из  $L_2$ . Полагая в (1.3)  $Y = U$ , а  $Z$  равно поочередно  $J_{12} + Z_2$ ,  $J_{23} - [J_{13}, Z_2]$ ,  $J_{13} - [J_{23}, Z_2]$ , получаем систему

$$J_{ab} \cdot U + U \cdot J_{ab} = 0 \quad (a, b = 1, 2, 3), \quad (1.4)$$

имеющую единственное нулевое решение.

Пусть

$$Z_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_2 & \gamma_1 \end{pmatrix},$$



Из коммутационных соотношений

$$[L_{12}, Z] = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 & -2\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_2 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[L_{13}, [J_{23}, Z]] = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & \gamma_1 - \beta_1 & -2\beta_2 \\ \gamma_1 - \beta_1 & 0 & -\alpha_3 \\ -2\beta_2 & -\alpha_3 & 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

и условия (1.4) имеем  $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$ . Из соотношения  $[J_{23}, [J_{23}, J_{12} + \alpha_1 E]] = -J_{12}$  получаем  $\alpha_1 = 0$ . Таким образом, алгебра  $AO(3, 3)$  содержит единственную с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности собственную неприводимую подалгебру

$$L = \langle J_{12} - J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} - J_{56}, J_{15} - J_{24}, J_{26} - J_{35}, J_{16} - J_{34} \rangle.$$

Теорема доказана.

Найдем все максимальные подалгебры класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$ , используя для этого тип разложения пространства  $V$  в прямую ортогональную сумму неприводимых подпространств. Пусть, например,  $L$  — максимальная подалгебра класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$  и  $V = V_1 \oplus V_2$  — прямая ортогональная сумма двух  $L$ -неприводимых подпространств  $V_1 = \langle Q_1, Q_2, Q_4 \rangle$  и  $V_2 = \langle Q_3, Q_5, Q_6 \rangle$ . Мы будем говорить, что разложение подпространства  $V$  относится к типу  $(+ + -)(+ - -)$ . Очевидно, подалгебра  $L$  совпадает с алгеброй  $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24} \rangle \oplus \langle J_{35}, J_{36}, J_{56} \rangle$ . Все максимальные подалгебры класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$  выписаны в таблице 1.

Таблица 1

**Максимальные подалгебры класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$**

№ п/п	Тип разложения пространства $V$	Максимальные подалгебры класса 0
1	(+ + + - - -)	$AO(3, 3)$
2	(+ + + - -)(-)	$AO(3, 2) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1, \dots, 5 \rangle$
3	(+)(+ + - - -)	$AO(2, 3) = \langle J_{ab} \mid a, b = 2, \dots, 6 \rangle$
4	(+ +)(+ - - -)	$\langle J_{12} \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a, b = 3, \dots, 6 \rangle$
5	(+ + + -)(- -)	$\langle J_{ab} \mid a, b = 1, \dots, 4 \rangle \oplus \langle J_{56} \rangle$
6	(+ + +)(- - -)	$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$
7	(+ + -)(+ - -)	$\langle J_{12}, J_{14}, J_{24} \rangle \oplus \langle J_{35}, J_{36}, J_{56} \rangle$
8	(+)(+)(+ - - -)	$AO(1, 3) = \langle J_{ab} \mid a, b = 3, \dots, 6 \rangle$
9	(+ + + -)(-)(-)	$AO(3, 1) = \langle J_{ab} \mid a, b = 1, \dots, 4 \rangle$
10	(+)(+ +)(- - -)	$\langle J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$
11	(+)(+ + -)(- -)	$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle \oplus \langle J_{56} \rangle$
12	(+ +)(+ - -)(-)	$\langle J_{12} \rangle \oplus \langle J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle$
13	(+ + +)(- -)(-)	$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45} \rangle$
14	(+)(+)(+)(- - -)	$AO(3) = \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$
15	(-)(-)(-)(+ + +)	$AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$

Теперь уже нетрудно получить описание всех подалгебр класса 0 алгебры  $AO(3, 3)$  с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности. Пусть, например, разложение пространства  $V$  относится к типу  $(+ + +)(- - -)$ . Подалгебра  $L$ , для которой

указанное разложение пространства  $V$  существует, является либо прямой суммой  $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$ , либо разлагается в подпрямую сумму  $L_1 \dot{+} L_2$  двух неприводимых подалгебр  $L_1$  и  $L_2$ . Следовательно,  $L_1 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$ ,  $L_2 = \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$ . Нетрудно убедиться, что с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности подалгебра  $L_1 \dot{+} L_2$  сопряжена с алгеброй  $L' = \langle J_{12} + J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} + J_{56} \rangle$ . Однако, изотропный ранг алгебры  $L'$  равен 3, так как  $V$  содержит трехмерное вполне изотропное подпространство  $\langle Q_1 + Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 + Q_6 \rangle$ , инвариантное относительно алгебры  $L'$ . Это доказывает, что если разложение пространства относится к типу  $(+ + +)(- - -)$ , то этому разложению соответствует единственная подалгебра (с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности), совпадающая с  $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$ . Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Подалгебры изотропного ранга 0 алгебры  $AO(3, 3)$ :

$$\begin{aligned} AO(3, 3), & \langle J_{12} - J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} - J_{56}, J_{15} - J_{24}, J_{26} - J_{35}, J_{16} - J_{34} \rangle, \\ AO(3, 2) &= \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle, \\ & \langle -2J_{12} + J_{45}, J_{14} + J_{25} + \sqrt{3}J_{35}, -J_{15} + J_{24} - \sqrt{3}J_{34} \rangle, \\ AO(2, 3) &= \langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{26}, J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle, \\ & \langle -2J_{56} + J_{23}, J_{36} + J_{25} + \sqrt{3}J_{24}, -J_{26} + J_{35} - \sqrt{3}J_{34} \rangle, \\ AO(2) \oplus AO(1, 3) &= \langle J_{12}, J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle, \\ AO(3, 1) \oplus AO(2) &= \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{56} \rangle, \\ AO(1, 3) &= \langle J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle, \\ AO(3) \oplus AO(3) &= \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle, \\ AO(2, 1) \oplus AO(1, 2) &= \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, J_{35}, J_{36}, J_{56} \rangle, \\ AO(3, 1) &= \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle, \\ AO(2) \oplus AO(3) &= \langle J_{23}, J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle, \quad AO(3) = \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle, \\ AO(2, 1) \oplus AO(2) &= \langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{56} \rangle, \quad AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, \\ AO(2) \oplus AO(1, 2) &= \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45} \rangle, \quad AO(3) \oplus AO(2) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45} \rangle. \end{aligned}$$

## § 2. Подалгебры изотропного ранга 1 алгебры $AO(3, 3)$

Согласно определению подалгебра  $L \subset AO(3, 3)$  имеет изотропный ранг 1 или относится к классу 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства  $V_{(1)}$ , инвариантного относительно  $L$ , равен 1. В силу теоремы Витта можно предполагать, что  $V_{(1)} = \langle Q_1 + Q_6 \rangle$ . Максимальная подалгебра, оставляющая  $V_{(1)}$  инвариантным, совпадает с алгеброй  $A_{(1)} = \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle \oplus (\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle \oplus \langle J_{16} \rangle)$ , где  $G_a = J_{1a} - J_{a6}$  ( $a = 2, 3, 4, 5$ ). Подалгебра  $\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle$  является алгеброй Ли псевдоортогональной группы  $O(2, 2)$ , а подалгебра  $\langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle \oplus \langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle$  является алгеброй Ли группы Пуанкаре  $P(2, 2)$ . Учитывая, что элемент  $J_{16}$  играет роль дилатации, получаем, что  $A_{(1)}$  является алгеброй Ли расширенной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(2, 2)$ , т.е.  $A_{(1)} = A\tilde{P}(2, 2)$ . Любая подалгебра  $L \subset AO(3, 3)$  изотропного ранга 1, оставляющая  $V_{(1)}$  инвариантным, содержится в  $A_{(1)}$  и ее проекция  $\pi(L)$  на подалгебру  $AO(2, 2)$  имеет изотропный ранг 0. Таким образом, нам необходимо провести классификацию с точностью до  $O(2, 2)$ -сопряженности подалгебр изотропного ранга 0 алгебры и расширить каждую из них с помощью дилатации  $J_{16}$ . Максимальные подалгебры изотропного ранга 0 алгебры  $AO(2, 2)$  находим, следуя § 1. Результаты приведены в таблице 2.

**Максимальные подалгебры класса 0 алгебры  $AO(2, 2)$**

№ п/п	Тип разложения пространства $V$	Максимальные подалгебры класса 0
1	(+ + --)	$AO(2, 2) = \langle J_{ab} \mid a, b = 2, 3, 4, 5 \rangle$
2	(+ + -)(-)	$AO(2, 1) = \langle J_{23}, J_{24}, J_{25} \rangle$
3	(+)(+ --)	$AO(1, 2) = \langle J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle$
4	(++)(--)	$AO(2) \oplus AO(2) = \langle J_{23}, J_{45} \rangle$
5	(+)(+)(--)	$AO(2) = \langle J_{45} \rangle$
6	(++)(-)(-)	$AO(2) = \langle J_{23} \rangle$

Из таблицы 2 видно, что если подалгебра  $L \subset AO(2, 2)$  изотропно-ранга 0 не является максимальной, то она либо неприводима, а потому сопряжена с алгеброй  $\langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23} \rangle$  [6], либо является подпрямой суммой подалгебр  $\langle J_{23} \rangle$  и  $\langle J_{45} \rangle$ . Во втором случае  $L = \langle J_{23} + \gamma J_{45} \rangle$ . Автоморфизм, соответствующий матрице  $\text{diag} [1, -1, 1, 1, 1, 1]$ , отображает  $L$  на  $\langle J_{23} - \gamma J_{45} \rangle$ . Следовательно, можно предполагать, что  $\gamma > 0$ . Если  $\gamma = 1$ , то алгебра  $\langle J_{23} + J_{45} \rangle$  оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство  $\langle Q_2 + Q_5, Q_3 + Q_4 \rangle$ , что противоречит предположению о  $L$ . Таким образом,  $L = \langle J_{23} + \gamma J_{45} \rangle$  ( $\gamma > 0; \gamma \neq 1$ ).

Проведем далее с точностью до  $\tilde{O}(2, 2)$ -сопряженности классификацию всех подалгебр  $L$  алгебры  $A\tilde{O}(2, 2) = AO(2, 2) \oplus \langle J_{16} \rangle$ , обладающих тем свойством, что  $\pi(L)$  является подалгеброй изотропного ранга 0 алгебры  $AO(2, 2)$ . Это задача классификации подалгебр прямой суммы двух алгебр Ли. Применяя теорему Ли–Гурса, получаем следующие подалгебры:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \langle J_{23} + \alpha J_{16} \rangle, F_2 = \langle J_{23}, J_{16} \rangle, F_3 = \langle J_{45} + \alpha J_{16} \rangle, \\
 F_4 &= \langle J_{45}, J_{16} \rangle, F_5 = \langle J_{23} + \gamma J_{45} + \alpha J_{16} \rangle, F_6 = \langle J_{23} + \gamma J_{45}, J_{16} \rangle, \\
 F_7 &= \langle J_{23} + \alpha J_{16}, J_{45} + \beta J_{16} \rangle, F_8 = \langle J_{23}, J_{45}, J_{16} \rangle, F_9 = \langle J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle, \\
 F_{10} &= \langle J_{34}, J_{35}, J_{45}, J_{16} \rangle, F_{11} = \langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle, \\
 F_{12} &= \langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{16} \rangle, F_{13} = \langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23} + \alpha J_{10} \rangle, \\
 F_{14} &= \langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23}, J_{16} \rangle, \\
 F_{15} &= AO(2, 2) \oplus \langle J_{16} \rangle, F_{16} = AO(2, 2).
 \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \gamma \neq 1$ .

Найдем все расширения подалгебр  $F_i$  в алгебре  $A\tilde{P}(2, 2)$ . Нахождение расщепляемых расширений подалгебры  $F_i$  сводится к задаче классификации с точностью до  $\tilde{O}(2, 2)$ -сопряженности всех подпространств пространства  $W = \{G_2, G_3, G_4, G_5\}$ , инвариантных относительно  $F_i$ . Рассмотрим, например, подалгебру  $F_1$ . Ее проекция  $\pi(F_1)$  на  $AO(2, 2)$  совпадает с  $\langle J_{23} \rangle$ . Пространство  $W$  имеет с точностью до  $O(2, 2)$ -сопряженности только следующие  $\langle J_{23} \rangle$ -инвариантные, а значит, и  $F_1$ -инвариантные подпространства: 0,  $\langle G_4 \rangle$ ,  $\langle G_2, G_3 \rangle$ ,  $\langle G_4, G_5 \rangle$ ,  $\langle G_2, G_3, G_4 \rangle$ ,  $\langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle$ . Аналогично рассматриваются остальные подалгебры  $F_i$ .

Найдем все нерасщепляемые расширения подалгебр  $F_i$  в алгебре  $A\tilde{P}(2, 2)$ . Каждая из подалгебр  $F_i$  действует вполне приводимо на подпространстве  $W$ . Следовательно,  $F_i$  обладает расщепляемыми расширениями тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1)  $F_i$  полупроста, 2)  $F_i$  аннулирует только нулевое подпространство пространства  $V$ . Среди подалгебр  $F_i$  существуют только две подалгебры  $\langle J_{23} \rangle$  и  $\langle J_{45} \rangle$ , не удовлетворяющие сформулированному

критерию, и потому только эти подалгебры обладают нерасщепляемыми расширениями в алгебре  $A\tilde{P}(2, 2)$ . Рассмотрим, например, подалгебру  $\langle J_{23} \rangle$ . Можно предполагать, что подалгебра  $L$ , удовлетворяющая условию  $\pi(L) = \langle J_{23} \rangle$ , является полупрямой суммой  $L = W_1 \ltimes \langle J_{23} + \delta G_4 + \sigma G_5 \rangle$ , где  $W_1 \subset W$  — подпространство, инвариантное относительно  $\langle J_{23} \rangle$ . Пусть  $W_1 = 0$  или  $W_1 = \langle G_2, G_3 \rangle$ . Используя автоморфизм  $\exp[\text{ad}(tJ_{45})]$ , можем положить  $\delta = 0$ . Последовательно применяя автоморфизм  $\varphi_1 = \exp[\text{ad}(tJ_{16})]$  и автоморфизм  $\varphi_2$ , определяемый матрицей  $\text{diag}[1, -1, 1, 1, 1]$ , можно положить  $\sigma = 1$ . Пусть  $W = \langle G_4 \rangle$  или  $W = \langle G_2, G_3, G_4 \rangle$ . Тогда  $\sigma = 0$ . Последовательное применение автоморфизмов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  позволяет считать  $\sigma = 1$ . Следовательно, мы получаем следующие нерасщепляемые расширения алгебры  $\langle J_{23} \rangle$ :  $\langle J_{23} + G_5 \rangle$ ;  $0$ ,  $\langle G_4 \rangle$ ,  $\langle G_2, G_3 \rangle$ ,  $\langle G_2, G_3, G_4 \rangle$ .

Подалгебры изотропного ранга 1 алгебры  $AO(3, 3)$ :

$$\begin{aligned} &\langle J_{23} + \alpha J_{16} \rangle: 0, \langle G_4 \rangle, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_4 \rangle, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23} + G_5 \rangle: 0, \langle G_4 \rangle, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4 \rangle; \\ &\langle J_{45} + \alpha J_{16} \rangle: 0, \langle G_3 \rangle, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_3, G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{45}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_3 \rangle, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_3, G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{45} + G_2 \rangle: 0, \langle G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23} + \gamma J_{45} + \alpha J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23} + \gamma J_{45}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23} + \alpha J_{16}, J_{45} + \beta J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23}, J_{45}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3 \rangle, \langle G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle: 0, \langle G_2 \rangle, \langle G_3, G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{34}, J_{35}, J_{45}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_2 \rangle, \langle G_3, G_4, G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle: 0, \langle G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_5 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4 \rangle, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23} + \alpha J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle: 0, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle; \\ &\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}, J_{16} \rangle: 0, \langle G_2, G_3, G_4, G_5 \rangle. \end{aligned}$$

### § 3. Подалгебры изотропного ранга 3 алгебры $AO(3, 3)$

В настоящем параграфе задача классификации подалгебр  $L \subset AO(3, 3)$  изотропного ранга 3 сведена к задаче классификации подалгебр алгебры  $AIGL(3, R)$ , которая является алгеброй Ли группы неоднородных преобразований трехмерного вещественного пространства. Алгебра  $AIGL(3, R)$  состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & Y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_1 \in AGL(3, R)$ ,  $Y_1 \in R^3$ . Ее базис образуют матрицы

$$\tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $L \subset AO(3, 3)$  — подалгебра изотропного ранга 3. В силу теоремы Витта можно считать, что  $L$  оставляет инвариантными подпространство  $V_{(3)} = \langle Q_1 + Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 + Q_6 \rangle$ . Все такие подалгебры содержатся в максимальной подалгебре  $A_{(3)}$  класса 3, которая является нормализатором в  $AO(3, 3)$  вполне изотропного подпространства  $V_{(3)}$ . Согласно работе [3] каждый элемент  $J$  алгебры  $A_{(3)}$  однозначно представляется в виде

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & -J_1 \\ J_1 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -J_2 \\ J_2 & -J_2 - J_2^T \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где  $J_1 \in AO(3)$ ,  $J_2 \in AGL(3, R)$ . Символически это будем записывать так:  $J = (J_1; J_2)$ . В соответствии с разложением (3.1) мы можем утверждать, что алгебра  $A_{(3)}$ , рассматривается как векторное пространство, разлагается в декартово произведение  $AO(3) \times AGL(3, R)$ . Отсюда следует, что базис алгебры  $A_{(3)}$  образуют матрицы

$$K_{12} = J_{12} - J_{45}, K_{13} = J_{13} - J_{46}, K_{23} = J_{23} - J_{56}, D_1 = J_{14} - J_{25}, \\ D_2 = J_{14} - J_{36}, S = -\frac{1}{2}(J_{14} + J_{25} + J_{36}), T_3 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{15} - J_{24} + J_{45}), \\ T_2 = \frac{1}{2}(-J_{13} - J_{16} + J_{34} - J_{46}), T_1 = \frac{1}{2}(J_{23} + J_{26} - J_{35} + J_{56}).$$

Алгебра матриц  $(\tilde{J}_1; 0)$ , где  $\tilde{J}_1$  пробегает  $AO(3)$ , образует коммутативный идеал  $V_1$  алгебры  $A_{(3)}$ , факторалгебра  $A_{(3)}/V_1$  по которому изоморфна алгебре  $AGL(3, R)$ . Следовательно,  $A_{(3)}$  изоморфна алгебре  $AIGL(3, R)$  и этот изоморфизм  $\varphi$  определяется как линейное отображение  $\varphi$ :

$$\tilde{K}_{12} \rightarrow K_{12}, \tilde{K}_{13} \rightarrow K_{13}, \tilde{K}_{23} \rightarrow K_{23}, \tilde{L}_{12} \rightarrow L_{12}, \tilde{L}_{13} \rightarrow L_{13},$$

$$\tilde{L}_{23} \rightarrow L_{23}, \tilde{D}_1 \rightarrow D_1, \tilde{D}_2 \rightarrow D_2, \tilde{S} \rightarrow S, \tilde{T}_1 \rightarrow T_1, \tilde{T}_2 \rightarrow T_2, \tilde{T}_3 \rightarrow T_3.$$

В дальнейшем будем рассматривать следующий базис алгебры  $AIGL(3, R)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= -\tilde{D}_1, \tilde{A}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{12} - \tilde{L}_{12}), \tilde{A}_3 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{12} + \tilde{L}_{12}), \\ \tilde{D} &= -\frac{1}{3}\tilde{D}_1 + \frac{2}{3}\tilde{D}_2 + \frac{2}{3}\tilde{S}, \tilde{S}, \tilde{P}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{13} + \tilde{L}_{13}), \\ \tilde{P}_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{K}_{23} + \tilde{L}_{23}), \tilde{K}_{13}, \tilde{A}_2^1 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{23} - \tilde{L}_{23}), \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3. \end{aligned}$$

Подействовав на этот базис изоморфизмом  $\varphi$ , получаем базис алгебры  $A_{(3)}$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \varphi(\tilde{A}_1), \quad A_2 = \varphi(\tilde{A}_2), \quad A_3 = \varphi(\tilde{A}_3), \\ D &= \varphi(\tilde{D}), \quad S = \varphi(\tilde{S}), \quad P_1 = \varphi(\tilde{P}_1), \\ P_2 &= \varphi(\tilde{P}_2), \quad K_{13} = \varphi(\tilde{K}_{13}), \quad A_2^1 = \varphi(\tilde{A}_2^1), \\ T_i &= \varphi(\tilde{T}_i) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть  $\tilde{G}_1$  — группа  $IGL(3, R)$ -автоморфизмов алгебры  $AIGL(3, R)$ . Тогда группа  $G_1 = \varphi\tilde{G}_1\varphi^{-1}$  является группой автоморфизмов алгебры  $A_{(3)}$ . В силу результатов работы [3] группа  $O(3, 3)$ -автоморфизмов, оставляющая инвариантным вполне изотропное подпространство  $V_{(3)}$ , индуцирует на  $A_{(3)}$  группу  $IGL(3, R)$ -автоморфизмов, совпадающую с  $G_1$ . Таким образом, задача классификации подалгебр алгебры  $A_{(3)}$  с точностью до сопряженности относительно группы  $G_1$  эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры  $AIGL(3, R)$  с точностью до  $IGL(3, R)$ -сопряженности. Поэтому мы можем выделить следующие два этапа при классификации подалгебр алгебры  $A_{(3)}$ . На первом этапе находятся все подалгебры алгебры  $AIGL(3, R)$  с точностью до  $IGL(3, R)$ -сопряженности. Полученное множество подалгебр обозначим через  $\tilde{\mathfrak{A}}$ . Изоморфизм  $\varphi : AIGL(3, R) \rightarrow A_{(3)}$ , рассмотренный выше, позволяет получить все подалгебры алгебры  $A_{(3)}$  с точностью до сопряженности относительно группы  $G_1$ . Это множество  $\mathfrak{A}$  подалгебр определяется следующим образом:  $\mathfrak{A} = \{\varphi(\tilde{L}) \mid \tilde{L} \in \tilde{\mathfrak{A}}\}$ . Две подалгебры  $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}$  могут быть сопряжены с помощью некоторого  $O(3, 3)$ -автоморфизма, не входящего в  $G_1$ . Следовательно, на втором этапе выделяется задача классификации подалгебр из множества  $\mathfrak{A}$  с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности. Для решения указанной задачи рассмотрим следующие вполне изотропные подпространства  $V$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle Q_1 + Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 + Q_6 \rangle, \quad S_2 = \langle Q_1 + Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 - Q_6 \rangle, \\ S_3 &= \langle Q_1 + Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 - Q_6 \rangle, \quad S_4 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 - Q_6 \rangle, \\ S_5 &= \langle Q_1 - Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 - Q_6 \rangle, \quad S_6 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 + Q_6 \rangle, \\ S_7 &= \langle Q_1 + Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 + Q_6 \rangle, \quad S_8 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 + Q_6 \rangle. \end{aligned}$$

Обозначим через  $C_i$  следующие матрицы:  $C_1 = \text{diag}[1, 1, 1, 1, 1, -1]$ ,  $C_2 = \text{diag}[1, 1, 1, 1, -1, 1]$ ,  $C_3 = \text{diag}[1, 1, 1, -1, 1, 1]$ . Пусть  $\varphi_i$  —  $O(3, 3)$ -автоморфизм алгебры  $AO(3, 3)$ , определяемый матрицей  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Группу  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ , порожденную автоморфизмами  $\varphi_i$ , обозначим через  $G_2$ . Порядок группы  $G_2$  равен 8.

**Теорема 3.1.** *Если подалгебры  $L_1, L_2 \subset A_{(3)}$  сопряжены относительно группы  $O(3, 3)$ -автоморфизмов, то они сопряжены и относительно группы  $\{G_1, G_2\}$ .*

**Доказательство.** Отметим, что с точностью до  $IGL(3, R)$ -сопряженности существуют только следующие вполне изотропные подпространства ранга 3:  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Пусть  $f$  —  $O(3, 3)$ -автоморфизм, отображающий алгебру  $L_1 \subset A_{(3)}$  на алгебру  $L_2 \subset A_{(3)}$ . Если  $S_1$  — единственное вполне изотропное подпространство

ранга 3, инвариантное относительно  $L_1$ , то этим же свойством обладает и подалгебра  $L_2$ , а потому  $f(S_1) = S_1$ . Следовательно,  $f \in G_1$ . Предположим далее, что существует  $L_1$ -инвариантное вполне изотропное подпространство  $W_1$  ранга 3, отличное от  $S_1$ . Не нарушая общности можно считать, что  $f(W_1) = S_1$ ,  $f(S_1) = W_2$ , где  $W_2$  —  $L_2$ -инвариантное вполне изотропное подпространство. Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  —  $IGL(3, R)$ -автоморфизм алгебры  $A_{(3)}$ , отображающие  $W_1$  и  $W_2$  соответственно на  $S_i$  и  $S_j$  ( $i, j \in \{2, 3, 4\}$ ). Обозначим через  $L'_1$  и  $L'_2$  подалгебры  $A_{(3)}$ , удовлетворяющие условиям  $\theta_1(L_1) = L'_1$ ,  $\theta'_2(L_2) = L'_2$ . Автоморфизм  $f' = \theta_2 f \theta_1^{-1}$ , отображает  $L'_1$  на  $L'_2$ , а пару подпространств  $(S_1; S_i)$  на пару подпространств  $(S_j; S_1)$ . Так как  $f'(S_1 \cap S_i) = S_1 \cap S_j$ , то отсюда вытекает, что  $S_i = S_j$ . Следовательно,  $f' = \psi\theta$ , где  $\psi \in G_2$ ,  $\theta \in G_1$ . Но тогда  $\theta_2 f \theta_1^{-1} = \psi\theta$ , откуда  $f = \theta_2^{-1} \psi \theta \theta_1$ , а значит,  $f \in \{G_1, G_2\}$ . Теорема доказана.

В работе [3] все подалгебры алгебры  $AIGL(3, R)$  были разбиты на четыре класса  $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ . В соответствии с этим все подалгебры алгебры  $AO(3, 3)$  разбиваются на четыре класса  $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$ , где  $\mathfrak{N}_i = \{\varphi(\tilde{L}) \mid \tilde{L} \in \tilde{\mathfrak{M}}_i, \}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

Рассмотрим, например, задачу классификации подалгебр класса  $\mathfrak{N}_3$ , с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности. Класс  $\mathfrak{N}_3$ , определяется как множество всех алгебр  $\tilde{L} \subset AIGL(3, R)$ , являющихся расширениями подалгебр  $\tilde{F}$  класса  $\mathfrak{M}_3$ , алгебры  $AGL(3, R)$ . По определению подалгебра  $\tilde{F}$  класса оставляет инвариантным ряд

$$K_0: 0 \subset \langle \tilde{T} \rangle \subset \langle \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \rangle \subset \langle \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3 \rangle.$$

В классе  $\mathfrak{M}_3$ , существует максимальная подалгебра  $\tilde{M}_3$ , содержащая любую подалгебру из  $\mathfrak{M}_3$ . Она обладает базисом  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_3, \tilde{D}, \tilde{S}, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ . Следовательно, элементы  $A_1 = \varphi(\tilde{A}_1), A_3 = \varphi(\tilde{A}_3), D = \varphi(\tilde{D}), S = \varphi(\tilde{S}), P_1 = \varphi(\tilde{P}_1), P_2 = \varphi(\tilde{P}_2)$ , образуют базис алгебры  $M_3 = \varphi(\tilde{M}_3)$ . В силу теоремы 3.1 классификацию подалгебр класса  $\mathfrak{N}_3$  достаточно провести с точностью до сопряженности относительно группы  $\{G_1, G_2\}$ , где  $G_1 = \varphi\tilde{G}_1\varphi^{-1}, G_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ . Группа  $G_1$  в силу работы [4] порождается группами  $G$  и  $S_3$ , где  $G = \varphi\tilde{G}\varphi^{-1}, S_3 = \varphi\tilde{S}_3\varphi^{-1}, G$  — группа автоморфизмов ряда  $K_0$ , а  $\tilde{S}_3$  — симметрическая группа степени 3. Каждый элемент  $\tilde{\theta} \in \tilde{S}_3$  мы рассматриваем как эндоморфизм пространства  $\tilde{V} = \langle \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3 \rangle$ , действующий по формуле  $\tilde{\theta}(\tilde{T}_1) = T_{i_1}, \tilde{\theta}(\tilde{T}_2) = T_{i_2}, \tilde{\theta}(\tilde{T}_3) = T_{i_3}$ , где  $i_1, i_2, i_3$  некоторая перестановка символов 1, 2, 3. Группа  $\tilde{S}_3$  порождается подстановками

$$\tilde{\theta}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 & \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_3 & \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\theta}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 & \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_1 & \tilde{T}_3 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $\{G_1, G_2\} = \{G_2, S_3, G\}$ , где  $S_3 = \{\theta_1, \theta_2\}, \theta_1 = \varphi\tilde{\theta}_1\varphi^{-1}, \theta_2 = \varphi\tilde{\theta}_2\varphi^{-1}$ .

Введем в рассмотрение следующие автоморфизмы:  $\hat{\varphi}_1 = \theta_1\varphi_1, \hat{\varphi}_2 = \theta_1\theta_2\varphi_2, \hat{\varphi}_3 = \varphi_3, \hat{\varphi}_4 = \varphi_{C_1}\theta_2\theta_1\varphi_1\varphi_2, \hat{\varphi}_5 = \varphi_{C_2}\theta_1\varphi_1\varphi_3, \hat{\varphi}_6 = \varphi_{C_1}\theta_1\theta_2\varphi_2\varphi_3, \hat{\varphi}_7 = \theta_2\theta_1\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ , где  $\varphi_{C_1} = \varphi\tilde{\varphi}_{C_1}\varphi^{-1}, \varphi_{C_2} = \varphi\tilde{\varphi}_{C_2}\varphi^{-1}, C_1 = \text{diag}[-1, 1, -1], C_2 = \text{diag}[1, -1, -1]$ , Действия этих автоморфизмов на генераторы  $A_1, A_3, D, S, P_1, P_2, T_1, T_3$  выписаны в таблице 3 и 4.

Таблица 3

	$A_1$	$A_3$	$D$
$\hat{\varphi}_1$	$-\frac{1}{2}(A_1 - 3D - 2S)$	$P_2$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D + 2S)$
$\hat{\varphi}_2$	$-D + 2S$	*	$D$
$\hat{\varphi}_3$	$D - 2S$	$T_3$	$D$
$\hat{\varphi}_4$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D - 2S)$	*	$-\frac{1}{2}(A_1 - D + 2S)$
$\hat{\varphi}_5$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D - 2S)$	$T_1$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D + 2S)$
$\hat{\varphi}_6$	$A_1$	$A_3$	$D$
$\hat{\varphi}_7$	$-\frac{1}{2}(A_1 + 3D - 2S)$	$-P_2$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D + 2S)$
$\theta_2$	$-\frac{1}{2}(A_1 - 3D + 2S)$	$P_1$	$-\frac{1}{2}(A_1 + D - 2S)$
$\theta_1\theta_2$	$-A_1$	*	$D$

Таблица 4

	$S$	$P_1$	$P_2$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$\hat{\varphi}_1$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D)$	*	*	$-P_1$	$A_3$	$T_1$
$\hat{\varphi}_2$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D)$	$P_2$	$T_2$	$P_1$	$T_1$	$-A_3$
$\hat{\varphi}_3$	$-\frac{1}{2}(A_1 - D)$	$-T_2$	$P_2$	$T_1$	$-P_1$	$A_3$
$\hat{\varphi}_4$	$-S + D$	*	$A_3$	*	$P_1$	$P_2$
$\hat{\varphi}_5$	$-S + D$	$A_3$	*	$P_1$	*	$P_2$
$\hat{\varphi}_6$	$-S + D$	$T_1$	$T_2$	*	*	*
$\hat{\varphi}_7$	$-S$	$-P_1$	$-A_3$	*	*	*
$\theta_2$	$S$	$A_3$	*	$T_1$	$T_3$	$T_2$
$\theta_1\theta_2$	$S$	$P_2$	$P_1$	$T_2$	$T_1$	$T_3$

В табл. 3 и 4 символом \* мы обозначаем элементы алгебры  $AO(3, 3)$ , не содержащиеся в  $M_3$ , и потому не представляющие для нас интереса.

Пусть  $\tilde{L} \subset AGL(3, R)$  — произвольная подалгебра,  $\tilde{L}_0$  — ее вполне приводимая часть. Тогда  $\varphi(\tilde{L}) \subset M_3$  и  $\varphi(\tilde{L}_0)$  будем называть вполне приводимой частью алгебры  $\varphi(\tilde{L})$ . Нетрудно убедиться, что группа  $G$  действует тождественно на вполне приводимой части  $\varphi(\tilde{L}_0)$ , а каждый элемент группы  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_7, \theta_1, \theta_2\}$  отображает вполне приводимую часть  $\varphi(\tilde{L}_0)$  алгебры  $\varphi(\tilde{L})$  на вполне приводимую часть  $\varphi(\tilde{L}'_0)$  алгебры  $\tilde{L}'$ . Поэтому разобьем подалгебры из  $\mathfrak{N}_3$  на классы в зависимости от структуры вполне приводимой части.

1. Класс  $\mathfrak{N}_3^1$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

- 1)  $\phi_1(\alpha) = \langle A_1 + \alpha S, D \rangle$  ( $\alpha \neq 0; 2$ );
- 2)  $\phi_2(\beta) = \langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S \rangle$  ( $\beta \neq 0; -1; -2$ );
- 3)  $\phi_3(\gamma) = \langle A_1 + \gamma S, D + (\gamma - 2)S \rangle$  ( $\gamma \neq 0; 1; 2$ ).

Каждый из автоморфизмов  $\hat{\varphi}_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ),  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  осуществляет подстановку на множестве подалгебр  $\{\phi_1(\alpha), \phi_2(\beta), \phi_3(\gamma)\}$ . Действие каждого из указанных автоморфизмов приведены в табл. 5.



Таблица 5

	$\phi_1(\alpha)$	$\phi_2(\beta)$	$\phi_3(\gamma)$
$\hat{\varphi}_1$	$\phi_2\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$	$\phi_1\left(-\frac{2}{\beta+1}\right)$	$\phi_3\left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_2$	$\phi_1\left(-\frac{4}{\alpha}\right)$	$\phi_2(-\beta)$	$\phi_3\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_3$	$\phi_1\left(\frac{4}{\alpha}\right)$	$\phi_2\left(-\frac{\beta}{\beta+1}\right)$	$\phi_3(\gamma)$
$\hat{\varphi}_4$	$\phi_3\left(\frac{2+\alpha}{\alpha}\right)$	$\phi_2\left(-\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)$	$\phi_1(2\gamma-2)$
$\hat{\varphi}_5$	$\phi_3\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)$	$\phi_1(-2\beta-2)$	$\phi_2\left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_6$	$\phi_1(-\alpha)$	$\phi_3\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)$	$\phi_2\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_7$	$\phi_3\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$	$\phi_2(-\beta-2)$	$\phi_1(2\gamma-2)$
$\theta_1\theta_2$	$\phi_1(-\alpha)$	$\phi_3(-\beta)$	$\phi_2(-\gamma)$
$\theta_2$	$\phi_2\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)$	$\phi_1(2\beta+2)$	$\phi_3(2-\gamma)$

II. Класс  $\mathfrak{N}_3^2$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

- 1)  $F_1(t) = \langle A_1 + tD, S \rangle$  ( $t \neq \pm 1$ );
- 2)  $F_2(\alpha) = \langle A_1 + \alpha S, D - S \rangle$  ( $\alpha \neq 0; -1$ );
- 3)  $F_3(\beta) = \langle A_1 + \beta S, D + \beta S \rangle$  ( $\beta \neq 0; -1$ );
- 4)  $F_4(\gamma) = \langle A_1 + \gamma S, D - \gamma S \rangle$  ( $\gamma \neq 0; 1$ ).

Каждый из автоморфизмов  $\hat{\varphi}_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) осуществляет подстановку на множестве всех подалгебр  $\{F_1(t), F_2(\alpha), F_3(\beta), F_4(\gamma)\}$ . Действие каждого из указанных автоморфизмов приведены в табл. 6.

Таблица 6

	$F_1(t)$	$F_2(\alpha)$	$F_3(\beta)$	$F_4(\gamma)$
$\hat{\varphi}_1$	$F_3\left(\frac{t-1}{2}\right)$	$F_1\left(\frac{3-\alpha}{\alpha+1}\right)$	$F_2\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$	$F_4\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_2$	$F_3\left(\frac{2}{t-1}\right)$	$F_4\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)$	$F_2\left(-\frac{2+\beta}{\beta}\right)$	$F_1\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_3$	$F_3\left(-\frac{2}{t+1}\right)$	$F_4\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)$	$F_1\left(\frac{2+\beta}{-\beta}\right)$	$F_2\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_4$	$F_2\left(\frac{t-3}{t+1}\right)$	$F_4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$	$F_1(-1-2\beta)$	$F_3\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_5$	$F_2\left(\frac{t+3}{t-1}\right)$	$F_4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)$	$F_3\left(-\frac{\beta+1}{\beta}\right)$	$F_1(2\gamma-1)$
$\hat{\varphi}_6$	$F_2(t)$	$F_1(\alpha)$	$F_3\left(-\frac{\beta}{\beta+1}\right)$	$F_4\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_7$	$F_1\left(\frac{3-t}{t+1}\right)$	$F_3\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$	$F_2(2\beta+1)$	$F_4(1-\gamma)$
$\theta_1\theta_2$	$F_1(-t)$	$F_2(-\alpha)$	$F_4(-\beta)$	$F_3(-\gamma)$
$\theta_2$	$F_1\left(-\frac{t+3}{t-1}\right)$	$F_4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$	$F_3(-\beta-1)$	$F_2(2\gamma-1)$

III. Класс  $\mathfrak{N}_3^3$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

- 1)  $L_1(x) = \langle A_1 + xD - (x+1)S \rangle$  ( $x \neq \pm 1$ );
- 2)  $L_2(y) = \langle A_1 + yD + (1-y)S \rangle$  ( $y \neq \pm 1$ );
- 3)  $L_3(t) = \langle A_1 + tD \rangle$  ( $t \neq \pm 1$ );

- 4)  $L_4(\alpha) = \langle A_1 + D + \alpha S \rangle$  ( $\alpha \neq 0; -2$ );  
 5)  $L_5(\gamma) = \langle A_1 - D + \gamma S \rangle$  ( $\gamma \neq 0; 2$ );  
 6)  $L_6(\beta) = \langle D + \beta S \rangle$  ( $\beta \neq 0; 1$ );

Действия каждого из автоморфизмов  $\hat{\varphi}_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ),  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  приведены в табл. 7.

Таблица 7

	$L_1(x)$	$L_2(y)$	$L_3(t)$	$L_4(\alpha)$	$L_5(\gamma)$	$L_6(\beta)$
$\hat{\varphi}_1$	$L_6\left(\frac{x-1}{2}\right)$	$L_4(y-1)$	$L_2\left(\frac{3-t}{1+t}\right)$	$L_3\left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)$	$L_1\left(\frac{4-\gamma}{\gamma}\right)$	$L_5\left(\frac{2}{\beta+1}\right)$
$\hat{\varphi}_2$	$L_2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$	$L_4\left(\frac{4}{y-1}\right)$	$L_6\left(\frac{2}{t-1}\right)$	$L_5\left(-\frac{4}{\alpha}\right)$	$L_1\left(\frac{4-\gamma}{\gamma}\right)$	$L_3\left(\frac{2+\beta}{-\beta}\right)$
$\hat{\varphi}_3$	$L_4\left(-\frac{4}{x+1}\right)$	$L_2\left(\frac{y+3}{y-1}\right)$	$L_6\left(-\frac{2}{t+1}\right)$	$L_1\left(-\frac{\alpha+4}{\alpha}\right)$	$L_5\left(\frac{4}{\gamma}\right)$	$L_3\left(\frac{2+\beta}{-\beta}\right)$
$\hat{\varphi}_4$	$L_4\left(-\frac{4}{x+1}\right)$	$L_3\left(\frac{y-3}{y+1}\right)$	$L_5\left(\frac{2t-2}{t+1}\right)$	$L_1(-\alpha-1)$	$L_6\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right)$	$L_2(-1-2\beta)$
$\hat{\varphi}_5$	$L_3\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$	$L_4\left(\frac{4}{y-1}\right)$	$L_5\left(\frac{2+2t}{t-1}\right)$	$L_6\left(-\frac{2+\alpha}{\alpha}\right)$	$L_1(\gamma-1)$	$L_2(-1-2\beta)$
$\hat{\varphi}_6$	$L_5(x+1)$	$L_4(y-1)$	$L_3(t)$	$L_2(\alpha+1)$	$L_1(\gamma-1)$	$L_6\left(-\frac{\beta}{\beta+1}\right)$
$\hat{\varphi}_7$	$L_1\left(\frac{3-x}{1+x}\right)$	$L_3\left(\frac{3-y}{1+y}\right)$	$L_2\left(\frac{3-t}{1+t}\right)$	$L_4(\alpha)$	$L_6\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)$	$L_5(2+2\beta)$
$\theta_1\theta_2$	$L_2(-x)$	$L_1(-y)$	$L_3(-t)$	$L_5(-\alpha)$	$L_4(-\gamma)$	$L_6(\beta)$
$\theta_2$	$L_3\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$	$L_2\left(\frac{y+3}{y-1}\right)$	$L_1\left(\frac{t+3}{t-1}\right)$	$L_6\left(-\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)$	$L_5(\gamma)$	$L_4(-2\beta-2)$

IV Класс  $\mathfrak{N}_3^4$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

- 1)  $\phi_1 = \langle D \rangle$ ; 2)  $\phi_2 = \langle D - S \rangle$ ; 3)  $\phi_3 = \langle S \rangle$ ; 4)  $\phi_4 = \langle A_1 + D \rangle$ ;  
 5)  $\phi_5 = \langle A_1 + D - 2S \rangle$ ; 6)  $\phi_6 = \langle A_1 - D \rangle$ ; 7)  $\phi_7 = \langle A_1 - D + 2S \rangle$ .

Действия автоморфизмов  $\hat{\varphi}_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) на множестве подалгебр  $\{\phi_1, \dots, \phi_7\}$  приведены в табл. 8.

Таблица 8

	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_6$	$\phi_7$
$\hat{\varphi}_1$	$\phi_7$	$\phi_3$	$\phi_6$	$\phi_4$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_5$
$\hat{\varphi}_2$	$\phi_1$	$\phi_4$	$\phi_6$	$\phi_3$	$\phi_7$	$\phi_2$	$\phi_5$
$\hat{\varphi}_3$	$\phi_1$	$\phi_4$	$\phi_6$	$\phi_2$	$\phi_5$	$\phi_3$	$\phi_7$
$\hat{\varphi}_4$	$\phi_7$	$\phi_4$	$\phi_2$	$\phi_6$	$\phi_5$	$\phi_3$	$\phi_1$
$\hat{\varphi}_5$	$\phi_7$	$\phi_4$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_1$	$\phi_6$	$\phi_5$
$\hat{\varphi}_6$	$\phi_1$	$\phi_3$	$\phi_2$	$\phi_4$	$\phi_7$	$\phi_6$	$\phi_5$
$\hat{\varphi}_7$	$\phi_7$	$\phi_6$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_2$	$\phi_1$

V. Класс  $\mathfrak{N}_3^5$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых нулевая или совпадает с  $\langle A_1, D, S \rangle$ .

VI. Класс  $\mathfrak{N}_3^6$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых совпадает с  $\langle A_1 + \alpha D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ,  $\alpha + \beta \neq \pm 1$ ).

VII. Класс  $\mathfrak{N}_3^7$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

- 1)  $\langle D, S \rangle$ ; 2)  $\langle A_1, D \rangle$ ; 3)  $\langle A_1 \pm S, D - S \rangle$ ;  
 4)  $\langle A_1 \pm D, S \rangle$ ; 5)  $\langle A_1 \pm 2S, D \rangle$ ; 6)  $\langle A_1, D - 2S \rangle$ .

VIII. Класс  $\mathfrak{N}_3^8$  состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых совпадает с  $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \neq \pm\beta$ ,  $\pm(\beta + 2)$ ;  $\beta \neq 0, -1$ ).

Допустим, что мы проводим классификацию подалгебр класса  $\mathfrak{N}_3^1$  с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности. С этой целью из класса подалгебр  $\mathfrak{N}_3$  выбираем множество  $\mathfrak{L}$  тех подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из типов  $\phi_1(\alpha)$ ,  $\phi_2(\beta)$ ,  $\phi_3(\gamma)$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — подалгебры из множества  $\mathfrak{L}$ , которые  $O(3, 3)$ -сопряжены между собой, т.е.  $f(L_1) = L_2$  для некоторого автоморфизма  $f \in \{G, H\}$ , где  $H = \{\varphi_1, \dots, \varphi_7, \theta_1, \theta_2\}$ . Подпространство  $f^{-1}(S_1)$  вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры  $L$ . Нетрудно убедиться, что существует  $IGL(3, R)$ -автоморфизм  $\psi$ , отображающий  $f^{-1}(S_1)$  на некоторое подпространство  $S_i$  ( $i \in \{1, \dots, 7\}$ ), причем  $\psi(L_1) = L_1$ . Автоморфизм  $f\psi$  отображает  $L_1$  на  $L_2$ , а  $S_i$  на  $S_1$ . Таким образом, можно предполагать, что  $f(L_1) = L_2$  и  $f(S_i) = S_1$ . Но тогда  $f = f_1\varphi_i$  для некоторого  $IGL(3, R)$ -автоморфизма  $f_1$ . Так как автоморфизм  $f_1$  отображает  $A_{(3)}$  на  $A_{(3)}$ , то автоморфизм  $\varphi_i$  отображает  $L_1$  на подалгебру  $\varphi_i(L_1)$ , содержащуюся в  $A_{(3)}$ . Поэтому автоморфизм  $f_1$  отображает  $\varphi_i(L_1) \subset A_{(3)}$  на подалгебру  $L_2 \subset A_{(3)}$ . Но тогда в силу работы [4] автоморфизм  $f_1$  можно представить в виде  $f_1 = f_2\theta$ , где  $\theta \in S_3$ , а  $f_2$  —  $IGL(3, R)$ -автоморфизм, оставляющий инвариантным композиционный ряд

$$0 \subset \langle T_1 \rangle \subset \langle T_1, T_2 \rangle \subset \langle T_1, T_2, T_3 \rangle. \quad (3.3)$$

Отсюда вытекает следующий алгоритм исследования подалгебр множества  $\mathfrak{L}$  на сопряженность относительно группы  $\{G, H\}$ .

1) Берем произвольную подалгебру  $L \in \mathfrak{L}$  и находим те автоморфизмы  $\varphi$  множества  $\{\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_7\}$ , для каждого из которых  $\varphi(L) \subset A_{(3)}$ .

2) Для каждого из найденных автоморфизмов  $\varphi$  находим такой автоморфизм  $\theta$  группы  $S_3$ , что  $\theta\varphi(L) \subset M_3$ .

3) Находим такой  $IGL(3, R)$ -автоморфизм  $f_2$ , оставляющий инвариантным ряд (3.3), что  $L' = f_2\theta\varphi(L) \subset \mathfrak{L}$ . Если  $L' \neq L$ , то подалгебру  $L'$  вычеркиваем из множества  $\mathfrak{L}$ .

4) В множестве  $\mathfrak{L}_1$ , которое мы получили из множества  $\mathfrak{L}$  после вычеркивания в нем всех подалгебр, которые  $O(3, 3)$ -сопряжены подалгебре  $L$ , выбираем произвольную подалгебру, не совпадающую с  $L$ , и повторяем для нее вычисления, предусмотренные предыдущими пунктами. Через конечное число шагов в множестве  $\mathfrak{L}$  останутся лишь те подалгебры, которые не сопряжены между собой относительно группы  $\{G, H\}$ .

Полная классификация подалгебр изотропного ранга 3 алгебры  $AO(3, 3)$  с точностью до  $O(3, 3)$ -сопряженности изложена ниже. Если речь идет о подалгебрах  $U_1 \ni F, \dots, U_s \ni F$ , то будем употреблять обозначение  $F$ :  $U_1, \dots, U_s$ . Подпространство  $\langle T_{i_1}, \dots, T_{i_k} \rangle$  будем обозначать  $(i_1, \dots, i_k)$ . Положим

$$A'_1 = \frac{1}{2}A_1 - \frac{3}{2}D + S, A'_2 = \varphi(\tilde{A}'_2), A'_3 = P_2, P'_1 = P_1, P'_2 = -A_3, \\ D' = -\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}D - S.$$

1) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^1$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

$$\langle A_1 + \alpha S, D \rangle \quad (0 < \alpha < 2);$$

$$\langle A_1 + \alpha S, D, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle \quad (0 < \alpha < 2);$$

$$\langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle \quad (-2 < \beta < 0; \beta \neq -1);$$

$$\langle A_1 + \alpha S, D, A_3, P_1, T_1 \rangle \quad (\alpha > 0, \alpha \neq 2);$$

- $\langle A_1 + \alpha S, D, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $0 < |\alpha| < 2$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D + (\gamma - 2)S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\gamma > 1$ ,  $\gamma \neq 2$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D, A_3 \rangle$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 2$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D, A_3 \rangle$  ( $0 < \alpha < 2$ ): (3), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha S, D, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq 0, \pm 2$ ): (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S, A_3 \rangle$  ( $-2 < \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ ): 0, (3);  
 $\langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S, A_3, T_1 \rangle$  ( $\beta > -1$ ,  $\beta \neq 0$ );  
 $\langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S, A_3 \rangle$  ( $\beta \neq 0, 1, -2$ ): (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \gamma S, D + (\gamma - 2)S, A_3, T_3 \rangle$  ( $0 < \gamma < 2$ ,  $\gamma \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D + (\gamma - 2)S, A_3, T_1, T_2 \rangle$  ( $\gamma > 1$ ,  $\gamma \neq 2$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D + (\gamma - 2)S, A_3 \rangle$  ( $\gamma \neq 0, 1, 2$ ): (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha S, D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 2$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $0 < |\alpha| < 2$ );  
 $\langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1, -2$ );  
 $\langle A_1 + \beta S, D - (\beta + 2)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $-2 < \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D + (\gamma - 2)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\gamma \neq 0, 1, 2$ );

2) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^2$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

- $\langle A_1 + \alpha D, S \rangle$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ): 0, (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, A_3, P_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3$ ,  $\alpha \neq 1$ ): (1), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, A_3 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D, S, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 3D, S, A_3 + P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 3D, S, A_3 + P_2, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \gamma S, D - \gamma S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\gamma \neq 0$ ,  $\gamma < 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D - S, A_3, T_1, \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D - S, A_3, T_1, T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ );  
 $\langle A_1 + \beta S, D + \beta S, A_3, T_1, \rangle$  ( $0 < |\beta| \leq 1$ ,  $\beta \neq -1$ );  
 $\langle A_1 + \beta S, D + \beta S, A_3, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D - \gamma S, A_3, T_1, T_2 \rangle$  ( $0 < |\gamma| < 1$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D - \gamma S, A_3, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\gamma \neq 0, 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D - S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ );  
 $\langle A_1 + \beta S, D + \beta S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ );  
 $\langle A_1 + \gamma S, D - \gamma S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 2$ ,  $\gamma \neq 1$ );  
 $\langle A_1 - S, D + S, A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ .

3) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^3$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

- $\langle D + \beta S \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ ): 0, (3);  
 $\langle D + \beta S \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ ): (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S, P_1 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ ): (1), (2);  
 $\langle D + \beta S \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ ): (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S, A_3 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ ): (0), (3);  
 $\langle D + \beta S, A_3 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ ): (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ );  
 $\langle D + \beta S, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ );  
 $\langle D + \beta S, A_3, P_1, T_1 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0$ ,  $\beta \neq -1$ );

- $\langle D + \beta S, A_3, P_1 \rangle$  ( $\beta = 0, -1$ ): (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0, \beta \neq -1$ );  
 $\langle D + \beta S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ );  
 $\langle D + \beta S + A_3 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0, \beta \neq -1$ ): 0, (3);  
 $\langle D + \beta S + A_3 \rangle$  ( $\beta = 0, -1$ ): (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S + A_3, P_1, T_1 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0, \beta \neq -1$ );  
 $\langle D + \beta S + A_3, P_1 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ ): (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + \beta S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $-2 \leq \beta < 0, \beta \neq -1$ );  
 $\langle D + \beta S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\beta \neq 0, -1$ );  
 $\langle D + S, P_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2);  
 $\langle D + S, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle D + S, A_3, P_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D + S, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle D + S + A_3, P_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D + S + A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + \gamma S, P_2 \rangle$  ( $|\gamma| \leq 2, \gamma \neq 0, -2$ ): (1), (1,2), (2,3);  
 $\langle A_1 + D + \gamma S, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\gamma \neq 0, -2$ );  
 $\langle A_1 + D + \gamma S, P_1, P_2 \rangle$  ( $|\gamma| \leq 2, \gamma \neq 0, -2$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + \gamma S, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\gamma \neq 0, -2$ );  
 $\langle A_1 + D + \gamma S, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\gamma \neq 0, -2$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + D + \gamma S, P_1, P_2 \rangle$  ( $|\gamma| \leq 2, \gamma \neq 0, -2$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + \gamma S + P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $|\gamma| \neq 0, -2$ );  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_2 + T_1 \rangle$ : (0), (2), (2,3);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_2 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_1 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 + D - 4S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, P_2 + T_3, A_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + 2S, P_1, A_3, P_2 + T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + D + 2S + P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + D + 2S + P_1, P_2 + T_1 \rangle$ : 0, (2);  
 $\langle A_1 - D + \lambda S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $|\lambda| \leq 2, \lambda \neq 0, 2$ );  
 $\langle A_1 - D + \lambda S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $|\lambda| \leq 2, \lambda \neq 0, 2$ );  
 $\langle A_1 - D + \lambda S + P_2, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $|\lambda| \leq 2, \lambda \neq 0, 2$ );  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_2, P_1 + T_3 \rangle$ : 0, (1);  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + \gamma T_2, P_1 + T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + \gamma T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_2 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S + P_2, A_3 + \gamma T_2 + T_3, P_1 - T_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - D - 2S + P_2, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3, \alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, P_1 + T_2, A_3 + T_3 \rangle$ ;

- $\langle A_1 + 3D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + T_3 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + 3D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + \gamma T_3, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );  
 $\langle A_1 + 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + \alpha D + (1 - \alpha)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + S, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$ : (1), (1,2).

4) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^4$  алгебры  $AO(3,3)$ :

- $\langle S \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S, A_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (3), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle S, A_3 + P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S, A_3 + P_2, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S + A_3 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle S + A_3, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle S + A_3, A_3 + P_2, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S + A_3 + P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S + A_3 + P_2, P_1 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S + P_1, P_2 \rangle$ : (1), (2), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S + P_1, A_3 + P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle S + P_2, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle D - S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D - S + T_2, A_3 + T_2, P_1, T_1, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D - S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D - S + T_2, A_3, P_1, T_1, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D - S, A_3 + T_2, P_1, T_1, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D - S + A_3 + T_2, P_1, T_1, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D - S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + D, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle D - S + T_2, P_1, T_1, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle D \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D, P_1 \rangle$ : (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle D + T_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2);  
 $\langle D, P_1 + T_2 \rangle$ : 0, (1), (1,3);  
 $\langle D, A_3 \rangle$ : (3), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle D + T_3, A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D + T_3, A_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D, A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle D, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);  
 $\langle D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle D, P_1 + T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle D, P_1 + T_2, P_2 + T_1 \rangle$ ;  
 $\langle D, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;

- $\langle D, A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ;
- $\langle D + T_3, A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );
- $\langle D, A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );
- $\langle D + T_3, A_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle D + T_3, A_3, P_1, T_1 \rangle$ ;
- $\langle D, A_3, P_1 + T_2, T_1, T_3 \rangle$ ;
- $\langle D + T_3, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D + T_3, A_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle D + T_3, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D + A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);
- $\langle D + A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ;
- $\langle D + A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );
- $\langle D + A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle D + A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle D + A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S, P_2 \rangle$ : (1), (1,2), (2,3), (1,2,3);
- $\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);
- $\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_1 + T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_1, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S, P_1 + T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S + T_2, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S + T_2, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D - 2S + P_1 + T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ .

5) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^5$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

- (1), (1,2), (1,2,3);  $\langle A_3 \rangle$ : (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle A_3 + T_2 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,3);
- $\langle A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);
- $\langle A_3 + P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);
- $\langle A_3 + P_2 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);
- $\langle P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);  $\langle P_1 + T_2, P_2 + T_3, T_1 \rangle$ ;
- $\langle P_1 + T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  $\langle P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle P_1 + T_2, P_2 + T_1 \rangle$ ;  $\langle A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_3 + T_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  $\langle A_3 + T_2, P_1 \pm T_3 \rangle$ : 0, (1);
- $\langle A_3 + T_2, P_1 + T_2 + \gamma T_3, T_1 \rangle$  ( $\gamma \neq 0$ );

$\langle A_3 + \beta T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\beta| \leq 1$ );  
 $\langle A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ;  $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + P_2, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;  $\langle A_3 + P_2, P_1 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + P_2 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );  
 $\langle A_3 + P_2 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + T_2 + T_3, P_1 - T_2, P_2 + T_3, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + T_2 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2 + T_3, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + T_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1, D, S \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, S, A_3 \rangle$ : (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, S, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1, D, S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;  
 $\langle A_1, D, S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ .

6) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^6$  алгебры  $AO(3,3)$ :

$\langle A_1 + \alpha D + \beta S \rangle$  ( $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha + \beta \neq \pm 1 \vee \alpha = 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\beta \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha + \beta \neq \pm 1$ ): 0, (1), (3), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - (3 + \alpha)S, A_3 + T_2 \rangle$  ( $\alpha > -1$ ,  $\alpha \neq 1$ ): 0, (1);  
 $\langle A_1 + \alpha D - (3 + \alpha)S, A_3 + T_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1, -3$ ): (3), (1,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3 \rangle$  ( $\alpha > 1$ ,  $\alpha \neq 3$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1, 3$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha + \beta \pm 1 \vee \alpha = 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\beta \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3, P_1 \rangle$  ( $\alpha = 3$ ,  $\beta > -2$ ,  $\beta \neq 0 \vee -1 < \alpha < 3$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha + \beta \neq \pm 1$ ): (1), (1,2,3);  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + T_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + \gamma T_3, T_1 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $1 < |\gamma| \leq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3, T_1, T_3 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D + (\alpha - 1)S, P_1 + T_3, A_3, T_1, T_2 \rangle$  ( $-1 < \alpha \leq 3$ ,  $\alpha \neq 0, 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1, A_3 + T_3, T_1, T_2 \rangle$  ( $-1 < \alpha < 3$ ,  $\alpha \neq 1$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha + \beta \neq \pm 1$ ): 0, (1), (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_1 - 5D + 2S, A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - 2D - S, A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_3, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + \alpha D - (3 + \alpha)S, A_3 + T_2, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1, -3$ ): 0, (1);  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2 + T_3, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1, 3$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1, 3$ );  
 $\langle A_1 + \alpha D + (\alpha + 1)S, A_3, P_1, P_2 + T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm 1, 0$ ): (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + \gamma T_3, P_1 + T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < |\gamma| \leq 1$ );  
 $\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + P_2 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ .



7) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^7$  алгебры  $AO(3,3)$ :

- $\langle D, S \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D, S, P_1 \rangle$ : (1), (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D, S, A_3 \rangle$ : 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D, S, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);
- $\langle D, S, A_3, P_1 \rangle$ : (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D, S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);
- $\langle D + \alpha A_3, S + A_3 \rangle$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ): 0, (3);
- $\langle D + A_3, S \rangle$ : (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D + \alpha A_3, S + A_3 \rangle$ : (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, T_1 \rangle$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ );
- $\langle D + A_3, S, P_1 \rangle$ : (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1 \rangle$ : (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ );
- $\langle D + \alpha A_3, S, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D, S, P_2 \rangle$ : (1), (1,2), (2,3), (1,2,3);
- $\langle A_1 + D, S, P_1, P_2 \rangle$ : (1), (2), (1,2), (1,2,3);
- $\langle A_1 + D, S, A_3, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2), (1,2,3);
- $\langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2 \rangle$  ( $|\alpha| \leq 2$ ): (1), (1,2);
- $\langle A_1 + D + P_1, S, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - D, S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - D, S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - D + \alpha P_2, S + P_2, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $|\alpha| \leq 2$ );
- $\langle A_1 + S, D - S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + S, D - S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 + 2S, D \rangle$ : 0, (1), (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle A_1 \pm 2S, D, A_3 \rangle$ : (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
- $\langle A_1, D - 2S, A_3 \rangle$ : (3), (1,3), (1,2,3);
- $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2);
- $\langle A_1 + 2S, D, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);
- $\langle A_1, D - 2S, P_1, P_2 \rangle$ : (1,2), (1,2,3);
- $\langle A_1 + 2S, D, P_1, P_2 + T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle A_1 \pm 2S, D, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 + T_2 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 + \beta T_2, T_1 \rangle$  ( $0 < \beta \leq 1$ );
- $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2 \rangle$ ;
- $\langle A_1 \pm 2S, D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1, D - 2S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1 \rangle$ ;
- $\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ .

8) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_3^8$  алгебры  $AO(3,3)$ :

- $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S \rangle$  ( $\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2); \beta \neq 0, -1; \alpha \geq 0, \alpha + 3\beta + 2 \geq 0$ ): 0, (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3);
- $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2); \beta \neq 0, -1$ ): (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);

- $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2)$ ;  $\beta \neq 0, -1$ ;  $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2)$ ;  $\beta \neq 0, -1$ ;  $\alpha + 3\beta + 2 \geq 0$ );  
 $\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2)$ ;  $\beta \neq 0, -1$ ): (1,2), (1,2,3).

9) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_1$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

- $\langle A_1 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0$ ): 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, S \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3 \rangle$ : 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, D \rangle$ : 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3, A, S, P_1, P_2 \rangle$ : 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, D + \alpha S \rangle$ : 0, (1,2), (1,2,3);  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1 + T_2, P_2 - T_1 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A_2 + A_3, D, P_1 + T_2, P_2 - T_1 \rangle$ ;  $\langle A_2, A_2, A_3, P_1, P_2, D + T_3, T_1, T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \delta T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$  ( $\delta \geq 0$ );  
 $\langle A_2 + A_3, D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2 \rangle$ .

10) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_2$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

- $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + \beta S, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha > 0 \vee \alpha = 0, \beta \geq 0$ ): 0, (1), (1,2,3);  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D', S, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha S, D' + \beta S, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ): 0, (1), (1,2,3);  
 $\langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3, S \rangle$ : 0, (1), (1,2,3);  
 $AISL(2, R) = \langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3 \rangle$ : 0, (1), (1,2,3);  
 $\langle A'_2 + A'_3, D', S, P'_1, P'_2 \rangle$ : 0, (1), (1,2,3);  
 $\langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3, D' + \alpha S \rangle$  ( $\alpha \in R$ ): 0, (1), (1,2,3);  
 $\langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3, D', S \rangle$ : 0, (1), (1,2,3);  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + T'_1, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3 + T_1, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A'_2 + A'_3 + T_1, D' + \alpha T_1, P'_1, P'_2 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\alpha > 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1 \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2 \rangle$ ;  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2 \rangle$ ;  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1 \rangle$  ( $\beta \geq 0$ );  
 $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, T_1 \rangle$ ;  
 $\langle A'_1, A'_2, A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2 \rangle$ ;  
 $\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, D' + 2S, T_1 \rangle$ .

11) Подалгебры класса  $\mathfrak{N}_0$  алгебры  $AO(3, 3)$ :

- $AO(3)$ : 0, (1,2,3);  
 $AO(2, 1)$ : 0, (1,2,3);  
 $AO(3) \oplus \langle S \rangle$ : 0, (1,2,3);  
 $AO(2, 1) \oplus \langle S \rangle$ : 0, (1,2,3);  
 $ASL(3, R)$ : 0, (1,2,3);

$AGL(3, R): 0, (1,2,3);$   
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S \rangle (\alpha \geq 0): 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S \rangle (\alpha \geq 0): 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S \rangle (\alpha \geq 0): 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $\langle A_2 + A_3, D, S \rangle: 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $ASL(2, R): 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $ASL(2, R) \oplus \langle S \rangle: 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $ASL(2, R) \oplus \langle D + \alpha S \rangle: 0, (3), (1,2), (1,2,2);$   
 $AGL(2, R) \oplus \langle S \rangle: 0, (3), (1,2), (1,2,3);$   
 $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3 \rangle: 0, (1,2);$   
 $\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \alpha T_3 \rangle (\alpha \geq 0): 0, (1,2);$   
 $\langle A_2 + A_3, D + T_3 \rangle: 0, (1,2);$   
 $ASL(2, R) \oplus \langle D + T_3 \rangle: 0, (1,2).$

1. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Баранник Л.Ф., Фушич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского  $R_{1,n}$ , Препринт 88.34, Киев, Ин-т математики, 1988, 48 с.
3. Баранник А.Ф., Фушич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт 86.67, Киев, Ин-т математики, 1986, 48 с.
4. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д., Подалгебры аффинной алгебры  $AIGL(3, R)$ , Препринт 89.65, Киев, Ин-т математики, 1989, 32 с.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
6. Patera J., Sharp R., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
7. Тауфик М.С., О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли, в Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, Яросл. гос. ун-т, 1960, 86–115.

# Continuous subgroups of the generalized Schrödinger groups

L.F. BARANNIK, W.I. FUSHCHYCH

Some general results on the subalgebras of the Lie algebra  $ASch(n)$  of the generalized Schrödinger group  $Sch(n)$  and on the subalgebras of the Lie algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  of the generalized extended Schrödinger group  $\widetilde{Sch}(n)$  have been obtained. The subalgebra structure of the algebras  $ASch(n)$  and  $\widetilde{ASch}(n)$  are studied with respect to inner automorphisms of the groups  $Sch(n)$  and  $\widetilde{Sch}(u)$ , respectively. The maximal Abelian subalgebras and the one-dimensional subalgebras of the algebras  $ASch(n)$  and  $\widetilde{ASch}(n)$  have been explicitly found. The full classification of the subalgebras of the algebras  $ASch(3)$  and  $\widetilde{ASch}(n)$ , which are nonconjugate to the subalgebras of  $ASch(2)$ ,  $\widetilde{ASch}(2)$ , respectively, has been carried out.

## 1. Introduction

To construct exact solutions of both linear and nonlinear Schrödinger and heat equations it is important to know the subgroup structure of the extended Schrödinger group  $\widetilde{Sch}(3)$  (see [1]). Other important applications of subgroup structure of this group were discussed in [2, 3]. It is natural to generalize the notions of the three-dimensional Schrödinger group for the case of arbitrary  $n$ -dimensional Euclidean space and to solve the problem of subgroup classification for these generalized groups. If we restrict ourselves by continuous subgroups, then the problem will be reduced to classification of subalgebras of correspondent Lie algebras. This classification was realized for  $n = 1$  in [4] and for  $n = 2$  in [2].

In the present paper we study subalgebra structure of both the Lie algebra  $ASch(n)$  of the Schrödinger group  $Sch(n)$  and the Lie algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  of the extended Schrödinger group  $\widetilde{Sch}(n)$  with respect to inner automorphisms of the group  $Sch(n)$  and the group  $\widetilde{Sch}(n)$ , respectively. This paper is a continuation of investigations that were carried out in [5–9]. The applied general method of Patera, Winternitz, and Zassenhaus [10] gets further development for classes of groups under consideration.

In Sec. 2 we give definitions of the generalized Schrödinger groups and algebras and introduce some other concepts and basis notation used in the whole paper. In Sec. 3, completely reducible subalgebras of the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  are derived, and all subalgebras of this algebra are described for  $n = 3$ . In Sec. 4 a number of general results about splitting subalgebras of the algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  are obtained. Abelian subalgebras of the extended Schrödinger algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  are described in Sec. 5. Classification of subalgebras of the algebras  $ASch(3)$  and  $\widetilde{ASch}(3)$  is carried out in Sec. 6. The conclusions are summarized in Sec. 7.

**2. Definitions of Schrödinger groups and algebras. Main notation**

Let  $R$  be the real number field,  $R$  an arithmetical  $n$ -dimensional Euclidean space, and  $AG$  the Lie algebra of the Lie group  $G$ . The Schrödinger group  $Sch(n)$  is the multiplicative group of matrices

$$\begin{pmatrix} W & \mathbf{v} & \mathbf{a} \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

where  $W \in O(n)$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in R^n$ , and  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ ). If  $\alpha = \delta = 1$ ,  $\gamma = 0$ , we obtain matrices that are elements of the Galilei group  $G(n)$ . If at the same time  $\beta = 0$ , we have elements of the isochronous Galilei group  $G^0(n)$ . Besides, the Schrödinger group  $Sch(n)$  can be realized as the transformation group

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{W\mathbf{x} + t\mathbf{v} + \mathbf{a}}{\gamma t + \delta}, \quad t \rightarrow \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

where  $t$  is time and  $\mathbf{x}$  is a variable vector of the space  $R^n$ .

The Lie algebra  $ASch(n)$  of the group  $Sch(n)$  consists of real matrices

$$\begin{pmatrix} X & \mathbf{v} & \mathbf{a} \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

where  $X \in AO(n)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ , and  $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in R^n$ . Let  $I_{ab}$  be a matrix of degree  $n + 2$  having unity at the intersection of the  $a$ th line and the  $b$ th column and zeros at the other places ( $a, b = 1, \dots, n + 2$ ). Then the basis of the algebra  $ASch(n)$  is formed by the matrices

$$J_{ab} = I_{ab} - I_{ba}, \quad G_a = I_{a,n+1}, \quad P_a = I_{a,n+2}, \\ D = -I_{n+1,n+1} + I_{n+2,n+2}, \quad S = -I_{n+2,n+1}, \quad T = I_{n+1,n+2}$$

( $a < b$ ,  $a, b = 1, \dots, n$ ). They satisfy the following commutation relations:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \\ [P_a, P_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [G_a, P_b] = 0, \\ [D, J_{ab}] = [S, J_{ab}] = [T, J_{ab}] = 0, \quad [D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a, \\ [S, P_a] = G_a, \quad [S, G_a] = 0, \quad [T, P_a] = 0, \quad [T, G_a] = -P_a, \\ [D, S] = 2S, \quad [D, T] = -2T, \quad [T, S] = D, \quad (a, b, c, d = 1, 2, \dots, n).$$

The extended Schrödinger algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  is obtained from the algebra  $ASch(n)$  by adding the central element  $M$ , and, moreover,  $[G_a, P_b] = \delta_{ab}M$  and other commutation relations do not change. The factor algebra  $\widetilde{ASch}(n)/\langle M \rangle$  is identified with  $ASch(n)$ . We shall denote the generators of algebras  $ASch(n)$  and  $\widetilde{ASch}(n)$  by the same symbols.

The algebra  $A\widetilde{G}^0(n) = AO(n) \oplus \langle M, P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n \rangle$  is called the extended isochronous Galilei algebra, and the algebra  $AG^0(n) = A\widetilde{G}^0(n)/\langle M \rangle$  is called the isochronous Galilei algebra.

Since the Lie algebra  $L = \langle M, P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n \rangle$  is nilpotent,  $L$  is a Lie algebra of some connected and simply connected nilpotent Lie group  $H$ . As  $H$  is an

exponential group, any of its elements can be denoted as  $\exp(\theta M)\exp(\mathbf{vG} + \mathbf{aP})$ , where  $\theta \in R$ ,  $\mathbf{vG} = v_1G_1 + \dots + v_nG_n$ , and  $\mathbf{aP} = a_1P_1 + \dots + a_nP_n$  ( $a_i, v_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). The multiplication law is derived by the Campbell–Hausdorff formula. Let

$$\Delta \begin{pmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & -\delta \end{pmatrix}$$

be an element of  $O(n) \times SL(2, R)$ . It is not difficult to show that in  $Sch(n)$  we have

$$\Delta \cdot \exp(\mathbf{vG} + \mathbf{aP}) = \exp((\delta W\mathbf{v} - \gamma W\mathbf{a})\mathbf{G} + (-\beta W\mathbf{v} + \alpha W\mathbf{a})\mathbf{P}) \cdot \Delta. \quad (1)$$

An arbitrary element of the group  $\widetilde{Sch}(n)$  has the form

$$\exp(\theta M) \cdot \exp(\mathbf{vG} + \mathbf{aP}) \cdot \Delta.$$

By definition,  $\exp(\theta M) \cdot \Delta = \Delta \cdot \exp(\theta M)$ , and the equality (1) holds true for  $\Delta \cdot \exp(\mathbf{vG} + \mathbf{aP})$ . Using these equalities and multiplication laws in  $H$  and  $O(n) \times SL(2, R)$  we shall establish multiplication in  $\widetilde{Sch}(n)$  in the usual way. Evidently,  $\widetilde{Sch}(n) = H\lambda(O(n)) \times SL(2, R)$ .

Subalgebras  $L_1$  and  $L_2$  of the algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  are called  $\widetilde{Sch}(n)$  conjugated if  $gL_1g^{-1} = L_2$  for some element  $g \in \widetilde{Sch}(n)$ . Mapping:  $\varphi_g : X \rightarrow gXg^{-1}$ ,  $X \in \widetilde{ASch}(n)$ , is called an automorphism corresponding to the element  $g$ . If  $g = \text{diag}[W, 1, 1]$ , where  $W \in O(n)$ , then  $\varphi_g$  is called an  $O(n)$  automorphism corresponding to the matrix  $W$ . We shall identify the automorphism  $\varphi_g$  with the element  $g$ .

Henceforth we shall use the following notations:  $\langle X_1, \dots, X_s \rangle$  is a vector space or Lie algebra over  $R$  with the generators  $X_1, \dots, X_s$ ;  $V[k, l] = \langle G_k, \dots, G_l \rangle$  ( $k \leq l$ ) is a Euclidean space having the orthonormal basis  $G_k, \dots, G_l$ ,  $V[k] = V[k, k]$ ;  $W[k, l] = \langle P_k, \dots, P_l \rangle$  ( $k \leq l$ ),  $W[k] = W[k, k]$ ;  $\mathfrak{M}[r, t] = \langle M, P_r, \dots, P_t, G_r, \dots, G_t \rangle$  ( $r \leq t$ ),  $\mathfrak{M}[r] = \mathfrak{M}[r, r]$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[r, t] = \mathfrak{M}[r, t]/\langle M \rangle$ ;  $\pi$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ ,  $\epsilon$ , and  $\xi$  are projections of the algebras  $\widetilde{ASch}(n)$  and  $ASch(n)$  onto  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$ ,  $AO(n)$ ,  $V[1, n]$ , and  $W[1, n]$ , respectively.

Let  $U$  be a subspace of  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  and  $\hat{F}$  be a subalgebra of  $ASch(n)$  such that  $\pi(\hat{F}) = F$ . The notation  $\hat{F} + U$  means that  $[F, U] \subset U$  and  $\hat{F} \cap \overline{\mathfrak{M}}[1, n] \subset U$ . Considering algebras  $(\hat{F} + U_1), \dots, (\hat{F} + U_s)$  we shall use the notation  $\hat{F} : U_1, \dots, U_s$ . In the case of the algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  this notation has the same meaning.

Let  $L$  be the direct sum of Lie algebras  $L_1, \dots, L_s$ ,  $K$  a Lie subalgebra of  $L$ , and  $\pi_i$  the projection of  $L$  onto  $L_i$ . If  $\pi_i(K) = L_i$ , for all  $i = 1, \dots, s$ , then  $K$  is called the subdirect sum of algebras  $L_1, \dots, L_s$ . In this case we shall use the notation  $K = L_1 \dagger \dots \dagger L_s$ . The subdirect sum of modules over a Lie algebra is defined in a similar way.

### 3. On the subalgebras of the algebra $AO(n) \oplus ASL(2, R)$

In this section a number of auxiliary results to be used in following sections are obtained.

**Lemma 3.1.** *Subalgebras of the algebra  $ASL(2, R)$  are exhausted with respect to  $SL(2, R)$  conjugation by the following algebras:  $O$ ,  $\langle D \rangle$ ,  $\langle T \rangle$ ,  $\langle S + T \rangle$ ,  $\langle D, T \rangle$ ,  $ASL(2, R)$ . The written algebras are not conjugated mutually.*

Later on, when we speak about subalgebras of the algebra  $ASL(2, R)$  we shall mean the subalgebras given by Lemma 3.1.

By direct calculations we are convinced that the normalizer of  $\langle D \rangle$  in the group  $SL(2, R)$  consists of matrices

$$\left( \begin{array}{cc} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc} \sigma & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{array} \right)$$

where  $\alpha \in R, \alpha \neq 0$ . The normalizer of  $\langle T \rangle$  and the normalizer of  $\langle D, T \rangle$  in the group  $SL(2R)$  consist of matrices  $\pm \exp(\theta_1 D) \cdot \exp(\theta_2 T)$ , where  $\theta_1, \theta_2 \in R$ . The normalizer of  $\langle S + T \rangle$  coincides with the group

$$SO(2) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \right) \mid \varphi \in R \right\}.$$

**Proposition 3.1.** *Let  $AH(n)$  be the Cartan subalgebra of the algebra  $AO(n)$ . Up to conjugacy under  $O(n) \times SL(2, R)$  the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  has two maximal solvable subalgebras  $AH(n) \oplus \langle S + T \rangle, AH(n) \oplus \langle D, T \rangle$ .*

Proposition 3.1 follows immediately from Lemma 3.1 and the fact that  $AO(n)$  has, with respect to  $O(n)$  conjugation, the only maximal solvable subalgebra  $AH(n)$ .

**Proposition 3.2.** *Up to conjugacy under  $O(n) \times AL(2, R)$  the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  has the following subalgebras: (i)  $F \oplus K$ , where  $F \subset AO(n), K \subset ASL(2, R)$ ; (ii)  $F \oplus \langle X + Y \rangle$ , where  $F \oplus \langle X \rangle \subset AO(n), Y \in ASL(2, R)$ ; and (iii)  $\langle X + D \rangle \in (F \oplus \langle T \rangle)$ , where  $F \oplus \langle X \rangle \subset AO(n)$ .*

Proposition 3.2 is proved by the Goursat twist method [11].

**Corollary.** *Subalgebras of the algebra  $AO(3) \oplus ASL(2, R)$  are exhausted with respect to  $O(3) \times SL(2, R)$  conjugation by the following algebras:*

- $O; \langle J_{12} \rangle; \langle D \rangle; \langle T \rangle; \langle S + T \rangle; \langle J_{12} + \alpha D \rangle (\alpha > 0);$
- $\langle J_{12} + T \rangle; \langle J_{12} + \alpha(S + T) \rangle (\alpha > 0); \langle J_{12} + \alpha D, T \rangle (\alpha > 0);$
- $\langle D, T \rangle; \langle J_{12}, D \rangle; \langle J_{12}, T \rangle; \langle J_{12}, S + T \rangle; \langle J_{12}, D, T \rangle;$
- $AO(3); ASL(2, R); \langle J_{12} \rangle \oplus ASL(2, R); AO(3) \oplus \langle D \rangle;$
- $AO(3) \oplus \langle T \rangle; AO(3) \oplus \langle S + T \rangle; AO(3) \oplus \langle D, T \rangle; AO(3) \oplus ASL(2, R).$

*The written algebras are not conjugated mutually.*

The space can  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  be considered as an exact module the Lie algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$ . Let  $L$  be a subalgebra of this algebra. If  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  is a completely reducible  $L$  module, then the algebra  $L$  will be called completely reducible.

**Theorem 3.1.** *A subalgebra  $L$  of the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  is completely reducible if and only if  $\tau(L)$  does not coincide with  $\langle T \rangle$  and  $\langle D, T \rangle$ .*

**Proof.** If  $\tau(L) = 0$ , then  $L$  is a completely reducible algebra. If  $\tau(L) = \langle D, T \rangle$ , then  $L = L_1 \oplus L_2$ , where  $L_1 \subset AO(n), L_2 = \langle X + D, T \rangle, X \in AO(n)$ . Since the algebra  $L_2$  is solvable and non-Abelian, then  $L$  is not a completely reducible algebra [12]. Let  $\tau(L) = ASL(2, R)$ . Since direct decomposition of  $F \subset AO(n)$  can be realized through every ideal, and since every subalgebra of the algebra  $AO(n)$  is not compact, then  $L = \omega(L) + \tau(L)$ . That is why [12]  $L$  is completely reducible.

Let us assume that  $\tau(L) = \langle D \rangle$ . Since  $[D, P_a] = -P_a, [D, G_a] = G_a$ , then  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  can be decomposed into a direct sum of  $L$ -irreducible spaces. Consequently  $L$  is a completely reducible algebra.

As  $[S + T, P_a] = G_a$  and  $[S + T, G_a] = -P_a$ , then the skew-symmetric matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

corresponds to the operator  $S + T$  in a basis  $P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n$  of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$ . Hence it follows that if  $\tau(L) = \langle S + T \rangle$ , then in the basis mentioned above every element of an algebra  $L$  is represented by a skew-symmetric matrix of degree  $2n$ , and that is why  $L$  is a completely reducible algebra.

Let  $\tau(L) = \langle T \rangle$ , and  $V[k, l]$  be an irreducible  $\omega(L)$  module. Evidently  $V[k, l] + W[k, l]$  is an  $L$  module. Since by Lemma 4.2 of [9] this module can not be decomposed into a direct sum of irreducible  $L$  modules, an algebra  $L$  is not completely reducible. The theorem is proved.

#### 4. The structure of splitting subalgebras of the Schrödinger algebra

The aim of this section is to study up to conjugation the subspaces of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  invariant under subalgebras of the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$ . The main results are Theorems 4.1 and 4.2.

Let  $F$  be a subalgebra of  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$ , and  $\hat{F}$  be a subalgebra of the algebra  $ASch(n)$  such that  $\pi(\hat{F}) = F$ . If algebra  $\hat{F}$  is  $Sch(n)$  conjugated to the algebra  $F \in \mathfrak{N}$ , where  $\mathfrak{N}$  is an  $F$ -invariant subspace of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$ , then  $\hat{F}$  is called a splitting in the algebra  $ASch(n)$ . The notion of a splitting subalgebra of the algebra  $\widetilde{ASch}(n)$  is defined in an analogous way. If every subalgebra  $\hat{F}$  is a splitting, we shall say that  $F$  has only splitting extensions in the algebra  $ASch(n)$  (resp. in the algebra  $\widetilde{ASch}(n)$ ).

We shall find all subalgebras  $F$ , which possess only splitting extensions.

Let

$$J(a, b) = J_{2a-1, 2a} + \dots + J_{2b-1, 2b} \quad (a \leq b),$$

$$J(a) = J(a, a), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = S + T + \alpha_1 J_{12} + \dots + \alpha_t J_{2t-1, 2t}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_t,$$

$$Y_{2a-1} = G_{2a-1} + P_{2a}, \quad Y_{2a} = G_{2a} - P_{2a-1}, \quad Z_{2a-1} = G_{2a-1} - P_{2a},$$

$$Z_{2a} = G_{2a} + P_{2a-1}, \quad \mathfrak{L}_a = \langle Y_{2a-1}, Y_{2a} \rangle, \quad \mathfrak{N}_a = \langle Z_{2a-1}, Z_{2a} \rangle.$$

Obviously,  $\mathfrak{L}_a + \mathfrak{N}_a = \overline{\mathfrak{M}}[2a - 1, 2a]$ . If  $1 \leq a \leq t$ , then

$$\begin{aligned} [X, Y_{2a-1}] &= -(\alpha_{a-1})Y_{2a}, & [X, Y_{2a}] &= (\alpha_a - 1)Y_{2a-1}, \\ [X, Y_{2a-1}] &= -(\alpha_a + 1)Z_{2a}, & [X, Z_{2a}] &= (\alpha_a + 1)Z_{2a-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

Thus  $(\alpha_1 - 1)J$  is the matrix of  $\text{ad } X$  in the basis  $Y_{2a-1}, Y_{2a}$  of the space  $\mathfrak{L}_a$ , and  $(\alpha_a + 1)J$  is the matrix of  $\text{ad } X$  in the basis  $Z_{2a-1}, Z_{2a}$  of the space  $\mathfrak{N}_a$  ( $1 \leq a \leq t$ ). If  $\alpha_a = 0$ , we obtain a matrix corresponding to  $\text{ad}(S + T)$ .

Let  $\alpha_a \neq 0, \alpha_a \neq 1$ . The  $\langle X \rangle$  module  $\mathfrak{N}$  is called an elementary module of the first kind, and the  $\langle X \rangle$  module  $\mathfrak{N}_a$  is called an elementary module of the second kind. A subdirect sum of elementary modules of the first kind is called a module of the first kind, and a subdirect sum of elementary modules of the second kind is called a module of the second kind.



**Lemma 4.1.** *Let  $C$  be a matrix obtained from the identity matrix of degree  $n$  as a result of fulfilling a permutation over its columns*

$$\begin{pmatrix} 2k-1 & 2k & 2l-1 & 2l \\ 2l & 2l-1 & 2k & 2k-1 \end{pmatrix} \quad (k < l),$$

*followed by the multiplication on  $(-1)$  columns which have number  $2k$  and  $2l$ . The  $O(n)$  automorphism  $\varphi$  of the algebra  $ASch(n)$  which corresponds to the matrix  $C$  has the following properties:*

- (1)  $\varphi(J_{2d-1,2d}) = J_{2d-1,2d}$ , if  $d \neq k, d \neq l$ ,  
 $\varphi(J_{2k-1,2k}) = J_{2l-1,2l}$ ,  $\varphi(J_{2l-1,2l}) = J_{2k-1,2k}$ ;
- (2)  $\varphi(G_{2k-1}) = G_{2l}$ ,  $\varphi(G_{2k}) = -G_{2l-1}$ ,  
 $\varphi(G_{2l-1}) = G_{2k}$ ,  $\varphi(G_{2l}) = -G_{2k-1}$ ;
- (3)  $\varphi(\mathfrak{L}_k) = \mathfrak{L}_l$ ,  $\varphi(\mathfrak{L}_l) = \mathfrak{L}_k$ ,  
 $\varphi(\mathfrak{N}_k) = \mathfrak{N}_l$ ,  $\varphi(\mathfrak{N}_l) = \mathfrak{N}_k$ .

**Proof.** For simplicity we can take  $n = 4$  and

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.$$

Then

$$C(\alpha_{12} + \beta J_{34})C^{-1} = \beta J_{12} + \alpha J_{34}, \quad C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_4 \\ y_3 \\ -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Using the last equality we conclude that  $\varphi(G_1) = G_4$ ,  $\varphi(G_2) = -G_3$ ,  $\varphi(G_3) = G_2$ , and  $\varphi(G_4) = -G_1$ . The lemma is proved.

**Lemma 4.2.** *Letting  $n > 4$ ,  $1 \leq q \leq [n/2] - 1$ , and  $E_a$  be the identity matrix of degree  $a$ ,*

$$C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -1 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \oplus E_2,$$

$$C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ 0 & E_{k-1} & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \oplus E_2 \quad (k \geq 2);$$

- $\Delta(1, k; \lambda) = \text{diag}[C_k(\lambda), E_{n-2, (k+1)}]$ , if  $2(k+1) < n$ ,
- $\Delta(1, k; \lambda) = C_k(\lambda)$ , if  $2(k+1) = n$ ;
- $\Delta(q, k; \lambda) = \text{diag}[E_{2q-2}, C_k(\lambda), E_{n-2(k+q)}]$ , if  $q > 1$ ,  $2(k+q) < n$ ,
- $\Delta(q, k; \lambda) = \text{diag}[E_{2q-2}, C_k(\lambda)]$ , if  $q > 1$ ,  $2(k+q) = n$ ;

and  $\varphi(q, k; \lambda)$  is an  $O(n)$  automorphism of the algebra  $ASch(n)$  which corresponds to a matrix  $\Delta(q, k; \lambda)$ . Then

$$\begin{aligned}\varphi(q, k; \lambda)(J(q, q+k)) &= J(q, q+k), \\ \varphi(q, k; \lambda)(G_{2q-1} + \lambda G_{2(q+k)-1}) &= \sqrt{1 + \lambda^2} \cdot G_{2q-1}, \\ \varphi(q, k; \lambda)(G_{2q} + \lambda G_{2(q+k)}) &= \sqrt{1 + \lambda^2} G_{2q},\end{aligned}$$

**Proof.** We may restrict ourselves only to the case when  $n = 4$ ,  $q = 1$ ,  $k = 1$ . Since

$$C_1(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} X' & 0 \\ 0 & X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' & 0 \\ 0 & X' \end{pmatrix} \cdot C_1(\lambda),$$

for every matrix  $X'$  of degree 2, and

$$C_1(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \lambda^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

then

$$\begin{aligned}\varphi(1, 1; \lambda)(J(1, 2)) &= J(1, 2), \\ \varphi(1, 1; \lambda)(G_1 + \lambda G_3) &= \sqrt{1 + \lambda^2} G_1, \\ \varphi(1, 1; \lambda)(G_2 + \lambda G_4) &= \sqrt{1 + \lambda^2} G_2,\end{aligned}$$

The lemma is proved.

**Proposition 4.1.** Let  $X = S + T + \alpha J(k, l)$ , where  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ . If  $U$  is an  $\langle X \rangle$  submodule of the first (the second) king of the module  $\overline{\mathfrak{M}}[2k-1, 2l]$ , then  $U$  is conjugated to the module

$$\sum_{a=k}^t \mathfrak{L}_a \left( \sum_{a=k}^t \mathfrak{N}_a \right) \quad (t \leq l).$$

**Proof.** Let us assume that  $U$  is a module of the first king. By Lemma 4.1 we shall suppose that a projection of  $U$  onto  $\mathfrak{L}_k$  differs from 0. As

$$\begin{aligned}\exp(\theta J_{2a-1, 2a})(\gamma_a Y_{2a-1} + \delta_a Y_{2a}) \exp(-\theta J_{2a-1, 2a}) &= \\ = (\gamma_a \cos \theta + \delta_a \sin \theta) Y_{2a-1} + (\delta_a \cos \theta - \gamma_a \sin \theta) Y_{2a},\end{aligned}$$

putting  $\delta_a \cos \theta - \gamma_a \sin \theta = 0$ , we may assume that if a projection of an element  $Y \in U$  onto  $\mathfrak{L}_a$  is equal to  $\gamma_a Y_{2a-1} + \delta_a Y_{2a}$ , then  $\delta_a = 0$ . Hence it follows that  $U$  has the element

$$\begin{aligned}Y &= Y_{2k-1} + \lambda_{k+1} Y_{2k+1} + \cdots + \lambda_l Y_{2l-1} = \\ &= (G_{2k-1} + \lambda_{k+1} G_{2k+1} + \cdots + \lambda_l G_{2l-1}) + (P_{2k} + \lambda_{k+1} P_{2k+2} + \cdots + \lambda_l P_{2l})\end{aligned}$$

In view of Lemma 4.2, for some  $O(n)$  automorphism  $\varphi = \varphi(k, 1; \mu_1) \cdot \varphi(k, 2; \mu_2) \cdots \varphi(k, l-k; \mu_{l-k})$  of the algebra  $ASch(n)$  the following equalities hold true:  $\varphi(X) = X$ ,  $\varphi(Y) = \gamma(G_{2k-1} + P_{2k})$  ( $\gamma \in R$ ,  $\gamma \neq 0$ ). Therefore we may assume that  $Y_{2k-1} \in U$ . Then  $Y_{2k} \in U$ , and thus  $\mathfrak{L}_k \subset U$ . Using induction we conclude that  $U = \sum \mathfrak{L}_a$ .

The case when  $U$  is a module of the second kind is treated similarly. The proposition is proved.

**Theorem 4.1.** *Let  $F$  be a subalgebra of the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$ . Then  $F$  has only splitting extensions in  $ASch(n)$  if and only if one of the following conditions is satisfied: (1)  $D \in \tau(F)$ ; (2)  $\tau(F) = \langle S+T \rangle$  and  $F$  is not conjugated to  $\langle J_{12} + S+T \rangle \uplus K$ , where  $K$  is a subalgebra of the algebra  $\langle J_{ab} \mid a, b = 3, \dots, n \rangle$ ; (3)  $\tau(F) \subset \langle T \rangle$  and  $\omega(F)$  is not conjugated to any subalgebra of the algebra  $AO(n-1)$ ; or (4)  $\tau(F) = 0$  and  $\omega(F)$  is a semisimple algebra.*

**Proof.** Let  $D \in \tau(F)$ . If  $\tau(F) = ASL(2, R)$ , then by Theorem 3.1  $F$  is a completely reducible algebra. Since in this case  $F$  annihilates only zero subspace in  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$ , then by Proposition 2.1 of [9] the algebra  $F$  has only splitting extensions in  $ASch(n)$ . If  $\tau(F) = \langle D, T \rangle$ , then  $T \in F$ . Algebra  $F/\langle T \rangle$  acts completely reducible in  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  and annihilates only zero subspace in this space. From this, using Proposition 2.1 and Lemma 3.1, we conclude that  $F$  has only splitting extensions in  $ASch(n)$ . At the same time the case  $\tau(F) = \langle D \rangle$  is considered.

Let  $\tau(F) = \langle S+T \rangle$ . If  $S+T \in F$ , then  $F$  annihilates only zero subspace in  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$ . Because of Theorem 3.1 the algebra  $F$  is completely reducible; then by Proposition 2.1 of [9] any algebra  $\hat{F}$  in the algebra  $ASch(n)$ , then  $F$  contains  $X = S+T + \alpha_1 J_{12} + \dots + \alpha_t J_{2t-1, 2t}$ , where  $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_t$ . We may assume that projections of other basis elements of the algebra  $F$  onto  $\langle S+T \rangle$  are equal to 0. In view of Proposition 2.1 of [9] the algebra  $F$  annihilates in  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  a certain nonzero subspace  $U$ . It follows from this and formula (2) that  $U \subset \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_{2k} \rangle$  and  $X = S+T + J(1, t)$  ( $k \leq t$ ) or

$$X = S + T + J(1, k) + \beta_{k+1}J(k+1) + \dots + \beta_t J(t) \quad (t > k),$$

where  $\beta_{k+1} > 0, \dots, \beta_t > 0, \beta_{k+1} \neq 1, \dots, \beta_t \neq 1$ . Arguing as in the proof of Proposition 4.1 we obtain that  $Y_1 \in U$  up to conjugacy. Hence it follows that  $F = \langle S+T + J_{12} \rangle \uplus K$ , where  $K \subset \langle J_{ab} \mid a, b = 3, \dots, n \rangle$ . By Lemma 2.1 of [9] the algebra  $\hat{F}$  which is obtained from  $F$  by replacing  $S+T + J_{12}$  by  $S+T + J_{12} + Y_1$ , is nonsplitting.

Let  $\tau(F) = \langle T \rangle, F_1 = \omega(F)$ , and  $\hat{F}$  be a subalgebra of the algebra  $ASch(n)$  such that  $\pi(\hat{F}) = F$ . If  $F_1$  is not conjugated to a subalgebra of the algebra  $AO(n-1)$ , then by Proposition 2.1 and Lemma 3.1 of [9] an algebra  $\hat{F}$  is splitting. If  $F_1$  is conjugated to a subalgebra of the algebra  $AO(n-1)$ , then  $F = \langle X \rangle \oplus F_2$ , where  $X \neq 0$ , and  $\langle X \rangle$  and  $F_2$  are subalgebras of the algebra  $AO(n-1) \oplus \langle T \rangle$ . An algebra  $F_2 \not\subset \langle P_n X + G_n \rangle$  is nonsplitting.

The case  $\tau(F) = 0$  is considered in [5, 7]. The theorem is proved.

**Proposition 4.2.** *A subalgebra  $F$  of the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  possesses only splittable extensions in  $ASch(n)$  if and only if  $F$  is a semisimple algebra.*

The proof of Proposition 4.2 is similar to the proof of Theorem 4.1.

Let  $\Gamma : X \rightarrow X$  be the trivial representation of a subalgebra  $F$  of the algebra  $AO(n)$ . Then  $\Gamma$  is  $O(n)$  equivalent to  $\text{diag}[\Gamma_1, \dots, \Gamma_m]$ , where  $\Gamma_i$  is an irreducible subrepresentation ( $i = 1, \dots, m$ ). It is well known that if representations  $\Delta$  and  $\Delta'$  of Lie algebra  $L$  by skew-symmetric matrices are equivalent over  $R$ , then  $C\Delta(X)C^{-1} = \Delta'(X)$  for some orthogonal matrix  $C$  ( $X \in L$ ), hence we conclude that if  $\Gamma_i$  and  $\Gamma_j$

are equivalent representations, then we can assume that for every  $X \in F$  the equality  $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$  takes place. Uniting equivalent nonzero irreducible subrepresentations we shall get nonzero disjunctive primary subrepresentations  $\Delta_1, \dots, \Delta_q$  of the representation  $\Gamma$ . An algebra

$$K_i = \{\text{diag}[0, \dots, \Delta_i(X), \dots, 0] \mid X \in F\} \quad (1 \leq i \leq q)$$

is called a primary part of the algebra  $F$ . Evidently  $F$  is a subdirect sum of its primary parts.

We shall say that the splitting subalgebra  $F$  of the algebra  $ASch(n)$  or of the algebra  $\widehat{ASch}(n)$  has a splitting factor algebra in the case  $\pi(\hat{F}) = F_1 \oplus F_2$ , where  $F_1 \subset AO(n)$ ,  $F_2 \subset ASL(2, R)$ . If this condition does not hold, then the factor algebra  $\pi(\hat{F})$  of an algebra  $\hat{F}$  is called nonsplitting.

**Theorem 4.2.** *Let  $K_1, K_2, \dots, K_q$  be primary parts of the nonzero subalgebra  $L'$  of the algebra  $AO(n)$ ,  $L''$  be a subalgebra of the algebra  $ASL(2, R)$  differing from  $\langle S + T \rangle$ , and  $L$  be a subdirect sum of  $L'$  and  $L''$ . If  $U$  is a subspace of  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$ , being invariant under  $L$ , then  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_q \oplus \tilde{U}$ , where  $U_i = [K_i, U] = [K_i, U_i]$ ;  $[L'', U_i] \subset U_i$ ;  $[K_j, U_i] = 0$  in the case  $j \neq i$ ;  $[K_i, \tilde{U}] = 0$ ,  $[L'', \tilde{U}] \subset \tilde{U}$  ( $i, j = 1, \dots, q$ ).*

**Proof.** If  $L'' = ASL(2, R)$ , then  $L'' \subset L$ . Therefore from  $[L, U] \subset U$  it follows that  $[L'', U] \subset U$ . Since  $\overline{\mathfrak{M}}[a]$  is invariant under  $ASL(2, R)$  for any  $a$ ,  $1 \leq a \leq n$ , then each subspace  $U_i = [K_i, U]$  is invariant under this algebra. Let  $\tilde{U}$  be a maximal subspace of the space  $U$  annihilated by  $L'$ ,  $U' = [L', U]$ . Since  $L'$  is a completely reducible algebra,  $U = U' \oplus \tilde{U}$  and  $[L', U'] = U'$ . Applying Lemma 3.1 of [9] we conclude that  $U' = U_1 \oplus \dots \oplus U_q$ , where  $U_i = [K_i, U] = [K_i, U_i]$  ( $i = 1, \dots, q$ ).

Let  $L'' = \langle T, D \rangle$ . Since  $\langle T, D \rangle$  is a non-Abelian solvable algebra and every subalgebra of the algebra  $AO(n)$  is reductive, then applying the Goursat twist method [11] we obtain that  $T \in L$ . Therefore it is enough to consider the case  $L'' = \langle D \rangle$ . By Lemma 4.2 of [9],  $[D, U] \subset U$ , it follows that  $[D, U_i] \subset U_i$ ,  $[D, \tilde{U}] \subset \tilde{U}$  ( $i = 1, \dots, q$ ).

The case  $L'' = \langle T \rangle$  is considered in [5, 7]. The theorem is proved.

Because of Theorem 4.2, the study of splitting subalgebras  $\hat{F}$  of the algebra  $ASch(n)$ , for which  $\tau(\hat{F}) \neq \langle S + T \rangle$ , is reduced to the study of splitting subalgebras  $\hat{K}$  of the algebra  $ASch(n)$  having the splitting factor algebra  $\pi(\hat{K})$  and zero or primary projection onto  $AO(n)$ . Such subalgebras have been described in [13].

**Proposition 4.3.** *Nonzero subspaces of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  invariant under  $\langle S + T \rangle$  are exhausted with respect to  $O(n)$  conjugation by the following spaces:  $\overline{\mathfrak{M}}[1, d]$  ( $d = 1, \dots, n$ );  $U_q$  ( $q = 1, \dots, [n/2]$ );  $U_m + \overline{\mathfrak{M}}[2m + 1, t]$  ( $m = 1, \dots, [(n - 1)/2]$ ;  $t = 2m + 1, \dots, n$ ), where  $U_q$  is a subdirect sum of  $V[1, 2q]$  and  $W[1, 2q]$  having zero intersections with these spaces. If*

$$\{G_j + \alpha_{1j}P_1 + \dots + \alpha_{2q,j}P_{2q} \mid j = 1, \dots, 2q\}$$

is a basis of  $U_q$ , then with respect to  $O(2q)$  conjugation a matrix  $(\alpha_{kj})$  ( $k, j = 1, \dots, 2q$ ) coincides with  $\text{diag}[\Gamma(\lambda_1), \dots, \Gamma(\lambda_q)]$ , where  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_q \leq 1$  and

$$\Gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

The numbers  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  are defined by the space  $U_q$  uniquely.

Proposition 4.3 is proved along with Proposition 2.4 and Theorem 3.4 in [13].

**Proposition 4.4.** *Let*

$$\Lambda_b(a) = \langle P_1 + \lambda_1 P_{a+1}, \dots, P_b + \lambda_b P_{a+b} \rangle,$$

where  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_b$ ,  $b \leq a$ ,  $a + b \leq n$ . A subalgebra  $\hat{F}$  of the algebra  $ASch(n)$  such that  $\omega(\hat{F}) = 0$ ,  $D \in \tau(\hat{F})$ , is  $Sch(n)$  conjugated to  $L \oplus U$ , where  $L \subset ASL(2, R)$  and  $U$  is a subspace of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$ . Let  $U \neq 0$ . If  $L = ASL(2, R)$ , then  $U$  is conjugated to  $\overline{\mathfrak{M}}[1, d]$  ( $1 \leq d \leq n$ ). If  $L = \langle D, T \rangle$ , then  $U$  is conjugated to one following spaces  $W[1, d]$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[1, d]$ , ( $1 \leq d \leq n$ );  $V[1, d] + W[1, t]$  ( $1 \leq d \leq n - 1$ ,  $d + 1 \leq t \leq n$ ). If  $L = \langle D \rangle$ , then  $U$  is conjugated to one of the following spaces:

- $W[1, d]$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[1, d]$  ( $1 \leq d \leq n$ );  $V[1, d] + W[d + 1, d + t]$  ( $1 \leq d \leq [n/2]$ ;  $d \leq t \leq n - d$ );
- $V[1, d] + W[1, c] + W[d + 1, d + t]$  ( $1 \leq d \leq n - 1$ ;  $1 \leq c \leq d$ ;  $d - c \leq t \leq n - d$ , if  $c \neq d$ ;  $1 \leq t \leq n - d$ , if  $c = d$ );
- $V[1, d] + \Lambda_d(d)$  ( $1 \leq d \leq [n/2]$ );  $V[1, d] + \Lambda_t(d) + W[t + 1, d]$  ( $2 \leq d \leq n - 1$ ;  $1 \leq t \leq \min\{d - 1, n - d\}$ );
- $V[1, d] + \Lambda_t(d) + W[d + t + 1, b + t + s] + W[d + t + 1, d + t + s]$  ( $1 \leq d \leq [n/2]$ ;  $1 \leq t \leq \min\{d, n - d - 1\}$ ;  $1 \leq s \leq n - d - t$ ;  $s + t \geq d$ );
- $V[1, d] + \Lambda_t(d) + W[t + 1, b] + W[d + t + 1, d + t + s]$  ( $2 \leq d \leq n - 2$ ;  $1 \leq t \leq \min\{d - 1, n - d - 1\}$ ;  $t + 1 \leq b \leq d$ ;  $1 \leq s \leq n - d - t$ ;  $b + s \geq d$ ).

The proof of Proposition 4.4 is similar to the proof of Theorem 3.3 [13].

Using Theorem 4.2 to investigate splitting subalgebras with nonsplitting factor algebra, it is enough to consider the algebras  $\hat{F} \subset ASch(n)$  for which  $\tau(\hat{F}) = \langle S + T \rangle$  and  $\tau(\hat{F}) \not\subset \hat{F}$ . In this case  $\pi(\hat{F}) = F' \oplus \langle X \rangle$ , where  $F'$  is a subalgebra of  $AO(n)$  and  $X = S + T + \alpha_i J_{12} + \dots + \alpha_k J_{2k-1, 2k}$ . We may suppose that  $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ . Henceforth we shall discuss subspaces of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  that are invariant under  $X$ .

**Lemma 4.3.** *Let  $1 \leq a, b \leq k$ . Then  $\mathfrak{L}_a \cong \mathfrak{L}_b$  if and only if  $\alpha_a = \alpha_b$  or  $\alpha_a + \alpha_b = 2$ ;  $\mathfrak{N}_a \cong \mathfrak{N}_b$  if and only if  $\alpha_a = \alpha_b$ ;  $\mathfrak{L}_a \cong \mathfrak{N}_b$  if and only if  $\alpha_a = 2 + \alpha_b$  ( $a \neq b$ ). Modules  $\mathfrak{L}_a$  and  $\mathfrak{N}_a$  are not isomorphic.*

**Proof.** The matrices  $\lambda J$ ,  $\mu J$  are similar if and only if  $\lambda^2 = \mu^2$ . It follows that  $\mathfrak{L}_a \cong \mathfrak{L}_b$  if and only if  $(\alpha_a - 1)^2 = (\alpha_b - 1)^2$ . In the case  $\alpha_a - \alpha_b \neq 0$ ,  $\alpha_a + \alpha_b = 2$ .

If  $\mathfrak{N}_a \cong \mathfrak{N}_b$  then  $(\alpha_a + 1)^2 = (\alpha_b + 1)^2$ , whence  $2(\alpha_a - \alpha_b) = -(\alpha_a - \alpha_b)(\alpha_a + \alpha_b)$ . In the case  $\alpha_a - \alpha_b \neq 0$ ,  $2 = -(\alpha_a + \alpha_b)$ . But this contradicts the fact that  $\alpha_a, \alpha_b > 0$ .

Let  $\mathfrak{L}_a \cong \mathfrak{N}_b$ . Then  $(\alpha_a - 1)^2 = (\alpha_b + 1)^2$ , whence  $2(\alpha_a + \alpha_b) = (\alpha_a - \alpha_b)(\alpha_a + \alpha_b)$ . Thus if  $\alpha \neq 0$ , then  $\alpha_a - \alpha_b = 2$ . The lemma is proved.

Let us remark that if  $\alpha_a \neq 1$ , then the  $\langle X \rangle$  modules  $\mathfrak{L}_a$  and  $\mathfrak{N}_a$  are irreducible, and any  $\langle X \rangle$  submodule of the module  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  is completely reducible.

**Proposition 4.5.** *Let*

$$X = S + T + \sum_{i=1}^s \beta_i J(k_{i-1} + 1, k),$$

where  $s \geq 2$ ,  $k_0 = 0$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $\beta_i \neq 1$ ,  $\beta_i \neq \beta_j$  if  $i \neq j$ . There exists an indecomposable  $\langle X \rangle$  submodule with nonzero projections onto  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2k_1]$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[2k_1 + 1, 2k_2]$ ,  $\dots$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[2k_{s-1} + 1, 2k_s]$  of the  $\langle X \rangle$  module  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2k_s]$  if and only if  $s = 2$  and

one of the following conditions is satisfied: (i)  $\beta_1 = 2 + \beta_2$ ; (ii)  $\beta_2 = 2 + \beta_1$ ; (iii)  $\beta_1 + \beta_2 = 2$ . If  $U$  is ademanded indecomposable  $\langle X \rangle$  module and  $U_i$  is the projection of  $U$  onto  $\overline{\mathfrak{M}}[2k_{i-1} + 1, 2k_i]$  ( $i = 1, 2$ ), then in case (i)  $U_1$  is a module of the first kind and  $U_2$  is a module of the second kind; in the case (ii)  $U_1$  is a module of the second kind; and  $U_2$  is a module of the first kind; and in cas (iii)  $U_1$  and  $U_2$  are modules of the first kind.

**Proof.** By Lemma 3.1 of [9], in the  $\langle X \rangle$  module  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2k_s]$ , there exists an indecomposable submodule demanded if and only if the  $\langle X \rangle$  modules  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2k_1]$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[2k_1 + 1, 2k_2]$ ,  $\dots$ ,  $\overline{\mathfrak{M}}[2k_{s-1} + 1, 2k_s]$ , have isomorphic composition factors. If  $\mathfrak{L}_{k_i} \cong \mathfrak{L}_{k_j}$ , and  $\mathfrak{L}_{k_j} \cong \mathfrak{L}_{k_r}$ , then by Lemma 4.3  $\beta_i + \beta_j = 2$  and  $\beta_j + \beta_r = 2$ . From this it follows that  $\beta_i = \beta_r$  and that is why  $i = r$ . If  $\mathfrak{L}_{k_i} \cong \mathfrak{N}_{k_j}$  and  $\mathfrak{N}_{k_j} \cong \mathfrak{N}_{k_r}$ , then  $\beta_i = 2 + \beta_j$  and  $\beta_r = 2 + \beta_j$ , whence  $i = r$ . Thus  $s \leq 2$  and one of the following conditions is satisfied: (1)  $\beta_1 = 2 + \beta_2$ ; (2)  $\beta_2 = 2 + \beta_1$ ; (3)  $0 < \beta_1 < 2$ ,  $\beta_2 = 2 - \beta_1$ . Statements about the kinds of projections follow from Lemma 4.3. The proposition is proved.

**Proposition 4.6.** Let  $X = S + T + \beta J(1, k)$  ( $\beta > 0$ ). In the  $\langle X \rangle$  module  $\overline{\mathfrak{M}}[1, n]$  there exists an indecomposable  $\langle X \rangle$  submodule with nonzero projections onto  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2k]$  and  $\overline{\mathfrak{M}}[2k + 1, n]$  if and only if  $\beta = 2$ . If  $U$  is such a submodule and  $U_1$  is the projection  $U$  onto  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2k]$ , then  $U_1$  is a module of the first kind.

### 5. Abelian subalgebras of the extended Schrödinger algebra

The main results of this section are Theorem 5.1 and its two corollaries.

Let us use the following notation:

$$X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \dots + \alpha_t J_{2t-1, 2t},$$

where  $\alpha_1 = 1$ ,  $0 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t \leq 1$  if  $t \geq 2$ ;

$$\begin{aligned} AH(0) &= 0, & AH(2d) &= AH(2d + 1) = \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2d-1, 2d} \rangle; \\ \Delta_0[r, t] &= \langle G_r + \alpha_r P_r, \dots, G_t + \alpha_t P_t \rangle, & \Delta[r, t] &= \Delta_0[r, t] + \langle M \rangle, \end{aligned}$$

where  $r \leq t$ ,  $\alpha_r \leq \dots \leq \alpha_t$ ,  $\alpha_r = 0$ , and  $\alpha_t = 1$  if  $\alpha_t \neq 0$ ;

$$\Pi(a, b) = \langle Y_{2a-1}, Y_{2a+1}, \dots, Y_{2b-1} \rangle \quad (a \leq b).$$

We recall that  $Y_{2c-1} = G_{2c-1} + P_{2c}$  and  $Y_{2c} = G_{2c} - P_{2c-1}$ .

The algebra  $AH(n)$  is a maximal Abelian subalgebra of the algebra  $AO(n)$ . It is well known that any maximal Abelian subalgebra of the algebra  $AO(n)$  is conjugated  $AH(n)$  with respect to inner automorphisms of the algebra  $AO(n)$ . Henceforth when speaking about Abelian subalgebras of the algebra  $AO(n)$  we shall mean subalgebras of the algebra  $AH(n)$ .

**Lemma 5.1.** Let  $L$  be an Abelian subalgebra of the algebra  $\langle J(a, b) + S + T \rangle \subset +\mathfrak{M}[2a - 1, 2b]$  such that its projection onto  $\langle J(a, b) + S + T \rangle$  is nonzero and its projection onto  $\langle M \rangle$  is equal to 0. Then  $L$  is conjugated to one of the following algebras:

$$\begin{aligned} &\langle J(a, b) + S + T + \alpha Y_{2b-1} \rangle \quad (\alpha \geq 0); \\ &\Pi(a, c) \oplus \langle J(a, b) + S + T + \alpha Y_{2b-1} \rangle \quad (\alpha \geq 0, c \leq b). \end{aligned}$$

The written algebras are pairwise nonconjugated.

**Proof.** The maximal subspace of the space  $\mathfrak{M}[2a - 1, 2b]$  annulled by  $\langle J(a, b) + S + T \rangle$  and having zero projection onto  $\langle M \rangle$  coincides with

$$\sum_{c=a}^b \mathfrak{L}_c.$$

Let  $U = L \cap \mathfrak{M}[2a - 1, 2b]$ . By the same arguments as in the proof of Proposition 4.1 we can establish that if  $U \neq 0$ , then  $U$  contains  $Y_{2a-1}$ . As  $[Y_{2a-1}, Y_{2a}] = -2M$ , so  $U = \langle Y_{2a-1} \rangle + U^1$ , where  $U^1$  is a subspace of the space

$$\sum_{c=a+1}^b \mathfrak{L}_c.$$

Continuing these arguments we obtain that  $U = \Pi(a, c)$  ( $c \leq b$ ) and  $L$  contains  $J(a, b) + S + T + \alpha Y_{2b-1}$  ( $\alpha \geq 0$ ). The lemma is proved.

**Theorem 5.1.** *Let  $L$  be a nonzero Abelian subalgebra of algebra  $A\widetilde{Sch}(n)$ . If  $\tau(L) = \langle D \rangle$ , then  $L$  is conjugated to the subdirect sum  $L_1 \dagger L_2 \dagger L_3$  of algebras  $L_1, L_2, L_3$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = \langle D \rangle$ ,  $L_3 \subset \langle M \rangle$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ). If  $\tau(L) = \langle T \rangle$ , then  $L$  is conjugated to  $L_1 \dagger L_2 \dagger L_3 \dagger L_4$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = \langle T + \alpha G_{2d+1} \rangle$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ),  $L_3 = 0$  or  $L_3 = W[r, t]$ ,  $L_4 \subset \langle M \rangle$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ;  $r = 2d + 1$  if  $\alpha = 0$ ,  $2d + 1 \leq n$ ;  $r = 2d + 2$  if  $\alpha = 1$ ,  $2d + 2 \leq n$ ); if  $\tau(L) = \langle S + T \rangle$ , then  $L$  is conjugated to  $L_1 \dagger L_2 \dagger L_3 \dagger L_4$ , where  $L_1 \subset \langle M \rangle$ ,  $L_2 \subset AH(2d)$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ), and the algebras  $L_3$  and  $L_4$  satisfy one of the following conditions:*

- (1)  $L_3 = \langle S + T \rangle, \quad L_4 = 0;$
- (2)  $L_3 = \langle J(d + 1, t) + S + T + \alpha Y_{2t-1} \rangle, \quad L_4 = 0 \quad (\alpha > 0);$
- (3)  $L_3 = \langle J(d + 1, t) + S + T + \alpha Y_{2t-1} \rangle, \quad L_4 = \Pi(d + 1, s) \quad (s \leq t; \alpha \geq 0).$

If  $L \subset A\tilde{G}^0(n)$ , then  $L$  is conjugated to  $L_1 \dagger L_2 \dagger L_3 \dagger L_4$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = 0$  or  $L_2 = \Delta_0[2d + 1, s]$ ,  $L_3 = 0$  or  $L_3 = W[k, l]$ ,  $L_4 = 0$  or  $L_4 = \langle M \rangle$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ;  $k = s + 1$  if  $L_2 \neq 0$ ;  $k = 2d + 1$  if  $L_2 = 0$ ;  $l \leq n$ ).

**Proof.** If  $\tau(L) = \langle D \rangle$ , then by Theorem 4.1 the algebra  $L$  is conjugated to the algebra  $U + F$ , where  $U \subset \mathfrak{M}[1, n]$  and  $F \subset AH(n) \oplus \langle D, M \rangle$ . Since  $D$  annuls only  $\langle M \rangle$  in  $\mathfrak{M}[1, n]$  and by Theorem 4.2  $[D, U] \subset U$ , then  $U \subset \langle M \rangle$ . Thus  $L$  is conjugated to some subalgebra of the algebra  $AH(2d) \oplus \langle D, M \rangle$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ).

If  $\tau(L) = \langle T \rangle$ , then by Theorem 4.1 the algebra  $L$  is conjugated to the algebra  $U + F$  satisfying one of the following conditions:  $U \subset \mathfrak{M}[1, n]$  and  $F$  is a subalgebra of  $AH(n) + \langle M, T \rangle$ ; or  $U \subset \mathfrak{M}[1, 2d]$  and  $F$  is a subalgebra of  $AH(2d) + \mathfrak{M}[2d + 1, n] + \langle T \rangle$  ( $d \geq 1$ ). Let us consider the last case. Let us suppose that the projection  $K$  of the algebra  $F$  onto  $AO(n)$  is not conjugated to any subalgebra of the algebra  $AH(2d - 2)$ . Since  $K$  annuls only the zero subspace of  $V[1, 2d]$ , then  $U \subset \langle M \rangle$ . Therefore we shall assume that  $U = 0$ . As  $[T, G_a] = -P_a$ , so by Witt's mapping theorem [14]  $\epsilon(F) = 0$ , or  $\epsilon(F) = \langle G_{2d+1} \rangle$ . Since

$$\exp(\theta T)(T + \alpha G_{2d+1} + \beta P_{2d+1}) \exp(-\theta T) = T + \alpha G_{2d+1} + (\beta - \theta \alpha) P_{2d+1}$$

and

$$\exp(\lambda D)(T + \alpha G_{2d+1}) \exp(-\lambda D) = \exp(-2\lambda)(T + \alpha \exp(3\lambda) \cdot G_{2d+1}),$$

then if  $\epsilon(F) \neq 0$ , the projection of  $F$  onto  $\langle T \rangle \oplus \mathfrak{M}[2d + 1, n]$  contains  $T + G_{2d+1}$ . In this case, by Witt's theorem  $\xi(F)$  coincides with 0 or  $W[2d + 2, t]$ . If  $\epsilon(F) = 0$ , then  $\xi(F) = 0$  or  $\xi(F) = W[2d + 1, t]$ .

Let  $\tau(L) = \langle S + T \rangle$ . If  $S + T \in L$  then  $\epsilon(L) = 0$  and  $\xi(L) = 0$ . If  $S + T \notin L$ , then an algebra  $L$  contains

$$Y = S + T + \sum_{a=1}^{[n/2]} \alpha_a J_{2a-1, 2a} + \sum_{i=1}^n (\beta_i G_i + \gamma_i P_i) + \delta M.$$

We shall suppose that projections of the at rest basis elements of the algebra  $L$  onto  $\langle S+T \rangle$  are equal to zero, and  $\alpha_a \geq 0$  for all  $a$ . If  $\alpha_c \neq 1$ , then  $\langle S+T + \alpha_c J_{2c-1, 2c} \rangle$  is a completely reducible algebra of linear transformations of the vector space  $\mathfrak{M}[2c-1, 2c]$  and annuls only the zero subspace of this space, whence by Proposition 2.1 of [9] we conclude that the projection of  $L$  onto  $\mathfrak{M}[2c-1, 2c]$  is equal to zero. Therefore we may assume that

$$Y = J(d + 1, t) + S + T + \sum_{i=2d+1}^{2t} (\beta_i G_i + \gamma_i P_i).$$

From Proposition 2.1 of [9] it also follows that

$$\sum_{i=2d+1}^{2t} (\beta_i G_i + \gamma_i P_i) \in \sum_{j=d+1}^i \mathfrak{L}_j.$$

Applying Theorem 4.1 and Lemma 5.1 we conclude that, with respect to the conjugation  $\omega(L) \subset AH(2d) + \langle J(d + 1, t) \rangle$ ,

$$Y = J(d + 1, t) + S + T + \alpha Y_{2t-1},$$

and  $L \cap \overline{\mathfrak{M}}[1, n] = 0$  or  $L \cap \overline{\mathfrak{M}}[1, n] = \Pi(d + 1, s)$  ( $\alpha \geq 0; s \leq t$ ).

Let us assume that  $L \subset AG^0(n)$ . By Theorem 2 of [7] the algebra  $L$  is conjugated to an algebra  $U + F$ , which satisfies one of the following conditions:  $U \subset \mathfrak{M}[1, n]$  and  $F$  is a subalgebra of  $AH(n) + \langle M \rangle$ ; or  $U \subset \mathfrak{M}[1, 2d]$  and  $F$  is a subalgebra of  $AH(2d) + \mathfrak{M}[2d + 1, n]$  ( $1 \leq d \leq [n - 1/2]$ ). Let us restrict ourselves to the last case. Let the projection  $K$  of the algebra  $AH(2d - 2)$ . Since  $K$  annuls only the zero subspace of the space  $\overline{\mathfrak{M}}[1, 2d]$ ,  $U \subset \langle M \rangle$ . Therefore we suppose that  $U = 0$ .

Let  $N$  be the projection of  $F$  onto  $\mathfrak{M}[2d + 1, n]$  and  $\epsilon(N) = V[2d + 1, 2d + q]$ . By Witt's mapping theorem the algebra  $N$  is a subdirect sum of the algebras  $N_1, N_2, N_3$ , where  $N_1 \subset \overline{\mathfrak{M}}[2d + 1, 2d + q]$  (as a space),  $N_2 = 0$  or  $N_2 = W[2d + q + 1, t]$ , and  $N_3 \subset \langle M \rangle$ . Let

$$Z_i = G_1 + \beta_{2d+1, i} P_{2d+1} + \dots + \beta_{2d+q, i} P_{2d+q} \quad (i = (2d + 1), \dots, (2d + q)),$$

$N_q = \langle Z_{2d+1}, \dots, Z_{2d+q} \rangle$ . Evidently  $[Z_i, Z_j] = (\beta_{ij} - \beta_{ji})M$ . Since  $N_1$  is an Abelian algebra,  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ . Hence it follows that the matrix  $B = (\beta_{ij})$  is symmetric. Therefore there exists a matrix  $Q \in O(q)$  such that  $QBQ^{-1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_q]$ . From this it



follows that with respect to automorphisms from the group  $O(2d) \times O(q) \times O(n-2d-q)$  we may assume that  $Z_{2d+j} = G_{2d+j} + \lambda_j P_{2d+j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ), where  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_q$ . Applying the automorphism  $\exp(\lambda_1 T)$  we obtain the generators  $G_{2d+j} + \mu_j P_{2d+j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ), where  $\mu_1 = 0, 0 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_q$ . If  $\mu_q > 0$ , then  $\mu_q = \exp(-2\theta)$ . Obviously

$$\exp(\theta D)(G_{2d+j} + \mu_j P_{2d+j}) \exp(-\theta D) = \exp \theta (G_{2d+j} + \mu_j \exp(-2\theta) P_{2d+j}).$$

Therefore if  $\mu_q > 0$ , we may suppose that  $\mu_q = 1$ . This proves that the algebra  $N_1$  is conjugated to  $\Delta_0[2d + 1, 2d + 1, 2d + q]$ . The theorem is proved.

**Corollary 1.** *The maximal Abelian subalgebras of the algebra  $A\widetilde{Sch}(n)$  are exhausted with respect to the  $\widetilde{Sch}(n)$  conjugation by the following algebras:*

- $AH(n) \oplus \langle T, M \rangle$  ( $n \equiv 0 \pmod{2}$ );  $AH(n) \oplus \langle S + T, M \rangle$ ;
- $AH(n) \oplus \langle D, M \rangle$ ;  $AH(n - 1) \oplus \langle G_n + T, M \rangle$ ; ( $n \equiv 1 \pmod{2}$ );
- $AH(2d) \oplus \Delta[2d + 1, n]$  ( $d = 0, 1, \dots, [(n - 1)/2]$ );
- $AH(2d) \oplus \Delta[2d + 1, t] \oplus W[t + 1, n]$  ( $d = 0, 1, \dots, [(n - 2)/2]$ ;  $t = 2d + 1, \dots, n - 1$ );
- $AH(2d) \oplus \langle T, M \rangle \oplus W[2d + 1, n]$  ( $d = 0, 1, \dots, [(n - 1)/2]$ );
- $AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1} + T \rangle \oplus W[2d + 2, n] \oplus \langle M \rangle$  ( $d = 0, 1, \dots, [(n - 2)/2]$ );
- $AH(2d) \oplus \langle J(d + 1, r) + S + T \rangle \oplus \langle M \rangle \oplus \Pi(d + 1, r)$  ( $d = 0, 1, \dots, [(n - 2)/2]$ );  $r = d + 1, \dots, [n/2]$ .

**Corollary 2.** *Let  $\alpha, \beta \in R, \alpha > 0, \beta > 0; t = 1, \dots, [(n - 1)/2]; n \geq 3$ . One-dimensional subalgebras of the algebra  $A\widetilde{Sch}(n)$  are exhausted with respect to the  $\widetilde{Sch}(n)$  conjugation by the following algebras:*

- $\langle D \rangle; \langle T \rangle; \langle S + T \rangle; \langle M \rangle; \langle D + \alpha M \rangle; \langle T \pm M \rangle; \langle S + T \pm \alpha M \rangle; \langle P_1 \rangle;$
- $\langle G_1 + P_2 \rangle; \langle G_1 + T \rangle; \langle X_t \rangle; \langle X_t + \alpha D \rangle; \langle X_t + \alpha D + \beta M \rangle; \langle X_t + T \rangle;$
- $\langle X_t + \alpha(S + T) \rangle; \langle X_t + \alpha M \rangle; \langle X_t + \alpha(S + T) \pm \beta M \rangle; \langle X_s + P_{2s+1} \rangle;$
- $\langle X_r + G_{2r+1} + \alpha P_{2r+2} \rangle$  ( $r = 1, \dots, [(n - 2)/2]$ );  $\langle X_s + T + \alpha G_{2s+1} \rangle;$
- $\langle X_t + S + T + \alpha(G_1 + P_2) \rangle.$

**Remark.** One-dimensional subalgebras of the algebra  $A\widetilde{Sch}(n)$  are exhausted with respect to the  $\widetilde{Sch}(n)$  conjugation by one-dimensional subalgebras, of the algebra  $A\widetilde{Sch}(n)$  whose generators do not contain  $\lambda M$  as an addend ( $\lambda \neq 0$ ).

**Theorem 5.2.** *Let  $L$  be a nonzero Abelian subalgebra of the algebra  $ASch(n)$ . If  $\tau(L) = \langle D \rangle$ , then  $L$  is conjugated to a subdirect sum of  $\langle D \rangle$  and the subalgebra of the algebra  $AH(2d)$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ). If  $\tau(L) = \langle T \rangle$ , then  $L$  is conjugated to  $L_1 + L_2 + L_3$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$ ,  $L_2 = \langle T + \alpha G_{2d+1} \rangle$ , and  $L_3$  is one of the following algebras:*

- $0; W[2d + 2, t]; \langle P_{2d+1} + \lambda P_{2d+2} \rangle + \gamma W[2d + 2] + \delta W[2d + 3, t]$  ( $0 \leq d \leq [n/2]; t \leq n; \alpha, \gamma, \delta \in \{0, 1\}; \lambda \leq 0$ ).

If  $\tau(L) = \langle S + T \rangle$ , then  $L$  is conjugated to  $L_1 + L_2 + L_3$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ) and the algebras  $L_2, L_3$  satisfy one of the following conditions: (1)  $L_2 = \langle S + T \rangle$  and  $L_3 = 0$ ; or (2)  $L_2 = \langle J(d + 1, t) + S + T + \alpha Y_{2t-1} \rangle$  ( $\alpha \geq 0$ ) and  $L_3$  is a subalgebra of the algebra

$$\sum_{a=d+1}^t \mathfrak{L}_a$$

If  $L \subset AG^0(n)$ , then  $L$  is conjugated to  $L_1 + L_2$ , where  $L_1 \subset AH(2d)$  and  $L_2 \subset \overline{\mathfrak{M}}[2d+1, n]$  ( $0 \leq d \leq [n/2]$ ).

The theorem is proved along the same lines as Theorem 5.1.

**Corollary.** *The maximal Abelian subalgebras of the algebra  $ASch(n)$  are exhausted with respect to the  $Sch(n)$  conjugation by the following algebras:*

$$\begin{aligned} & AH(n) \oplus \langle D \rangle; AH(n) \oplus \langle S + T \rangle; AH(n) \oplus \langle T \rangle \quad [n \equiv 0 \pmod{2}]; \\ & AH(2d) \oplus \langle T \rangle \oplus W[2d+1, n] \quad (d = 0, 1, \dots, [(n-1)/2]); \\ & AH(2d) \oplus \overline{\mathfrak{M}}[2d+1, n] \quad (d = 0, 1, \dots, [(n-1)/2]); \\ & AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1} + T \rangle + W[2d+1, n] \quad (d = 0, 1, \dots, [(n-1)/2]); \\ & AH(2d) \oplus \langle J(d+1, r) + S + T \rangle \oplus \sum_{a=d+1}^r \mathfrak{L}_a \quad (d = 0, 1, \dots, [(n-2)/2]; r = d + \\ & 1, \dots, [n/2]). \end{aligned}$$

## 6. Classification of subalgebras of the algebras $ASch(3)$ and $\widetilde{ASch}(3)$

In this section we make use of the previous results to provide a classification of all subalgebras of the algebras  $ASch(3)$  and  $\widetilde{ASch}(3)$ .

Let  $\widetilde{AG}(3) = (AO(3) \oplus \langle T \rangle) \ltimes \mathfrak{M}[1, 3]$  and  $AG(3) = \widetilde{AG}(3)/\langle M \rangle$ . Subalgebras of the algebras  $AG(3)$  and  $\widetilde{AG}(3)$  were classified up to conjugacy under  $G(3)$  and  $\widetilde{G}(3)$ , respectively, in [5]. Further simplification of these subalgebras is being realized by  $SL(2, R)$  automorphisms.

**Theorem 6.1.** *Let  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu \in R$ , and  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma \neq 0$ . The splitting subalgebras of the algebra  $AG(3)$  are exhausted with respect to  $Sch(3)$  conjugation by the splitting subalgebras of the algebra  $AG(2)$  (see [2]) and by the following algebras (the subalgebras preceded by the sign  $\sim$  are subalgebras of  $ASch(3)$ ):*

$$\begin{aligned} & \sim \langle G_1 + P_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2, P_1 + \alpha P_3 \rangle; \sim \langle G_1 + \gamma P_1 + P_3, G_2 + \alpha P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 + \lambda P_1 + P_3, G_2 + \gamma P_1 + \alpha P_3 \rangle; \langle G_1 + \lambda P_1 + P_3, G_2 + \alpha P_1 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 + \beta P_2 + \lambda P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \alpha P_2 + \beta P_3 \rangle; \sim \langle P_1, P_2, P_3 \rangle; \sim \langle G_1, P_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2, P_1, P_3 \rangle; \\ & \langle G_1, P_1 + \alpha P_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_3, G_2 + \alpha P_3, P_1 \rangle; \langle G_1 + P_3, G_2, P_1 \rangle; \langle G_1, G_2 + P_3, P_1 \rangle; \\ & \langle G_1 + \lambda P_1, G_2 + P_1, P_3 \rangle; \sim \langle G_1 + \gamma P_1, G_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + \lambda P_1, G_2 + P_1, P_1 + \alpha P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 + \lambda P_1, G_2, P_1 + \alpha P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 + \lambda P_3, P_1 \rangle; \langle G_1 + P_2, G_2 + \alpha P_3, P_1 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \alpha P_2, P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 + \mu P_3, P_1 + \alpha P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 - P_2 + \alpha P_3, G_2 + P_1 + \beta P_2 + \lambda P_3, G_3 + \alpha P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3 \rangle \quad (\mu - \alpha^2 \beta \neq 0); \\ & \langle G_1 - P_2, G_2 + P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3, G_3 + \alpha P_2 + \gamma P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 - P_2 + \alpha P_3, G_2 + P_1, G_3 + \alpha P_1 + \gamma P_3 \rangle; \langle G_1, P_1, P_2, P_3 \rangle; \langle G_1, G_2, P_1, P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2, G_2, P_1, P_3 \rangle; \langle G_1, G_2 + P_3, P_1 + \alpha P_3, P_2 \rangle; \langle G_1, G_2 + P_3, P_1, P_2 \rangle; \\ & \langle G_1, G_2, P_1 + \alpha P_3, P_2 \rangle; \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \alpha P_2, G_3 + \beta P_1 + \lambda P_2, P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \alpha P_2, G_3 + \beta P_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \alpha P_2, G_3, P_3 \rangle; \\ & \langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_1 + \beta P_2, P_3 \rangle; \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \alpha P_1, P_3 \rangle; \\ & \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, P_3 \rangle; G_1, G_2, P_1, P_2, P_3; \\ & \langle G_1, G_2 + P_1, G_3, P_2, P_3 \rangle; \langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3 \rangle; \\ & \langle T \rangle: \sim W[1, 3], \langle G_1 + P_2, P_1, P_3 \rangle, \langle G_1, P_1, P_2, P_3 \rangle, \langle G_1 + P_3, G_2, P_1, P_2 \rangle, \\ & \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ & \langle J_{12} \rangle: \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], \sim W[1, 2] + V[3], \mathfrak{L}_1 + W[3], V[3] + W[1, 3], \\ & \mathfrak{L}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J_{12} + T \rangle &: \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], V[3] + W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ \langle J_{12}, T \rangle &: \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], V[3] + W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ AO(3) &: \sim 0, \sim W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; AO(3) \oplus \langle T \rangle: \sim 0, \sim W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]. \end{aligned}$$

**Theorem 6.2.** *The nonsplitting subalgebras of the algebra  $AG(3)$  are exhausted with respect to  $Sch(3)$  conjugation by the nonsplitting subalgebras of the algebra  $AG(2)$  [2] and by the following algebras:*

$$\begin{aligned} \langle T + G_1 \rangle &: \sim W[2, 3], \langle P_1 + \alpha P_2, P_3 \rangle, \langle G_2 + \alpha P_3, P_2 \rangle, \langle G_2 + \alpha P_1 + \beta P_3, P_2 \rangle; \\ W[1, 3]; \langle G_2, P_2, P_3 \rangle, \langle G_2 + \alpha P_1, P_2, P_3 \rangle, \overline{\mathfrak{M}}[2] + \langle P_1 + \alpha P_3 \rangle, \\ \langle G_2 + \alpha P_3, P_1 + \beta P_3, P_2 \rangle, \langle G_2 + \alpha P_3, P_1, P_2 \rangle, V[2] + W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[2, 3], \\ \langle G_2 + \alpha P_1, G_3, P_2, P_3 \rangle, \overline{\mathfrak{M}}[2, 3] + W[1] \ (\alpha > 0, \beta > 0); \\ \langle J_{12} + G_3 \rangle &: \sim 0, W[3], \sim W[1, 2], \sim V[1, 2], W[1, 3], V[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2], \\ \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3]; \\ \langle J_{12} + T + \alpha G_3 \rangle &: \sim 0, W[3], \sim W[1, 2], W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3]; \\ \langle J_{12} + \alpha G_3 \rangle &: \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1 + W[3] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12}, T + G_3 \rangle &: \sim 0, W[3], \sim W[1, 2], W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3]; \\ \langle J_{12} + \alpha G_3, T + G_3 \rangle &: W[3], W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12} + G_3, T \rangle &: W[3], W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3]; \\ \langle J_{12} + P_3, T \rangle &: \sim 0, \sim W[1, 2], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2]; \\ \langle J_{12} + \alpha P_3, T + G_3 \rangle &: 0, W[1, 2], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2]. \end{aligned}$$

*The written algebras are not mutually conjugated.*

**Theorem 6.3.** *The subalgebras of the algebra  $A\tilde{G}(3)$  are exhausted with respect to  $Sch(3)$  conjugation by the subalgebras of the algebra  $AG(2)$  (see [2]), by the algebras preceded by the sign  $\sim$  in Theorems 6.1 and 6.2, by algebras obtained from algebras written in Theorems 6.1 and 6.2 by adding the generator  $M$ , and by the following algebras:*

$$\begin{aligned} \langle T \pm M, P_1, P_2, P_3 \rangle; \\ \langle J_{12} + \alpha M \rangle &: W[3], W[1, 3], W[1, 2] + V[3] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12} + T \pm \alpha M \rangle &: W[3], W[1, 3] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12} + \alpha M, T \rangle &: W[3], W[1, 3] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12} + \alpha M, T + G_3 \rangle &: 0, W[1, 2] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12} + \alpha P_3 + \beta M, T \pm M \rangle &: 0, W[1, 2] \ (\alpha > 0, \beta > 0); \\ \langle J_{12} + \alpha P_3, T \pm M \rangle &: 0, W[1, 2] \ (\alpha > 0); \\ \langle J_{12} + P_3 + \alpha M, T \rangle &: 0, W[1, 2] \ (\alpha > 0); \\ A0(3) \oplus \langle T \pm M \rangle &: 0, W[1, 3]. \end{aligned}$$

*The written algebras are not mutually conjugated.*

**Theorem 6.4.** *Let  $\alpha \in R, \alpha > 0$ . The subalgebras of the algebra  $ASch(3)$  which are nonconjugated to subalgebras of the algebras  $AG(3)$  and  $ASch(2)$  are exhausted with respect to  $Sch(3)$  conjugation by the following algebras:*

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &: \sim W[1, 3], \sim \langle G_1, P_2, P_3 \rangle, \langle G_1, P_1 + \alpha P_2, P_3 \rangle, \langle G_1, G_2, P_1 + \alpha P_3, P_2 \rangle, \\ \langle G_1, G_2, P_1, P_3 \rangle, V[1] + W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ \langle S + T, G_1 - \lambda^{-1} P_2, G_2 + \lambda P_1, G_3, P_3 \rangle \ (0 < \lambda \leq 1); \langle S + T \rangle \notin \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ \langle J_{12} + \alpha D \rangle &: \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], W[1, 2] + V[3], W[1, 2] + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \\ \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ \langle S + T + \alpha J_{12} \rangle &: \overline{\mathfrak{M}}[3], \mathfrak{L}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3], \mathfrak{N}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\ \langle S + T + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \alpha P_3, G_2 - P_1 - \alpha G_3 \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle S + T + J_{12} \rangle: & \langle G_1 + P_2 \rangle + \overline{\mathfrak{M}}[3], \langle G_1 + P_2 \rangle + \mathfrak{N}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3]; \\
\langle D, T \rangle: & \sim W[1, 3], V[1, j] + W[1, 3] \quad (j = 1, 2, 3); \\
\langle J_{12} + \alpha D, T \rangle: & \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], W[1, 2] + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
\langle J_{12}, D \rangle: & \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], \sim W[1, 2] + V[3], W[1, 2] + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \\
& \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
\langle J_{12}, S + T \rangle: & \overline{\mathfrak{M}}[3], \mathfrak{L}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
\langle J_{12}, D, T \rangle: & \sim W[3], \overline{\mathfrak{M}}[3], \sim W[1, 3], W[1, 2] + \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 2] + W[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
ASL(2, R) \oplus & \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \langle J_{12} \rangle \oplus ASL(2, R): \overline{\mathfrak{M}}[3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
AO(3) \oplus \langle D \rangle: & \sim 0, \sim W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; AO(3) \oplus \langle S + T \rangle: \sim 0, \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
A(3) \oplus \langle D, T \rangle: & \sim 0, \sim W[1, 3], \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; AO(3) \oplus ASL(2, R): \sim 0, \overline{\mathfrak{M}}[1, 3]; \\
\langle S + T + J_{12} + \alpha(G_1 + P_2) \rangle: & \overline{\mathfrak{M}}[3], \langle G_2 - P_1 \rangle + \overline{\mathfrak{M}}[3], \mathfrak{N}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3], \langle G_2 - P_1 \rangle + \mathfrak{N}_1 + \overline{\mathfrak{M}}[3].
\end{aligned}$$

The written algebras are not mutually conjugated.

**Theorem 6.5.** Let  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ , and  $\alpha > 0, \beta \neq 0$ . The subalgebras of the algebra  $ASch(3)$  are exhausted with respect to  $\widetilde{Sch}(3)$  conjugation by subalgebras of the algebra  $A\widetilde{G}(3)$ , by subalgebras of the algebra  $ASch(2)$  (see [2]), by algebras preceded by the sign  $\sim$  in Theorem 6.4, by algebras obtained from algebras written in Theorem 6.4 by adding the generator  $M$ , and by the following algebras:

$$\begin{aligned}
\langle D + \beta M \rangle: & W[1, 3], V[1] + W[2, 3]; \langle J_{12} + \alpha D + \beta M \rangle: W[3], W[1, 3], W[1, 2] + V[3]; \\
\langle S + T + 2J_{12} + \beta M, G_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2}G_3 \rangle: & \\
\langle D + \beta M, T \rangle \oplus & W[1, 3]; \langle J_{12} + \alpha M, D \rangle: W[3], W[1, 3], W[1, 2] + V[3]; \\
\langle J_{12} + \alpha M, D + \beta M \rangle: & W[3], W[1, 3], W[1, 2] + V[3]; \\
\langle J_{12}, D + \beta M \rangle: & W[3], W[1, 3], W[1, 2] + V[3]; \\
\langle J_{12} + \alpha D + \beta M, T \rangle: & W[3], W[1, 3]; \langle J_{12} + \alpha M, D + \gamma M, T \rangle: W[3], W[1, 3]; \\
\langle J_{12}, D + \beta M, T \rangle: & W[3], W[1, 3]; AO(3) \oplus \langle D + \beta M \rangle: 0, W[1, 3]; \\
AO(3) \oplus \langle S + T + \beta M \rangle; & AO(3) \oplus \langle D + \beta M, T \rangle: 0, W[1, 3].
\end{aligned}$$

The written algebras are not mutually conjugated.

## 7. Conclusions

The results of the present paper may be summarized in the following way.

(1) The completely reducible subalgebras of the algebra  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  have been identified (Theorem 3.1).

(2) The subalgebras of  $AO(n) \oplus ASL(2, R)$  which possess only splitting extensions in the algebra  $ASch(n)$  have been described (Theorem 4.1).

(3) We have established that the description of the splitting subalgebras of the algebra  $ASch(n)$  whose projections onto  $ASL(2, R)$  are not equal to  $\langle S + T \rangle$  is reduced to the description of the splitting subalgebras of  $ASch(n)$  whose projections onto  $AO(n)$  are equal to zero or to primary algebras (Theorem 4.2).

(4) The maximal Abelian subalgebras and the one-dimensional subalgebras of the algebras  $ASch(n)$  and  $A\widetilde{Sch}(n)$  have been explicitly found (the corollaries to Theorems 5.1 and 5.2).

(5) The classification of the subalgebras of  $ASch(3)$  and  $A\widetilde{Sch}(3)$  with respect to  $Sch(3)$  conjugation and  $\widetilde{Sch}(3)$  conjugation, respectively, has been carried out (Theorems 6.1–6.5). This classification gives the possibility to construct the wide

classes of exact solutions of the nonlinear, Schrödinger-type equations in [15–18],

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Delta \Psi + \lambda |\Psi|^{3/4} \Psi = 0,$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Delta \Psi + \lambda \frac{\partial(\Psi^* \Psi)}{\partial X_a} \frac{\partial(\Psi^* \Psi)}{\partial X_a} (\Psi^* \Psi)^{-2} \cdot \Psi = 0,$$

which are invariant under  $Sch(3)$ .

### Acknowledgment

We are grateful to the referee for his valuable remarks.

1. Fushchych W.I., Cherniha R.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, 3491.
2. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., *Ann. Sci. Math. Quebec*, 1978, **2**, 81.
3. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Symmetry of Maxwell's equations*, Dordrecht, Reidel, 1987.
4. Boyer C., Sharp R.T., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 1439.
5. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., The continuous subgroups of the generalized Galilei group. I, Preprint 85.19, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985.
6. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, 2893.
7. Barannik L.F., Barannik A.F., Subalgebras of the generalized Galilei algebra, in *Group-Theoretical Studies of Equations of Mathematical Physics*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985.
8. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., *Ukr. Math. J.*, 1986, **38**, 67.
9. Barannik L.F., Fushchych W.I., *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, 1445.
10. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1957.
11. Goursat E., *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1889, **6**, 9.
12. Jacobson N., *Lie algebras*, New York, Dover, 1962.
13. Barannik L.F., Fushchych W.I., On continuous subgroups of the generalized Schrödinger groups, Preprint 87.16, Kyiv, Institute of Mathematics, 1987.
14. Lang S., *Algebra*, MA, Addison-Wesley, 1965.
15. Fushchych W.I., Symmetry in the problems of the mathematical physics, in *Algebraic Studies in Mathematical Physics*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1982.
16. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, L929.
17. Fushchych W.I., Cherniha R.M., Exact solutions of multidimensional nonlinear Schrödinger-type equations, Preprint 86.85, Kyiv, Institute of Mathematics, 1986.
18. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Theoret. Mat. Fiz.*, 1983, **56**, 387.

# Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2, 3)$ и симметричная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ЛАГНО, В.И. ФУЩИЧ

Настоящая работа является продолжением статьи [1].

**1. Классификация подалгебр алгебры  $AP(2, 2)$ .** В качестве базиса алгебры  $AO(2, 2)$  возьмем систему таких генераторов:

$$B_1 = -\frac{1}{2}(J_{14} + J_{23}), \quad B_2 = \frac{1}{2}(J_{24} - J_{13}), \quad B_3 = \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34}),$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(J_{14} - J_{23}), \quad C_2 = -\frac{1}{2}(J_{13} + J_{24}), \quad C_3 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}),$$

Пусть  $AP(1, 2) = \langle P_1, P_3, P_4 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a, b = 1, 3, 4 \rangle$ ,  $AP(2, 1) = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a, b = 1, 2, 3 \rangle$ . Проведем на основании [2] классификацию подалгебр алгебры  $AP(2, 2)$  относительно эквивалентности.

**Теорема 1.** *Расщепляемые подалгебры алгебры  $AP(2, 2)$  с точностью до эквивалентности исчерпываются расщепляемыми подалгебрами  $K \subset AP(1, 2)$ ,  $L \subset AP(2, 1)$ , алгебрами  $K \oplus \langle P_2 \rangle$ ,  $L \oplus \langle P_4 \rangle$  и такими алгебрами:*

$$F_1 = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle, \quad F_2 = \langle B_1 - B_3 \rangle,$$

$$F_j = \langle B_2 \rangle: 0, \langle P_1 + P_3 \rangle, \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle, \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle, \quad j = 3, 4, 5, 6,$$

$$F_j = \langle B_3 \rangle: 0, \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle, \quad j = 7, 8,$$

$$F_j = \langle -B_1 + B_3 + C_2 \rangle: 0, \langle P_1 - P_3 \rangle, \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle, \quad j = 9, 10, 11,$$

$$F_{12} = \langle B_1 - B_3 + C_3 \rangle, \quad F_{13} = \langle B_1 - B_3 - C_3 \rangle,$$

$$F_j = \langle B_2 + eC_2 \rangle: 0, \langle P_1 + P_3 \rangle, \langle P_2 + P_4 \rangle, \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle, \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle,$$

$$0 < e < 1, \quad j = 14, \dots, 18,$$

$$F_{19} = \langle B_2 + C_2, P_2 + P_4 \rangle, \quad F_j = \langle B_2 - eC_3 \rangle: 0, \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle, \quad e > 0, \quad j = 20, 21,$$

$$F_{22} = \langle B_3 + eC_3 \rangle, \quad 0 < |e| < 1, \quad F_{23} = \langle B_1 - B_3, B_2 \rangle,$$

$$F_{24} = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle, \quad F_{25} = \langle B_1 - B_3, C_3 \rangle, \quad F_{26} = \langle B_2, C_2 \rangle, \quad F_{27} = \langle B_2, C_3 \rangle,$$

$$F_{28} = \langle B_3, C_3 \rangle, \quad F_{29} = \langle B_2 + dC_2, B_1 - B_3 \rangle, \quad d > 0, \quad d \neq 1,$$

$$F_{30} = \langle B_2 - dC_3, B_1 - B_3 \rangle, \quad d > 0, \quad F_{31} = \langle B_1 - B_3 - C_2, C_1 - C_3 \rangle,$$

$$F_{32} = \langle B_1 - B_3, B_2 - C_2, C_1 - C_3 \rangle, \quad F_{33} = AO(2, 2).$$

**Доказательство.** Среди эквивалентных расщепляемых подалгебр алгебры  $AP(2, 2)$  из перечня, приведенного в [2], выбираем одну подалгебру, а остальные исключаем. Поскольку все случаи в чем-то аналогичны, ограничимся рассмотрением только нескольких, наиболее характерных, случаев.

Так как

$$B_1 - B_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_3)(\partial_2 + \partial_4) + \frac{1}{2}(x_2 - x_4)(\partial_1 - \partial_3),$$

то

$$\langle B_1 - B_3, P_1 - P_3 \rangle \approx \langle P_2 + P_4, P_1 - P_3 \rangle,$$

$$\langle B_1 - B_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle \approx \langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle.$$

Далее ранги алгебр  $\langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ ,  $\langle B_1 - B_3, B_2, C_2 \rangle$ ,  $\langle B_1 - B_3, B_2 + dC_2, C_1 - C_3 \rangle$  равны 3. Поскольку эти алгебры суть подалгебры  $AO(2, 2)$ , то функция  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$  является их инвариантом. Следовательно, рассматриваемые подалгебры эквивалентны алгебре  $AO(2, 2)$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Нерасщепляемые подалгебры алгебры  $AP(2, 2)$  исчерпываются с точностью до эквивалентности нерасщепляемыми подалгебрами  $K \subset AP(1, 2)$ ,  $L \subset AP(2, 1)$ , алгебрами  $K \oplus \langle P_2 \rangle$ ,  $L \oplus \langle P_4 \rangle$  и такими алгебрами:*

$$K_j = \langle B_1 - B_3 + P_1 \rangle: 0, \langle P_1 - P_3 \rangle, \langle P_1 - P_3, P_2 - P_4 \rangle, j = 1, 2, 3,$$

$$K_4 = \langle B_1 - B_3 + P_2, P_1 - P_3 \rangle,$$

$$K_5 = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_3, P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_4 \rangle, \alpha > 0,$$

$$K_j = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_4 \rangle: 0, \langle P_1 - P_3 \rangle, j = 6, 7,$$

$$K_j = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_2 \rangle: 0, \langle P_1 - P_3 \rangle, j = 8, 9,$$

$$K_{10} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_1, P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_4 \rangle, \alpha > 0,$$

$$K_j = \langle B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle: 0, \langle P_1 + P_3 \rangle, j = 11, 12,$$

$$K_j = \langle B_2 + C_2 + P_2 \rangle: \langle P_2 + P_4 \rangle, \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle, j = 13, 14,$$

$$K_{15} = \langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, C_1 - C_3 \rangle, K_{16} = \langle B_1 - B_3 + P_4, C_1 - C_3 - P_4 \rangle,$$

$$K_{17} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 - P_4 \rangle,$$

$$K_{18} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4 \rangle, \alpha > 0,$$

$$K_{19} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 \rangle, \alpha > 0,$$

$$K_{20} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4 \rangle,$$

$$K_j = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_2 - P_4 \rangle: 0, \langle P_1 - P_3 \rangle, j = 21, 22,$$

$$K_{23} = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_4, P_2 + P_4 \rangle,$$

$$K_{24} = \langle B_1 - B_3, 3B_2 + C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4 \rangle.$$

**Доказательство.** Если ранг алгебры  $L \subset AP(2, 2)$  равен  $r$ , а генераторы  $L$  имеют вид  $\sum_{i=1}^r f_i(x_1, \dots, x_s) \partial_i$ , где  $s \geq r$ , то  $L \approx \langle P_1, \dots, P_r \rangle$ .

Отсюда вытекает

$$\langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3 \rangle \approx \langle P_2, P_4, P_1 - P_3 \rangle,$$

$$\langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2 \rangle \approx \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle, \beta > 0.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично или по схеме, приведенной в доказательстве теоремы 1. Теорема доказана.

**2. Инварианты подалгебр алгебры  $AP(2, 2)$  и подалгебр коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ .** Пусть  $y_1 = x_1 + x_3$ ,  $\bar{y}_1 = x_1 - x_3$ ,  $y_2 = x_2 + x_1$ ,  $\bar{y}_2 = x_2 - x_4$ . Запись  $L : f_1(x), \dots, f_s(x)$  означает, что функции  $f_1(x), \dots, f_s(x)$  образуют полную систему инвариантов алгебры  $L$ . В силу результатов п.1 и [3] ограничимся подалгебрами, описанными в теоремах 1 [1], 1, 2.

а) Инварианты подалгебр коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 2)$ .

$$F_5: \bar{y}_1 \bar{y}_2; F_6: \bar{y}_1 y_2^{-1}; F_8: \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2; F_{11}: 2 \ln \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \bar{y}_2^{-1}; F_{17}: \bar{y}_1^{1-e} \bar{y}_2^{1+e};$$

$$F_{18}: \bar{y}_1^{1-e} y_2^{1+e}; F_{21}: \arctg(y_2 \bar{y}_1^{-1}) + \frac{e}{2} \ln(\bar{y}_1^2 + y_2^2); F_{33}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2};$$

$$K_3: y_1^2 + 2y_2; K_5: \frac{\alpha}{2} y_1^2 + \alpha x_2 - x_4; K_{10}: \frac{1}{2} y_1^2 - \alpha x_2 + x_4; K_{14}: \ln \bar{y}_1 - \bar{y}_2;$$

$$K_{22}: \frac{1}{2} (y_2 \bar{y}_2 + y_2^2 y_1^{-1} + \frac{1}{4} \bar{y}_2^2 y_1)^{1/2}; K_{23}: (y_1 \bar{y}_1 + \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2^2)^{1/2};$$

$$K_{24}: (y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \bar{y}_2^2 y_1^{-1})^{1/2}.$$

б) Инварианты подалгебр коразмерности 2 алгебры  $AP(2, 2)$ .

$$F_1: \bar{y}_1, \bar{y}_2; F_4: (\bar{y}_2 y_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln(\bar{y}_1 y_2^{-1}); F_{10}: \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2, \ln y_1 + \frac{1}{2} y_2 y_1^{-1};$$

$$F_{15}: (y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln(\bar{y}_1^{-e} \bar{y}_2^{1+e}); F_{16}: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln(y_1^{e-1} \bar{y}_2^{e+1});$$

$$F_{19}: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, \bar{y}_2; F_{23}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \bar{y}_2 y_1^{-1};$$

$$F_{24}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{4} \ln(y_1 \bar{y}_2); F_{25}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{4} \ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2);$$

$$F_{26}: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, (y_2 \bar{y}_2)^{1/2}; F_{27}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, y_1 y_2 - \bar{y}_1 \bar{y}_2;$$

$$F_{28}: (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}; F_{29}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{4} \ln(y_1^{d-1} \bar{y}_2^{d+1});$$

$$F_{30}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \arctg y_1 \bar{y}_2^{-1} + \frac{d}{4} \ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2);$$

$$F_{31}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln y_1 - \frac{1}{4} y_2 y_1^{-1}; F_{32}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln y_1;$$

$$K_2: y_2 + \frac{1}{2} y_1^2, \frac{1}{4} \bar{y}_2; K_4: y^{1/2}, x_4 + \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2; K_7: y_1, x_2 + y_1 x_4;$$

$$K_9: y_1, x_4 + y_1 x_2; K_{12}: \frac{1}{2} \bar{y}_2, \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2} y_2; K_{13}: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln y_1 + \frac{1}{2} \bar{y}_2;$$

$$F_{15}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + y_2^2 y_1^{-1})^{1/2}, \frac{1}{2} \ln y_1; F_{16}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - 2x_2^2 y_1^{-1} - 2\bar{y}_1)^{1/2}, y_1;$$

$$K_{17}: \frac{1}{2} \{(y_2 - \bar{y}_2(1 - y_1))^2 + (2\bar{y}_1 - \bar{y}_2^2)(1 + (1 - y_1)^2)\}^{1/2}, y_1;$$

$$K_{18}: (y_1 \bar{y}_1 + x_2^2)^{1/2}, d \ln y_1 + x_4; K_{19}: (y_1 \bar{y}_1 - x_4^2)^{1/2}, d \ln y_1 + x_2;$$

$$K_{20}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + 2\bar{y}_2 \ln y_1)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln \bar{y}_2;$$

$$K_{21}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 + y_2^2 y_1^{-1})^{1/2}, (y_1 \bar{y}_2 + 2y_2) y_1^{-1/2}.$$

в) Инварианты подалгебр коразмерности 3 алгебры  $AP(2, 2)$ .

$$F_2: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln y_1, \frac{1}{2} \ln \bar{y}_2; F_3: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, (y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln(y_1 \bar{y}_2^{-1});$$

$$F_7: (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \arcsin(x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}) - \arcsin(x_4(x_3^2 + x_4^2)^{-1/2});$$

$$F_9: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, y_1 \bar{y}_2, \frac{1}{2} \ln y_1 + \frac{1}{4} y_2 y_1^{-1};$$

$$F_{12}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, y_1^2 + \bar{y}_2^2, \bar{y}_1 \bar{y}_2^{-1} - y_1(y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2)(y_1^2 \bar{y}_2 + \bar{y}_2^3)^{-1} - 2 \arcsin(\bar{y}_2(y_1^2 + \bar{y}_2^2)^{-1/2});$$

$$F_{13}: (y_1 y_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, y_1^2 + \bar{y}_2^2, \bar{y}_1 \bar{y}_2^{-1} (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2) y_1 (y_1^2 \bar{y}_2 + \bar{y}_2^3)^{-1} + 2 \arcsin(\bar{y}_2(y_1^2 + \bar{y}_2^2)^{-1/2});$$

$$F_{14}: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, (y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, \frac{1}{2} \ln(\bar{y}_1^{-e} \bar{y}_2^{1+e});$$

$$F_{20}: (y_1 y_1 + y_2 \bar{y}_2)^{1/2}, y_1 y_2 - \bar{y}_1 \bar{y}_2, e \ln(y_1^2 + \bar{y}_2^2) - 2 \arctg(\bar{y}_2 y_1^{-1});$$

$$F_{22}: (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, (1 - e) \arcsin(x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}) - (1 + e) \arcsin(x_4(x_3^2 + x_4^2)^{-1/2});$$

$$K_1: x_3 + \frac{1}{2} y_1 \bar{y}_2, \frac{1}{4} y_2 + \frac{1}{8} y_1^2 \bar{y}_2; K_6: (y_1 \bar{y}_1 + x_2^2)^{1/2}, y_1, x_2 + y_1 x_4;$$

$$K_8: (y_1 \bar{y}_1 - x_4^2)^{1/2}, y_1, x_4 + y_1 x_2; K_{11}: (y_1 \bar{y}_1)^{1/2}, \bar{y}_2, \frac{1}{4} y_2 + \frac{1}{2} \ln y_1.$$

г) Инварианты подалгебр коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ . Здесь  $y_1 = x_1 + x_5$ ,  $\bar{y}_1 = x_1 - x_5$ ,  $y_2 = x_2 + x_4$ ,  $\bar{y}_2 = x_2 - x_4$ .

$$\mathcal{L}_1: y_2 - \bar{y}_1 x_3 - \frac{1}{4} (2d - \bar{y}_1^2) \bar{y}_2 + \frac{1}{4} \beta (2\alpha \bar{y}_1 - \frac{1}{3} \bar{y}_1^3); \mathcal{L}_2: x_3 - \frac{1}{2} \bar{y}_1 \bar{y}_2;$$

$$\mathcal{L}_3: x_3 - \frac{1}{4} (\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2); \mathcal{L}_4: x_3 + \frac{1}{4} (\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2); \mathcal{L}_5: \alpha \beta \ln \bar{y}_1 + \frac{1}{2} \beta y_2 \bar{y}_1^{-1} - \beta x_3 + \frac{1}{2} \bar{y}_1 \bar{y}_2;$$

$$\mathcal{L}_6: (\bar{y}_1 \bar{y}_2 x_3 - y_1 \bar{y}_1 - \frac{1}{4} \bar{y}_1^2 \bar{y}_2^2)^{1/2}; \mathcal{L}_7: x_3 - \alpha \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2} \bar{y}_1 \bar{y}_2; \mathcal{L}_8: x_3 - \frac{1}{2} \bar{y}_1 \bar{y}_2;$$

$$\mathcal{L}_9: x_3 - \alpha \ln \bar{y}_1 - \frac{1}{2} y_2 \bar{y}_1^{-1}; \mathcal{L}_{10}: x_3 - \frac{\mu}{4} \ln(2y_2 - \bar{y}_1^2);$$

$$\mathcal{L}_{11}: x_3 - \frac{1}{4} \bar{y}_2^2 + \frac{\alpha}{2} \ln \bar{y}_2; \mathcal{L}_{12}: \frac{1}{2} (2y_2 \bar{y}_2 - 2x_3^2 - \bar{y}_1^2 \bar{y}_2)^{1/2};$$

$$\mathcal{L}_{13}: \frac{1}{\sqrt{2}} (y_1 - x_3 \bar{y}_2 - \frac{\beta}{2} \bar{y}_1 + \frac{1}{4} \bar{y}_1 \bar{y}_2^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta \bar{y}_2 - \frac{\beta}{8} \bar{y}_2^2 - \frac{1}{12} \alpha \bar{y}_2^3 + \frac{1}{32} \bar{y}_2^4);$$

$$\mathcal{L}_{14}: x_3 - \frac{1}{2} \bar{y}_1 \bar{y}_2 + \frac{1}{4} \alpha \bar{y}_2^2 - \frac{1}{12} \bar{y}_2^3; \mathcal{L}_{15}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - x_3^2 - y_1^2 \bar{y}_2^{-2} - 2x_3 y_1 \bar{y}_2^{-1})^{1/2};$$

$$\mathcal{L}_{16}: x_3 + \frac{1}{2} \bar{y}_1^2 \bar{y}_2^{-1}; \mathcal{L}_{17}: x_3 + \frac{\alpha}{2} \ln y_2 + \frac{1}{2} \bar{y}_2^2 \bar{y}_1^{-1};$$

$$\mathcal{L}_{18}: (y_1 \bar{y}_1 - x_3^2 + y_2 \bar{y}_2 - 2\gamma x_3 - \gamma \bar{y}_1^2 \bar{y}_2^{-1} - \gamma^2)^{1/2}; \mathcal{L}_{19}: (y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 - x_3^2 + \bar{y}_1^2 \bar{y}_2^{-1})^{1/2};$$

$$\mathcal{L}_{20}: x_3 + \frac{1}{2} \beta \ln(\bar{y}_1 \bar{y}_2) + \frac{1}{2} \alpha \ln(\bar{y}_2 \bar{y}_1^{-1}); \mathcal{L}_{21}: x_3 - \alpha \arctg(\bar{y}_2 \bar{y}_1^{-1}) + \frac{1}{2} \beta \ln(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2).$$



Значения  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  для алгебр приведены в теоремах 1, 2 и леммах 1–7 [1].

**3. Симметричная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера.** Если алгебра  $L \subset AP(2,2)$  имеет только один инвариант, то обозначим его через  $\omega$ . Если полная система инвариантов алгебры  $L$  состоит из  $s$ ,  $s = 2, 3$ , инвариантов, то эти инварианты обозначим через  $\omega_1, \dots, \omega_s$ , нумеруя их в том порядке, в каком они выписаны в п. 2.

Уравнение (1) [1] в результате подстановки  $u = \varphi(\omega)$ , которая соответствует алгебрам  $F_j$ ,  $j = 5, 6, 8, 11, 17, 18, 21$ ,  $K_3$ ,  $E_{14}$ , редуцируется к функциональному уравнению  $F(\varphi, 0) = 0$ ; для остальных подалгебр коразмерности 1 алгебры  $AP(2,2)$  получаем уравнение

$$k\varphi'' + l\omega^{-1}\varphi' = F(\varphi, k(\varphi')^2), \quad (1)$$

где  $k = \alpha^2 - 1$ ,  $l = 0$  для  $K_5, K_{10}$ ;  $k = 1/2$ ,  $l = 0$  для  $K_{22}$ ;  $k = 1$ ,  $l = 3$  для  $F_{33}, K_{24}$ ;  $k = 1$ ,  $l = 1$  для  $K_{23}$ .

Пусть  $\varphi_i = \partial\varphi/\partial\omega_i$ ,  $\varphi_{ij} = \partial^2\varphi/\partial\omega_i\partial\omega_j$ . Подстановка  $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ , соответствующая алгебре  $F_1$ , редуцирует уравнение (1) [1] к функциональному уравнению  $F(\varphi, 0) = 0$ . В остальных случаях получаем следующие уравнения:

$$\varphi_{11} + k\omega_1^{-1}\varphi_{12} + l\omega_1^{-1}\varphi_1 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где  $k = -1$ ,  $l = 1$  для  $F_4$ ;  $k = 1 + e$ ,  $l = 1$  для  $F_{15}$ ;  $k = e - 1$ ,  $l = 1$  для  $F_{16}$ ;  $k = 0$ ,  $l = 1$  для  $F_{19}$ ;  $k = 0$ ,  $l = 3$  для  $F_{23}$ ;  $k = 1$ ,  $l = 3$  для  $F_{24}, F_{25}, F_{31}, F_{32}, K_{15}, K_{20}$ ;  $k = d$ ,  $l = 3$  для  $F_{29}, F_{30}$ ;  $k = 1$ ,  $l = 1$  для  $K_{13}$ ;

$$k\varphi_{12} = F(\varphi, k\varphi_1\varphi_2),$$

где  $k = 1$  для  $F_{10}, K_2$ ;  $k = -1$  для  $K_{12}$ ;

$$\varphi_{11} + k\varphi_{22} + \omega_1^{-1}\varphi_1 + k\omega_2^{-1}\varphi_2 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k(\varphi_2)^2),$$

где  $k = 1$  для  $F_{26}$ ;  $k = -1$  для  $F_{28}$ ;

$$\varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + \omega_1^{-1}\varphi_1 = F_1(\varphi, (\varphi_1)^2 + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2 - 4\omega_1^2(\varphi_2)^2)$$

для  $F_{27}$ ;

$$k(1 - \omega_1^2)\varphi_{22} = F(\varphi, k(1 - \omega_1^2)(\varphi_2)^2),$$

где  $k = 1$  для  $K_7$ ;  $k = -1$  для  $K_4, K_9$ ;

$$\varphi_{11} + k\varphi_{22} + 2\omega_1^{-1}(\alpha\varphi_{12} + \varphi_1) = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + k(\varphi_2)^2 + 2\alpha\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где  $k = 1$  для  $K_{19}$ ;  $k = -1$  для  $K_{18}$ ;

$$\varphi_{11} + 2(\omega_2 - 2)\omega_1^{-1}\varphi_{12} + (3 - 2\omega_2^{-1})\omega_1^{-1}\varphi_1 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + 2(\omega_2 - 2)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2)$$

для  $K_{16}$ ;

$$\begin{aligned} (\omega_2 - 1)\varphi_{11} + 2((\omega_2 - 1)^2 + 1)\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 4(\omega_2 - 1)\omega_1^{-1}\varphi_1 = \\ = F(\varphi, (\omega_2 - 1)(\varphi_1)^2 + 2((\omega_2 - 1)^2 + 1)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2) \end{aligned}$$

для  $K_{17}$ ;

$$\varphi_{11} + 8\varphi_{22} + 3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1 = F(\varphi, (\varphi_1)^2 + 8(\varphi_2)^2 + 3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2)$$

для  $K_{21}$ .

При подстановке  $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  уравнение (1) [1] редуцируется к уравнению от трех переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Поскольку

$$\square u = (\square \omega^a) \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_a} + (\omega_{x_\mu}^a \omega_{x^\mu}^b) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_a \partial \omega_b}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = (\omega_{x_\mu}^a \omega_{x^\mu}^b) \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_a} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_b},$$

где  $\omega_{x_\mu}^a = \partial \omega_a / \partial x_\mu$ , то для записи редуцированного уравнения достаточно указать вид  $\square u$ . Ниже приведены значения для каждой подалгебры коразмерности 3 алгебры  $AP(2, 2)$ .

$$\begin{aligned} F_2 &: \varphi_{11} + \omega_1^{-1}(\varphi_{12} + \varphi_{13} + 3\varphi_1); \\ F_3 &: \varphi_{11} + \varphi_{22} + \omega_1^{-1}(\varphi_{13} + \varphi_1) - \omega_2^{-1}(\varphi_{23} - \varphi_2); \\ F_7 &: \varphi_{11} - \varphi_{22} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2})\varphi_{33} + \omega_1^{-1}\varphi_1 - \omega_2^{-1}\varphi_2; \\ F_9 &: \varphi_{11} + (4\omega_2\varphi_{12} + \varphi_{13} + 3\varphi_1)\omega_1^{-1} + \varphi_{23}; \\ F_{12} &: \varphi_{11} - 4(\omega_1^2 - 2\omega_2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + \omega_1^{-1}(4\omega_2\varphi_{12} + 3\varphi_1); \\ F_{13} &: \varphi_{11} - 4(2\omega_2 + \omega_1^2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1; \\ F_{14} &: \varphi_{11} + \varphi_{22} + \omega_1^{-1}((1 - e)\varphi_{13} + \varphi_1) + \omega_2^{-1}((1 + e)\varphi_{23} + \varphi_2); \\ F_{20} &: \varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} - 8\varphi_{23} + \omega_1^{-1}(4e\omega_2\varphi_{12} - 8\varphi_{23} + 3\varphi_1); \\ F_{22} &: \varphi_{11} - \varphi_{22} + \{(1 - e)^2\omega_1^{-2} - (1 + e)^2\omega_2^{-2}\}\varphi_{33} + \varphi_1 - \varphi_2; \\ K_1 &: -(1 + \omega_3)\varphi_{11} + \varphi_{23}; \\ K_6 &: \varphi_{11} + (1 - \omega_2^2)\varphi_{33} + 2\omega_1^{-1}(\omega_2\varphi_{12} + \omega_3\varphi_{13} + \varphi_1); \\ K_8 &: \varphi_{11} + (\omega_2^2 - 1)\varphi_{33} + 2\omega_1^{-1}(\omega_2\varphi_{12} + \omega_3\varphi_{13} + \varphi_1); \\ K_{11} &: \varphi_{11} + \varphi_{23} + \omega_1^{-1}(\varphi_{13} + \varphi_1). \end{aligned}$$

Подстановка  $u = \varphi(\omega)$ , соответствующая подалгебрам коразмерности 1 алгебры  $AP(2, 3)$ , редуцирует уравнение (1) [1] к обыкновенному дифференциальному уравнению (1), где  $k = -2\alpha$ ,  $l = 0$  для  $\mathcal{L}_1$ ;  $k = \beta(1 - \beta)$ ,  $l = 0$  для  $\mathcal{L}_5$ ;  $k = -1$ ,  $l = -1$  для  $\mathcal{L}_6$ ;  $k = 1/2$ ,  $l = 2$  для  $\mathcal{L}_{12}$ ;  $k = 1$ ,  $l = 4$  для  $\mathcal{L}_{15}$ ,  $\mathcal{L}_{18}$ ,  $\mathcal{L}_{19}$ ;  $k = -\beta$ ,  $l = 0$  для  $\mathcal{L}_{13}$ ;  $k = -1$ ,  $l = 0$  для  $\mathcal{L}_j$ ,  $j = 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 20, 21$ .

1. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фушич В.И., Подалгебры алгебры Пуанкаре  $AP(2, 3)$  и симметричная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II, *Укр. мат журн.*, 1988, **40**, № 4, 411-424.
2. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фушич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре  $AP(2, n)$ , Препринт № 85.89, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 50 с.
3. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791-806.

# Принцип относительности Галилея и нелинейные уравнения в частных производных

В.И. ФУЩИЧ

**1. Симметрия нелинейных уравнений.** Рассмотрим нелинейные уравнения параболического типа для действительной функции  $u$  и комплексной функции  $\psi$

$$A(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u + B(t, x, u, u_1), \quad (1)$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = A_{ab}(t, x, \psi, \psi^*, \psi_1, \psi_1^*) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_a \partial x_b} + B(t, x, \psi, \psi^*, \psi_1, \psi_1^*), \quad (2)$$

$u = u(t, x)$ ,  $\psi = \psi(t, x)$ , \* — означает комплексное сопряжение,

$$u_1 = \left( \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad a, b = \overline{1, n},$$

$$\psi_1 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_0}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right), \quad x_0 \equiv t,$$

$$\psi_1^* = \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x_0}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi^*}{\partial x_n} \right).$$

В том случае, когда  $A_{ab} = \lambda \delta_{ab}$ ,  $\lambda$  — произвольный параметр,  $\delta_{ab}$  — символ Кронекера и  $B = 0$ , уравнение (2) совпадает с линейным уравнением Шредингера

$$i \psi_t = \lambda \Delta \psi, \quad \psi_t \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3)$$

Будем говорить, что для уравнений (1), (2) выполняется принцип относительности Галилея, если они инвариантны относительно преобразований Галилея [1–3]

$$t \rightarrow t' = t, \quad x_a \rightarrow x'_a = x_a + v_a t, \quad (4)$$

$v_a$  — параметры преобразования, т.е. компоненты скорости движения одной инерциальной системы отсчета относительно другой.

Хорошо известно, что максимальной локальной (в смысле С. Ли) группой инвариантности уравнения (3) является обобщенная группа Галилея  $G_2(1, n)$ . Базисные элементы алгебры Ли  $AG_2(1, n)$  группы  $G_2(1, n)$  имеют вид

$$P_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu, \nu = \overline{1, n}, \quad (5a)$$

$$J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n}, \quad (5b)$$

$$G_a = t\partial_a - \frac{1}{2\lambda}x_a, \quad (5c)$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}, \quad (5d)$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4\lambda} - \frac{nt}{2}. \quad (5e)$$

Обозначим символом  $AG(1, n) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a \rangle$  алгебру Ли группы Галилея  $G(1, n)$ , базисные элементы которой задаются формулами (5a)–(5c). Алгебры Ли с базисными элементами (5a)–(5d), (5a)–(5e) обозначим, соответственно, символами

$$AG_1 \equiv \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D \rangle, \quad (6)$$

$$AG_2 \equiv \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D, \Pi \rangle. \quad (7)$$

Из приведенного следует, что для линейного уравнения теплопроводности (1) ( $A = 1, B = 0$ ) и уравнения (3) выполняется принцип относительности Галилея, если при преобразовании (4) функции  $u$  и  $\psi$  преобразуются следующим образом

$$u \rightarrow u' = \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda}v_a \left( x_a + \frac{1}{2}v_a t \right) \right\} u, \quad (8)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp \left\{ -\frac{i}{2\lambda}v_a \left( x_a + \frac{1}{2}v_a t \right) \right\} \psi. \quad (9)$$

Полное описание нелинейных уравнений вида (1), для которых выполняется принцип относительности Галилея, дает

**Теорема 1 [3].** Уравнение (1) инвариантно относительно преобразований (4), (8) тогда и только тогда, когда

$$A(t, x, u) = g_1(t, w), \quad w = u \exp \left\{ \frac{\lambda^{-1}|x|^2}{4t} \right\}, \quad (10)$$

$$B(t, x, u, u) = u g_2(w, w_1, \dots, w_n) + \{g_1(t, w) - \lambda\} \left\{ \frac{x_a u_a}{t} + \frac{\lambda^{-1}|x|^2}{4t^2} u \right\}, \quad u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a}, \quad (11)$$

$$w_a = \frac{\partial w}{\partial x_a} = \left( u_a + \frac{\lambda^{-1}x_a u}{t} \right) \exp \left\{ \frac{\lambda^{-1}|x|^2}{4t} \right\}, \quad (12)$$

$g_1, g_2$  — произвольные гладкие функции.

**Теорема 2 [6].** Все уравнения вида (2), инвариантные относительно алгебры  $AG_2(1, n)$ , эквивалентны уравнению

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \lambda \Delta \psi + (\psi \psi^*)^{2/n} \psi F(\theta), \quad (13)$$

$$\theta = (\psi \psi^*)^{(-2n-2)/n} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial x_a} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial x_a}, \quad (14)$$

$F(\theta)$  — произвольная гладкая функция.

В трехмерном случае наиболее простые уравнения выглядят как [4, 5]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \lambda \Delta \psi + \lambda_1 |\psi|^{4/3} \psi(t, x), \quad x \in R^3, \quad (15)$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \lambda \Delta \psi + \lambda_2 |\psi|^{-4} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial x_a} \frac{\partial |\psi|^2}{\partial x_a}, \quad (16)$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  — произвольные константы.

Среди множества уравнений вида [1]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \lambda \Delta \psi + F(\psi, \psi^*), \quad (17)$$

$F$  — произвольная гладкая функция, только уравнение (15) инвариантно относительно алгебры  $AG_2(1, 3)$ .

Итак, приведенные теоремы дают явное описание классов нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, инвариантных относительно группы Галилея  $G(1, n)$  и ее расширений.

**2. Редукция уравнения (15).** Воспользуемся теперь симметричными свойствами нелинейного уравнения (15) для его редукции, т.е. приведения многомерного уравнения к набору уравнений с меньшим числом переменных.

Решения уравнения (15) ищем в виде [1]

$$\psi(x) = f(x) \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (18)$$

где  $\varphi$  — функция, подлежащая определению, зависит только от трех новых переменных  $\omega_1 = \omega_1(t, x)$ ,  $\omega_2 = \omega_2(t, x)$ ,  $\omega_3 = \omega_3(t, x)$ . Явный вид функции  $f(x)$  находится из требования, чтобы в уравнение для  $\varphi(\omega)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  не входили явно переменные  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Инвариантные переменные  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  являются первыми интегралами соответствующих уравнений Эйлера–Лагранжа.

Используя инвариантность уравнения (15) относительно группы  $G_2(1, 3)$ , получены выражения для  $f(x)$  и  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , при которых анзац (18) редуцирует четырехмерное уравнение к трехмерному уравнению. Явные выражения для  $f(x)$  и  $\omega(x)$  задаются формулами [4]:

$$f(x) = (1 - x_0^2)^{-3/4} \exp \left\{ \frac{1}{2} i m x_0 x^2 (1 - x_0^2)^{-1} \right\}, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x) (1 - x_0^2)^{-1/2} \quad (19)$$

$$\omega_2 = x^2 (1 - x_0^2)^{-1}, \quad \omega_3 = \arctg x_0 + \arctg \{ (\beta \cdot x) (\gamma \cdot x)^{-1} \};$$

$$f(x) = x_0^{-3/2} \exp \left( -\frac{i}{2} x^2 x_0^{-1} \right), \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x) x_0^{-1}, \quad (20)$$

$$\omega_2 = x^2 x_0^{-2}, \quad \omega_3 = x_0^{-1} + \arctg \{ (\beta \cdot x) (\gamma \cdot x)^{-1} \};$$

$$f(x) = x_0^{-3/4}, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x) x_0^{-1/2}, \quad (21)$$

$$\omega_2 = x^2 x_0^{-1}, \quad \omega_3 = -\ln x_0 + \arctg \{ (\beta \cdot x) (\gamma \cdot x)^{-1} \};$$

$$f(x) = x_0^{-3/4}, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x) x_0^{-1/2}, \quad \omega_2 = (\beta \cdot x) x_0^{-1/2}, \quad (22)$$

$$\omega_3 = (\gamma \cdot x) x_0^{-1/2}, \quad (\beta \cdot x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3;$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x), \quad \omega_2 = x^2, \\ \omega_3 &= -x_0 + \operatorname{arctg} \{(\beta \cdot x)(\gamma \cdot x)^{-1}\}; \end{aligned} \quad (23)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha \cdot \beta) = (\beta \cdot \gamma) = (\gamma \cdot \alpha) = 0.$$

Редуцированные уравнения, полученные с помощью анзацев (19)–(23) имеют вид

$$L\varphi + 6\varphi_2 - i\lambda^{-1}\varphi_3 + \frac{\lambda^2}{4}\omega_2\varphi - \lambda^{-1}\lambda_1|\varphi|^{4/3}\varphi = 0, \quad (24)$$

$$L\varphi \equiv \varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + (\omega_2^2 - \omega_1^2)\varphi_{33} + 4\omega_1\varphi_{12},$$

$$L\varphi + 6\varphi_2 + i\lambda^{-1}\varphi_3 - \lambda^{-1}\lambda_1|\varphi|^{4/3}\varphi = 0, \quad (25)$$

$$L\varphi + 6\varphi_2 + i\lambda^{-1}\varphi_3 - \frac{1}{4}\lambda^{-2}\omega_2\varphi - \lambda^{-1}\lambda_1|\varphi|^{4/3}\varphi = 0, \quad (26)$$

$$\varphi_a \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_a}, \quad \varphi_{ab} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_a \partial \omega_b}, \quad a, b = \overline{1, 3}.$$

Трёхмерные уравнения в частных производных вида (24)–(26) редуцируются к набору нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего типа

$$\begin{aligned} a_2(\tau)\ddot{z}(\tau) + a_1(\tau)\dot{z}(\tau) + b|z|^{4/3}z &= 0, \\ a_2(\tau) &= a_{21} + a_{22}\tau, \quad a_1 = a_{11} + a_{12}\tau, \quad a(\tau) = \operatorname{const}, \quad b = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (27)$$

$z$  — комплексная функция.

Некоторые из ОДУ вида (27) удалось точно решить.

Таким образом, процесс редукции многомерного уравнения в частных производных к ОДУ дал возможность построить частные точные решения уравнения (15).

Явный вид точных решений уравнения (15) задается формулами

$$u(x) = (1 - x_0^2)^{-3/4} \exp \left\{ \frac{i}{4} \lambda^{-1} x^2 (1 - x_0)^{-1} \right\}, \quad \lambda = -\frac{2}{3}i; \quad (28)$$

$$u(x) = \{c_0 x_0 - (c \cdot x)\}^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{i}{4} \lambda^{-1} x^2 x_0^{-1} \right\}, \quad (29)$$

$$(c \cdot x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \quad c^2 = \frac{4}{15} \lambda^{-1} \lambda_1,$$

$c_0, c_1, c_2, c_3$  — произвольные постоянные;

$$u(x) = x_0^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{i}{4} \lambda^{-1} (x^2 - r \cdot x) x_0^{-1} \right\}, \quad r^2 = -16\lambda\lambda_1; \quad (30)$$

$$u(x) = \left( \frac{4}{3} \lambda^{-1} x^2 \right)^{-3/4} \exp \left\{ -\frac{i}{4} \lambda^{-1} x^2 x_0^{-1} \right\}; \quad (31)$$

$$u(x) = x_0^{-3/2} \varphi(\omega_1) \exp \left\{ -\frac{i}{4} \lambda^{-1} x^2 x_0^{-1} \right\}, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x) x_0^{-1}, \quad (32)$$

где функция  $\varphi(\omega_1)$  определяется эллиптическим интегралом

$$\int_0^\varphi dy \left( k_1 + y^{10/3} \right)^{-1/2} = \left( \frac{3}{5} \lambda^{-1} \lambda_1 \right)^{1/2} (\omega_1 + k_2), \quad (33)$$

$k_1, k_2$  — произвольные постоянные;

$$u(x) = \left( \frac{c_0}{3} \lambda_1 \right)^{3/4} x_0^{-1/2} \exp \left\{ i c_0 x_0^{-1/3} - \frac{i}{4} \lambda^{-1} (c \cdot x) x_0^{-1} \right\}, \quad (34)$$

$c^2 = 1$ ,  $c_0$  — постоянная.

Формулы (28)–(34) задают многопараметрические семейства точных решений многомерного нелинейного уравнения (15). Некоторые из полученных решений неаналитичны по параметру  $\lambda_1$ .

Воспользовавшись свойством инвариантности уравнения (15) относительно группы  $G_2(1, n)$ , можно построить по решениям (28)–(34) новые семейства точных решений. Пусть  $u_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$  решение уравнения (15), тогда новые решения  $u_2, u_3$  определяются через  $u_1$  с помощью таких формул

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1(x_0, x_1 \rightarrow x_1 + v_1 x_0, x_2 \rightarrow x_2 + v_2 x_0, x_3 \rightarrow x_3 + v_3 x_0) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \lambda^{-1} \left( \frac{1}{2} v^2 x_0 + (v \cdot x) \right) \right\}, \\ u_3 &= u_1 \left( x_0 \rightarrow \frac{x_0}{1 - dx_0}, x_1 \rightarrow \frac{x_1}{1 - dx_0}, x_2 \rightarrow \frac{x_2}{1 - dx_0}, x_3 \rightarrow \frac{x_3}{1 - dx_0} \right) \times \\ &\quad \times (1 - dx_0)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{i}{4} \lambda^{-1} \frac{dx^2}{1 - dx_0} \right\}, \end{aligned}$$

где стрелки означают соответствующую замену,  $d$  — произвольная постоянная.

1. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Институт математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фушич В.И., О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения, в Теоретико-алгебраические исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 4–19.
3. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
5. Фушич В.И., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Институт математики АН УССР, 1986, 44 с.
6. Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989, 340 с.

# Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I

*В.И. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНИГА*

**1. Введение.** Известно, что максимальной локальной (в смысле Ли) группой инвариантности  $(n + 1)$ -мерного линейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi, \tag{1}$$

где

$$\Psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad k \in \mathbb{R}^1, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

$\Psi(t, x)$  — комплекснозначная функция, является обобщенная группа Галилея (группа Шредингера)  $G_2(1, n)$  [1, 2]. Этой группе соответствует алгебра Ли  $AG_2(1, n)$  с базисными операторами

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad a = \overline{1, n}, \tag{2a}$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad b = \overline{1, n}, \tag{2b}$$

$$J = i(\Psi\partial_\Psi - \Psi^*\partial_{\Psi^*}), \quad G_a = t\partial_a - \frac{x_a}{2k}J, \tag{2c}$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}(\Psi\partial_\Psi + \Psi^*\partial_{\Psi^*}), \tag{2d}$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4k}J - \frac{nt}{2}(\Psi\partial_\Psi + \Psi^*\partial_{\Psi^*}), \tag{2e}$$

где

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \partial_\Psi = \frac{\partial}{\partial\Psi}, \quad \partial_{\Psi^*} = \frac{\partial}{\partial\Psi^*},$$

\* — знак комплексного сопряжения (по повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование). Операторы (2a)–(2c), образующие алгебру  $AG(1, n)$ , генерируют преобразования группы Галилея  $G(1, n)$ , а операторы (2a)–(2d), образующие алгебру  $AG_1(1, n)$  — преобразования группы  $G_1(1, n)$ .

В работах [3, 4] построены широкие классы нелинейных уравнений второго порядка, инвариантных относительно группы  $G_2(1, n)$  и ее подгрупп.



В данной работе, являющейся естественным продолжением статьи [4], рассматриваются системы нелинейных эволюционных уравнений вида

$$\begin{aligned}\lambda_1 \Psi_t^{(1)} &= A_{ab}^{(1)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})\Psi_{ab}^{(1)} + B^{(1)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi_1^{(1)}, \Psi_1^{(2)}), \\ \lambda_2 \Psi_t^{(2)} &= A_{ab}^{(2)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})\Psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi_1^{(1)}, \Psi_1^{(2)}),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\lambda_m = \text{const} \neq 0$ ,  $\Psi_t^{(m)} = \partial\Psi^{(m)}/\partial t$ ,  $\Psi_{ab}^{(m)} = \partial^2\Psi^{(m)}/(\partial x_a \partial x_b)$ ,  $\Psi_a^{(m)} = \partial\Psi^{(m)}/\partial x_a$ ,  $\Psi_1^{(m)} = (\Psi_1^{(m)}, \dots, \Psi_n^{(m)})$ ,  $m = 1, 2$ ,  $a, b = \overline{1, n}$ ,  $A_{ab}^{(m)}$ ,  $B^{(m)}$  — произвольные дифференцируемые комплексные или действительные функции.

В случае комплексных функций  $\Psi = \Psi^{(1)} = \Psi^{*(2)}$ ,  $A_{ab} = A_{ab}^{(1)} = A_{ab}^{*(2)}$ ,  $B = B^{(1)} = B^{*(2)}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2^* = i$  система уравнений (3) превращается в пару комплексно сопряженных нелинейных уравнений шредингеровского типа

$$i\Psi_t = A_{ab}(\Psi, \Psi^*)\Psi_{ab} + B(\Psi, \Psi^*, \Psi_1, \Psi_1^*), \quad (4a)$$

$$-i\Psi_t^* = A_{ab}^*(\Psi, \Psi^*)\Psi_{ab}^* + B^*(\Psi, \Psi^*, \Psi_1, \Psi_1^*), \quad (4b)$$

где индексы возле искомого функций  $\Psi$ ,  $\Psi^*$  обозначают дифференцирование по переменным  $t, x_1, \dots, x_n$  (ниже комплексно сопряженные уравнения вида (4b) опускаются).

В настоящей работе решены следующие задачи:

1) описаны нелинейные системы уравнений второго порядка вида (3), инвариантные относительно цепочек групп  $G(1, n) \subset G_1(1, n) \subset G_2(1, n)$ ;

2) доказано, что среди множества уравнений (4) инвариантными относительно группы  $G_2(1, n)$  являются только уравнения вида

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \Psi|\Psi|^{4/n}F(\hat{\theta}), \quad (5)$$

где  $\hat{\theta} = \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} |\Psi|^{-2-4/n}$ ,  $|\Psi| = \sqrt{\Psi\Psi^*}$ ,  $F$  — произвольная дифференцируемая функция;

3) найдены анзацы, с помощью которых многомерные нелинейные уравнения редуцируются к уравнениям с меньшим числом независимых переменных, и построены в явном виде многопараметрические семейства точных решений четырехмерных нелинейных уравнений

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi|\Psi|^{4/3}, \quad (6)$$

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} |\Psi|^{-2}. \quad (7)$$

Отметим, что уравнения (6), (7) являются простейшими среди нелинейных уравнений (5) при  $n = 3$ . Построению точных решений уравнения (6) посвящена работа [5]. Ниже получен ряд новых результатов. В частности, найдены солитоноподобные решения уравнения (6) и решения уравнения (7), содержащие произвольные функции.

**2. Системы нелинейных уравнений, инвариантные относительно алгебры Галилея и ее расширений.** Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных

уравнений в частных производных (ДУЧП) (3). Системы уравнений такого вида в случае действительных коэффициентов широко используются в качестве математических моделей для описания процессов диффузии при химических реакциях и горении в двухкомпонентных средах, в теории тепломассопереноса, в популяционной генетике (см., например, [6]).

С теоретико-алгебраической точки зрения представляется важным выделить из системы уравнений вида (3) такие, которые инвариантны относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  или достаточно, широких ее подалгебр  $AG(1, n)$  и  $AG_1(1, n)$  [7]. Рассмотрим обобщенную алгебру Галилея  $AG_2(1, n)$  с базисными элементами (2а), (2б) и

$$I_\lambda = \lambda_1 \Psi^{(1)} \partial_{\Psi^{(1)}} + \lambda_2 \Psi^{(2)} \partial_{\Psi^{(2)}}, \quad G = t \partial_a - \frac{x_a}{2} I_\lambda, \quad (8)$$

$$D = 2t \partial_t + x_a \partial_a + I_\alpha, \quad (9)$$

$$\Pi = t^2 \partial_t + t x_a \partial_a - \frac{|x|^2}{4} I_\lambda + t I_\alpha, \quad (10)$$

где  $I_\alpha = \alpha_1 \Psi^{(1)} \partial_{\Psi^{(1)}} + \alpha_2 \Psi^{(2)} \partial_{\Psi^{(2)}}$ ,  $\alpha_m \in \mathbb{R}^1$ . Очевидно, что в случае  $\lambda_1 = \lambda_2^* = i/k$ ,  $\Psi^{(1)} = \Psi^{*(2)} = \Psi$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = -n/2$  получаем стандартное представление алгебры  $AG_2(1, n)$  с базисными элементами (2).

**Теорема 1.** Система уравнений (3) инвариантна относительно алгебры Галилея  $AG(1, n)$  с базисными операторами (2а), (2б), (8) тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\lambda_m \Psi_t^{(m)} = C_m(v) \Delta \Psi^{(m)} + \frac{1 - C_m(v)}{\Psi^{(m)}} \Psi_a^{(m)} \Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)} F_m(v, \theta), \quad m = 1, 2, \quad (11)$$

(здесь и везде ниже суммирование по индексу  $m$  нет), где  $v = (\Psi^{(1)})^{\lambda_2} (\Psi^{(2)})^{-\lambda_1}$ ,  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$ ,  $C_m$ ,  $F_m$  — произвольные функции.

**Теорема 2.** Система уравнений (11) инвариантна относительно алгебры  $AG_1(1, n)$  с базисными элементами (2а), (2б), (8), (9) тогда и только тогда, когда она эквивалентна системе

$$\lambda_m \Psi_t^{(m)} = D_m \Delta \Psi^{(m)} + \frac{1 - D_m}{\Psi^{(m)}} \Psi_a^{(m)} \Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)} v^{-2/\delta} f_m(\hat{\theta}), \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

если  $\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , или же системе

$$\lambda_m \Psi_t^{(m)} = C_m(v) \Delta \Psi^{(m)} + \frac{1 - C_m(v)}{\Psi^{(m)}} \Psi_a^{(m)} \Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)} v^{-2} \theta g_m(v), \quad m = 1, 2, \quad (13)$$

если  $\delta = 0$ .

В системах уравнений (12), (13)  $\hat{\theta} = \theta v^{-2+2/\delta}$ ,  $D_m = \text{const}$ ,  $f_m$ ,  $g_m$ ,  $C_m$  — произвольные функции.

**Теорема 3.** 1. Система уравнений (12) инвариантна относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  (2а), (2б), (8)–(10) при произвольных  $D_m$  и  $f_m(\hat{\theta})$ , при чем  $\alpha_m = -\frac{n}{2} D_m$ ,  $\delta = -\frac{n}{2} \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$ .

2. Система уравнений (13) инвариантна относительно этой же алгебры тогда и только тогда, когда  $C_m(v) = D_m = \text{const}$ , причем  $\alpha_m = -\frac{n}{2}D_m$ ,  $\delta = 0$ .

Доказательства теорем 1–3 проводятся по классической схеме Ли (см. например, [8]). Ввиду громоздкости мы их опускаем (подробности см. в [9]).

Из этих теорем нетрудно получить следующие утверждения.

**Следствие 1.** Среди множества нелинейных уравнений (4) только уравнения

$$i\Psi_t = C(|\Psi|)\Delta\Psi + \Psi^*(k - C(|\Psi|))\frac{\Psi_a\Psi_a}{|\Psi|^2} + \Psi F\left(|\Psi|, \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}\right), \quad (14)$$

где  $C$ ,  $F$  — произвольные функции, инвариантны относительно алгебры Галилея  $AG(1, n)$  (2a)–(2c).

**Следствие 2.** Нелинейные ДУЧП шредингеровского типа (4) инвариантны относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  с базисными операторами (2) тогда и только тогда, когда они эквивалентны уравнениям вида (5).

Нетрудно убедиться, что системы уравнений (12) и (13) при условиях теоремы 3 локальной заменой  $\hat{\Psi}^{(m)} = (\Psi^{(m)})^{1/D_m}$ ,  $m = 1, 2$ ,  $D_m \neq 0$  сводятся соответственно к системам

$$\hat{\lambda}_m \hat{\Psi}_t^{(m)} = \Delta \hat{\Psi}^{(m)} + \hat{\Psi}^{(m)} v^{-2/\hat{\delta}} \hat{f}_m(\hat{\theta}), \quad m = 1, 2, \quad (15)$$

и

$$\hat{\lambda} \hat{\Psi}_t^{(m)} = \Delta \hat{\Psi}^{(m)} + \hat{\Psi}^{(m)} v^{-2} \theta \hat{g}_m(v), \quad m = 1, 2. \quad (16)$$

В (15) приняты обозначения  $\hat{\lambda}_m = \lambda_m/D_m$ ,  $v = (\hat{\Psi}^{(1)})^{\hat{\lambda}_2} (\hat{\Psi}^{(2)})^{-\hat{\lambda}_1}$ ,  $\hat{\delta} = \hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1 \neq 0$ ,  $\hat{\theta} = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a} v^{2/\hat{\delta}-2}$ , в системе (16) —  $\hat{\lambda} = \lambda_1/D_1 = \lambda_2/D_2$ ,  $v = \hat{\Psi}^{(1)}/\hat{\Psi}^{(2)}$ ,  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$ ,  $\hat{f}_m$  и  $\hat{g}_m$  — произвольные функции.

Очевидно, что системы уравнений (15), (16) инвариантны относительно обобщенной алгебры Галилея  $AG_2(1, 3)$  (см. теорему 3).

**3. Анзацы и редукция уравнений (6), (7).** Нелинейные уравнения (6), (7) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли  $AG_2(1, 3)$ . В работе [10] построена система всех несопряженных одномерных подалгебр алгебры  $AG_2(1, 3)$ . В качестве такой системы можно выбрать следующие 14 подалгебр:

$$\begin{aligned} X_1 &= P_t, & X_2 &= J, & X_3 &= P_t + \alpha_0 J, & X_4 &= J_{12} + \alpha J, & X_5 &= J_{12} + G_3, \\ X_6 &= J_{12} - P_t + \alpha_0 J, & X_7 &= G_1 + P_2, & X_8 &= -P_t + G_1, \\ X_9 &= J_{12} + \beta G_3 - P_t, & X_{10} &= D + \alpha J, & X_{11} &= P_t + \Pi - \alpha J, \\ X_{12} &= J_{12} + \beta D + \alpha J, & X_{13} &= P_t + \Pi - \beta J_{12} - \alpha J, \\ X_{14} &= P_t + \Pi - J_{12} - \beta(G_1 + P_2), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > 0$ .

Решая уравнения Лагранжа для каждого из операторов (17) [7], получаем инварианты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , зависящие от  $t$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , и анзацы для искомой функции  $\Psi$ . Исключение составляет только единичный оператор  $X_2$ , которому соответствуют четыре инварианта  $t$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и функциональное соотношение между  $\Psi$  и  $\Psi^*$ . Новые инвариантные переменные и соответствующие анзацы приведены в табл. 1. Любой другой анзац, получаемый с помощью произвольного элемента алгебры  $AG_2(1, 3)$ , преобразованиями инвариантности сводится к одному из тех, которые указаны в таблице.

Таблица 1

Подалгебры	Инвариантные переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	Анзацы $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$
$X_1$	$t, x_2, x_3$	$\Psi(t, x) = \varphi(\omega)$
$X_2$	$t, x_1, x_2, x_3$	$\Psi(t, x) = \varphi(t, x), \Psi\Psi^* = \gamma^2$
$X_3$	$x_1, x_2, x_3$	$\Psi = \exp(i\alpha_0 t)\varphi(\omega)$
$X_4$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \exp\left(i\alpha \arctg \frac{x_2}{x_1}\right)\varphi(\omega)$
$X_5$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3 - t \arctg \frac{x_2}{x_1}$	$\Psi = \exp\left(-\frac{ix_2^2}{4kt}\right)\varphi(\omega)$
$X_6$	$t + \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \exp(-i\alpha_0 t)\varphi(\omega)$
$X_7$	$t, x_1 - tx_2, x_3$	$\Psi = \exp\left(-\frac{ix_2^2}{4kt}\right)\varphi(\omega)$
$X_8$	$2x_1 + t^2, x_2, x_3$	$\Psi = \exp\left[\frac{it}{2k}\left(x_1 + \frac{t^2}{3}\right)\right]\varphi(\omega)$
$X_9$	$t + \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, 2x_3 + \beta t^2$	$\Psi = \exp\left[\frac{i\beta t}{2k}\left(x_3 + \frac{\beta t^2}{3}\right)\right]\varphi(\omega)$
$X_{10}$	$\frac{x_1}{\sqrt{t}}, \frac{x_2}{\sqrt{t}}, \frac{x_3}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4} + i\frac{\alpha}{4k}}\varphi(\omega)$
$X_{11}$	$\frac{x_1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \times$ $\times \exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\alpha \arctg t\right)\right]\varphi(\omega)$
$X_{12}$	$\ln t + 2\beta \arctg \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}, \frac{x_3}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4} + i\frac{\alpha}{4k}}\varphi(\omega)$
$X_{13}$	$\beta \arctg t - \arctg \frac{x_1}{x_2},$ $\frac{x_1^2 + x_2^2}{t^2 + 1}, \frac{x_3}{\sqrt{t^2 + 1}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \times$ $\times \exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\alpha \arctg t\right)\right]\varphi(\omega)$
$X_{14}$	$\frac{tx_1 + x_2}{t^2 + 1} + \beta \arctg t,$ $\frac{tx_2 + x_1}{t^2 + 1}, \frac{x_3}{\sqrt{t^2 + 1}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k}\left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\beta \arctg t \cdot \frac{tx_2 - x_1}{t^2 + 1}\right)\right]\varphi(\omega)$

Используя найденные инварианты и анзацы вида [7]  $\Psi = f(t, x)\varphi(\omega)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , где  $f(t, x)$  — известная функция (см. табл. 1), проведем редукцию четырехмерных нелинейных уравнений (6), (7) к трехмерным ДУЧП. Ниже приведены редукционные уравнения для искомой функции  $\varphi$  (индексы  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  у функции  $\varphi$  обозначают дифференцирование по этим переменным):

$$X_1: i\varphi_t = k(\varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \omega_1 = t, \quad (18)$$

$$X_2: i\varphi_t = k\Delta\varphi + \lambda\gamma^{4/3}\varphi, \quad \varphi\varphi^* = \gamma^2, \quad \gamma > 0, \quad (19)$$

$$X_3: k\Delta\varphi + \alpha_0\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad \omega_a = x_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (20)$$

$$X_4: i\varphi_t = k(4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + 4\varphi_{\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) - \frac{k\alpha^2}{\omega_2}\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \omega_1 = t, \quad (21)$$

$$X_5: i\left(\varphi_t + \frac{\varphi}{2t} + \frac{\omega_3\varphi_{\omega_3}}{t}\right) =$$

$$= k\left(4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + \left(1 + \frac{t^2}{\omega_2}\right)\varphi_{\omega_3\omega_3}\right) + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \omega_1 = t, \quad (22)$$

$$X_6: i\varphi_{\omega_1} = k\left(\frac{1}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1} + 4\varphi_{\omega_2} + 4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}\right) - \alpha_0\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (23)$$

$$X_7: i \left( \varphi_t + \frac{\varphi}{2t} + \frac{\omega_2 \varphi \omega_2}{t} \right) = k(1 + t^2) \varphi_{\omega_2 \omega_2} + k \varphi_{\omega_3 \omega_3} + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3}, \quad t = \omega_1, \quad (24)$$

$$X_8: k(4\varphi_{\omega_1 \omega_1} + \varphi_{\omega_2 \omega_2} + \varphi_{\omega_3 \omega_3}) + \frac{\omega_1}{4k} \varphi + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3} = 0, \quad (25)$$

$$X_9: i \varphi_{\omega_1} = k \left[ \frac{1}{\omega_2} \varphi_{\omega_1 \omega_1} + 4(\omega_2 \varphi_{\omega_2 \omega_2} + \varphi_{\omega_2}) + 4\varphi_{\omega_3 \omega_3} \right] - \frac{\beta}{4k} \omega_3 \varphi + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3}, \quad (26)$$

$$X_{10}: k(\varphi_{\omega_1 \omega_1} + \varphi_{\omega_2 \omega_2} + \varphi_{\omega_3 \omega_3}) + \frac{i}{2} \omega_a \varphi_{\omega_a} + \left( i \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4k} \right) \varphi + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3} = 0, \quad (27)$$

$$X_{11}: k(\varphi_{\omega_1 \omega_1} + \varphi_{\omega_2 \omega_2} + \varphi_{\omega_3 \omega_3}) + (2\alpha - \omega_a \omega_a) \frac{\varphi}{4k} + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3} = 0, \quad (28)$$

$$X_{12}: -i \left( \frac{3}{4} \varphi + \omega_2 \varphi_{\omega_2} - \varphi_{\omega_1} \right) = 4k(\omega_2 \varphi_{\omega_2})_{\omega_2} + \frac{4\beta^2 k}{\omega_2} \varphi_{\omega_1 \omega_1} + k \varphi_{\omega_3 \omega_3} + \frac{\alpha}{4k\beta} \varphi + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3}, \quad (29)$$

$$X_{13}: -i\beta \varphi_{\omega_1} = \frac{k}{\omega_2} \varphi_{\omega_1 \omega_1} + 4k \varphi_{\omega_2} + 4k \omega_2 \varphi_{\omega_2 \omega_2} - (2\alpha + \omega_2^2 + \omega_3^2) \varphi / 4k + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3}, \quad (30)$$

$$X_{14}: i(\alpha \varphi_{\omega_1} + \omega_1 \varphi_{\omega_2} - \omega_2 \varphi_{\omega_1}) = \varphi_{\omega_1 \omega_1} + \varphi_{\omega_2 \omega_2} + \varphi_{\omega_3 \omega_3} - \frac{1}{4k} (2\alpha \omega_2 + \omega_a \omega_a) \varphi + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3}. \quad (31)$$

**Замечание 1.** Редукционные уравнения, соответствующие уравнению (7), отличаются от уравнений (18)–(31) только тем, что вместо нелинейности  $\lambda \varphi |\varphi|^{4/3}$  они содержат нелинейные слагаемые, порожденные членом  $\lambda \Psi \frac{\partial |\Psi|}{\partial x_a} \frac{\partial |\Psi|}{\partial x_a} |\Psi|^{-2}$ .

Каждое из уравнений (18)–(31) последующей редукцией можно свести к ДУЧП от двух независимых переменных, а затем и к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). В результате такой последовательной редукции получаем, как правило, нелинейное ОДУ второго порядка вида

$$A(\omega) \frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} + B(\omega) \frac{d\varphi}{d\omega} + C(\omega) \varphi + \lambda \varphi |\varphi|^{4/3} = 0,$$

где

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0, \\ A_0 \omega, \\ A_0(\omega^2 + 1), \end{cases} \quad B(\omega) = \begin{cases} B_0 + iB_1 \omega, \\ B_0 + iB_1, \\ (B_0 + iB_1)\omega, \end{cases} \quad C(\omega) = \begin{cases} C_0 + C_1 \omega, \\ C_0 + iC_1, \\ C_0 + C_1 \omega^2, \\ C_0 + C_1/\omega, \end{cases}$$

$A_0, B_0, B_1, C_0, C_1$  — действительные постоянные или параметры. Конкретный вид функций  $A(\omega), B(\omega), C(\omega)$  и переменной  $\omega$  в каждом случае определяется соответствующим набором инвариантов  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (см. табл. 1).

**4. Формулы размножения решений.** Для построения таких формул воспользуемся преобразованиями инвариантности, генерируемыми базисными операторами (2) при  $n = 3$  алгебры  $AG_2(1, 3)$ . Прежде всего найдем преобразования, порождаемые операторами  $G_a$  (2с) и  $\Pi$  (2е). Решая соответствующие уравнения Ли, получаем преобразования Галилея

$$G_a: \quad t' = t, \quad x'_a = x_a + \varepsilon_a t, \quad a = 1, 2, 3, \\ \Psi' = \Psi \exp\left(-\frac{i\varepsilon_a}{2k}\left(x_a + \frac{\varepsilon_a t}{2}\right)\right), \quad \varepsilon_a \in \mathbb{R}^1, \quad (32)$$

и проективные преобразования

$$\Pi: \quad t' = \frac{t}{1 - pt}, \quad x'_a = \frac{x_a}{1 - pt}, \quad p \in \mathbb{R}^1, \\ \Psi' = \Psi(1 - pt)^{3/2} \exp\left(-\frac{ip|x|^2}{4k(1 - pt)}\right), \quad a = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Пусть  $W(t, x)$  — решение уравнения (6) или (7). Применяя к нему преобразования (32), получаем новое решение (штрихи ниже опускаем)

$$\Psi = W(t, x + \varepsilon t) \exp\left(\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{|\varepsilon|^2 t}{2}\right)\right), \quad (34)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ,  $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_a \varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_a \in \mathbb{R}^1$ . После применения к решению (34) преобразований (33), находим четырех параметрическое семейство решений

$$\Psi = W\left(\frac{t}{1 - pt}, \frac{x + \varepsilon t}{1 - pt}\right) \exp\left[i\frac{p|x|^2 + 2\varepsilon x + |\varepsilon|^2 t}{4k(1 - pt)}\right] (1 - pt)^{-3/2}. \quad (35)$$

Нетрудно убедиться, что повторное применение формул (32), (33) к решению (35) приводит к этому же семейству решений, т. е. оно неразмножаемо относительно галлилеевских и проективных преобразований.

Выражение (35) естественно назвать формулой размножения решений уравнений (6), (7), построенной по операторам  $G_a$  (2с) и  $\Pi$  (2е). Обобщим эту формулу, применив остальные преобразования группы  $G_2(1, 3)$  — сдвиги по переменным  $t, x$ , вращения в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , растяжения (сжатия) по переменным  $t, x$ ,  $\Psi$  и вращения компонент  $\operatorname{Re} \Psi$  и  $\operatorname{Im} \Psi$  (см. оператор  $J$  (2с)). Совокупность этих преобразований задается формулами

$$t' = m^2 t + d_0^1, \quad x' = mAx + d^1, \quad \Psi' = e^{-i\alpha} m^{-3/2} \Psi, \quad (36)$$

где  $m > 0$ ,  $d_0^1, d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$ ,  $\alpha$  — действительные параметры,  $A = (c_{ab})_{a,b=1}^3$  — действительная матрица вращений.

Воспользовавшись группой преобразований (36) из (35) получаем 13-параметрическое семейство решений

$$\Psi = e^{i\alpha} \frac{m^{3/2}}{(d_0 - pm^2 t)^{3/2}} \exp\left[i\left(\frac{pm^2|x|^2 + 2m\varepsilon^1 x}{4k(d_0 - pm^2 t)} + \frac{m^2|\varepsilon|^2 t + b_0}{4k(d_0 - pm^2 t)}\right)\right] \times \\ \times W\left(\frac{m^2 t + d_0^1}{d_0 - pm^2 t}, \frac{mAx + m^2 \varepsilon t + d}{d_0 - pm^2 t}\right), \quad (37)$$

где  $d_0 = 1 - pd_0^1$ ,  $d = d^1 + \varepsilon d_0^1$ ,  $\varepsilon^1 = \varepsilon A + pd^1 A$ ,  $b_0 = p|d^1|^2 + 2\varepsilon d^1 + |\varepsilon|^2 d_0^1$ ,  $|d^1|^2 = d_a^1 d_a^1$ ,  $a = 1, 2, 3$ .

Таким образом, если  $W(t, x)$  — решение нелинейного уравнения (6) или (7), то формула (37) определяет неразмножаемое семейство решений этого же уравнения.

Если в формуле (37) выбрать параметры  $d_0 = 1/p$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = 0$  ( $A = E$  — единичная матрица) и сделать предельный переход при  $p \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow 0$ ,  $pm \rightarrow -1$ , то получим решение уравнения (6) или (7):

$$\Psi(t, x) = t^{-3/2} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4kt}\right) W\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right). \tag{38}$$

**Замечание 2.** Построенные формулы размножения решений позволяют получать из действительных стационарных решений уравнений (6), (7) комплексные нестационарные решения. Они справедливы для любого уравнения вида (5).

В заключение рассмотрим частный случай формулы (37)

$$\Psi = W(t, Ax) = W(t, C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x), \tag{39}$$

где  $C^{(a)}x = c_{ab}x_b$ ,  $a, b = 1, 2, 3$ ,  $C^{(a)} = (c_{a1}, c_{a2}, c_{a3})$  — векторы-строки матрицы вращений  $A$ .

Таблица 2

№ п/п	Инвариантные переменные $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3$	Анзацы $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3)$
1	$t, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi(t, x) = \Phi(\hat{\omega})$
2	$t, C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi = \Phi(t, C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x), \Phi\Phi^* = \gamma^2$
3	$C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp(i\alpha_0 t)\Phi(\hat{\omega})$
4	$t,  x ^2, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp\left(i\alpha \arctg \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}\right) \Phi(\hat{\omega})$
5	$t,  x ^2 - (C^{(3)}x)^2, C^{(3)}x - t \arctg \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}$	$\Psi = \exp\left(-\frac{i(C^{(3)}x)^2}{4kt}\right) \Phi(\hat{\omega})$
6	$t + \arctg \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x},  x ^2, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp(-i\alpha_0 t)\Phi(\hat{\omega})$
7	$t, C^{(1)}x - C^{(2)}xt, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp\left(-\frac{i(C^{(1)}x)^2}{4kt}\right) \Phi(\hat{\omega})$
8	$2C^{(1)}x + t^2, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp\left[\frac{it}{2k} \left(C^{(1)}x + \frac{t^2}{3}\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
9	$t + \arctg \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}, (C^{(1)}x)^2 + (C^{(2)}x)^2, 2C^{(3)}x + \beta t^2$	$\Psi = \exp\left[\frac{i\beta t}{2k} \left(C^{(3)}x + \frac{\beta t^2}{3}\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
10	$\frac{C^{(1)}x}{\sqrt{t}}, \frac{C^{(2)}x}{\sqrt{t}}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4} + i\frac{\alpha}{4k}} \Phi(\hat{\omega})$
11	$\frac{C^{(1)}x}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{C^{(2)}x}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \times$ $\times \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\alpha \arctg t\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
12	$\ln t + 2\beta \arctg \frac{C^{(1)}x}{C^{(2)}x}, \frac{ x ^2}{t}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4} + i\frac{\alpha}{4k}} \Phi(\hat{\omega})$
13	$\beta \arctg t - \arctg \frac{C^{(1)}x}{C^{(2)}x}, \frac{ x ^2}{1+t^2}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \times$ $\times \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{t x ^2}{1+t^2} + 2\alpha \arctg t\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
14	$\frac{tC^{(1)}x + C^{(2)}x}{1+t^2} + \beta \arctg t, \frac{tC^{(2)}x - C^{(1)}x}{1+t^2}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{t x ^2}{1+t^2} + 2\beta \arctg t \cdot \frac{tC^{(2)}x - C^{(1)}x}{t^2 + 1}\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$

Формула размножения решений (39) позволяет симметризовать по инвариантные переменные и анзацы из табл. 1. Результаты такой симметризации приведены в табл. 2. Отметим, что векторы  $C^{(a)}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , которые фигурируют в табл. 2, являются ортонормированными, т.е.  $C^{(a)}C^{(b)} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b, \end{cases} \quad a, b = 1, 2, 3.$

1. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 808–816.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publ. Comp., 1987, 214 p.
3. Фушич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
4. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
6. Хакен Г., Синергетика, М., Мир, 1980, 408 с.
7. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
8. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
9. Фушич В.И., Чернига Р.М., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1986, 44 с.
10. Баранник Л.Ф., Фушич В.И., О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера, Препринт 87.16, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987.—48 с.



# Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. II

В.И. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНИГА

Данная работа является продолжением [1] и посвящена в основном построению многопараметрических семейств точных решений нестационарных 3-мерных уравнений (обозначения см. в [1])

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \quad k \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda \in \mathbb{C}^1, \quad (1)$$

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\psi \frac{\partial|\psi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\psi|}{\partial x_a} |\psi|^{-2}. \quad (2)$$

Приведены также некоторые результаты симметричного анализа систем нелинейных уравнений с логарифмической нелинейностью.

**1. Точные решения уравнения (1).** Редукция уравнения (1) по оператору  $X_1 = P_1$  [1] приводит к нелинейному трехмерному уравнению

$$i\varphi_t = k\Delta_2\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (3)$$

где  $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ ,  $\varphi = \varphi(t, x_2, x_3)$ . Для получения частных решений уравнения (3) рассмотрим систему [2]

$$\begin{aligned} i\varphi_t &= \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \lambda \neq 0, \\ \Delta_2\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что произвольное решение системы (4) удовлетворяет уравнению (3), а следовательно, и (1). Представляя комплексную функцию  $\varphi$  через пару действительных функций  $R(t, x_2, x_3)$  и  $P(t, x_2, x_3)$  по формуле  $\varphi = R \exp(iP)$ , получаем общее решение системы (4)

$$\varphi = \begin{cases} \left(-\frac{d_2}{\lambda}\right)^{3/4} \exp(i(d_1 + d_2t)), & \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1, \\ \left(d_3 - \frac{4}{3}\beta t\right)^{-\frac{3}{4}(1-\frac{\alpha}{\beta})} \exp(id_1), & \lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (5)$$

которое является частным решением нелинейного уравнения (1).

Множитель  $e^{id_1}$  в дальнейшем будем опускать, так как любое решение уравнения (1) или (2), умноженное на  $e^{id_1}$ , будет снова решением этого же уравнения.

Редукция уравнения (1) по оператору  $X_2 = J$  приводит к линейному уравнению (19) [1] с дополнительным нелинейным условием  $\varphi\varphi^* = \gamma^2$ ,  $\gamma > 0$ . Используя представление комплексной функции  $\varphi$  через пару действительных функций  $R(t, x)$  и  $P(t, x)$ , получаем

$$\varphi = \gamma \exp(iP(t, x)). \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (19) [1], после некоторых преобразований приходим к системе

$$\frac{\partial P^1}{\partial t} = k \frac{\partial P^1}{\partial x_a} \frac{\partial P^1}{\partial x_a}, \quad \Delta P_1 = 0, \quad (7)$$

где

$$P^1(t, x) = P(t, x) + \lambda\gamma^{4/3}t. \quad (8)$$

В предположении  $P_t^1 = \alpha = \text{const}$  с учетом результатов работы [3] удается построить общее решение системы (7), которое приводит к решению уравнения (1) в виде плоской волны

$$\psi = \gamma \exp\{i((kb_a b_a - \lambda\gamma^{4/3})t + b_a x_a)\}, \quad (9)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — произвольные действительные параметры.

Проверкой нетрудно убедиться, что система (7) не имеет радиальных решений вида  $P^1 = P^1(t, |x|^2)$ .

Редукция уравнения (1) по оператору  $X_3$  при  $\alpha_0 = 0$  [1] приводит к нелинейному эллиптическому уравнению

$$k\Delta\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad \varphi = \varphi(x). \quad (10)$$

Пусть в уравнении (10)

$$\varphi = \varphi(w), \quad w = \alpha_a x_a, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1. \quad (11)$$

Тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$k|\alpha|^2\varphi_{ww} + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad |\alpha|^2 = \alpha_a\alpha_a.$$

В случае действительной функции  $\varphi$  это уравнение является уравнением Эмдена–Фаулера, частным решением которого является функция [4]  $\varphi = \beta/w^{3/2}$ ,  $\beta = (-15|\alpha|^2 k/4\lambda)^{3/4}$ ,  $\lambda k < 0$ .

Таким образом, получаем стационарное решение уравнения (1)

$$\psi(x) = \left[ \frac{15|\alpha|^2 k}{-4\lambda(\alpha_a x_a)^2} \right]^{3/4}, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda k < 0. \quad (12)$$

Отметим также, что в случае  $\lambda k > 0$  выражение (12) задает комплексное решение уравнения (1).

Если в уравнении (10) положить

$$\varphi = \varphi(r), \quad r = |x|^2, \quad (13)$$

то получим ОДУ второго порядка

$$4r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + 6 \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\lambda}{k} \varphi |\varphi|^{4/3} = 0,$$

которое имеет частное решение  $\varphi = (-15k/4\lambda r)^{3/4}$ .

Следовательно, с учетом (13) находим еще одно стационарное решение уравнения (1)

$$\psi(x) = \left( \frac{15k}{-4\lambda|x|^2} \right)^{3/4}. \quad (14)$$

Решение (14) в отличие от предыдущих решений обладает свойством  $\psi(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Отметим, что решение (12) стремится к нулю при  $\alpha_a x_a \rightarrow \infty$ .

Для получения солитоноподобных решений уравнения (1) рассмотрим редуцированное уравнение (20) [1] при  $\alpha_a \neq 0$ , соответствующее алгебре  $X_3$ . С помощью анзаца (11) в случае действительных  $\varphi$  и  $\lambda$  уравнение (20) [1] сводится к нелинейному ОДУ второго порядка

$$k|\alpha|^2 \frac{d^2 \varphi}{dw^2} + \alpha_0 \varphi + \lambda \varphi^{7/3} = 0. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (15) в элементарных функциях получить не удастся, так как его решение сводится к интегрированию выражения

$$c_2 \pm w = \int (c_1 - \beta_1 \varphi^2 - \lambda_1 \varphi^{10/3})^{-1/2} d\varphi, \quad (16)$$

где  $\beta_1 = \frac{\alpha_0}{|\alpha|^2 k}$ ,  $\lambda_1 = \frac{3\lambda}{5k|\alpha|^2}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1$ .

Интеграл в правой части (16) подстановкой  $\varphi_1 = \varphi^{-2/3}$  преобразуется к интегралу  $-\frac{3}{2} \int (c_1 \varphi_1^5 - \beta_1 \varphi_1^2 - \lambda_1)^{-1/2} d\varphi_1$ , который при  $c_1 \neq 0$  в элементарных функциях не выражается и даже не сводится к эллиптическому [5].

Если  $c_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ , (т.е.  $\alpha_0 = 0$ ), то из соотношения (16) с учетом (11) получаем решение (12) уравнения (1).

Пусть в выражении (16)  $c_1 = 0$  и  $\beta_1 \lambda_1 \neq 0$ , так как  $\varphi$  — действительная функция, то возможны три случая:

- а)  $\beta_1 < 0$ ,  $\lambda_1 < 0$ , т.е.  $\alpha_0 k < 0$ ,  $\lambda k < 0$ ;
- б)  $\beta_1 > 0$ ,  $\lambda_1 < 0$ , т.е.  $\alpha_0 k > 0$ ,  $\lambda k < 0$ ;
- в)  $\beta_1 < 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ , т.е.  $\alpha_0 k < 0$ ,  $\lambda k > 0$ .

В случае а) получаем решение нелинейного ОДУ (15)

$$\varphi = \left[ \sqrt{\frac{3\lambda}{5\alpha_0}} \operatorname{sh} \left( c_2 \pm \frac{2w}{3|\alpha| \sqrt{-k/\alpha_0}} \right) \right]^{-3/2},$$

в случае б) —

$$\varphi = \left[ \sqrt{\frac{-3\lambda}{5\alpha_0}} \cos \left( c_2 \pm \frac{2w}{3|\alpha| \sqrt{k/\alpha_0}} \right) \right]^{-3/2},$$

в случае в) —

$$\varphi = \left[ \sqrt{\frac{-3\lambda}{5\alpha_0}} \operatorname{ch} \left( c_2 \pm \frac{2w}{3|\alpha|\sqrt{-k/\alpha_0}} \right) \right]^{-3/2}.$$

Следовательно, с учетом (11) и соответствующего оператору  $X_3$  анзаца (см. таблицу 1 [1]) из этих решений при  $c_2 = 0$  получаем решения исходного уравнения (1)

$$\psi(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{[\sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\alpha_a x_a)]^{3/2}}, \quad \lambda k < 0, \quad \alpha_0 k < 0, \quad (17a)$$

$$\psi(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{[\sqrt{-\gamma} \cos(\alpha_a x_a)]^{3/2}}, \quad \lambda k < 0, \quad \alpha_0 k > 0, \quad (17b)$$

$$\psi(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{[\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch}(\alpha_a x_a)]^{3/2}}, \quad \lambda k > 0, \quad \alpha_0 k < 0, \quad (17a)$$

где  $\gamma = 3\lambda/5\alpha_0$ ,  $\alpha_a \alpha_a = 4|\alpha_0|/9|k|$ ,  $\alpha_a$  — произвольные действительные параметры.

Редукция нелинейного уравнения (1) по оператору  $X_4 = J_{12} + \alpha J$ ,  $\alpha \geq 0$ , приводит к трехмерному нелинейному уравнению (21) [1], которое в случае действительной функции  $\varphi = \varphi(w)$ ,  $w = x_1^2 + x_2^2$  сводится к ОДУ второго порядка

$$w^2 \frac{d^2 \varphi}{dw^2} + w \frac{d\varphi}{dw} - \frac{\alpha^2}{4} \varphi + \frac{\lambda}{4k} w \varphi^{7/3} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1$$

с частным решением

$$\varphi = \left[ \frac{k(\alpha^2 - \frac{9}{4})}{\lambda w} \right]^{3/4}. \quad (18)$$

Воспользовавшись табл. [1] и формулой (39) [1] из решения (18) получим решение нелинейного уравнения (1)

$$\psi(t, x) = A^{3/4} \exp \left( i\beta \arctg \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x} \right) \left[ |x|^2 - (C^{(3)}x)^2 \right]^{-3/4}, \quad (19)$$

где  $A = k(\alpha^2 - 9/4)/\lambda > 0$ ,  $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$ ,  $C^{(3)}$  — трехмерные ортонормированные действительные векторы.

Ко всем построенным решениям уравнения (1) можно применить формулу разложения (37) [1] и тогда получим неразмножаемые многопараметрические семейства решений. Поскольку выражения получаются довольно громоздкими, мы приводим в таблице результаты разложения построенных решений с помощью более простых формул (34) и (38) [1].

В случае  $\alpha_2 = \alpha_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = v$ ,  $k = -1$  из решения (\*) (см. таблицу) получаем решение

$$\psi(t, x_1) = \frac{\exp \frac{-iv}{2} \left( x_1 + \left( \frac{v}{2} - \frac{9\alpha_1^2}{2v} \right) t \right)}{[\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch}(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 vt)]^{3/2}} \quad (20)$$

№ п/п	№ формулы исходного решения	Новое решение полученное применением формулы (34) [1]	Новое решение полученное применением формулы (38) [1]
1	(5) $\lambda = \alpha + i\beta,$ $\beta \neq 0$	$(d_2 - \frac{4}{3}\beta t) - \frac{3}{4}(1 - \frac{i\alpha}{\beta}) \exp\left(\frac{i}{2k}(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2})\right)$	$t^{-\frac{3}{2}}(d_2 + \frac{4\beta}{3t}) - \frac{3}{4}(1 - \frac{i\alpha}{\beta}) \exp\left(-\frac{i x ^2}{4kt}\right)$
2	(9) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\gamma \exp\left\{i\left(b_a x_a + (kb_a b_a - \lambda\gamma^{4/3})t\right)\right\}$	$\gamma t^{-3/2} \exp\left\{i\left(\frac{\lambda\gamma^{4/3}}{-4\lambda(\alpha x)^2} - kb_a b_a + b_a x_a - \frac{ x ^2}{4kt}\right)\right\}$
3	(12) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[\frac{15k \alpha ^2}{-4\lambda(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t)^2}\right]^{3/4} \exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2}\right)\right]$	$\left[\frac{15k \alpha ^2}{-4\lambda(\alpha x)^2}\right]^{3/4} \exp\left(-\frac{i x ^2}{4kt}\right)$
4	(14) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[\frac{15k}{-4\lambda x+\varepsilon t ^2}\right]^{3/4} \exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2}\right)\right]$	$\left[\frac{15k}{-4\lambda x ^2}\right]^{3/4} \exp\left(-\frac{i x ^2}{4kt}\right)$
5	(17a) $\lambda k < 0,$ $\alpha_0 k < 0$	$\frac{\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \left(\frac{ \varepsilon ^2}{2} + 2k\alpha_0\right)t\right)\right\}}{\left[\sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t)\right]^{3/2}}$	$\frac{\exp\left[-\frac{i}{4kt}( x ^2 + 4\alpha_0)\right]}{\left(\sqrt{\gamma} t \operatorname{sh} \frac{\alpha_a x_a}{t}\right)^{3/2}}$
6	(17b) $\lambda k < 0,$ $\alpha_0 k > 0$	$\frac{\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \left(\frac{ \varepsilon ^2}{2} + 2k\alpha_0\right)t\right)\right\}}{\left[\sqrt{-\gamma} \cos(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t)\right]^{3/2}}$	$\frac{\exp\left[-\frac{i}{4kt}( x ^2 + 4\alpha_0)\right]}{\left(\sqrt{-\gamma} t \cos \frac{\alpha_a x_a}{t}\right)^{3/2}}$
7	(17c) $\lambda k > 0,$ $\alpha_0 k < 0$	$\frac{\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \left(\frac{ \varepsilon ^2}{2} + 2k\alpha_0\right)t\right)\right\}}{\left[\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch}(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t)\right]^{3/2}}$	$\frac{\exp\left[-\frac{i}{4kt}( x ^2 + 4\alpha_0)\right]}{\left(\sqrt{-\gamma} t \operatorname{ch} \frac{\alpha_a x_a}{t}\right)^{3/2}}$
8	(18) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$A^{3/4} \exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2 t}{2} + 2k\beta \operatorname{arctg} \frac{C(2)x}{C(1)x}\right)\right\}$ $\frac{1}{\left[ x+\varepsilon t ^2 - (C(3)(x+\varepsilon t))^2\right]^{3/4}}$	$A^{3/4} \exp\left\{i\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{C(2)x}{C(1)x} - \frac{ x ^2}{4kt}\right)\right\}$ $\frac{1}{\left[ x ^2 - (C(3)x)^2\right]^{3/4}}$

одномерного ( $n = 1$ ) нелинейного уравнения

$$i\psi_t = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \quad \lambda < 0.$$

Решение (20) естественно назвать солитонным по аналогии с известным решением Захарова–Шабата [6]

$$\psi(t, x_1) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \alpha_1 \frac{\exp\left[-\frac{iv}{2}\left(x_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{2\alpha_1^2}{v}\right)t\right)\right]}{\operatorname{ch}(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 vt)}$$

нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \lambda\psi|\psi|^2, \quad \lambda < 0.$$

**2. Точные решения уравнения (2).** Редукция уравнения (2) по оператору  $X_2$  [1] преобразует его к свободному уравнению Шредингера (1) [1] с дополнительным условием (6). Подстановка (6) в уравнение (1) [1] приводит к системе (7) для функции  $P(t, x)$ . Следовательно, получаем плосковолновое решение нелинейного уравнения (2)

$$\psi = \gamma \exp\{i(kb_a b_a t + b_a x_a)\}, \quad b_a \in \mathbb{R}^1. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь нелинейное эллиптическое уравнение

$$k\Delta\varphi + \lambda\varphi \frac{\partial|\varphi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\varphi|}{\partial x_a} |\varphi|^{-2} = 0, \quad (22)$$

которое получается из уравнения (2) редукцией по оператору  $X_3$  при  $\alpha_0 = 0$  [1]. Любое решение уравнения (22) будет стационарным решением уравнения (2). Но из этих стационарных решений, применяя формулы разложения, полученные в [1], мы можем построить многопараметрические семейства нестационарных решений. Таким образом, представляется важным построить классы точных решений уравнения (22).

Пусть в уравнении (22)

$$\varphi = \varphi(w), \quad w = c_a x_a, \quad c_a \in \mathbb{C}^1, \quad (23)$$

тогда для  $\varphi$  получаем ОДУ второго порядка

$$c_a c_a \left[ \frac{d^2 \varphi}{dw^2} + \frac{\lambda}{k} \varphi \left( \frac{d|\varphi|}{dw} \right)^2 |\varphi|^{-2} \right] = 0. \quad (24)$$

Если  $c_a c_a = 0$ , то уравнение (24) превращается в тождество и получаем решение уравнения (2)

$$\psi = F(c_a x_a), \quad (25)$$

где  $F$  — произвольная дважды дифференцируемая комплексная функция.

Если  $c_a c_a > 0$ ,  $c_a \in \mathbb{R}^1$ , то уравнение (24) в случае  $\lambda/k = -1$  удается полностью проинтегрировать и получить решение исходного нелинейного уравнения (2)

$$\psi(x) = \frac{\exp [d_3 - d_1 w \pm i\sqrt{2} \operatorname{arctg} \exp(2d_1 w + d_2/2)]}{\sqrt{1 + \exp(4d_1 w + d_2)}}, \quad (26)$$

где  $d_1 > 0$ ,  $d_2, d_3 \in \mathbb{R}^1$ ,  $w = c_a w_a$ .

Если  $c_a c_a > 0$  и  $\lambda/k \neq -1$ , то нетрудно построить частное решение уравнения (24), которое приводит к решению

$$\psi = (c_a x_a + c_0)^{1/\lambda_1}, \quad \lambda_1 = 1 + \lambda/k \neq 0 \quad (27)$$

уравнения (2).

Для построения новых решений уравнения (22) преобразуем его к системе двух действительных уравнений с помощью замены

$$\varphi = R(x) \exp\{iP(x)\}, \quad (28)$$

где  $R, P$  — действительные функции.

Подставляя (28) в уравнение (22), получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta R &= R P_a P_a - \frac{\lambda}{k} R_a R_a / R, \\ R \Delta P &= -2 P_a R_a, \end{aligned} \quad (29)$$

которая заменой

$$R = \begin{cases} \exp\{R^1(x)\}, & \lambda/k = -1, \\ (R^1)^{1/\lambda_1}, & \lambda/k \neq -1, \quad \lambda_1 = 1 + \lambda/k \end{cases} \quad (30)$$

сводится соответственно к системам

$$\Delta R^1 = P_a P_a, \quad \Delta P = -2 R_a^1 P_a, \quad \lambda_1 = 0, \quad (31)$$

$$\Delta R^1 = \lambda_1 R^1 P_a P_a, \quad R^1 \Delta P = -\frac{2}{\lambda_1} R_a^1 P_a, \quad \lambda_1 \neq 0 \quad (32)$$

(индексы  $a = 1, 2, 3$  у функций  $P, R, R^1$  обозначают дифференцирование по переменным  $x_a$ ).

Так как в случае  $P(x) = \text{const}$ ,  $\Delta R^1 = 0$ , т.е.  $R^1$  — решение уравнения Лапласа, системы уравнений превращаются в тождества, воспользовавшись (28) и (30), получим семейство стационарных решений уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\{R^1(x)\}, & \lambda_1 = 0, \\ (R^1(x))^{1/\lambda_1}, & \lambda_1 \neq 0. \end{cases} \quad (33)$$

В частности, для фундаментального решения  $R^1 = \frac{1}{|x|}$  трехмерного уравнения Лапласа получаем решение уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{|x|}, & \frac{\lambda}{k} = -1, \\ |x|^{-1/\lambda_1}, & \frac{\lambda}{k} \neq -1. \end{cases} \quad (34)$$

Рассмотрим теперь систему (31) с дополнительным условием

$$\Delta P = 0. \quad (35)$$

Как известно, частное решение уравнения (35) задается формулой

$$P = f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a), \quad (36)$$

где  $c_a c_a = 0$ ,  $f$  — произвольная дважды дифференцируемая действительная функция.

Подставляя выражение (36) в систему (31), после соответствующих преобразований, в предположении, что  $R^1 = R^1(c_a x_a, c_a^* x_a)$  получаем ОДУ

$$\frac{d^2 R^1}{dV^2} = 1, \quad V(x) = if(c_a x_a) - if(c_a^* x_a). \quad (37)$$

Решая уравнение (37) и пользуясь формулами (28), (30), получаем еще одно семейство решений уравнения (2) при  $\lambda/k = -1$ , которое содержит произвольную функцию

$$\psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a))^2 + \right. \\ \left. + id_1(f(c_a x_a) - f(c_a^* x_a)) + i(f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a)) \right\},$$

где  $c_a c_a = 0$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$ .

Подстановка выражения (36) в систему (32) после соответствующих выкладок позволяет получить решение нелинейного уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} [d_1 \exp(\sqrt{\lambda_1} V(x)) + d_2 \exp(-\sqrt{\lambda_1} V(x))]^{1/\lambda_1} \times \\ \quad \times \exp\{i(f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a))\}, & \lambda_1 > 0, \\ [d_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1} V(x)) + d_2 \sin(\sqrt{-\lambda_1} V(x))]^{1/\lambda_1} \times \\ \quad \times \exp\{i(f(c_a x_a) + f(c_a^* x_a))\}, & \lambda_1 < 0, \end{cases}$$

где  $c_a c_a = 0$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$ ,  $V(x)$  см. (37).

Все построенные выше стационарные решения нелинейного уравнения (2) легко размножить с помощью соответствующих формул [1] до многопараметрических семейств нестационарных решений.

В заключении отметим, что в данной работе мы воспользовались только несколькими редукционными уравнениями из четырнадцати, полученных в [1], для нахождения точных решений нелинейных уравнений (1), (2). С большим или меньшим успехом можно воспользоваться и другими редукционными уравнениями. К сожалению, при дальнейшей редукции этих уравнений очень часто получаются нелинейные ОДУ второго порядка, которые не интегрируются в элементарных функциях.

**3. Нелинейные ДУРП с логарифмической нелинейностью.** В работе [7] доказано, что уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\lambda U_t = \Delta U + \lambda U \ln U, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad U = U(t, x_1, \dots, x_n) \quad (38)$$

инвариантно относительно алгебры Ли  $\mathcal{A}\mathfrak{B}(1, n)$  с базисными операторами

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n}, \quad (39a)$$



$$I = \frac{\lambda}{2} e^t U \partial_U, \quad \mathfrak{G}_a = e^t \partial_a - x_a I. \quad (39b)$$

Алгебра  $A\mathfrak{G}(1, n)$  (39) принципиально отличается от алгебры Галилея  $AG(1, n)$  коммутационными соотношениями  $[P_t, \mathfrak{G}_a] = \mathfrak{G}_a$ ,  $[P_t, I] = I$ . Операторы  $\mathfrak{G}_a$  генерируют группу преобразований

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + v_a e^t, \quad a = \overline{1, n}, \\ U' = U \exp \left[ -\frac{\lambda}{2} e^t \left( x_a v_a + e^t \frac{v_a v_a}{2} \right) \right],$$

где  $v_a$  — произвольные действительные параметры.

Представляется полезным найти системы нелинейных ДУЧП, инвариантных относительно алгебры  $A\mathfrak{G}(1, n)$ . С этой целью рассмотрим системы нелинейных эволюционных уравнений вида (3) [1]

$$\lambda_1 \psi_t^{(1)} = A_{ab}^{(1)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \psi_{ab}^{(1)} + B^{(1)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}), \\ \lambda_2 \psi_t^{(2)} = A_{ab}^{(2)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}), \quad (40)$$

где  $A_{ab}^{(m)}$ ,  $B^{(m)}$ ,  $m = 1, 2$ , — произвольные дифференцируемые комплексные или действительные функции.

**Теорема.** Система уравнений (40) инвариантна относительно алгебры  $A\mathfrak{G}(1, n)$  с базисными операторами (39a) и

$$I_\lambda = \frac{e^t}{2} (\lambda_1 \psi^{(1)} \partial_{\psi^{(1)}} + \lambda_2 \psi^{(2)} \partial_{\psi^{(2)}}), \quad \mathfrak{G}_a = e^t \partial_a - x_a I_\lambda$$

тогда и только тогда, когда

$$A_{ab}^{(m)} = 0, \quad a \neq b, \quad A_{aa}^{(m)} = C_m(v), \\ B^{(m)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \psi^{(m)} F_m(v, \theta) + (1 - C_m(v)) \psi_a^{(m)} \psi_a^{(m)} / \psi^{(m)} + \\ + \lambda_m C_m(v) \psi^{(m)} \int [C_m(v) \psi^{(m)}]^{-1}, \quad m = 1, 2,$$

$C_m$ ,  $F_m$  — произвольные функции,  $v = (\psi^{(1)})^{\lambda_2} (\psi^{(2)})^{-\lambda_1}$ ,  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$ ,  $\lambda_m \in \mathbb{C}^1$ .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 1, 2, 3 в работе [1].

**Следствие.** Если в системе (40) функции  $B^{(m)}$  не зависят от производных, то система инвариантна относительно алгебры  $A\mathfrak{G}(1, n)$  только тогда, когда имеет вид

$$\lambda_1 \psi_t^{(1)} = \Delta \psi^{(1)} + \lambda_1 \psi^{(1)} \ln \psi^{(1)} + \psi^{(1)} F_1(v), \\ \lambda_2 \psi_t^{(2)} = \Delta \psi^{(2)} + \lambda_2 \psi^{(2)} \ln \psi^{(2)} + \psi^{(2)} F_2(v). \quad (41)$$

В случае системы комплексно-сопряженных уравнений шредингеровского типа вместо системы (41) получаем уравнение

$$i \psi_t = k \Delta \psi = i \psi \ln \psi + \psi F(|\psi|),$$

где  $F$  — произвольная функция,  $|\psi| = \sqrt{\psi \psi^*}$ ,  $k \in \mathbb{R}^1$ .

1. Фушич В.И., Чернига Р.М., Симметрия и точные решения многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа. I, *Укр. мат. журн.*, 1989, **41**, № 10, 1349–1357.
2. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
3. Collins С.В., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1976, **80**, 165–171.
4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Наука, 1971, 1108 с.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *Журн. эксперим. и теор. физики*, 1971, **61**, № 1, 118–134.
7. Дородницын В.А., Князева И.В., Свищевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях, *Дифференц. уравнения*, 1983, **19**, 1215–1223.

# Computer algebra application for determining Lie and Lie–Bäcklund symmetries of differential equations

W.I. FUSHCHYCH, V.V. KORNYAK

The application of computer algebra for determining Lie and Lie–Bäcklund (LB) symmetries of differential equations is considered. Algorithms for calculating the symmetries are developed and implemented on the basis of computer algebra systems REDUCE, AMP and FORMAC. The most effective and advanced program is written in FORMAC. It finds LB symmetries completely automatically. In many cases the program yields the full algebra of symmetries. If the program fails in full integration of the determining system, it reduces the remaining determining equations to the system in involution.

## 1. Introduction

The determination of point and contact Lie symmetries and Lie–Bäcklund symmetries of differential equations is one of the central problems in applied mathematics and mathematical physics. The mathematical theory is rather well developed [10, 8], but computing of the symmetries of certain systems of differential equations requires extremely tedious symbolic manipulations. In many cases the only possibility to cope with the task is the application of computer algebra. There are several programs and packages for solving the problems in this field. The REDUCE package for obtaining determining systems of point symmetries was suggested by Schwarz [11]. This package includes several programs for different kinds of differential equations and systems. This work was developed by adding programs for solving the determining systems [12], and the resulting package was successfully applied to many problems in mathematical physics. In [1] the universal REDUCE program was suggested for computing determining systems of point and contact symmetries of arbitrary systems of differential equations. To obtain determining equations of LB symmetries the FORMAC and REDUCE programs have been developed [2, 3]. We have also written an analogous AMP program. It is very difficult or impossible to handle the LB determining systems by hand, because generally they contain several hundreds of equations (though linear and overdetermined). We should mention, also, a recent FORMAC package CRACKSTAR [13], which is closely related with the subject considered. This package is intended for investigation of Lie-symmetries of pde's and dynamical symmetries of ode's as well as other analytic properties.

Comparing different computer algebra systems (REDUCE 2, REDUCE 3.0, AMP 6.4 and PL/I-FORMAC) we came to a conclusion that FORMAC is the most suitable system for our purposes. Of course, it is out of date to some extent but much more effective than REDUCE and AMP. We developed the FORMAC program LBF for determining Lie–Bäcklund symmetries of arbitrary systems of differential equations. The program creates the LB determining system, integrates it as far as possible and,

if some part of the determining system remains, it reduces this part to the system in involution, i.e. to system with all integrability conditions being explicit [4].

In this paper our consideration is given mostly to the general case of LB symmetries, because point and contact symmetries are only special cases of LB ones. Readers interested in the details of algorithms and programs concerning point and contact symmetries are referred to papers mentioned above.

## 2. Mathematical background

We shall consider a system of  $s$  partial differential equations of  $k$ th order for  $m$  functions  $u^\alpha$  in the  $n$  independent variables  $x^i$

$$F^\nu(x^i, u^\alpha, u_{i_1 \dots i_l}^\alpha) = 0, \quad (1)$$

$$\nu = 1, \dots, s; \quad \alpha = 1, \dots, m; \quad i, i_1, \dots, i_l = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, k,$$

where  $u_{i_1 \dots i_l}^\alpha$  are jet bundle coordinates corresponding to the partial derivatives of  $u^\alpha$  with respect to  $x^{i_1}, \dots, x^{i_l}$ .

The LB group is defined as the tangent transformation group of infinite order. In the terms of infinitesimal generators it means that coordinates of Lie-algebra depend on the unlimited number of derivatives. The Lie-algebra vector called the LB operator has the form

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{l \geq 1} \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha}. \quad (2)$$

Summation over twice occurring indices is always understood,  $\xi^i, \eta^\alpha, \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha$  depend on variables  $x^i, u^\alpha, u_{i_1 \dots i_l}^\alpha$ , and  $\zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha$  are generated recursively by

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j), \quad \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha = D_{i_l}(\zeta_{i_1 \dots i_{l-1}}^\alpha) - u_{j_1 \dots j_l}^\alpha D_{i_l}(\xi^j). \quad (3)$$

$D_i$  is the operator of total differentiation with respect to  $x^i$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{l \geq 1} u_{i_1 \dots i_l}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha}. \quad (4)$$

System (1) with all the differential consequences is called a differential manifold

$$[F]: \quad F^\nu = 0, \quad D_i(F^\nu) = 0, \quad \dots, \quad D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_l}(F^\nu) = 0, \quad \dots \quad (5)$$

According to the definition systems, (1) is invariant with respect to LB group, if the differential manifold  $[F]$  is invariant, i.e.

$$X[F]|_{[F]} = 0. \quad (6)$$

There is a theorem stating that condition (6) is equivalent to

$$XF|_{[F]} = 0, \quad (7)$$

i.e. it is sufficient to apply the  $X$  operator only to initial equations (1), but to consider the differential consequences when transferring to the manifold.

It is easy to check that LB operators of the form

$$X_* = \xi_*^i D_i, \quad (8)$$

where  $\xi_*^i$  are arbitrary functions of the  $x^i$ ,  $u^\alpha$ ,  $u_{i_1 \dots i_l}^\alpha$  variables, and to leave the arbitrary differential manifold invariant, i.e. they do not contribute to the invariance condition. These operators form the ideal in the Lie-algebra of all the LB operators. Therefore, it is possible to consider, without loss of generality, the factor-algebra of the complete Lie-algebra with respect to the above ideal. Each operator (2) is equivalent in the factor-algebra to some operator with vanished  $\xi^i$ , viz.

$$X \sim Y = X - \xi^i D_i = (\eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots$$

Thus the elements of factor-algebra may be represented in the form

$$X = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{l \geq 1} \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha}. \quad (9)$$

Operators (9) are called ‘‘canonical operators’’. Transition to canonical operators essentially simplifies the calculations, since now it is sufficient to consider  $m$  functions  $\eta^\alpha$  instead of  $n + m$  functions  $\xi^i$  and  $\eta^\alpha$ . Moreover, extension formulae (3) take a simple form

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha), \quad \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha = D_{i_l}(\zeta_{i_1 \dots i_{l-1}}^\alpha). \quad (10)$$

In terms of canonical operators the invariance conditions, i.e. the determining equations, take the form

$$\left( \eta^\alpha \frac{\partial F^\nu}{\partial u^\alpha} + D_i(\eta^\alpha) \frac{\partial F^\nu}{\partial u_i^\alpha} + D_{i_2}(D_{i_1}(\eta^\alpha)) \frac{\partial F^\nu}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots \right) \Big|_{[F]} = 0. \quad (11)$$

This is a system of equations with respect to  $\eta^\alpha$ . The solutions of the determining equations depending on the derivatives of no more than  $k$ th order are called  $k$ th order solutions. This definition allows the overdetermined system to be obtained, because we can split the left part of (11) with respect to ‘‘free derivatives’’, i.e.  $u_{i_1 \dots i_l}^\alpha$  for  $l > k$ . If the 1st order derivatives are not expressed by derivatives of a higher order in the process of transition to manifold  $[F]$ , then the 1st order solutions contain point and contact Lie symmetries. In particular, point symmetries are corresponding to the 1st order solutions of the form

$$\eta_{\text{point}}^\alpha = \eta^\alpha(x^i, u^\beta) - \xi^j(x^i, u^\beta) u_j^\alpha, \quad (12)$$

where  $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $\xi^j$  and  $\eta^\alpha$  are usual coordinates of the Lie-algebra of point transformations. Note that the point transformation groups obtained from the solutions of LB determining equations may be wider than the classical ones. This may occur if some equations of the system under consideration are of an order less than the maximum one of the system, because, when transferring to the manifold, the LB symmetries imply the use of differential consequences, i.e. relations

$$F^\nu = 0, \quad D_i(F^\nu) = 0, \quad \dots, \quad D_{i_1} \dots D_{i_l}(F^\nu), \quad \dots,$$

whereas the classical definition of point symmetries uses relations  $F^\nu = 0$  only [8]. There are non-trivial LB symmetries of the 1st order, i.e. non-equivalent to point or contact ones. It occurs, for example, for Dirac equations [14].

### 3. Description of the program and algorithms

The LBF program is a single program acting completely automatically. Its text contains 37 internal procedures besides the main one. The total length of the program is now 1362 lines of PL/1-FORMAC code. We shall describe the program and its algorithms illustrating some steps by the simple example of determining 1st order LB symmetries for one-dimensional linear heat equation. To be more concrete, let us give the full input and output for this task with the comments on the right side.

Input:

'HEAT EQUATION'	— comment	
1	— symmetry order	
'X, T; U'	— independent and dependent variables	(13)
'UT - UXX'	— heat equation $U_T - U_{XX} = 0$ .	

To simplify the input and output expressions, the derivatives are represented by concatenation of dependent and independent variables. Thus, if one uses multicharacter symbols for variables one has to choose them so as to avoid ambiguities. If one considers the system of equations, the corresponding character strings separated by blanks must be added.

Output:

```
HEAT EQUATION
INDEPENDENT AND DEPENDENT VARIABLES:
X, T; U
SYSTEM OF EQUATIONS:
1). UT - UXX = 0
GENERATORS OF LIE-BÄCKLUND SYMMETRIES OF THE 1ST ORDER:
1).
U ≠ C1 UX + C2 (1/2 UX + T UX) + C3 (UX X + 2 T UT) + C4
(T UX X + T2 UT + U (1/2 T + 1/4 X2)) + C5 UT + C6 U + F1
DEPENDENCES OF FUNCTIONS:
F1 = F1(X, T)
REMAINING EQUATIONS:
1).
0 = F1.(T) - F1.(X, X) — equation  $F_T^1 - F_{XX}^1 = 0$  (14)
```

The designations  $C_i$  and  $F_i$  mean constants  $C_i$  and functions  $F_i$ ,  $U\#$  means  $\overset{*}{U} \equiv \eta^1$ . Taking into account formula (12) we see that the 1st order LB symmetries appear to be point ones. Considering the coefficients at  $C_i$  and using (12) it is easy to obtain the symmetry operators

$$e_1 = \partial_X, \quad e_2 = \frac{1}{2} X U \partial_U - T \partial_X, \quad e_3 = X \partial_X + 2T \partial_T,$$

$$e_4 = U \left( \frac{1}{2} T + \frac{1}{4} X^2 \right) \partial_U - X T \partial_X - T^2 \partial_T, \quad e_5 = \partial_T, \quad e_6 = U \partial_U.$$

As is the case for every linear partial differential equation, there is also infinite-dimensional subalgebra  $e_\infty = F^1(X, T) \partial_U$ , where  $F^1$  is an arbitrary solution of equation (14). This example takes 47 seconds of CPU time and 260 Kbytes memory

on the ES 1045 computer (under the OS/VS) with the internal performance of about 700 000 op/sec.

The LBF program consists of two main parts; the computation of determining system, and the solution of that system. The 1st part is the improved and generalised version of the program described in [2].

We use the sequencing of  $u_{i_1 \dots i_l}^\alpha$  and derivatives of functions  $F^i$ , included in symmetry generators, in the following way: sets of lower indices are ordered lexicographically; after that the items are ordered in accordance with their upper indices. The position of the item in such a row we shall call "ordinal". This ordering permits to perform the considerable part of calculations using the fast and non-wasting memory of PL/I integer arithmetic only.

The program executes sequentially the following steps.

- (1) Reading the input data and transforming them into internal form introducing the ordering mentioned above.
- (2) Computation of the differential consequences up to the required order and elimination of dependences thereof. The program tries to solve the system together with differential consequences with respect to derivatives of the highest ordinals which are included linearly in relations. To do this, the program uses the Gauss excluding method. Note that differential consequences depend on the highest order derivatives only linearly. Some equations may not contain linearly included derivatives. The program marks such equations.

If the problem of classification is considered, then the system of equations contains arbitrary parameters or functions. Some combinations of these items may be used as denominators during the excluding process. Everywhere in the program in similar situations such different denominators are memorised to be printed at the end of program execution. It is necessary to consider separately the cases when such combinations are zeros.

- (3) The determination of symmetry variables, i.e. variables which the generators depend on. (The generators do not depend on derivatives of an order higher than the symmetry order and on derivatives excluded in the previous step.)
- (4) Computation of canonical LB operator (9) and the result of its action on system (1), i.e. computation of invariance conditions.
- (5) Transition to manifold. The program eliminates the derivatives, excluded in step (2), in the invariance conditions. If there are equations unresolved in step (2) the program adds them to invariance conditions (11) having preliminarily multiplied them by indefinite factors.
- (6) Separation of the determining system with respect to free variables, i.e. derivatives of an order higher than the symmetry order. The program separates the equations not only with respect to different powers of the free variables but also with respect to arbitrary different independent functions of such variables. It is possible that the functions independent in general may be dependent in some particular cases. For example, if  $u_{xx}$  is a free variable, then from  $A \sin(u_{xx}) + B \cos(u_{xx}) = 0$  it follows that  $A = 0$  and  $B = 0$ , but from  $Au_{xx}^2 + Bu_{xx}^k = 0$  it follows that  $A = 0$  and  $B = 0$  if  $k \neq 0$ , but  $A + B = 0$  otherwise. Another obvious example  $Af(u_{xx}) + Bf'(u_{xx}) = 0$  requires to consider the particular case

$f = e^{u_{xx}}$ . For subsequent consideration of similar particular cases the program memorises all different separation factors containing arbitrary functions and parameters. For the sake of economy of memory, during the separation process, zeros are deleted immediately, i.e. when a one-term determining equation arises, it and its differential consequences are substituted at once into all remaining expressions.

- (7) Exclusion of indefinite factors. Using the Gauss method the program excludes indefinite factors if they were introduced at step (5).

At the end of the first part of the program the state of the determining system (i.e. expressions for generators, dependences of functions, equations) considered is for the example:

$$\begin{aligned} u^* &= F^1; & F^1 &= F^1(x, t, u, u_x, u_t); \\ F_t^1 - F_{xx}^1 - 2u_t u_x F_{uu_x}^1 - 2u_t F_{xu_x}^1 - 2u_x F_{xu}^1 - u_t^2 F_{u_x u_x}^1 - u_x^2 F_{uu}^1 &= 0, \\ F_{xu_t}^1 + u_t F_{u_x u_t}^1 + u_x F_{uu_t}^1 &= 0, & F_{u_t u_t}^1 &= 0. \end{aligned}$$

- (8) Simplification of the determining system. The fragment of the program responsible for this step is

```
BC = '1'B;
DO WHILE(BC);
  BB = '1'B;
DO WHILE(BB);
  BA = '1'B;
  DO WHILE (BA);
    CALL REDSYS(1); CALL ORTSYS(0); BA = SMONINT;
  END;
  BB = INVOL;
END;
BC = RESTINT;
END;
```

Here, BA, BB, BC are the control variables. The very inner loop contains the calls of the most efficient procedures. The REDSYS procedure is auxiliary. It reduces the determining system to some canonical form. Argument "1" means that the reduction begins from the first equation. (There are calls of REDSYS from other procedures with different values of argument.) The call of the ORTSYS( $K$ ) procedure reduces the determining system to the orthonomic form [4], i.e. the derivatives of the highest ordinals (leading derivatives) are singled out and substituted (with their differential consequences of the order up to  $K$ ), equations are ordered in accordance with the increase of ordinals of leading derivatives. ORTSYS deletes the equations not containing derivatives after having performed the corresponding substitutions. The SMONINT procedure integrates the systems of monomial equations, i.e. systems of the form  $\{F_{i_1 \dots i_k}^j = 0\}$ . Here,



the lower index  $i_l$  means the differentiation with respect to the  $i_l$ th symmetry variable. The procedure yields the expression for  $F^j$  simultaneously considering all monomials for the given  $j$ . It allows the number of iterations to be reduced. SMONINT substitutes also  $F^j$  and its derivatives in other expressions and separates the determining system after that. If there are no monomial equations in the determining system, then BA takes the value ' $\emptyset$ 'B and the loop is completed.

After this loop the state of the determining system for the heat equation is

$$\begin{aligned} \overset{*}{u} &= F^3 + F^4 u + F^2 u_x + F^1 u_t; \\ F^1 &= F^1(t), \quad F^2 = F^2(x, t), \quad F^3 = F^3(x, t), \quad F^4 = F^4(x, t); \\ 2F_x^2 - F_t^1 &= 0, \quad 2F_x^4 - F_t^2 + F_{xx}^2 = 0, \quad F_t^3 - F_{xx}^3 = 0, \quad F_t^4 - F_{xx}^4 = 0. \end{aligned}$$

The INVOL procedure performs the further integrations or reduces the remaining part of the determining system to the system in involution by Riquier–Janet method [4]. The method consists in calculating differential consequences of equations and in excluding dependences out of them. INVOL tries to separate and integrate the relations arising during this process. If it fails in integration, then the system is reduced to the one in involution, and BB takes the value ' $\emptyset$ 'B; if otherwise, BB = '1'B, and the whole process is repeated. The INVOL procedure integrates the monomials and often arising equations of the form  $F_{i_1 \dots i_k}^j = P$ , where  $P$  is the polynomial of the variables of differentiations.

As a rule, the combination of the above-mentioned operations is sufficient to reveal the major part of dependences of the symmetry generators, because these dependences are often polynomial. For instance, our example is completed by the INVOL procedure. In some cases it is possible to go further in integration of the remaining part of the determining system. This is effected by the RESTINT procedure. In gaining experience, it is possible to add in this procedure some particular and rare methods of integration. Now RESTINT contains the procedure for solving the ordinary differential equations or systems with constant (with respect to differentiation variable) coefficients up to the 4th order, and the procedure for solving differential equations of the 1st order with variable coefficients. The last procedure yields in non-polynomial cases the formal expressions for indefinite integrals. BC takes the value '1'B if further simplification after RESTINT is possible, and ' $\emptyset$ 'B, if otherwise.

- (9) The last step of the LBF program is output. The internal designations are replaced by more expressive ones. The expressions for generators are reduced to some form simplifying the extraction of different one-dimensional subalgebras, as in the example above. The program removes also superfluous functions or constants if they arise during integration. For example, if  $F^1(X, Y)$  and  $F^2(X)$  are arbitrary functions, then  $F^1(X, Y) + F^2(X)$  is equivalent to  $F^1(X, Y)$ . In general, the output may contain two more items, in addition to those presented in the example: the list of different denominators containing arbitrary functions or parameters, and the analogous list of separation factors.

Let us demonstrate the result of the program application in obtaining the 1st order symmetries of a more complicated non-linear equation [5]

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \square u - \lambda u \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = 0, \quad (15)$$

where

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = u_{\varphi_t}^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2.$$

The LBF program gives the general solution having in terms of operators the form:

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_x, & e_2 &= \partial_y, & e_3 &= \partial_z, & e_4 &= \partial_{\varphi_t}, & e_5 &= \partial_x + x\partial_{\varphi_t}, \\ e_6 &= \varphi_t \partial_y + y\partial_{\varphi_t}, & e_7 &= \varphi_t \partial_z + z\partial_{\varphi_t}, & e_8 &= y\partial_x - x\partial_y, & e_9 &= x\partial_z - z\partial_x, \\ e_{10} &= z\partial_y - y\partial_z, & e_{11} &= \varphi(u)\partial_u, & e_{12} &= \partial_\tau, \\ e_{13} &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t + 2\tau\partial_\tau, \\ e_{14} &= x\tau\partial_x + y\tau\partial_y + z\tau\partial_z + t\tau\partial_{\varphi_t} + \tau^2\partial_\tau + \left( \frac{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}{4} - 2\tau \right) \varphi(u)\partial_u, \\ e_{15} &= \tau\partial_x + \frac{x}{2}\varphi(u)\partial_u, & e_{16} &= \tau\partial_y + \frac{y}{2}\varphi(u)\partial_u, & e_{17} &= \tau\partial_z + \frac{z}{2}\varphi(u)\partial_u, \\ e_{18} &= \tau\partial_{\varphi_t} - \frac{t}{2}\varphi(u)\partial_u, & e_\infty &= \psi(x, y, z, t, \tau) \exp\left(-\frac{\lambda u^2}{2}\right) \partial_u, \end{aligned}$$

where

$$\varphi(u) = \exp\left(-\frac{\lambda u^2}{2}\right) \int \exp\left(\frac{\lambda u^2}{2}\right) du,$$

$\psi(x, y, z, t, \tau)$  is an arbitrary solution of equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \square \psi = 0. \quad (16)$$

This example takes 5 min 18 s and 320 Kbytes on ES 1045. Generators  $e_1$ - $e_{10}$  create the Poincaré algebra. As it follows from the above operators, equation (15) turned out to be automorphic, i.e. all its solutions lie on one group orbit. It allows to reduce non-linear equation (15) to linear one (16) using standard techniques of symmetry analysis.

#### 4. Conclusion

There are some problems in connection with the considered one where the computer algebra may be successfully applied. For example, to complete the symmetry analysis of the system of differential equations it is important to learn the subgroup structure of the symmetry group, i.e. to classify the subalgebras of Lie-algebra of symmetries into conjugacy classes. This problem is also important in many other fields. In [9] the algorithm for classification of subalgebras of finite-dimensional Lie-algebras and its computer implementation were described.

Modern development of symmetry analysis includes several approaches considering non-local symmetries, i.e. symmetries depending on integrals or even more general operators acting in the functional space of the dependent functions [7]. Some class of such symmetries and corresponding algorithms and programs were considered in [6].

We are grateful to Professors B. Buchberger, B. F. Caviness and J. A. van Hulzen for their interest in this work.

1. Eliseev V.P., Fedorova R.N., Korniyak V.V., A REDUCE program for determining point and contact Lie symmetries of differential equations, *Comput. Phys. Commun.*, 1985, **36**, 383.
2. Fedorova R.N., Korniyak V.V., Determination of Lie-Bäcklund symmetries of differential equations using FORMAC, *Comput. Phys. Commun.*, 1986, **39**, 93.
3. Fedorova R.N., Korniyak V.V., A REDUCE program for computing determining equations of Lie-Bäcklund symmetries of differential equations, Dubna, JINR, 1987, R11-87-19 (in Russian).
4. Finikov S.P., Carton's exterior forms method, Moscow-Leningrad, Gostechizdat, 1948, 432 p. (in Russian).
5. Fushchych W.I., Symmetry in the problems of mathematical physics, in Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Kyiv, Inst. of Math., 1981, 6–28 (in Russian).
6. Fushchych W.I., Korniyak V.V., Computation on a computer of non-local symmetries of linear systems in mathematical physics, In International Conference on Computer Algebra and its Applications in Theoretical Physics, Dubna, JINR, 1987, D11-85-791, 345–350 (in Russian).
7. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel, 1987, 217 p.
8. Ibragimov N.H., Transformation groups in mathematical physics, Moscow, Nauka, 1983, 286 p. (in Russian).
9. Korniyak V.V., Classification of subalgebras for finite-dimensional Lie-algebra using computer, In international Conference on Computer Algebra and its Applications in Theoretical Physics, Dubna, JINR, D11-85-791, 339–344 (in Russian).
10. Ovsiannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 400 p. (in Russian).
11. Schwarz F.A., A REDUCE package for determining Lie symmetries of ordinary and partial differential equations, *Comput. Phys. Commun.*, 1982, **27**, 179.
12. Schwarz F.A., Automatically determining symmetries of partial differential equations, *Computing*, 1985, **34**, 91.
13. Wolf T., Analytic solutions of differential equations with computer algebra systems, Preprint N 87/5, Friedrich Schiller Universität, Jena, 1987.
14. Zhdanov R.Z., On application of Lie-Bäcklund method to study of symmetries of the Dirac equations, in Group-Theoretical Studies of Mathematical Physics Equations, Kyiv, Inst. of Math., 1985, 70–73 (in Russian).

# On vector and pseudovector Lagrangians for electromagnetic field

W.I. FUSHCHYCH, I.Yu. KRIVSKY, V.M. SIMULIK

A Lagrange function in terms of electromagnetic field strengths is constructed which is a 4-vector with respect to the total Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$  and whose Euler–Lagrange equivalent to the Maxwell equations. The advantages of the known pseudovector with respect to the  $\tilde{P}(1,3)$  group Lagrange function are shown. The conservation quantities on the basis of the corresponding generalization of Noether theorem are found.

A development of Lagrange approach (L-approach) to electrodynamics in terms of field strength tensor  $F = (F^{\mu\nu}) = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$  of the electromagnetic field, without using the potentials  $A^\mu$ , was discussed in [1–4]. It is easy to show that in terms of  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  there is no scalar, with respect to the Poincaré group  $P(1,3)$ , Lagrange function, for which the Euler–Lagrange (EL) equations coincide with the Maxwell equations.

The aim of this paper is a construction of a  $\tilde{P}(1,3)$  vector Lagrangian in terms of  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , i.e. a Lagrange function  $\mathcal{L}_\mu$  which is the vector with respect to the total Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$  (including both  $P(1,3)$  and the space-time reflections) and for which the EL equations are exactly equivalent to the original Maxwell equations. In what follows such a Lagrangian  $\mathcal{L}_\mu$  will be called a Lagrange vector.

Let us represent the Maxwell equations

$$\partial_0 \mathbf{E} = \text{curl } \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho, \quad \partial_0 \mathbf{H} = -\text{curl } \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

in a manifestly covariant form

$$Q^\mu = j^\mu, \quad R^\mu = 0, \quad \mu = \overline{0,3} \equiv 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Here

$$Q^\mu \equiv F_{,\nu}^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu}(x), \quad R^\mu \equiv \varepsilon F_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad \varepsilon F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (3)$$

$F = (F^{\mu\nu})$  is the field strength tensor:

$$F = (F^{\mu\nu}) = (\mathbf{E}, \mathbf{H}) : \quad F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk} H^k, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \quad (4)$$

$\mathbf{j}$  is a current density:

$$\mathbf{j} \equiv (j^\mu) = (\rho, \mathbf{j}), \quad j^0 = \rho, \quad \mathbf{j} = (j^i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  is the completely antisymmetric unit tensor,  $\varepsilon^{0123} = 1$ , and

$$x = (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu. \quad (6)$$

The componets  $Q^\mu$ ,  $R^\mu$  of the vectors  $Q \equiv (Q^\mu)$  and  $R \equiv (R^\mu)$  are connected with the field strengths  $\mathbf{E} \equiv (E^i)$  and  $\mathbf{H} \equiv (H^i)$  as

$$Q^0 = \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad Q^i = (-\partial_0 \mathbf{E} + \operatorname{curl} \mathbf{H})^i \equiv -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ijk} \partial_j H^k, \quad (7)$$

$$R^0 = \operatorname{div} \mathbf{H}, \quad R^i = (-\partial_0 \mathbf{H} - \operatorname{curl} \mathbf{E})^i \equiv -\partial_0 H^i - \varepsilon^{ijk} \partial_j E^k. \quad (8)$$

Now consider the 3rd-rank tensor  $T_{\mu\rho\sigma}$  and pseudotensor  $T'_{\mu\rho\sigma}$  (with respect to the  $\tilde{P}(1,3)$  group), which are constructed with the help of the 4-vectors  $Q^\mu$ ,  $R^\mu$  (3):

$$T_{\mu\rho\sigma} \equiv a[g_{\mu\rho}(Q_\sigma - j_\sigma) - g_{\mu\sigma}(Q_\rho - j_\rho)] + b\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^\nu, \quad (9)$$

$$T'_{\mu\rho\sigma} \equiv a'(g_{\mu\rho} R_\sigma - g_{\mu\sigma} R_\rho) + b'\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(Q^\nu - j^\nu), \quad (10)$$

where  $a, b, a', b'$  are arbitrary constants.

**Theorem 1.** For any  $a, b, a', b' \neq 0$  each of the sets of equations

$$T_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad (11)$$

$$T'_{\mu\rho\sigma} = 0 \quad (12)$$

is equivalent to the original Maxwell equations (2).

One can easily verify the validity of this assertion by rewriting the components of tensors  $T, T'$  (11), (12) in the explicit form.

Just the  $\tilde{P}$ -tensor set of equations (11) and  $\tilde{P}$ -pseudotensor set of equation (12) will be used in this work for the construction of  $\tilde{P}$ -vector L-approach to the electromagnetic field  $F = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ .

Let us introduce in addition to the Lagrange variable for tensor electromagnetic field the new Lagrange variables  $\bar{F}, \bar{F}_{,\nu}$  which are dually conjugated to  $F, F_{,\mu}$  (on the manifold  $\Phi_0$  of the solutions of Maxwell's equations  $\bar{F} = \varepsilon F$ , see (3)). The general form of  $\tilde{P}$ -vector Lagrangian

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu(F, F_{,\nu}, \bar{F}, \bar{F}_{,\nu}), \quad \mathcal{L}_\mu : R^{60} \rightarrow R^1 \quad (13)$$

up to a total 4-divergence terms is the following:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu = & a_1 F_{\mu\nu} Q^\nu + a_2 F_{\mu\nu} \bar{R}^\nu + a_3 \varepsilon F_{\mu\nu} R^\nu + a_4 \varepsilon F_{\mu\nu} \bar{Q}^\nu + a_5 \bar{F}_{\mu\nu} \bar{Q}^\nu + \\ & + a_6 \bar{F}_{\mu\nu} R^\nu + a_7 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} \bar{R}^\nu + a_8 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} Q^\nu + (q_1 F_{\mu\nu} + q_2 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu}) j^\nu. \end{aligned} \quad (14)$$

Here we have used also notations

$$\bar{Q}^\mu \equiv \bar{F}_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad \bar{R}^\mu \equiv \bar{F}_{,\nu}^{\mu\nu}, \quad \varepsilon \bar{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{F}_{\rho\sigma}. \quad (15)$$

**Theorem 2.** The EL equations for  $\tilde{P}$ -vector  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\mu)$  are equivalent to the Maxwell equations if and only if the coefficients in (14) obey the conditions

$$a_8 - a_2 = a = -b' = -q_1 \equiv -q = 0, \quad (16)$$

$$a_6 - a_4 = a' = -b \neq 0, \quad a_1 - a_3 - a_6 - a_8 = a_2 + a_4 + a_5 - a_7 = 0.$$

**Proof.** The straightforward calculations of Lagrange derivatives for the Lagrangian  $\mathcal{L}_\mu$  (14) lead to the result

$$\delta \mathcal{L}_\mu / \delta F_{\rho\sigma} = T_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad \delta \mathcal{L}_\mu / \delta \bar{F}_{\rho\sigma} = T'_{\mu\rho\sigma} = 0, \quad (17)$$

if and only if conditions (16) are fulfilled.

The four components of the Lagrange vector (14) generate four actions

$$W^\mu(F, \bar{F}) = \int d^3x \mathcal{L}^\mu(F(x), \bar{F}(x), \partial_\nu F(x), \partial_\nu \bar{F}(x)), \quad F, \bar{F} \in \Phi, \quad (18)$$

where  $F, \bar{F}$  belong to the set  $\Phi$  of twice differentiable functions, and  $\Phi_0^\mu$  defines the set of extremals of the action (18) with a fixed  $\mu$ .

**Theorem 3.** *The intersection  $\Phi_0 = \cap \Phi_0^\mu$  of the sets  $\Phi_0^\mu$  of extremals of four actions (18), given by the Lagrangian  $\mathcal{L}^\mu$  (14) whose coefficients obey conditions (16) coincides with the set of solutions of Maxwell equations (1).*

**Proof.** The validity of this assertion follows from the derivation of the explicit form of EL equations for (14), i.e. from (17) and the Theorem 1 about the equivalence of the set of eqs. (11) or (12) and the Maxwell equations (2), i.e. (1).

The  $\tilde{P}$ -vector Lagrangian (14), proposed here, has several advantages in comparison with the  $\tilde{P}$ -pseudovector Lagrangian from [3], which in our notations has the form

$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu}) = F^{\mu\nu} R_\nu - \varepsilon F^{\mu\nu} (Q_\nu - j_\nu). \quad (19)$$

Firstly, Lagrangian (19) leads only to the pseudotensor system of eqs. (12), i.e. it gives rise to the pseudotensor system of eqs. (12) in favour of the tensor system of eqs. (11). That is a direct consequence of the pseudovector character of Lagrangian (19). Let us note that without appealing to the additional Lagrange variable  $\bar{F} \equiv (\bar{F}^{\mu\nu})$  it is impossible to construct a  $\tilde{P}$ -vector Lagrangian: the demand of function  $\mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$  being a  $\tilde{P}$ -vector leads to the expression

$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu}) = F^{\mu\nu} Q_\nu + \varepsilon F^{\mu\nu} R_\nu, \quad (20)$$

for which the EL equations are the identities.

Secondly, as is seen from the terms with the current in (19), the interaction Lagrangian in [3] also is a  $\tilde{P}$ -pseudovector one:

$$\mathcal{L}_1^\mu = \varepsilon F^{\mu\nu} j_\nu, \quad \mathcal{L}_1^0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathcal{L}_1^i = (\mathbf{j} \times \mathbf{E} - \rho \mathbf{H})^i. \quad (21)$$

A physical unsatisfactoriness of such an infraction is evident already from the fact that the density of electric charge in (21) is connected not with the electric-field strengths  $\mathbf{E}$  but with the magnetic-field strength  $\mathbf{H}$ .

Finally, the calculation of conserved quantities on the basis of Lagrangian (19) gives the result that a  $\tilde{P}$ -tensor generator of the Poincaré group is corresponded by  $\tilde{P}$ -pseudotensor conserved currents. This defect, together with the above-mentioned ones, is eliminated by using the  $\tilde{P}$ -vector Lagrangian (14).

Derivation of conserved quantities in the framework of the L-approach formulated here demands a generalization of Noether theorem for the case of vector Lagrangian.

**Theorem 4.** *Let*

$$\hat{q} : F(x) \rightarrow F'(x) = \hat{q}F(x) \quad (22)$$

*be an arbitrary invariance transformation of eqs. (2) with  $j = 0$ . Then the conserved current  $\theta_\nu^\mu$ , constructed on the basis of the  $\tilde{P}$ -vector Lagrangian  $\mathcal{L}_\mu$  (14) (of course with  $j = 0$ ) with the help of the formula*

$$\hat{q} \rightarrow \theta_\nu^\mu \stackrel{\text{df}}{=} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial F_{,\mu}^{\rho\sigma}} F'^{\rho\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial \bar{F}_{,\mu}^{\rho\sigma}} \bar{F}'^{\rho\sigma} \right), \quad F' \equiv \hat{q}F, \quad \bar{F}' \equiv \hat{q}\bar{F} = \varepsilon \hat{q}F, \quad (23)$$

is symmetric and its divergence vanishes for any solutions of eqs. (2) with  $j = 0$ :

$$\partial_\mu \theta_\nu^\mu = 0. \quad (24)$$

**Proof.** Derivation of currents (23) for  $\mathcal{L}_\mu$  (14) with  $j = 0$  leads to the result

$$\hat{q} \rightarrow \theta_\nu^\mu = A \left( F^{\mu\alpha} F'_{\alpha\nu} + F'^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \right), \quad (25)$$

$$A = a_1 - a_2 + a_7 - a_8 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$$

Symmetry of tensor (25) is evident and eq. (24) is a consequence of the Maxwell equations (2) with  $j = 0$ .

Note that in the vector L-approach the correspond (according to the Noether theorem) to one generator of invariance transformation.

Let us give a short discussions of conserved quantities which are the consequences of (25). We obtain, taking  $A = 1$ , that generators of 4-translations  $\partial_\mu$  according to the formula (25) give the trivial current

$$\partial_\mu \rightarrow \theta^{\mu\nu} (\hat{q} = \partial_\rho) = (\partial_\rho)^{\mu\nu} \equiv \partial_\rho T^{\mu\nu}, \quad (26)$$

where  $T^{\mu\nu}$  is standard energv-momentum tensor for the field  $F = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ :

$$T_\nu^\mu = F^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad T_\mu^0 = \mathcal{L}_\mu, \quad (27)$$

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \quad \mathcal{L}_j \equiv (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_j. \quad (28)$$

For the analysis of integral conserved quantities

$$\bar{\theta}^\mu = \int d^3x \theta^{0\mu}(x) = \text{const}, \quad \theta^{0\mu}(x) = \theta^{0\mu}(\hat{q}) \equiv (\hat{q}^{0\mu}) \quad (29)$$

it is sufficient to write down the densities  $\theta^{0\mu}$ , omitting the terms with spacelike derivatives, which are not contributed in integral  $\bar{\theta}^\mu$ . We obtain from formula (25) for the densities  $\theta^{0\mu}$ , corresponding to the rest of generators of conformal algebra  $C(1, 3)$  (for the definition of algebra  $C(1, 3)$  see, for example, [5]), the following expressions:

$$\hat{J}_{\rho\sigma} \rightarrow J_{\rho\sigma}^{0\mu} = \delta_\rho^\mu \mathcal{L}_\sigma - \delta_\sigma^\mu \mathcal{L}_\rho, \quad \hat{d} \rightarrow D^{0\mu} = \mathcal{L}^\mu, \quad (30)$$

$$\hat{K}_\rho \rightarrow \mathcal{K}_\rho^{0\mu} = 2(\delta_\rho^\alpha \mathcal{D} + \mathcal{J}_{\rho\sigma} g^{\sigma\mu}), \quad (31)$$

where

$$\mathcal{D} \equiv x^\mu \mathcal{L}_\mu, \quad \mathcal{J}_{\rho\sigma} \equiv x_\rho \mathcal{L}_\sigma - x_\sigma \mathcal{L}_\rho. \quad (32)$$

As one can see from (30)–(32), the  $C(1, 3)$ -generators  $\hat{q} = (\hat{\partial}, \hat{j}, \hat{d}, \hat{k})$  lead here to the conserved quantities, which are expressed in terms of well-known series of main conserved quantities for the electromagnetic field  $F = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , found by Bessel-Hagen [6] on the basis of the L-approach for vector field  $A = (A^\mu)$  of potentials, namely

$$\begin{aligned} P_\rho &= \int d^3x \mathcal{L}_\rho(x), & J_{\rho\sigma} &= \int d^3x (x_\rho \mathcal{L}_\sigma(x) - x_\sigma \mathcal{L}_\rho(x)), \\ D &= \int d^3x x \mathcal{D}(x), & K_\rho &= \int d^3x (2x_\rho \mathcal{D}(x) - x^2 \mathcal{L}_\rho(x)). \end{aligned} \quad (33)$$

It is interesting to note that formula (25) gives the identical zero for the generator  $\hat{q} = \varepsilon$  of duality transformations. In order to obtain nontrivial conservation laws with the help of  $\varepsilon$  let us remind ref. [1], where new invariance algebra  $A_{32} \supset C(1, 3)$  of free Maxwell's equations was found. A subset of the generators of the algebra  $A_{32}$  has the form of composition  $\hat{q} = \varepsilon\hat{q}$  of  $C(1, 3)$  generators  $\hat{q} = (\hat{\partial}, \hat{j}, \hat{d}, \hat{k})$  and the generator  $\varepsilon$ . Formula (25) gives nontrivial conservation laws just for the generators  $\hat{q}' = (\varepsilon\hat{\partial}, \varepsilon\hat{j}, \varepsilon\hat{d}, \varepsilon\hat{k})$ . The corresponding integral conservation laws expressed in terms of series

$$\begin{aligned} Z_\rho^\mu &= \int d^3x \mathcal{Z}_\rho^\mu(x), & Z_{\rho\sigma}^\mu &= \int d^3x (x_\rho \mathcal{Z}_\sigma^\mu - x_\sigma \mathcal{Z}_\rho^\mu), \\ Z^\mu &= \int d^3x x^\nu \mathcal{Z}_\nu^\mu(x), & \overset{c}{Z}_\rho^\mu &= \int d^3x (2x_\rho x^\sigma \mathcal{Z}_\sigma^\mu - x^2 \mathcal{Z}_\rho^\mu) \end{aligned} \quad (34)$$

of conserved quantities having polarization nature. In (34) the densities  $\mathcal{Z}$  of conserved quantities are expressed in the terms of Lipkin's zilch tensor [7] (in Kibble's notation [8])

$$\mathcal{Z}_\rho^\mu \equiv Z_\rho^{0|\mu}, \quad Z_\rho^{0|\mu} = F^{\nu\alpha} \varepsilon F_{\alpha\rho}^{\cdot\mu} - \varepsilon F^{\nu\alpha} F_{\alpha\rho}^{\cdot\mu}. \quad (35)$$

The conservation laws (34) were found in [4–10] without using the L-approach and Noether theorem (except in ref. [10], where a parameter-dependent Lagrangian in terms of potentials was used).

1. Krivsky I.Yu., Simulik V.M., *Ukr. Fiz. Zh.*, 1985, **30**, 1457.
2. Krivsky I.Yu., Simulik V.M., *Voprosy Atomn. Nauki Tehn., Series: Obshchaya Yad. Fiz.*, 1986, **1(34)**, 29.
3. Sudbery A., *J. Phys. A*, 1986, **19**, L33.
4. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., Simulik V.M., On vector Lagrangians for the electromagnetic and spinor fields, Preprint 87.54, Inst. Mathematics Acad. Sci. Ukr. SSR., 1987.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Kyiv, Naukova Dumka, 1983 (English translation: Dordrecht, D. Reidel, 1987).
6. Bessel-Hagen E., *Math. Ann.*, 1921, **84**, 258.
7. Lipkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 696.
8. Lipkin D.M., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 879.
9. Kibble T.W.B., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 1022.
10. Fairlie D.B., *Nuovo Cimento*, 1965, **37**, 897.



# Нелиевские симметрии и нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака

*В.И. ФУЩИЧ, И.Ю. КРИВСКИЙ, В.М. СИМУЛИК*

Сформулировано и доказано обобщение теоремы Нетер о законах сохранения на случай произвольных преобразований инвариантности уравнений математической физики. Найдены новые алгебры инвариантности уравнения Дирака (128-мерная алгебра инвариантности уравнения с  $m = 0$  и 44-мерная алгебра инвариантности уравнения с  $m \neq 0$ ). Соответствующие законы сохранения вычислены по теореме Нетер и по приведенному обобщению этой теоремы.

## Введение

Цель настоящей работы — провести нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака, порождаемых различными (как лиевскими, так и нелиевскими) симметриями, на основе теоремы Нетер [1–5] и ее обобщения. Под нетеровским анализом мы понимаем следующее. Если некоторое уравнение математической физики получено как следствие вариационного принципа, а именно, если найдена функция Лагранжа такая, что для нее уравнения Эйлера–Лагранжа совпадают с данным уравнением (или эквивалентным ему), то законы сохранения вычисляются по известной формуле, задаваемой теоремой Нетер.

Нетеровский анализ законов сохранения применялся до сих пор только в случае лиевских симметрии (т.е. преобразований инвариантности уравнений математической физики, задаваемых лиевскими операторами, которые порождают локальные преобразования).

Нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака — следствий локальных лиевских алгебр инвариантности, задаваемых генераторами из класса операторов Ли [6, 7], — выполнен в [4]. Сохраняющиеся величины — следствия нелиевских [8–11] алгебр инвариантности уравнения Дирака — найдены в [11] без использования теоремы Нетер, поскольку соответствующее обобщение теоремы Нетер отсутствовало среди известных обобщений этой теоремы [2–5]. Также не по теореме Нетер находились и бесконечные серии законов сохранения  $zilch$ -типа [12, 13] для уравнения Дирака, поэтому нетеровская связь этих законов с симметричными свойствами уравнения Дирака не исследована и представляет интерес. Только сравнительно недавно [14] теорема Нетер обобщена на случай преобразований из групп Ли–Беклунда, а в [15, 16] теорема Нетер обобщена для произвольных нелиевских преобразований инвариантности, которые включают преобразования Ли–Беклунда в качестве частного случая. Многочисленные примеры нелиевских преобразований инвариантности уравнений Дирака и Максвелла найдены в [8–11].

Даже для такого хорошо известного объекта, как спинорное поле, существует много методик нахождения сохраняющихся величин, соответствующих той или иной симметрии уравнения Дирака, например, [4, 12, 13]. Иначе говоря, одному

и тому же преобразованию инвариантности уравнения Дирака по разным методам соответствуют различные сохраняющиеся величины. И поэтому из различных соответствий “оператор симметрии — закон сохранения” необходимо выбрать физически адекватное соответствие для всего множества преобразований инвариантности уравнения Дирака, соответствующих как лиевским, так и нелиевским симметриям.

Выбор физически адекватного соответствия “оператор симметрии — закон сохранения” можно осуществить с помощью теоремы Нетер в рамках лагранжева подхода ( $L$ -подхода) для спинорного поля  $\Psi$ , поскольку этот подход основан на релятивистски инвариантной форме принципа наименьшего действия, который является более общим, чем сами уравнения движения. Аргументом в пользу физической адекватности устанавливаемого таким путем соответствия “оператор симметрии — закон сохранения” является то, что по этой методике геометрическим симметриям, связанным с однородностью и изотропностью пространства–времени, соответствуют хорошо известные энергия–импульс и 4-момент количества движения. В настоящей работе на основе теоремы Нетер установлено, каким симметриям уравнения Дирака соответствуют законы сохранения zilch-типа, обсуждавшиеся в [12, 13]. Для этой цели, кроме обобщения теоремы Нетер пришлось установить новые симметричные свойства уравнения Дирака. Эти новые симметрии уравнения Дирака аналогичны найденным в [17, 18] симметрии уравнений Максвелла, которые в [17–24] были использована для нетеровского анализа электромагнитных законов сохранения. Для различных форм уравнений Максвелла была установлена 32-мерная алгебра инвариантности  $A_{32}$  в классе простейших нелиевских операторов — классе  $L_1$  матрично-дифференциальных операторов первого порядка по переменной  $x$ , а также и соответствующая ей группа инвариантности. Именно такому классу операторов, а не более узкому классу — классу операторов Ли, принадлежат сами операторы  $\text{rot}$ ,  $\text{div}$  и  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$  уравнений Максвелла и Дирака.

Нахождение простейшей нелиевской алгебры инвариантности  $A_{32}$  основывалось на том факте, что генератор преобразования Хевисайда–Лармора–Райнича [25–27] (HLR) для уравнений Максвелла коммутирует с генераторами других лиевских симметрии этих уравнений, что дает возможность значительно расширить алгебру инвариантности в классе  $L_1$  путем привлечения композиции оператора HLR и операторов других лиевских симметрии. Эта алгебра инвариантности построена в [17, 18], а позже в работе [28].

В этом отношении уравнение Дирака обладает значительно более богатой симметрией, чем уравнение Максвелла, поскольку для него существует 8 операторов, подобных оператору HLR, в случае  $m = 0$  и 4 оператора в случае  $m \neq 0$ . Поэтому представляет интерес отыскание соответствующей алгебры инвариантности для уравнения Дирака.

Настоящая работа посвящена нахождению алгебр и соответствующих групп инвариантности уравнения Дирака в классе  $L_1$  и анализу соответствующих сохраняющихся величин на основе теоремы Нетер и ее обобщения. Установлена нетеровская связь дополнительных законов сохранения zilch-типа с симметриями уравнения Дирака, задаваемыми операторами из класса  $L_1$ .

### 1. Обобщение теоремы Нетер на нелиевские симметрии

1.1. *Используемые обозначения, понятия и исходные предположения.* Обозначим через  $R_x$   $(r + 1)$ -мерное многообразие:

$$R_x = \{x\}, \quad x = (x^0, x^1, \dots, x^r) = (x^\mu)_{\mu=0}^r \equiv (x^\mu), \quad \mu = \overline{0, r} \equiv 0, 1, \dots, r, \quad (1)$$

через  $C^m$  —  $m$ -мерное комплексное многообразие ( $m$ -мерная комплексная плоскость); через  $\Psi = \Psi(\cdot)$  —  $m$ -компонентную комплекснозначную функцию над  $R_x$ :

$$\Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^m) = (\Psi^s)_{s=1}^m \equiv (\Psi^s) : R_x \rightarrow C^m. \quad (2)$$

Изложение иллюстрируем на примере (произвольной) системы

$$F^s(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \partial_\nu \Psi(x)) = 0, \quad s = \overline{1, m} \equiv 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$m$  уравнений в частных производных для  $\Psi = \Psi(\cdot)$  не выше второго порядка, которую записываем также в матричной форме

$$F(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \partial_\nu \Psi(x)) = 0, \quad F = (F^s)_{s=1}^m \equiv (F^s), \quad (3a)$$

где

$$F : R_x \times C^{m(r+2+(r+1)^2)} \rightarrow C^m. \quad (4)$$

Систему (3) иногда кратко называем уравнением (3a) = (3).

Пусть для уравнения (3) построен  $L$ -подход, т.е. найдена такая функция

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \Psi, \Psi_{,\mu}), \quad \mathcal{L} : R_x \times C^{m(r+2)} \rightarrow R^1, \quad (5)$$

что множество  $\Phi_0 \subset \Phi$  экстремалей действия

$$W(\Psi) \equiv \int dx \mathcal{L}_\psi(x), \quad \Psi \in \Phi, \quad \int dx \equiv \int_{R_x} dx, \quad dx \equiv dx^0 dx^1 \dots dx^r, \quad (6)$$

где  $dx$  — мера Лебега в  $R_x$ ,

$$\mathcal{L}_\Psi(x) \equiv \mathcal{L}(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x)), \quad \Psi \in \Phi, \quad x \in R_x, \quad (7)$$

совпадает с множеством  $\Phi_0$  решений уравнения (3). Иначе говоря, требуется, чтобы система уравнений (3) совпадала или была эквивалентна системе уравнений Эйлера-Лагранжа (ЭЛ)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^s} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s} \Big|_{\substack{\Psi \rightarrow \Psi(x) \\ \Psi_{,\mu} \rightarrow \partial_\mu \Psi(x)}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s_{,\mu}} \Big|_{\substack{\Psi \rightarrow \Psi(x) \\ \Psi_{,\mu} \rightarrow \partial_\mu \Psi(x)}} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s_{,\mu}} = 0, \quad s = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (8)$$

(символ  $-|$  обозначает замену

$$C^m \ni \Psi \rightarrow \Psi(\cdot) \in \Phi, \quad C^m \ni \Psi_{,\mu} \rightarrow \partial_\mu \Psi(\cdot), \quad (9)$$

а по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование в области его изменения).

Индекс  $\Psi$  у  $\mathcal{L}_\Psi(x)$  подчеркивает тот факт, что определяемая по (7) функция  $\mathcal{L}_\Psi : R_x \rightarrow R^1$  является композицией функций  $\mathcal{L}$  (5) и  $\Psi \in \Phi$ , т.е. вид функции  $\mathcal{L}_\Psi$  (7) зависит как от вида функции  $\mathcal{L}$  (5), так и от вида функции  $\Psi \in \Phi$ . Функцию  $\mathcal{L}$  (5) естественно назвать *первичной* функцией Лагранжа, а функцию  $\mathcal{L}_\Psi$  (7) — *вторичной* функцией Лагранжа. Здесь достаточно, чтобы функция  $\mathcal{L}$  (5) была непрерывно дифференцируема по каждому из своих аргументов в области ее определения и чтобы область  $\Phi$  определения действия  $W$  (6) состояла из некоторого множества непрерывно дважды дифференцируемых функций  $\Psi$  (2).

Систему уравнений ЭЛ (8) записываем также в матричной форме

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^s} \equiv \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^s} \right)_{s=1}^m \equiv \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^s} \right) \quad (8a)$$

и кратко называем уравнением ЭЛ (8a) = (8). Подчеркнем еще раз, что точное совпадение уравнения ЭЛ (8) с уравнениями (3) не обязательно, требуется лишь их эквивалентность, т.е. совпадение множества решений уравнений (3) с множеством  $\Phi_0 \subset \Phi$  экстремалей действия (6).

Кроме действия  $W$  (6) используем также действие

$$W(\Omega, \Psi) = \int_\Omega dx \mathcal{L}_\Psi(x) \equiv \int_\Omega dx \mathcal{L}(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x)), \quad \Omega \subset R_x, \quad \Psi \in \Phi, \quad (10)$$

где  $\Omega$  — произвольное борелево множество в  $R_x$ .

Пусть в  $R_x$  заданы  $n$ -параметрические инфинитезимальные преобразования

$$x \rightarrow x' = x + \alpha^a \varphi_a(x) \equiv x + \varphi(x, \alpha) \in R_x, \quad \alpha \equiv (\alpha^a)_{a=1}^n \in R^n, \quad (11)$$

покомпонентно

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &= x^\mu + \alpha^a \varphi_a^\mu \equiv x^\mu + \varphi^\mu(x, \alpha); \\ \varphi_a &\equiv (\varphi_a^\mu)_{\mu=0}^r : R_x \rightarrow R_x, \end{aligned} \quad (11a)$$

в которых  $(2r+1)n$  функций  $\varphi_a^\mu$  непрерывны, т.е. удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi_a(x + \alpha^{a'} \varphi_{a'}(x)) &= \varphi_a(x) + R_a(x, \alpha), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_a(x, \alpha) &= 0, \quad x \in R_x. \end{aligned} \quad (12)$$

Для обсуждения вопроса о законах сохранения (ЗС), порождаемых различными преобразованиями инвариантности (ПИ) уравнения (3) или, что все равно, уравнения ЭЛ (8) или, наконец, множества  $\Phi_0 \subset \Phi$ , достаточно рассматривать инфинитезимальные преобразования в области  $\Phi$  определения действия (10). Полезно различать три типа преобразований в  $\Phi$ .

А. Преобразованиями *первого* типа называем инфинитезимальные  $n$ -параметрические преобразования

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = (1 + \alpha^a \hat{Q}_a(x)) \Psi(x) \equiv F(\Psi(x), x, \alpha), \quad \Psi, \Psi' \in \Phi, \quad (13)$$

покомпонентно

$$\Psi^s(x) \rightarrow \Psi'^s(x) = \Psi^s(x) + \alpha^a \hat{Q}_{as}^s(x) \Psi^{s'}(x) \equiv F^s(\Psi(x), x, \alpha), \quad (13a)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{Q}_a &\equiv (\hat{Q}_{as'}^s), \quad \hat{Q}_a \Psi(x) = \left( f_a^s(\Psi, x) \frac{\partial}{\partial \Psi^s} - \varphi_a^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Psi(x) \equiv \\ &\equiv \left[ f_a^s(\Psi, x) \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi^s} \right]_{\Psi \rightarrow \Psi(x)} - \varphi_a^\mu(x) \partial_\mu \Psi(x),\end{aligned}\quad (14)$$

а функции

$$f_a \equiv (f_a^s)_{s=1}^m : C^m \times R_x \rightarrow C^m \quad (15)$$

непрерывны, т.е. удовлетворяют условиям

$$f_0(\Psi + \alpha^{a'} f_{a'}(\Psi, x), x + \alpha^{a'} \varphi_{a'}(x)) = f_0(\Psi, x) + R_a(\Psi, x, \alpha), \quad (16)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_a(\Psi, x, \alpha) = 0, \quad (\Psi, x) \in C^m \times R_x. \quad (16a)$$

Слагаемые в  $\hat{Q}_a = \hat{Q}_{1a} - \hat{Q}_{2a}$ :

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{1a} \Psi(x) &= f_a^s(\Psi, x) \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi^s} \equiv f_a^s(\Psi(x), x) \Psi^s(x), \\ \hat{Q}_{2a} \Psi(x) &= \varphi_a^\mu(x) \partial_\mu \Psi(x)\end{aligned}\quad (17)$$

называем, соответственно, “спиновой”, и “орбитальной” частями преобразования (13).

Б. Преобразованиями *второго* типа называем инфинитезимальные  $n'$ -параметрические преобразования

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi''(x) = \Psi(x) + \beta^b (\hat{z}_b \Psi)(x) \equiv \Psi(x) + (\hat{z}(\beta) \Psi)(x), \quad b = \overline{1, n'}, \quad (18)$$

задаваемые по существу произвольными линейными операторами  $\hat{z}_b$ ,  $b = \overline{1, n'}$  в  $\Phi$ , не связанными с преобразованиями аргумента функции  $\Psi \in \Phi$ .

В. Преобразованиями *третьего* типа называем следующую специфическую композицию преобразований первого и второго типов:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'''(x) = \Psi(x) + \alpha^a (\hat{z} \hat{Q}_a \Psi)(x) = \Psi(x) + (\hat{z} Q)(x), \quad (19)$$

где

$$Q(x, \alpha) \equiv \alpha^a \hat{Q}_a \Psi(x), \quad (20)$$

а  $\hat{z}$  — любой из операторов  $\hat{z}_b$  в (18).

Смысл преобразований (19) в  $\Phi$  как специфической композиции преобразований (13) первого типа и преобразований (18) второго типа в том, что оператор  $\hat{z}$  применяется не к преобразованной по закону (13) функции  $\Psi' \in \Phi$ , а только к “ $\alpha$ -малой” добавке (20) к функции  $\Psi'$  в формуле (13).

Сделаем несколько разъясняющих замечаний.

Преобразования (13) первого типа задаются функциями  $\varphi_a$  в (11a) и  $f_a$  (15), удовлетворяющими условиям (12) и, соответственно, (16), и суть стандартные преобразования Ли в  $\Phi$ . При этом “орбитальные” операторы

$$\hat{\varphi}_a(\cdot) \equiv \hat{\varphi}_a^\mu(\cdot) \partial / \partial x^\mu \quad (21)$$

— генераторы преобразований аргумента функций  $\Psi \in \Phi$  — можно считать заданными на подходящей области, например, в гильбертовом пространстве  $L^2(R_x) \times C^k$  с любым  $k$ , где можно корректно решать вопрос о коммутационных соотношениях для операторов  $\varphi_a$  (21), а также о восстановлении конечных “орбитальных” преобразований по экспоненциальному ряду

$$\hat{\Phi}(x, \alpha) = \exp(\alpha^a \hat{\varphi}_a(x)) \equiv \exp(\alpha^a \varphi_a^\mu(x) \partial_\mu). \quad (22)$$

“Спиновые операторы”

$$\hat{f}_a(\cdot, x) \equiv \hat{f}_a^s(\cdot, x) \partial / \partial \Psi^s \quad (23)$$

— генераторы преобразований значений  $\Psi(x)$  функций  $\Psi \in \Phi$ , обычно называемых преобразованиями формы, — можно считать заданными на соответствующей области в гильбертовом пространстве  $L^2(C^m) \times C^k$  с любым  $k$ , где можно корректно решать вопрос о коммутационных соотношениях для операторов  $f_a$  (23), а также о восстановлении конечных “спиновых” преобразований по экспоненциальному ряду

$$F_1(\Psi, x, \alpha) = \exp(\alpha^a f_a(\Psi, x)) \equiv \exp(\alpha^a f_a^s(\Psi, x) \partial / \partial \Psi^s). \quad (24)$$

Спиновые операторы могут параметрически зависеть от  $x$ . Если они не зависят от  $x$ , то преобразования (13) (и порождаемые ими конечные преобразования) называют *локальными*.

Если операторы (21) удовлетворяют соотношениям

$$[\hat{\varphi}_a, \hat{\varphi}_b] = C_{ab}^c \hat{\varphi}_c, \quad a, b, c = \overline{1, n}, \quad (25)$$

с некоторыми числами  $C_{ab}^c$ , то операторы  $\{I, \hat{\varphi}_a\}$  — суть генераторы алгебры Ли  $A(C_{ab}^c)$ , определяемой структурными константами  $C_{ab}^c$ , а конечные преобразования (22) образуют соответствующую группу Ли  $G$ . Если операторы (23) удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (25), то натянутая на орты  $\{I, \hat{f}_a\}$  алгебра есть представление алгебры Ли  $A(C_{ab}^c)$ , а конечные преобразования (24) образуют либо представление группы Ли  $G$ , либо же оба представления (22) и (24) образуют представление некоторой накрывающей группы Ли  $\tilde{G}$ .

Здесь мы не будем обсуждать вопросы, связанные с математически корректным определением и восстановлением конечных преобразований, порождаемых инфинитезимальными преобразованиями (13) с произвольными функциями  $\varphi_a^\mu$  и  $f_a^s$ , поскольку формулировка и доказательство теоремы Нетер о ЗС не связана ни с конечными преобразованиями, ни с вопросом о том, порождают ли инфинитезимальные преобразования (13) какую-либо группу или даже алгебру, и какую именно. Тем более, что в простейших случаях, которыми иллюстрируется ниже данное рассмотрение, конечные преобразования практически легко восстанавливаются.

Замечания последнего абзаца относятся также и к преобразованиям (18) второго и (19) третьего типов. При этом важно подчеркнуть, что в преобразованиях (18) второго типа операторы  $\hat{\varkappa}$  могут вовсе не быть операторами Ли. Они могут быть преобразованиями Ли–Беклунда или более общими, например, псевдодифференциальными операторами ПИ уравнений математической физики, многочисленные примеры которых рассмотрены в работах [8–11], или даже операторами дискретных преобразований (например,  $C$ -,  $P$ -,  $T$ -операторами). В этом смысле параметризацию преобразований (18) второго типа можно рассматривать лишь как

способ нумерации (индексификации) различных операторов  $\hat{\varepsilon}_b$  в  $\Phi$ , так что термин “инфинитезимальные” в отношении преобразований (18) может оказаться весьма условным.

В отличие от этого преобразования (13) первого типа ассоциируются с теми же параметрами, что и преобразования (11) в  $R_x$ . Последние хотя бы для некоторого подмножества параметров  $\alpha$  обычно ассоциируются с преобразованиями перехода от одних систем отсчета к другим, и тогда параметры  $\alpha = (\alpha^a)$  (или хотя бы часть из них) имеют четкий физический смысл. Преобразования (11) в  $R_x$  поэтому называются *геометрическими*. Параметры  $\alpha = (\alpha^a)$  преобразований (19) третьего типа не обязательно совпадают с параметрами  $\alpha$  в (11), совпадает лишь их число; важно, однако, что при формулировке теоремы Нетер о ЗС для преобразований (19) третьего типа область  $\Omega$  в действии (10) преобразуется так же, как и в случае преобразований (13) первого типа, т.е. лишь за счет геометрических преобразований (11).

В этой связи может показаться, что нет смысла различать преобразования третьего и первого типов. Однако существенное отличие преобразований (13) первого и (19) третьего типов хотя бы в следующем. Даже в том случае, когда оператор  $\hat{\varepsilon}$  в (19) (как и операторы  $\hat{Q}_a$  (14), определяющие преобразования (13)) есть операторы Ли, оператор результирующего преобразования (19) уже не есть оператор Ли [6, 7, 11]. Например, в простейшем случае, когда  $\Phi$  есть пространство двухкомпонентных функций  $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2)$ , а

$$Q(x, \alpha) = \alpha^\mu \partial_\mu \Psi(x), \quad \hat{\varepsilon} = \gamma \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (26)$$

(т.е. в (17)  $f_a^s(\Psi, \alpha) = 0$ ,  $\varphi_a^\mu(x) = -\delta_a^\mu$ ), для (19) получаем

$$\Psi'''(x) = \Psi(x) + \alpha^\mu \gamma \partial_\mu \Psi(x) \equiv [\Psi + \hat{Q}(\Psi, x, \alpha)\Psi]_{\Psi \rightarrow \Psi(x)}, \quad (27)$$

так что нелиевость генератора преобразований (27) очевидна:

$$\hat{Q}(\Psi, x, \alpha) = \alpha^\mu \left( \Psi^1 \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2 \partial x^\mu} - \Psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \Psi^1 \partial x^\mu} \right). \quad (27a)$$

В этом частном случае, когда оператор  $\hat{\varepsilon}$  — матричный, оператор (27a) есть оператор Ли–Беклунда. Но, конечно, для произвольного оператора  $\hat{\varepsilon}$  преобразования (19) выходят за клас Ли–Беклунда.

Заключительное замечание касается возможности объединить преобразования (13), (18) и (19) всех трех рассматриваемых типов единой формулой. Для этого введем многомерный параметр

$$\begin{aligned} \xi = (\alpha, \beta, \gamma) &\equiv (\xi^u), & \alpha &= (\alpha^a), & \beta &= (\beta^b), & \gamma &= (\gamma^c \equiv \gamma^{ab}); \\ u &= \overline{1, (n + n' + nn')}, & a &= \overline{1, n}, & b &= \overline{1, n'}, & c &= \overline{1, nn'}. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя параметры (28), все три инфинитезимальные преобразования (13), (18) и (19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x) \rightarrow \Psi(x, \xi) &= \Psi(x) + \xi^u (\hat{R}_u \Psi)(x) \equiv \\ &\equiv \Psi(x) + \alpha^a \hat{Q}_a \Psi(x) + \beta^b \hat{\varepsilon}_b \Psi(x) + \gamma^{ab} \hat{\varepsilon}_b \hat{Q}_a \Psi(x). \end{aligned} \quad (29)$$

В сущности, инфинитезимальность рассматриваемых здесь преобразований в  $R_x$  и  $\Phi$  означает, что ввиду независимости параметров  $\xi^\mu$  фактически рассматриваются семейства однопараметрических преобразований

$$x \rightarrow x' = x + \theta \varphi_u(x) \in R_x; \quad u = a, b, ab; \quad \varphi_b = 0, \quad \varphi_{ab} = \varphi_a; \quad (30)$$

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi_u(x, \theta) = \Psi(x) + \theta \hat{R}_u \Psi(x), \quad (31)$$

где  $\theta \equiv \xi_u = \alpha^a$  при  $u = a$ ,  $\theta = \beta^b$  при  $u = b$  и  $\theta = \gamma^{ab}$  при  $u = ab$ ,

$$\hat{R}_a = \hat{Q}_a, \quad \hat{R}_b = \hat{\varkappa}_b, \quad \hat{R}_{ab} = \hat{\varkappa}_b \hat{Q}_a. \quad (31a)$$

*1.2. Формулировка и доказательство обобщенной теоремы Нетер о законах сохранения.*

**Теорема 1.** Пусть при каждом однопараметрическом преобразовании (30) в  $R_x$  функции  $\Psi \in \Phi$  преобразуются по закону (31), а действие  $W$  (10) по закону

$$W(\Omega, \Psi) \rightarrow W_u(\Omega, \Psi, \theta) = \int_{\Omega_u} dx \mathcal{L}(x, \Psi_u(x, \theta), \partial_\mu \Psi_u(x, \theta)), \quad (32)$$

где  $\Omega_u$  есть область в  $R_x$ , полученная из области  $\Omega \subset R_x$  преобразованием  $x \rightarrow x - \theta \varphi_u(x)$ , обратным к преобразованию (30) (в линейном по параметру  $\theta$  приближении). Пусть сужение  $W^0 = W|_{\Phi_0}$  действия (10) на множество  $\Phi_0 \subset \Phi$  решений уравнений ЭЛ (8) инвариантно относительно каждого преобразования (32), т.е.

$$W_u(\Omega, \Psi, \theta) = W(\omega, \Psi) \quad \text{для} \quad \Psi, \Psi_u \in \Phi_0, \quad \Omega \subset R_x, \quad u = a, b, ab. \quad (33)$$

Тогда на подмножестве  $\Phi_0 \subset \Phi$  имеют место следующие ЗС в дифференциальной форме

$$\partial_\mu R_u^\mu(x) = 0, \quad u = a, b, ab, \quad (34)$$

где компоненты тока  $R_u = (R_u^\mu)$  в матричной записи имеют вид

$$R_u^\mu(x) \equiv \varphi_u^\mu(x) \mathcal{L}_\Psi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} | \hat{R}_u \Psi(x). \quad (35)$$

Если, кроме того, компоненты (35) токов  $R_u$  равны нулю на бесконечности в  $R_{\vec{x}} \subset R_x$  (где  $\vec{x} \equiv (x^1, \dots, x^r) \subset x$ ), то следующие величины сохраняются:

$$\tilde{R}_u(t) \equiv \int d\vec{x} R_u^0(x) = \text{const}, \quad u = a, b, ab, \quad \int d\vec{x} = \int_{R_{\vec{x}}} d\vec{x}, \quad (36)$$

где  $t \equiv x^0$ , а  $d\vec{x} \equiv dx^1 \cdots dx^r$  есть мера Лебега на подмножестве  $R_{\vec{x}} \subset R_x$ .

**Доказательство.** Прежде всего требуется вычислить правую часть (32) инфинитезимально, т.е. в линейном по параметру  $\theta$  приближении. Произведя в (32) замену переменных интегрирования

$$\begin{aligned} x \rightarrow x + \theta \varphi_u(x) &\implies \Omega_u \rightarrow \Omega, \\ dx &\rightarrow J_u(x, \theta) dx, \quad J_u \equiv \det |\partial_\mu(x^\nu + \theta \varphi_u^\nu(x))|, \end{aligned} \quad (37)$$



получаем

$$W_u(\Omega, \Psi, \theta) = \int_{\Omega} dx J_u(x, \theta) \mathcal{L}_u(x, \theta), \quad (38)$$

где

$$\mathcal{L}_u(x, \theta) \equiv \mathcal{L}(x + \theta\varphi_u(x), \Psi_u(x + \theta\varphi_u(x), \theta), (\partial_{\mu}\Psi_u)(x + \theta\varphi_u(x), \theta)), \quad (39)$$

$$(\partial_{\mu}\Psi_u)(x + \theta\varphi_u(x), \theta) \equiv \left. \frac{\partial\Psi_u(x, \theta)}{\partial x^{\mu}} \right|_{x \rightarrow x + \theta\varphi_u(x)}. \quad (39a)$$

Вычисление нужных величин в линейном по параметру  $\theta$  приближении (т.е. инфинитезимально), как легко убедиться, дает

$$\begin{aligned} J_u(x, \theta) &\stackrel{i}{=} 1 + \theta \partial_{\mu} \varphi_u^{\mu}(x), \\ \Psi_u(x + \theta\varphi_u(x), \theta) &\stackrel{i}{=} \Psi(x) + \theta(\hat{R}_u + \varphi_u^{\nu}(x)\partial_{\nu})\Psi(x), \\ \partial_{\mu}\Psi_u(x, \theta) &\stackrel{i}{=} \partial_{\mu}\Psi(x) + \theta\partial_{\mu}\hat{R}_u\Psi(x), \\ (\partial_{\mu}\Psi_u)(x + \theta\varphi_u(x), \theta) &\stackrel{i}{=} \partial_{\mu}\Psi(x) + \theta(\varphi_u^{\nu}(x)\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \partial_{\mu}\hat{R}_u)\Psi(x), \\ \mathcal{L}_u(x, \theta) &\stackrel{i}{=} \mathcal{L}(x + \theta\varphi_u(x), \Psi(x) + \theta(\hat{R}_u + \varphi_u^{\nu}(x)\partial_{\nu})\Psi(x), \\ &\partial_{\mu}\Psi(x) + \theta(\varphi_u^{\nu}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \partial_{\mu}\hat{R}_u)\Psi(x) \stackrel{i}{=} \mathcal{L}_{\Psi}(x) + \theta \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \Big|_{\varphi_u^{\mu}(x)} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} \Big|_{(\hat{R}_u + \varphi_u^{\nu}(x)\partial_{\nu})\Psi(x)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\mu}} (\varphi_u^{\nu}(x)\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \partial_{\mu}\hat{R}_u)\Psi(x) \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

(суммирование по  $u$  не подразумевается).

При выводе приведенных инфинитезимальных равенств существенно используются условия (12) и (16) на функции  $\varphi_a$  и  $f_a$ , линейность оператора  $\hat{\mathcal{L}}_b$ , непрерывная дифференцируемость первичной функции Лагранжа  $\mathcal{L}$  (5) и непрерывная дважды дифференцируемость функции  $\Psi \in \Phi$ .

С учетом (40) для линейного по  $\theta$  приращения действия за счет преобразования (32) получим

$$\begin{aligned} \delta W_u \equiv W_u - W &\stackrel{i}{=} \theta \int_{\Omega} dx \left[ \partial_{\mu} \varphi_u^{\mu} \mathcal{L}_{\Psi}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} \Big|_{\hat{R}_u\Psi(x)} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}} \Big|_{\partial_{\mu}\hat{R}_u\Psi(x)} \right], \quad \Psi \in \Phi. \end{aligned} \quad (41)$$

Сужение этого равенства на подмножество  $\Phi_0 \subset \Phi$ , где выполняются уравнения ЭЛ (8a), дает

$$\delta^0 W_u = \theta \int_{\Omega} dx \partial_{\mu} \left[ \mathcal{L}_{\Psi}(x) \varphi_u^{\mu}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\mu}} \Big|_{\hat{R}_u\Psi(x)} \right], \quad \Omega \subset R_x, \quad \Psi \in \Phi_0. \quad (42)$$

Теперь, ввиду произвольности  $\theta$  и  $\Omega \subset R_x$ , условие  $\delta^0 W_u = 0$  теоремы 1 (т.е. инвариантность сужения действия  $W$  (10) на подмножество  $\Phi_0 \subset \Phi$  относительно преобразования (32)) приводит к равенству нулю подинтегрального выражения в (41) в каждой точке  $x \in R_x$ , т.е. к утверждению (34). Интегрируя (34) по  $dx^{\bar{x}}$

по всему множеству  $R_{\bar{x}} \subset R_x$ , при условии исчезновения на бесконечности в  $R_{\bar{x}}$  компонент  $R_u^\mu(x)$  токов  $R_u$ , получаем

$$0 = \int d\bar{x} \partial_\mu R_u^\mu(x) \equiv \partial_0 \int d\bar{x} R_u^0(x) + \int d\bar{x} \partial_j R_u^j(x) = \partial_0 \int d\bar{x} R_u^0(x), \quad (43)$$

что и означает справедливость утверждения (36). Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний в связи с приведенной теоремой.

**Замечание 1.** Во избежание громоздкости выкладок мы упростили приведенное выше рассмотрение тем, что в функции Лагранжа  $\mathcal{L}$  (5) опустили сопряженные переменные  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Psi}_{,\mu}$ , которые непременно появляются в случае, когда строится  $L$ -подход для уравнения (3) как уравнения для комплекснозначной функции  $\Psi$  (2), в этом случае первичная функция Лагранжа есть функция удвоенного числа переменных (а также переменной  $x \in R_x$ ):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \Psi, \bar{\Psi}, \Psi_{,\mu}, \bar{\Psi}_{,\mu}), \quad \mathcal{L} : R_x \times C^{m(2r+3)} \rightarrow R^1. \quad (5a)$$

При этом и действие  $W$  (6) становится функционалом удвоенного числа переменных

$$\begin{aligned} W(\Psi, \bar{\Psi}) &= \int dx \mathcal{L}_{\Psi\bar{\Psi}}(x) = \\ &= \int dx \mathcal{L}(x, \Psi(x), \bar{\Psi}(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \bar{\Psi}(x)), \quad \Psi, \bar{\Psi} \in \Phi, \end{aligned} \quad (6a)$$

причем независимые переменные  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$  без каких-либо ограничений можно считать пробегающими одно и то же множество  $\Phi$ . С учетом этого, кроме уравнения ЭЛ (8) = (8a), появляется “сопряженное” к нему уравнение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\Psi}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}, \quad \Psi, \bar{\Psi} \in \Phi_0. \quad (8b)$$

Независимые переменные  $\Psi, \bar{\Psi} \in \Phi$  на подмножестве  $\Phi_0 \subset \Phi$  экстремалей действия  $W$  (6a) становятся *зависимыми*, причем для  $\bar{\Psi} \in \Phi_0$  применяется надлежащее “правило сопряжения”

$$\Psi(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) = \Psi^+(x) \Gamma_0, \quad \Psi^+(x) \equiv (\Psi(x))^* T; \quad (44)$$

здесь матрица  $\Gamma_0$  выбирается такой, чтобы уравнение (8b) было эквивалентным уравнению (8a) = (8) и следовательно, исходящему уравнению (3a) = (3).

При формулировке теоремы Нетер о ЗС с учетом указанного уточнения преобразование (31) в  $\Phi$  дополняется преобразованием переменной  $\bar{\Psi} \in \Phi$  следующим образом:

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}_u(x) = \bar{\Psi}(x) + \theta \bar{\Psi}(x) \hat{R}_u, \quad \hat{R}_u \equiv \Gamma_0^{-1} \hat{R}_u^+ \Gamma_0, \quad (31b)$$

где стрелка “ $\leftarrow$ ” в (31b) обозначает, что дифференциальная часть оператора  $\hat{R}_u$  действует налево, т.е.

$$(\bar{\Psi}(x) \hat{R}_u)_s \stackrel{df}{=} \bar{\Psi}_{s'}(x) (\Gamma_0^{-1} \hat{R}_u^+ \Gamma_0)_s \equiv (\Gamma_0^{-1} \hat{R}_u^+ \Gamma_0)_{s'}^s \bar{\Psi}_{s'}(x). \quad (45)$$

Нетрудно убедиться, что с учетом этого уточнения для компонент  $R_u^\mu$  токов в ЗС (34) вместо формулы (35) теорема Нетер дает

$$R_u^\mu(x) = \varphi_u^\mu(x) \mathcal{L}_{\Psi\bar{\Psi}}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \hat{R}_u \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) \hat{R}_u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}, \quad (35a)$$

причем конструкция (36) именно с  $R_u^0(x)$  и (35a) есть сохраняющаяся величина.

Приведенное уточнение существенно по крайней мере в двух пунктах. Во-первых, именно привлечение концепции  $\bar{\Psi}$  как независимой лагранжевой переменной дает возможность корректно рассматривать в  $L$ -подходе такие преобразования инвариантности уравнения (3), как преобразования из алгебры  $A_8$  (см. раздел 2 и замечание 5). Во-вторых, — и это, по-видимому, наиболее существенно, — даже в случае вещественных многокомпонентных функций  $\Psi$  иногда невозвратно построить удовлетворительный  $L$ -подход, не привлекая концепцию сопряженных переменных  $\bar{\Psi}$ . Подобная ситуация возникает при построении релятивистски инвариантного  $L$ -подхода для электромагнитного поля в терминах напряженностей  $(\vec{E}, \vec{H}) = (B^{\mu\nu})$  [17–24].

**Замечание 2.** Хорошо известно, что функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  (5a), для которой уравнения ЭЛ (8a, б) эквивалентны данному уравнению (3a) = (3), не единственна, причем различные функции Лагранжа (5a) могут отличаться друг от друга более чем на слагаемое, которое во вторичной функции Лагранжа  $\mathcal{L}_{\Psi\bar{\Psi}}$  совпадает с дивергенцией  $\partial_\mu F(x)$  некоторой функции  $F : R_x \rightarrow R^1$ . Функции Лагранжа, для которых уравнения ЭЛ хотя и различны, но эквивалентны данному уравнению, в работах [29–31] названы  $s$ -эквивалентными. Примеры таких существенно различных функций Лагранжа для электромагнитного поля приведены в работах [17–24]. Ясно, что одно и то же преобразование инвариантности (31) уравнения (3) при различных  $s$ -эквивалентных функциях Лагранжа дает по данной теореме Нетер разные сохраняющиеся величины. Ситуация здесь аналогична той, которая возникает при вычислении законов сохранения другими методами (см. например, [11–13, 32–34]), т.е. не по теореме Нетер, а, например, по формулам

$$\tilde{R}_u = \int d\vec{x} \Psi^+(x) \hat{M} \hat{R}_u \Psi(x) \quad (46)$$

с различными метрическими операторами  $\hat{M}$ , при которых конструкция (46) есть сохраняющаяся величина.

В этой связи возникают вопросы, например, о том, какой из различных сохраняющихся величин отдать предпочтение в качестве соответствующей данному преобразованию инвариантности (31). Или, какая из сохраняющихся величин, соответствующих генератору  $\partial_0$  трансляций во времени при различных способах их вычисления является энергией системы. Наконец, какая из  $s$ -эквивалентных функций Лагранжа является предпочтительной и чем именно.

В случае некоторых известных полей удастся дать вполне определенные ответы на эти вопросы. Например, в случае спинорного поля из всех способов нахождения сохраняющихся величин можно отдать предпочтение способу вычисления сохраняющихся величин по данной теореме Нетер и по скалярной функции Лагранжа (см. ниже  $\mathcal{L}$  (80)), поскольку именно при таком соглашении временному сдвигу

$t \rightarrow t' = t + a^0$  в  $R_x$  с вещественным положительным параметром  $a^0$ , порождающему преобразование инвариантности (31) уравнения Дирака в виде

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi_{a^0}(x) = (1 + a^0 \hat{R}_{a^0})\Psi(x) \equiv (1 - a^0 \partial_0)\Psi(x), \quad (47)$$

соответствует энергия спинорного поля, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{a^0} &\equiv \int d\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,0}} |(-\partial_0)\Psi + (-\partial_0 \bar{\Psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,0}}| = \int d\vec{x} \Psi^\dagger \hat{H} \Psi, \\ \hat{H} &\equiv \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m, \quad p^j = -i \partial_j. \end{aligned} \quad (48)$$

В случае электромагнитного поля указанный критерий дает возможность найти подходящую функцию Лагранжа в терминах напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в релятивистски инвариантном  $L$ -подходе для этого поля [20–24].

**Замечание 3.** Условие (33) данной теоремы Нетер о ЗС, эквивалентное требованию, чтобы преобразование (31) было преобразованием инвариантности уравнения (3), является, конечно, достаточным, но не необходимым.

В разделе 2 приведен пример однопараметрического семейства преобразований (31) для спинорного поля, которые не являются преобразованиями инвариантности уравнения Дирака (с  $m = 0$ ), но для которых утверждение (36) выполняется. Однако, во-первых, этот факт обнаружен лишь для специфических преобразований, а именно, собственно конформных преобразований, генераторы которых выражаются через генераторы группы Пуанкаре (см. [11], а также теорему 4 в [15]), и, во-вторых, вычисление ЗС по формулам (35а), (36) даже в таких случаях разумно называть нетеровскими, поскольку результат таких вычислений оказывается совпадающим с вычислением этих ЗС по теореме Нетер (т.е. по формулам (35а), (36) с использованием соответствующих преобразований инвариантности уравнения Дирака). Таким образом, если для некоторого поля  $\Psi$  величина, вычисленная по нетеровским формулам (35а), (36), оказывается сохраняющейся, то нетеровская формула (36) в этом смысле “восстанавливает” преобразование инвариантности уравнения движения (3) для этого поля.

Конкретизируем теорему в случае конформной группы  $C(1, 3)$  преобразований и некоторых ее обобщений.

Через 15 вещественных параметров

$$\alpha = (\alpha^a)_{a=1}^{15} = (a, \omega, b, \varkappa), \quad a = (a^\mu), \quad \omega = (\omega^{\mu\nu}), \quad b = (b^\mu), \quad (49)$$

(где  $a^\mu$  — сдвиг вдоль оси  $\mu = \overline{0, 3}$ ,  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$  — угол поворота в плоскости  $\mu\nu$ ,  $b^\mu$  и  $\varkappa$  — параметры собственно конформных и масштабных преобразований) запишем инфинитезимальные  $C(1, 3)$ -преобразования в пространстве-времени  $R_x \equiv \{x = (x^\mu)\}$ ,  $\mu = \overline{0, 3}$ , в виде

$$x \rightarrow x' = \left( 1 + a^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + b^\mu K_\mu + \varkappa d \right) x, \quad (50)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, \quad (51a)$$

$$K_\mu = 2x_\mu d - x^2 \partial_\mu, \quad d = x^\mu \partial_\mu. \quad (51b)$$

Пусть в пространстве  $\Phi = \{\Psi\}$   $m$ -компонентных функций  $\Psi: R_x \rightarrow C^m$  (или в  $C^m$ ) задано некоторое локальное представление собственной ортохронной группы Лоренца  $L_+ = O^+(1, 3)$ , определяемое матричными генераторами —  $(m \times m)$ -матрицами  $S_{\mu\nu} = (S_{\mu\nu s}^s; s, s' = \overline{1, m})$ , удовлетворяющими соотношениям

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = g_{(\mu\rho} S_{\nu\sigma)} \equiv g_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} + g_{\rho\nu} S_{\sigma\mu} + g_{\nu\sigma} S_{\mu\rho} + g_{\sigma\mu} S_{\rho\nu}. \quad (52)$$

Пусть некоторая  $m \times m$ -матрица коммутирует со всеми матрицами  $J_{\mu\nu}$ ,

$$[S_{\mu\nu}, S] = 0. \quad (53)$$

**Теорема 2.** *Операторы в  $\Phi$*

$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu, \quad \hat{j}_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}, \quad \hat{d} = d - S, \quad (54a)$$

$$\hat{K}_\mu = K_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu - 2Sx_\mu = 2x_\mu\hat{d} - x^2\partial_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu, \quad (54б)$$

задаваемые операторами (51) и любыми  $m \times m$ -матрицами  $S_{\mu\nu}$ ,  $S$ , удовлетворяющими соотношениям (52), (53), являются образами в  $\Phi$   $C(1, 3)$ -генераторов (51), т.е. удовлетворяют тем же соотношениям (в ковариантной форме), что и генераторы (51):

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial_\mu, \hat{j}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho, \quad (55a)$$

$$[\hat{j}_{\mu\nu}, \hat{j}_{\rho\sigma}] = -g_{(\mu\rho}\hat{j}_{\nu\sigma)} \equiv -g_{\mu\rho}\hat{j}_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}\hat{j}_{\sigma\mu} - g_{\nu\sigma}\hat{j}_{\mu\rho} - g_{\sigma\mu}\hat{j}_{\rho\nu}, \quad (55б)$$

$$[\partial_\mu, \hat{d}] = \partial_\mu, \quad [\partial_\mu, \hat{K}_\nu] = 2(g_{\mu\nu}\hat{d} - \hat{j}_{\mu\nu}), \quad [\hat{j}_{\mu\nu}, \hat{d}] = 0, \quad (55в)$$

$$[\hat{K}_\mu, \hat{j}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\hat{K}_\sigma - g_{\mu\sigma}\hat{K}_\rho, \quad [\hat{d}, \hat{K}_\mu] = \hat{K}_\mu, \quad [\hat{K}_\mu, \hat{K}_\nu] = 0. \quad (55г)$$

**Доказательство.** Непосредственная проверка убеждает, что операторы (54) удовлетворяют соотношениям (55) при условиях (52), (53).

Инфинитезимальные  $C(1, 3)$ -преобразования в  $\Phi$ , порождаемые генераторами (54), запишем в виде

$$\Psi'(x) = (1 - \alpha^a \hat{q}_a) \Psi(x) \equiv \left( 1 - a^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \hat{j}_{\mu\nu} - b^\mu \hat{K}_\mu - \kappa \hat{d} \right) \Psi(x). \quad (56)$$

Здесь знаки выбраны так, чтобы орбитальные слагаемые (54), задаваемые операторами (51), порождались обратным к (50) преобразованиям аргумента  $x$  функций  $\Psi \in \Phi$ . Слагаемое  $S_{\mu\nu}$  в операторе  $\hat{j}_{\mu\nu}$  в (54a) называют оператором спина преобразований Лоренца  $O^+(1, 3)$ . Аналогично этому слагаемое  $S$  в операторе  $\hat{d}$  в (54a) называют спином дилатации, а слагаемое  $S_\mu \equiv 2S_{\mu\nu}x^\nu + 2Sx_\mu$  в (54б) называем конформным спином. Заметим, что каждое уравнение для поля  $\Psi$  нулевой массы может быть инвариантно относительно  $C(1, 3)$ -преобразований (56) лишь с некоторым фиксированным спином дилатации  $S$ .

Приведм удобную методику вычисления ЗС для  $C(1, 3)$ -преобразований (56) в  $\Phi$  и их определенных обобщений в виде легко проверяемого следствия теоремы 1.

**Теорема 3.** *Пусть  $C(1, 3)$ -преобразования (56), порождаемые генераторами (54) с некоторой матрицей  $S$ , суть преобразования инвариантности ЭЛ (8а, б) для некоторого безмассового поля  $\Psi$  и выполняются все условия теоремы 1. Тогда*

15 сохраняющихся величин  $R_a^\mu$  (35a), порождаемые  $C(1,3)$ -алгеброй инвариантности теории, имеют следующую структуру (в матричной форме записи):

$$P_\rho^\mu = -\delta_\rho^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} |\partial_\rho \Psi + (\partial_\rho \bar{\Psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}|, \quad (57)$$

$$J_{\rho\sigma}^\mu = M_{\rho\sigma}^\mu + S_{\rho\sigma}^\mu, \quad D^\mu = S^\mu + x^\rho P_\rho^\mu, \quad (58)$$

$$K_\rho^\mu = 2x_\rho D^\mu - x^2 P_\rho^\mu + 2x^\sigma S_{\rho\sigma}^\mu, \quad (59)$$

где

$$S^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} |S\Psi - \bar{\Psi}\bar{S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}|, \quad (60)$$

$$M_{\rho\sigma}^\mu \equiv x_\rho P_\sigma^\mu - x_\sigma P_\rho^\mu, \quad (61)$$

$$S_{\rho\sigma}^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} |S_{\rho\sigma}\Psi - \bar{\Psi}\bar{S}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}|. \quad (62)$$

Пусть некоторый оператор  $\gamma$  коммутирует со всеми генераторами (54)  $C(1,3)$ -преобразований (56) в  $\Phi$  и является генератором преобразований инвариантности уравнений ЭЛ (8a, б), так что преобразования (называемые  $\gamma C(1,3)$ -преобразованиями)

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'''(x) = (1 - \alpha^a \hat{q}'_a) \Psi(x), \quad \hat{q}'_a = \gamma \hat{q}, \quad (63)$$

суть преобразования инвариантности третьего типа (19). Тогда, наряду с токами (57)–(59), сохраняющимися являются также токи

$$T_\rho'^\mu, \quad J_{\rho\sigma}'^\mu, \quad K_\rho'^\mu, \quad D'^\mu, \quad (64)$$

которые вычисляются по формулам (57)–(59) с заменой в них базисных величин  $P_\rho^\mu$ ,  $S_{\rho\sigma}^\mu$ ,  $S^\mu$  базисными величинами

$$P_\rho'^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \gamma \partial_\rho \Psi + (\partial_\rho \bar{\Psi}) \bar{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}} - \delta_\rho^\mu \mathcal{L}, \quad (65)$$

$$S_{\rho\sigma}'^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \gamma S_{\rho\sigma} \Psi - \bar{\Psi} \bar{S}_{\rho\sigma} \bar{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}, \quad (66)$$

$$S'^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \gamma S \Psi - \bar{\Psi} \bar{S} \bar{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}. \quad (67)$$

В случае  $t \neq 0$  очевидным образом сужается симметрия и число сохраняющихся величин.

Доказательство теоремы проводится подстановкой генераторов  $\hat{q}$  (54) и генераторов  $\hat{q}' = \gamma \hat{q}$  в формулу (35a) теоремы 1.

В следующем разделе иллюстрируется применение теоремы 1 и ее следствия — теоремы 3 — в случае спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака.

**Замечание 4.** Отметим, что понятие базисных величин используется здесь только для выработки простой и удобной методики нахождения ЗС и не связано с выделением линейно или функционально независимых ЗС. Используемое нами понятие базисных величин отличается от понятия базиса ЗС, введенного в [35]; последнее понятие, кстати, также не выделяет линейно или функционально независимые законы сохранения.

## 2. Законы сохранения как следствия нелиевских симметрий уравнений Дирака

*2.1. Алгебры инвариантности уравнения Дирака в классе  $L_1$ .* Класс  $L_1$  матрично-дифференциальных операторов первого порядка по переменной  $x$  является простейшим классом нелиевских операторов. Целесообразность выделения именно этого класса для анализа симметричных свойств уравнений Дирака и Максвелла обусловлена двумя причинами. Во-первых, именно такому классу операторов принадлежат сами операторы этих уравнений, тогда как класс  $L_0$  операторов Ли является более узким классом, чем класс  $L_1$  матрично-дифференциальных операторов, которому принадлежат операторы уравнений Максвелла и Дирака. Во-вторых, алгебра инвариантности в классе  $L_1$  легко восстанавливается до соответствующей группы инвариантности (см. п. 2.3).

В [17] предложен способ расширения алгебры инвариантности уравнения (3), задаваемой операторами Ли, до алгебры, задаваемой простейшими нелиевскими операторами (см. теорему 6 в [17]). Проиллюстрируем применение этой методики для спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad m \geq 0, \quad (68)$$

где для определенности выбрано представление Дирака–Паули  $\gamma$ -матриц:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^4 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (69)$$

$$\sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (70)$$

В [4] показано, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения Дирака с  $m = 0$  в классе  $L_0$  операторов Ли является 23-мерная алгебра  $C(1, 3) \oplus A_8$ , а в случае  $m \neq 0$  — 14-мерная алгебра  $P(1, 3) \oplus A_4$ .

Если параметры  $\alpha = (\alpha^a)$  соответствующих групп преобразований вещественны и в окрестности единицы задают преобразование  $\Psi \in \mathbb{F}$  в виде

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = (1 - \alpha^a \hat{q}_a)\Psi(x), \quad (71)$$

то генераторы  $\hat{q}_a$  указанных преобразований имеют следующий явный вид:  $C(1, 3)$ -генераторы — вид (54) с

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(-\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad S = -\frac{3}{2}I, \quad (72)$$

(где  $I$  — единичная матрица, которую часто опускаем), а генераторы алгебры  $A_8 \supset A_4$  (в случае, если выбрано представление (69) для  $\gamma$ -матриц) имеют вид

$$I, \quad i, \quad i\gamma^2 C, \quad \gamma^2 C; \quad (73)$$

$$\gamma^4, \quad i\gamma^4, \quad \gamma^0\gamma^3\gamma^1C, \quad i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, \quad (74)$$

где генераторы  $A_4$  выделены формулой (73),

$$C\Psi = \Psi^*. \quad (75)$$

Коммутационные соотношения генераторов (73), (74) имеют вид

$$\begin{aligned} [i, i\gamma^2C] &= -2\gamma^2C, & [i, \gamma^2C] &= 2i\gamma^2C, \\ [\gamma^2C, i\gamma^2C] &= -2i, & [i\gamma^4, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= 2i\gamma^2C, \\ [\gamma^4, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= -2\gamma^2C, & [\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= 2i, \\ [i, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= -2i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, & [i, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= 2\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, \\ [\gamma^2C, i\gamma^4] &= 2i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, & [\gamma^2C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= 2i\gamma^4, \\ [i\gamma^2C, i\gamma^4] &= -2\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, & [i\gamma^2C, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C] &= -2i\gamma^4 \end{aligned} \quad (76)$$

(остальные коммутаторы равны нулю). Из теоремы 6 в [17] следует, что справедлива такая теорема.

**Теорема 4.** *В классе  $L_1$  алгеброй инвариантности уравнения Дирака с  $m = 0$  является 128-мерная алгебра  $A_{128}$  с базисными элементами*

$$\begin{aligned} I, \quad i, \quad i\gamma^2C, \quad \gamma^2C, \quad \gamma^4, \quad i\gamma^4, \quad \gamma^0\gamma^3\gamma^1C, \quad i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C, \\ \hat{q} = (\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d}), \quad \hat{q}' = (i\hat{q}, i\gamma^2C\hat{q}, \gamma^2C\hat{q}, \gamma^4\hat{q}, i\gamma^4\hat{q}, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C\hat{q}, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C\hat{q}), \end{aligned} \quad (77)$$

*а алгеброй инвариантности уравнения Дирака с  $m \neq 0$  является 44-мерная алгебра  $A_{44}$ , натянутая на генераторы*

$$I, \quad i, \quad i\gamma^2C, \quad \gamma^2C, \quad \hat{q} = (\partial, \hat{j}), \quad \hat{q}' = (i\hat{q}, i\gamma^2C\hat{q}, \gamma^2C\hat{q}), \quad (78)$$

*где  $\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d}$  даны формулами (54). Алгебра  $A_{128}$  изоморфна алгебре*

$$C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus C(1, 3) \oplus A_8,$$

*а алгебра  $A_{44}$  изоморфна алгебре*

$$P(1, 3) \oplus P(1, 3) \oplus P(1, 3) \oplus P(1, 3) \oplus A_4.$$

Пользуясь соотношениями для  $\gamma$ -матриц

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (79)$$

легко показать, что все генераторы (73), (74) алгебры  $A_8$  коммутируют или антикоммутируют с оператором уравнения Дирака, а именно, операторы  $I, i, i\gamma^2C, \gamma^2C$  из (73) коммутируют, а операторы  $\gamma^4, i\gamma^4, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C$  из (74) антикоммутируют с оператором  $i\gamma^\mu\partial_\mu$ . Поскольку вся восьмерка генераторов алгебры  $A_8$  коммутирует с массовым членом, то ясно, что только операторы (73) являются преобразованиями инвариантности уравнения Дирака при  $m \neq 0$ , а для случая  $m = 0$  все восемь операторов (73), (74) являются преобразованиями инвариантности. Далее, легко установить, что все операторы (73), (74) коммутируют с операторами  $\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d}$  (54) и, кроме того, генераторы  $I, \gamma^2C, i\gamma^2C, i\gamma^4$  являются эрмитовыми (их квадраты равны единице), а генераторы  $i, \gamma^4, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C$  — антиэрмитовыми (их квадраты равны минус единице). Таким образом, выполняются



условия теоремы 6 в [17]. С учетом этого, а также из хорошо известного факта, что уравнение Дирака при  $m = 0$  конформно инвариантно, а при  $m \neq 0$  — инвариантно только относительно преобразований из группы  $P(1, 3)$ , становится ясной справедливость утверждения теоремы 2.

*2.2. Вычисление законов сохранения — следствий алгебр инвариантности уравнений Дирака в классе  $L_1$ .* Поскольку лагранжев подход для спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака (68), хорошо известен, см., например, [36, 37], а скалярная (относительно группы Пуанкаре) функция Лагранжа имеет сравнительно простой вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi_{,\mu} - \bar{\Psi}_{,\mu}\gamma^\mu\Psi) - m\bar{\Psi}\Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0, \quad (80)$$

то спинорное поле является удобным объектом для иллюстрации конкретного применения приведенного в разделе 1 обобщения теоремы Нетер (тем более, что теорема 2 дает простейшие нелиевские алгебры инвариантности).

Рассмотрим сначала случай  $m = 0$ .

Функция Лагранжа (80) приводит к следующему виду базисных величин (60)–(62) для  $C(1, 3)$ -законов сохранения — следствий конформной алгебры инвариантности уравнения Дирака с  $m = 0$  в классе операторов Ли:

$$S^\mu = 0, \quad P_\rho^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\hat{p}_\rho\Psi - \frac{i}{2}\partial_\rho\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (81)$$

$$S_{\rho\sigma}^\mu = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\{\gamma^\mu, S_{\rho\sigma}\}_+\Psi, \quad \hat{p}_\rho \equiv i\partial_\rho, \quad \{A, B\}_+ \equiv AB + BA, \quad (82)$$

после чего легко выписать все 15 сохраняющихся токов по формулам (57)–(59). Это приводит к хорошо известным  $C(1, 3)$ -сохраняющимся величинам для поля  $\Psi$

$$P_\mu = \int d^3x \mathcal{P}_\mu(x), \quad (83)$$

$$J_{\mu\nu} = \int d^3x (x_\mu \mathcal{P}_\nu - x_\nu \mathcal{P}_\mu + \Psi^+ i S_{\mu\nu} \Psi), \quad (84)$$

$$D = \int d^3x \mathcal{D}(x), \quad (85)$$

$$K_\mu = \int d^3x (2x_\mu \mathcal{D} - x^2 \mathcal{P}_\mu + 2ix^\nu \Psi^+ S_{\mu\nu} \Psi), \quad (86)$$

где плотности энергии-импульса и дилатации имеют вид

$$\mathcal{P}_\mu(x) \equiv \Psi^+ i \partial_\mu \Psi \equiv \Psi^+ \hat{p}_\mu \Psi, \quad (87)$$

$$\mathcal{D}(x) \equiv x^\mu \mathcal{P}_\mu + \frac{3}{2} i \Psi^+ \Psi. \quad (88)$$

Заметим, что результат (86) получается для оператора  $\hat{K}_\mu$  из (54б) не только при  $S = -\frac{3}{2}I$  (когда  $\hat{K}_\mu$  является генератором преобразования инвариантности уравнения Дирака), но и в случае произвольного  $S = \tau I$  с  $\tau \neq -\frac{3}{2}$  (т.е. когда

$\hat{K}_\mu$  не является генератором преобразования инвариантности уравнения Дирака). Это — конкретный пример, иллюстрирующий приведенное выше замечание 3 о достаточности условий теоремы 1.

Из структуры ЗС (83)–(86) видно, что теорема Нетер дает следующую общую формулу для  $C(1, 3)$ -сохраняющихся величин, реализующих определенное соответствие “генератор — закон сохранения” для генераторов преобразований, задаваемых вещественными параметрами:

$$\hat{q}_a \rightarrow \tilde{q}_a \stackrel{df}{=} \int d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,0}} \hat{q}_a \Psi + \bar{\Psi} \tilde{q}_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,0}} \right) = \int d^3x \Psi^+ \hat{q}_a^{\text{KB}} \Psi, \quad (89)$$

$$\hat{q}_a^{\text{KB}} \equiv i \hat{q}_a, \quad (\hat{q}_a) = (\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d}).$$

Интересно отметить, что правая часть формулы (89) универсальна в том смысле, что подстановка в правую часть этой формулы любого генератора  $q_a$  (77) алгебры  $A_{128}$  дает сохраняющуюся величину:

$$i \int d^3x \Psi^+(x) \hat{q}_a \Psi(x) \equiv Q_{1a}(t) = \text{const}, \quad \hat{q}_a \in A_{128} \quad (90)$$

(в этой связи см. [32]). Однако вычисление сохраняющихся величин непосредственно по обобщенной теореме Нетер (теорема 1, т.е. по формулам (35а), (36)) для всех генераторов  $\hat{q}_a$  (77), кроме, конечно,  $C(1, 3)$ -генераторов  $\hat{q} = (\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d})$ , дает сохраняющиеся величины, отличные от (90). В этой связи напомним, что полученные в работах [12, 13, 32–34] формулы для бесконечных серий законов сохранения *zilch* дают, вообще говоря, другие методики вычисления ЗС для любого из генераторов  $\hat{q} \in A_{128}$ . Таким образом, одному и тому же преобразованию инвариантности уравнения Дирака по разным методикам соответствуют различные сохраняющиеся величины.

Очевидно, что физически адекватным соответствием генератор — закон сохранения можно считать соответствие, даваемое (обобщенной) теоремой Нетер, в которой используется скалярная функция Лагранжа, поскольку именно этот путь непротиворечивым образом реализует три основных физических принципа — принцип наименьшего действия, принцип релятивизма и принцип, согласно которому из однородности и изотропности пространства-времени следует такие хорошо известные сохраняющиеся величины, как энергия-импульс и 4-мерный момент количества движения спинорного поля. Законы сохранения, вычисленные по формулам (35а), (36) с использованием скалярной функции Лагранжа (80), будем называть нетеровскими.

Нетеровский ЗС  $\tilde{q}$ , соответствующий генераторам  $\hat{q}_a \in A_8$ , имеют вид

$$\tilde{i} = \int d^3x \Psi^+ \Psi, \quad (91)$$

$$i \widetilde{\gamma^2 C} = -\frac{1}{2} \int d^3x (\Psi^+ \gamma^2 \Psi + \bar{\Psi} \gamma^2 \bar{\Psi}^+), \quad (92)$$

$$\widetilde{\gamma^2 C} = -\frac{i}{2} \int d^3x (\Psi^+ \gamma^2 \Psi - \bar{\Psi} \gamma^2 \bar{\Psi}^+), \quad (93)$$

$$\widetilde{\gamma^4} = -i \int d^3x \Psi^+ \gamma^4 \Psi, \quad (94)$$

$$\gamma^0 \widetilde{\gamma^3 \gamma^1} C = -\frac{i}{2} \int d^3x (\Psi^+ \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \Psi + \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \bar{\Psi}^+), \quad (95)$$

$$i \gamma^0 \widetilde{\gamma^3 \gamma^1} C = -\frac{1}{2} \int d^3x (\Psi^+ \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \Psi - \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \bar{\Psi}^+) \quad (96)$$

(генераторы  $I$ ,  $i\gamma^4$  дают тривиальные сохраняющиеся величины). Нетеровские ЗС для генераторов  $\hat{q} \in A_8$  не совпадают с ЗС, получаемыми для этих генераторов по формуле (90).

Вычислим теперь сохраняющиеся величины, соответствующие простейшим нелиевским преобразованиям инвариантности из  $A_{128}$  (77). Заметим, что  $\gamma^4 \hat{q}$ ,  $\gamma^2 C \hat{q}$ ,  $i\gamma^2 C \hat{q}$  с  $\hat{q} \in C(1, 3)$  дают тривиальные серии сохраняющихся величин, каждый из 45 элементов которых равен нулю, поэтому токи, соответствующие указанным генераторам, не выписываем.

Базисные  $i\gamma^4 C(1, 3)$ -токи имеют вид

$$S'^{\mu} \equiv (i\gamma^4)^{\mu} = 0, \quad (97)$$

$$P'_{\rho}{}^{\mu} \equiv (-i\gamma^4 \partial_{\rho})^{\mu} = \bar{\Psi} \gamma^4 \gamma^{\mu} \partial_{\rho} \Psi + \frac{1}{2} \partial_{\rho} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \gamma^4 \Psi, \quad (98)$$

$$S'_{\rho\sigma}{}^{\mu} \equiv (i\gamma^4 S_{\rho\sigma})^{\mu} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \{\gamma^{\mu}, S_{\rho\sigma}\} \gamma^4 \Psi. \quad (99)$$

На основе полученных выражений 15 сохраняющихся токов этой серии выписываются без затруднений по формулам (98), (58), (59). Соответствующие законы сохранения имеют вид

$$P'_{\mu} = \int d^3x \mathcal{P}'_{\mu}(x), \quad (100)$$

$$J'_{\mu\nu} = \int d^3x (x_{\mu} \mathcal{P}'_{\nu} - x_{\nu} \mathcal{P}'_{\mu} - \Psi^+ \gamma^4 S_{\mu\nu} \Psi), \quad (101)$$

$$D' = \int d^3x \mathcal{D}'(x), \quad (102)$$

$$K'_{\mu} = \int d^3x (2x_{\mu} \mathcal{D}' - x^2 \mathcal{P}'_{\mu} - 2x^{\nu} \Psi^+ \gamma^4 S_{\mu\nu} \Psi), \quad (103)$$

где

$$\mathcal{P}'_{\mu}(x) \equiv -\Psi^+ \gamma^4 \partial_{\mu} \Psi \equiv \Psi^+ i\gamma^4 \hat{p}_{\mu} \Psi, \quad (104)$$

$$\mathcal{D}'(x) \equiv x^{\mu} \mathcal{P}'_{\mu} - \frac{3}{2} \Psi^+ \gamma^4 \Psi. \quad (105)$$

Базисные  $\gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 C C(1, 3)$ -токи имеют вид

$$S''^{\mu} \equiv (-\gamma^4 \gamma^2 C)^{\mu} = \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \gamma^4 \gamma^2 \Psi^* + \bar{\Psi}^* \gamma^4 \gamma^2 \gamma^{\mu} \Psi), \quad (106)$$

$$P''_{\rho}{}^{\mu} \equiv -\frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \gamma^4 \gamma^2 \partial_{\rho} \Psi^* + (\partial_{\rho} \bar{\Psi}) \gamma^4 \gamma^2 \gamma^{\mu} \Psi), \quad (107)$$

$$S_{\rho\sigma}^{\prime\prime\mu} \equiv -\frac{i}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2CS_{\rho\sigma} - S_{\rho\sigma}C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu)\Psi, \quad (108)$$

где  $C^+ = \overleftarrow{C}$ . 15 сохраняющихся токов выписываются на основе этих выражений по формулам (107), (58), (59). Соответствующие законы сохранения могут быть записаны в виде общей формулы

$$\hat{q} \rightarrow \tilde{q}'' = -\text{Re} \int d^3x \Psi^+ \gamma^4 \gamma^2 C \hat{q}^{\text{KB}} \Psi, \quad \hat{q}^{\text{KB}} = i\hat{q}, \quad (109)$$

где  $\hat{q}$  — любой из 15 генераторов  $\gamma^0\gamma^3\gamma^1CC(1,3)$ .

Наконец, базисные  $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1CC(1,3)$ -токи имеют следующий вид

$$I^{\prime\prime\prime\mu} \equiv (-i\gamma^4\gamma^2C)^\mu = -\frac{i}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2C - C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu)\Psi, \quad (110)$$

$$P_\rho^{\prime\prime\prime\mu} \equiv \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2\partial_\rho\Psi^* - (\partial_\rho\bar{\Psi})C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu\Psi), \quad (111)$$

$$S_{\rho\sigma}^{\prime\prime\prime\mu} \equiv \frac{1}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2CS_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma}C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu)\Psi, \quad (112)$$

а соответствующие законы сохранения – вид

$$\hat{q} \rightarrow \tilde{q} = -\text{Im} \int d^3x \Psi^+ \gamma^4 \gamma^2 C \hat{q}^{\text{KB}} \Psi, \quad \hat{q}^{\text{KB}} = i\hat{q}, \quad (113)$$

где  $\hat{q}$  — любой из генераторов  $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1CC(1,3)$ . Остальные генераторы  $A_{128}$  (77) дают тривиальные (нулевые) сохраняющиеся величины.

Как видно, обобщение теоремы Нетер на нелиевские преобразования инвариантности и наличие 128-мерной алгебры инвариантности  $A_{128}$  позволяют в случае спинорного поля с  $m = 0$  получить 45 дополнительных сохраняющихся величин (100)–(103), (109), (113). Тем самым систематизирован результат [12, 13] о наличии дополнительных сохраняющихся величин zilch-типа и для безмассового спинорного поля и указана связь этих законов сохранения с симметриями уравнения Дирака для  $m = 0$ . Эта связь зафиксирована нетеровским соответствием “оператор симметрии — закон сохранения”.

Мы нормируем функцию Лагранжа (80) таким образом, чтобы исходным генератором  $\hat{q}_A$ , ассоциируемым с вещественными параметрами  $\alpha^A$  преобразований  $\Psi \rightarrow \Psi' = (1 - \alpha^A \hat{q}_A)\Psi$ , по теореме Нетер соответствовали вещественные сохраняющиеся токи  $Q_A^\mu$  — функции спинорного поля  $\Psi$ . В этом случае интегральные сохраняющиеся величины  $\hat{Q}_A \equiv \int d^3x Q_A^0$  в представлении вторичного квантования переходят в эрмитовы операторы в пространстве Фока, удовлетворяющие тем же коммутационным соотношениям, что и квантовомеханические операторы  $i\hat{q}_A$ .

В случае уравнения Дирака (68) с  $m > 0$  список сохраняющихся величин оказывается значительно короче: алгебры  $P(1,3)$  и  $A_4$  дают по теореме 1 известные ЗС (83), (84), (91)–(93), а генераторы  $\hat{q}'$  в (77) алгебры  $A_{44} \supset P(1,3) \oplus A_4$  дают по этой теореме тривиальные ЗС (нулевые сохраняющиеся величины).

Для получения содержательных дополнительных ЗС в случае  $m > 0$  и для иллюстрации существенного различия в сохраняющихся величинах, вычисляемых по

разным методикам, рассмотрим семейства преобразований инвариантности уравнения Дирака (68) с  $m > 0$  в классе матрично-дифференциальных операторов первого порядка по  $x$ , задаваемые операторами:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{m} \left( a_0 \vec{S} \cdot \vec{\partial} + \frac{b_0}{2} \hat{H} \right), \quad \vec{p} \equiv (\partial^j), \quad \vec{H} \equiv \gamma^0 (i\vec{\gamma}\vec{\partial} + m), \quad (114)$$

$$\Sigma_j = a_j \gamma^0 S_j + \frac{i}{2m} (b_j - a_j \gamma^4) \partial_j, \quad S_j \equiv \frac{1}{4} \varepsilon^{jmn} \gamma^m \gamma^n \quad (114a)$$

(здесь по повторяющемуся индексу  $j$  суммирование не проводится,  $\varepsilon^{123} = 1$ ). Эти операторы являются преобразованиями инвариантности уравнения Дирака (68) с  $m > 0$  при любых комплексных числах  $a_\mu, b_\mu$ , а при  $a_j = i, b_j = 1, a_0 = b_0$  они совпадают с операторами (34.4) в [11]. Сохраняющиеся величины, вычисляемые по теореме 1, т.е. по формулам (35а), (36) с использованием функции Лагранжа (80), имеют вид

$$\tilde{\Sigma}_0 = \int d^3x \left\{ \frac{i}{2m} \Psi^+ \left[ (a_0^* - a_0) \vec{S}\vec{\partial} + \frac{b_0^* - b_0}{2} \hat{H} \right] \Psi \right\}, \quad (115)$$

$$\tilde{\Sigma}_j = \int d^3x \Psi^+ \left\{ \frac{-i(a_j + a_j^*)}{2} \gamma^0 S_j + \frac{1}{4m} [b_j - b_j^* - (a_j + a_j^*) \gamma^4] \partial_j \right\} \Psi \quad (116)$$

(здесь также по повторяющемуся индексу  $j$  суммирование не проводится).

Вычисление сохраняющихся величин, соответствующих тем же преобразованиям инвариантности  $\hat{q}_a = \Sigma_\mu$  (114), (114а), по формуле (90) дает результат, отличный от (115), (116). Ясно, что генераторам преобразований инвариантности (114), (114а) следует ставить в соответствие ЗС (115), (116), а не результаты вычислений по формуле (90).

Заметим также, что сохраняющиеся величины (115), (116) совпадают с ЗС (34.5) в [11], вычисленными в [11] без использования теоремы Нетер, при  $a_j = 1, a_0 = b_0 = b_j = i$ .

Конечно, операторы (114), (114а) суть линейные комбинации (с вещественными коэффициентами) следующих генераторов преобразований инвариантности:

$$i\hat{H}, \quad \partial_j, \quad i\vec{S}\vec{p}, \quad \gamma^0 S_j - \frac{i\gamma^4}{2m} \partial_j, \quad (117)$$

$$\hat{H}, \quad i\partial_j, \quad \vec{S}\vec{\partial}, \quad i\gamma^0 S_j + \frac{\gamma^4}{2m} \partial_j. \quad (117a)$$

Генераторы (117) дают по теореме 1 8 ненулевых независимых ЗС (четыре из которых совпадают с энергией-импульсом поля  $\Psi$ , а остальные четыре суть дополнительные ЗС), тогда как генераторы (117а) дают тривиальные ЗС.

**Замечание 5.** Вычисление величин  $R_u^\mu$  и  $R_u$  для семейства  $C(1, 3)$ -преобразований с  $S = \tau I$  и с произвольным  $\tau \in R^1$  по формулам (35), (36) (т.е. без использования концепции  $\tilde{\Psi}$  как независимой лагранжевой переменной)

$$\tilde{R}_u = \int d\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,0}} \hat{R}_u \Psi(x) \equiv \int d\vec{x} R_u^0(x), \quad R_u^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \hat{R}_u \Psi, \quad (118)$$

дает следующие выражения для базисных токов:

$$I^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \Psi = -\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \neq 0, \quad (119)$$

$$P_\rho^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{p}_\rho \Psi, \quad S_{\rho\sigma}^\mu = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu S_{\rho\sigma}^{\text{KB}} \Psi, \quad \hat{p}_\mu \equiv i\partial_\mu, \quad S^{\text{KB}} = iS, \quad (120)$$

и, таким образом, законы сохранения получаются в виде

$$I = -\frac{i}{2} \int d^3x \Psi^+ \Psi, \quad (121)$$

$$P_\rho = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^+ \hat{p}_\rho \Psi, \quad (122)$$

$$J_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^+ (x_\rho \hat{p}_\sigma - x_\sigma \hat{p}_\rho + S_{\rho\sigma}^{\text{KB}}) \Psi, \quad (123)$$

$$D = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^+ (x^\sigma \hat{p}_\sigma - \tau i) \Psi, \quad (124)$$

$$K_\rho = \frac{1}{2} \int d^3x \Psi^+ [2x_\rho (x^\sigma \hat{p}_\sigma - \tau i) - x^2 \hat{p}_\rho + 2S_{\rho\sigma}^{\text{KB}} x^\sigma] \Psi. \quad (125)$$

*2.3. Конечные преобразования из простейших нелиевских групп инвариантности.* Запишем инфинитезимальные  $P(1, 3)$ -преобразования в  $R_x$  в форме

$$x \rightarrow x' = \phi(x, \alpha) \stackrel{\text{inf}}{=} \varphi^\mu(x, \alpha) \partial_\mu x, \quad (126)$$

где  $\varphi^\mu(x, \alpha) \partial_\mu = a^\mu \partial_\mu$  (для трансляций), а  $\varphi^\mu(x, \omega) \partial_\mu = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$  (для вращений).

Рассмотрим преобразования  $\Gamma^\times P(1, 3)$ ,  $\Gamma^\times = \Gamma, \Gamma',$  где

$$\Gamma = \{I, \gamma^2 C, i\gamma^2 C, i\gamma^4\}, \quad \Gamma^2 = I, \quad (127)$$

$$\Gamma' = \{i, \gamma^4, \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 C, i\gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 C\}, \quad \Gamma'^2 = -I. \quad (128)$$

Орбитальные и спиновые части генераторов  $\Gamma^\times P(1, 3)$  коммутируют, поэтому конечные преобразования в  $\Phi$  имеют вид

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \exp\{-a^\mu \Gamma^\times \partial_\mu\} \Psi(x) \equiv \Psi_2(x, a) \quad (129)$$

для " $\Gamma^\times$ -трансляций" и

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x) = T \Psi_2(x, \omega), \quad T \equiv \exp\left\{\frac{1}{2} \omega^{\rho\sigma} \Gamma^\times S_{\rho\sigma}\right\}, \quad (130)$$

$$\Psi_2(x, \omega) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2} \Gamma \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right\} \Psi(x), \quad (131)$$

для “ $\Gamma^\times$ -вращений”. С учетом  $(\Gamma^\times \gamma^0 \gamma^k)^2 = \pm I$  для  $\Gamma^{\times 2} = \pm I$  и  $(\Gamma^\times \gamma^k \gamma^l)^2 = \mp I$  для  $\Gamma^{\times 2} = \pm I$  ряды (130) для  $\Gamma^\times$ -вариаций в фиксированной плоскости  $\rho\sigma$  на угол  $\omega^{\rho\sigma} = \theta$  имеют вид

$$T \equiv \exp \left\{ \frac{1}{2} \theta \Gamma^\times \gamma_0 \gamma_k \right\} = \begin{cases} \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} + \Gamma \gamma_0 \gamma_k \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}, \\ \cos \frac{\theta}{2} + \Gamma' \gamma_0 \gamma_k \sin \frac{\theta}{2}, \end{cases} \quad (130a)$$

$$(130б)$$

$$T \equiv \exp \left\{ \frac{1}{2} \theta \Gamma^\times \gamma_k \gamma_l \right\} = \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} + \Gamma \gamma_k \gamma_l \sin \frac{\theta}{2}, \\ \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} + \Gamma' \gamma_k \gamma_l \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}, \end{cases} \quad (130в)$$

$$(130г)$$

а ряды  $\Psi_2(x, \alpha)$ ,  $\alpha = a, \omega$ , имеют вид

$$\Psi_2(x, \alpha) = \begin{cases} [\operatorname{ch} \varphi^\mu(x, \alpha) \partial_\mu - \Gamma \operatorname{sh} \varphi^\mu(x, \alpha) \partial_\mu] \Psi(x), \\ [\cos \varphi^\mu(x, \alpha) \partial_\mu - \Gamma' \sin \varphi^\mu(x, \alpha) \partial_\mu] \Psi(x). \end{cases} \quad (131a)$$

$$(131б)$$

Формулу (131a) через конечные преобразования аргумента можно записать в виде

$$\Psi_2(x, \alpha) = \frac{1}{2} (1 - \Gamma) \Psi(\phi(x, \alpha)) + \frac{1}{2} (1 + \Gamma) \Psi(\phi^{-1}(x, \alpha)), \quad (132)$$

а для функций  $\Psi(x)$ , аналитических в окрестности  $R_x^4$ , формула (131б) выражается через конечные преобразования с чисто мнимым параметром:

$$\Psi_2(x, \alpha) = \frac{1}{2} (1 + i\Gamma') \Psi(\phi(x, i\alpha)) + \frac{1}{2} (1 - i\Gamma') \Psi(\phi^{-1}(x, i\alpha)).$$

Восстановление конечных  $\Gamma^\times$ -собственно конформных преобразований значительно более громоздко, поскольку в этом случае спиновые и орбитальные части генераторов  $\Gamma^\times \hat{K}_\mu$  не коммутируют. По этой причине конечные  $\Gamma^\times$ -собственно конформные преобразования здесь не приводим.

В заключении укажем, что выделенные из обертывающих алгебр подалгебр Ли, порождаемых матрично-дифференциальными операторами первого порядка по переменной  $x$ , целесообразно не только потому, что такие подалгебры восстанавливаются до соответствующих групп инвариантности, но и потому, что, как уже упоминалось, оператор самого уравнения Дирака принадлежит этому выделенному классу. Наконец, именно таким симметриям соответствуют дополнительные законы сохранения zilch-типа.

1. Noether E., Invariante Variationsproblem, *Kgl. Ges. Wiss., Nachr., Göttingen Math.-Phys.*, 1918, **2**, 235–257.
2. Hill E.L., Hamilton’s principle and the conservation theorem of mathematical physics, *Rev. Mod. Phys.*, 1951, **23**, № 3, 253–260.
3. Schröder U.E., Noether’s theorem and the conservation laws in classical field theories, *Fortschr. Phys.*, 1951, **16**, № 6, 357–372.
4. Ибрагимов Н.Х., Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения (замечания к теореме Нетер), *Теор. и мат. физика*, 1969, **1**, № 3, 350–359.
5. Plybon V.F., New approach to the Noether theorem, *J. Math. Phys.*, 1971, **12**, № 1, 57–60.

6. Lie S., Transformationgruppen, Leipzig, 1883, Bd. 3, 400 s.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
8. Fushchych W.I., On additional invariance of the Dirac and Maxwell equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
9. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the new invariance groups of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petia equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1977, **19**, № 9, 347–352.
10. Фушич В.И., Никитин А.Г., О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака, *Элементар. частицы и атом. ядро*, 1983, **14**, вып. 1, 5–57.
11. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
12. Kibble T.W.B., Conservation laws for free fields, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 7, 1022–1026.
13. O'Connell R.F., Tompkins D.R., Generalized conservation laws for free fields with mass, *Nuovo Cim.*, 1965, **39**, № 1, 391–394.
14. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.
15. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О теореме Нетер для преобразований трех типов, Препринт № 85-12, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1985, 61 с.
16. Кривский И.Ю., Теорема Нетер о законах сохранения для нелиевских преобразований инвариантности, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 134–139.
17. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О лагранжевом подходе для электромагнитного поля в терминах напряженностей и законы сохранения, Препринт № 85-13, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1985, 53 с.
18. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Лагранжиан электромагнитного поля в терминах напряженностей и законы сохранения, *Укр. физ. журн.*, 1985, **30**, № 10, 1457–1459.
19. Симулик В.М., Лагранжев и теоретико-алгебраический анализ диракоподобной формы уравнений Максвелла, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 130–133.
20. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Инвариантный лагранжиан в электродинамике без потенциалов, *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общ. и ядерн. физ.*, 1986, вып. 1, 29–30.
21. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Скалярная функция Лагранжа и законы сохранения для электромагнитного поля в терминах напряженностей, Препринт № 86-35, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1986, 49 с.
22. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Релятивистски инвариантная формулировка лагранжева подхода в электродинамике в терминах напряженностей, Препринт № 86-36, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1986, 39 с.
23. Фушич В.И., Кривский И.Ю., Симулик В.М., О векторных лагранжианах для электромагнитного и спинорного полей, Препринт № 87.54, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 39 с.
24. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Лагранжев и нетеровский анализ поляризационных законов сохранения для электромагнитного поля, *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общ. и ядерн. физ.*, 1988, вып. 1, 44–46.
25. Heaviside O., On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field, *Phill. Trans. Roy. Soc. London A*, 1982, **183**, 423–480.
26. Larmor I., Collected papers, London, Clarendon Press, 1928, 275 p.
27. Rainich G.Y., Electrodynamics in the general relativity theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–136.
28. Pohjanpelto J., First order generalized symmetries of Maxwell equations, *Phys. Lett. A*, 1988, **129**, № 3, 148–150.
29. Hojman S., Problem of the identical vanishing of Euler–Lagrange derivatives in field theory, *Phys. Rev. D*, 1983, **27**, № 2, 451–453.
30. Hojman S., Symmetries of Lagrangians and their equations of motion, *J. Phys. A*, 1984, **17**, № 12, 2399–2412.



31. Hojman S., First-order equivalent Lagrangians and conservation laws, *J. Math. Phys.*, 1983, **25**, № 6, 1776–1779.
32. Good R.H., Particle aspect of the electromagnetic field equations, *Phys. Rev.*, 1957, **105**, № 6, 1914–1919.
33. Fradkin D.M., Conserved quantities associated with symmetry transformations of relativistic free-particle equation of motion, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 6, 879–890.
34. O'Connell R.F., Tompkins D.R., Generalized solutions for free Maxwell fields and consequent generalized conservation laws, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 12, 1952–1954.
35. Хамитов Р.С., Структура группы и базис законов сохранения, *Теор. и мат. физика*, 1982, **52**, № 2, 244–251.
36. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, М., Наука, 1981, 431 с.
37. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантовых полей, М., Наука, 1984, 600 с.

# О новых системах и законах сохранения для упругих волн

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

1. Максимальной локальной группой инвариантности основного уравнения линейной теории упругости

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{U} + \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (1)$$

является восьмипараметрическая группа Ли [1]. Базисные элементы алгебры Ли этой группы имеют вид

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = \nabla_a, \quad J_a = \varepsilon_{abc} \left( -x_b \nabla_c + U^b \frac{\partial}{\partial U^c} \right), \quad D = x_0 P_0 + \mathbf{x} \nabla. \quad (2)$$

В уравнении (1)  $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3)$  — вектор смещения,  $\rho_0 > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\lambda + \mu > 0$  — коэффициенты Ламе. Запишем это уравнение в матричной форме

$$L\mathbf{U} \equiv Z^{ab} \left( \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho_0} \delta_{ab} \Delta - \frac{\lambda + \mu}{\rho_0} \nabla_a \nabla_b \right) \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{U}$  — столбец  $(U^1, U^2, U^3)$ ,  $Z^{ab}$  — матрицы размерности  $3 \times 3$  с матричными элементами  $(Z^{ab})_{cd} = \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}$ .

Естественно поставить вопрос: обладает ли уравнение (1) скрытой (нелиевской) симметрией, которая не может быть найдена в классическом подходе Ли? В настоящей статье с использованием методов [2–4] дается положительный ответ на этот вопрос. А именно, найден полный набор операторов симметрии уравнения (1) в классе дифференциальных операторов второго порядка

$$Q = D_{(1)}^a \nabla_a \frac{\partial}{\partial t} + C_{(1)}^{ab} \nabla_a \nabla_b + A_{(1)} \frac{\partial}{\partial t} + B_{(1)}^a \nabla_a + F_{(1)}, \quad (4)$$

который значительно шире восьмимерной алгебры Ли (2). По найденным операторам симметрии построены новые законы сохранения для уравнения (1).

**Определение.** *Линейный дифференциальный оператор (4) является оператором симметрии уравнения (3), если*

$$[L, Q] = \left[ D_{(2)}^a \nabla_a \frac{\partial}{\partial t} + C_{(2)}^{ab} \nabla_a \nabla_b + A_{(2)} \frac{\partial}{\partial t} + B_{(2)}^a \nabla_a + F_{(2)} \right] L, \quad (5)$$

где символ  $[ , ]$  обозначает коммутатор,  $D_{(i)}^a$ ,  $C_{(i)}^{ab}$ ,  $A_{(i)}$ ,  $B_{(i)}^a$  и  $F_{(i)}$  — матрицы размерности  $3 \times 3$ , зависящие от  $t$  и  $\mathbf{x}$ ,  $i = 1, 2$ .

Полное описание операторов симметрии уравнения (3) в классе (4) дает следующее утверждение.

**Теорема.** Для уравнения (3) существует 61 линейно независимый оператор симметрии в классе дифференциальных операторов второго порядка. В их число входят генераторы (2) и их произведения, а также следующие операторы

$$\begin{aligned} Q_0 &= 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} - 1) - \mathbf{J}^2, \\ Q_a &= \varepsilon_{abc} \left\{ \left[ S_b \nabla_c, \mathbf{S} \cdot \mathbf{J} - \frac{1}{2} \right]_+ - \frac{1}{2} [J_b, \nabla_c]_+ \right\}, \\ Q_{ab} &= [\varepsilon_{adc} S_d \nabla_c, \varepsilon_{bkl} S_k \nabla_l]_+ - \frac{1}{3} \delta_{ab} (5\Delta - 2(\mathbf{S} \cdot \nabla^2)), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{J} = -\mathbf{x} \times \nabla + \mathbf{S}$  — операторы (2), записанные в матричной форме,  $\mathbf{S}$  — матрицы с матричными элементами  $(S_a)_{bc} = \varepsilon_{abc}$ ,  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ,  $[A, B]_+ = AB + BA$ .

**Доказательство** теоремы сводится к решению довольно громоздкой системы определяющих уравнений для матриц  $D_{(i)}^a$ ,  $C_{(i)}^{ab}$ ,  $A_{(i)}$ ,  $F_{(i)}$ ,  $B_{(i)}^a$ , следующей из (5) после приравнивания коэффициентов при линейно независимых матрицах и дифференциальных операторах.

**Замечание 1.** Вычисления в левой и правой частях уравнения (5) удобно проводить с использованием базиса в пространстве матриц размерности  $3 \times 3$ , образуемого матрицами  $Z^{ab}$  и  $S^{ab} = \varepsilon^{abc} S_c$ . Эти матрицы удовлетворяют следующим коммутационным антикоммутационным соотношениям:

$$[Z^{ab}, Z^{cd}] = \delta_{bc} S^{ad} + \delta_{ad} S^{bc} + \delta_{ac} S^{bd} + \delta_{bd} S^{ac}, \quad (7)$$

$$[S^{ab}, S^{cd}] = \delta_{bc} S^{ad} + \delta_{ad} S^{bc} - \delta_{ac} S^{bd} - \delta_{bd} S^{ac}, \quad (8)$$

$$[S^{ab}, Z^{cd}] = \delta_{bc} Z^{ad} + \delta_{ad} Z^{bc} - \delta_{ac} Z^{bd} - \delta_{bd} Z^{ac}, \quad (9)$$

$$[Z^{ab}, Z^{cd}]_+ = \delta_{bc} Z^{ad} + \delta_{ad} Z^{bc} + \delta_{ac} Z^{bd} + \delta_{bd} Z^{ac}, \quad (10)$$

$$[S^{ab}, S^{cd}]_+ = \delta_{bc} Z^{ad} + \delta_{ad} Z^{bc} - \delta_{ac} Z^{bd} - \delta_{bd} Z^{ac}, \quad (11)$$

$$[Z^{ab}, S^{cd}]_+ = \delta_{bc} S^{ad} - \delta_{ad} S^{bc} + \delta_{ac} S^{bd} - \delta_{bd} S^{ac}, \quad (12)$$

и образуют базис как алгебры (см. (7)–(9)), так и супералгебры (см. (8)–(10) или (10)–(12)) Ли.

**Замечание 2.** Формулы (6) задают 9 линейно независимых операторов, поскольку  $\sum_a Q_{aa} = 0$ . Эти операторы не принадлежат обвертывающей алгебре, порождаемой генераторами (2).

**Замечание 3.** Операторы (6) не образуют алгебры Ли. Однако операторы симметрии

$$H_1 = Q_A, \quad H_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, \quad H_3 = H_1 H_2, \quad H_{3+a} = H_a^2,$$

где  $a = 1, 2, 3$ ,  $Q_A$  — любой из операторов (6) ( $A = 0, 1, \dots, 12, 13, \dots$ ) образуют базис супералгебры Ли, удовлетворяя соотношениям

$$[H_a, H_b]_+ = 2\delta_{ab} H_{3+b}, \quad [H_a, H_{3+b}] = [H_{3+a}, H_{3+b}] = 0. \quad (13)$$

2. Операторы симметрии (6) используем для построения новых законов сохранения для уравнения (1). Поскольку эти операторы являются дифференциальными операторами второго порядка, соответствующие токи зависят от вторых производных.

Выберем сохраняющиеся токи в виде

$$j_0 = (A\dot{U})^+BU + (BU)^+A\dot{U}, \quad j_a = (AV^aU)^+BU + (BU)^+AV^aU, \quad (14)$$

где  $B$  — любой из операторов (5), а  $A$  — любой из генераторов (8),

$$V^a = Z^{kl} \left( \frac{\mu}{\rho_0} \nabla_a \delta_{kl} + \frac{\lambda + \mu}{2\rho_0} (\delta_{ka} \nabla_l - \delta_{al} \nabla_k) \right), \quad \dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Так как и  $A$ , и  $B$  удовлетворяют условиям (5) и, кроме того, в силу уравнения (3)  $\nabla_a V^a U = \partial^2 U / \partial t^2$ , билинейные комбинации (14) удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu = 0, \quad x_0 = t, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (15)$$

Следовательно, интегральные величины вида

$$I = \int d^3x j_0 \quad (16)$$

сохраняются во времени. В частности, сохраняются приведенные ниже тензор  $I^{ab}$  и вектор  $I^a$ :

$$I^{ab} = \int d^3x \lambda^{ab}, \quad I^a = \int d^3x \lambda^{ab} x_b,$$

$$\lambda^{ab} = (\text{rot } \dot{U})^a (\text{rot } \dot{U})^b + \frac{\mu}{\rho_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x^c} (\text{rot } U)^a \right] \frac{\partial}{\partial x^c} (\text{rot } U)^b.$$

Не составляет труда вычислить в явном виде и другие сохраняющиеся величины, задаваемые формулами (14), (16).

Операторы симметрии (6) могут быть использованы для построения новых систем координат, в которых разделяются переменные уравнения (1), а также для отыскания точных и приближенных решений этого уравнения.

Нелиевская симметрия уравнения (1) обнаружена в [4]. Явный вид интегро-дифференциальных операторов симметрии для этого уравнения приведен в [5]. Симметрия стационарного уравнения теории упругости в классе дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами подробно изучена в [6, 7].

1. Чиркунов Ю.А., в кн. Динамика сплошной среды, 1973, вып. 14, 128–130.
2. Фушич В.И., ДАН, 1979, **246**, № 4, 846–850.
3. Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
4. Фушич В.И., в кн. Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–43.
5. Фушич В.И., Наконечный В.В., Укр. матем. журн., 1980, **32**, № 2, 267–273.
6. Olver P.J., Arch. Rat. Mech. and An., 1984, **85**, 131–148.
7. Olver P.J., Applications of the Lie groups to differential equations, N.Y., Springer-Verlag, 1986, 580 p.

# Про точні розв'язки рівнянь Лоренца–Максвелла

*В.І. ФУЩИЧ, І.В. РЕВЕНКО*

New exact solutions for the systems of the classical electrodynamics equations are obtained.

Рух класичної безспінової частини в електромагнітному колі описується системою звичайних диференціальних рівнянь (Лоренца) та системою диференціальних рівнянь (Максвелла) в частинних похідних вигляду [1]

$$m u_\mu = e F_{\mu\nu} u^\nu, \quad u_\mu \equiv \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad (1)$$

$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$  — тензор електромагнітного поля,

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A_\nu) = j_\mu, \quad j_\mu = e u_\mu, \quad (2)$$

$$u_\mu u^\mu = 1, \quad (3)$$

$\tau$  — власний час,  $A_\mu$  — потенціал електромагнітного поля. Деякі точні розв'язки системи (1), (2) знайдено в [2].

В даній роботі, використовуючи симетрійні властивості системи (1), (2), отримано нові класи точних розв'язків системи Лоренца–Максвелла.

**1.** Задамо електромагнітний потенціал наступними формулами

$$\begin{aligned} A_0 &= \rho(\omega)\theta + \sigma(\omega)\theta^{-1}, & A_1 &= A_1(\omega), & A_2 &= A_2(\omega), \\ A_3 &= \rho(\omega)\theta - \sigma(\omega)\theta^{-1}, & \theta &= x_0 + x_3, & \omega &= x_1 - \alpha \ln |\theta|, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  — довільні досить гладкі функції, залежні лише від однієї змінної  $\omega$ . Лагранжіан  $L$  рівняння (1)

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + e \dot{x}^\mu A_\mu \quad (5)$$

для поля (4) інваріантний відносно тривимірної алгебри Лі з базисними елементами

$$\langle x_0 \partial_3 + x_3 \partial_0 + \alpha \partial_1, \partial_0 - \partial_3, \partial_2 \rangle. \quad (6)$$

З теореми Нетер випливає, що інтегралами руху рівняння (1) для поля (4) є функції

$$\begin{aligned} m u_3 + e A_3 + m u_0 + e A_0 &= C_1, & -m u_2 - e A_2 &= C_2, \\ x_0 (-m u_3 - e A_3) + x_3 (m u_0 + e A_0) + \alpha (-m u_1 - e A_1) &= C_3, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  — довільні постійні.

Рівняння (2) для поля (4) мають вигляд

$$\begin{aligned} eu_0 &= -\rho''\theta + \theta^{-1}\{-\sigma'' + \alpha(2\rho' - 2\alpha\rho'' + A_1'')\}, & eu_1 &= 2(\rho' - \alpha\rho''), \\ eu_2 &= -A_2'', & eu_3 &= -\rho''\theta - \theta^{-1}\{-\sigma'' + \alpha(2\rho' - 2\alpha\rho'' + A_1'')\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи інтеграли руху (7), система (8) перепишеться в наступній формі:

$$\begin{aligned} A_2'' \frac{m}{e} - eA_2 &= C_2, & \rho'' \frac{m}{e} - e\rho &= 0, & C_1 &= 0, \\ (\alpha A_1 - \sigma)'' \frac{m}{e} - e(\alpha A_1 - \sigma) &= C_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що розв'язками системи (9) є функції

$$\begin{aligned} \alpha A_1 - \sigma &= a_0 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_0 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} - \frac{C_3}{e}, \\ \rho &= a_1 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_1 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\}, \\ A_2 &= a_2 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_2 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} - \frac{C_2}{e}. \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки вектор  $u_\mu$  задовольняє співвідношення (3), то на функції  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  необхідно накласти додатково умову

$$4\rho''(\sigma'' - \alpha A_1'') + 4\rho''^2\alpha^2 - 4\rho'^2 - A_2''^2 = e^2. \quad (11)$$

Підставивши вираз (10) в (11), одержимо співвідношення на постійні  $a_i$

$$\begin{aligned} 4a_1a_0 + 4(\alpha^2 - m)a_1^2 - a_2^2 &= 0, \\ 4b_1b_0 + 4(\alpha^2 - m)b_1^2 - b_2^2 &= 0, \\ 4a_1b_0 + 4b_1a_0 + 8a_1b_1(\alpha^2 + m) - 2b_2a_2 &= \frac{m^2}{e^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для побудови розв'язків рівняння (1), (4) робимо заміну змінних

$$y_0 = x_0 + x_3, \quad y_1 = x_1 - \alpha \ln|x_0 + x_3|, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_0 - x_3. \quad (13)$$

Тоді рівняння руху частинки має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{d\tau} &= u_0 + u_3 = -\frac{2\rho''y_0}{e}, & \frac{dy_1}{d\tau} &= \frac{2\rho'}{e}, & \frac{dy_2}{d\tau} &= u_2 = -\frac{A_2''}{e}, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= \frac{2}{ey_0}\{-\sigma'' + \alpha A_1'' + \alpha(2\rho' - 2\alpha\rho'')\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Розв'язки рівнянь (14) знаходимо квадратурами

$$\begin{aligned} \int \frac{dy_1}{2\rho'} &= \frac{\tau}{e} + C_0, & y_0 &= \frac{C_4}{\rho'}, & y_3 &= \frac{1}{C_4}\{-\sigma' + \alpha A_1' + \alpha(2\rho - 2\alpha\rho')\} + C_5, \\ y_2 &= -\int \frac{A_2'' dy_1}{2\rho'} + C_6, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $C_0, C_4, C_5, C_6$  — постійні інтегрування.

Таким чином, точні розв'язки системи рівнянь (1), (2) задаються формулами (4), (10), (12), (15).

2. Для побудови другого класу точних розв'язків рівнянь (1), (2) задамо електромагнітний потенціал наступними формулами:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sigma(\omega)\theta + \theta^{-1}\{\psi(\omega)\theta_1 + \sigma(\omega)\theta_1^2 + \varphi(\omega)\}, & A_1 &= 2\sigma(\omega)\theta_1 + \psi(\omega), \\ A_2 &= A_2(\omega), & A_3 &= \sigma(\omega)\theta - \theta^{-1}\{\psi(\omega)\theta_1 + \sigma(\omega)\theta_1^2 + \varphi(\omega)\}, \\ \theta &= x_0 + x_3, & \theta_1 &= x_1 - \beta \ln |\theta|, & \omega &= x_2 - \alpha \ln |\theta|, \end{aligned} \quad (16)$$

$\sigma, \psi, \varphi, A_2$  — довільні функції від  $\omega$ .

При такому виборі електромагнітного потенціалу лагранжیان (5) інваріантний відносно алгебри

$$\langle (x_0 + x_3)\partial_1 + x_1(\partial_0 - \partial_3), x_0\partial_3 + x_3\partial_0 + \beta\partial_1 + \alpha\partial_2, \partial_0 - \partial_3 \rangle,$$

і тому рівняння (1) мають три інтеграли руху

$$\begin{aligned} (x_0 + x_3)(-mu_1 - eA_1) + x_1(mu_0 + eA_0 + mu_3 + eA_3) &= C_1, \\ mu_0 + eA_0 + mu_3 + eA_3 &= C_3, \\ x_0(-mu_3 - eA_3) + x_3(mu_0 + eA_0) + \beta(-mu_1 - eA_1) + \alpha(-mu_2 - eA_2) &= C_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Підставляючи вирази (16) у рівняння (2), знаходимо вектор 4-швидкості  $u_i$

$$\begin{aligned} eu_0 &= -\sigma''\theta + \theta^{-1}\{-\psi''\theta_1 + [-\varphi'' - 2\sigma + \alpha(A_2'' + 4\sigma' - 2\alpha\sigma'')] - \theta_1^2\sigma''\}, \\ eu_1 &= -2\sigma''\theta_1 - \psi'', & eu_2 &= 4\sigma' - 2\alpha\sigma'', \\ eu_3 &= -\sigma''\theta - \theta^{-1}\{-\psi''\theta_1 + [-\varphi'' - 2\sigma + \alpha(A_2'' + 4\sigma' - 2\alpha\sigma'')] - \theta_1^2\sigma''\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Співвідношення нормування 4-швидкості  $u_\mu$  (3) накладає на функції  $\sigma, \psi, \varphi, A_2$  умову

$$4\sigma''(\varphi'' - \alpha A_2'') + 8\sigma''\sigma + 8\alpha^2\sigma''^2 - \psi''^2 - 16\sigma'^2 = e^2. \quad (19)$$

Для того, щоб рівняння (17) та (18) були сумісні, необхідно і достатньо, щоб функції  $\sigma, \psi, \varphi, A_2$  задовольняли рівняння

$$\begin{aligned} \sigma'' - \frac{e^2}{m}\sigma = 0, & \quad \psi'' - \frac{e^2}{m}\psi = 0, & C_1 = 0, & \quad C_2 = 0, \\ (\varphi - \alpha A_2)'' - \frac{e^2}{m}(\varphi - \alpha A_2) &= C_3 \frac{e}{m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Загальними розв'язками рівнянь (20) є функції

$$\begin{aligned} \sigma &= a_0 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_0 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\}, \\ \psi &= a_1 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_1 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\}, \\ \varphi - \alpha A_2 &= a_2 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_2 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} - \frac{C_3}{e}, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $a_i, b_i$  — довільні постійні.

Для того, щоб виконувалось рівняння (19), постійні  $a_i$ ,  $b_i$  повинні задовольняти умови

$$\begin{aligned} 4 \left( a_0 a_2 + 2a_0^2 \left( \alpha^2 - \frac{m}{e^2} \right) \right) - a_1^2 = 0, \quad 4 \left( b_0 b_2 + 2b_0^2 \left( \alpha^2 - \frac{m}{e^2} \right) \right) - b_1^2 = 0, \\ 4 \frac{e^2}{m^2} (a_0 b_2 + b_0 a_2) + 16a_0 b_0 \left( \frac{3}{m} + \frac{e^2 \alpha^2}{m^2} \right) - 2 \frac{e^2}{m^2} a_1 b_1 = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

В криволінійній системі координат

$$y_0 = x_0 + x_3, \quad y_1 = \frac{x_1}{x_0 + x_3}, \quad y_2 = x_2 - \alpha \ln |x_0 + x_3|, \quad y_3 = x_0 - x_3$$

рівняння руху частини, враховуючи формулу (18), набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{d\tau} = -\frac{2\sigma'' y_0}{e}, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{2\sigma'' \beta \ln |y_0| - \psi''}{e y_0}, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = \frac{4\sigma'}{e}, \\ \frac{dy_3}{d\tau} = \frac{2}{y_0} \{ -\psi'' [y_1 y_0 - \beta \ln |y_0|] + \\ + (-\varphi - 2\sigma + \alpha(A_2'' + 4\sigma' - 2\alpha\sigma'')) - (y_1 y_0 - \beta \ln |y_0|)^2 \sigma'' \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Розв'язки рівнянь (22) знаходимо у квадратурах

$$\begin{aligned} \int \frac{dy_2}{d\sigma'} = \frac{\tau}{e} + C_0, \quad y_0 = C_4(\sigma')^{-1/2}, \\ y_1 = \int \frac{\{ 2\sigma'' \beta \ln [C_4(\sigma')^{-1/2}] - \psi'' \} dy_2}{4C_4(\sigma')^{-1/2}} + C_5 \equiv K(y_2) + C_5, \\ y_3 = \int \left\{ -\psi'' \left[ (K + C_5) C_4(\sigma')^{-1/2} - \beta \ln |C_4(\sigma')^{-1/2}| \right] + \right. \\ \left. + (-\varphi - 2\sigma + \alpha(A_2'' + 4\sigma' - 2\alpha\sigma'')) - \right. \\ \left. - \sigma'' \left[ (K + C_5) C_4(\sigma')^{-1/2} - \beta \ln |C_4(\sigma')^{-1/2}| \right]^2 \right\} \frac{dy_2}{2C_4(\sigma')^{-1/2}} + C_6. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким чином, точні розв'язки системи рівнянь задаються формулами (16), (21), (22), (24).

1. Меллер К., Теория относительности, М., Атомиздат, 1975, 400 с.
2. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н., Точные решения релятивистских волновых уравнений, Новосибирск, Наука, 1982, 144 с.



# Пуанкаре-інваріантні рівняння третього та четвертого порядків у механіці Остроградського

*В.І. ФУЩИЧ, І.В. РЕВЕНКО*

A class of the nonlinear Poincaré-invariant ordinary differential equations is obtained. The ordinary differential equation admitting the extended Poincaré group is integrated in the closed form.

Варіаційний принцип на випадок, коли лагранжіан залежить від вищих похідних, узагальнив М. Остроградський [1]. У механіці Остроградського, на відміну від механіки Ньютона–Лагранжа, природно виникають рівняння високого порядку. Для цих рівнянь повинен виконуватись принцип відносності. Тобто, рівняння в механіці Остроградського повинні бути інваріантними або відносно перетворень Галілея, або відносно перетворень Лоренца [2].

Нижче описані звичайні диференціальні рівняння третього та четвертого порядків, які є інваріантними відносно груп Пуанкаре та конформної групи. Зображення відповідної конформної алгебри задамо операторами

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad I_{01} = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, \quad D = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1)$$

$$K_0 = \frac{1}{2} (x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial t} + xt \frac{\partial}{\partial x}, \quad K_1 = \frac{1}{2} (x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial x} + xt \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2)$$

Оператори  $\langle P_0, P_1, I_{01} \rangle$  утворюють алгебру Пуанкаре  $AP(1, 1)$ . Оператори  $\langle P_0, P_1, I_{01}, D \rangle$  — узагальнену алгебру Пуанкаре  $A\tilde{P}(1, 1)$ .

*Рівняння третього порядку.* Розглянемо рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (3)$$

Мають місце такі теореми.

**Теорема 1.** *Рівняння (3) інваріантне відносно алгебри  $AC(1, 1)$  з базисними елементами (1), (2) лише у тому випадку, коли*

$$\ddot{x} = -3 \frac{\dot{x}\ddot{x}^2}{1 - \dot{x}^2}. \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Рівняння (3) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре  $AP(1, 1)$  лише тоді, коли*

$$\ddot{x} = -3 \frac{\dot{x}\ddot{x}^2}{1 - \dot{x}^2} + (1 - \dot{x}^2)^2 \varphi \left( \frac{\ddot{x}}{(1 - \dot{x}^2)^{3/2}} \right), \quad (5)$$

де  $\varphi$  — достатньо гладка функція своїх аргументів.

**Теорема 3.** Рівняння (3) інваріантне відносно узагальненої алгебри Пуанкаре  $AP(1,1)$  тоді, якщо

$$\ddot{x} = -3 \frac{\dot{x}\ddot{x}^2}{1-\dot{x}^2} + \frac{\lambda\ddot{x}^2}{1-\dot{x}^2}, \quad (6)$$

$\lambda$  — довільна стала.

Серед знайдених рівнянь слід виділити рівняння (6). Симетрійні властивості цього рівняння не вичерпуються лише точковою симетрією. Рівняння (6) має достатньо широку контактну симетрію, а також симетрію Лі-Беклунда.

**Теорема 4.** Алгеброю інваріантності рівняння (6) в класі операторів

$$X = \xi(t, x, \dot{x}) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, x, \dot{x}) \frac{\partial}{\partial x}$$

є алгебра

$$AP(1,1) + Q_\lambda \quad \text{при } \lambda \neq 0,$$

$$AC(1,1) + S_a \quad \text{при } \lambda = 0,$$

де оператори  $Q_\lambda$ ,  $S_a$  задаються формулами

1)  $\lambda \neq -1, 0, 1$

$$Q_\lambda = \frac{\dot{x} + \lambda}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right)^{\lambda/2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1 + \lambda\dot{x}}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right)^{\lambda/2} \frac{\partial}{\partial x},$$

2)  $\lambda = 1$

$$Q_1 = \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} + \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| \right) \frac{\partial}{\partial t} + \left( \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| - \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right) \frac{\partial}{\partial x},$$

3)  $\lambda = -1$

$$Q_{-1} = \left( -\frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}} + \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| \right) \frac{\partial}{\partial t} + \left( -\ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| - \frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}} \right) \frac{\partial}{\partial x},$$

4)  $\lambda = 0$

$$S_1 = (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{x} (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$S_2 = x\dot{x} (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} + x (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$S_3 = t\dot{x} (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} + t (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$S_4 = (x^2 - t^2)\dot{x} (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} + (x^2 - t^2) (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Така широка симетрія рівняння (6) дає можливість проінтегрувати його у квадратурах. Інтеграли руху рівняння (6) мають вигляд

$$C_1 = \frac{\dot{x}}{(1 - \dot{x}^2)^{3/2}} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right)^{\lambda/2},$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{1}{C_1} \frac{\dot{x} + \lambda}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2} (1 - \lambda^2)} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right)^{\lambda/2} - t, & \lambda \neq 1, -1, \\ -\frac{1}{4C_1} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} + \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| \right) - t, & \lambda = 1, \\ \frac{1}{4C_1} \left( \frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}} + \ln \left| \frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}} \right| \right) - t, & \lambda = -1, \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} \frac{1}{C_1} \frac{\lambda \dot{x} + 1}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2} (1 - \lambda^2)} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right)^{\lambda/2} - x, & \lambda \neq 1, -1, \\ -\frac{1}{4C_1} \left( \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| - \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right) - x, & \lambda = 1, \\ \frac{1}{4C_1} \left( \frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}} - \ln \left| \frac{1 + \dot{x}}{1 - \dot{x}} \right| \right) - x, & \lambda = -1. \end{cases}$$

Знання інтегралів руху рівняння (6) дає можливість побудувати загальний розв'язок рівняння (6) у неявному вигляді

$$\begin{aligned} [(x + C_3)^2 - (t + C_2)^2] C_1^2 (1 - \lambda^2) &= \left[ \frac{(t - x + C_2 - C_3)(\lambda + 1)}{(t + x + C_2 + C_3)(\lambda - 1)} \right]^\lambda, \quad \lambda \neq 1, -1, \\ 2C_1(x - t + C_3 - C_2) &= \exp\{-2C_1(x + t + C_2 + C_3)\}, \quad \lambda = 1, \\ 2C_1(x + t + C_2 + C_3) &= \exp\{2C_1(t - x + C_2 - C_3)\}, \quad \lambda = -1. \end{aligned}$$

Інтегровність у квадратурах рівняння (6) дозволяє побудувати загальний вигляд операторів Лі-Беклунда, які допускаються рівнянням (6).

**Теорема 5.** Рівняння (6) у класі операторів

$$X = \eta(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \frac{\partial}{\partial x}$$

має нескінченну алгебру інваріантності, елементи якої задаються формулами

$$X = \left( \dot{x}\varphi^1 + \varphi^2 + (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \left( \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right)^{\lambda/2} \varphi^3 \right) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda \neq 1, -1,$$

$$X = \left( \dot{x}\psi^1 + \psi^2 + (1 - \dot{x}) \left( \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| - 1 \right) \psi^3 \right) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda = 1,$$

$$X = \left( \dot{x}\chi^1 + \chi^2 + (1 + \dot{x}) \left( \ln \left| \frac{1 - \dot{x}}{1 + \dot{x}} \right| - 1 \right) \chi^3 \right) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda = -1,$$

де  $\varphi^i$ ,  $\psi^i$ ,  $\chi^i$  — довільні функції від інтегралів руху рівняння (6) при  $\lambda \neq 1, -1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -1$  відповідно.

Рівняння четвертого порядку. Тут описані рівняння

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (7)$$

інваріантні відносно алгебри  $A\tilde{P}(1, 1)$ . Із знайденого класу рівнянь виділені рівняння, що припускають лагранжеве формулювання.

**Теорема 6.** Для того щоб рівняння (7) було інваріантним відносно алгебри  $A\tilde{P}(1,1)$ , необхідно і достатньо, щоб

$$\ddot{x} = -\frac{10\dot{x}\ddot{x}}{1-\dot{x}^2} - \frac{15\dot{x}^2\ddot{x}^3}{(1-\dot{x}^2)^2} + \frac{\ddot{x}^3}{(1-\dot{x}^2)^2} \varphi \left( \frac{\ddot{x}(1-\dot{x}^2)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x} \right), \quad (8)$$

де  $\varphi$  — довільна достатньо гладка функція.

**Теорема 7.** Рівняння (8) допускає лагранжеве формулювання лише в тому разі, коли

$$\varphi \left( \frac{\ddot{x}(1-\dot{x}^2)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x} \right) = a \left( \frac{\ddot{x}(1-\dot{x}^2)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x} \right)^2 + b \left( \frac{\ddot{x}(1-\dot{x}^2)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x} \right) + c,$$

де  $a, b, c$  — сталі, які задовольняють співвідношення  $a \neq 2, b = 0, c = \frac{5-3a}{a-2}, a = 2, b = \pm 2$ . Відповідні лагранжіани мають вигляд

$$L(\dot{x}, \ddot{x}) = K^1 (1 - \dot{x}^2)^{(3a-5)/2} \ddot{x}^{2-a}, \quad a \neq 1, 2,$$

$$L(\dot{x}, \ddot{x}) = K^1 (1 - \dot{x}^2)^{-1} \ddot{x} (\ln |\ddot{x}| - 1), \quad a = 1,$$

$$L(\dot{x}, \ddot{x}) = -K^1 (1 + \dot{x}) \ln |\ddot{x}| + \frac{K^1(C-3)}{4} \left\{ \dot{x} \ln \left| \frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}} \right| - 2 \right\} - \\ - 6K^1 \ln |1 \pm \dot{x}| - 3(1 \pm \dot{x})(\ln |1 \pm \dot{x}| - 1)K^1, \quad a = 2,$$

$C, K^1$  — довільні сталі.

1. Остроградский М. В., Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрическим задачам, Полн. собр. соч., Киев, Изд-во АН УССР, 1961, Т.2, 359 с.
2. Фушич В.И., Сегада Ю.Н., Редченко Г.А., Инвариантные системы уравнений в обобщенной механике, *Укр. мат. журн.*, 1980, **32**, № 4, 569–576.

# Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Исследована условная инвариантность уравнения Буссинеска. Найдены инвариантные анзацы, редуцирующие данное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Известно, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения Буссинеска

$$u_{00} + \frac{1}{2}\Delta u^2 + \Delta^2 u = 0, \quad u = u(x), \quad x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n} \quad (1)$$

является расширенная алгебра Евклида  $\tilde{E}(1, n)$  с операторами

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a - 2u \partial_u. \quad (2)$$

Все не эквивалентные анзацы, редуцирующие двумерное ( $n = 1$ ) уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению, которые можно построить по алгебре инвариантности (2), имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1, \quad \alpha_0, \alpha_1 = \text{const}, \\ u &= x_0^{-1} \varphi(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [1] показано, что двумерное уравнение (1) с помощью анзаца

$$u = \varphi(\omega) - 4\mu^2 x_0^2, \quad \omega = x_1 + \mu x_0^2, \quad \mu = \text{const} \quad (4)$$

редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi''' + \varphi\varphi' + 2\mu\varphi = 8\mu^2\omega + C_1, \quad C_1 = \text{const}. \quad (5)$$

Оператор, соответствующий этому анзацу,

$$Q = \partial_0 - 2\lambda x_0 \partial_1 - 8\lambda^2 x_0 \partial_u, \quad \lambda = -2\mu \quad (6)$$

не принадлежит алгебре (2). Анзацы вида (4) естественно назвать нелиевскими, так как они не следуют из групповых свойств уравнения (1).

В настоящей работе с использованием понятия условной инвариантности, введенного в работах [2–6], описаны анзацы вида [7]

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \quad \omega = \omega(x), \quad (7)$$

которые редуцирующие уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

В работе [8] без использования понятия условной инвариантности, описаны анзацы вида (7), редуцирующие двумерное уравнение Буссинеска (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Существенное отличие нашего подхода от метода [8] состоит в том, что понятие условной инвариантности вскрывает причину возникновения неожиданных анзацев и дает регулярную процедуру для отыскания нелиевских анзацев для произвольных уравнений. Кроме того, условная инвариантность дает возможность построить такие анзацы, которые не могут быть получены способом, предложенным в [8].

Рассмотрим двумерное уравнение (1)

$$u_{00} + uu_{11} + u_1^2 + u_{1111} = 0. \quad (8)$$

**Теорема 1.** Уравнение (8)  $Q$ -условно инвариантно относительно оператора

$$Q = A(x)\partial_0 + B(x)\partial_1 + [\alpha(x)u + \beta(x)]\partial_u, \quad (9)$$

если функция  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

Случай 1.  $A \neq 0$ . Не умаляя общности можно положить  $A = 1$ .

$$\begin{aligned} \alpha &= -2B_1, \quad \alpha = B_{11} = 0, \quad \beta = -2B(B_0 + 2BB_1), \\ \beta_1 &= \frac{1}{2}B_{00} + (\alpha B)_0 + B_1(B_0 - 2BB_1 + 4\alpha B), \\ \beta_{11} &= -(\partial_0 + 4B_1)(\alpha_0 + \alpha^2), \\ \beta_{00} - 2B_0\beta_1 + 4B_1(\beta_0 - B\beta_1 + \alpha\beta) + 2\alpha_0\beta &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Случай 2.  $A = 0$ ,  $B = 1$ .

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 = 0, \\ \beta_{11} + 3\alpha\beta_1 + 4\alpha^2\beta + 5\alpha_1\beta + 5\alpha_{11}(\alpha^2 - \alpha_1) + 5\alpha\alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha^2) &= 0, \\ \beta_{1111} + 4\alpha_{111}\beta + 6\alpha_{11}(\beta_1 + \alpha\beta) + \\ + 4\alpha_1[(\alpha^2 + \alpha_1)\beta + (\beta_1 + \alpha\beta)_1] + \beta_{00} + 3\beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство проводится при помощи формулы (5, 7, 8) из [6].

В случае 1 существует общее решение уравнений (10), которое дает следующий оператор:

$$\begin{aligned} Q &= \partial_0 + [a(x_0)x_1 + b(x_0)]\partial_1 - \\ &- 2[a(x_0)u + a(a' + aa^2)x_1^2 + (a'b + ab' + 4a^2b)x_1 + b(b' + 2ab)]\partial_u, \end{aligned} \quad (12)$$

где функции  $a = a(x_0)$ ,  $b = b(x_0)$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$a'' = 2aa' - 4a^3 = 0, \quad b'' + 2ab' - 4a^2b = 0. \quad (13)$$

В зависимости от значений функций  $a(x_0)$ ,  $b(x_0)$  имеем несколько неэквивалентных операторов

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_0 + x_0\partial_1 - 2x_0\partial_u \quad (a = 0, b = x_0); \\ Q_2 &= x_0\partial_0 - (x_1 + 6x_0^5)\partial_1 + 2 \left[ u + 3 \left( \frac{x_1^2}{x_0^2} + 2x_1x_0^3 - 24x_0^8 \right) \right] \partial_u \\ (a &= -x_0^1, b = 6x_0^5); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= 2x_0\partial_0 + (x_1 - 3x_0^2)\partial_1 - 2(u - 3x_1 + 9x_0^2)\partial_u \quad \left( a = \frac{1}{2x_0}, b = -\frac{3x_0}{2} \right); \\
 Q_4 &= \wp\partial_0 + \wp'x_1\partial_1 - \wp'(2u + \wp x_1^2)\partial_u \quad \left( a = \frac{\wp'}{2\wp}, b = 0 \right); \\
 Q_5 &= 2\wp\partial_0 + \wp'(x_1 + \Omega)\partial_1 - [2\wp'u + \wp\wp'(x_1 + \Omega)^2 + x_1 + \Omega]\partial_u, \\
 & \quad a = \frac{\wp'}{2\wp}, \quad b = a\Omega, \quad \Omega = \Omega(x_0) = \int \wp(\wp')^{-2} dx_0,
 \end{aligned}$$

$\rho = \rho(x_0)$  — функция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения  $\wp'' = \wp^2$  или  $(\wp')^2 = \frac{2}{3}(\wp^3 + \lambda)$ ,  $\lambda = \text{const}$ .

В случае 2 мы нашли только несколько частных решений уравнений (11), т.е. получили следующие операторы:

$$\begin{aligned}
 Q_6 &= x_0^2\partial_1 + (x_0^5 - 2x_1)\partial_u \quad (\alpha = 0, \beta = x_0^3 - 2x_1x_0^{-2}); \\
 Q_7 &= \partial_1 + \left( -\frac{1}{3}\wp x_1 + \Lambda \right) \partial_u \quad \left( \alpha = 0, \beta = \frac{1}{3}\wp x_1 + \Lambda \right); \\
 Q_8 &= x_1\partial_1 + 2u\partial_u \quad (\alpha = 2x_1^{-1}, \beta = 0); \\
 Q_9 &= x_1^3\partial_1 + 2(x_1^2u + 24)\partial_u \quad (\alpha = 2x_1^{-1}, \beta = 48x_1^{-3}),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\Lambda = \Lambda(x_0)$  — функция Ламе, удовлетворяющая уравнению  $\Lambda'' = \wp\Lambda$ .

Используя операторы (14)–(15), находим анзацы:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & u = \varphi(\omega) - 4x_0^2, \quad \omega = x_1 + x_0^2; \\
 2) \quad & u = x_0^2\varphi(\omega) - \left( \frac{x_1}{x_0} + 6x_0^4 \right), \quad \omega = x_0(x_1 + x_0^5); \\
 3) \quad & u = x_0^{-1}\varphi(\omega) + 2(x_1 - x_0^2), \quad \omega = x_0^{-1/2}(x_1 + x_0^2); \\
 4) \quad & u = \wp^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{6}\wp x_1^2, \quad \omega = \wp^{-1/2}x_1; \\
 5) \quad & u = \wp^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{4}\wp^{-2}\wp^2(x_1 + \Omega)^2, \quad \omega = \wp^{-1/2}x_1 - \frac{1}{2} \int \wp^{-3/2}\wp\Omega dx_0; \\
 6) \quad & u = \varphi(\omega) - x_0^{-2}x_1^2 + x_0^3x_1, \quad \omega = x_0; \\
 7) \quad & u = \varphi(\omega) - \frac{1}{6}x_1^2\wp(x_0) + \Lambda(x_0)x_1, \quad \omega = x_0; \\
 8) \quad & u = x_1^2\varphi(\omega), \quad \omega = x_0; \\
 9) \quad & u = x_1^2\varphi(\omega) - 12x_1^{-2}, \quad \omega = x_0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя анзацы (16) в уравнение (8), получим следующие редуцированные уравнения:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \varphi''' + \varphi\varphi' + 2\varphi = 8\omega + C_1; \\
 2) \quad & \varphi''' + \varphi\varphi' + 30\varphi = 1800\omega + C_2; \\
 3) \quad & \varphi^{\text{IV}} + \left( \varphi + \frac{\omega^2}{2} \right) \varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{7}{4}\omega\varphi' + 2\varphi = 0; \\
 4) \quad & \varphi^{\text{IV}} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{6}(\omega^2\varphi'' + 7\omega\varphi' + 8\varphi) = 0; \\
 5) \quad & \varphi^{\text{IV}} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{2}(\omega\varphi' + 2\varphi - \lambda\omega) = 0; \\
 6) \quad & \varphi'' - 2\omega^{-2}\varphi + \omega^6 = 0;
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$7) \quad \varphi'' - \frac{1}{3}\wp\varphi + \Lambda^2 = 0;$$

$$8) \quad \varphi'' + 6\varphi^2 = 0;$$

$$9) \quad \varphi'' + 6\varphi^2 = 0,$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования.

Решая уравнение (17), по формуле (16) получаем решения уравнения (8). Приведем некоторые из них:

$$u = -\frac{1}{6}x_1^2\wp(x_0), \quad u = -12x_1^{-2}, \quad u = -\frac{1}{6}x_1^2\wp(x_0) - 12x_1^{-2}, \quad (18)$$

$$u = 2(x_1 - x_0^2), \quad u = 2(x_1 - x_0^2) - 12(x_1 + x_0^2)^{-2}, \\ u = -x_0^{-2}x_1^2 - 6C_3^2x_0^8 + 18C_3x_0^3x_1 + C_4x_0^{-1} + C_5x_0^2, \quad C_3, C_4, C_5 = \text{const}. \quad (19)$$

**Замечание 1.** Поскольку уравнение (8) инвариантно относительно преобразований сдвигов и растяжений, то справедлива следующая формула разложения его решений:

$$u = \chi^2 f(\chi^2 x_0 + \theta_0, \chi x_1 + \theta_1), \quad (20)$$

где  $f(x_0, x_1)$  — решение уравнения (8),  $\chi, \theta_0, \theta_1$  — постоянные групповые параметры.

**Замечание 2.** Решения (18) обладает той особенностью, что третье из них равно сумме двух первых. В общем случае сумма  $u = v + w$  двух решений  $v$  и  $w$  уравнения Буссинеска (1) будет его решением, если их произведение  $vw$  является решением уравнения Лапласа  $\Delta(vw) = 0$ . Это следует из соотношения

$$L(v + w) = Lv + Lw + \Delta(vw),$$

где  $Lu$  — левая часть уравнения (1).

Приведем теперь некоторые результаты исследований условной инвариантности уравнения Буссинеска.

**Теорема 2.** Уравнение (8) инвариантно относительно оператора

$$Q = \wp(x_1)\partial_1 + \wp'(x_1)u\partial_u \quad (21)$$

при условии

$$u + 2\wp(x_1) = 0. \quad (22)$$

Анзац, полученный при помощи оператора (21), имеет вид

$$u = \wp(x_1)\varphi(\omega), \quad \omega = x_0. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (8), имеем

$$\wp(x_1)\varphi'' + [\wp^3(x_1) + (\wp')^2]\varphi(\varphi + 2) = 0. \quad (24)$$

Из (24) следует, что для выполнения редукции необходимо требовать

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi(\varphi + 2) = 0, \quad (25)$$

т.е. анзац (23) редуцирует уравнение (8) к системе двух уравнений (25).



Нетривиальным решением системы (25) является функция  $\varphi = -2$ . Тогда

$$u = -2\varphi(x_1) \quad (26)$$

— решение уравнения (8).

**Теорема 3.** Уравнение (1) при  $n = 6$  инвариантно относительно конформной алгебры  $C(6)$  с операторами

$$\begin{aligned} \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad D = x_a \partial_a - 4u \partial_u, \\ K_a = 2x_a D - \bar{x}^2 \partial_a, \quad a = \overline{1, 6}, \end{aligned} \quad (27)$$

при условии

$$\Delta u + \frac{1}{2} u^2 = 0. \quad (28)$$

Один из анзацев, полученных при помощи операторов  $K_a$ , имеет вид

$$u = (\bar{x}^2)^{-2} \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = \frac{\bar{b}\bar{x} - \bar{b}^2 \bar{x}^2}{\bar{x}^4}, \quad (29)$$

где  $b_a$  — постоянные параметры.

Подставляя (29) в (1), имеем

$$(\bar{x}^2)^{-2} \varphi_{11} + \Delta \left[ 2\bar{b}^2 (\bar{x}^2)^{-4} \left( -2\omega_2 \varphi_{22} - 5\varphi_2 + \frac{1}{4\bar{b}^2} \varphi^2 \right) \right] = 0, \quad (30)$$

т.е., как и в предыдущем случае, анзац (29) редуцирует уравнение (1) к системе двух уравнений

$$\varphi_{11} = 0, \quad 2\omega_2 \varphi_{22} + 5\varphi_2 = \frac{1}{4\bar{b}^2} \varphi^2. \quad (31)$$

Частным решением уравнений (31) является функция  $\varphi = -4\bar{b}^2 \omega_2^{-1}$ . Тогда

$$u = \frac{4}{\bar{x}^2 - (\bar{\alpha}\bar{x})^2} \quad (\bar{\alpha} = \text{const}, \quad \bar{\alpha}^2 = 1) \quad (32)$$

— решение уравнения (1) при  $n = 6$ .

1. Olver P.J., Rosenau Ph., The construction of special solutions to partial differential equation, *Rhys. Lett. A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, Reidel, 1987, 214 p.
3. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A.*, 1987, **20**, № 2, L45–L47.
4. Фушич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фушич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А.*, 1988, № 9, 17–20.
6. Фушич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
7. Фушич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
8. Clarkson P.A., Krasil'skii M.D., New similarity solutions of the Boussinesq equation, Preprint, 1988.

# On approximate symmetry and approximate solutions of the non-linear wave equation with a small parameter

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN

The concept of approximate symmetry is introduced. We describe all nonlinearities  $F(u)$  with which the non-linear wave equation  $\square u + \lambda u^3 + \varepsilon F(u) = 0$  with a small parameter  $\varepsilon$  is approximately scale and conformally invariant. Some approximate solutions of wave equations in question are obtained using the approximate symmetry.

Let us consider the non-linear wave equation

$$\square u + \lambda u^3 + \varepsilon F(u) = 0, \quad (1)$$

where  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  is the d'Alembertian,  $\mu = \overline{0, 3}$ ;  $\lambda$  is an arbitrary constant;  $\varepsilon \ll 1$  is a small parameter;  $u = u(x)$ ,  $x \in R(1, 3)$ ;  $F(u)$  is an arbitrary smooth function. By means of Lie's method (see [5, 4]) one can make sure that when  $F(u) \neq 0$  and  $F(u) \neq u^3$ , equation (1) is invariant under the Poincaré group  $P(1, 3)$  only, because the term  $\varepsilon F(u)$  breaks down the scale and conformal symmetry of the equation  $\square u + \lambda u^3 = 0$ .

Below we describe all functions  $F(u)$  with which equation (1) is approximately invariant under the scale and conformal transformations.

Let us represent an arbitrary solution, analytic in  $\varepsilon$ , of equation (1) in the form

$$u = w + \varepsilon v, \quad (2)$$

where  $w$  and  $v$  are some smooth functions of  $x$ . After substitution of (2) into (1) and equating to zero the coefficients of zero and first power of  $\varepsilon$  we get the following system of partial differential equations (PDE):

$$\begin{aligned} \square u + \lambda w^3 &= 0, \\ \square v + 3\lambda w^2 v + F(w) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

**Definition.** We shall call the approximate symmetry of equation (1) the (exact) symmetry of the system (3).

**Theorem 1.** Equation (1) is approximately scale invariant (in the sense of the above definition) if and only if

$$F(u) = \begin{cases} \frac{2\lambda b}{k+1} u^3 + \frac{3\lambda c}{k} u^2 + a u^{2-k}, & k \neq 0, -1, \\ 2\lambda b u^3 + 3\lambda c u^2 \ln u + a u^2, & k = 0, \\ 2\lambda b u^3 \ln u - 3\lambda c u^2 + a u^3, & k = -1 \end{cases} \quad (4)$$

( $k, a, b, c$  are arbitrary constants), with the generator of scale transformations having the form

$$D = x\partial - w\partial_w + (kv + bw + c)\partial_v. \tag{5}$$

**Proof.** Using Lie’s algorithm [5, 4] we find from the condition of invariance that the generator of scale transformations should have the form

$$D = x\partial - w\partial_w + \eta^2(v, w)\partial_v$$

provided (following from the invariance of the second equation of system (3)) that

$$\begin{aligned} \eta_{vv}^2 = \eta_{ww}^2 = \eta_{vw}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^2 = kv + bw + c, \\ 2\lambda bw^3 + 3\lambda cw^2 + (2 - k)F - w\frac{dF}{dw} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

The general solution of equations (6) is given in (4). Thus the theorem is proved.

In particular, as follows from Theorem 1, the equation

$$\square u + \lambda u^3 + \varepsilon u = 0 \tag{7}$$

is approximately scale invariant and the corresponding generator has the form  $D = x\partial - w\partial_w + v\partial_v$ . This statement holds true even if  $\lambda = 0$ .

**Theorem 2.** Equation (1) is approximately conformally invariant if and only if

$$F(u) = -3\lambda\beta u^2 + au^3 \tag{8}$$

with the generator of conformal transformations having the form

$$K = 2cx[x\partial - w\partial_w - (v - \beta)\partial_v] - x^2c\partial, \tag{9}$$

where  $\beta, a, c_\mu$  are arbitrary constants.

The proof of Theorem 2 is performed in the same spirit as that of Theorem 1.

Suppose that in (2)

$$v = f(w), \tag{10}$$

where  $f$  is an arbitrary differentiable function. In this case the system (3) takes the form

$$\square w + \lambda w^3 = 0, \tag{11}$$

$$w_\mu w^\mu \ddot{f} + \square w \dot{f} + 3\lambda w^2 f + F(w) = 0, \quad w_\mu \equiv \partial w / \partial x^\mu. \tag{12}$$

From the condition of splitting of equation (12) one has to put

$$w_\mu w^\mu = A(w), \tag{13}$$

where  $A$  is some function of  $w$ . Equation (13) is compatible with (11) if  $A(w) = \lambda w^4$ , i.e.

$$w_\mu w^\mu = \lambda w^4. \tag{14}$$

(For more details see [1, 2].) Taking account of (11) and (14) we rewrite (12) as

$$\lambda(w^2\ddot{f} - w\dot{f} + 3f) + w^{-2}F(w) = 0. \quad (15)$$

So, if we find function  $f(w)$  as a solution of equation (15), we thereby obtain by means of expressions (2) and (10) approximate solutions of equation (1). It will be noted that a subset of such solutions of equation (1) is approximately conformally invariant since the corresponding approximate system (11) and (14) is conformally invariant [1, 2]. Solutions of equation (15) for functions  $F(w)$  given in (4) have the form

$$f(w) = \begin{cases} -\frac{a}{\lambda[k(k+2)+3]}w^{-k} - \frac{b}{k+1}w - \frac{c}{k}, & k \neq 0, -1, \\ -c \ln w - bw - \frac{1}{3}(2c + a/\lambda), & k = 0, \\ -w(a/2\lambda + b \ln w) + c, & k = -1. \end{cases} \quad (16)$$

The solution of the system (11) and (14) is the function

$$w = \pm[\lambda(x_\nu + a_\nu)(x^\nu + a^\nu)]^{-1/2}, \quad (17)$$

where  $a_\nu$  are arbitrary constants.

When  $\lambda = 0$ , the non-trivial condition of splitting of equation (12) compatible with the equation  $\square w = 0$  is

$$w_\mu w^\mu = 1. \quad (18)$$

So, in this case we find approximate solutions of equation (1) by means of expressions (2) and (10), where function  $f(w)$  is determined from the equation

$$\ddot{f} + F(w) = 0 \quad (19)$$

and  $w$ , in turn, is determined from the system

$$\square w = 0, \quad w_\mu w^\mu = 1. \quad (20)$$

The system (20) is invariant under the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1,4)$  and has solution [1]

$$w = \alpha x + a, \quad \alpha_\nu \alpha^\nu = 1, \quad (21)$$

where  $a$ ,  $\alpha_\nu$  are arbitrary constants.

In particular, equation

$$\square u + \varepsilon u = 0 \quad (22)$$

is approximately invariant under the group  $\tilde{P}(1,4)$  on the subset of solutions

$$u = w - \varepsilon \left( \frac{1}{6}w^3 + a_1 w + a_2 \right), \quad (23)$$

where  $w$  is given in (21) and  $a_1$ ,  $a_2$  are arbitrary constants.

In conclusion, let us note some generalisations of the concept of approximate symmetry studied in this paper. First of all, obviously, one can consider higher orders of approximation of  $u$  in  $\varepsilon$ , i.e.  $u = w + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots$ , and can study the

symmetry of the corresponding approximate system of PDE for functions  $w$ ,  $v^{(1)}$ ,  $v^{(2)}$ , and so on. Secondly, one can expand in  $\varepsilon$ -series not only dependent variables, but also independent ones, e.g.  $x_0 \equiv t = x + \varepsilon z^{(1)} + \varepsilon^2 z^{(2)} + \dots$ , and can construct in this way the corresponding approximate system and then study its symmetry. Another approach to the study of approximate symmetry it to use some special approximations, say the two-point Padé approximants

$$u = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k f_k \left( \sum_{j=0}^n \varepsilon^j g_j \right)^{-1}, \quad m, n < \infty, \quad (24)$$

where functions  $f_k$ ,  $g_j$  are determined from the condition: when  $\varepsilon \rightarrow 0$  expression (24) coincides with the expansion

$$u = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots, \quad \varepsilon \ll 1$$

and when  $\varepsilon \rightarrow \infty$  (24) coincides with the expansion

$$u = w^{(0)} + \varepsilon^{-1} w^{(1)} + \varepsilon^{-2} w^{(2)} + \dots, \quad \varepsilon \gg 1.$$

We also note that the symmetry of a system of PDE which approximates the non-linear wave equation was studied by Shulga [6]. Using symmetry properties, Mitropolsky and Shulga [3] obtained some asymptotic solutions of the non-linear wave equation.

*Note added.* Readers who are less well acquainted with work in this might refer to the related work of Winternitz et al [7] which is also concerned with this type of non-linear wave equation from a symmetry point of view.

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kyiv, Naukova Dumka, 1989.
2. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Preprint N 468, University of Minnesota, 1988.
3. Mitropolsky Yu.A., Shulga M.W., *Dokl. Akad. Nauk*, 1987, **295**, № 1, 30–33.
4. Olver P., Applications of Lie groups to differential equations, Berlin, Springer, 1986.
5. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978.
6. Shulga M.W., in Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics, Kyiv, Institute of Mathematics, 1987, 96–99.
7. Winternutz P., Grundland A.M., Tuszynski J.A., *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, 2194–2212.

# Дифференциальные инварианты алгебры Галилея

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

Bases of the second-order differential invariants of the Galilei algebra are constructed for  $n$ -dimensional real and complex scalar functions. New classes of the non-linear nonrelativistic equations are found.

Хорошо известно, что уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} 2\mu u_t + u_{aa} &= 0, \quad u_{aa} = \Delta u, \\ u &= u(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (1)$$

инвариантно относительно обобщенной алгебры Галилея  $AG_2^I(1, n)$  с базисными операторами [1]:

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \\ G_a &= t \partial_a + \mu x_a u \partial_u \quad \left( \partial_u = \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad u \partial_u, \quad D = 2t \partial_t + x_a \partial_a + \lambda u \partial_u, \\ A &= tD - t^2 \partial_t + \frac{1}{2} \mu \mathbf{x}^2 u \partial_u, \quad \lambda = -\frac{n}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до  $n$ ).

Уравнение Шредингера

$$2im\psi_t + \psi_{aa} = 0, \quad \psi_{aa} = \Delta\psi, \quad (3)$$

$\psi = \psi(t, \vec{x})$  — комплекснозначная функция, инвариантно относительно алгебры Галилея с базисными операторами [2]:

$$\begin{aligned} p_0 &= i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ J &= i(\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}), \quad G_a = t p_a - im x_a J, \\ D &= 2t p_0 - x_a p_a + \lambda I, \quad \text{где } I = i(\psi \partial_\psi + \psi^* \partial_{\psi^*}), \\ A &= t^2 p_0 - t x_a p_a + \frac{im \mathbf{x}^2}{2} J + \lambda t I, \quad \lambda = -\frac{n}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

звездочка означает комплексное сопряжение.

Алгебру (4) будем в дальнейшем обозначать символом  $A_2^{II}(1, n)$ .

В настоящей работе построены функциональные базисы дифференциальных инвариантов второго порядка алгебр  $AG_2^I(1, n)$  и  $AG_2^{II}(1, n)$ . Найденные инварианты дают возможность строить широкие классы многомерных нелинейных уравнений параболического типа.

Определение абсолютного дифференциального инварианта  $m$ -го порядка и функционального базиса инвариантов группы и алгебры Ли см. например, в [3, 4].

Обозначим символом  $AG^I(1, n)$  алгебру Галилея с базисными элементами

$$AG^I(1, n) = \langle \partial_t, \partial_a, u\partial_u, G_a, J_{ab} \rangle \quad (2);$$

$$AG^{II}(1, n) = \langle p_0, p_a, J, G_a, J_{ab} \rangle \quad (4).$$

Символами  $AG_1^I(1, n)$  и  $AG_1^{II}(1, n)$  обозначим расширенные алгебры Галилея:

$$AG_1^I(1, n) = AG^I(1, n) \ni D, \quad AG_1^{II}(1, n) = AG^{II}(1, n) \ni D.$$

Для упрощения записи инвариантов введем замену

$$u = \exp \varphi, \quad \psi = \exp \Phi, \quad \text{Im } \Phi = \arctg \frac{\text{Re } \psi}{\text{Im } \psi}. \quad (5)$$

Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_j(\varphi_{ab}) &= \varphi_{a_1 a_2} \cdots \varphi_{a_{j-1} a_j} \varphi_{a_j a_1} = S_j, \\ S_{jk}(\Phi_{ab}, \Phi_{ab}^*) &= \Phi_{a_1 a_2} \cdots \Phi_{a_{k-1} a_k} \Phi_{a_k a_{k+1}}^* \cdots \Phi_{a_{j-1} a_j} \Phi_{a_j a_1}^* = S_{jk}, \\ R_j(\theta_a, \varphi_{ab}) &= \theta_{a_1} \theta_{a_j} \varphi_{a_1 a_2} \cdots \varphi_{a_{j-1} a_j}, \quad \varphi_{ab} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_a \partial x_b}, \quad \varphi_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a}. \end{aligned} \quad (6)$$

Все индексы  $j$  принимают значения от 1 до  $n$ , индексы  $k$  — от 0 до  $j$ .

Инварианты строятся из ковариантных тензоров. Для алгебры  $AG^I(1, n)$  эти тензоры имеют вид

$$\theta_a = \mu \varphi_{at} + \varphi_b \varphi_{ab}, \quad \varphi_{ab}. \quad (7)$$

**Теорема 1.** Функциональный базис абсолютных дифференциальных инвариантов алгебры  $AG^I(1, n)$  при  $\mu \neq 0$  состоит из  $2n + 2$  инвариантов:

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\mu \varphi_t + \varphi_a \varphi_a, \quad M_2 = \mu^2 \varphi_{tt} + 2\mu \varphi_a \varphi_{at} + \varphi_a \varphi_b \varphi_{bb}, \\ S_j, \quad R_j &= R_j(\theta_a, \varphi_{ab}). \end{aligned} \quad (8)$$

Для алгебры  $AG_1^I(1, n)$  ( $\mu \neq 0$ ):

$$\frac{M_2}{M_1^2}, \quad \frac{R_j}{M_1^{3+j}}, \quad \frac{S_j}{M_1^{1+j}}.$$

Для алгебры  $AG_2^I(1, n)$  ( $\mu \neq 0$ ):

$$\frac{N_2}{N_1^2}, \quad \frac{\hat{R}_j}{N_1^{3+j}}, \quad \frac{\hat{S}_j}{N_1^{1+j}} \quad (j = 2, \dots, n),$$

где

$$N_1 = 2\mu \varphi_t + \varphi_a \varphi_a + \varphi_{aa},$$

$$N_2 = \mu^2 \varphi_{tt} + 2\mu \left( \frac{1}{n} \varphi_t \varphi_{aa} + \varphi_a \varphi_{at} \right) + \varphi_a \varphi_b \varphi_{ab} + \frac{1}{n} \varphi_a \varphi_a \varphi_{bb} + \frac{1}{2n} \varphi_{bb}^2,$$

$$\hat{R}_j = \sum_{l=0}^j R_l(\varphi_{aa})^{j-l} \frac{(-n)^l j!}{l!(j-l)!}, \quad \hat{S}_j = \sum_{l=0}^j \frac{(-n)^l (j-1)!(j+1)!}{(l+1)!(j-l)!} S_l(\varphi_{aa})^{j-l},$$

$S_j, R_j$  определяются соотношениями (6),  $\theta_a$  имеют вид (7).

Случай  $\mu = 0$  для алгебры  $AG_2^I(1, n)$  требует специального рассмотрения. Ковариантными будут тензоры  $\varphi_a$  и  $\varphi_{ab}$ ; тензор  $\theta_a$  в записи инвариантов определяется соотношением  $\varphi_{bt} = \theta_a \varphi_{ab}$ .

**Теорема 2.** *Функциональный базис дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры  $AG^I(1, n)$ ,  $\mu = 0$  имеет вид*

$$M_1 = \varphi_t - \varphi_a \theta_a, \quad M_2 = \varphi_{tt} - \varphi_{at} \theta_a, \quad S_j, \quad R_j = R_j(\varphi_a, \varphi_{ab}). \quad (9)$$

Базис инвариантов алгебры  $AG_1^I(1, n)$ ,  $\mu = 0$ :

$$R_j M_1^{-(j+1)}, \quad S_j M_1^{-(j+1)}, \quad M_1^2 M_2^{-1},$$

алгебры  $AG_2^I(1, n)$ ,  $\mu = 0$ :

$$R_j M^{-\frac{1}{2}(j+1)}, \quad S_j M^{-\frac{1}{2}(j+1)},$$

где  $R_j, S_j$  имеют вид (9),

$$M = (\varphi_t - \theta_a \varphi_a)^2 + (\varphi_{tt} - \varphi_{at} \theta_a)(\lambda + \varphi_a \varphi_b r_{ab}), \\ \{r_{ab}\} = \{\varphi_{ab}\}^{-1}, \quad \theta_a = r_{ab} \varphi_{bt}.$$

**Замечание.** Вместо  $M_1, M_2$  в (9) можно использовать инварианты

$$\hat{M}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}, \quad \hat{M}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{tt} & \varphi_{1t} & \cdots & \varphi_{nt} \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

найденные в [5] как решение задачи о нахождении уравнений второго порядка, инвариантных относительно алгебры Галилея при  $\mu = 0$ .

Перейдем к описанию базиса инвариантов алгебры  $AG_2^{II}(1, n)$ .

**Теорема 3.** *Любой абсолютный дифференциальный инвариант порядка  $f \leq 2$  алгебры  $AG^{II}(1, n)$ ,  $m \neq 0$  будет функцией следующих выражений:*

$$\Phi + \Phi^*, \quad M_1 = 2im\Phi_t + \Phi_a \Phi_a, \quad M_1^*, \\ M_2 = -m^2 \Phi_{tt} + 2im\Phi_a \Phi_{at} + \Phi_a \Phi_b \Phi_{ab}, \quad M_2^*, \quad S_{jk}, \quad R_j^1 = R_j(\theta_a, \Phi_{ab}), \\ R_j^a = R_j(\theta_a^*, \Phi_{ab}), \quad R_j^3 = R_j(\Phi_a + \Phi_a^*, \Phi_{ab});$$

ковариантные тензоры имеют вид

$$\theta_a = im\Phi_{at} + \Phi_a \Phi_{ab}, \quad \Phi_{ab}.$$

$AG_1^{II}(1, n)$ ,  $m \neq 0$ :

$$M_1^* M_1^{-1}, \quad M_2 M_1^{-2}, \quad M_2^* M_1^{-2}, \quad R_j^l M_1^{3-j} \quad (l = 1, 2), \\ R_j^3 M_1^{-(1+j)} S_{jk} M_1^{-1-j}, \quad \Phi + \Phi^* \text{ при } \lambda = 0, \quad M_1 l^{\frac{2}{\lambda}(\Phi + \Phi^*)} \text{ при } \lambda \neq 0.$$

$AG_2^{II}(1, n)$ ,  $m \neq 0$ ,  $\lambda = -\frac{n}{2}$ :

$$N_1 e^{-\frac{4}{n}(\Phi + \Phi^*)}, \quad \frac{N_1}{N_1^*}, \quad \frac{N_2}{N_1^{*2}}, \quad \frac{\hat{R}_j^l}{N_1^{3+j}} \quad (l = 1, 2), \quad \frac{\hat{R}_j^3}{N_1^{1+j}} \frac{\hat{S}_{jk}}{N_1^{1+j}},$$



где

$$N_1 = 2im\Phi_t + \Phi_{aa} + \Phi_a\Phi_a,$$

$$N_2 = -m^2\Phi_{tt} + 2im\left(\Phi_a\Phi_{at} + \frac{1}{n}\Phi_t\Phi_{aa}\right) + \Phi_a\Phi_b\Phi_{ab} + \frac{1}{n}\Phi_a\Phi_a\Phi_{bb} + \frac{1}{2n}\Phi_{aa}^2,$$

$$\hat{S}_{jk} = \sum_{l=0}^j \sum_{r=0, r \leq l}^k S_{lr}(-n)^l C_k^r C_k^{l+1-r}(\Phi_{aa})^{k-r}(\Phi_{aa}^*)^{j-l-k-r} + j(\Phi_{aa})^k(\Phi_{aa}^*)^{j-k-1},$$

$$\hat{R}_j^l = \sum_{k=0}^j R_k^l(\Phi_{aa})^{j-k} \frac{(-n)^k j!}{k!(j-k)!}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Инварианты алгебр  $AG_1^{II}(1, n)$ ,  $AG_2^{II}(1, n)$ ,  $m = 0$  строятся аналогично случаю действительной функции. Приведем функциональный базис инвариантов алгебры  $AG_2^{II}(1, n)$ ,  $m = 0$

1)  $\lambda = 0$ :

$$\Phi + \Phi^*, \quad \frac{N_1^2}{N_2}, \quad \frac{N_1^{*2}}{N_2}, \quad \frac{(S_{jk})^2}{N_1^{j+1}}, \quad \frac{(R_j^l)^2}{N_1^{j+1}} \quad (l = 1, 2, 4);$$

2)  $\lambda \neq 0$ :

$$N_1 e^{\frac{4}{\lambda}(\Phi + \Phi^*)}, \quad \frac{N_1^*}{N_1}, \quad N_3 e^{\frac{3}{\lambda}(\Phi + \Phi^*)}, \quad \frac{(R_j^l)^2}{N_1^{j+1}} \quad (l = 1, 2, 3), \quad \frac{(S_{jk})^2}{N_1^{j+1}},$$

где

$$N_1 = (\Phi_t - \theta_a\Phi_a)^2 + (\Phi_{tt} - \theta_a\Phi_{at})(\lambda + \Phi_a\Phi_b r_{ab})$$

$$(\{r_{ab}\} = \{\Phi_{ab}\}^{-1}, \quad \theta_a = r_{ab}\Phi_{bt}),$$

$$N_2 = (\Phi_t - \Phi_c\theta_c)\Phi_a^*\Phi_b^*r_{ab}^* - (\Phi_t^* - \Phi_c^*\theta_c^*)\Phi_a\Phi_b r_{ab},$$

$$N_3 = \Phi_t - \Phi_t^* - \tau_a(\Phi_a - \Phi_a^*)$$

$$(\tau_a = (\Phi_b\Phi_t + \lambda\Phi_{bt})\hat{r}_{ab}, \quad \{\hat{r}_{ab}\} = \{\lambda\Phi_{ab} + \Phi_a\Phi_b\}^{-1}),$$

$$R_j^1 = R_j(\Phi_a, \Phi_{ab}), \quad R_j^2 = R_j(\Phi_a^*, \Phi_{ab}), \quad R_j^3 = R_j(\theta_a - \theta_a^*, \Phi_{ab}),$$

$$R_j^4 = R_j(\rho_a, \Phi_{ab}) \quad (\rho_a = (\Phi_t - \theta_b\Phi_b)(\Phi_c^*r_{ac} - \Phi_c r_{ac}^*) - \Phi_b\Phi_d r_{bd}(\theta_a - \theta_a^*)).$$

Замена (5) в приведенных инвариантах позволяет получить базисы для алгебр  $AG_2^{II}(1, n)$  и  $AG_2^{II}(1, n)$  в представлениях (2) и (4). Эти результаты легко обобщить на случай нескольких скалярных функций.

Подробные доказательства полноты и независимости найденных базисов инвариантов будут приведены в последующих работах.

Примеры инвариантных уравнений:

1) относительно алгебры  $AG_2^I(1, n)$ ,  $\mu \neq 0$ :

$$\varphi_{tt} + \frac{1}{\mu^2} \left\{ 2\mu \left( \frac{1}{n}\varphi_t\varphi_{aa} + \varphi_a\varphi_{at} \right) + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} + \frac{1}{n}\varphi_a\varphi_a\varphi_{bb} + \frac{1}{2n}\varphi_{bb}^2 \right\} = (2\mu\varphi_t + \varphi_{aa} + \varphi_a\varphi_a)^2 F;$$

2) относительно алгебры  $AG_2^{II}(1, n)$ ,  $m \neq 0$ :

$$-m^2\Phi_{tt} + 2im\left(\Phi_a\Phi_{at} + \frac{1}{n}\Phi_t\Phi_{aa}\right) + \Phi_a\Phi_b\Phi_{ab} + \frac{1}{n}\Phi_a\Phi_a\Phi_{bb} + \frac{1}{2n}\Phi_{aa}^2 = (2im\Phi_t + \Phi_a\Phi_a + \Phi_{aa})F.$$

Здесь  $F$  — произвольные функции инвариантов соответствующих алгебр.

1. Goff J.A., Transformations leaving invariant the heat equation of physics, *Amer. J. Math.*, 1927, **49**, 117–122.
2. Фушич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элем. частиц и атом. ядра*, 1981, **12**, 1157–1219.
3. Tresse A., Sur les invariants différentiels des groupes continus des transformations, *Acta Math.*, 1894, **18**, 1–88.
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
5. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear PDE, *J. Phys. A*, 1985, **18**, 3491–3503.

# Диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре та конформної алгебри

*В.І. ФУЩИЧ, І.А. ЄГОРЧЕНКО*

The bases of the second-order differential invariants of the Poincaré and conformal algebras for a set of scalar functions in the  $n$ -dimensional Minkowsky space are constructed. New classes of the nonlinear conformal-invariant equations are found.

Наведені функціональні базиси абсолютних диференціальних інваріантів другого порядку для набору з  $m$  скалярних функцій  $u^r = u^r(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 3$ .

Алгебра Пуанкаре  $AP(1, n)$  задається базисними операторами

$$p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad (1)$$

де  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$ , під повторюваними індексами мається на увазі підсумовування ( $x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$ ),  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ .

Квазілінійні інваріанти другого порядку алгебри Пуанкаре та конформної алгебри описані в [1].

**Теорема 1.** *Функціональний базис диференціальних інваріантів другого порядку алгебри Пуанкаре (1) для скалярної функції  $u$  складається з  $2n + 3$  інваріантів*

$$u, \quad S_k(u_{\mu\nu}) = u_{\mu_0\mu_1} \cdots u_{\mu_k\mu_0}, \quad (2)$$

$$R_k(u_\mu, u_{\mu\nu}) = u_{\mu_0} u_{\mu_k} u_{\mu_0\mu_1} \cdots u_{\mu_{k-1}\mu_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тут  $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$ ,  $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ .

В тому, що вирази (2) є абсолютними інваріантами алгебри  $AP(1, n)$  можна переконатися, перевіривши, що має місце рівність [2]

$${}^2_X F(x_\mu, u, u_\mu, u_{\mu\nu}) = 0,$$

де  ${}^2_X$  — другі продовження базисних операторів цієї алгебри.

Доведення повноти та функціональної незалежності набору інваріантів (2) досить громіздке, тому тут його наводити не будемо.

**Теорема 2.** *Для набору з  $m$  скалярних функцій  $u^r$  базис інваріантів другого порядку алгебри  $AP(1, n)$  складається з  $m(2n + 3) + (m - 1)\frac{n(n-1)}{2}$  інваріантів*

$$u^r, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1) = u_{\mu_1}^r u_{\mu_k}^r u_{\mu_1\mu_2}^1 \cdots u_{\mu_{k-1}\mu_k}^1, \quad (3)$$

$$S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1) = u_{\mu_1\mu_2}^1 \cdots u_{\mu_{j-1}\mu_j}^1 u_{\mu_j\mu_{j+1}}^r \cdots u_{\mu_k\mu_1}^r,$$

$j = 0, \dots, k$ ,  $k = 1, \dots, n + 1$ ,  $r = 1, \dots, m$ , по  $r$  підсумовування немає.

Для розширеної алгебри Пуанкаре  $A\tilde{P}(1, n) = \{p_\mu, J_{\mu\nu}, D\}$ ,

$$D = x_\mu p_\mu + \lambda u^r p_{ur}, \quad (4)$$

( $p_{ur} = i\partial/\partial u^r$ , по  $r$  підсумовування від 1 до  $m$ ) відповідний базис має вигляд коли  $\lambda \neq 0$

$$\frac{u^r}{u^1}, \quad S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1)(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)}, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1)(u^1)^{\frac{2k}{\lambda}-k-1};$$

коли  $\lambda = 0$

$$u^r, \quad S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1)(u_{\alpha\alpha}^1)^{-k}, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1)(u_{\alpha\alpha}^1)^{-k},$$

де  $S_{jk}$ ,  $R_k$  визначаються співвідношеннями (3),  $j = 0, 1, \dots, k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ ,  $r = 1, \dots, m$ , по  $r$  підсумовування немає.

Наведемо аналогічні результати для конформної алгебри

$$AC(1, n) = \{p_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x_\nu p_\mu$$

( $D$  — оператор дилатації (4)).

Базис інваріантів другого порядку алгебри  $AC(1, n)$ , коли  $\lambda \neq 0$

$$S_{jk}(\theta_{\mu\nu}^r, \theta_{\mu\nu}^1)(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)}, \quad \frac{u^r}{u^1}, \quad R_k(\theta_\mu^r, \theta_{\mu\nu}^1)(u^1)^{k(\frac{2}{\lambda}-1)-1},$$

$j = 0, \dots, k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ ,  $r = 2, \dots, m$ , по  $r$  підсумовування немає.

Конформно-коваріантні тензори мають вигляд

$$\theta_\mu^r = \frac{u_\mu^r}{u^r} - \frac{u_\mu^1}{u^1}, \quad \theta_{\mu\nu}^r = \lambda u_{\mu\nu}^r + (1 - \lambda) \frac{u_\mu^r u_\nu^r}{u^r} + \frac{\lambda g_{\mu\nu}}{1 - n} \left( u_{\beta\beta}^r - \frac{u_\beta^r u_\beta^r}{u^r} \right),$$

$S_{jk}$ ,  $R_k$  будуються аналогічно (3).

$AC(1, n)$ ,  $\lambda = 0$ :

$$u^r, \quad (u_\alpha^1 u_\alpha^1)^{-2k} S_{jk}(w_{\mu\nu}^1, w_{\mu\nu}^r), \quad R_k(u_\mu^r, w_{\mu\nu}^1)(u_\alpha^1 u_\alpha^1)^{-2k+1},$$

$$r = 2, \dots, m, \quad j = 0, \dots, k, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Конформно-коваріантні тензори  $w_{\mu\nu}^r$  мають вигляд

$$w_{\mu\nu}^r = u_\alpha u_\alpha^r \left( u_{\mu\nu}^r + \frac{g_{\mu\nu}}{1 - n} u_{\beta\beta}^r \right) - u_\beta^r (u_\mu^r u_{\beta\nu}^r + u_\nu^r u_{\beta\mu}^r) \quad (5)$$

(по  $r$  підсумовування немає).

Одержані результати дозволяють побудувати нові нелінійні багатовимірні конформно-інваріантні рівняння. Наприклад, рівняння

$$u_\alpha u_\alpha \frac{1}{n-1} \square u - u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} = (u_\nu u_\nu)^2 F(u),$$

ліва частина якого є згорткою тензора  $w_{\mu\nu}$  (5),  $F$  — довільна функція, інваріантне відносно алгебри  $AC(1, n)$ ,  $\lambda = 0$ .

1. Фущич В.И., Єгорченко И.А., О симметричных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений, Докл. АН СССР, 1988, **298**, № 2, 347–351.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

# The symmetry and exact solutions of the non-linear d'Alembert equation for complex fields

W.I. FUSHCHYCH, I.A. YEHORCHENKO

The non-linear wave equations for the complex scalar field invariant under a conformal group are constructed and multiparametrical exact solutions of certain non-linear complex d'Alembert equations are found.

## 1. The non-linear wave equation

The non-linear wave equation

$$p_\mu p_\mu u + F(u) = 0$$

for the real function  $u = u(x_0 \equiv t, x_1, \dots, x_n)$  is invariant under the extended Poincaré algebra  $A_1 P(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D \rangle$

$$P_\mu = p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad (1)$$

where  $D$  is the dilation operator ( $D = x_\mu p_\mu + \alpha u p_u$ ) iff  $F(u) = \lambda u^k$  [4].

The classical and quantum scalar field, as is well known (see [1]), is described by the wave equation for the complex function  $u$ . Therefore it is interesting to construct the classes of non-linear wave equations invariant under wider groups than the Poincaré group. In the case of real fields, as was shown by Fushchych and Serov [4], there exist only two classes of such non-linear fields. In the complex case there are wide classes of fields invariant under groups which include the Poincaré group  $P(1, n)$  as the subgroup.

In the present paper for the classical complex field  $u$  we construct the non-linear second-order wave equations

$$p_\mu p_\mu u + F(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) = 0, \quad u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad u_\alpha^* \equiv \frac{\partial u^*}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha, \mu = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

(the asterisk designates the complex conjugation and we indicate the sum by repeating indices:  $p_\mu p_\mu = p_0^2 - p_1^2 - \dots - p_n^2$ ) invariant under the following Lie algebras (containing as subalgebra the Poincaré algebra  $AP(1, n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu} \rangle$  with the basic elements (1)):

$$A_1^{(1)} \equiv A_1^{(1)} P(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1 \rangle.$$

The dilation operator  $D_1$  has the form

$$D_1 = x_\mu p_\mu - \lambda (u p_u + u^* p_{u^*}), \quad p_u = -i \frac{\partial}{\partial u}, \quad p_{u^*} = -i \frac{\partial}{\partial u^*}.$$

$$A_1^{(2)} \equiv A_1^{(2)} P(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_2 \rangle.$$

The dilation operator  $D_2$  has the form

$$D_2 = x_\mu p_\mu - \lambda(p_u + p_{u^*}).$$

$$A_2 \equiv A_2 P(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1, Q \rangle.$$

The operator of charge has the form

$$Q = u^* p_u - u p_{u^*}.$$

$$A_3^{(1)} \equiv A^{(1)} C(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1, K_\mu^{(1)} \rangle.$$

The operators  $K_\mu^{(1)}$  generating the conformal transformations have the form

$$K_\mu^{(1)} = 2x_\mu D_1 - x_\nu x_\nu p_\mu.$$

$$A_3^{(2)} \equiv A^{(2)} C(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_1, K_\mu^{(1)}, Q \rangle.$$

$$A_3^{(3)} \equiv A^{(3)} C(1, n) \equiv \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D_2, K_\mu^{(2)} \rangle.$$

$$K_\mu^{(2)} = 2x_\mu D_2 - x_\nu x_\nu p_\mu.$$

To describe the invariant equations of the form (2) we need the differential invariants of the zero and first order for the algebras  $A_1^{(1)}, \dots, A_3^{(3)}$ . As is well known (see, e.g. [7]) these invariants are solutions of the system

$$\overset{1}{X}_i \Phi(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*) = 0, \quad (3)$$

where  $\overset{1}{X}_i$  are the first prolongations of the basis operators of the corresponding algebras.

Not going into details we adduce the explicit form of the invariants for the algebras

$$AP(1, n): \quad u, u^*, r_1 = u_\alpha u_\alpha, r_2 = u_\alpha u_\alpha^*, r_3 = u_\alpha^* u_\alpha^*,$$

$$A_1^{(1)}: \quad \frac{u}{u^*}, \frac{r_1}{r_2}, \frac{r_3}{r_2}, \frac{r_1^2}{u^{2(\lambda-1)}},$$

$$A_1^{(2)}: \quad u - u^*, \frac{r_1}{r_2}, \frac{r_3}{r_2}, r_1^{\lambda/2} \exp u,$$

$$AP(1, n) \oplus Q: \quad u^2 + u^{*2}, r_1 + r_3, r_2^2 - r_1 r_3, R = u^{*2} r_1 - 2u u^* r_2 + u^2 r_3,$$

$$A_2: \quad \frac{(r_1 + r_3)^2}{(u^2 + u^{*2})^{\lambda-1}}, \frac{r_2^2 - r_1 r_3}{(r_1 + r_3)^2}, \frac{R}{(u^2 + u^{*2})(r_1 + r_3)}, \quad (4)$$

$$A_3^{(1)} (\lambda \neq 0): \quad \frac{u}{u^*}, \frac{R}{u^{4-2/\lambda}},$$

$$A_3^{(1)} (\lambda = 0): \quad u, u^*, \frac{r_1}{r_2}, \frac{r_3}{r_2},$$

$$A_3^{(2)} (\lambda \neq 0): \quad R(u^2 + u^{*2})^{1/\lambda-2},$$

$$A_3^{(2)} (\lambda = 0): \quad u^2 + u^{*2}, \frac{r_2^2 - r_1 r_3}{(r_1 + r_3)^2}, \frac{R}{r_1 + r_3},$$

$$A_3^{(3)} (\lambda \neq 0): \quad u - u^*, (r_1 - 2r_2 + r_3)^{\lambda/2} \exp u.$$

These systems of invariants are complete when  $n \geq 3$ .

The classification of the non-linear equations for the complex scalar field invariant under the enumerated algebras gives the following theorem.

**Theorem.** Equation (2) is invariant under the algebras

$$\begin{aligned}
 AP(1, n) & \quad \text{when } F = \varphi(\omega), \\
 A_1^{(1)} & \quad \text{when } F = u^{1-2/\lambda}\varphi(\omega), \\
 A_1^{(2)} & \quad \text{when } F = \exp(u)\varphi(\omega), \\
 A_2 & \quad \text{when } F = (u^2 + u^{*2})^{-1/\lambda}(uf(\omega) + iu^*g(\omega)), \\
 A_3^{(1)}, \lambda \neq 0 & \quad \text{when } F = \frac{2\lambda + n - 1}{2\lambda u}r_1 + u^{1-2/\lambda}\varphi(\omega),
 \end{aligned}$$

when  $\lambda = 0$  there are no invariant equations of the form (2);

$$A_3^{(2)}, \lambda = \frac{1-n}{2} \quad \text{when } F = (u^2 + u^{*2})^{2/(n-1)}(uf(\omega) + iu^*g(\omega))$$

(when  $\lambda \neq (1-n)/2$  there are no invariant equations of the form (2));

$$A_3^{(3)}, \lambda \neq 0 \quad \text{when } F = \frac{n-1}{2\lambda}r_1 + \exp\left(-\frac{2}{\lambda}u\right)\varphi(\omega)$$

(here we designate as  $f$  and  $g$  arbitrary real and as  $\varphi$  arbitrary complex functions,  $\omega$  are invariants of the corresponding algebras).

To prove the theorem it is necessary to use the Lie invariance condition in the form

$$\left. \frac{2}{X_i}L \right|_{\substack{L=0 \\ L^*=0}} = 0$$

where  $L = \square u - F(u, u^*, u_\alpha, u_\alpha^*)$  ( $\square u = p_\mu p_\mu u$ ),  $\frac{2}{X_i}$  are the second prolongations of the basis elements of the algebras being considered, which we resolve with respect to the unknown function for every algebra.

A similar theorem can be formulated and proved for the system of two wave equations for the pair of real functions.

The classification of the general quasilinear Poincaré-invariant equation for the complex scalar function is adduced by Fushchych and Yehorchenko [5].

## 2. The solutions of wave equations for the complex function

Let us consider the equation

$$\square u = F(u, u^*) \tag{5}$$

which is invariant under the Poincaré algebra (1). Its solutions can be found with the help of the reduction with respect to subalgebras of  $AP(1, n)$  as was done in the real case by Fushchych and Serov [4] or Winternitz et al [8] but such reduction leads mostly to systems of ordinary differential equations not solvable in quadratures; one of the ways to avoid this difficulty was suggested by Grundland and Tuszynski [6]. To find the exact solutions of (5) it is advisable to search especially for ansatze leading to systems of differential equations solvable in quadratures.

Using the ansatz (see, e.g., [3, 4])

$$u = \varphi(\omega), \quad u^* = \varphi^*(\omega), \quad \omega = \omega(x) \quad (6)$$

we come to the system

$$\begin{aligned} \omega_\mu \omega_\mu \ddot{\varphi} + \square \omega \dot{\varphi} &= F(\varphi, \varphi^*), \\ \omega_\mu \omega_\mu \ddot{\varphi}^* + \square \omega \dot{\varphi}^* &= F^*(\varphi, \varphi^*), \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

The condition of separation of variables in the system (7) is that the new variable  $\omega$  must satisfy the conditions

$$\square \omega = \chi(\omega), \quad \omega_\mu \omega_\mu = T(\omega), \quad (8)$$

where  $\chi, T$  are arbitrary functions (not equal simultaneously to zero).

Thus to find exact solutions of (5) in the form (6) it is sufficient to solve the system (8) and

$$\begin{aligned} T(\omega) \ddot{\varphi} + \chi(\omega) \dot{\varphi} &= F(\varphi, \varphi^*), \\ T(\omega) \ddot{\varphi}^* + \chi(\omega) \dot{\varphi}^* &= F^*(\varphi, \varphi^*). \end{aligned} \quad (9)$$

To solve the system (8) we use the results of Collins [2], where similar systems for the functions of three independent variables were investigated. The partial solutions of the system (8) when  $\mu = 0, 1, \dots, n$ ,  $T(\omega) = 1$ ,  $\chi(\omega) = N(\omega - A)^{-1}$ ,  $N = 0, 1, \dots, n$ ,  $A = \text{const}$ , are given in Table 1. Evidently when  $n > 2$  they are not general solutions.

Table 1

N	Solutions	Conditions on parameters
0	$\omega + \alpha y + F(\beta y)$ ( $\alpha y = \alpha_0 y_0 - \alpha_1 y_1 - \dots - \alpha_n y_n$ )	$F$ is an arbitrary function of $\beta y$ , $y_\nu = x_\nu + a_\nu$ , $a_\nu = \text{const}$ , $\alpha^2 = 1$ , $\beta^2 = \alpha\beta = 0$
$1, \dots, n$	$\omega - A = [(\alpha^i y)(\alpha^i y)]^{1/2}$	$\alpha_\mu^i \alpha_\mu^j = \delta^{ij}$ , $i, j = 1, \dots, N + 1$ , $y_\nu = x_\nu + a_\nu$ , $a_\nu = \text{const}$

Below we consider systems of the form (5)

$$\begin{aligned} \square u &= \lambda u (u u^*)^k, \\ \square u^* &= \lambda^* u^* (u u^*)^k, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \square u &= (\lambda_1 u + i \lambda_2 u^*) (u^2 + u^{*2})^k, \\ \square u &= (\lambda_1 u^* - i \lambda_2 u) (u^2 + u^{*2})^k \end{aligned} \quad (11)$$

( $\lambda_1, \lambda_2, k$  are arbitrary real numbers and  $\lambda$  is an arbitrary complex number), which are invariant corresponding with respect to the operators  $Q_1 = u \partial_u - u^* \partial_{u^*}$  and  $Q_2 = u^* \partial_u - u \partial_{u^*}$  (the operator of charge).

The system (9) with  $T(\omega) = 1$ ,  $\chi(\omega) = N/(\omega - A)$  and  $\omega$  from Table 1, for (10) takes the form

$$\begin{aligned} \frac{N}{\omega - A} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} &= \lambda \varphi (\varphi \varphi^*)^k, \\ \frac{N}{\omega - A} \dot{\varphi}^* + \ddot{\varphi}^* &= \lambda^* \varphi^* (\varphi \varphi^*)^k, \end{aligned} \quad (12)$$



where  $N = 0, 1, \dots, n$ ; for (11) the system (9) takes the form

$$\begin{aligned} \frac{N}{\omega - A} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} &= (\lambda_1 \varphi + i\lambda_2 \varphi^*)(\varphi^2 + \varphi^{*2})^k, \\ \frac{N}{\omega - A} \dot{\varphi}^* + \ddot{\varphi}^* &= (\lambda_1 \varphi^* - i\lambda_2 \varphi)(\varphi^2 + \varphi^{*2})^k. \end{aligned} \tag{13}$$

It is convenient to search for solutions of (12) in the form

$$\varphi = r e^{i\theta}, \quad \varphi^* = r e^{-i\theta} \tag{14}$$

for solutions of (13) in the form

$$\varphi = r \left( \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^\theta + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^{-\theta} \right), \quad \varphi^* = r \left( \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e^\theta + \frac{1+i}{2\sqrt{2}} e^{-\theta} \right). \tag{15}$$

For the real functions  $r = r(\omega)$  and  $\theta = \theta(\omega)$  we obtain the system

$$\begin{aligned} \frac{N}{\omega - A} \dot{r} + \ddot{r} + \varkappa \dot{\theta}^2 r &= \lambda_1 r^{2k+1}, \\ \frac{N}{\omega - A} \dot{\theta} r + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= \lambda_2 r^{2k+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Here  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ,  $\varkappa = -1$  for (12) and  $\varkappa = 1$  for (13).

Let  $N = 0$ . With an arbitrary  $k$  and  $\lambda_2 = 0$  the system (16) has the general solution in the parametrical form ( $\lambda = \lambda_1$ ):

$$\begin{aligned} \omega &= \int \left( \frac{\lambda}{k+1} r^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{r^2} + c_2 \right)^{-1/2} dr + c_3, \\ \theta &= c_1 \int r^{-2} \left( \frac{\lambda}{k+1} r^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{r^2} + c_2 \right)^{-1/2} dr + c_4, \end{aligned} \tag{17}$$

When  $k = -2$  we obtain the general solution of (16) in explicit form in elementary functions

$$\begin{aligned} r &= \left( c_2(\omega + c_3)^2 + \frac{\lambda - \varkappa c_1^2}{c_2} \right)^{1/2}, \\ \theta &= \begin{cases} \frac{c_1}{(\lambda - \varkappa c_1^2)^{1/2}} \tan^{-1} \frac{c_2(\omega + c_3)}{(\lambda - \varkappa c_1^2)^{1/2}} + c_4, & \lambda - \varkappa c_1^2 > 0, \\ \frac{c_1}{2(\varkappa c_1^2 - \lambda)^{1/2}} \ln \left| \frac{\omega + c_3 + c_2^{-1}(\varkappa c_1^2 - \lambda)^{1/2}}{\omega + c_3 - c_2^{-1}(\varkappa c_1^2 - \lambda)^{1/2}} \right|, & \lambda - \varkappa c_1^2 < 0, \\ -\frac{c_1}{(c_2(\omega + c_3))}, & \lambda = \varkappa c_1^2, \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

$c_1 \neq 0$ ,  $c_2, c_3, c_4$  are arbitrary real numbers. (If  $c_1 = 0$ ,  $\theta = \text{const.}$ )

**Note 1.** The solvability of systems of ordinary differential equations in quadratures is connected with their wide symmetry. Systems of the form (12) can be reduced to systems of four first-order equations and we may suppose that for their solvability in quadratures it is necessary for the range of basis of their invariance algebra to be

not less than 4 [7]. However, this condition is not sufficient. The system (12) when  $k = -2$ ,  $N = 0$  has the maximal invariance algebra among systems of such form with the basis operators

$$\partial_\omega, \quad \omega\partial_\omega + \frac{1}{2}(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}), \quad \omega^2\partial_\omega + \omega(\varphi\partial_\varphi + \varphi^*\partial_{\varphi^*}), \quad \varphi\partial_\varphi - \varphi^*\partial_{\varphi^*}$$

but when  $\lambda_2 \neq 0$  it reduces to a Riccati equation not solvable in quadratures.

The system (16) when  $N \neq 1$ ,  $N \neq 2$ ,  $k = (N - 2)(N - 1)^{-1}$  by the substitution  $t = (\omega - A)^{N-1}$ ,  $r = (\omega - A)^{1-N}\rho$  can be reduced to the form

$$\ddot{\rho} + \varkappa\dot{\theta}^2\rho = \lambda_1\rho^{2k+1}, \quad 2\rho\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \lambda_2\rho^{2k+1}.$$

We obtain its solutions in parametrical form ( $\lambda_2 = 0$ ) and from them we obtain the solutions of (16)

$$\begin{aligned} r &= \rho \left[ c_3 + (N - 1) \int \left( \frac{\lambda}{k + 1} \rho^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{\rho^2} + c_2 \right)^{-1/2} d\rho \right], \\ \theta &= c_1(N - 1)^2 \int \rho^{-2} \left( \frac{\lambda}{k + 1} \rho^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{\rho^2} + c_2 \right)^{-1/2} d\rho + c_4, \\ \omega &= \left[ c_3 + (N - 1) \int \left( \frac{\lambda}{k + 1} \rho^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{\rho^2} + c_2 \right)^{-1/2} d\rho \right]^{1/(N-1)} + A, \end{aligned} \quad (19)$$

$c_1 \neq 0$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  are arbitrary constants chosen for  $r$ ,  $\theta$  to be real.

From solutions (17)–(19) and substitutions (14) and (15) we obtain the solutions of (12) and (13) respectively. With  $\omega$  from Table 1 we get solutions of the initial systems (10) and (11).

As (10) and (11) are invariant with respect to the scale transformations it is possible to find ansatze reducing them to the first-order differential equations which have more chances to be solved in quadratures. We search for such ansatze in the form

$$u = f(x)\Phi(\omega), \quad u^* = f(x)\Phi^*(\omega). \quad (20)$$

The corresponding conditions on  $f$  and  $\omega$  are as follows:

$$\begin{aligned} \square f(x) &= F(\omega)f^{2k+1}(x), \\ f\square\omega + 2f_\mu\omega_\mu &= G(\omega)f^{2k+1}(x), \\ \omega_\mu\omega_\mu &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

where  $F$ ,  $G$  are arbitrary functions.

It is interesting enough to investigate the system (21) itself but here we do not go into this matter and adduce only some solutions:

$$\begin{aligned} f(x) &= [(\beta^i x)(\beta^i x)]^a, \quad \omega = \frac{\alpha x}{[(\beta^i x)(\beta^i x)]^b}, \\ a &= -\frac{1}{2k}, \quad \alpha^2 = \alpha\beta^i = 0, \quad \beta_\mu^i\beta_\mu^i = \delta^{ij}, \quad b = 0, 1, \end{aligned} \quad (22)$$

the sum by  $i$  is implied,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \leq n$ ,  $1 - 2a \neq m$ , when  $b = 1$ .

For the ansatz (20) with  $f, \omega$  from (22) we obtain the reduced equations and their solutions.

For equations (10)

(i)  $b = 0, m + 2a - 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi' \omega + \Phi \frac{m + 2a - 1}{2} &= \frac{\lambda}{4a} \Phi (\Phi \Phi^*)^k, \\ \Phi &= c \left( \omega^{k(m+2a-1)} - c_1 \right)^{-1/2k} \times \\ &\times \exp \frac{i\lambda_2}{\lambda_1} \left( (\ln \omega) \frac{m + 2a - 1}{2} - \frac{1}{2k} \ln \left( \omega^{k(m+2a-1)} - c_1 \right) \right), \\ cc^* &= \left( \frac{1}{\lambda_1} 2a(m + 2a - 1) \right)^{1/k}; \end{aligned} \tag{23}$$

(ii)  $b = 0, m + 2a - 1 = 0$

$$\Phi = c(\lambda_1 k^2 \ln \omega + c_1)^{-(\lambda_1 + i\lambda_2)/2k\lambda_1}, \quad cc^* = 1; \tag{24}$$

(iii)  $b = 1$

$$\begin{aligned} \Phi' \omega - a\Phi &= \frac{\lambda}{2(m + 2a - 1)} \Phi (\Phi \Phi^*)^k, \\ \Phi &= c\omega^{-i\lambda_2/2k\lambda_1} |1 - c_1\omega|^{-\lambda_2/2k\lambda_1}, \quad cc^* = \left( -\frac{2a(m + 2a - 1)}{\lambda_1} \right)^{1/k}. \end{aligned} \tag{25}$$

In a similar way solutions of (11) can be obtained; if  $\Phi$  has the form (15) then

(i)  $b = 0, m + 2a - 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} r &= \left( 1 - c_1\omega^{k(m+2a-1)} \right)^{-1/2k} [(m + 2a - 1)4a]^{1/2k} (\lambda_1 + \lambda)^{-1/2k}, \\ \theta &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \frac{m + 2a - 1}{2} \ln \omega - \frac{1}{2k} \ln \left| 1 - c_1\omega^{k(m+2a-1)} \right| \right); \end{aligned} \tag{26}$$

(ii)  $b = 0, m + 2a - 1 = 0$

$$\begin{aligned} r &= (2k^2(\lambda_1 + \lambda_2) \ln \omega + c_1)^{-1/2k}, \\ \theta &= -\frac{1}{2k} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \ln |k^2(\lambda_1 + \lambda_2) \ln \omega + c_1|; \end{aligned} \tag{27}$$

(iii)  $b = 1, m + 2a - 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} r &= \left( -\frac{a(m + 2a - 1)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{1/2k} (1 - c_1\omega)^{-1/2k}, \\ \theta &= -\frac{1}{2k} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (\ln \omega + \ln |1 - c_1\omega|). \end{aligned} \tag{28}$$

Substituting the obtained solutions (23)–(28) of the reduced equations into the ansatz (20) and (22) we get the multiparametrical families of exact solutions of (10) and (11) correspondingly.

The ansatz (20) and (22) when  $b \neq 0$ ,  $b \neq 1$  allows us to obtain the reduced equations of the second order

$$\begin{aligned} \Phi''\omega^2 4b(b-1) + \Phi'\omega[4b^2 - 2b(m+1) + 4a(1-2b)] + \\ + 2a\Phi(2a+m-1) = \lambda\Phi F(\Phi, \Phi^*), \end{aligned} \quad (29)$$

$$F = (\Phi\Phi^*)^k \text{ for (10), } F = (\Phi^2 + \Phi^{*2})^k \text{ for (11).}$$

We can adduce the parametrical solutions of (29) when

$$\begin{aligned} b = \frac{2a}{m+4a-1}, \quad \lambda = \lambda^* \quad (\lambda_2 = 0, \lambda = \lambda_1), \\ \omega = \int \left( \frac{\lambda}{k+1} r^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{r^2} + c_2 + Br^2 \right)^{-1/2} dr + c_3, \\ \theta = c_1 \int r^{-2} \left( \frac{\lambda}{k+1} r^{2k+2} + \frac{\varkappa c_1^2}{r^2} + c_2 + Br^2 \right)^{-1/2} dr + c_4, \\ B = \frac{1}{4}(r+4a-1)^2, \end{aligned} \quad (30)$$

$\varkappa = -1$  and the representation (14) for  $\Phi$  is taken for (10), and  $\varkappa = 1$  and the representation (15) for  $\Phi$  is taken for (11).

### 3. The conformally invariant families of solutions

Let us consider the conformally invariant system of the form (2) ( $n = 2$ )

$$\square u = u^3 F\left(\frac{u}{u^*}, \frac{R}{(uu^*)^3}\right), \quad \square u^* = u^{*3} F^*\left(\frac{u}{u^*}, \frac{R}{(uu^*)^3}\right), \quad (31)$$

where  $R$  is defined in (4).

We obtain here the conformally invariant families of solutions of (31) with certain  $F$  using the formulae of conformal reproduction of solutions.

We used the ansätze (20), where

$$\omega = \alpha x, \quad f = (x^2)^{-1/2}, \quad (32a)$$

$$\omega = \alpha x/x^2, \quad f = (x^2)^{-1/2}, \quad (32b)$$

$$\omega = \alpha x, \quad f = [x^2 - 2\varepsilon x \delta x + \delta^2(\varepsilon x)^2]^{-1/2}, \quad (33a)$$

$$\omega = \alpha x, \quad f = [2\alpha x \beta x - \beta^2(\alpha x)^2 + c(\alpha x)]^{-1/2}, \quad (33b)$$

where  $\alpha^2 = \varepsilon^2 = \alpha\varepsilon = \alpha\delta = 0$ ,  $\alpha\beta = \varepsilon\delta = 1$ .

When  $u, u^*$  are defined from the ansätze (20), (32) and (33),  $R \equiv 0$ . Then the reduced equations have the form

$$\varkappa\Phi - 2\dot{\Phi}\omega = \Phi^3 F\left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right), \quad \varkappa\Phi^* - 2\dot{\Phi}^*\omega = \Phi^{*3} F^*\left(\frac{\Phi}{\Phi^*}\right), \quad (34)$$

where  $\varkappa = -1$  for (32),  $\varkappa = 1$  for (33).

The solution of (34) in parametrical form can be obtained for arbitrary  $F$ .

The multiparametrical conformally invariant families of solutions we adduce for the equations are

$$\begin{aligned} \square u &= (u^2 + u^{*2})(g_1 u + i g_2 u^*), \\ \square u^* &= (u^2 + u^{*2})(g_1 u^* - i g_2 u), \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \square u &= (g_1 + i g_2)u(uu^*), \\ \square u^* &= (g_1 - i g_2)u^*(uu^*), \end{aligned} \tag{36}$$

where  $g_1, g_2$  are real functions of  $R(u^2 + u^{*2})^{-3}$ .

Their families of solutions are non-reproducible by conformal transformations and given by the following formulae. The solutions of (35) are

$$\begin{aligned} u &= f(x)\omega^{\varkappa/2} \left( c_2 \frac{1+i}{4} |c_1 + \varkappa\omega^{\varkappa} A_1|^{-(A_1+A_2)/2A_1} + \right. \\ &\quad \left. + c_2^{-1} \frac{1-i}{4} |c_1 + \varkappa\omega^{\varkappa} A_1|^{-(A_1-A_2)/2A_1} \right), \end{aligned}$$

$$A^j = g^j(o), \quad A_2 \neq 0, \quad c^j \in R, \quad c_1 = 0 \quad (j = 1, 2)$$

and the solutions of (36) are

$$u = f(x)\omega^{\varkappa/2} |A_1 \varkappa\omega^{\varkappa} + c_1|^{-1/2} \exp \left[ i \left( c_2 - \frac{A_2}{2A_1} \ln |c_1 + A_1 \varkappa\omega^{\varkappa}| \right) \right],$$

$f(x)$  and  $\omega$  being substituted from Table 2 and  $\varkappa$  being defined from the corresponding ansätze (32) or (33).

Table 2

Ansatz	$\varkappa$	$\omega$	$\{f(x)\}^{-2}$
(32b)	-1	$\frac{\alpha x + \alpha \tau x^2 + ab\sigma(\tau, x)}{x^2 + 2bx + 2b\tau x^2 + b^2\sigma(\tau, x)}$	$\sigma(\tau, x)[x^2 + 2bx + 2b\tau x^2 + b^2\sigma(\tau, x)]$
(32a)	-1		
(33b)	1	$(\sigma(\tau, x))^{-1}[\alpha x + \alpha \tau x^2 + \alpha b\sigma(\tau, x)]$	$\frac{\omega\sigma(\tau, x)[2(\beta x + \beta \tau x^2) - \beta^2(\alpha x + \alpha \tau x^2) + (c + 2b\beta - \beta^2 \alpha b)\sigma(\tau, x)]}{-(\varepsilon x + \varepsilon \tau x^2)(\delta x + \delta \tau x^2) + \delta^2(\alpha x + \varepsilon \tau x^2)^2 + \sigma(\tau, x)[x^2 + 2bx + 2b\tau x^2 - 2b\delta(\varepsilon x + \varepsilon \tau x^2) - 2b\varepsilon(\delta x + \delta \tau x^2) + \delta^2 2\varepsilon b(\varepsilon x + 2\varepsilon \tau x^2) + \sigma(\tau, x)(b^2 - 2b\varepsilon b\delta + \delta^2(\varepsilon b)^2]}$
(33a)	1		

$\sigma(\tau, x) = 1 + 2\tau x + \tau^2 x^2$ ,  $b_\mu, \tau_\mu$  are arbitrary parameters.

1. Bogolubov N.N., Shirkov D.V., Introduction into the theory of quantized fields, Moscow, Nauka, 1973.
2. Collins C.B., *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1976, **80**, 165–187.
3. Fushchych W.I., in Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Kyiv, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.

5. Fushchych W.I., Yehorchenko I.A., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1988, **298**, 347–351.
6. Grundland A.M., Tuszynski J.A., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, 6243–6258.
7. Ovsyannikov L.V., *Group analysis of differential equations*, Moscow, Nauka, 1978.
8. Winternitz P., Grundland A.M., Tuszynski J.A., *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, 2194–2212.

# On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

Some new exact solutions of the d'Alembert–Hamilton system of partial differential equations are obtained. The necessary conditions of integrability of an over-determined d'Alembert–Hamilton system are established.

Since Euler (1734–1740) the method of reduction of partial differential equations (PDEs) to ordinary differential equations (ODEs) is one of the most effective ways to construct partial solutions of PDEs.

In refs. [1–4] the symmetry reduction of the d'Alembert equation,

$$\square u = F_1(u), \quad \square = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2 \quad (1)$$

(where  $F_1(u)$  is an arbitrary smooth function), to an ODE has been carried out. So the four-dimensional PDE (1) with the ansatz

$$u(x) = \varphi(\omega), \quad (2)$$

where  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ , and  $\omega = \omega(x) \in C^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^1)$  being the new variable, is reduced to an ODE having variable coefficients,

$$(\omega_\mu \omega_\mu) \ddot{\varphi} + (\square \omega) \dot{\varphi} = F_1(\varphi), \quad (3)$$

where  $\omega_\mu \equiv \partial \omega / \partial x_\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, 3$ ,  $\dot{\varphi} \equiv d\varphi/d\omega$ . Hereafter the summation over repeated indices in Minkowski space  $\mathbb{R}(1, 3)$  having the metric  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  is supposed, i.e.

$$\omega_\mu \omega_\mu = g_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu = \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2.$$

In refs. [3, 4] using the symmetry properties of eq. (1) and the subgroup structure of the Poincaré group  $P(1, 3)$  new variables have been constructed for eq. (3) depending on  $\omega$  only.

In the present paper we suggest a more general approach to the problem of reduction of the PDE (1) to an ODE than the approach based on the employment of its symmetry properties [1–4].

We say that the ansatz (2) reduces the PDE (1) to an ODE if the new variable  $\omega(x)$  satisfies both the d'Alembert and the Hamilton equation,

$$\square \omega = F_2(\omega), \quad (4)$$

$$\omega_\mu \omega_\mu = F_3(\omega), \quad (5)$$

where  $F_2, F_3$  are arbitrary smooth functions.

Evidently for every  $\omega(x)$  satisfying the system (4), (5) the ODE (3) depends on  $\omega$  only

$$F_3(\omega)\ddot{\varphi} + F_2(\omega)\dot{\varphi} = F_1(\varphi) \quad (6)$$

(one can be easily convinced that the invariants obtained by Winternitz et al. [4] satisfy this system). Thus the problem of finding the ansatz (2) reducing the PDE (1) to an ODE leads to the construction of solutions of the d'Alembert–Hamilton system (4), (5).

In the present paper the compatibility of the overdetermined system (4), (5) is investigated, i.e. all smooth functions ensuring the compatibility of the d'Alembert–Hamilton system are described. Besides wide classes of exact solutions of the system (4), (5) are presented.

System (4), (5) via the change of the dependent variable  $Z = Z(\omega)$  can be reduced to the allowing system:

$$\square\omega = F(\omega), \quad (7)$$

$$\omega_\mu\omega_\mu = \lambda, \quad \lambda = \text{const}. \quad (8)$$

The ODE (6) then takes the form

$$\lambda\ddot{\varphi} + F(\omega)\dot{\varphi} = F_1(\varphi). \quad (9)$$

Before formulating the principal result of the paper we adduce without proof some auxiliary statements.

**Lemma 1.** *Solutions of the system (7), (8) satisfy the identities*

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\mu} &= -\lambda\dot{F}(\omega), \\ \omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2\mu} &= \frac{1}{2!}\lambda^2\ddot{F}(\omega), \quad \dots, \\ \omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\dots\omega_{\nu_n\mu} &= \frac{1}{n!}\lambda^n\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}, \end{aligned} \quad (10)$$

where  $\omega_{\alpha\beta} \equiv \partial^2\omega/\partial x_\alpha\partial x_\beta$ ,  $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$ ,  $n \geq 1$ .

**Lemma 2.** *Solutions of the system (7), (8) satisfy the following equality:*

$$\det(\omega_{\mu\nu}) = 0. \quad (10')$$

Let us now formulate the principal statement.

**Theorem 1.** *The necessary condition of compatibility of the overdetermined system (7), (8) is*

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, \\ \lambda(\omega + C_1)^{-1}, \\ 2\lambda(\omega + C_1)[(\omega + C_1)^2 + C_2]^{-1}, \\ 3\lambda[(\omega + C_1)^2 + C_2][(\omega + C_1)^3 + 3C_2(\omega + C_1) + C_3]^{-1}. \end{cases} \quad (11)$$

where  $C_1, C_2, C_3$  are arbitrary constants.



**Proof.** By direct (and rather tiresome) verification one can be convinced that the following identity holds,

$$6(\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2\nu_3}\omega_{\nu_3\mu}) - 8(\square\omega)(\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\nu_2}\omega_{\nu_2\mu}) - 3(\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\mu})^2 + 6(\square\omega)^2(\omega_{\mu\nu_1}\omega_{\nu_1\mu}) - (\square\omega)^4 = 24 \det(\omega_{\alpha\beta}). \quad (12)$$

Substituting (10), (10') into (12) one obtains a nonlinear ODE for  $F(\omega)$

$$\lambda^3 \ddot{F} + 4\lambda^2 F \ddot{F} + 3\lambda^2 \dot{F}^2 + 6\lambda \dot{F} F^2 + F^4 = 0, \quad (13)$$

where  $\dot{F} = dF/d\omega$ .

The general solution of eq. (13) is given by formulae (11). The theorem is proved.

**Note 1.** Compatibility of the three-dimensional d'Alembert–Hamilton system has been investigated in detail by Collins [5]. Collins essentially used geometrical methods which could not be generalized to higher dimensions.

Using Lie's method (see e.g. ref. [6]) one can prove the following statement.

**Theorem 2.** *System (7), (8) is invariant under the 15-parameter conformal group  $C(1,3)$  iff*

$$F(\omega) = 3\lambda(\omega + C)^{-1}, \quad \lambda > 0, \quad C = \text{const.} \quad (14)$$

**Note 2.** Formula (14) can be obtained from (11) by putting  $C_2 = C_3 = 0$ . So Theorem 2 demonstrates the close connection between compatibility of a system of PDEs and its symmetry.

**Note 3.** It is common knowledge that the PDE (7) is invariant under the group  $C(1,3)$  iff  $F(\omega) = \lambda\omega^3$  [3]. Consequently, an additional constraint (8) changes essentially the symmetry properties of the d'Alembert equation (choosing  $F_3(\omega)$  in a proper way one can obtain a conformally-invariant system of the form (4), (5) under arbitrary  $F_2(\omega)$ ).

In Table 1 we list the explicit form of some exact solutions of the d'Alembert–Hamilton system (7), (8) and the reduced ODEs for the function  $\varphi(\omega)$ .  $h_1, g_1$  are arbitrary smooth functions on  $a_\mu x^\mu + d_\mu x^\mu$ ;  $h_2, g_2$  on  $\omega + d_\mu x^\mu$ ; and  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d^\mu$  are arbitrary real parameters satisfying conditions of the form

$$\begin{aligned} -a_\mu a^\mu &= b_\mu b^\mu = c_\mu c^\mu = d_\mu d^\mu = -1, \\ a_\mu b^\mu &= a_\mu c^\mu = a_\mu d^\mu = b_\mu c^\mu = b_\mu d^\mu = c_\mu d^\mu = 0. \end{aligned}$$

Table 1

No.	$\lambda$	$F(\omega)$	$\omega = \omega(x)$	QDE for $\varphi(\omega)$
1	1	0	$a_\mu x^\mu$	$\ddot{\varphi} = F_1(\varphi)$
2	1	$\omega^{-1}$	$[(a_\mu x^\mu)^2 - (b_\mu x^\mu)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + \omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
3	1	$2\omega^{-1}$	$[(a_\mu x^\mu)^2 - (b_\mu x^\mu)^2 - (c_\mu x^\mu)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 2\omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
4	1	$3\omega^{-1}$	$(x_\mu x^\mu)^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 3\omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
5	-1	0	$b_\mu x^\mu \cos h_1 + c_\mu x^\mu \sin h_1 + g_1$ $a_\mu x^\mu - b_\mu x^\mu \cos h_2 - c_\mu x^\mu \sin h_2 - g_2 = 0$	$\ddot{\varphi} = -F_1(\varphi)$
6	-1	$-\omega^{-1}$	$[(b_\mu x^\mu + h_1)^2 + (c_\mu x^\mu + h_2)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + \omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
7	-1	$-2\omega^{-1}$	$[(b_\mu x^\mu)^2 + (c_\mu x^\mu)^2 + (d_\mu x^\mu)^2]^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 2\omega^{-1} \dot{\varphi} = F_1(\varphi)$
8	0	0	$h_1$	$0 = F_1(\varphi)$

Choosing in a proper way constants  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_\mu$ ,  $d^\mu$  and functions  $f_i$ ,  $g_i$  one can obtain from Table 1 symmetry ansatz constructed by Winternitz et al. [4]. Such an approach based on the d'Alembert–Hamilton system makes it possible to obtain a wider family of ansatz for the nonlinear d'Alembert equation (1) (see also ref. [7]).

1. Fushchych W.I., in Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kyiv, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
2. Fushchych W.I., in Theoretical-algebraic methods in mathematical physics problems, Kyiv, Institute of Mathematics, 1983, 4–23.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645.
4. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791.
5. Collins C.B., *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **80**, 165.
6. Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, Berlin, Springer, 1986.
7. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some new exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint N 468, Minneapolis, Institute for Mathematics and its Applications, 1988.

# Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations

W.I. FUSHCHYCH, R.Z. ZHDANOV

This review is devoted to the application of algebraic-theoretical methods to the problem of constructing exact solutions of the many-dimensional nonlinear systems of partial differential equations for spinor, vector and scalar fields widely used in quantum field theory. Large classes of nonlinear spinor equations invariant under the Poincaré group  $P(1, 3)$ , Weyl group (i.e. Poincaré group supplemented by a group of scale transformations), and the conformal group  $C(1, 3)$  are described. Ansätze invariant under the Poincaré and the Weyl groups are constructed. Using these we reduce the Poincaré-invariant nonlinear Dirac equations to systems of ordinary differential equations and construct large families of exact solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation depending on arbitrary parameters and functions. In a similar way we have obtained new families of exact solutions of the nonlinear Maxwell–Dirac and Klein–Gordon–Dirac equations. The obtained solutions can be used for quantization of nonlinear equations.

## 1. Introduction

The Maxwell equations for the electromagnetic field and the Dirac equation for the spinor field,

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0, \quad (1.1)$$

discovered 60 years ago, are the fundament of modern physics. In eq. (1.1)  $\psi = \psi(x)$  is a four-component complex-valued function,  $x = (x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}(1, 3)$ , four-dimensional Minkowski space,  $\gamma_\mu$  are  $4 \times 4$  matrices satisfying the Clifford–Dirac algebra

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

where  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ,  $m$  is the particle mass. We use two equivalent representations of the  $\gamma$ -matrices,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2a)$$

or

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.2b)$$

$\sigma_a$  are the  $2 \times 2$  Pauli matrices.

Fifteen years ago D. Ivanenko [1] made an attempt to obtain a nonlinear generalization of the Dirac equation, and suggested the following equation:

$$[\gamma_\mu p^\mu - m + \lambda(\bar{\psi}\psi)]\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0. \quad (1.3)$$

In the early fifties W. Heisenberg [2–5] put forward a vast program to construct a unified field theory based on the nonlinear spinor equation

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_4\psi)\gamma^\mu\gamma_4]\psi(x) = 0. \quad (1.4)$$

Heisenberg and his collaborators [2–5] did their best to construct the quantum field theory, to establish the quantization rules, and to calculate the mass spectrum of the elementary particles.

In two papers by R. Finkelstein and collaborators [6, 7] published in the early fifties, nonlinear spinor fields were investigated from the classical point of view, i.e., approximate and exact solutions of partial differential equations (PDE) were studied. From the classical point of view scalar field was studied by L. Schiff [8] and B. Malenka [9].

Like the general theory of relativity nonlinear spinor field theory is a mathematical model of physical reality based on a complicated multi-dimensional nonlinear system of PDE.

Up to now there exists a vast literature on exact solutions of the equations for the gravitational field. It is well-known which important role has been played in gravitation theory by Schwarzschild's, Friedman's and Kerr's exact solutions. So far many of the obtained solutions have no adequate physical interpretation. Nevertheless the number of exact solutions of the Einstein equations grows rapidly.

Nothing of the kind takes place in nonlinear field theory. There are few enough classical solutions of nonlinear spinor equations [10–18] although these equations are essentially simpler than those of gravitation theory. This surprising situation seems to be explained by the fact that many investigators underestimate the importance of exact solutions in the theory of quantized fields and expect the great successes in other domains of quantum field theory.

We think that a thorough investigation of nonlinear spinor equations and a construction of exact solutions for them sooner or later will lead to important physical results and to new physical ideas and methods. Let us recall that in this way the theory of solitons was created.

We will not adduce a concrete physical interpretation to the solutions of nonlinear spinor equations because we think that they speak for themselves. Nevertheless we will show how to construct nonlinear scalar fields (equations) using exact solutions of nonlinear spinor equations. In other words, we have a dynamical realization of de Broglie's idea to construct an arbitrary field by using a field with spin  $s = \frac{1}{2}$  [19]. The kinematical realization of this idea is well known. It is reduced to a decomposition of a direct product of linear irreducible representations of the Lorentz and Poincare groups (with spin  $s = \frac{1}{2}$ ).

It will be shown that the interaction of spinor and scalar fields gives rise to some mass spectrum (section 4). It is of interest that discrete relations connecting the masses of spinor and scalar fields are determined by the geometry of the solutions.

Exact solutions obtained by us can be used as a pattern to check the already known approximate methods and to create new ones. For example, solutions which depend on the coupling constant  $A$  in a singular way cannot be obtained by standard methods of perturbation theory.

Solutions (classes of solutions) with the same symmetry as the initial equation of motion seem to be of particular importance. These solutions (not the equation)

can be used in the quantization procedure. From the set of solutions one can pick out ones that do not lead to an indefinite metric. This review is based on our papers [20–30], and the symmetry properties of PDE are used extensively. That is, we apply the classical ideas and methods of S. Lie to nonlinear spinor equations. The symmetry properties of nonlinear field equations make it possible to reduce multi-dimensional spinor equations to systems of ordinary differential equations (ODE). Integration of these ODE gives rise to exact solutions of the initial equation. Let us note that all the exact solutions of the nonlinear Dirac equation known to us are included in the set of solutions obtained in such a way.

The structure and content of the review are as follows. In section 2 we investigate the symmetry of the nonlinear Dirac equation

$$[\gamma_\mu p^\mu + F(\bar{\psi}, \psi)]\psi(x) = 0, \quad (1.5)$$

where  $F(\bar{\psi}, \psi)$  is an arbitrary four-component matrix depending on eight field variables  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$ . All the matrices  $F(\bar{\psi}, \psi)$  ensuring invariance of eq. (1.5) under the Poincaré group  $P(1,3)$ , extended Poincaré group  $\hat{P}(1,3)$  and conformal group  $C(1,3)$  are described.

In section 3 we take the ansatz

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \quad (1.6)$$

suggested in ref. [30] and described systematically in refs. [23, 24, 29], which reduces the system of equations (1.5) to systems of equations for the four functions  $\varphi^0$ ,  $\varphi^1$ ,  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$  depending on three new invariant variables  $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ . In (1.6)  $A(x)$  is a variable nonsingular  $4 \times 4$  matrix, whose explicit form is given in section 3. If  $\varphi$  depends on one independent variable then ansatz (1.6) reduces eq. (1.5) to a system of ODE. Most of them prove to be integrable. Integrating these and substituting the obtained results into the ansatz (1.6) one obtains particular solutions of eq. (1.5). Using this approach we have constructed large classes of exact solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation (DHE) for a spinor field.

In sections 4 and 5 multi-parameter families of exact solutions of the Dirac–Klein–Gordon and the Maxwell–Dirac systems, describing the interaction of a spinor field with scalar and electromagnetic fields are constructed.

## 2. Nonlinear spinor equations invariant under the Poincaré group $P(1,3)$ and its extensions, the groups $\hat{P}(1,3)$ and $C(1,3)$

It is clear that arbitrary equations of the form (1.5) can not be taken as a physically acceptable generalization of the linear Dirac equation. A natural restriction of the form of the nonlinearity  $F(\bar{\psi}, \psi)$  is imposed by demanding relativistic invariance. This condition ensures independence of the physical processes described by eq. (1.5) of the choice of inertial reference system (i.e., the nonlinear equation in question has to satisfy the Poincaré–Einstein relativity principle). It is common knowledge that the Dirac equation with zero mass admits the conformal group  $C(1,3)$  (see e.g. ref. [31] and the literature cited there). Therefore it is of interest to choose from the set of Poincaré-invariant equations of the form (1.5) equations that are invariant under the conformal group.

In this section we describe all equations of the form (1.5) that are invariant under the Poincaré group  $P(1,3)$  and its extensions, the group  $\hat{P}(1,3)$  and the conformal

group  $C(1,3)$ . Let us recall that the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$  (or Weyl group) is an 11-parameter group of transformations  $\{P(1,3), D(1)\}$ , where  $D(1)$  is a one-parameter group of scale transformations,

$$x'_\mu = e^\theta x_\mu, \quad \psi'(x') = e^{-k\theta} \psi(x), \quad k, \theta = \text{const.} \quad (2.1)$$

The 15-parameter conformal group  $C(1,3)$  consists of the group  $\tilde{P}(1,3)$  and the four-parameter group of special conformal transformations

$$x'_\mu = (x_\mu - \theta_\mu x \cdot x) \sigma^{-1}(x), \quad \psi'(x') = \sigma(x) [1 - (\gamma \cdot \theta)(\gamma \cdot x)] \psi(x), \quad (2.2)$$

where  $\sigma(x) = 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x)$ ,  $\theta_\mu$  are parameters of the group,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Hereafter we use the following notation for the scalar product in Minkowski space  $\mathbb{R}(1,3)$ :

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu \equiv g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

where  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  is the metric tensor of Minkowski space.

**Theorem 1.** Equation (1.5) is Poincaré invariant iff

$$F(\bar{\psi}, \psi) = F_1 + F_2 \gamma_4, \quad (2.3)$$

where  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0$ ,  $\gamma_4 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ ,  $F_1$  and  $F_2$  are arbitrary scalar functions of  $\bar{\psi} \psi$  and  $\bar{\psi} \gamma_4 \psi$ .

We give only a sketch of the proof, which is based on the infinitesimal Lie method [32–34]. Expanding the matrix  $F(\bar{\psi}, \psi)$  in a linear combination of  $\gamma$ -matrices, the coefficients of the expansion depending  $\bar{\psi}$  and  $\psi$ ,

$$F = aI + b_\mu \gamma^\mu + c^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + d^\mu \gamma_4 \gamma_\mu + e \gamma_4, \quad S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} i(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad (2.4)$$

and using the invariance criterion, one obtains the following necessary and sufficient conditions for the Poincaré invariance of eq. (1.5):

$$\begin{aligned} Q_{0k} a &= 0, \quad Q_{0k} e = 0, \\ Q_{0k} b_\mu + b^\alpha (g_{\alpha 0} g_{\mu k} - g_{\alpha k} g_{\mu 0}) &= 0, \quad Q_{0k} d_\mu + d^\alpha (g_{\alpha 0} g_{\mu k} - g_{\alpha k} g_{\mu 0}) = 0, \\ Q_{0k} c_{\mu\nu} + c^{\alpha\beta} (g_{\alpha k} \delta_{\beta 0}^{\mu\nu} + g_{\beta 0} \delta_{\alpha k}^{\mu\nu} - g_{\alpha 0} \delta_{\beta k}^{\mu\nu} - g_{\beta k} \delta_{\alpha 0}^{\mu\nu}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where

$$\begin{aligned} iQ_{0k} &= -(S_{0k} \psi)^\alpha \partial / \partial \psi^\alpha + (\bar{\psi} S_{0k})^\alpha \partial / \partial \bar{\psi}^\alpha, \quad k = 1, 2, 3, \\ \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} &= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu, \quad \alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

and  $\delta_\beta^\alpha$  is the Kronecker symbol.

After some cumbersome calculations we obtain the following general solution of the system of PDE (2.5):

$$\begin{aligned} a &= A, \quad e = E, \quad b_\mu = B_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + B_2 \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_4 \psi, \\ c_{\mu\nu} &= C_1 \bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi + C_2 \bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi, \quad d_\mu = D_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + D_2 \bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

where  $A, B_1, \dots, E$  are arbitrary smooth functions of  $\bar{\psi} \psi$  and  $\bar{\psi} \gamma_4 \psi$ .

Substituting the above formulae into (2.4) one obtains the following expression for the nonlinear term  $F(\bar{\psi}, \psi)\psi$ :

$$F(\bar{\psi}, \psi)\psi = \{AI + [B_1\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + B_2\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi]\gamma^\mu + [C_1\bar{\psi}S_{\mu\nu}\psi + C_2\bar{\psi}\gamma_4S_{\mu\nu}\psi]S^{\mu\nu} + [D_1\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + D_2\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi]\gamma_4\gamma^\mu + E\gamma_4\}\psi.$$

This formula can be essentially simplified with the help of the identity [35]

$$(\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2)\gamma^\mu\psi_2 = (\bar{\psi}_1\psi_2)\psi_2 + (\bar{\psi}_1\gamma_4\psi_2)\gamma_4\psi_2,$$

where  $\psi_1$  and  $\psi_2$  are arbitrary four-component spinors, and as a result the nonlinearity  $F(\bar{\psi}, \psi)$  takes the form (2.3). This completes the proof.

**Note.** In the same way one can prove that the second-order spinor equation

$$p_\mu p^\mu \psi = F(\bar{\psi}, \psi)\psi \quad (2.7)$$

is invariant under the Poincaré group iff  $F(\bar{\psi}, \psi)$  has the form (2.3).

**Theorem 2 [29].** Equation (1.5) is invariant under the Weyl group  $\tilde{P}(1, 3)$  iff  $F(\bar{\psi}, \psi)$  has the form (2.3),  $F_i$  being determined by the formulae

$$F_i = (\bar{\psi}\psi)^{1/2k} \tilde{F}_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

where  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$  are arbitrary functions of  $\bar{\psi}\psi/\bar{\psi}\gamma_4\psi$ .

**Theorem 3 [29].** Equation (1.5) is invariant under the conformal group  $C(1, 3)$  iff  $F(\bar{\psi}, \psi)$  has the form (2.3), (2.8) with  $k = 3/2$ .

The proof of the last two statements is obtained with the help of the Lie method [32–34]; it is omitted here. Let us note that the sufficiency in theorem 3 can be established by direct verification. To do this we denote by  $G$  the following expression:

$$G(\bar{\psi}, \psi) = \gamma_\mu p^\mu \psi + (\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2\gamma_4)(\bar{\psi}\psi)^{1/3}\psi.$$

One can verify that the following identities hold:

$$G(\bar{\psi}', \psi') = e^{-5\theta/2}G(\bar{\psi}, \psi),$$

if  $\bar{\psi}', \psi'$  have the form (2.1) with  $k = 3/2$ ,

$$G(\bar{\psi}', \psi') = \sigma^2(x)[1 - (\gamma \cdot \theta)(\gamma \cdot x)]G(\bar{\psi}, \psi),$$

if  $\bar{\psi}', \psi'$  have the form (2.2). Consequently, the equation  $G = 0$  is invariant under the groups of transformations (2.1), (2.2).

**Note 1.** Unlike eq. (1.5), the class of equations (2.7) does not include conformally invariant ones. Therefore it seems reasonable to consider as an equation of motion for a spinor field the following second-order equation:

$$p_\mu p^\mu \psi = \Phi(\bar{\psi}, \psi, \bar{\psi}_1, \psi_1), \quad (2.9)$$

$$\psi_1 = \{\partial\psi/\partial x_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}, \quad \bar{\psi}_1 = \{\partial\bar{\psi}/\partial x_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}.$$

The problem of a complete group-theoretical classification of eqs. (2.9) will be considered in a future paper. Here we restrict ourselves to an example of a conformally invariant equation of the form (2.9),

$$p_\mu p^\mu \psi - (3\bar{\psi}\psi)^{-1}\gamma_\mu [p^\mu(\bar{\psi}\psi)]\gamma_\nu p^\nu \psi = 0. \quad (2.10)$$

It is worth noting that each solution of the nonlinear Dirac–Gürsey equation [36] satisfies the PDE (2.10).

**Note 2.** There exist Poincaré-invariant first-order equations which differ principally from the Dirac equation. An example is [29, 37]

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)p_\mu\psi = 0. \quad (2.11)$$

On the set of solutions of the system (2.11) a representation of an infinite-dimensional Lie algebra is realized. This fact enables us to construct the general solution of eq. (2.11) in implicit form,

$$f^\alpha(x_\mu(j \cdot j) - j_\mu(j \cdot x), \bar{\psi}, \psi) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

where  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ,  $f^\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}^1$  are arbitrary smooth functions.

### 3. Exact solutions of the nonlinear Dirac equation

According to refs. [23, 24, 37] a solution of eq. (1.5) is looked for as a solution of the following overdetermined system of PDE:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p^\mu \psi + F(\bar{\psi}, \psi)\psi &= 0, \\ \xi_a^\mu \psi x_\mu + \eta_a(x, \bar{\psi}, \psi)\psi &= 0, \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

where  $\eta_a(x, \bar{\psi}, \psi)$  are arbitrary  $4 \times 4$  matrices,  $\xi_a^\mu(x, \bar{\psi}, \psi)$  are scalar functions satisfying the condition

$$\text{rank} \{ \xi_a^\mu(x, \bar{\psi}, \psi) \} = 3. \quad (3.2)$$

The PDE (3.1) is a system of sixteen equations for four functions  $\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3$ . Therefore one has to investigate its compatibility (see also refs. [31, 39, 40]).

**Theorem 4.** *System (3.1) is compatible iff it is invariant under the one-parameter Lie groups generated by the operators*

$$Q_a = \xi_a^\mu \partial / \partial x_\mu - (\eta_a \psi)^\alpha \partial / \partial \psi^\alpha, \quad a = 1, 2, 3.$$

The main steps of the proof are as follows. Firstly, using condition (3.2) one reduces the system (3.1) to the equivalent system (to simplify the calculations we suppose that  $\partial \xi_a^\alpha / \partial \psi^\alpha = \partial \eta_a^{\alpha\beta} / \partial \psi^\mu = 0$ )

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p^\mu \psi + F(\bar{\psi}, \psi)\psi &= 0, \\ \tilde{Q}_a \psi \equiv (\partial / \partial x_a + \xi_a \partial / \partial x_0 + \tilde{\eta}_a)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.1')$$

It is not difficult to verify that system (3.1') admits groups generated by the operators  $\tilde{Q}_a$  iff the initial system admits groups generated by the operators  $Q_a$ , while the following relations hold:

$$[\tilde{Q}_a, \tilde{Q}_b] = 0, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

It follows from the general theory of Lie groups that there exists the change of variables

$$\Psi(z) = \eta(x)\psi(x), \quad z_\mu = f_\mu(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$



which reduces the operators  $\tilde{Q}_a$  satisfying conditions (3.3) to the form

$$\tilde{Q}_a \rightarrow \tilde{\tilde{Q}}_a = \partial/\partial z_a. \quad (3.4)$$

System (3.1') is rewritten in the following way:

$$\begin{aligned} \partial\Psi/\partial z_0 &= F_1(z, \bar{\Psi}, \Psi)\Psi, \\ \partial\Psi/\partial z_a &= 0. \end{aligned} \quad (3.1'')$$

The necessary and sufficient conditions for the compatibility of the system (3.1'') are as follows:

$$\partial^2\Psi/\partial z_\mu\partial z_\nu = \partial^2\Psi/\partial z_\nu\partial z_\mu. \quad (3.5)$$

Applying these conditions to (3.1'') one has

$$\partial F_1/\partial z_a = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

whence the invariance of system (3.1'') under the operators  $\tilde{\tilde{Q}}_a = \partial/\partial z_a$  follows. The reverse statement is also true — if system (3.1'') is invariant under the groups generated by the operators  $\tilde{\tilde{Q}}_a$ , then conditions (3.6) hold. Consequently, the initial system is invariant under the operators  $Q_a$ . The theorem is proved.

**Consequence.** *Substitution of the ansatz*

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \quad (3.7)$$

where the  $4 \times 4$  matrix  $A(x)$  and the scalar function  $\omega(x)$  satisfy the system of PDE

$$\xi_a^\mu \partial\omega/\partial x_\mu = 0, \quad (3.8)$$

$$Q_a A(x) = [\xi_a^\mu \partial/\partial x_\mu + \eta_a(x)]A(x) = 0, \quad (3.9)$$

into eq. (1.5) gives rise to a system of ODE for  $\varphi = \varphi(\omega)$ .

**Proof.** Integration of the last three equations of (3.1'') yields

$$\Psi = \Psi(z_0).$$

Returning to the original variables  $x$  and  $\psi(x)$ , one has

$$\psi(x) = [\eta(x)]^{-1}\Psi(z_0).$$

Choosing  $A(x) = [\eta(x)]^{-1}$ ,  $\omega = z_0(x)$ , one obtains the statement required, the ODE for  $\varphi(\omega)$  having the form

$$d\varphi/d\omega = F_1(\omega, \bar{\varphi}, \varphi)\varphi.$$

**Note.** If  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  is a three-dimensional invariance algebra of PDE (1.5), then the conditions of theorem 4 are evidently satisfied. Therefore the classical result on the reduction of PDE to ODE via  $Q_a$ -invariant solutions [32–34, 41] follows from theorem 4 as a particular case. If  $Q_a$  are not the symmetry operators then the reduction is done via conditionally  $Q_a$ -invariant solutions [31, 39, 40, 42].

3.1. *Ansätze for the spinor field.* In the following we shall consider spinor equations (1.5) with the nonlinearity (2.3), i.e. Poincaré-invariant systems of the form

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = \Phi(\bar{\psi}, \psi) = (F_1 + F_2 \gamma_4) \psi. \quad (3.10)$$

On the set of solutions of system (3.10) the following representation of the Poincaré algebra  $AP(1, 3)$  is realized:

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Using theorem 4 and the group-theoretical properties of eq. (3.10) one can formulate the following algorithm for the reduction of the PDE (3.10) to systems of ODE.

At the first step one has to describe (to classify) all inequivalent three-dimensional algebras which are subalgebras of the Poincaré algebra (3.11). As a result we obtain a set of triplets of operators  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ , each of which determines an ansatz of the form (3.7).

At the second step the system of equations (3.8), (3.9) is integrated. According to the consequence of theorem 4 substitution of the obtained ansätze into the initial equation yields systems of ODE for the unknown function  $\varphi = \varphi(\omega)$ .

The efficiency of group-theoretical methods is ensured, first of all, by the fact that intermediate problems to be solved are linear. At the first step linear systems of algebraic equations are solved [43], at the second step systems of linear PDE having the same principal part.

The problem of classification of all inequivalent subalgebras of the Poincaré algebra  $P(, 3)$  was solved in refs. [43–45]. Integration of the PDE (3.8), (3.9) is carried out by standard methods but the calculations are rather cumbersome. We give here the final result in table 1.

As an example we consider the case  $Q_1 = J_{03}$ ,  $Q_2 = P_1$ ,  $Q_3 = P_2$ , i.e.,

$$(x_0 p_3 - x_3 p_0) \omega = 0, \quad p_1 \omega = p_2 \omega = 0; \quad (3.12)$$

$$\left( x_0 p_3 - x_3 p_0 + \frac{1}{2} i \gamma_0 \gamma_3 \right) A(x) = 0, \quad p_1 A(x) = p_2 A(x) = 0. \quad (3.13)$$

From the last two equations of the system (3.12) it follows that  $\omega = \omega(x_0, x_3)$ . Substituting this result into the first equation one obtains that  $\omega(x_0, x_3)$  is a first integral of the Euler–Lagrange system

$$\frac{dx_0}{x_3} = \frac{dx_3}{x_0},$$

which can be chosen in the form  $\omega = x_0^2 - x_3^2$ .

A solution of the system (3.13) is looked for in the form

$$A(x) = \exp[\gamma_0 \gamma_3 f(x)]$$

whence it follows that the scalar function  $f(x)$  satisfies the following equation:

$$x_0 f_{x_3} + x_3 f_{x_0} = \frac{1}{2},$$

whose particular solution has the form

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(x_0 + x_3).$$

Table 1.  $P(1, 3)$ -invariant ansätze for the spinor field

No.	Algebra	$A(x)$	$\omega(x)$
1	$P_0, P_1, P_2$	$I$	$x_3$
2	$P_1, P_2, P_3$	$I$	$x_0$
3	$P_0 + P_3, P_1, P_2$	$I$	$x_0 + x_3$
4	$J_{03}, P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_0^2 - x_3^2$
5	$J_{03}, P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_2$
6	$J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3$	$\exp \left[ \frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0 \gamma_3 \right]$	$x_1$
7	$J_{03} + \alpha P_2, P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left[ \frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0 \gamma_3 \right]$	$\alpha \ln(x_0 + x_3) - x_2$
8	$J_{12}, P_0, P_3$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \arctg \frac{x_1}{x_2} \right]$	$x_1^2 + x_2^2$
9	$J_{12} + \alpha P_0, P_1, P_2$	$\exp \left[ -\frac{x_0}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \right]$	$x_3$
10	$J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{x_3}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_2 \right]$	$x_0$
11	$J_{12} + P_0 + P_3, P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{4} (x_3 - x_0) \gamma_1 \gamma_2 \right]$	$x_0 + x_3$
12	$G_1, P_0 + P_3, P_2$	$\exp \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right)$	$x_0 + x_3$
13	$G_1, P_0 + P_3, P_1 + \alpha P_2$	$\exp \left( \frac{\alpha x_1 - x_2}{2\alpha(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right)$	$x_0 + x_3$
14	$G_1 + P_2, P_0 + P_3, P_1$	$\exp \left[ \frac{x_2}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$x_0 + x_3$
15	$G_1 + P_0, P_0 + P_3, P_2$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} (x_0 + x_3) (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$2x_1 + (x_0 + x_3)^2$
16	$G_1 + P_0, P_1 + \alpha P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left[ -\frac{1}{2} (x_0 + x_3) (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right]$	$2(x_2 - \alpha x_1) -$ $-\alpha(x_0 + x_3)^2$
17	$J_{03} + \alpha J_{12}, P_0, P_3$	$\exp \left( -\frac{1}{2\alpha} (\gamma_0 \gamma_3 + \alpha \gamma_1 \gamma_2) \arctg \frac{x_1}{x_2} \right)$	$x_1^2 + x_2^2$
18	$J_{03} + \alpha J_{12}, P_1, P_2$	$\exp \left[ \frac{1}{2} (\gamma_0 \gamma_3 + \alpha \gamma_1 \gamma_2) \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_0^2 - x_3^2$
19	$G_1, G_2, P_0 + P_3$	$\exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right)$	$x_0 + x_3$
20	$G_1 + P_2,$ $G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2[(x_0 + x_3)(x_0 + x_3 + \beta) - \alpha]} \times \right.$ $\times \{ \gamma_1 [(x_0 + x_3 + \beta)x_1 - \alpha x_2] +$ $\left. + \gamma_2 [(x_0 + x_3)x_2 - x_1] \} \right)$	$x_0 + x_3$
21	$G_1, G_2 + P_1 + \beta P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 + \right.$ $\left. + \frac{x_2}{2(x_0 + x_3)(x_0 + x_3 + \beta)} \times \right.$ $\times (\gamma_0 + \gamma_3) [\gamma_2 (x_0 + x_3) - \gamma_1] \left. \right)$	$x_0 + x_3$
22	$G_1, G_2 + P_2,$ $P_0 + P_3$	$\exp \left[ (\gamma_0 + \gamma_3) \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} \gamma_1 + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{x_2}{2(x_0 + x_3 + 1)} \gamma_2 \right) \right]$	$x_0 + x_3$
23	$G_1, J_{03}, P_2$	$\exp \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right) \times$ $\times \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_0^2 - x_1^2 - x_3^2$
24	$J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2,$ $G_1, P_0 + P_3$	$\exp \left( \frac{x_1 - \alpha \ln(x_0 + x_3)}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right) \times$ $\times \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right]$	$x_2 - \beta \ln(x_0 + x_3)$
25	$J_{12} + P_0 + P_3, G_1, G_2$	$\exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right) \times$ $\times \exp \left( -\frac{x \cdot x}{4(x_0 + x_3)} \gamma_1 \gamma_2 \right)$	$x_0 + x_3$

Table 1 (Continued)

No.	Algebra	$A(x)$	$\omega(x)$
26	$J_{03} + \alpha J_{12}, G_1, G_2$	$\exp\left(\frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)}(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)\right) \times$ $\times \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma_0 \gamma_3 + \alpha \gamma_1 \gamma_2) \ln(x_0 + x_3)\right]$	$x \cdot x$

Notation:

$$G_k = J_{0k} + J_{3k} \equiv (x_0 + x_3)p_k - x_k(p_0 + p_3) + \frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_k, \quad \exp\{R\} \equiv I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} R^n,$$

$I$  is the  $4 \times 4$  matrix,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ .

Finally one has

$$\omega(x) = x_0 - x_3^2, \quad A(x) = \exp\left[\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right].$$

Other triplets  $Q_1, Q_2, Q_3$  from table 1 are treated in an analogous way (we show in table 1 only algebras  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  giving nontrivial ansätze (3.7)).

It is important to note that the ansätze listed in the table 1 do not exhaust all possible substitutions of the form (3.7) reducing the PDE (3.10) to ODE. Principally different ansätze are obtained when the conditions of theorem 4 are valid and some operators  $Q_a$  are not symmetry operators of eq. (3.10) (conditional invariance).

To investigate the conditional invariance of a differential equation one can also apply the infinitesimal Lie algorithm [32–34]. However, the determining equations to be solved are nonlinear (see refs. [39, 40]). To avoid this difficulty the following method was suggested [24, 30]: firstly, the dimension of the PDE is decreased by one using its group-theoretical properties and then the maximal symmetry of the reduced equations is investigated. Under certain circumstances this procedure yields such operators  $Q_a$  that the initial equation is conditionally invariant under  $Q_a$ .

We realize the above scheme for the PDE (1.5) invariant under the group  $\tilde{P}(1, 3)$ , i.e. for equations of the form

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = \Phi_2(\bar{\psi}, \psi) \equiv [(\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 \gamma_4)(\bar{\psi} \psi)^{1/2k}] \psi. \quad (3.14)$$

$\tilde{P}(1, 3)$ -invariant ansätze for the spinor field reducing (3.14) to three-dimensional PDE were constructed in refs. [24, 29]. The general form is

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (3.15)$$

where  $\varphi$  is a new unknown spinor; the  $4 \times 4$  matrix  $A(x)$  and the scalar functions  $\omega_i(x)$  are determined from table 2 (each ansatz in table 2 corresponds to some one-dimensional subalgebra of the algebra  $AP(1, 3)$ ; for more detail see ref. [24]). Substitution of the ansätze (3.15), with  $A(x)$  and  $\omega(x)$  as listed in the table 2, into the PDE (3.14) results in a reduction by one of the number of independent variables, i.e., the equations obtained depend on the three independent variables  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  only. Omitting intermediate calculations we write down the reduced equations for  $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

$$(1) \quad k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)(\omega_1 + a^{-2}\omega_2^2\omega_3^2) + (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_2^2 - 2a^{-1}\gamma_1\omega_3\omega_2^2 - 2\gamma_3\omega_1\omega_2]\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2]\varphi_{\omega_2} + [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)]\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$$

Table 2.  $\tilde{P}(1, 3)$ -invariant ansätze for the spinor field

No.	$A(x)$	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
1	$(x_0^2 - x_2^2)^{-k} \exp\left(\frac{1}{2a}\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0) \ln(x_0 - x_2)\right)$	$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)x_3^{-2}$	$(x_0 - x_2)x_3^{-1}$	$\alpha x_1(x_0 - x_2)^{-1} - \ln(x_0 - x_2)$
2	$\exp\left[-\frac{1}{2}x_1(x_0 - x_2)^{-1}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)\right]$	$x_0 - x_2$	$x_3$	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$
3	$\exp\left[\frac{1}{2}(x_2 - x_0)\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0)\right]$	$x_1 + \beta(x_0 - x_2)$	$2x_1 + (x_0 - x_2)^2$	$3x_3 + 3x_1(x_0 - x_2) + (x_0 - x_2)^3$
4	$\exp\left(\frac{1}{2a}x_3\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_0)\right)$	$x_0 - x_2$	$x_1^2 - x_1^2 - x_2^2$	$\beta x_1 - (x_0 - x_2)x_3$
5	$(x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}\right]$	$x_0 x_1^{-1}$	$\ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}$	$(x_2^2 + x_3^2)(x_0^2 - x_1^2)^{-1}$
6	$(x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \exp\left(\frac{1}{2(a+1)}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}\right)$	$(x_0^2 - x_1^2)^{-a-1}(x_0 + x_1)^{2a}$	$(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}$
7	$(x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \exp\left[-\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}\right]$	$x_0 + x_1$	$(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) - 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}$
8	$\exp\left[\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}\right]$	$x_0^2 - x_1^2$	$x_2^2 + x_3^2$	$b \ln(x_0 + x_1) + \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}$
9	$(2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \exp\left[\frac{1}{4}\gamma_0\gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}\right]$	$(2x_0 + 2x_1 + \beta) \times \exp\left(\frac{2}{\beta}(x_1 - x_0)\right)$	$(2x_0 + 2x_1 + \beta) \times (x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}$
10	$\exp\left[\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right]$	$x_0^2 - x_1^2$	$\ln(x_0 + x_1) - x_2$	$x_3$
11	$\exp\left[-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}\right]$	$x_2^2 + x_3^2$	$\operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} + \beta_1 x_0 + \beta_2 x_1$	$\alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1$
12	$x_0^{-k} I$	$x_1 x_0^{-1}$	$x_2 x_0^{-1}$	$x_3 x_0^{-1}$
13	$I$	$x_0 + x_3$	$x_1$	$x_2$
14	$I$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
15	$I$	$x_0$	$x_1$	$x_2$

Notation:  $I$  is the unit  $4 \times 4$  matrix;  $a, b, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2$  are arbitrary real numbers.

- (2)  $\frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \gamma_3\varphi_{\omega_2} + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_3\omega_1^{-1}]\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (3)  $[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} + \frac{3}{2}(2\gamma_2 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2)\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (4)  $\frac{1}{2}\beta^{-1}\gamma_4(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 - 2\beta^{-1}\omega_3\gamma_1 + (\gamma_0 - \gamma_2)(\beta^{-2}\omega_3^2 + \omega_2)\omega_1^{-1}]\varphi_{\omega_2} + (\beta\gamma_1 - \gamma_3\omega_1)\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (5)  $\frac{1}{2}(1 - 2k)\gamma_3\varphi + (\omega_1\omega_3)^{1/2}(\gamma_0 - \gamma_1\omega_1)\varphi_{\omega_1} + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} + [2\gamma_3 - (\gamma_0 + \gamma_1\omega_1)\omega_3^{1/2}\omega_1^{-1/2}]\omega_3\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (6)  $\left[ -k(\gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) + \frac{1}{2(a+1)}(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{-1/2(a+1)} + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \varphi - 2(a+1)(\gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2(a+1)})\omega_1\varphi_{\omega_1} + 2[\omega_2(\gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) - \omega_2^{3/2}\gamma_3]\varphi_{\omega_2} + 2(a\gamma_2 + b\gamma_3)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (7)  $\left[ -k(\gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2}) + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)\omega_1^{1/2} + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2} \right] \varphi + (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + 2\omega_2(\gamma_0 \cosh \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \sinh \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2} + 2\omega_2^{1/2}(b\gamma_3 - \gamma_2)\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$  (3.16)
- (8)  $\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_3\omega_3^{-1/2})\varphi + [\omega_1(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_0 - \gamma_1]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_3\omega_2^{-1/2}\varphi_{\omega_2} + [b(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2\omega_2^{-1/2}]\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (9)  $\frac{1}{2}[(1 - 2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi + 2\beta^{-1}\omega_1[\beta(\gamma_0 + \gamma_1) - \gamma_0 + \gamma_1]\varphi_{\omega_1} + 2\omega_2(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2} + 2\omega_2^{1/2}(\gamma_2 + b\gamma_3)\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (10)  $\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [\omega_1(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_0 - \gamma_1]\varphi_{\omega_1} + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (11)  $\frac{1}{2}\gamma_3\omega_1^{-1/2}\varphi + 2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + (\beta_1\gamma_0 + \beta_2\gamma_1 + \gamma_2\omega_1^{-1/2})\varphi_{\omega_2} + (\alpha_2\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1)\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (12)  $-k\gamma_0\varphi + (\gamma_a - \gamma_0\omega_a)\varphi_{\omega_a} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (13)  $(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (14)  $\gamma_1\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi);$
- (15)  $\gamma_0\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi),$

where  $\varphi_{\omega_a} \equiv \partial\varphi/\partial\omega_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ ,

$$\Phi_2 \equiv [(\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2\gamma_4)(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}]\varphi, \quad \tilde{F}_i = \tilde{F}_i(\bar{\varphi}\varphi/\bar{\varphi}\gamma_4\varphi).$$

The group-theoretical properties of eqs. (3.16) were investigated in ref. [29]. We

consider in more detail the PDE (3) and (13)–(15) of (3.16). Using the Lie method [32–34] one can prove the following statements.

**Proposition 1.** *PDE (13) of (3.16) is invariant under the infinite-parameter Lie group, its generators being of the form*

$k = 1$ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \phi_1(\omega_1)\partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1)\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}[\dot{\phi}_1(\omega_1)\gamma_1 + \dot{\phi}_2(\omega_1)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3), \\ Q_2 &= -\omega_2\partial_{\omega_3} + \omega_3\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2, \\ Q_3 &= \phi_0(\omega_1)\partial_{\omega_1} + \dot{\phi}_0(\omega_1)(\omega_2\partial_{\omega_2} + \omega_3\partial_{\omega_3}) + \dot{\phi}_0(\omega_1) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\ddot{\phi}_0(\omega_1)(\gamma_1\omega_2 + \gamma_2\omega_3)(\gamma_0 + \gamma_3), \\ Q_4 &= \phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3); \end{aligned} \tag{3.17}$$

$k \neq 1$ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial_{\omega_1}, \quad Q_2 = -\omega_2\partial_{\omega_3} + \omega_3\partial_{\omega_2} + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2, \\ Q_3 &= \phi_1(\omega_1)\partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1)\partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}[\dot{\phi}_1(\omega_1)\gamma_1 + \dot{\phi}_2(\omega_1)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3), \\ Q_4 &= \omega_1\partial_{\omega_1} + \omega_2\partial_{\omega_2} + \omega_3\partial_{\omega_3} + k, \quad Q_5 = \phi_3(\omega_1)\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3), \end{aligned}$$

where  $\phi_0, \dots, \phi_3$  are arbitrary smooth functions, a dot means differentiation with respect to  $\omega_1$ .

**Proposition 2.** *For  $k = 1$  PDE (14) and (15) of (3.16) are invariant under the conformal groups  $C(3)$  and  $C(1, 2)$ , respectively.*

It is important to note that for  $k \neq 3/2$  the initial equation (3.14) is not conformally invariant. The same statement holds for the infinite-parameter group with generators (3.17). Consequently for  $k = 1$  the PDE (3.14) is conditionally invariant under the algebras (3.17),  $AC(3)$  and  $AC(1, 2)$ . Using this fact we have constructed ansatz which are principally different from ones listed in table 1:

$k = 1$ :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi_0^{-1} \exp \left\{ \phi_3\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3) - \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1\gamma_1 + \dot{\phi}_2\gamma_2)(\gamma_0 + \gamma_3) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\dot{\phi}_0\phi_0^{-1}[\gamma_1(x_1 + \phi_1) + \gamma_2(x_2 + \phi_2)](\gamma_0 + \gamma_3) \right\} \times \\ &\quad \times \begin{cases} \varphi_1((x_1 + \phi_1)/\phi_0), \\ \exp \left( -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1 + \phi_1}{x_2 + \phi_2} \right) \varphi_2([(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]/\phi_0^2), \end{cases} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\gamma_0 x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{3/2}} \times \\ &\quad \times \begin{cases} \varphi_3(x_0/(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)), \\ \varphi_4(x_1/(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)), \\ \exp \left[ -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right] \varphi_5((x_1^2 + x_2^2)/(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^2), \end{cases} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\psi(x) = \frac{\gamma \cdot x}{(\mathbf{x}^2)^{3/2}} \times \begin{cases} \varphi_6(x_1(\mathbf{x}^2)^{-1}), \\ \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right] \varphi_7((x_1^2 + x_2^2)/(\mathbf{x}^2)^2), \end{cases} \quad (3.20)$$

$k \neq 1$ :

$$\psi(x) = \exp \left[ \phi_3 \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_3) - \frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 \gamma_1 + \dot{\phi}_2 \gamma_2) (\gamma_0 + \gamma_3) \right] \times \begin{cases} \varphi_8(x_1 + \phi_1), \\ \exp \left( -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1 + \phi_1}{x_2 + \phi_2} \right) \varphi_9((x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2), \end{cases} \quad (3.21)$$

In eqs. (3.18)–(3.21)  $\phi_0, \dots, \phi_3$  are arbitrary smooth functions of  $x_0 + x_3$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_9$  are new unknown spinors. While obtaining formulae (3.19)–(3.21) we essentially used the conformally invariant ansatz suggested in refs. [20, 21] and the results of refs. [24, 29].

Let us turn now to eq. (3) of (3.16). If one chooses  $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$  and introduces the notations

$$\Gamma_1 = \gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2), \quad \Gamma_2 = \gamma_1, \quad z_1 = \omega_1, \quad z_2 = \frac{1}{2}\omega_2,$$

then one obtains the following PDE:

$$\Gamma_1 \varphi_{z_1} + \Gamma_2 \varphi_{z_2} = -\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (3.22)$$

where  $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = -1$ ,  $\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_1 = 0$ .

With the aid of the Lie method [32–34] it is possible to prove that eq. (3.22) is invariant under the conformal group  $C(2)$  if  $k = 1/2$  [consequently, for  $k = 1/2$  the initial PDE (3.14) is conditionally invariant under the conformal group  $C(2)$ ]. Using this fact we have constructed the ansatz that reduces (3.14) to a system of ODE [24]:

$$\psi(x) = \rho^{-1} \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right] \times \left\{ [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] [x_3 + \beta(x_0 - x_2)] + \frac{1}{2} \gamma_1 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \right\} \varphi(\omega), \quad (3.23)$$

where

$$\omega = \left\{ \beta_1 [x_3 + \beta(x_0 - x_2)] + \frac{1}{2} \beta_2 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \right\} \rho^{-1},$$

$$\rho = [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + \frac{1}{4} [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]^2,$$

$\beta, \beta_1, \beta_2$  are constants.

**3.2. Reduction of the nonlinear Dirac equation to systems of ODE.** To reduce the nonlinear Dirac equation (3.10) via ansatzes from table 1 one has to make rather cumbersome calculations. Therefore we give the final result, systems of ODE for  $\varphi(\omega)$ , omitting intermediate calculations.



- (1)  $i\gamma_2\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (2)  $i\gamma_0\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (3)  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (4)  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (5)  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i\gamma_2\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (6)  $-\frac{i}{2\alpha}\gamma_1\gamma_4\varphi + i\gamma_1\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (7)  $-\frac{i}{2\alpha}\gamma_1\gamma_4\varphi + i[\alpha(\gamma_0 + \gamma_3)e^{-\omega/\alpha} - \gamma_2]\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (8)  $\frac{1}{2}i\omega^{-1/2}\gamma_2\varphi + 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (9)  $-\frac{i}{2\alpha}\gamma_3\gamma_4\varphi + i\gamma_3\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (10)  $\frac{i}{2\alpha}\gamma_0\gamma_4\varphi + i\gamma_0\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (11)  $\frac{1}{4}i(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (12)  $\frac{1}{2}i\omega^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (13)  $\frac{i}{2\alpha}\omega^{-1}(\alpha + \gamma_4)(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (14)  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_4\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (15)  $2i\gamma_1\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (16)  $2i(\gamma_2 - \alpha\gamma_1)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (17)  $\frac{i}{2\alpha}\omega^{-1/2}\gamma_2(\alpha - \gamma_4)\varphi + 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (18)  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)(1 + \alpha\gamma_4)\varphi + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (19)  $i\omega^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (20)  $\frac{1}{2}i[\omega(\omega + \beta) - \alpha]^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)\{[2\omega(\omega + \beta) - \alpha - 1]\gamma_4 - 2\omega - \beta\}\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (21)  $\frac{1}{2}i[\omega(\omega + \beta)]^{-1}(\gamma_0 + \gamma_3)(2\omega + \beta - \gamma_4)\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (22)  $\frac{1}{2}i[\omega(\omega + 1)]^{-1}(2\omega + 1)(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (23)  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (24)  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + i[\gamma_2 - \beta(\gamma_0 + \gamma_3)]\dot{\varphi} = \Phi_1,$
- (25)  $i(\gamma_0 + \gamma_3)\dot{\varphi} + i\left[(\gamma_0 + \gamma_3)\omega^{-1} + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\right]\varphi = \Phi_1,$
- (26)  $\frac{1}{2}i(\gamma_0 + \gamma_3)(3 + \alpha\gamma_4)\varphi + i[(\gamma_0 + \gamma_3)\omega + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\varphi} = \Phi_1,$

(3.24)

where

$$\Phi_1 \equiv (F_1 + F_2\gamma_4)\varphi, \quad F_i = F_i(\bar{\varphi}\varphi, \bar{\varphi}\gamma_4\varphi), \quad \dot{\varphi} \equiv d\varphi/d\omega.$$

To integrate eqs. (3.24) one can again apply group-theoretical methods. In ref. [29] it was pointed out how to obtain some information about the symmetry of the reduced PDE by purely algebraic methods (without application of the infinitesimal Lie method). It is based on the following statement:

Let  $G$  be a Lie group of transformations,  $H$  be a normal divisor in  $G$ . And let there be a PDE invariant under the group  $G$ .

**Theorem 5.** *The equation obtained via reduction with the help of  $H$ -invariant solutions admits the factor group  $G/H$ .*

A proof can be found in ref. [33].

We use the equivalent formulation of this theorem in terms of Lie algebras: If there is a PDE with the symmetry algebra  $AG$  and subalgebra  $Q$  which is an ideal in  $AG$ , then the equation obtained via reduction with the help of  $Q$ -invariant solutions admits the Lie algebra  $AG/Q$ .

Straightforward application of the above theorem to the three-dimensional algebras listed in the table 1 is impossible because these algebras are not, in general, ideals in  $AP(1,3)$ . Therefore there arises the intermediate problem of constructing the maximal subalgebras  $A_1, \dots, A_{26}$  of the algebra  $AP(1,3)$  having the algebras of the table 1 as ideals.

It is known from the theory of Lie algebras [33] that the algebra  $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$  is the ideal in the Lie algebra  $\langle \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s \rangle$  iff

$$[Q_i, \Sigma_j] = \lambda_{ij}^k Q_k, \quad \lambda_{ij}^k = \text{const},$$

where  $[Q_i, \Sigma_j]$  is the commutator, and summation over repeated indices is understood.

Consequently, the operator  $\theta_k^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_k^\mu P_\mu$  belongs to the algebra  $A_k$  iff

$$[Q_i, \theta_k^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_k^\mu P_\mu] = \lambda_{ik}^j Q_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, \dots, 26. \quad (3.25)$$

Here  $\theta_k^{\mu\nu}$ ,  $\theta_k^\mu$  and  $\lambda_{ik}^j$  are constants;  $Q_1, Q_2, Q_3$  is the triplet of operators in table 1 under number  $k$ .

When one calculates the commutators on the left-hand sides of equalities (3.25) and equates the coefficients to zero at linearly independent operators  $J_{\mu\nu}$  and  $P_\mu$ , one obtains a system of algebraic equations for  $\theta_i^{\mu\nu}$  and  $\theta_i^\mu$ . The solution of these equations gives the explicit expression for the basis operators of the algebras  $A_1$  to  $A_{26}$ .

The next step is the calculation of the factor algebras  $\{A_i/Q_i, i = 1, \dots, 26\}$ , which generate the invariance groups of the reduced equations (3.24). We shall realize the above scheme for the algebra  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ , the remaining algebras being treated in the same way. To do this one needs the commutation relations of the algebra  $AP(1,3)$  [31],

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}), \\ [P_\mu, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha), \quad [P_\mu, P_\nu] = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Relations (3.25) are rewritten for  $Q_1 = P_0, Q_2 = P_1, Q_3 = P_2$  in the following way:

$$\begin{aligned} [P_0, \theta_1^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_1^\mu P_\mu] &= \lambda_{11}^1 P_0 + \lambda_{11}^2 P_1 + \lambda_{11}^3 P_2, \\ [P_1, \theta_1^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_1^\mu P_\mu] &= \lambda_{21}^1 P_0 + \lambda_{21}^2 P_1 + \lambda_{21}^3 P_2, \\ [P_2, \theta_1^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta_1^\mu P_\mu] &= \lambda_{31}^1 P_0 + \lambda_{31}^2 P_1 + \lambda_{31}^3 P_2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Taking into account relations (3.26) one obtains the following equalities:

$$\begin{aligned} 2i\theta_1^{0\mu} P_\mu &= \lambda_{11}^1 P_0 + \lambda_{11}^2 P_1 + \lambda_{11}^3 P_2, \\ -2i\theta_1^{1\mu} P_\mu &= \lambda_{21}^1 P_0 + \lambda_{21}^2 P_1 + \lambda_{21}^3 P_2, \\ -2i\theta_1^{2\mu} P_\mu &= \lambda_{31}^1 P_0 + \lambda_{31}^2 P_1 + \lambda_{31}^3 P_2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

whence it follows that  $\theta_1^{03} = \theta_1^{13} = \theta_1^{23} = 0$ ,  $\theta_1^{01}$ ,  $\theta_1^{02}$ ,  $\theta_1^{12}$ ,  $\theta_1^\mu$  are arbitrary real parameters. Consequently, the set of linearly independent solutions of the system (3.27) is exhausted by the operators

$$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle = A_1,$$

whence one obtains

$$A_1 / \langle P_0, P_1, P_2 \rangle = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, P_3 \rangle. \quad (3.29)$$

To construct the invariance algebra of eq. (1) of (3.24) it is necessary to rewrite the operators (3.29) in the new variables  $\omega$ ,  $\varphi$ . As a result one has

$$(1) \quad \langle \gamma_0 \gamma_1, \gamma_0 \gamma_2, \gamma_1 \gamma_2, \partial_\omega \rangle.$$

The invariance algebras of the other equations of (3.24) are as follows:

$$(2) \quad \langle \gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_3, \partial_\omega \rangle;$$

$$(3) \quad \langle \gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3), \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3), \gamma_1 \gamma_2, \omega \partial_\omega - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3, \partial_\omega \rangle;$$

$$(4) \quad \langle \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(5) \quad \langle \partial_\omega \rangle;$$

$$(6) \quad \langle \gamma_0 \gamma_3, \partial_\omega \rangle;$$

$$(7) \quad \langle 2\alpha \partial_\omega - \gamma_0 \gamma_3 \rangle;$$

$$(8) \quad \langle \gamma_0 \gamma_3 \rangle;$$

$$(9) \quad \langle \partial_\omega, \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(10) \quad \langle \partial_\omega, \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(11) \quad \langle \partial_\omega, \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(12) \quad \langle \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3), \omega^{-1} \gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3), \omega \partial_\omega - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \rangle;$$

$$(13) \quad \langle (\gamma_1 + \alpha \gamma_2)(\gamma_0 + \gamma_3), \omega^{-1} \gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3), \omega \partial_\omega - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \rangle;$$

$$(14) \quad \langle \gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3), \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3), \partial_\omega \rangle;$$

$$(15) \quad \langle \partial_\omega, \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3) \rangle;$$

$$(16) \quad \langle \partial_\omega \rangle;$$

$$(17) \quad \langle \gamma_0 \gamma_3 \rangle;$$

$$(18) \quad \langle \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(19) \quad \langle \omega \partial_\omega - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3, \omega^{-1} \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3), \omega^{-2} \gamma_2 (\gamma_0 + \gamma_3), \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(20) \quad \langle [\omega(\omega + \beta) - \alpha]^{-1} (\gamma_0 + \gamma_3) [(\omega + \beta) \gamma_1 - \gamma_2], \\ [\omega(\omega + \beta) - \alpha]^{-1} (\gamma_0 + \gamma_3) (\omega \gamma_2 - \alpha \gamma_1), \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(21) \quad \langle \omega^{-1} \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3), [\omega(\omega + \beta)] (\gamma_0 + \gamma_3) (\omega \gamma_2 - \gamma_1) \rangle; \quad (3.30)$$

$$(22) \quad \langle \omega^{-1} \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3), (\omega + 1)^{-1} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_2 \rangle;$$

$$(23) \quad \langle \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(24) \quad \langle \partial_\omega, \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3) \rangle;$$

$$(25) \quad \langle \gamma_1 \gamma_2 \rangle;$$

$$(26) \quad \langle \gamma_1 \gamma_2 \rangle.$$

Here  $\langle Q_1, \dots, Q_s \rangle$  denotes the set of all linear combinations of the operators  $Q_1, \dots, Q_s$ .

Let us note that the Lie algebras (3.30) are not, in general, the maximal invariance algebras of the equations of (3.24). As an example we shall consider eq. (3). By direct verification one can check that this equation is invariant under the infinite-parameter group of the form

$$\omega' = \omega, \quad \varphi' = \exp\{[f_1(\omega)\gamma_1 + f_2(\omega)\gamma_2](\gamma_0 + \gamma_3)\}\varphi, \quad (3.31)$$

where  $f_i(\omega)$  are arbitrary smooth functions; the Lie group generated by the operators  $\gamma_1(\gamma_0 + \gamma_3)$ ,  $\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3)$  in line (3) of (3.30) is a two-parameter subgroup of the group (3.31).

Nevertheless, the information obtained about the symmetry of the ODE (3.24) proves to be very useful while constructing their particular solutions. Besides if an ODE has a lagrangian then one can construct its first integrals using Noether's theorem.

Let us also stress that an arbitrary Poincaré-invariant equation for a spinor field, after being reduced to systems of ODE with the help of the ansätze of table 1, possesses the symmetry (3.30).

Let us turn to the system (3.14). Substitution of the ansätze (3.18)–(3.21) into (3.14) gives rise to the following systems of equations for the spinors  $\varphi_1, \dots, \varphi_9$ :

$k = 1$ :

$$(1) \quad i\gamma_1 \dot{\varphi}_1 = \Phi_2(\bar{\varphi}_1, \varphi_1);$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} i z_2^{-1/2} \gamma_2 \varphi_2 + 2i\gamma_2 z_2^{1/2} \dot{\varphi}_2 = \Phi_2(\bar{\varphi}_2, \varphi_2);$$

$$(3) \quad -i\gamma_0 \dot{\varphi}_3 = \Phi_2(\bar{\varphi}_3, \varphi_3);$$

$$(4) \quad -i\gamma_1 \dot{\varphi}_4 = \Phi_2(\bar{\varphi}_4, \varphi_4); \quad (3.32)$$

$$(5) \quad \frac{1}{2} i z_5^{-1/2} \gamma_2 \varphi_5 + 2i z_5^{1/2} \gamma_2 \dot{\varphi}_5 = -\Phi_2(\bar{\varphi}_5, \varphi_5);$$

$$(6) \quad -i\gamma_1 \dot{\varphi}_6 = \Phi_2(\bar{\varphi}_6, \varphi_6);$$

$$(7) \quad \frac{1}{2} i z_7^{-1/2} \gamma_2 \varphi_7 + 2i z_7^{1/2} \gamma_2 \dot{\varphi}_7 = -\Phi_2(\bar{\varphi}_7, \varphi_7);$$

$k \in \mathbb{R}^1$ :

$$(8) \quad i\gamma_1 \dot{\varphi}_8 = \Phi_2(\bar{\varphi}_8, \varphi_8);$$

$$(9) \quad \frac{1}{2}iz_9^{-1/2}\gamma_2\varphi_9 + 2iz_9^{1/2}\gamma_2\dot{\varphi}_9 = \Phi_2(\bar{\varphi}_9, \varphi_9),$$

where  $\varphi_l = \varphi_l(z_l)$ ,  $z_l$  being determined by formulae (3.18)–(3.21).

Following ref. [24] we obtain via direct reduction of (3.16) to ODE equations of the form (the number of PDE from which the ODE is obtained is given in parentheses)

$$(1) \quad \frac{1}{2}(1 - 2k)\gamma_3\varphi + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi) \quad (5);$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_3\omega_2^{-1/2})\varphi + 2\gamma_3\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_2} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi) \quad (8);$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}[(1 - 2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3\omega_2]\varphi + \quad (3.33)$$

$$+ 2\omega_2^{1/2}(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi) \quad (9);$$

$$(4) \quad -k\gamma_0\varphi + (\gamma_1 - \omega_1\gamma_0)\varphi_{\omega_1} = -i\Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi) \quad (12).$$

So we have constructed systems of ODE whose solutions, when substituted into corresponding ansätze, give rise to exact solutions of the initial nonlinear Dirac equation.

*3.3. Exact solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation.* To integrate eqs. (3.24), (3.32) and (3.33) one can apply various methods. We restrict ourselves to those ODE which can be integrated in quadrature. Let us put  $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\psi$ ,  $\lambda$  and  $k$  const. Then the PDE (3.10) and (3.14) take the form

$$[\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}]\psi(x) = 0. \quad (3.34)$$

The PDE (3.34) was suggested by W. Heisenberg [4, 36] as a possible basic equation for the unified field theory. According to theorems 2 and 3 it is invariant under the extended Poincaré group  $P(1, 3)$ . In the case  $k = 3/2$ , eq. (3.34) admits the conformal group  $C(1, 3)$ . Therefore, to reduce the PDE (3.34) one can apply both the ansätze of table 1 and of table 2. As a result we obtain eqs. (3.24), (3.22) and (3.33), where

$$\Phi_1(\bar{\varphi}, \varphi) \equiv \Phi_2(\bar{\varphi}, \varphi) \equiv \lambda(\bar{\varphi}, \varphi)^{1/2k}\varphi.$$

If one multiplies ODE (3) of (3.24) by  $\gamma_0 + \gamma_3$  and uses the identity  $(\gamma_0 + \gamma_3)^2 = 0$ , then the following compatibility condition of eq. (3) of (3.24) appears:

$$(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi = 0,$$

whence it easily follows that  $\bar{\varphi}\varphi = 0$ . So  $\bar{\psi}\psi = \bar{\varphi}\varphi = 0$ , i.e., the factor  $(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}$  determining the nonlinear character of the PDE (3.34) vanishes. Analogous results hold for eqs. (12)–(14) and (19)–(22) of (3.24). Such solutions are not considered.

ODE (1), (2), (15), (16) and (24) of (3.24) are trivially integrated if one notes that the condition  $\bar{\varphi}\varphi = \text{const}$  holds. Let us consider, for example, eq. (1). After multiplying it by  $i\gamma_2$  one obtains

$$\dot{\varphi} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\gamma_2\varphi. \quad (3.35)$$

The conjugate spinor satisfies the following equation:

$$\dot{\bar{\varphi}} = -i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\bar{\varphi}\gamma_2. \quad (3.36)$$

Multiplying (3.35) by  $\bar{\varphi}$  and (3.36) by  $\varphi$  we come to the equality

$$(d/d\omega)(\bar{\varphi}\varphi) \equiv \dot{\bar{\varphi}}\varphi + \bar{\varphi}\dot{\varphi} = 0,$$

whence it follows that  $\bar{\varphi}\varphi = \text{const.}$  Consequently, the ODE (3.35) is equivalent to a linear one,

$$\dot{\varphi} = i\lambda C^{1/2k} \gamma_2 \varphi, \quad \bar{\varphi}\varphi = C,$$

whose general solution has the form  $\varphi(\omega) = \exp(i\lambda C^{1/2k} \gamma_2 \omega) \chi$ . Since  $\bar{\varphi}(\omega) = \bar{\chi} \exp(-i\lambda C^{1/2k} \gamma_2 \omega)$ , then  $\bar{\varphi}\varphi = \bar{\chi}\chi$  or  $\bar{\chi}\chi = C$ . Finally, the general solution of (3.35) takes the form

$$\varphi(\omega) = \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_2 \omega] \chi. \quad (3.37)$$

Hereafter  $\chi$  is an arbitrary constant spinor. Let us note that, taking into account the identity  $(i\gamma_2)^2 = 1$ , expression (3.37) can be rewritten in the following way:

$$\varphi(\omega) = \{\cosh[\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \omega] + i\gamma_2 \sinh[\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \omega]\} \chi.$$

The general solutions of eqs. (2), (15), (16) and (24) of (3.24) are constructed in the same way. Omitting intermediate calculations we write down the final result,

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \exp[-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_0 \omega] \chi, \\ \varphi(\omega) &= \exp\left[\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_1 \omega\right] \chi, \\ \varphi(\omega) &= \exp\left(\frac{i\lambda}{2(1+\alpha^2)}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma_2 - \alpha\gamma_1)\omega\right) \chi, \\ \varphi(\omega) &= \exp\{\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3) + i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma_2 - \beta(\gamma_0 + \gamma_3))\}\omega\} \chi. \end{aligned} \quad (3.38)$$

To construct the solution of ODE (6) of (3.24) we use its symmetry properties. Above it was established that this equation is invariant under the Lie algebra  $\langle \partial_\omega, \gamma_0 \gamma_3 \rangle$ . We look for the solution which is invariant under the group generated by the operator  $Q = \partial_\omega - \theta \gamma_0 \gamma_3$ ,  $\theta = \text{const.}$ , i.e.,  $\varphi(\omega)$  has to satisfy the additional constraint

$$Q\varphi \equiv (\partial_\omega - \theta \gamma_0 \gamma_3)\varphi = 0.$$

The general solution of the above equation is given by the formula

$$\varphi(\omega) = \exp(\theta \gamma_0 \gamma_3 \omega) \chi_1,$$

where  $\chi_1$  is an arbitrary constant spinor. Substituting this expression into the initial ODE one has

$$\left(\theta \gamma_1 \gamma_0 \gamma_3 - \frac{1}{2\alpha} \gamma_1 \gamma_4\right) \exp(\theta \gamma_0 \gamma_3 \omega) \chi_1 = -i\lambda \tau \exp(\theta \gamma_0 \gamma_3 \omega) \chi_1,$$

where  $\tau = (\bar{\chi}_1 \chi_1)^{1/2k}$ . Multiplying this equality by  $\exp(-\theta \gamma_0 \gamma_3)$  we come to the system of linear algebraic equations for  $\chi_1$ ,

$$\left(\theta \gamma_2 - \frac{1}{2\alpha} \gamma_1\right) \gamma_4 \chi_1 = -i\lambda \tau \chi_1. \quad (3.39)$$

The system (3.39) is diagonalized by the following substitution:

$$\chi_1 = \left[ \left( \theta \gamma_2 - \frac{1}{2\alpha} \gamma_1 \right) \gamma_4 - i\lambda\tau \right] \chi,$$

whence it follows that

$$\left( -\theta^2 - \frac{1}{4\alpha^2} + \lambda^2 \tau^2 \right) \chi = 0.$$

Consequently

$$\theta = \varepsilon(4\alpha^2 \tau^2 \lambda^2 - 1)^{1/2} / 2\alpha, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (3.40)$$

Imposing on  $\tau$  the condition  $\tau = (\bar{\chi}_1 \chi_1)^{1/2k}$  one obtains a nonlinear algebraic equation for  $\tau$ ,

$$\tau^{2k} = 2\lambda^2 \tau^2 (\bar{\chi} \chi) + 2i\lambda\tau\theta(\bar{\chi}\gamma_2\gamma_4\chi) - i\lambda\tau\alpha^{-1}(\bar{\chi}\gamma_1\gamma_4\chi). \quad (3.41)$$

Finally, the particular solution of ODE (6) of (3.34) takes the form

$$\varphi(\omega) = \exp(\theta\gamma_0\gamma_3\omega) \left[ \left( \theta \gamma_2 - \frac{1}{2\alpha} \gamma_1 \right) \gamma_4 - i\lambda\tau \right] \chi, \quad (3.42)$$

$\theta$  and  $\tau$  being determined by formulae (3.40) and (3.41).

An analogous method can be applied to construct solutions of equations (9–11), the result being

$$\varphi(\omega) = \exp(\theta\gamma_1\gamma_2\omega) \left[ \left( \theta \gamma_0 - \frac{1}{2\alpha} \gamma_3 \right) \gamma_4 - i\lambda\tau \right] \chi, \quad (3.43)$$

$\theta$  and  $\tau$  being determined by the formulae

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon(1 - 4\alpha^2 \lambda^2 \tau^2)^{1/2} / 2\alpha, \\ \tau^{2k} &= 2\lambda^2 \tau^2 (\bar{\chi} \chi) - i\lambda\tau\alpha^{-1}(\bar{\chi}\gamma_3\gamma_4\chi) + 2i\lambda\tau\theta(\bar{\chi}\gamma_0\gamma_4\chi); \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\varphi(\omega) = \exp(\theta\gamma_1\gamma_2\omega) \left[ \left( \theta \gamma_3 + \frac{1}{2\alpha} \gamma_0 \right) \gamma_4 - i\lambda\tau \right] \chi, \quad (3.45)$$

$\theta$  and  $\tau$  being determined by the formulae

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon(4\alpha^2 \lambda^2 \tau^2 + 1)^{1/2} / 2\alpha, \\ \tau^{2k} &= 2\lambda^2 \tau^2 (\bar{\chi} \chi) + 2i\lambda\tau\theta(\bar{\chi}\gamma_3\gamma_4\chi) + i\lambda\tau\alpha^{-1}(\bar{\chi}\gamma_0\gamma_4\chi); \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\varphi(\omega) = \exp(\theta\gamma_1\gamma_2\omega) [4\theta(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_4 + (\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4 - 4i\lambda\tau] \chi, \quad (3.47)$$

$\theta$  and  $\tau$  being determined by the formulae

$$\begin{aligned} \theta &= -\lambda^2 \tau^2, \\ \tau^{2k} &= 32\lambda^2 \tau^2 (\bar{\chi} \chi) + 8i\lambda\tau[\bar{\chi}(\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4\chi] - 32i\lambda^3 \tau^3 [\bar{\chi}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_4\chi]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Eq. (8) of (3.24) is, via the change of variables

$$\varphi(\omega) = \omega^{-1/4} \phi(\omega),$$

reduced to the following ODE:

$$2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot{\phi} = \lambda\omega^{-1/4k}(\bar{\phi}\phi)^{1/2k}\phi.$$

Multiplying it by  $\frac{1}{2}i\gamma_2\omega^{-1/2}$  we come to an equation of the form

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}i\lambda\omega^{-(1+2k)/4k}(\bar{\phi}\phi)^{1/2k}\phi,$$

whose general solution is given by the formulae

$$k \neq 1/2: \quad \phi(\omega) = \exp\left(\frac{2i\lambda k}{1-2k}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_2\omega^{(2k-1)/4k}\right)\chi,$$

$$k = 1/2: \quad \phi(\omega) = \exp\left[\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_2 \ln \omega\right]\chi.$$

So the general solution of ODE (8) has the form

$$k \neq 1/2: \quad \varphi(\omega) = \omega^{-1/4} \exp\left(\frac{2i\lambda k}{1-2k}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_2\omega^{(2k-1)/4k}\right)\chi, \quad (3.49)$$

$$k = 1/2: \quad \varphi(\omega) = \omega^{-1/4} \exp\left[\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)\gamma_2 \ln \omega\right]\chi.$$

Besides we have succeeded in integrating eqs. (4), (23) and (26) of (3.24) (for  $\alpha = 0$ ). These ODE can be written in the following way:

$$\frac{1}{2}m(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + [\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\dot{\varphi} = -i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi,$$

where for  $m = 1, 2, 3$  eqs. (4), (23), (26) of (3.24) are obtained. Multiplying both parts of the equality by  $\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3$ , comes to the ODE

$$4\omega\dot{\varphi} = -\{m(1 + \gamma_0\gamma_3) + i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\}\varphi, \quad (3.50)$$

and the equation for the conjugate spinor has the form

$$4\omega\dot{\bar{\varphi}} = -\bar{\varphi}\{m(1 - \gamma_0\gamma_3) - i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\}.$$

Multiplying the first equation by  $\bar{\varphi}$  and the second by  $\varphi$  one obtains the following relation:

$$4(\dot{\bar{\varphi}}\varphi + \bar{\varphi}\dot{\varphi}) = -2m\bar{\varphi}\varphi,$$

whence it follows that  $\bar{\varphi}\varphi = c\omega^{-m/2}$ ,  $C = \text{const}$ . Substitution of the above result into (3.50) gives rise to a linear equation for  $\varphi(\omega)$ ,

$$4\dot{\varphi} = -\{m(\gamma_0\gamma_3 + 1) + i\tau\omega^{-m/4k}[\omega(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\}\varphi,$$

where  $\tau = -\lambda C^{1/2k}$ . Writing this equality in components we obtain a system of ODE of the form

$$\begin{aligned} 2\omega\dot{\varphi}^0 &= i\tau\omega^{\alpha+1}\varphi^2, & 2\omega\dot{\varphi}^1 &= -m\varphi^1 + i\tau\omega^\alpha\varphi^3, \\ 2\omega\dot{\varphi}^2 &= -m\varphi^2 + i\tau\omega^\alpha\varphi^0, & 2\omega\dot{\varphi}^3 &= i\tau\omega^{\alpha+1}\varphi^1, \quad \alpha = -m/4k. \end{aligned} \quad (3.51)$$



It is not difficult to convince oneself that (3.51) is equivalent to the following system of ODE:

$$\begin{aligned}\omega^2 \ddot{\varphi}^0 + \frac{1}{2}(m - 2\alpha)\omega \dot{\varphi}^0 + \frac{1}{4}\tau^2 \omega^{2\alpha+1} \varphi^0 &= 0, \\ \omega^2 \ddot{\varphi}^3 + \frac{1}{2}(m - 2\alpha)\omega \dot{\varphi}^3 + \frac{1}{4}\tau^2 \omega^{2\alpha+1} \varphi^3 &= 0, \\ \varphi^2 &= -\frac{2i}{\tau} \omega^{-\alpha} \dot{\varphi}^0, \quad \varphi^1 = -\frac{2i}{\tau} \omega^{-\alpha} \dot{\varphi}^3.\end{aligned}$$

The first and the second equations of this system are Bessel-type equations.

For  $\alpha \neq -1/2$  their general solutions are determined by the formulae

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= \omega^{(2+\alpha-m)/4} [\chi^0 J_\nu(z) + \chi^2 Y_\nu(z)], \\ \varphi^3 &= \omega^{(2+\alpha-m)/4} [\chi^3 J_\nu(z) + \chi^1 Y_\nu(z)],\end{aligned}\tag{3.52}$$

where  $J_\nu, Y_\nu$  are Bessel functions,  $z = \tau\omega^{(2\alpha+1)/2}/(\alpha+1)$ ,  $\nu = (2\alpha-m+2)/2(1+2\alpha)$ .

Consequently

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \omega^{(2+2\alpha-m)/4} \left[ \frac{i(m-2\alpha-2)}{2\tau} \omega^{-\alpha-1} [\chi^0 J_\nu(z) + \chi^2 Y_\nu(z)] - \right. \\ &\quad \left. - i\omega^{-1/2} \left( \chi^0 \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \chi^2 \frac{dY_\nu(z)}{dz} \right) \right], \\ \varphi^1 &= \omega^{(2+2\alpha-m)/4} \left[ \frac{i(m-2\alpha-2)}{2\tau} \omega^{-\alpha-1} [\chi^3 J_\nu(z) + \chi^1 Y_\nu(z)] - \right. \\ &\quad \left. - i\omega^{-1/2} \left( \chi^3 \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \chi^1 \frac{dY_\nu(z)}{dz} \right) \right],\end{aligned}\tag{3.53}$$

where  $\chi^\mu = \text{const}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Formulae (3.52), (3.53) determine the general solution of the initial nonlinear system (3.50) if the following condition holds:

$$\bar{\varphi}\varphi \equiv \varphi^{0*}\varphi^2 + \varphi^{2*}\varphi^0 + \varphi^{3*}\varphi^1 + \varphi^{1*}\varphi^3 = C\omega^{-m/2}.$$

Substitution of (3.52), (3.53) into this formula yields the following equality:

$$\frac{2i(2\alpha+1)}{\tau\pi} (\chi^0 \chi^{2*} - \chi^2 \chi^{0*} + \chi^3 \chi^{1*} - \chi^1 \chi^{3*}) \omega^{-m/2} = C\omega^{-m/2},$$

where we used the well-known identity for Bessel functions

$$W[J_\nu, Y_\nu] \equiv J_\nu \frac{dY_\nu}{dz} - Y_\nu \frac{dJ_\nu}{dz} = 2/\pi z.$$

Comparing both sides of the equality one obtains

$$C = \frac{2i(2\alpha+1)}{\tau\pi} (\chi^{0*}\chi^2 - \chi^{2*}\chi^0 + \chi^3\chi^{1*} - \chi^1\chi^{3*}),$$

whence it follows that

$$C = \left( -\frac{i(m-2k)}{\pi k\lambda} (\chi^{0*}\chi^2 - \chi^0\chi^{2*} + \chi^{3*}\chi^1 - \chi^{1*}\chi^3) \right)^{2k/(2k+1)}.\tag{3.54}$$

For  $\alpha = -1/2$  ( $k = m/2$ ) one has to consider three cases,

- (1)  $(m - 1)^2 - 4\tau^2 \neq 0, \quad m = 2, 3;$
- (2)  $\tau \neq 0, \quad m = 1;$
- (3)  $\tau = \varepsilon(m - 1)/2, \quad \varepsilon = \pm 1.$

The general solution of the system (3.50) is given by the following formulae:

$$\begin{aligned} (1) \quad \varphi^0 &= \chi^0 \omega^{\theta^+} + \chi^2 \omega^{\theta^-}, \quad \varphi^1 = -\frac{2i}{\tau} (\theta_+ \chi^3 \omega^{\theta^+} + \theta_- \chi^1 \omega^{\theta^-}) \omega^{-1/2}, \\ \varphi^2 &= -\frac{2i}{\tau} (\theta_+ \chi^0 \omega^{\theta^+} + \theta_- \chi^2 \omega^{\theta^-}) \omega^{-1/2}, \quad \varphi^3 = \chi^3 \omega^{\theta^+} + \chi^1 \omega^{\theta^-}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

where

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{4} \left( 1 - m \pm \sqrt{(m - 1)^2 - 4\tau^2} \right),$$

$\chi^0, \dots, \chi^3$  are arbitrary complex constants;  $\tau$  satisfies the equality  $(-1)^m i (\chi^{0*} \chi^2 - \chi^0 \chi^{2*} + \chi^{3*} \chi^1 - \chi^3 \chi^{1*}) [(m - 1)^2 - 4\tau^2]^{1/2} = \tau^{m+1} \chi^{-m}$ ;

$$\begin{aligned} (2) \quad \varphi^0 &= \chi^0 \cos \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right) + \chi^2 \sin \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right), \\ \varphi^1 &= -i \omega^{-1/2} \left[ \chi^1 \cos \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right) - \chi^3 \sin \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right) \right], \\ \varphi^2 &= -i \omega^{-1/2} \left[ \chi^2 \cos \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right) - \chi^0 \sin \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right) \right], \\ \varphi^3 &= \chi^3 \cos \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right) + \chi^1 \sin \left( \frac{1}{2} \tau \ln \omega \right), \end{aligned} \quad (3.56)$$

where  $\chi^0, \dots, \chi^3$  are constants;  $\tau$  satisfies the equality  $\tau = i\lambda (\chi^0 \chi^{2*} - \chi^2 \chi^{0*} + \chi^3 \chi^{1*} - \chi^1 \chi^{3*})$ ;

$$\begin{aligned} (3) \quad \varphi^0 &= \omega^{(1-m)/4} (\chi^0 + \chi^2 \ln \omega), \\ \varphi^1 &= \frac{1}{2\tau} i(m - 1) \omega^{-1/2} \varphi^3 + \frac{4i\varepsilon}{1 - m} \omega^{-(m+1)/4} \chi^1, \\ \varphi^2 &= \frac{1}{2\tau} i(m - 1) \omega^{-1/2} \varphi^0 + \frac{4i\varepsilon}{1 - m} \omega^{-(m+1)/4} \chi^2, \\ \varphi^3 &= \omega^{(1-m)/4} (\chi^3 + \chi^1 \ln \omega), \quad \varepsilon = \pm 1, \end{aligned} \quad (3.57)$$

while the following equality holds:

$$2i(\chi^0 \chi^{2*} - \chi^{0*} \chi^2 + \chi^3 \chi^{1*} - \chi^{3*} \chi^1) = \lambda \left( \frac{m - 1}{2\varepsilon\lambda} \right)^{m+1} (-1)^m.$$

So the general solution of the system (3.50) [and consequently, of the systems (4), (23) and (26) of (3.24) ( $\alpha = 0$ )] is given by formulae (3.52), (3.53), for  $k \neq m/2$  and by formulae (3.55)–(3.57) for  $k = m/2$ .

Let us turn now to eqs. (3.32). The systems of ODE (1), (3), (4), (6) and (8) are integrated in the same way as eqs. (1) and (2) of (3.24). As a result one has

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \exp[i\lambda\gamma_1(\bar{\chi}\chi)^{1/2}z_1]\chi; & \varphi_2 &= \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_0z_3]\chi; \\ \varphi_j &= \exp[-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_1z_j]\chi, & j &= 4, 6; & \varphi_8 &= \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1z_8]\chi. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Equations (2), (5), (7) and (9) of (3.32) coincide with ODE (8) of (3.24) up to the sign of the nonlinear term  $\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi$ . Using this fact one easily obtains their general solutions,

$$\begin{aligned} \varphi_2(z_2) &= z_2^{-1/4} \exp[-2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_2z_2^{1/4}]\chi; \\ \varphi_j(z_j) &= z_j^{-1/4} \exp[2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_2z_j^{1/4}]\chi, & j &= 5, 7; \\ \varphi_9(z_9) &= z_9^{-1/4} \exp\left(\frac{2i\lambda k}{1-2k}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_2z_9^{(2k-1)/2k}\right)\chi. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Besides we have succeeded in integrating ODE (1) of (3.33) (for  $k = 1/2$ ) and (2) of (3.33). The final result has the form

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_2) &= \exp\left(\frac{i\lambda}{2(1+a^2)}(\bar{\chi}\chi)(\gamma_3 + a\gamma_2)\omega_2\right)\chi, \\ \varphi(\omega_2) &= \omega_2^{-1/4}[f_1 + \gamma_3f_2 + (\gamma_0 + \gamma_1)f_3 + \gamma_3(\gamma_0 + \gamma_1)f_4]\chi, \end{aligned}$$

where the functions  $f_i(\omega)$  are determined by the following equalities:

$k \neq 1/2$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= \cosh(\tau\omega_2^\alpha), & f_2 &= i \sinh(\tau\omega_2^\alpha), \\ f_3 &= \frac{1}{4}i \left( \cosh(\tau\omega_2^\alpha) \int^{\omega_2} \sinh(2\tau z^\alpha) dz - \sinh(\tau\omega_2^\alpha) \int^{\omega_2} \cosh(2\tau z^\alpha) dz \right), \\ f_4 &= \frac{1}{4}i \left( -\sinh(\tau\omega_2^\alpha) \int^{\omega_2} \sinh(2\tau z^\alpha) dz + \cosh(\tau\omega_2^\alpha) \int^{\omega_2} \cosh(2\tau z^\alpha) dz \right), \\ \tau &= \frac{2\lambda k(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}}{2k-1}, & \alpha &= \frac{2k-1}{4k}; \end{aligned} \quad (3.60)$$

$k = 1/2$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(2^\tau\omega_2^{\tau/2} + 2^{-\tau}\omega_2^{-\tau/2}), & f_2 &= \frac{1}{2}i(2^\tau\omega_2^{\tau/2} - 2^{-\tau}\omega_2^{-\tau/2}), \\ f_3 &= \frac{1}{4}i\omega_2^{1/2} \left( \frac{2^\tau\omega_2^{\tau/2}}{2\tau+1} - \frac{2^{-\tau}\omega_2^{-\tau/2}}{1-2\tau} \right), \\ f_4 &= \frac{1}{4}\omega_2^{1/2} \left( \frac{2^\tau\omega_2^{\tau/2}}{2\tau+1} + \frac{2^{-\tau}\omega_2^{-\tau/2}}{1-2\tau} \right), & \tau &= \lambda(\bar{\chi}\chi). \end{aligned} \quad (3.61)$$

The possibility of integrating the nonlinear systems of ODE (3.24), (3.22) and (3.33) in quadratures is closely connected with the nontrivial symmetry admitted by these equations. And this property, in its turn, is connected with the large invariance group admitted by the initial equation [in the present case the group  $\hat{P}(1,3)$ ]. That is why, when the symmetry properties of the equations are better, the group-theoretical

methods of constructing exact solutions are more effective. It is worth noting that other classical methods of constructing particular solutions (separation of variables, d'Alembert method and so on) use explicitly or implicitly the symmetry properties of PDE [30].

Substitution of the above results into the corresponding ansätze in tables 1 and 2 or into the ansätze (3.18)–(3.21) yields the exact solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation (3.34):

$k \in \mathbb{R}^1$ :

$$\psi_1(x) = \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_3x_3]\chi;$$

$$\psi_2(x) = \exp[-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_0x_0]\chi;$$

$$\psi_3(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_1(x_0 + x_3)\right] \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1[2x_1 + (x_0 + x_3)^2]\right\}\chi;$$

$$\psi_4(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_1(x_0 + x_3)\right] \times \\ \times \exp\left(\frac{i\lambda}{2(1 + \alpha^2)}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma_2 - \alpha\gamma_1)[2(x_2 - \alpha x_1) - \alpha(x_0 + x_3)^2]\right)\chi;$$

$$\psi_5(x) = \exp\left(\frac{x_1 - \alpha \ln(x_0 + x_3)}{2(x_0 + x_3)}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_1\right) \exp\left[\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right] \times \\ \times \exp\left\{[\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_3) + i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma_2 - \beta(\gamma_0 + \gamma_3))][x_2 - \beta \ln(x_0 + x_3)]\right\}\chi;$$

$$\psi_6(x) = \exp\left(\frac{x_2 + 2\alpha\theta x_1}{2\alpha}\gamma_0\gamma_3\right) \left[\left(\theta\gamma_0 - \frac{1}{2\alpha}\gamma_1\right)\gamma_4 - i\lambda\tau\right]\chi,$$

where  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ ;  $\theta$  and  $\tau$  being determined by formulae (3.40) and (3.41);

$$\psi_7(x) = \exp\left(\frac{2\alpha\theta x_3 - x_0}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right) \left[\left(\theta\gamma_0 - \frac{1}{2\alpha}\gamma_3\right)\gamma_4 - i\lambda\tau\right]\chi,$$

where  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ ;  $\theta$  and  $\tau$  being determined by formulae (3.44);

$$\psi_8(x) = \exp\left(\frac{x_3 + 2\alpha\theta x_0}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right) \left[\left(\theta\gamma_3 + \frac{1}{2\alpha}\gamma_0\right)\gamma_4 - i\lambda\tau\right]\chi,$$

where  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ ;  $\theta$  and  $\tau$  being determined by formulae (3.46);

$$\psi_9(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}[x_3 - x_0 + 4\theta(x_0 + x_3)]\gamma_1\gamma_2\right\} \times \\ \times [4\theta(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_4 + (\gamma_0 - \gamma_3)\gamma_4 - 4i\lambda\tau]\chi,$$

$\theta$  and  $\tau$  being determined by formulae (3.48);

$$\psi_{10}(x) = \exp\left\{\left[-\frac{1}{2}(\dot{\phi}_1\gamma_1 + \dot{\phi}_2\gamma_2) + \phi_3\gamma_4\right](\gamma_0 + \gamma_3)\right\} \times \\ \times \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\gamma_1(x_1 + \phi_1)]\chi,$$

where  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  are arbitrary smooth functions of  $x_0 + x_3$ .

$k \in \mathbb{R}^1, k \neq 1/2$ :

$$\psi_{11}(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right] \varphi(x_0^2 - x_3^2),$$

$\varphi(\omega)$  being determined by formulae (3.52)–(3.54) with  $m = 1$ ;

$$\begin{aligned} \psi_{12}(x) &= [(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]^{-1/4} \times \\ &\times \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 \gamma_1 + \dot{\phi}_2 \gamma_2) + \phi_3 \gamma_4 \right] (\gamma_0 + \gamma_3) \right\} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1 + \phi_1}{x_2 + \phi_2} \right) \times \\ &\times \exp \left( \frac{2i\lambda k}{1 - 2k} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \gamma_2 [(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]^{(2k-1)/4k} \right) \chi, \end{aligned}$$

where  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  are arbitrary smooth functions of  $x_0 + x_3$ ;

$$\begin{aligned} \psi_{13}(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right] \times \\ &\times [f_1 + \gamma_3 f_2 + (\gamma_0 + \gamma_1) f_3 + \gamma_3 (\gamma_0 + \gamma_1) f_4] \chi, \end{aligned}$$

where  $f_i = f_i(x_2^2 + x_3^2)$  are determined by formulae (3.60);

$k \in \mathbb{R}^1, k \neq 1$ :

$$\psi_{14}(x) = \exp \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right) \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right] \varphi(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2),$$

$\varphi(\omega)$  being given by formulae (3.52)–(3.54) with  $m = 2$ ;

$k \in \mathbb{R}^1, k \neq 3/2$ :

$$\psi_{15}(x) = \exp \left( \frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right) \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right] \varphi(x \cdot x),$$

$\varphi(\omega)$  being given by formulae (3.52)–(3.54) with  $m = 3$ ;

$k = 1/2$ :

$$\psi_{16}(x) = \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right] \varphi(x_0^2 - x_3^2),$$

$\varphi(\omega)$  being given by formulae (3.56);

$$\begin{aligned} \psi_{17}(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right] \times \\ &\times \exp \left( \frac{i\lambda}{2(1 + a^2)} (\bar{\chi}\chi) (\gamma_3 + a\gamma_2) \left[ \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right] \right) \chi; \end{aligned}$$

$k = 1$ :

$$\begin{aligned} \psi_{18}(x) &= \phi_0^{-1} \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{2} (\dot{\phi}_1 \gamma_1 + \dot{\phi}_2 \gamma_2) + \phi_3 \gamma_4 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \dot{\phi}_0 \phi_0^{-1} (\gamma_1 (x_1 + \phi_1) + \gamma_2 (x_2 + \phi_2)) \right] (\gamma_0 + \gamma_3) \right\} \times \\ &\times \exp \left( \frac{i\lambda}{\phi_0} (\bar{\chi}\chi)^{1/2} \gamma_1 (x_1 + \phi_1) \right) \chi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{19}(x) = & \phi_0^{-1/2}[(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]^{-1/4} \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{2}(\dot{\phi}_1\gamma_1 + \dot{\phi}_2\gamma_2) + \phi_3\gamma_4 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2}\dot{\phi}_0\phi_0^{-1}(\gamma_1(x_1 + \phi_1) + \gamma_2(x_2 + \phi_2)) \right] (\gamma_0 + \gamma_3) \right\} \times \\ & \times \exp \left( -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1 + \phi_1}{x_2 + \phi_2} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_2[(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]^{1/4}\phi_0^{-1/2} \right\} \chi; \end{aligned}$$

where  $\phi_0, \phi_2, \phi_3$  are arbitrary smooth functions  $x_0 + x_3$ ;

$$\begin{aligned} \psi_{20}(x) &= \frac{\gamma_0 x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{3/2}} \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_0 x_0(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1}] \chi; \\ \psi_{21}(x) &= \frac{\gamma_0 x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2}{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{3/2}} \exp[-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_1 x_1(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1}] \chi; \\ \psi_{22}(x) &= \frac{\gamma_0 x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2}{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2} (x_1^2 + x_2^2)^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right] \times \\ & \times \exp[2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_2(x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2}] \chi; \\ \psi_{23}(x) &= \frac{\gamma \cdot \mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2)^{3/2}} \exp[-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_1 x_1(\mathbf{x}^2)^{-1}] \chi; \\ \psi_{24}(x) &= \frac{\gamma \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2} (x_1^2 + x_2^2)^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right] \times \\ & \times \exp[2i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_2(x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(\mathbf{x}^2)^{-1/2}] \chi; \\ \psi_{25}(x) &= \exp \left( \frac{x_1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_1 \right) \times \\ & \times \exp \left[ \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right] \varphi(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2), \end{aligned}$$

$\varphi(\omega)$  being determined by formulae (3.55) or (3.57) with  $m = 2$ ;

$$\begin{aligned} \psi_{26}(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right] \times \\ & \times (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} [f_1 + \gamma_3 f_2 + (\gamma_0 + \gamma_1) f_3 + \gamma_3(\gamma_0 + \gamma_1) f_4] \chi, \end{aligned}$$

$f_i = f_i(x_2^2 + x_3^2)$  being given by formulae (3.61);

$k = 3/2$ :

$$\begin{aligned} \psi_{27}(x) = & \exp \left( \frac{1}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_0 + \gamma_3)(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \right) \times \\ & \times \exp \left[ \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3) \right] \varphi(x \cdot x), \end{aligned}$$

where  $\varphi(\omega)$  is determined by formulae (3.55) or (3.57) with  $m = 3$ .

Besides, in ref. [24] two other classes of exact solutions were obtained, essentially using ansatz (3.23) and the Heisenberg ansatz [14],

$k < 0$ :

$$\begin{aligned} \psi_{28}(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2}\gamma_1(\gamma_0 - \gamma_2)(x_0 - x_2) \right] \left\{ \left[ (\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2))(x_3 + \beta(x_0 - x_2)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}\gamma_1(2x_1 + (x_0 - x_2)^2) \right] f(\omega) + ig(\omega) \right\} \chi; \end{aligned}$$

$k = 1/2$ :

$$\begin{aligned} \psi_{29}(x) = & \exp \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right] \times \\ & \times \left[ (\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2))(x_3 + \beta(x_0 - x_2)) + \frac{1}{2} \gamma_1 (2x_1 + (x_0 - x_2)^2) \right] \omega^{-1} \times \\ & \times \exp \left( \frac{i\lambda(\bar{\chi}\chi)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} \{ \beta_1 [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] + \beta_2 \gamma_1 \} \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \beta_1 [x_3 + \beta(x_0 - x_2)] + \frac{1}{2} \beta_2 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \right\} \omega^{-1} \right) \chi, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \omega = & [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + \frac{1}{4} [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]^2, \\ f(\omega) = & |k|^{-1/2} \left( \mp \frac{(1-k)^{1/2}}{\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right)^k \omega^{-(k+1)/2}, \\ g(\omega) = & \pm (1-k)^{1/2} \left( \mp \frac{(1-k)^{1/2}}{\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right)^k \omega^{-k/2}, \end{aligned}$$

$\beta$ ,  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are arbitrary constants.

The existence of exact solutions depending on arbitrary functions is connected with the fact that the additional constraint

$$(p_0 + p_3)\psi(x) = 0$$

selects the subset of solutions of the Dirac–Heisenberg equation admitting the infinite-dimensional algebra (3.17). As established in ref. [29], the large class of Poincaré-invariant equations (Bhabha-type equations)

$$[\beta_\mu p^\mu + m]\Psi(x) = 0, \quad m = \text{const}, \quad (3.62)$$

possess such a property. In (3.62)  $\Psi = \{\Psi^1, \dots, \Psi^n\}$ ,  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_l)$ ,  $l \geq 2$ ,  $\beta_\mu$  are  $n \times n$  matrices satisfying the conditions

$$\begin{aligned} [\beta_\alpha, S_{\mu\nu}] = & i(g_{\mu\alpha}\beta_\nu - g_{\nu\alpha}\beta_\mu), \quad S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), \\ g_{\mu\nu} = & \text{diag}(1, -1, \dots, -1, -1), \quad \alpha, \mu, \nu = 0, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.63)$$

It is well known that eq. (3.62) is invariant under the Poincaré algebra  $P(1, l)$  having basis operators of the form [46]

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} \partial / \partial x_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}.$$

We impose on  $\Psi(x)$  the additional constraint

$$(P_0 + P_l)\Psi(x) = 0,$$

from which an equation for  $\Psi(\omega) = \Psi(x_0 + x_l, x_1, \dots, x_{l-1})$  follows,

$$\left( i(\beta_0 + \beta_l) \partial_{\omega_0} + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j \partial_{\omega_j} + m \right) \Psi(\omega) = 0. \quad (3.64)$$

**Proposition 3.** Equation (3.64) is invariant under the infinite-dimensional Lie algebra with the following basis operators:

$$Q_1 = \partial_{\omega_0}, \quad Q_2 = \sum_{k=1}^{l-1} \left[ \phi^k(\omega_0) \partial_{\omega_k} + \frac{1}{2} i \dot{\phi}_k(\omega_0) (S_{kl} - S_{0k}) \right], \quad (3.65)$$

$$Q_{ab} = \omega_a \partial_{\omega_b} - \omega_b \partial_{\omega_a} + i S_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, l-1,$$

where  $\partial_{\omega_\mu} = \partial / \partial \omega_\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, l-1$ ,  $\dot{\phi}^k = d\phi^k / d\omega_0$ ,  $\phi^k(\omega)$  are arbitrary functions.

**Proof.** For linear equations the following statement holds [31]: An operator  $Q$  is the symmetry operator of the linear equation

$$L(x)\Psi = 0$$

iff there exists a matrix  $R(x)$  such that

$$[Q, L] = R(x)L.$$

We shall prove that

$$[Q, L] = 0. \quad (3.66)$$

If  $Q \in \langle Q_1, Q_{ab} \rangle$ , then the statement is quite evident. Let us consider the case  $Q = Q_2$ . If we shall show that  $(\beta_0 + \beta_l)(S_{0k} - S_{kl}) = 0$ , then proposition 3 will be proved. Choosing  $k = 1$  one has

$$\begin{aligned} (\beta_0 + \beta_l)(S_{01} - S_{1l}) &= i(\beta_0 + \beta_l)(\beta_0\beta_1 - \beta_1\beta_0 - \beta_1\beta_l + \beta_l\beta_1) = \\ &= i(\beta_0\beta_0\beta_1 - \beta_0\beta_1\beta_0) + i(\beta_1\beta_l\beta_1 - \beta_l\beta_1\beta_l) + \\ &+ i(\beta_l\beta_0\beta_1 - \beta_0\beta_1\beta_l) + i(\beta_0\beta_l\beta_1 - \beta_l\beta_1\beta_0) = \\ &= i\beta_1 - i\beta_1 = 0. \end{aligned}$$

The cases  $k = 2, 3, \dots, l-1$  are treated in the same way.

**Consequence.** On the set of solutions of eq. (3.64) the following representation of the Galilei algebra  $AG(1, l-1)$  is realized:

$$P_0 = i\partial_{\omega_0}, \quad P_a = -i\partial_{\omega_a}, \quad J_{ab} = \omega_a P_b - \omega_b P_a + S_{ab},$$

$$G_a = \omega_0 P_a + \frac{1}{2}(S_{al} - S_{0a}), \quad a, b = 1, \dots, l-1.$$

**Note 1.** In general, the algebra (3.65) is not a maximal invariance algebra of (3.64). As an example one can take eq. (13) of (3.16), whose symmetry is described by proposition 1. Other examples are given in refs. [27, 29].

**Note 2.** Proposition 3 holds true for Poincaré-invariant generalizations of the Bhabha equation of the form

$$[\beta_\mu p^\mu + F(\Psi^*, \Psi)]\Psi(x) = 0.$$

This makes it possible to construct exact solutions of the above nonlinear equations including arbitrary functions with the help of the procedure of generating solutions [27, 29]. By a special choice of the arbitrary functions one can pick out classes of solutions possessing some additional properties.



Choosing in  $\psi_{18}(x)$

$$\phi_0 \equiv \exp[\theta^2(x_0 + x_3)^2], \quad \theta = \text{const}, \quad \phi_1 \equiv \phi_2 \equiv \phi_3 \equiv 0,$$

one obtains the following solution of the Dirac–Heisenberg equation:

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \exp[-\theta^2(x_0 + x_3)^2][I + \theta^2(x_0 + x_3)(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)(\gamma_0 + \gamma_3)] \times \\ & \times \exp\{i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_1 x_1 \exp[-\theta^2(x_0 + x_3)^2]\}\chi. \end{aligned} \quad (3.67)$$

This solution is not localized in  $\mathbb{R}^3$  but it is localized inside an infinite cylinder with its axis parallel to the  $Ox_3$  axis. Moreover (3.67) decreases exponentially in all points of  $\mathbb{R}^3$  as  $x_0 \rightarrow +\infty$ .

Let us mention that for  $\theta = 0$  takes the form

$$\psi(x) = \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2}\gamma_1 x_1]\chi. \quad (3.68)$$

Consequently, (3.67) can be considered as a perturbation of the stationary state (3.68).

**3.4. Nongenerable families of solutions of the nonlinear Dirac equation.** The solutions  $\psi_1(x)$ – $\psi_{29}(x)$  depend on the variables  $x_\mu$  in an asymmetrical way, while in the Dirac–Heisenberg equation all independent variables have equal rights. Using physical language one can say that the system (3.34) is solved in some fixed reference system. To obtain solutions (more precisely families of solutions) which do not depend on the chosen reference system it is necessary to apply a procedure of generating solutions by a group of transformations [21, 47]. This procedure is based on the following statement.

Let eq. (3.34) be invariant under the group of transformations

$$\psi'(x') = A(x, \theta)\psi(x), \quad x'_\mu = f_\mu(x, \theta), \quad (3.69)$$

where  $A(x, \theta)$  is an invertible  $4 \times 4$  matrix,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  are group parameters. Besides there is some solution  $\psi = \psi_I(x)$  of eq. (3.34).

**Proposition 4.** *The spinor  $\psi_{II}(x)$ ,*

$$\psi_{II}(x) = A^{-1}(x, \theta)\psi_I(f(x, \theta)), \quad (3.70)$$

*satisfies eq. (3.34) too.*

The proof can be found in refs. [21, 32].

We call formula (3.70) the solutions generating formula. Let us mention the solution generating formulae with transformations of the conformal group  $C(1, 3)$ .

(1) The group of translations,

$$\psi_{II}(x) = \Psi_I(x'), \quad x'_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \quad \theta_\mu = \text{const}, \quad (3.71)$$

(2) the Lorentz group  $O(1, 3)$ ,

(a) the group of rotations

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) = & \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\theta_a S_{bc}\right)\psi_I(x'), \\ x'_0 = & x_0, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cos \theta - \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}}{\theta} \sin \theta + \frac{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x})}{\theta^2}(1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (3.72a)$$

$$\theta_k = \text{const}, \quad \theta = (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta})^{1/2}, \quad S_{ab} = \frac{1}{4}i(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a),$$

(b) the Lorentz transformations,

$$\begin{aligned}\psi_{II}(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_a\right)\psi_I(x'), \\ x'_0 &= x_0 \cosh \theta + x_a \sinh \theta, \quad x'_a = x_a \cosh \theta + x_0 \sinh \theta, \\ x'_b &= x_b, \quad b \neq a, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad \theta = \text{const};\end{aligned}\tag{3.72b}$$

(3) the group of scale transformations,

$$\psi_{II}(x) = e^{k\theta}\psi_I(x'), \quad x'_\mu = e^\theta x_\mu, \quad \theta = \text{const};\tag{3.73}$$

(4) the group of special conformal transformations,

$$\begin{aligned}\psi_{II}(x) &= \sigma^{-2}(x)[1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \theta)]\psi_I(x'), \\ x'_\mu &= [x_\mu - \theta_\mu(x \cdot x)]\sigma^{-1}(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{3.74}$$

where  $\sigma(x) = 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x)$ ,  $\theta_\mu = \text{const}$ .

As an example we shall consider the procedure of generating the solution  $\psi_1(x)$ , the remaining cases being treated in an analogous way. Let us apply to  $\psi_1(x)$  formula (3.72b) with  $a = 3$ ,

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3\right)\exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(x_3 \cosh \theta + x_0 \sinh \theta)\gamma_3]\chi.$$

Rewriting the above formula in the equivalent form one obtains

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3\right)\exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(x_3 \cosh \theta + x_0 \sinh \theta)\gamma_3] \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3\right)\chi.\end{aligned}$$

Taking into account the identities

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3\right)\gamma_\mu\exp\left(\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3\right) = \begin{cases} \gamma_0 \cosh \theta + \gamma_3 \sinh \theta, & \mu = 0, \\ \gamma_3 \cosh \theta + \gamma_0 \sinh \theta, & \mu = 3, \\ \gamma_\mu, & \mu = 1, 2, \end{cases}$$

one has

$$\psi_{II}(x) = \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma_3 \cosh \theta + \gamma_0 \sinh \theta)(x_3 \cosh \theta + x_0 \sinh \theta)]\tilde{\chi},$$

where  $\tilde{\chi} = \exp(-\frac{1}{2}\theta\gamma_0\gamma_3)\chi$ . Using formula (3.72a) one comes to the following family of solutions:

$$\psi_{II}(x) = \exp[i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot d)(d \cdot x)]\chi.\tag{3.75}$$

Hereafter  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_\mu$  and  $d_\mu$  are arbitrary real parameters satisfying the relations

$$-a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = d \cdot d = -1, \quad a \cdot b = a \cdot c = a \cdot d = b \cdot c = b \cdot d = c \cdot d = 0\tag{3.76}$$

[in other words, the four-vectors  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  create an orthonormal basis in the Minkowski space  $\mathbb{R}(1, 3)$ ]. It is not difficult to verify that the family (3.74) is invariant under the transformations (3.71), (3.73).

Solution (3.75) depends on the variables  $x_\mu$  in a symmetrical way and its form is not changed both under a transition from one inertial reference system to another and under a change of the scale according to formula (3.73). In other words, we have constructed a  $\tilde{P}(1, 3)$ -nongenerable family of solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation (the corresponding definition is given in ref. [48]). The transition from the solution  $\psi_1(x)$  to the family of solutions (3.75) seems to be very important because one obtains a class of exact solutions having the same symmetry as the equation of motion (3.34).

Generating  $\psi_2(x)$ – $\psi_5(x)$  we obtain the following  $\tilde{P}(1, 3)$ -nongenerable families of solutions of eq. (3.34):

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \exp[-i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot a)(a \cdot x)]\chi; \\ \psi_3(x) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\theta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)(\gamma \cdot b)(a \cdot z + d \cdot z)\right] \times \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2}i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot b)[2b \cdot z + \theta(a \cdot z + d \cdot z)^2]\right\}\chi; \\ \psi_4(x) &= \exp\left[-\frac{1}{2}\theta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)(\gamma \cdot b)(a \cdot z + d \cdot z)\right] \exp\left(\frac{i\lambda}{2(1 + \alpha^2)}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k} \times \right. \\ &\quad \left. \times (\gamma \cdot c - \alpha\gamma \cdot b)[2(c \cdot z - \alpha b \cdot z) - \alpha\theta(a \cdot z + d \cdot z)^2]\right)\chi; \\ \psi_5(x) &= \exp\left(\frac{\theta b \cdot z - \alpha \ln[\theta(a \cdot z + d \cdot z)]}{2\theta(a \cdot z + d \cdot z)}(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)\gamma \cdot b\right) \times \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot d) \ln[\theta(a \cdot z + d \cdot z)]\right\} \times \\ &\quad \times \exp\{[(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) + i\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}][\gamma \cdot c - \beta(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)]\} \times \\ &\quad \times [c \cdot z - (\beta/\theta) \ln[\theta(a \cdot z + d \cdot z)]]\chi, \end{aligned}$$

where  $z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ;  $\alpha, \beta, \theta, \theta_\mu = \text{const.}$

If in (3.34)  $k = 3/2$ , then the equation is invariant under the conformal group  $C(1, 3)$ . Therefore one can generate solutions by the transformations (3.74). Generating solutions  $\psi_1(x)$ – $\psi_{14}(x)$  (for  $k = 3/2$ ) one comes to  $C(1, 3)$ -nongenerable families of solutions. The corresponding formulae are omitted because of their cumbersome character.

*3.5. Conditionally invariant solutions of the Dirac–Heisenberg equation.* As emphasized in refs. [37, 42] additional constraints enlarging the symmetry of the equation are not necessarily differential ones. Let us impose on the solutions of PDE (3.34) an algebraic condition  $\bar{\psi}\psi = 1$ , i.e., we consider the over-determined system

$$[\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}]\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}\psi = 1,$$

or

$$(\gamma_\mu p^\mu - \lambda)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}\psi = 1. \tag{3.77}$$

**Proposition 5.** *The system (3.77) is conditionally invariant under the operators  $Q_1 = p_0 - \lambda\gamma_0$ ,  $Q_2 = p_3 - \lambda\gamma_3$ .*

**Proof.** According to the definition of conditional invariance it is to be proved that the system

$$(\gamma_\mu p^\mu - \lambda)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}\psi = 1, \quad Q_1\psi = 0 \quad (3.78)$$

is invariant in the Lie sense [32] under the group of transformations generated by  $Q_1$ . Acting on the system (3.78) with the extended operator  $\tilde{Q}_1$  [32] one obtains

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1\bar{\psi}\psi &= 0, \quad \tilde{Q}_1(p_0\psi - \lambda\gamma_0\psi) = 0, \\ \tilde{Q}_1(\gamma_\mu p^\mu\psi - \lambda\psi) &= i\lambda\gamma_0(\gamma_\mu p^\mu\psi - \lambda\psi) - 2i\lambda(p_0\psi - \lambda\gamma_0\psi), \end{aligned}$$

whence it follows that the statement holds true. The case of the operator  $Q_2$  is treated in the same way.

Let us perform a reduction of the system (3.37) using the above statement. Integration of the equation  $Q_1\psi = 0$  yields the following ansatz:

$$\psi(x) = \exp(-i\lambda\gamma_0 x_0)\varphi(\mathbf{x}). \quad (3.79)$$

Substituting (3.79) into (3.77) one obtains

$$\gamma_1\varphi_{x_1} + \gamma_2\varphi_{x_2} + \gamma_3\varphi_{x_3} = 0, \quad \bar{\varphi}\varphi = 1. \quad (3.80)$$

Analogously integration of the equation  $Q_2\psi = 0$  yields the ansatz

$$\psi(x) = \exp(i\lambda\gamma_3 x_3)\varphi(x_0, x_1, x_2), \quad (3.81)$$

$\varphi(x_0, x_1, x_2)$  satisfying a PDE of the form

$$\gamma_0\varphi_{x_0} + \gamma_1\varphi_{x_1} + \gamma_2\varphi_{x_2} = 0, \quad \bar{\varphi}\varphi = 1. \quad (3.82)$$

If one chooses in (3.80)  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ , then the obtained two-dimensional PDE can be integrated. Its general solution is given by

$$\varphi = (\varphi^0(z^*), \varphi^1(z), \varphi^2(z^*), \varphi^3(z))^T,$$

where  $\varphi^1, \varphi^3$  ( $\varphi^0, \varphi^2$ ) are arbitrary analytical (anti-analytical) functions.

Imposing on  $\varphi$  the condition  $\bar{\varphi}\varphi = 1$  [we use the form (1.2b) of the  $\gamma$ -matrices] one comes to the following relation for  $\varphi^\mu$ :

$$|\varphi^0|^2 + |\varphi^1|^2 - |\varphi^2|^2 - |\varphi^3|^2 = 1, \quad |\varphi^\mu|^2 = \varphi^{\mu*}\varphi^\mu. \quad (3.83)$$

Analogously choosing in (3.82)  $\varphi = \varphi(x_0, x_1)$  and integrating the obtained equation one has

$$\varphi = (h_0 + g_0, h_0 - g_0, h_1 + g_1, -h_1 + g_1)^T,$$

where

$$\begin{aligned} h_\mu &= h_\mu^1(x_0 + x_3) + ih_\mu^2(x_0 + x_3), \\ g_\mu &= g_\mu^1(x_0 - x_3) + ig_\mu^2(x_0 - x_3), \quad \mu = 0, 1, \end{aligned}$$

$h_\mu^i, g_\mu^i$  are arbitrary smooth functions. From  $\bar{\varphi}\varphi = 1$  it follows that  $h_\mu^i, g_\mu^i$  satisfy the equality

$$h_1^1 g_0^1 + h_1^2 g_0^2 + h_0^1 g_1^1 + h_0^2 g_1^2 = \frac{1}{4}. \quad (3.84)$$

It is easy to convince oneself that (3.83), (3.84) can be written in the form

$$A_l(\xi)B_l(\eta) = C \quad (3.85)$$

(summation over repeated indices from 1 to 4 is implied).

**Lemma.** *The general solution of the algebraic equation (3.85) is given by formulae*

$$(a) \quad A_k = \theta_k(\phi_l\theta_l) - \phi_k(\theta_l\theta_l) + C\theta_k/(\theta_l\theta_l), \quad B_k = \theta_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.86)$$

where  $\theta_k = \text{const}$ ,  $\theta_k = \phi_k(\xi)$  are arbitrary functions;

$$(b) \quad \begin{aligned} A_1 &= C_1\phi + C_4, & A_2 &= C_2\phi + C_5, & A_3 &= C_3\phi + C_6, & A_4 &= \phi, \\ B_1 &= \rho_1, & B_2 &= \rho_2, & B_3 &= C_6^{-1}(C - C_4\rho_1 - C_5\rho_2), \\ B_4 &= C_6^{-1}[(C_3C_4 - C_1C_6)\rho_1 + (C_3C_5 - C_2C_6)\rho_2 - CC_3], \end{aligned} \quad (3.87)$$

where  $C_1, \dots, C_6$  are constants,  $\phi = \phi(\xi)$ ,  $\rho_i = \rho_i(\eta)$  are arbitrary functions;

(c) *two other classes of solutions are obtained via the transposition  $A_k \rightarrow B_k$ ,  $B_k \rightarrow A_k$  in formulae (3.86), (3.87).*

The proof is rather formal; therefore it is omitted.

Using formulae (3.79), (3.81), (3.86) and (3.87) we constructed the following classes of exact solutions of the initial PDE:

$$\psi(x) = \exp(-i\lambda\gamma_0x_0) \begin{pmatrix} e^{iC_1} \\ e^{iC_2}\phi(z) \\ e^{iC_4}\phi(z^*)\cos C_3 \\ e^{iC_5}\phi(z)\sin C_3 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

where  $\{C_1, \dots, C_5\} \subset \mathbb{R}^1$ ,  $\phi$  is an arbitrary analytical function,

$$\psi(x) = \exp(i\lambda\gamma_3x_3) \begin{pmatrix} A_3 + B_1 + i(A_4 + B_2) \\ A_3 - B_1 + i(A_4 - B_2) \\ A_1 + B_3 + i(A_2 + B_4) \\ -A_1 + B_3 + i(-A_2 + B_4) \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

where the real functions  $A^l(x_0 + x_1)$ ,  $B^l(x_0 - x_1)$  are determined by formulae (3.86), (3.87) with  $C = 1/4$ .

It is worth noting that solutions (3.88), (3.89) are essentially different from  $\psi_1(x) - \psi_{29}(x)$ . They cannot be obtained with the help of the ansätze in tables 1 and 2.

**3.6. On scalar fields generated by the solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation.** In this subsection we construct a scalar field with spin  $s = 0$  using the exact solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation for a spinor field. The solutions obtained in this way prove to satisfy the nonlinear d'Alembert equation.

The scalar field generated by the solutions of PDE (3.34) is looked for in the form

$$u(x) = \bar{\psi}\psi e^{i\theta(x)}, \quad (3.90)$$

where  $\theta(x)$  is the phase of the field  $u(x)$ . For  $\psi_1 - \psi_{10}$  we have the equality

$$\bar{\psi}\psi = \text{const},$$

whence it follows that  $u(x) = Ce^{i\theta(x)}$ . Choosing  $\theta(x) = \tau a_\mu x^\mu$ ,  $\tau = \text{const}$ , one obtains the plane-wave solution

$$u(x) = Ce^{i\tau a_\mu x^\mu}. \quad (3.91)$$

So the spinors  $\psi_1 - \psi_{10}$  generate plane-wave solutions of the form (3.91) satisfying the following equation:

$$p_\mu p^\mu u(x) = F(|u|)u(x), \quad |u|^2 = u^*u. \quad (3.92)$$

We did not succeed in establishing a correspondence between the spinor fields  $\psi_{22}$ ,  $\psi_{24}$  and a scalar field  $u(x)$ . Spinor  $\psi_{19}$  generates a scalar field of the form

$$u(x) = C[\phi_0(x_0 + x_3)]^{-1}[(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]^{-1/2} \exp[i\phi_3(x_0 + x_3)],$$

where  $\phi_\mu$  are arbitrary smooth functions of  $x_0 + x_3$ . It is easy to check that the above function satisfies the nonlinear wave equation with variable coupling constant  $\kappa(x) = \tilde{\kappa}[\phi_0(x_0 + x_3)]^2$ ,  $\kappa = \text{const}$ , i.e.,

$$p_\mu p^\mu u(x) = \tilde{\kappa}[\phi_0(x_0 + x_3)]^2 |u|^2 u(x). \quad (3.93)$$

The remaining solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation (3.34) generate scalar fields satisfying the nonlinear d’Alembert equation

$$p_\mu p^\mu = \kappa |u|^\alpha u, \quad \kappa = \text{const}. \quad (3.94)$$

The corresponding results are given in table 3.

Table 3

No.	$u(x)$	$\alpha$
11	$C(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} \exp[i\phi_0(x_0 + x_3)]$	2
12	$C[(x_1 + \phi_1)^2 + (x_2 + \phi_2)^2]^{-1/2} \exp[i\phi_0(x_0 + x_3)]$	2
13	$C(x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \exp[i\rho(x_0 + x_1)]$	2
14	$C(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{-1}$	1
15	$C(x \cdot x)^{-3/2}$	2/3
16	$C(x_0^2 - x_3^2)^{-1/2}$	2
17	$C(x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \exp[i\rho(x_0 + x_1)]$	2
18	$C\phi_0^{-2}(x_0 + x_3) \exp[i(x_1 + \phi_1)]$	0
20	$C(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-2}$	1/2
21	$C(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-2}$	1/2
23	$C(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-2}$	1/2
25	$C(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{-1}$	1
26	$C(x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \exp[i\rho(x_0 + x_1)]$	2
27	$C(x \cdot x)^{-3/2}$	2/3
28	$C \left\{ [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + [x_1 + \frac{1}{2}(x_0 - x_2)]^2 \right\}^{-k}$	$1/k, k < 0$
29	$C \left\{ [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + [x_1 + \frac{1}{2}(x_0 - x_2)]^2 \right\}^{-1}$	1

$\phi_0, \phi_1, \phi_2$  are arbitrary smooth functions of  $x_0 + x_3$ ,  $\rho$  of  $x_0 + x_1$ ;  
 $C$  and  $\beta$  are constants.

Thus the spinors  $\psi_1$ – $\psi_{29}$  generate complex scalar fields satisfying the nonlinear d'Alembert equation (3.94). Let us note that (3.94) with  $\alpha = 2$  admits the conformal group  $C(1, 3)$ . Consequently the fields  $u(x)$  generated by the spinors  $\psi_{11}$ – $\psi_{13}$ ,  $\psi_{16}$ ,  $\psi_{17}$  and  $\psi_{26}$  satisfy the conformally invariant d'Alembert equation [though the Dirac–Heisenberg equation may not be invariant under the group  $C(1, 3)$ ].

Another interesting feature inherent to the fields  $u(x)$  is that  $u(x) \rightarrow 0$  as  $x_0 = \text{const}$ ,  $|x| \rightarrow +\infty$  (the only exception is  $\psi_{28}$ ). What is more, all the functions  $u(x)$  have a nonintegrable singularity.

#### 4. Exact solutions of the system of nonlinear Klein–Gordon–Dirac equations

In this section we construct multi-parameter families of exact solutions of the system of PDE describing the interaction of the spinor field  $\psi(x)$  and the complex scalar field  $u(x)$ ,

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = [\lambda_1 |u|^{k_1} + \lambda_2 (\bar{\psi}\psi)^{k_2}] \psi, \quad p_\mu p^\mu u = [\mu_1 |u|^{k_1} + \mu_2 (\bar{\psi}\psi)^{k_2}]^2 u, \quad (4.1)$$

where  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $|u| = (uu^*)^{1/2}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, k_1, k_2$  are constants.

Let us note that for  $\lambda_1 = \mu_2 = 0, k_1 = k_2 = 0$  the system of equations (4.1) decomposes into the Dirac equation with mass  $\lambda_2$  and the Klein–Gordon equation with mass  $\mu_1$ . For  $\lambda_1 = \mu_2 = 0, k_1 = 1, k_2 = 1/3$  one obtains the nonlinear conformally invariant Dirac–Gürsey [36] and d'Alembert [49] equations.

With the help of the Lie method one can prove that the system of equations (4.1) for arbitrary, non-null  $k_1, k_2$  is invariant under the extended Poincaré group. For  $k_1 = 1, k_2 = 1/3$  then (4.1) is invariant under the conformal group  $C(1, 3)$ . The above facts make it possible to apply the technique of group-theoretical reduction (as was done in the previous section). But we use another approach which essentially uses the connection between spinor and scalar fields established earlier and the ansatz

$$\psi(x) = \{ig_1(\omega) + g_2(\omega)\gamma_4 - [if_1(\omega) + f_2(\omega)\gamma_4]\gamma_\mu p^\mu \omega\} \chi, \quad (4.2)$$

where  $g_1, g_2, f_1, f_2$  are unknown real functions,  $\omega = \omega(x)$  is a scalar function satisfying the system of PDE

$$p_\mu p^\mu \omega + A(\omega) = 0, \quad (p_\mu \omega)(p^\mu \omega) + B(\omega) = 0, \quad A, B: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1. \quad (4.3)$$

Ansatz (4.2) was suggested in refs. [23, 24] for the purpose of constructing exact solutions of the nonlinear Dirac equation. As shown in ref. [28] it can be used to obtain solutions of the system (4.1). The scalar field  $u(x)$  is looked for in the form

$$u(x) \sim C(\bar{\psi}\psi), \quad C = \text{const} \quad \text{or} \quad u(x) = \phi(x), \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^2). \quad (4.4)$$

Substitution of expressions (4.2), (4.4) into (4.1),  $\omega = \omega(x)$  satisfying (4.3), gives rise to the following system of ODE for  $g_i, f_i$  and  $\phi$ :

$$\begin{aligned} B\ddot{\phi} + A\dot{\phi} &= -\{\mu_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\mu}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2}\}^2 \phi, \\ B\dot{f}_1 + Af_1 &= \{\lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2}\} g_1, \\ \dot{g}_1 &= -\{\lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2}\} f_1, \\ \dot{g}_2 &= \{\lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2}\} f_2, \\ B\dot{f}_2 + Af_2 &= -\{\lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2}\} g_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

where  $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(\bar{\chi}\chi)^{k_2}$ ,  $\tilde{\mu}_2 = \mu_2(\bar{\chi}\chi)^{k_2}$ , dot means differentiation with respect to  $\omega$ . The system of equations (4.3) is over-determined. Therefore one has to investigate its compatibility. The compatibility of three-dimensional systems of the form (4.3) was investigated in detail by C. Collins [50]. He has proved that the system (4.3) is compatible iff

- (1)  $B(\omega) \equiv 0, \quad A(\omega) \equiv 0;$
- (2)  $B(\omega) = \pm 1, \quad A(\omega) = N(\omega + \theta)^{-1}, \quad N = -1, 0, 1, 2.$

In each case the general solution was constructed.

Generalizing Collins' results to the four-dimensional case we obtain the following classes of particular solutions of the system of equations (4.3):

- (1)  $A(\omega) = -m\omega^{-1}, \quad B(\omega) = -1, \quad m = 1, 2:$

$$\omega = [(b \cdot y)^2 + (c \cdot y)^2 + (d \cdot y)^2]^{1/2}, \quad m = 2, \quad (4.6)$$

$$\omega = [(b \cdot y + \rho_1)^2 + (c \cdot y + \rho_2)^2]^{1/2}, \quad m = 1; \quad (4.7)$$

- (2)  $A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = -1:$

$$\omega = (b \cdot y) \cos \rho_1 + (c \cdot y) \sin \rho_1 + \rho_2, \quad a \cdot y = (b \cdot y) \cos \rho_3 + (c \cdot y) \sin \rho_3 + \rho_4; \quad (4.8)$$

- (3)  $A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = 1:$

$$\omega = a \cdot y; \quad (4.9)$$

- (4)  $A(\omega) = m\omega^{-1}, \quad B(\omega) = 1, \quad m = 1, 3:$

$$\begin{aligned} \omega &= [(a \cdot y)^2 - (b \cdot y)^2]^{1/2}, \quad m = 1, \\ \omega &= [(a \cdot y)^2 - (b \cdot y)^2 - (c \cdot y)^2]^{1/2}, \quad m = 2, \\ \omega &= (y \cdot y)^{1/2}, \quad m = 3, \end{aligned} \quad (4.10)$$

In (4.6)–(4.10)  $y_\mu = x_\mu + \theta_\mu$ ,  $\theta_\mu = \text{const}$ ;  $\rho_1, \rho_2$  are arbitrary smooth functions of  $a \cdot y + d \cdot y$ ,  $\rho_3, \rho_4$  of  $\omega + d \cdot y$ ;  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$  are arbitrary real parameters satisfying (3.76).

We have succeeded in obtaining the general solution of the system of ODE (4.5) for  $A(\omega) = 0$ , while in the remaining cases partial solutions are obtained. Let us give the final result:

- (1)  $A(\omega) = -m\omega^{-1}, \quad B(\omega) = -1, \quad m = 1, 2:$

$$\begin{aligned} f_n(\omega) &= C_n \omega^{-1/2k_2}, \quad g_n(\omega) = \mp (-1)^n (1 - 2k_2 m)^{1/2} C_n \omega^{-1/2k_2}, \\ n &= 1, 2, \quad \phi(\omega) = E \omega^{-1/k_1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

the constants  $k_1, k_2, C_1, C_2$  and  $E$  satisfying the conditions

$$\begin{aligned} [(m-1)k_1 - 1]k_1^{-2} + \{\mu_1|E|^{k_1} + \tilde{\mu}_2[2mk_2(C_1^2 - C_2^2)]^{k_2}\}^2 &= 0, \\ \pm(1 - 2k_2 m)^{1/2} - 2k_2\{\lambda_1|E|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2[2mk_2(C_1^2 - C_2^2)]^{k_2}\} &= 0, \\ k_2 < 1/2m, \quad k_1 < 1/(m-1); \end{aligned} \quad (4.12)$$



(2)  $A(\omega) = 0$ ,  $B(\omega) = -1$ :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= C_1 \cosh \left( -\lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega - \tilde{\lambda}_2 (C_3^2 - C_1^2)^{k_2} \omega + C_2 \right), \\
 f_2 &= C_3 \cosh \left( \lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (C_3^2 - C_1^2)^{k_2} \omega + C_4 \right), \\
 g_1 &= C_1 \sinh \left( -\lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega - \tilde{\lambda}_2 (C_3^2 - C_1^2)^{k_2} \omega + C_2 \right), \\
 g_2 &= C_3 \sinh \left( \lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (C_3^2 - C_1^2)^{k_2} \omega + C_4 \right), \\
 \phi &= \rho(\omega) \exp[i\theta(\omega)], \\
 \int^{\rho(\omega)} [a_-(z) + C_6]^{-1/2} dz &= \omega + C_7, \quad \theta(\omega) = C_5 \int [\rho(\omega)]^{-1/2} d\omega + C_8,
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

where

$$\begin{aligned}
 a_-(z) &= \frac{\mu_1^2}{k_1 + 1} z^{2(k_1+1)} + \tilde{\mu}_2^2 (C_3^2 - C_1^2)^{2k_2} z^2 + \\
 &\quad + 4 \frac{\mu_1 \tilde{\mu}_2}{k_1 + 2} (C_3^2 - C_1^2)^{k_2} z^{k_1+2} + 2C_5^2 z;
 \end{aligned}$$

(3)  $A(\omega) = 0$ ,  $B(\omega) = 1$ :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= C_1 \sin \left( \lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (C_1^2 - C_3^2)^{k_2} \omega + C_2 \right), \\
 f_2 &= C_3 \cos \left( \lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (C_1^2 - C_3^2)^{k_2} \omega + C_4 \right), \\
 g_1 &= C_1 \cos \left( \lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (C_1^2 - C_3^2)^{k_2} \omega + C_2 \right), \\
 g_2 &= C_3 \sin \left( \lambda_1 \int [\rho(\omega)]^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (C_1^2 - C_3^2)^{k_2} \omega + C_4 \right), \\
 \phi &= \rho(\omega) \exp[i\theta(\omega)], \\
 \int^{\rho(\omega)} [a_+(z) + C_6]^{-1/2} dz &= \omega + C_7, \quad \theta(\omega) = C_5 \int [\rho(\omega)]^{-1/2} d\omega + C_8,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

where

$$\begin{aligned}
 a_+(z) &= -\frac{\mu_1^2}{k_1 + 1} z^{2(k_1+1)} - \tilde{\mu}_2^2 (C_1^2 - C_3^2)^{2k_2} z^2 - \\
 &\quad - 4 \frac{\mu_1 \tilde{\mu}_2}{k_1 + 2} (C_1^2 - C_3^2)^{k_2} z^{k_1+2} + 2C_5^2 z
 \end{aligned}$$

(in the above formulae  $C_1, \dots, C_8$  are arbitrary constants);

(4)  $A(\omega) = m\omega^{-1}$ ,  $B(\omega) = 1$ ,  $m = 2, 3$ :

(a)  $k_1 > 1/(m-1)$ ,  $k_2 > 1/2m$ :

$$\begin{aligned} f_n(\omega) &= C_n \omega^{-1/2k_2}, \quad g_n(\omega) = \mp(-1)^n (2k_2 m - 1)^{1/2} C_n \omega^{-1/2k_2}, \\ n &= 1, 2, \quad \phi(\omega) = E \omega^{-1/k_1}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

where  $C_1$ ,  $C_2$  and  $E$  are constants satisfying the following conditions:

$$\begin{aligned} [(1-m)k_1 + 1]k_1^{-2} + \{\mu_1|E|^{k_1} + \tilde{\mu}_2[2mk_2(C_1^2 - C_2^2)]^{k_2}\}^2 &= 0, \\ \pm(2k_2 m - 1)^{1/2} - 2k_2\{\lambda_1|E|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2[2mk_2(C_1^2 - C_2^2)]^{k_2}\} &= 0; \end{aligned} \quad (4.16)$$

(b)  $k_1 = 2(m-1)^{-1}$ ,  $k_2 > m^{-1}$ :

$$\begin{aligned} f_n(\omega) &= (-1)^n \theta \omega g_n(\omega), \quad g_n(\omega) = C_n (1 + \theta^2 \omega^2)^{-(m+1)/2}, \\ n &= 1, 2, \quad \phi(\omega) = E (1 + \theta^2 \omega^2)^{(1-m)/2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

where the constants  $C_1$ ,  $C_2$  and  $E$  satisfy the conditions

$$\begin{aligned} \theta^2(m^2 - 1) &= [\mu_1|E|^{2/(m-1)} + \tilde{\mu}_2(C_1^2 - C_2^2)^{1/m}]^2, \\ (m+1)\theta &= [\lambda_1|E|^{2/(m-1)} + \tilde{\lambda}_2(C_1^2 - C_2^2)^{1/m}]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

To obtain the exact solutions of the initial system (4.1) one has to substitute formulae (4.6)–(4.10), (4.11)–(4.17) into the ansatz (4.2), (4.4). The obtained expressions are very cumbersome and will not be given here.

Let us make some remarks.

**Note 1.** If one interprets the nonlinearities  $\lambda_1|u|^{k_1} + \lambda_2(\bar{\psi}\psi)^{k_2}$ ,  $\mu_1|u|^{k_1} + \mu_2(\bar{\psi}\psi)^{k_2}$ , as the masses of a spinor field ( $M_\psi$ ) and of a scalar field ( $M_u$ ) created because of the nonlinear interaction of these fields, then for solutions (4.11), (4.15) and (4.17) the following remarkable relations hold:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_u}{M_\psi}\right)^2 &= \frac{4k_2^2[1 + (1-m)k_1]}{k_1^2(1-2mk_2)}, \quad m = 1, 2, \\ \left(\frac{M_u}{M_\psi}\right)^2 &= \frac{4k_2^2[(m-1)k_1 - 1]}{k_1^2(2mk_2 - 1)}, \quad m = 2, 3, \\ \left(\frac{M_u}{M_\psi}\right)^2 &= \frac{m-1}{m+1}, \quad m = 2, 3. \end{aligned} \quad (4.19)$$

These relations can be interpreted as formulae for the mass spectrum of spinor and scalar particles. What is more, the discrete variable  $m$  arises as the compatibility condition of the over-determined system (4.3) (compare ref. [50]). So the mass spectrum is determined by the geometry of the solutions of the form (4.2), (4.4).

**Note 2.** If one puts in (4.2)  $g_2 \equiv f_2 \equiv 0$ ,  $\omega(x) = x \cdot x$ , then the ansatz suggested by Heisenberg [2, 14] is obtained,

$$\psi(x) = [ig_1(x \cdot x) + \gamma \cdot x f_1(x \cdot x)]\chi.$$

**Note 3.** If one chooses  $\lambda_1 = \mu_2 = 0$  then formulae (4.2), (4.4), (4.6)–(4.18) give exact solutions of the nonlinear Dirac–Heisenberg equation and of the d’Alembert equations.

**Note 4.** Ansätze (4.2), (4.4) can be used to reduce nonlinear systems of PDE of more general form than (4.1), namely

$$\gamma_\mu p^\mu = F_1(\bar{\psi}\psi, |u|)\psi, \quad p_\mu p^\mu = F_2(\bar{\psi}\psi, u, u^*), \quad (4.20)$$

where  $F_1, F_2$  are arbitrary continuous functions. In particular, the solutions of a system of equations of the form (4.20) constructed in refs. [12, 13, 51] can be obtained via ansätze (4.2), (4.4).

### 5. Exact solutions of the nonlinear Maxwell–Dirac equations

There is a vast literature devoted to the system of equations of classical electrodynamics (Maxwell–Dirac equations)

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu(p^\mu + eA^\mu) + m]\psi(x) &= 0, \\ p_\nu p^\nu A_\mu - p_\mu p_\nu A^\nu &= e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.1)$$

where  $A_\mu = A_\mu(x)$  is the vector potential of the electromagnetic field;  $m$  and  $e$  are the mass and the charge of the electron. A number of existence theorems have been proved (in particular, in ref. [52] the solubility of the Cauchy problem has been investigated). However, as far as we know there are no publications containing exact solutions of this system in explicit form.

We look for solutions of eqs. (5.1) in the form

$$\psi(x) = (\gamma \cdot \theta)\varphi(\omega), \quad A_\mu(x) = \theta_\mu\phi(\omega), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

where  $\omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \equiv \{\theta \cdot x, b \cdot x, c \cdot x\}$ ,  $\theta_\mu = a_\mu + d_\mu$ ,  $\varphi(\omega)$  and  $\phi(\omega)$  are unknown functions. Substitution of (5.2) into (5.1) gives rise to the following system of two-dimensional PDE for  $\varphi(\omega)$  and  $\phi(\omega)$

$$(\gamma \cdot b)\varphi_{\omega_1} + (\gamma \cdot c)\varphi_{\omega_2} + im\varphi = 0, \quad (5.3a)$$

$$\phi_{\omega_1\omega_1} + \phi_{\omega_2\omega_2} = 2e\bar{\varphi}(\gamma \cdot \theta)\varphi. \quad (5.3b)$$

Let us note that in (5.3) there is no differentiation with respect to  $\omega_0$ , therefore  $\varphi$  and  $\phi$  contain  $\omega_0$  as a parameter.

The general solution of eq. (5.3a) is given by the elliptic analogue of the d'Alembert formula for the wave equation [38]

$$\varphi(\omega) = F(z, \omega_0) + F(z^*, \omega_0) - ie \int_0^{\omega_2} \int_{\omega_1 - i(\omega_2 - \tau)}^{\omega_1 + i(\omega_2 - \tau)} \bar{\varphi}(\gamma \cdot \theta)\varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (5.4)$$

where  $F$  is an arbitrary analytical function of  $z = \omega_1 + i\omega_2$ . So the problem of constructing particular solutions of the initial system of equations (5.1) is reduced to that of integrating the linear two-dimensional Dirac equation (5.3a).

Choosing the eigenfunction of the Hermitian operator  $-i\partial_{\omega_1}$  as a partial solution of eq. (5.3a) one obtains

$$\varphi = \exp[i\lambda\omega_1 + i\gamma \cdot c(m + \lambda\gamma \cdot b)\omega_2]\varphi_0(\omega_0), \quad (5.5)$$

where  $\varphi_0$  is a four-component spinor depending on  $\omega_0$  in an arbitrary way. Imposing on (5.5) the additional condition of being periodical with respect to the variable  $\omega_1$ , we come to the following relation:

$$\lambda = \lambda_n = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.6)$$

Substitution of (5.5) into formula (5.4) gives the explicit form of  $\phi(\omega)$ ,

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(\omega) &= F(z, \omega_0) + F(z^*, \omega_0) + \frac{1}{4}(m^2 + \lambda_n^2)^{-1} \times \\ &\times [\tau_1 \cosh 2(m^2 + \lambda_n^2)^{1/2} \omega_2 + \tau_2 \sinh 2(m^2 + \lambda_n^2)^{1/2} \omega_2], \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

where

$$\begin{aligned} z &= \omega_1 + i\omega_2, \quad \tau_1 = 2e\bar{\varphi}_0(\gamma \cdot \theta)\varphi_0, \\ \tau_2 &= 2ie(m^2 + \lambda_n^2)^{-1/2}\bar{\varphi}_0(\gamma \cdot \theta)(m + \lambda_n\gamma \cdot b)\varphi_0. \end{aligned}$$

Substituting (5.5), (5.7) into the ansatz (5.2) one obtains a multi-parameter family of exact solutions of the Maxwell–Dirac equations depending on three arbitrary complex functions,

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) \exp[i\lambda_n b \cdot x + i\gamma \cdot c(m + \lambda_n\gamma \cdot b)c \cdot x] \varphi_0(a \cdot x + d \cdot x), \\ A_\mu^{(n)}(x) &= (a_\mu + d_\mu) \left\{ F(z, a \cdot x + d \cdot x) + F(z^*, a \cdot x + d \cdot x) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4}(m^2 + \lambda_n^2)^{-1} [\tau_1 \cosh(2(m^2 + \lambda_n^2)^{1/2} c \cdot x) + \tau_2 \sinh(2(m^2 + \lambda_n^2)^{1/2} c \cdot x)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Analogously if one chooses the following solution of eq. (5.3a):

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c) \arctg \frac{\omega_1}{\omega_2} \right] \times \\ &\times \exp[im(\gamma \cdot c)(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}] \varphi_0(\omega_0) \end{aligned}$$

as  $\varphi(\omega)$ , then formulae (5.2), (5.4) give rise to the following family of exact solutions:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d) |z|^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2}(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c) \arctg \frac{b \cdot x}{c \cdot x} \right) \times \\ &\times \exp[im\gamma \cdot c|z|] \varphi_0(a \cdot x + d \cdot x), \\ A_\mu(x) &= (a_\mu + d_\mu) \left( F(z, a \cdot x + d \cdot x) + F(z^*, a \cdot x + d \cdot x) + \right. \\ &\left. + \int^{|z|} (\tau_1 \sinh 2m\rho + \tau_2 \cosh 2m\rho) \rho^{-1} d\rho \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

where  $F$  is an arbitrary analytical function of  $z = b \cdot x + ic \cdot x$ ,

$$\begin{aligned} |z| &= (z^*z)^{1/2} = [(b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2]^{1/2}, \quad \tau_1 = 2e\bar{\varphi}_0[\gamma \cdot a + \gamma \cdot d]\varphi_0, \\ \tau_2 &= 2ie\bar{\varphi}_0(\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)(\gamma \cdot c)\varphi_0. \end{aligned}$$

Let us consider in more detail the solution of the Maxwell–Dirac equations (5.8) putting

$$F \equiv 0, \quad \varphi_0 = \exp[-\kappa^2(a \cdot x + d \cdot x)^2] \chi,$$

where  $\chi$  is an arbitrary constant spinor,  $\kappa = \text{const}$ . By direct verification one can convince oneself that the following equalities hold:

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu A_\nu^{(n)} &= 4(m^2 + \lambda_n^2) A_\nu^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ p^\nu A_\nu^{(n)} &= 0, \quad p_\mu p^\mu \psi^{(n)} = m^2 \psi^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

The above relations seem to admit the following interpretation: the interaction of a spinor and a massless electromagnetic field according to the nonlinear eqs. (5.1) generates massive electromagnetic fields  $A_\mu^{(n)}(x)$  with masses  $M_n = 2(m^2 + \lambda_n^2)^{1/2}$  (in other words, the nonlinear interaction of the fields  $A_\mu(x)$  and  $\psi(x)$  generates the mass spectrum). If one puts  $n = 0$  then  $M_0 = 2m$ ,  $m$  being the mass of the electron.

As solutions (5.8), (5.9) have an analytical dependence on  $m$ , then the solutions of the massless Maxwell–Dirac equations can be obtained by putting  $m = 0$ . The case  $m = 0$  deserves special consideration because the massless Maxwell–Dirac equations are conformally invariant (see, e.g., ref. [53]).

It is not difficult to obtain the general solution of the two-dimensional massless Dirac equation

$$\varphi = (\gamma \cdot b + i\gamma \cdot c)\varphi_1(z, \omega_0) + (\gamma \cdot b - i\gamma \cdot c)\varphi_2(z^*, \omega_0), \quad (5.11)$$

where  $\varphi_1, \varphi_2$  are arbitrary spinors depending analytically on  $z, z^*$ ;  $z = b \cdot x + ic \cdot x$ . Substituting (5.11) into (5.4) one obtains the following expression for  $\phi(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= F(z, \omega_0) + F(z^*, \omega_0) + \\ &+ e \left( z^* \int_0^z f_1(z, \omega_0) dz + z \int_0^{z^*} f_2(z^*, \omega_0) dz^* \right), \quad (5.12) \\ f_1 &= \bar{\varphi}_1(\gamma \cdot \theta)[1 - i(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)]\varphi_2, \quad f_2 = \bar{\varphi}_2(\gamma \cdot \theta)[1 + i(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)]\varphi_1. \end{aligned}$$

Substitution of the above formulae into (5.2) gives rise to a multi-parameter family of exact solutions including three arbitrary complex functions,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (\gamma \cdot a + \gamma \cdot d)[(\gamma \cdot b + i\gamma \cdot c)\varphi_1(z, a \cdot x + d \cdot x) + \\ &+ (\gamma \cdot b - i\gamma \cdot c)\varphi_2(z^*, a \cdot x + d \cdot x)], \\ A_\mu(x) &= (a_\mu + d_\mu) \left[ F(z, a \cdot x + d \cdot x) + F(z^*, a \cdot x + d \cdot x) \right. \\ &+ e \left( z^* \int_0^z f_1(z, a \cdot x + d \cdot x) dz + z \int_0^{z^*} f_2(z^*, a \cdot x + d \cdot x) dz^* \right) \Big], \quad (5.13) \\ z &= b \cdot x + ic \cdot x. \end{aligned}$$

Using the solution generating formula with the group of special conformal transformations [24, 47]

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \sigma^{-2}(x)[1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \theta)]\psi_I(x'), \\ A_\mu^{II}(x) &= \sigma^{-2}(x)[g_{\mu\nu}\sigma(x) + 2(\theta_\mu x_\nu - \theta_\nu x_\mu + \\ &+ 2\theta \cdot x x_\mu \theta_\nu - x \cdot x \theta_\mu \theta_\nu - \theta \cdot \theta x_\mu x_\nu)]A_I^\nu(x'), \\ x'_\mu &= (x_\mu - \theta_\mu x \cdot x)\sigma^{-1}(x), \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x), \end{aligned}$$

it is possible to obtain a larger family of solutions of the system of equations (5.1). We omit the corresponding formulae because of their cumbersome character.

## 6. Conclusions

In this review we described Poincaré-invariant nonlinear systems of first-order differential equations for spinor fields which are nonlinear generalizations of the classical Dirac equation without using variational principles. The large class of nonlinear

spinor equations invariant under the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$  and the conformal group is constructed. It contains, in particular, the well-known nonlinear Dirac–Ivanenko, Dirac–Heisenberg and Dirac–Gürsey equations. Besides there are many equations which so far have not been considered in the literature.

The main aim of this review is to suggest a constructive method of solution of nonlinear Dirac-type spinor equations, that is, to construct in explicit form families of exact solutions of these equations without applying methods of perturbation theory. The key idea of our method is a symmetry reduction of the many-dimensional spinor equation to systems of ordinary differential equations. Many of them can be integrated in quadratures. Such a reduction is carried out with the help of special ansätze constructed using the symmetry properties of the equation in question.

To our mind the important result of the present paper is that we have obtained nongenerable families of exact solutions of nonlinear spinor equations. These solutions possess the same symmetry as the equation of motion. So nongenerable families of solutions can be quantized in a standard way without losing the invariance under the Poincaré group.

It is worth noting that some solutions depend on the coupling constant  $\lambda$  in a singular way.

It is shown how to construct the simplest fields with spin  $s = 0$  using solutions of the fundamental spinor equation. Such bosonic fields satisfy the nonlinear d’Alembert equations.

A new approach to the problem of the mass spectrum is suggested (section 4). It is established that exact solutions of the system of nonlinear equations for spinor and scalar fields make it possible to calculate the ratio of the masses of spinor and scalar fields. It occurs that this ratio is determined by the non-linearity degrees of the spinor and scalar fields.

We hope that the results presented in our paper will make it possible to understand more deeply the role played by nonlinear spinor equations in the unified theory of bosonic and fermionic fields with spins  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

Suggested methods can be applied to equations of motion in  $\mathbb{R}(1, n)$  [54, 55]. The problem of subgroup classification of generalized Poincaré groups  $P(1, n)$ ,  $\tilde{P}(1, n)$ ,  $P(2, n)$  and Galilei groups  $G(1, n)$  was solved in refs. [55–60].

1. Ivanenko D., *Sov. Phys.*, 1938, **13**, 141.
2. Heisenberg W., *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1953, **8**, 111.
3. Dürr H.P., Heisenberg W., Mitter H., Schlieder S., Yamazaki K., *Zs. Naturforsch. A*, 1959, **14**, 441.
4. Heisenberg W., *Rev. Mod. Phys.*, 1957, **29**, 269.
5. Dürr H.P., Heisenberg W., *Nuovo Cimento*, 1965, **37**, 1446.
6. Finkelstein R., LeLevier R., Ruderman M., *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 326.
7. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 1571.
8. Schiff L., *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 1, 10.
9. Malenka B., *Phys. Rev.*, 1952, **86**, 68.
10. Akdeniz K.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **33**, 40.
11. Akdeniz K.G., Smailagic A., *Lett. Math. Phys.*, 1984, **8**, 175.
12. Barut A.O., Xu B.W., *Phys. Rev. D*, 1981, **23**, 3076.
13. Barut A.O., Xu B.W., *Physica D*, 1982, **6**, 137.

14. Kortel F., *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 729.
15. Kurdgelaidze D.F., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1957, **32**, 1156.
16. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, 485.
17. Steeb W.H., Erig W., *J. Math. Phys.*, 1982, **23**, 145.
18. Takahashi K., *J. Math. Phys.*, 1979, **20**, 1232.
19. De Broglie L., *Theorie General des Particules a Spin*, 1948.
20. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, **269**, 88.
21. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 271.
22. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, 189.
23. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., in *Group-Theoretical Studies of Mathematical Physics Equations*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985, 20.
24. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *J. Phys. A*, 1987, **20**, 4173.
25. Fushchych W.I., The symmetry and some exact solutions of some multi-dimensional nonlinear equations of mathematical physics, in *Proc. XVth Intern. Conf. on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, Singapore, World Scientific, 1987, 544.
26. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., in *Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1987, 17.
27. Zhdanov R.Z., in *Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1987, 44.
28. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *J. Phys. A*, 1988, **21**, 1988, L5.
29. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., *Fiz. Elem. Chastits At. Yadra*, 1988, **19**, 1154.
30. Fushchych W.I., in *Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1981, 6.
31. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Symmetries of Maxwell's equations*, Dordrecht, Reidel, 1987.
32. Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 1-3, Leipzig, Teubner, 1888, 1890, 1893.
33. Ovsyannikov L.V., *Group analysis of differential equations*, Moscow, Nauka, 1978.
34. Olver P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, Berlin, Springer, 1986.
35. Revenko I.V., Thesis, Kyiv, Institute of Mathematics, 1986.
36. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 1956, 988.
37. Fushchych W.I., *Ukr. Mat. Zh.*, 1987, **39**, 116.
38. Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics*, Vols. 1, 2, New York, Interscience, 1953, 1962.
39. Fushchych W.I., Tsifra I.M., *J. Phys. A*, 1987, **20**, L45.
40. Olver P.J., Rosenau P., *Phys. Lett. A*, 1986, **114**, 107.
41. Morgan A.T.A., *Quart. J. Math. Oxford*, 1952, **3**, 250.
42. Fushchych W.I., in *Symmetry and Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1987, 4.
43. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597.
44. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Rep. Math. Phys.*, 1974, **5**, 145, 361.
45. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791.
46. Bhabha H.J., *Rev. Mod. Phys.*, 1945, **17**, 200.
47. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215.
48. Fushchych W.I., in *Group-Theoretical Studies of Mathematical Physics Equations*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985, 4.
49. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645.

50. Collins C.B., *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1976, **80**, 165.
51. Yamagata H., *Math. Jpn.*, 1986, **31**, 137.
52. Simon Jacques C.H., *Lett. Math. Phys.*, 1982, **6**, L87.
53. Fushchych W.I., Tsifra I.M., *Teor. Mat. Fiz.*, 1985, **64**, 41.
54. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; 1969, **14**, 537.
55. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1970, **4**, 360.
56. Fushchych, Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., *J. Phys. A*, 1985, **18**, 2893.
57. Barannik L.F., Fushchych W.I., Subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group  $\tilde{P}(1, n)$ , Preprint N 85.90, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985; *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, 1445.
58. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Continuous subgroups of the Galilei group, Preprint N 85.19, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985; *J. Math. Phys.*, 1989, **30**, 280.
59. Barannik L.F., Fushchych W.I., Invariants of subgroups of the generalized Poincaré group  $P(1, n)$ , Preprint N 86.88, Kyiv, Institute of Mathematics, 1986.
60. Barannik L.F., Lagno V.I., Fushchych W.I., Subalgebras of the generalized Poincaré algebra  $AP(2, n)$ , Preprint 85.89, Kyiv, Institute of Mathematics, 1985.



# Contents

<i>А.Ф. Баранник, В.И. Фущич</i> , О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп .....	1
<i>Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник, В.И. Фущич</i> , О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре $P(1, n)$ .....	35
<i>Л.Ф. Баранник, В.И. Фущич</i> , Операторы Казимира для обобщенных групп Пуанкаре и группы Галилея .....	41
<i>Л.Ф. Баранник, В.И. Фущич</i> , Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1, n)$ .....	47
<i>В.И. Фущич</i> , О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики .....	67
<i>В.И. Фущич, А.Ф. Баранник, Л.Ф. Баранник</i> , Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида .....	81
<i>В.И. Фущич, Р.М. Чернига</i> , О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа .....	87
<i>В.И. Фущич, В.М. Федорчук, И.М. Федорчук</i> , Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений .....	116
<i>В.И. Фущич, В.М. Штельень, Р.З. Жданов</i> , Конформно-инвариантное обобщение уравнения Дирака–Гейзенберга и его точные решения .....	134
<i>В.И. Фущич, С.Л. Славуцкий</i> , О нелинейном галилей-инвариантном обобщении уравнений Ламе .....	138
<i>В.И. Фущич, С.Л. Славуцкий</i> , О симметрии некоторых уравнений идеальной жидкости .....	141
<i>В.И. Фущич, И.М. Цифра</i> , Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для электромагнитного поля .....	146
<i>L.F. Barannik, W.I. Fushchych</i> , On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group $\tilde{P}(1, n)$ .....	150
<i>W.I. Fushchych</i> , The symmetry and exact solutions of some multidimensional nonlinear equations of mathematical physics .....	175
<i>В.И. Фущич</i> , Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? .....	180
<i>В.И. Фущич</i> , О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений .....	190
<i>В.И. Фущич, И.Ю. Кривский, В.М. Симулик</i> , О векторных лагранжианах для электромагнитного и спинорного полей .....	199
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equations .....	223
<i>W.I. Fushchych, N.I. Serov</i> , On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation .....	236
<i>В.И. Фущич, В.М. Штельень</i> , О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака .....	241

<i>W.I. Fushchych, I.M. Tsyfra</i> , On a reduction and solutions of non-linear wave equations with broken symmetry .....	251
<i>В.И. Фущич, Р.З. Жданов</i> , Об одном обобщении метода разделения переменных для линейных систем дифференциальных уравнений .....	256
<i>W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov</i> , On some exact solutions of a system of non-linear differential equations for spinor and vector fields .....	261
<i>Л.Ф. Баранник, В.И. Фущич</i> , О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$ .....	283
<i>W.I. Fushchych</i> , Exact solutions of multidimensional nonlinear Dirac's and Schrödinger's equations .....	307
<i>Л.Ф. Баранник, В.И. Лагно, В.И. Фущич</i> , Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметричная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I .....	319
<i>В.И. Фущич, А.С. Галицин, А.С. Полубинський</i> , Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченною швидкістю .....	326
<i>W.I. Fushchych, I. Krivsky, V. Simulik</i> , On vector and pseudovector Lagrangians for electromagnetic field .....	332
<i>В.И. Фущич, Н.И. Серов</i> , Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики .....	337
<i>В.И. Фущич, Н.И. Серов</i> , Об условной инвариантности нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Монжа–Ампера относительно конформной алгебры .....	342
<i>В.И. Фущич, М.И. Серов, В.И. Чопик</i> , Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності .....	346
<i>В.И. Фущич, И.А. Егорченко</i> , О симметричных свойствах комплексно-значных нелинейных волновых уравнений .....	350
<i>W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov</i> , On the reduction and some new exact solutions of the non-linear Dirac and Dirac–Klein–Gordon equations .....	356
<i>W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov</i> , Non-local ansätze for the Dirac equation .....	361
<i>W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov</i> , On some new exact solutions of nonlinear d'Allembert and Hamilton equations .....	367
<i>В.И. Фущич, Р.З. Жданов</i> , Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака .....	372
<i>А.Ф. Баранник, Ю.Д. Москаленко, В.И. Фущич</i> , Подалгебры афинной алгебры $AIGL(3, R)$ .....	410
<i>А.Ф. Баранник, Ю.Д. Москаленко, В.И. Фущич</i> , Подалгебры псевдоортогональной алгебры $AO(3, 3)$ .....	428
<i>L.F. Barannik, W.I. Fushchych</i> , Continuous subgroups of the generalized Schrödinger groups .....	450
<i>Л.Ф. Баранник, В.И. Лагно, В.И. Фущич</i> , Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметричная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II .....	468

<i>В.И. Фущич</i> , Принцип относительности Галилея и нелинейные уравнения в частных производных .....	473
<i>В.И. Фущич, Р.М. Чернига</i> , Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I .....	478
<i>В.И. Фущич, Р.М. Чернига</i> , Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. II .....	487
<i>W.I. Fushchych, V.V. Kornyak</i> , Computer algebra application for determining Lie and Lie–Bäcklund symmetries of differential equations .....	497
<i>W.I. Fushchych, I.Yu. Krivsky, V.M. Simulik</i> , On vector and pseudovector Lagrangians for electromagnetic field .....	506
<i>В.И. Фущич, И.Ю. Кривский, В.М. Симулик</i> , Нелиевские симметрии и нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака .....	511
<i>В.И. Фущич, А.Г. Никитин</i> , О новых системах и законах сохранения для упругих волн .....	536
<i>В.И. Фущич, І.В. Ревенко</i> , Про точні розв'язки рівнянь Лоренца–Максвелла ..	539
<i>В.И. Фущич, І.В. Ревенко</i> , Пуанкаре-інваріантні рівняння третього та четвертого порядків у механіці Остроградського .....	543
<i>В.И. Фущич, Н.И. Серов</i> , Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска .....	547
<i>W.I. Fushchych, W.M. Shtelen</i> , On approximate symmetry and approximate solutions of the non-linear wave equation with a small parameter .....	552
<i>В.И. Фущич, И.А. Егорченко</i> , Дифференциальные инварианты алгебры Галилея .....	556
<i>В.И. Фущич, І.А. Єгорченко</i> , Диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре та конформної алгебри .....	561
<i>W.I. Fushchych, I.A. Yehorchenko</i> , The symmetry and exact solutions of the non-linear d'Alembert equation for complex fields .....	563
<i>W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov</i> , On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system .....	573
<i>W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov</i> , Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations .....	577