W.I. Fushchych
Scientific Works

Volume 2
1979–1985

Editor
Vyacheslav Boyko

Kyiv 2000

О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физике

В.И. ФУЩИЧ

Среди всех уравнений, встречающихся в математике, уравнения математической физики выделяются тем, что они обладают, как правило, высокой симметрией. Первопричиной этих важнейших свойств уравнений является симметрия реальных физических процессов.

Почти 100 лет назад С. Ли создал принципиальные основы математического метода исследования симметрийных (групповых) свойств дифференциальных уравнений. За последние двадцать лет это направление получило существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его учеников, которое подытожено в монографии [1].

В работах [2, 3] показано, что уравнения Дирака, Максвелла, Клейна–Гордона обладают симметрией, которая в принципе не может быть обнаружена лиевским методом. В настоящей статье сформулирован нелиевский метод исследования групповых свойств дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}(x,\hat{p})\Psi(x)=0, \tag{1}$$

где $\hat{L}(x,\hat{p})$ — некоторый линейный оператор, $x\in R^n_x$, $\hat{p}$ — вектор-оператор с компонентами $\hat{p}_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, ненулевые компоненты которого $g_{00}=g_{11}=\cdots=g_{kk}=-g_{k+1\,k+1}=\cdots=-g_{nn}=1$, $\Psi(x)$ — вектор-функция. Через $L(x,p)$ обозначим символ оператора $\hat{L}(x,\hat{p})$, $p\in R^n_p$.

Будем говорить, что уравнение (1) инвариантно относительно некоторого множества операторов $\hat{Q}=\{\hat{Q}_A\}=\{\hat{Q}_1,\hat{Q}_2,\dots,\hat{Q}_N\}$, если выполняются условия

$$\hat{L}(x,\hat{p})\hat{Q}_A\Psi(x)=0, \qquad A=1,2,\dots,N. \tag{2}$$

Если операторы $\{\hat{Q}_A\}$ (или их линейные комбинации) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{Q}_A,\hat{Q}_B]_- = f_{ABC}\hat{Q}_C, \tag{3}$$

то будем говорить, что уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Ли. Здесь f_{ABC} — структурные константы алгебры Ли.

В отличие от подхода С. Ли, мы будем делать акцент не на группы инвариантности, а на алгебры инвариантности уравнений. Задача отыскания алгебры инвариантности уравнения (1) формулируется очень просто: требуется конструктивно описать (по возможности наиболее широкий) класс операторов $\hat{Q}$, удовлетворяющих условиям (2) и (3).

Из приведенного видна ограниченность постановки и метода С. Ли и, главное, видны новые пути решения и обобщения лиевской задачи об исследовании алгебраических свойств уравнений. Такое обобщение возможно, по меньшей мере,

Доклады академии наук СССР, 1979, **246**, № 4, С. 846–850.

в двух направлениях: во-первых, искать алгебру инвариантности уравнения (1) в классе интегродифференциальных операторов (в подходе Ли, как известно, операторы $\hat{Q}_A$ — операторы первого порядка); во-вторых, отказаться от условия (3), т.е. от требования, чтобы операторы $\hat{Q}$ принадлежали алгебре Ли: операторы $\hat{Q}_A$ могут образовывать супералгебру, алгебру Йордана и т.д.

Именно в первом направлении, которое назовем нелиевским подходом, и были получены новые алгебры инвариантности для многих уравнений движения квантовой механики [4] (см. также [5], посвященную этому направлению). Главный и самый трудный вопрос, возникающий в связи с нелиевским подходом к исследованию алгебраических свойств уравнений, состоит в следующем: каким способом конструктивно описать (вычислить) операторы $\hat{Q}_A$, т.е. указать метод нахождения интегродифференциальных операторов. Очевидно, что лиевский алгоритм для этих целей непригоден.

Обобщая результаты конкретных способов вычисления алгебр инвариантности [2–4], можно сформулировать такой метод построения операторов $\hat{Q}_A$: 1) система дифференциальных уравнений (д.у.) посредством обратимого (вообще говоря, неоднозначного) преобразования приводится к каноническому (жордановому или диагональному) виду, т.е. проводится максимальное расщепление системы д.у. на независимые (автономные) подсистемы; 2) находится алгебра инвариантности (а.и.) преобразованного уравнения; 3) если операторы $\{\hat{Q}_A\}$ а.и. удовлетворяют соотношениям (3), то устанавливается, какое представление алгебры Ли реализует эти операторы в пространстве решений; 4) с помощью обратного преобразования находится а.и. исходного уравнения; 5) по а.и. вычисляется группа инвариантности д.у. согласно формулам

$$\begin{aligned} &x'_\mu = \exp\{i\hat{Q}_A\theta_A\}x_\mu \exp\{-i\hat{Q}_B\theta_B\}, \qquad \mu = 0,1,2,\ldots,n, \\ &\Psi'(x) = \exp\{i\hat{Q}_A\theta_A\}\Psi(x), \end{aligned} \tag{4}$$

где θ_A — параметры группы инвариантности.

2. Проиллюстрируем нелиевский алгоритм отыскания а.и. на примере двух систем уравнений. Рассмотрим систему восьми уравнений в частных производных второго порядка:

$$\hat{p}_0^2\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in R^3; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p}) = \Gamma_0\Gamma_4\hat{p}_a^2 + \sqrt{2}m\Gamma_0\Gamma_a\hat{p}_a + \Gamma_0\Gamma_5 m^2; \\ &\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad x_0 \equiv t, \end{aligned} \tag{6}$$

Γ_0, Γ_k, $k = 1,2,\ldots,6$, — (8×8)-матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда–Дирака, $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — вектор-функция с компонентами $\Psi = (\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_8)$, m — постоянная величина.

Теорема 1. *Система (5) инвариантна относительно 26-мерной алгебры Ли группы $P(1,3)\otimes E(4)\otimes GL(4)\otimes GL(4)$, где $P(1,3)$ — группа Пуанкаре, $E(4)$ — группа Евклида в четырехмерном пространстве, $GL(4)$ — группа всех невырожденных действительных (4×4)-матриц.*

Доказательство. Символ $\mathcal{H}^2(p)$ оператора (6) является симметрической (8×8)-матрицей, поэтому его можно привести к диагональному виду. Это означает, что и оператор $\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})$, рассматриваемый как матрица, приводится к диагональному оператору. Такое приведение осуществляется с помощью унитарного оператора [2]

$$U = \exp\left\{\frac{\pi}{4}\Gamma_0\frac{\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})}{\hat{E}^2(\hat{p})}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1+\Gamma_0\frac{\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})}{\hat{E}^2(\hat{p})}\right\}; \tag{7}$$

$$\hat{E}^2(\hat{p}) = \sqrt{\hat{\mathcal{H}}^2(\hat{p})} = \hat{p}_a^2 + m^2. \tag{8}$$

Осуществив над уравнением преобразование (7), придем к системе

$$\hat{p}_0^2\Phi(t,\boldsymbol{x}) = \Gamma_0\hat{E}^2(p)\Phi(t,\boldsymbol{x}); \tag{9}$$

$$\Phi = U\Psi, \qquad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая (4×4)-матрицы.

Систему (9) можно записать в виде восьми незацепленных уравнений

$$\left(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2\right)\Phi_\mu(t,\boldsymbol{x}) = m^2\Phi_\mu(t,\boldsymbol{x}), \qquad \mu = 0,1,2,3; \tag{11}$$

$$\left(\hat{p}_0^2 + \hat{p}_a^2\right)\Phi_{\mu+4}(t,\boldsymbol{x}) = -m^2\Phi_{\mu+4}(t,\boldsymbol{x}), \tag{12}$$

где Φ_μ, $\Phi_{\mu+4}$ — компоненты вектор-функции Φ.

Из (10) ясно, что уравнение (9) инвариантно относительно 16 матриц:

$$S_{kl} = \frac{i}{4}(\Gamma_k\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_k), \qquad \Gamma_0; \qquad k,l = 1,2,\ldots,6. \tag{13}$$

Кроме того, из (11) и (12) видно, что эта же система инвариантна относительно 10-мерной алгебры Ли группы $P(1,3)\otimes E(4)$, базисные элементы которой имеют вид

$$\begin{gathered} J_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} J^{\mathrm{I}}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J^{\mathrm{II}}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \\ J^{\mathrm{I}}_{\mu\nu} = x_\mu\hat{p}_\nu - x_\nu\hat{p}_\mu, \qquad J^{\mathrm{II}}_{ab} = x_a\hat{p}_b - x_b\hat{p}_a, \qquad J^{\mathrm{II}}_{0a} = ix_0\hat{p}_a - x_a\hat{p}_0. \end{gathered} \tag{14}$$

Алгебры инвариантности для исходного уравнения (5), т.е. операторы $\hat{Q}_A$ строятся по операторам (13) и (14) известным образом:

$$\hat{Q}_A = U^{-1}\hat{Q}^\Phi_A U, \qquad A = 1,2,\ldots,26, \tag{15}$$

где через $\hat{Q}^\Phi_A$ обозначены любой из операторов (13) и (14). Важно подчеркнуть. что все операторы

$$S'_{kl} = U^{-1}S_{kl}U, \qquad \Gamma'_0 = U^{-1}\Gamma_0 U \tag{16}$$

являются интегральными, ограниченными операторами. Теорема доказана.

Замечание 1. Если после реализации первого шага алгоритма мы приходим к расщепленной системе дифференциальных уравнений, то к такой системе можно применить лиевскую методику.

3. Второй пример. Рассмотрим интегродифференциальную (псевдодифференциальную) систему шести уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\hat{p}_0 \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = |\hat{\boldsymbol{p}}| \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}), \\
&\hat{p}_0 \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) = |\hat{\boldsymbol{p}}| \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}), \qquad |\hat{\boldsymbol{p}}| = \left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{17}
$$

где $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — вектор-функции.

Теорема 2. *Алгебрами инвариантности системы (17) является 9-мерная алгебра Ли группы $GL(3) \otimes GL(3)$ и 10-мернал алгебра Ли группы Пуанкаре.*

Доказательство. Система (17) с помощью матричного преобразования

$$
U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{18}
$$

где $\mathbf{1}$ — (3×3)-единичная матрица, приводится к распадающейся системе шести интегродифференциальных уравнений

$$
\hat{p}_0 \Phi(t,\boldsymbol{x}) = Q_0 |\hat{\boldsymbol{p}}| \Phi(t,\boldsymbol{x}), \qquad Q_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{19}
$$

Из (19) следует, что уравнение (17) инвариантно относительно 9-мерной алгебры Ли группы $GL(3) \otimes GL(3)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (19) инвариантно относительно следующих двух наборов десяти операторов, образующих алгебру Пуанкаре:

$$
P_\mu^{\mathrm{III}} = \hat{p}_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad J_{\mu\nu}^{\mathrm{III}} = x_\mu \hat{p}_\nu - x_\nu \hat{p}_\mu, \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_0^{\mathrm{IV}} = |\hat{\boldsymbol{p}}| = \left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2\right)^{1/2}, \qquad P_a^{\mathrm{IV}} = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1,2,3, \\
&J_{ab}^{\mathrm{IV}} = x_a \hat{p}_b - x_b \hat{p}_a, \qquad J_{0a}^{\mathrm{IV}} = x_0 \hat{p}_a - \frac{1}{2}\left(x_a |\hat{\boldsymbol{p}}| + |\hat{\boldsymbol{p}}| x_a\right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Замечание 2. Алгебра Пуанкаре, заданная интегродифференциальными операторами (21), порождает нелоренцовские преобразования для координат и времени. Действительно,

$$
t' = \exp\left(i J_{0a}^{\mathrm{IV}} \theta_a\right) t \exp\left(-i J_{0a}^{\mathrm{IV}} \theta_a\right) = t,
$$

т.е. время не меняется при переходе от одной инерциальной системы к другой. Это означает, что релятивистские уравнения движения допускают, помимо лоренцовских преобразований, при которых время изменяется, еще и преобразование с абсолютным временем, т.е. релятивистские уравнения допускают двойственную инвариантность. Более подробно см. [3, 5].

Замечание 3. Нетривиальная а.и. уравнения (1) может быть установлена с помощью диагонализации и в том случае, когда $\hat{L}(x,\boldsymbol{p})$ — абстрактный самосопряженный оператор, обладающий кратным (непростым) спектром. Чем больше кратность спектра оператора $\hat{L}(x,\boldsymbol{p})$, тем шире а.и. уравнения (1).

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
2. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3; препринт Ин-та теоретич. физики АН УССР, № 70-32, Киев, 1970.
3. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508;
   Фущич В.И., *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 570.
4. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Укр. мат. журн.*, 1976, **26**, № 6, 836;
   Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, 471.
5. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978.

On the new invariance group of Maxwell equations

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

It was Heaviside [1] who first called attention to the invariance of Maxwell equations under the transformations

$$\boldsymbol{E} \to \pm\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{H} \to \pm\boldsymbol{E}.$$

Then Larmor [2] and Rainich [3] generalized this fact and demonstrated that Maxwell equations well invariant under the one-parametrical group of transformations of a kind

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}\cos\theta + \boldsymbol{H}\sin\theta,$$
$$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}\cos\theta - \boldsymbol{E}\sin\theta.$$

It is well-known also, that Maxwell equations are invariant under 15-parametrical conformal group C_4, which includes 10-parametrical Poincaré group and 5-parametrical conformal transformations [4].

Within the framework of Lie approach [5] the 16-parametrical group of the abovementioned transformations is maximally extensive symmetry group of Maxwell equations.

It was demonstrated in works [6, 7] that all relativistic motion equations possess an additional (non obvious) invariance which in principle could not be found by the classical Lie method. Specifically in [7] there was formulated the theorem about the additional invariance of Maxwell equations

$$\begin{gathered}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H} = -i\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} = i\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H} = 0, \qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a},\end{gathered} \tag{1}$$

under the group $U_2 \otimes U_2$. This group is generated not by the local co-ordinate transformations, but by the transformations of vectors of electric and magnetic fields of the kind

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x_a\partial x_b}, \frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial x_a\partial x_b}, \dots\right), \\ \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x_a\partial x_b}, \frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial x_a\partial x_b}, \dots\right),\end{gathered} \tag{2}$$

where the functions $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$ in general depend on any-order derivatives of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ and on eight arbitrary parameters. However the explicit form of the functions $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$ had not been found in [7].

The aim of the prevent work is to find the explicit form of the transformations (2), by which eqs. (1) remain invariant, and which form the representation of the group

Lettere al Nuovo Cimento, 1979, **24**, № 7, P. 220–224.

$U_2 \otimes U_2$. The result will be obtained with the help of non-Lie method for investigation of the group properties of differential equations, which has been proposed and developed in [6–10].

We shall prove the following assertion:

Theorem 1. *The Maxwell equations (1) are invariant with respect to the eight-parametrical transformations*

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_1 + iD_{ab}E_b \sin\theta_1, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_1 + iD_{ab}H_b \sin\theta_1, \end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_2 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}E_d \sin\theta_2, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_2 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}H_d \sin\theta_2, \end{aligned} \tag{3b}$$

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_3 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b H_c \sin\theta_3, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_3 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b E_c \sin\theta_3, \end{aligned} \tag{3c}$$

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_4 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}H_d \sin\theta_4, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_4 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}E_d \sin\theta_4, \end{aligned} \tag{3d}$$

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_5 + D_{ab}H_b \sin\theta_5, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_5 - D_{ab}E_b \sin\theta_5, \end{aligned} \tag{3e}$$

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_6 + E_a \sin\theta_6, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_6 - H_a \sin\theta_6, \end{aligned} \tag{3f}$$

$$\begin{aligned} H_a &\to H_a \cos\theta_7 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b E_c \sin\theta_7, \\ E_a &\to E_a \cos\theta_7 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b H_c \sin\theta_7, \end{aligned} \tag{3g}$$

$$H_a \to H_a \exp[i\theta_8], \qquad E_a \to E_a \exp[i\theta_8], \tag{3h}$$

where

$$D_{ad} = \left[\left(p_a^2 p_b^2 + p_a^2 p_c^2 - p_b^2 p_c^2\right)\delta_{ad} + p_1 p_2 p_3 (p_b \delta_{cd} + p_c \delta_{bd} - p_a \hat{p}_d)\right] L^{-1},$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[p_1^4 \left(p_2^2 - p_3^2\right)^2 + p_2^4 \left(p_3^2 - p_1^2\right)^2 + p_3^4 \left(p_1^2 - p_2^2\right)^2\right],$$

$\hat{p}_a = p_0/p$, (a,b,c) *is the cycle* $(1,2,3)$, θ_k *are arbitrary real parameters,*

$$p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}.$$

Proof. The invariance of eqs. (1) under the trivial phase transformations (3h) is obvious. It is not difficult to make sure by the direct verification, that eqs. (1) are invariant also under the rest of the transformations (3a)–(3g), and that the infinitesimal operators of transformations (3) satisfy Lie algebra of the group $U_2 \otimes U_2$. But such a way is too cumbersome. More constructive approach, which gives the method for finding the explicit form of transformations (3) consists in reduction of the eqs. (1) to such a form, for which the theorem statements become obvious.

Let us write eqs. (1) in the form [11]

$$
\begin{aligned}
&L_1\Psi = 0, \qquad L_1 = i\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p},\\
&L_2\Psi \neq 0, \qquad L_2 = \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

where

$$
\begin{gathered}
\Psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_a \end{pmatrix},\\
\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$\hat{I}$ and $\hat{0}$ are the three-row square unit and zero matrices.

Following the main algorithm of non-Lie approach of investigation of differential-equation group properties [6–10], let us transform the eqs. (4) to the canonical quasi-diagonal form. Using for this purpose the operator

$$
W = \exp\left[(\sigma_2 - 1)D\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\,\frac{\pi}{4}\right]\exp\left[-i\frac{S_a\hat{p}_a}{\tilde{p}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\tilde{p}}{p_1+p_2+p_3}\right], \tag{6}
$$

where

$$
\begin{aligned}
&\tilde{p}_a = p_b - p_c, \qquad \tilde{p} = \left(\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_3^2\right)^{1/2},\\
&D = \Bigg\{\sum_{a\neq b\neq c}\left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + \right.\\
&\qquad \left. + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right] - pp_1p_2p_3\left[1 - \left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right)^2\right]\Bigg\}L^{-1},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

and taking into account the relations

$$
D\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D, \qquad D\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right)^2 = D, \qquad \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D^2 = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} \tag{8}
$$

one obtains from (5) the following equations:

$$
\begin{aligned}
&L_1'\Psi' = 0, \qquad L_1' = WL_1W^{-1} = i\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda p, \qquad \Psi' = W\Psi,\\
&L_2'\Psi' \neq 0, \qquad L_2' = WL_2W^{-1} = \Lambda p, \qquad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_1+S_2+S_3),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Equations (9) by definition are invariant with respect to the transformations $\Psi' \to Q_k'\Psi'$ if an operator Q_k' satisfies the conditions

$$
[L_1', Q_k']\Psi' = [L_2', Q_k']\Psi' = 0. \tag{10}
$$

Conditions (10) are obviously satisfied by the matrices

$$
Q_a' = \sigma_a\Lambda, \qquad Q_{a+3}' = \sigma_a\Lambda^2, \qquad Q_7' = \Lambda, \qquad Q_8' = I, \qquad a = 1,2,3. \tag{11}
$$

The operators (11) satisfy the commutation relations

$$\begin{aligned}
&[Q'_a, Q'_b] = [Q'_{a+3}, Q'_{3+b}] = i\varepsilon_{abc}Q'_c, \\
&[Q'_b, Q'_{3+b}] = i\varepsilon_{abc}Q'_{3+c}, \qquad [Q'_7, Q'_k] = [Q'_8, Q'_k] = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

i.e. form the Lie algebra of the group $U_2 \otimes U_2$. Since $(Q'_k)'\Psi' = \Psi'$, the operators Q'_a, Q'_{3+a} the representation $D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ of the group $SU_2 \otimes SU_2$. It is not difficult make certain to show, that formulae (11) give the complete set of numerical matrices, satisfying the conditions (10).

It follows from the above, that eqs. (9) are invariant under an arbitrary transformation from the group $U_2 \otimes U_2$

$$\Psi' \to \exp\left[iQ'_k\theta_k\right]\Psi' = \left(\cos\theta_k + iQ'_k\sin\theta_k\right)\Psi', \tag{13}$$

where θ_k is an arbitrary parameter, and Q'_k is any generator, given by formula (11) (no sum over k!). Returning with the help of the operator (6) to the initial Ψ-representation one obtains from (13) the transformations, under which eqs. (4) remain invariant

$$\Psi \to (\cos\theta_k + iQ_k\sin\theta_k)\Psi, \tag{14}$$

where

$$\begin{aligned}
&Q_k = W^{-1}Q'_kW, \qquad Q_1 = \sigma_1 D, \qquad Q_2 = i\sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}D, \\
&Q_3 = \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad Q_{3+a} = \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad Q_7 = \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad Q_8 = I.
\end{aligned} \tag{15}$$

Substituting (15), (8), (6) into (14), one comes to formulae (3). The theorem is proved.

So we have found new eight-parametrical symmetry group of Maxwell equations, given by the transformations (3). These transformations are unitary with respect to the scalar product

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\,\Psi_1^\dagger\Psi_2. \tag{16}$$

Substituting expression (6) for the function Ψ into (16) and claiming for the $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ to be Hermitian, one comes to the conclusion, that the transformations (3) preserve the value

$$\mathcal{E} = \int d^3x\,(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2),$$

which determines the energy of an electromagnetic field.

The main property of the transformations (3) is that they are carried out by nonlocal (integro-differential) operators (the only exceptions are the phase transformation (3h) and the transformation (3f), which coincides with Heaviside–Larmor–Rainich one). It is to be emphasized, that tin transformations (3) have nothing to do with Lorentz transformations, since they realize unitary finite-dimensional representation of compact group $U_2 \otimes U_2$.

In analogy with theorem 1 it can be demonstrated, that the first couple pair of Maxwell equations

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} = i\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H} = -i\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

is invariant under the group $U_2 \otimes U_2 \otimes U_2$.

Let us note in conclusion that transformations (3) do not form a closed group jointly with ordinary local Lorentz and conformal transformations. But the representation of the comformal group C_4 on the set of solutions of eqs. (1) may be realized also in the class of nonlocal integro-differential operators [12]. In such a way the following statement may be proved [10]:

Theorem 2. *Maxwell equations (1) are invariant under 23-dimensional Lie algebra of group* $C_4 \otimes U_2 \otimes U_2$.

We do not give here the explicit form of this algebra basis elements.

1. Heaviside O., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423.
2. Larmor J., Collected Papers, London, 1928.
3. Rainich G.Y., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
4. Bateman H., *Proc. Math. Soc.*, 1909, **8**, 77;
Cunningham E., *Proc. Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
5. Ovsjannikov L.V., The Group Analysis of Differential Equations, Moscow, 1978 (in Russian).
6. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **7**, 3 (in Russian).
7. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508.
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 347; 1978, **21**, 541.
9. Fushchych W.I., On the new method of incestigations of group properties of systems of partial differential equations, in Group-Theoretical Methods in Mathematical Physics, (Kiev, 1978 (in Russian).
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Group properties of Maxwell equations, in Group-Theoretical Methods in Mathematical Physics, Kiev, 1978 (in Russian).
11. Good R.H., *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1914;
Beckers J., *Nuovo Cimento*, 1965, **33**, 1362.
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, 471.

On the new invariance algebras of relativistic equations for massless particles

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

We show that the massless Dirac equation and Maxwell equations are invariant under a 23-dimensional Lie algebra, which is isomorphic to the Lie algebra of the group $C_4 \otimes U(2) \otimes U(2)$. It is also demonstrated that any Poincaré-invariant equation for a particle of zero mass and of discrete spin provide a unitary representation of the conformal group and that the conformal group generators may be expressed via the generators of the Poincaré group.

1. Introduction

Bateman [1] and Cunningham [3] discovered that Maxwell's equations for a free electromagnetic field were invariant under conformal transformations. Nearly fifty years ago the conformal invariance of an arbitrary relativistic equation, for a massless particle with discrete spin was established by Dirac [4] for a spin-$\frac{1}{2}$ particle and by McLennan [20] for a particle of any spin.

Until now the question of whether the conformal group is the maximally extensive symmetry group for the equations of motion for massless particles remained unsettled. A positive answer to this question has been obtained only in the frame of the classical Sofus Lie approach (Ovsjannicov [24]), but as has been found recently, Lie methods do not permit the possibility to obtain all possible symmetry groups of differential equations.

The restriction of the Lie method is that it applies only to those symmetry groups whose generators belong to the class of differential operators of first order. Using the non-Lie approach, in which the group generators may be differential operators of any order and even integro-differential operators, the new invariance groups of relativistic wave equations have been found (Fushchych [6–9]). It was demonstrated that any Poincaré-invariant equation for a free particle of spin $s \geq 12$ possessed additional invariance under the group $SU(2) \otimes SU(2)$ (Fushchych [6, 7]); that the Kemmer–Duffin–Petiau equation was invariant under the group $SU(3) \otimes SU(3)$, and that the Rarita–Schwinger equation was invariant under the group $O(6) \otimes O(6)$ was deminstrated by Nikitin et al [23] and by Fushchych and Nikitin [10]. The non-Lie approach was also used successfully to obtain the symmetry groups of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations describing the particles in an external electromagnetic field (Fushchych and Nikitin [12]). Other examples of symmetries which cannot be obtained in the classical Lie approach are the symmetry groups of the non-relativistic oscillator (Levi–Leblond [16]) and of the hydrogen atom (Fock [5]).

In the present paper, we have found the new symmetry groups of the massless Dirac equation and of Maxwell's equations using a non-Lie approach. These groups are generated not by the transformations of coordinates, but by the transformations

J. Phys. A: Math. Gen, 1979, **12**, № 6, P. 747–757.

of the Dirac wave function Ψ and the vectors of the electric field $\boldsymbol{E}$ and the magnetic field $\boldsymbol{H}$ of the type

$$\Psi \to \Psi' = f\left(\Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial x_a}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_a \partial x_b}, \dots\right), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x_a \partial x_b}, \dots\right), \\ \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x_a \partial x_b}, \dots\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

where the functions f and $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ may depend on any order derivatives of Ψ and $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ respectively.

It is demonstrated that Maxwell's equations are invariant under the group $U(2) \otimes U(2)$; the explicit forms of the functions $\boldsymbol{g}$ and $\boldsymbol{h}$ in (1.2), which generate the transformations of such a group, are found. It is also shown that the Dirac equation (with $m = 0$) and Maxwell's equations are invariant under a 23-parametrical Lie group, which is isomorphic to the group $C_4 \otimes U(2) \otimes U(2)$. The results obtained admit immediate generalisation to the relativistic wave equations for massless particles of any spin. The conformal group generators which leave the Weyl equation and the massless Dirac equation invariant are expressed in a form which is transparently Hermitian. It is demonstrated that any (generally speaking, reducible) representation of a Poincaré group, which corresponds to zero mass and discrete spin, may be extended to the conformal group representation. The explicit expression for the generators of the conformal group C_4 via the generators of the Poincaré group $P(1,3)$ has been found. We therefore give a constructive proof of the statement that any relativistic equation for a discrete spin and zero-mass particle provides the unitary representation of the conformal group (for Maxwell and Bargman–Wigner equations this has been demonstrated by Gross [13]).

2. The Hermitian representation of the conformal group generators for any spin

The conformal invariance properties of any relativistic equation of motion for a particle of zero mass and of discrete spin may be formulated by the following statement.

Theorem 1. *Any Poincaré-invariant equation for a zero-mass and discrete spin particle is invariant under the conformal algebra C_4*, basis elements of which are given by the operators P_μ, $J_{\mu\nu}$ and*

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2}[P_0 P_a/P^2, J_{0a}]_+, \\ K_\mu &= \frac{1}{2}\left([P_0/P^2, [J_{0b}, J_{\mu b}]_+]_+ - [P_\mu/P^2, J_{0b}J_{0b}]_+\right) + g_{\mu\nu}\left(P_\nu/P^2\right)\left(\Lambda^2 - \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

where P_μ and $J_{\mu\nu}$ are the basis elements of algebra $P(1,3)$,

$$[A, B]_+ = AB + BA, \qquad P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} J_{ab} P_c P_0^{-1}$$

*We use the same notation for the groups and for the corresponding Lie algebras.

and D, K_μ are the operators which extend the algebra $P(1,3)$ to the algebra C_4.

Proof. Inasmuch as the operators P_μ and $J_{\mu\nu}$ by definition satisfy the algebra

$$\begin{aligned}&[P_\mu, P_\nu]_- = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, P_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu),\\ &[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}),\end{aligned} \tag{2.2}$$

the theorem proof is reduced to the verification of the correctness of the following commutation relations:

$$\begin{aligned}&[J_{\mu\nu}, K_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}K_\mu - g_{\mu\lambda}K_\nu),\\ &[K_\mu, P_\nu]_- = 2i(g_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}),\\ &[D, P_\mu]_- = iP_\mu, \qquad [D, K_\mu]_- = -iK_\mu,\\ &[K_\mu, K_\nu]_- = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, D]_- = 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

which determine together with (2.2) the algebra C_4 (see, e.g., Mack and Salam [19]). It is not difficult to carry out such a verification, bearing in mind that for the set of solutions of any relativistic equation for a particle of zero mass and of discrete spin the following relations are satisfied:

$$P_\mu P^\mu = 0, \qquad W_\mu W^\mu = 0, \qquad W_\mu = \Lambda P_\mu, \tag{2.4}$$

where W_μ is the Lubansky–Pauli vector

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma.$$

So the formulae (2.1) have determined the explicit form of the conformal group generators via the given generators P_μ, $J_{\mu\nu}$ of the group $P(1,3)$. The theorem is proved.

We note that the generators K_μ and D are written in a transparently Hermitian form, and hence they generate the unitary representation of the conformal group. The constructive character of theorem 1 will be demonstrated in the next section.

3. Manifestly Hermitian representation of the conformal group generators for Dirac and Weyl equations

The results given above may be used to find the explicit form of the generators of the conformal group representation, which is realised on the set of solutions of any relativistic equation for a massless particle. In this section we shall demonstrate it by the examples of the massless Dirac equation and of the Weyl equation.

The Dirac equation for a massless particle of spin $\frac{1}{2}$ may be written in the form

$$L\Psi = 0, \qquad L = i\frac{\partial}{\partial t} - \gamma_0\gamma_a p_a, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{3.1}$$

where γ_μ are the four-row Dirac matrices.

$\{Q_A\}$ denotes the set of the generators of some Lie group G. Equation (3.1) is by definition invariant under G if the operators Q_A satisfy the relations

$$[L, Q_A]_- = F_A L, \tag{3.2}$$

where F_A are some operators which are defined on the set of the solutions of equation (3.1).

A well known example of such operators is the set of Poincaré group generators

$$
\begin{aligned}
&P_0 = H = \gamma_0\gamma_a p_a, \qquad P_a = p_a,\\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, H]_+,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

where

$$
x_0 = t, \qquad S_{ab} = \frac{1}{4} i(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a).
$$

According to theorem 1, the representation (3.3) may be extended to the representation of Lie algebra of the conformal group. Substituting (3.3) into (2.4), one obtains the operators

$$
\begin{aligned}
&D = \frac{1}{2}[x_\mu, P_\mu],\\
&K_\mu = [J_{\mu\nu}, x^\nu]_+ + \frac{1}{2}[P_\mu, x_\nu x^\nu]_+
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

which satisfy the invariance condition (3.2) (where $F_A \equiv 0$) and the commutation relations (2.5). The operators (3.3) and (3.4) are transparently Hermitian under the usual scalar product

$$
(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \Psi_2
\tag{3.5}
$$

and therefore generate the unitary representation of the conformal group.

Let us note that on the set of solutions of equation (3.1) the generators (3.3) and (3.4) may also be written in the usual form (see e.g. Mack and Salam [19])

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = p_\mu = i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad D = x_\mu p^\mu + \frac{3}{2} i,\\
&J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{1}{4} i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_-,\\
&K_\nu = 2x_\nu D - x_\mu x^\mu p_\nu - \frac{1}{2} x^\mu [\gamma_\nu, \gamma_\mu]_-,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

which is not, however, manifestly Hermitian.

The Weyl equation for the neutrino,

$$
i\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sigma_a p_a \phi,
\tag{3.7}
$$

where σ_a are Pauli matrices, is equivalent to the equation (3.1) with the Poincaré-invariant subsidiary condition

$$
(1 + i\gamma_4)\Psi = 0, \qquad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.
\tag{3.8}
$$

The exact form of the Hermitian generators of the conformal group which are provided by equation (3.7) may be obtained from (3.3) and (3.4) by the substitution

$$
p_0 \to \sigma_a p_a, \qquad S_{ab} \to \frac{1}{4} i(\sigma_a\sigma_b - \sigma_b\sigma_a).
\tag{3.9}
$$

Finally, if P_μ and $J_{\mu\nu}$ are the generators of the irreducible representation of the Poincaré group in Lomont–Moses [18] form, then the formulae (2.1) give the conformal group generators in the form of Bose and Parker [2].

4. The additional symmetry of the Dirac equation with mass $m = 0$

Some years ago the new invariance algebra of equation (3.1) was found (Fushchych [6, 7]); this is different from the algebra of the conformal group generators. The basis elements of this algebra have the form

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{ab} = S_{ab} - \frac{1}{2}\left(\gamma_a\hat{p}_b - \gamma_b\hat{p}_a\right)\left(1 + \gamma_a\hat{p}_a\right), \\
&\Sigma_{4a} = \frac{1}{2}\gamma_4\gamma_a + \frac{1}{2}\gamma_4\hat{p}_a\left(1 + \gamma_b\hat{p}_b\right),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

where

$$\hat{p}_a = p_a p^{-1}, \qquad p = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}, \qquad a, b = 1, 2, 3.$$

The operators (4.1) realise the representation $D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ of the Lie algebra of the group $O(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$, but do not form the closed algebra together with (3.3), (3.4) or (3.8). Below we will obtain the 23-dimensional invariance algebra of equation (3.1), which includes the Lie algebras of the groups C_4 and $U(2) \otimes U(2)$.

Theorem 2. *The Dirac equation (3.1) is invariant under the 23-dimensional Lie algebra, which is isomorphic to the algebra of generators of the group $C_4 \otimes U(2) \otimes U(2)$. The basis elements of this algebra have the form*

$$\begin{aligned}
&P_0 = p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\
&J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 - \frac{iH}{2p}(1 - i\gamma_4)\gamma_a\gamma_b\hat{p}_b + \hat{\Sigma}_{0a}, \qquad D = x_\mu p^\mu + i, \\
&K_\mu = \left(-x_\nu x^\nu + J_{ab}S_{ab}p^{-2} + p^{-2}\right)p_\mu + 2\left[x_\mu + (1 - \delta_{\mu 0})(1 - \gamma_0)S_{\mu b}\hat{p}_b\right]D, \quad (4.2) \\
&\hat{\Sigma}_{0c} = \frac{1}{2}\gamma_4\left(\hat{p}_a + \gamma_0 S_{ab}\hat{p}_b\right), \qquad \hat{\Sigma}_5 = \frac{H}{p}, \\
&\hat{\Sigma}_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\frac{H}{p}\hat{\Sigma}_{0c}, \qquad \hat{\Sigma}_6 = 1, \qquad a, b, c = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

Proof. Let us transform equation (3.1) and the generators (4.2) to a representation in which the theorem statements may easily be verified immediately. Using for this purpose the operator

$$V = V^{-1} = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_0 + (1 - \gamma_0)\varepsilon_{abc}S_{ab}\hat{p}_c\right] \tag{4.3}$$

one obtains

$$L'\Psi' = 0, \qquad \Psi' = V\Psi, \qquad L' = VLV^{-1} = i\frac{\partial}{\partial t} - i\gamma_4 p, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&P'_\mu = VP_\mu V^{-1} = P_\mu, \qquad J'_{ab} = VJ_{ab}V^{-1} = J_{ab},\\
&J'_{0a} = VJ_{0a}V^{-1} = x_0p_a - x_ap_0 + \frac{1}{2}i\gamma_0\gamma_a,\\
&D' = VDV^{-1} = D = x_\mu p^\mu + i,\\
&K'_\mu = VK_\mu V^{-1} = -x_\nu x^\nu p_\mu + 2x_\mu D',\\
&\hat{\Sigma}'_{ab} = V\hat{\Sigma}_{ab}V^{-1} = S_{ab}, \qquad \hat{\Sigma}'_{0a} = V\hat{\Sigma}_{ab}V^{-1} = \frac{1}{2}i\gamma_0\gamma_a,\\
&\hat{\Sigma}'_5 = V\hat{\Sigma}_5V^{-1} = i\gamma_4, \qquad \hat{\Sigma}'_6 = V\hat{\Sigma}_6V^{-1} = \hat{\Sigma}_6,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

It is not difficult to be convinced that the operators (4.4) and (4.5) satisfy the invariance condition (3.2):

$$\begin{aligned}
&[L', P'_\mu]_- = [L', J'_{ab}]_- = [L', \hat{\Sigma}_{\mu\nu}]_- = [L', \hat{\Sigma}'_\alpha]_- = 0,\\
&[L', K'_0]_- = 2i\left[x_0 + (x_ap_a - i)i\gamma_4 p^{-1}\right]L', \qquad [L', K'_a]_- = 2i(x_a + i\hat{p}_a x_0\gamma_4)L',\\
&[L', D]_- = iL', \qquad [L', J'_{0a}]_- = \gamma_4\hat{p}_a L'
\end{aligned}$$

and the commutation relations for $Q'_A \subset \left\{P'_\mu, J'_{\mu\nu}, K'_\mu, D', \hat{\Sigma}'_{\mu\nu}, \Sigma'_\alpha\right\}$

$$\begin{aligned}
&[P'_\mu, P'_\nu]_- = 0, \qquad [P'_\mu, J'_{\nu\lambda}]_- = i(g_{\mu\lambda}P'_\nu - g_{\nu\lambda}P'_\mu),\\
&[J'_{\mu\nu}, J'_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}J'_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}J'_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}J'_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J'_{\mu\lambda}),\\
&[P'_\mu, D']_- = -iP'_\mu, \qquad [K'_\mu, D']_- = iK'_\mu, \qquad [J'_{\mu\nu}, D']_- = 0,\\
&[P'_\mu, K'_\nu]_- = 2i(J'_{\mu\nu} - \hat{\Sigma}'_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}D'),\\
&[J'_{\mu\nu}, \hat{\Sigma}'_{\lambda\sigma}]_- = [\hat{\Sigma}'_{\mu\nu}, \hat{\Sigma}'_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}\hat{\Sigma}'_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\hat{\Sigma}'_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\hat{\Sigma}'_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\hat{\Sigma}'_{\mu\lambda}),\\
&[\hat{\Sigma}'_{\mu\nu}, P'_\lambda]_- = [\hat{\Sigma}'_{\mu\nu}, D']_- = [\hat{\Sigma}'_{\mu\nu}, K'_\lambda]_- = [\hat{\Sigma}'_\alpha, Q'_A]_- = 0.
\end{aligned}$$

The algebra (4.6) is isomorphic to the algebra of generators of the group $C_4 \otimes U(2) \otimes U(2)$. The theorem is therefore proved.

We note that the subsidiary condition (3.8) is not invariant under the transformations which are generated by the operators $\hat{\Sigma}_{\mu\nu}$. Therefore the Weyl equation (3.7) is not invariant relative to the whole algebra (4.2), but is invariant with respect to its subalgebra C_4.

It should be emphasised that the generators (4.2) belong to the class of nonlocal integro-differential operators, and therefore one cannot obtain them in the classical Lie approach.

5. The symmetry of Maxwell's equations

The Maxwell equations for a free electromagnetic field have the form

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = i\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{H} = -i\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\\
&\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

where $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ are the vectors of the electric and magnetic field strengths.

Equations (5.1) are invariant under the conformal group. It is well known that these equations are also invariant under the transformations (Heaviside [14], Larmor [15])

$$E_a \to H_a, \qquad H_a \to -E_a \tag{5.2}$$

and under the more general ones (Rainich [25])

$$\begin{aligned} E_a &\to E_a \cos\theta + H_a \sin\theta, \\ H_a &\to H_a \cos\theta - E_a \sin\theta, \end{aligned} \tag{5.3}$$

We now demonstrate that the summetry of the Maxwell equations is more extensive, namely that the equations (5.1) are invariant under the set of transformations which realise the representation of the group $U(2)\otimes U(2)$ and include (5.3) as a one-parameter subgroup. The theorem about such an invariance of the Maxwell equations in the class of transformations of kind (1.1) and (1.2) had been formulated by one of us (Fushchych [9]) without showing the exact form of the functions $\boldsymbol{g}$ and $\boldsymbol{h}$. Below we give the explicit transformation laws for E_a and H_a.

Theorem 3. *The Maxwell equations (5.1) are invariant under the transformations*

$$\begin{aligned} H_a \to H'_a &= H_a \cos\theta + \left[iD_{ab}E_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(H_c\theta_3 + iD_{cd}E_d\theta_2)\right]\frac{\sin\theta}{\theta}, \\ E_a \to E'_a &= E_a \cos\theta + \left[iD_{ab}H_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(E_c\theta_3 + iD_{cd}H_d\theta_2)\right]\frac{\sin\theta}{\theta}; \end{aligned} \tag{5.4a}$$

$$\begin{aligned} H_a \to H''_a &= H_a \cos\lambda - \left[i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}H_d\lambda_1 + D_{ad}H_d\lambda_2 - E_a\lambda_3\right]\frac{\sin\lambda}{\lambda}, \\ E_a \to E''_a &= E_a \cos\lambda + \left[i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}E_d\lambda_1 + D_{ad}E_d\lambda_2 - H_a\lambda_3\right]\frac{\sin\lambda}{\lambda}; \end{aligned} \tag{5.4b}$$

$$\begin{aligned} H_a \to H'''_a &= H_a \cos\eta - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b E_c \sin\eta, \\ E_a \to E'''_a &= E_a \cos\eta + \varepsilon_{abc}\hat{p}_b H_c \sin\eta; \end{aligned} \tag{5.4c}$$

$$\begin{aligned} H_a \to H''''_a &= \exp(i\phi)H_a, \\ E_a \to E''''_a &= \exp(i\phi)E_a, \end{aligned} \tag{5.4d}$$

where

$$\begin{aligned} D_{ad} &= \left[\left(p_a^2p_c^2 + p_a^2p_b^2 - p_b^2p_c^2\right)\delta_{ad} + p_1p_2p_3\left(p_b\delta_{cd} + p_c\delta_{bd} - p_a\hat{p}_d\right)\right]L^{-1}, \\ L &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[\left(p_1^2 - p_2^2\right)p_3^4 + \left(p_1^2 - p_3^2\right)p_2^4 + \left(p_2^2 - p_3^2\right)p_1^4\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

and where (a,b,c) is a cyclic permutation of $(1,2,3)$;

$$\lambda = \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)^{1/2}, \qquad \theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}.$$

θ_a, λ_a, η and ϕ are real parameters. The transformations (5.4) realise the representation of the group $U(2)\otimes U(2)$.

Proof. One can be convinced by the direct verification that E'_a, H'_a, E''_a, H''_a, E'''_a, H'''_a, E''''_a, H''''_a satisfy equation (5.1) as well as the non-transformed vectors $\boldsymbol{E}$ and

$\boldsymbol{H}$ but a more elegant and constructive way, which shows the method of obtaining the group (5.4) is to transform the equations to a form for which the theorem statements become obvious.

Let us write equations (5.1) in the matrix form (Fushchych and Nikitin [10, 11], Nikitin and Fushchych [22])

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \alpha_a p_a \Psi, \qquad \sigma_3 S_{4a} p_a \Psi = 0, \tag{5.5}$$

where Ψ is an eight-component wavefunction

$$\Psi = \text{column}(H_1, H_2, H_3, \phi_1, E_1, E_2, E_3, \phi_2) \tag{5.6}$$

and α_a, S_{4a} are matrices of the form

$$\begin{gathered}\alpha_a = 2\sigma_2\tau_a,\\ \sigma_2 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}, \qquad \tau_a = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_a & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_a \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{5.7}$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{4a} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{4a} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{S}_{4a} \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$\hat{0}$ and $\hat{I}$ are four-row square zero and unit matrices. The matrices $\hat{S}_{4a}$ and

$$\hat{S}_{ab} = \frac{1}{2}\left(\hat{S}_{4c} + 2\hat{\tau}_c\right)\varepsilon_{abc}$$

realize the representation $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ of the algebra $O(4)$. Writing equations (5.5) by components, one obtains the usual form for the Maxwell equation (5.1) and the conditions for ϕ_1 and ϕ_2:

$$\phi_1 = C_1, \qquad \phi_2 = C_2,$$

where C_1 and C_2 are constants which may be equated to zero without loss of generality*.

Using the unitary operator

$$U = \exp\left(-i\frac{S_a\tilde{p}_a}{\tilde{p}}\tan^{-1}\frac{\tilde{p}}{p_1+p_2+p_3}\right), \tag{5.8}$$

where

$$\tilde{p}_a = p_b - p_c, \qquad \tilde{p} = \left(\tilde{p}_1^2+\tilde{p}_2^2+\tilde{p}_3^2\right)^{1/2}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_{bc} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{bc} \end{pmatrix},$$

one reduces the equations (5.5) to the symmetrical form

$$\begin{aligned} &L_1'\Phi = 0, \qquad L_1' = UL_1U^\dagger = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p; \\ &L_2'\Phi = 0, \qquad L_2' = UL_2U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{41}+S_{42}+S_{43}), \qquad \Phi = U\Psi. \end{aligned} \tag{5.9}$$

The operator (5.8) also transforms the helicity operator $S_p = S_a p_a p^{-1}$ to the symmetrical matrix form:

$$US_pU^\dagger = (S_1+S_2+S_3)/\sqrt{3}.$$

The invariance condition (3.2) for the equations (5.9) takes the form

$$[L_1', Q_A']_- = f_A^1 L_1' + f_A^2 L_2', \qquad [L_2', Q_A']_- = \tilde{f}_A^1 L_1' + \tilde{f}_A^2 L_2'. \tag{5.10}$$

The conditions (5.10) are obviously satisfied by any operator which commutes with the matrices

$$A = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)/\sqrt{3} \qquad \text{and} \qquad B = (S_{41}+S_{42}+S_{43})/\sqrt{3}. \tag{5.11}$$

We choose the complete set of such operators in the form

$$\begin{aligned} &Q_{12}' = (S_1+S_2+S_3)/\sqrt{3}, \qquad Q_{23}' = iQ_{12}'Q_{31}', \\ &Q_{31}' = \sum_a (S_b - S_c)p_a^2\left(p_b^2 - p_c^2\right)L^{-1}/\sqrt{3}, \\ &Q_{4a}' = AQ_{bc}', \qquad Q_5' = A, \qquad Q_6' = \sigma_0 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{I} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Of course this is not the only possible basis set of the operators commuting with (5.11). However, we prefer the operators (5.12) because they are invariant under the permutation

$$S_a \to S_b, \qquad p_a \to p_b, \qquad a, b = 1, 2, 3.$$

*The analogous "Dirac-like" formulation of the Maxwell equations (but using a four-component wave function and subsidiary condition different from (5.5b) has been proposed previously by Lomont [17] and Moses [21].

The operators (5.12) satisfy the invariance condition (5.10) (with $f_A^1 = f_A^2 = \tilde{f}_A^1 = \tilde{f}_A^2 = 0$) and the commutation relations

$$\begin{aligned} &[Q'_{kl}, Q'_{mn}]_- = 2i(\delta_{km}Q'_{ln} + \delta_{ln}Q'_{km} - \delta_{kn}Q'_{lm} - \delta_{lm}Q'_{kn}), \\ &[Q'_5, Q'_{kl}]_- = [Q'_6, Q'_{kl}]_- = [Q'_5, Q'_6]_- = 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

These operators also satisfy the conditions

$$(Q'_{kl})^2\Phi = (Q'_5)^2\Phi = (Q'_6)^2\Phi = \Phi,$$

i.e. they realise the representation of the Lie algebra of the group $U(2) \otimes U(2)$ and Q'_{kl} form the representation $D\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ of the group $SU(2) \otimes SU(2)$.

It follows from the above that equations (5.9) are invariant under the arbitrary transformation from the group $U(2) \otimes U(2)$:

$$\begin{aligned} &\Phi \to \Phi' = \exp\left(\frac{1}{2}i\varepsilon_{abc}Q'_{ab}\theta_c\right)\Phi = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}i\theta^{-1}\varepsilon_{abc}Q'_{ab}\theta_c\right)\Phi, \\ &\Phi \to \Phi'' = \exp(iQ'_{4a}\lambda_a)\Phi = \left(\cos\lambda + iS_{4a}\lambda_a\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)\Phi, \\ &\Phi \to \Phi''' = \exp(iQ'_5\phi)\Phi = (\cos\phi + iQ'_5\sin\phi)\Phi, \\ &\Phi \to \Phi'''' = \exp(iQ'_6\eta)\Phi = \exp(i\eta)\Phi. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Returning with the help of the operator (5.8) to the starting Ψ function one obtains from (5.14) the following transformation laws:

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi' = \left(\cos\theta + \frac{1}{2\theta}\varepsilon_{abc}Q_{ab}\sin\theta\right)\Psi, \\ &\Psi \to \Psi'' = \left(\cos\lambda + \frac{i}{\lambda}Q_{4a}\lambda_a\sin\lambda\right)\Psi, \\ &\Psi \to \Psi''' = (\cos\phi + iQ_5\sin\phi)\Psi, \\ &\Psi \to \Psi'''' = \exp(i\eta)\Psi. \end{aligned} \tag{5.15}$$

where

$$\begin{aligned} &Q_{kl} = W^{-1}Q_{kl}W, \qquad Q_\lambda = W^{-1}Q_\lambda W, \quad \lambda = 5, 6, \\ &Q_{12} = S_a\hat{p}_a, \qquad Q_{23} = \sigma_1 F, \qquad Q_{31} = i\sigma_1 S_a\hat{p}_a F, \\ &Q_{4a} = \frac{1}{2}\sigma_2 S_b\hat{p}_b\varepsilon_{abc}Q_{bc}, \qquad Q_5 = \sigma_2 S_b\hat{p}_b, \qquad Q_6 = 1, \\ &F = L^{-1}\left(\sum_{a\neq b\neq c}\left[\left(p_a^2p_c^2 + p_a^2p_b^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1p_2p_3p_aS_bS_c\right] - \right. \\ &\qquad\qquad \left. -pp_1p_2p_3\left[1 - (S_a\hat{p}_a)^2\right]\right). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Substituting (5.6) and (5.16) into (5.15), we obtain the formulae (5.4). The theorem is proved.

So we have found a new eight-parameter symmetry group of the Maxwell equations which is given by the transformations (5.4). The main property of such transformations is that they are carried out by the nonlocal (integro-differential) operators.

It is necessary to emphasise that the transformations (5.4) have nothing to do with the Lorentz ones, inasmuch as they realise the unitary finite-dimensional representation of the compact group $U(2)\otimes U(2)$. If $\lambda_1=\lambda_2=0$, the formulae (5.4b) give the Heaviside–Larmor–Rainich transformation (5.3).

The transformations (5.4) are unitary under the usual scalar product (3.5). Substituing (5.6) into (3.5), we discover that the transformations (5.4) do not change the quantity

$$\mathcal{E}=\int d^3x\,\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2\right),$$

which is associated with the full energy of an electromagnetic field.

If the parameters θ_a, λ_a, η and ϕ in (5.4) are the complex ones, the transformations (5.4) realise the representation of the group $GL(2)\otimes GL(2)$. Such transformations also leave the equations (5.1) invariant, but are, of course non-unitary.

Using theorem 1, we can show that equations (5.5) provide the Hermitian representation of the Lie algebra of the conformal group. The basis elements of this algebra have the form

$$\begin{aligned}
&P_0=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p},\qquad P_a=p_a,\\
&J_{ab}=x_ap_b-x_bp_a+S_{ab}=X_ap_b-X_bp_a+\hat{p}_c\Lambda,\\
&J_{0a}=tp_a-\frac{1}{2}[X_a,P_0]_+,\qquad D=\frac{1}{2}[x_a,p_a]_+-tP_0\equiv-\frac{1}{2}[X_\mu,P^\mu]_+,\\
&K_\mu=-[J_{\mu\nu},X^\nu]_++\frac{1}{2}[P_\mu,X_\nu X^\nu]_+-P_\mu\left(\Lambda^2+\frac{1}{4}\right)/p^2,
\end{aligned}\tag{5.17}$$

where

$$X_0=x_0=t,\qquad \Lambda=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{ab}\hat{p}_cp^{-1},\qquad X_a=x_a+S_{ab}p_bp^{-2}.$$

But the generators (5.17) together with (5.16) do not form the closed algebra. The symmetry of equations (5.5) under the 23-dimensional Lie algebra, which includes the subalgebras C_4 and $U(2)\otimes U(2)$, is established in the following theorem.

Theorem 4. *Equations (5.5) are invariant under the 23-dimensional Lie algebra, basis elements of which are the operators (5.16) and the generators*

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_\mu=p_\mu,\qquad \hat{J}_{\mu\nu}=x'_\mu p_\nu-x'_\nu p_\mu,\\
&\hat{D}=x'_\mu p^\mu+i,\qquad \hat{K}'_\mu=-x'_\nu x'^\mu p_\mu+2x'_\mu\hat{D},
\end{aligned}\tag{5.18}$$

where

$$\begin{aligned}
&x'_0=x_0,\\
&x'_a=x_a+(S_b-S_c)(\sqrt{3}p-p_1-p_2-p_3)+S_d\tilde{p}_d(\sqrt{3}\hat{p}_a+1)+\\
&\qquad+(p_b-p_c)(S_1+S_2+S_3)\{p[3p+\sqrt{3}(p_1+p_2+p_3)]\}^{-1}.
\end{aligned}$$

The proof may be carried out in full analogy with the proof of theorem 2 (but using the operator (5.8) instead of (3.3)). The operators (5.18) satisfy the algebra (2.2) and (2.3) and commute with (5.16).

It is not difficult to generalise the statements of theorem 4 to the case of “Dirac-like” equations for massless particles of any spin (Fushchych and Nikitin [11], Nikitin and Fushchych [22]).

We note that the generators (5.16) and (5.17) are nonlocal (integro-differential) ones. This means that the invariance algebra of the Maxwell equations which we have obtained in principle cannot be obtained in the classical Lie approach, where, as is well known, the group generators always belong to the class of differential first-order operators.

1. Bateman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223–264.
2. Bose S.K., Parker R., *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 812–813.
3. Cunningham E., *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1909, **8**, 77–97.
4. Dirac P.A.M., *Ann. Math.*, 1936, **37**, 429–435.
5. Fock V.A., *Z. Phys.*, 1935, **98**, 145–149.
6. Fushchych W.I., Preprint E-70-32, Institute for Theoretical Phisycs, Kiev, 1970.
7. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.* 1971, **7**, 3–12 (transl. *Theor. Math. Phys.*, 1971, **7**, 3–11).
8. Fushchych W.I., *Nuovo Cim. Lett.*, 1973, **6**, 133–138.
9. Fushchych W.I., *Nuovo Cim. Lett.*, 1974, **11**, 508–512.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Nuovo Cim. Lett.*, 1977, **19**, 347–352.
11. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Preprint 77-3, Mathematical Institute, Kiev, 1977.
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Nuovo Cim. Lett.*, 1978, **21**, 541–546.
13. Gross L., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687–695.
14. Heaviside O., Electromagnetic Theory, London, 1893.
15. Larmor, Collected papers London, 1928.
16. Levi-Leblond, *Am. J. Phys.*, 1971, **39**, 502–506.
17. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1700–1709.
18. Lomont I.S., Moses H.E., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 405–408.
19. Mack G., Salam A., *Ann. Phys., NY*, 1969, **53**, 174–202.
20. McLennan A., *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, 1360–1380.
21. Moses H.E., *Nuovo Cim. Suppl.*, 1958, **7**, 1–18.
22. Nikitin A.G., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1978, **34**, 319–333.
23. Nitikin A.G., Segeda Yu.N., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1976, **29**, 82–94 (transl. *Theor. Math. Phys.*, 1976, **29**, 943–954).
24. Ovsjannikov L.V., The Group Analyses of Differential Equations, Moscow, Nauka, 1978.
25. Rainich G.Y., *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–125.

О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре

В.М. ФЕДОРЧУК, В.И. ФУЩИЧ

Для решения многих задач современной теоретической и математической физики важно знать не только группу симметрии рассматриваемой системы, но и подгрупповую структуру этой группы. Действительно, описание всех подгрупп однородной группы Лоренца позволило П. Винтерницу и И. Фришу [1] с теоретико-групповой точки зрения подойти к задаче о разделении переменных в уравнении Лапласа. Ими доказана теорема, что каждому разбиению группы Лоренца на подгруппы, обладающие инвариантами, соответствует одна координатная система, допускающая разделение переменных.

Среди всех уравнений математики, уравнения математической физики имеют ту особенность, что все они обладают, как правило, нетривиальной симметрией. Знание группы симметрии физической системы позволяет определить многие ее свойства. Взаимодействия обычно нарушают исходную симметрию системы, но иногда сохраняется симметрия относительно одной из подгрупп исходной группы. Таким образом, описание всех подгрупп группы симметрии позволяет дать групповую классификацию граничных условий и взаимодействий.

Существует прямая связь между теорией представлений группы и ее подгрупповой структурой. Эта связь используется в теории индуцированных представлений, где различные подгруппы могут быть применены для индуцирования представлений группы.

В последнее время возрос интерес к использованию пятимерных псевдоевклидовых пространств и соответствующих групп. В работе В.И. Фущича [2] предложено в качестве группы симметрии физических систем использовать обобщенную группу Пуанкаре $P(1,4)$. Неприводимому представлению группы $P(1,4)$ модно поставить в соответствие физическую систему с переменной массой и переменным спином. Помимо этого обобщенные группы $P(1,4)$, $P(2,3)$ и т.д. могут иметь прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку и для описания частиц с внутренней структурой.

Нами изучена подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, т.е. найдены представители всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли этой группы. Сопряжение рассматривалось относительно группы внутренних автоморфизмов.

Группа $P(1,4)$ представляет собой совокупность линейных неоднородных преобразований пятимерного пространства $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 28–30 ноября 1979 г., Москва, Наука, 1980, Т.1, С. 61–66.

где $\Lambda_{\mu\nu}$ и a_μ — числа, которые оставляют инвариантной следующую квадратичную форму:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \tag{2}$$

Базисные элементы алгебры Ли группы $P(1,4)$ $\{P'_\mu, M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}\}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu, \tag{3}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}, \tag{4}$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ — метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$.

Для удобства перейдем от $M_{\mu\nu}$ и P'_μ к следующим линейным комбинациям:

$$\begin{gathered} C = M_{40}, \quad L_1 = M_{32}, \quad L_2 = -M_{31}, \quad L_3 = M_{21}, \quad P_a = M_{4a} - M_{a0}, \\ C_a = M_{4a} + M_{a0} \ (a = 1,2,3), \quad X_0 = \frac{1}{2}(P'_0 - P'_4), \quad X_k = P'_k \ (k = 1,2,3), \\ X_4 = \frac{1}{2}(P'_0 + P'_4). \end{gathered} \tag{5}$$

Для решения задачи мы использовали метод, предложенный Ж. Патерой, П. Винтерницом и Г. Цассенхаузом [3]. Этот метод сводит задачу описания представителей всех сопряженных классов непрерывных подалгебр алгебры Ли L конечной размерности $d(L)$ с нетривиальным абелевым идеалом N (сопряжение рассматривается относительно некоторой группы автоморфизмов A) к нахождению всех подалгебр идеала N и фактор-алгебры $F = L/N$ относительно соответствующих групп автоморфизмов.

В нашем случае: L — алгебра Ли группы $P(1,4)$, N — алгебра трансляций в пятимерном пространстве, A — группа внутренних автоморфизмов рассматриваемой алгебры L.

Представители F_i всех сопряженных классов непрерывных подалгебр фактор-алгебры $F = L/N$ найдены в работах Ж. Патеры и др. [4, 5]. Основной результат работы можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. *Алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит 278 представителей $P_{i,a}$ сопряженных классов непрерывных расщепляющихся подалгебр, т.е. подалгебр, которые могут быть записаны в виде*

$$P_{i,a} = F_i \mathbin{\overset{\circ}{+}} N_{i,a}, \qquad F_i \subseteq F, \qquad N_{i,a} \subseteq N \tag{6}$$

и 378 представителей $\tilde{P}_{j,k}$ сопряженных классов непрерывных нерасщепляющихся подалгебр, т.е. подалгебр, для которых базис может быть выбран в виде

$$\tilde{B}_k = B_k \sum_i c_{ki}X_i, \qquad \sum_j d_{rj}X_j. \tag{7}$$

В теореме c_{ki} и d_{rj} — константы (не равны нулю одновременно), которые не могут быть преобразованы одновременно в нуль элементом из A; B_i $(i =$

$1,\dots,d(F)$) *и* X_k ($k=1,\dots,d(N)$) *— базисы, выбранные в* F *и* N *соответственно.* $N_{i,a}$ *— представители сопряженных классов непрерывных подалгебр идеала* N *(сопряжение рассматривается относительно нормализатора* $\mathrm{Nor}_A F_i$*).*

Отметим, что нормализатор $\mathrm{Nor}_A F_i$ является подгруппой группы A, которая оставляет подалгебру F_i инвариантной.

Доказательство этой теоремы ввиду его громоздкости неприводим. Полный список всех подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ приведен в [6]. Здесь мы укажем только на несколько подалгебр, которые могут иметь физические приложения.

Полученные результаты, в частности, дают возможность сделать вывод, что группа $P(1,4)$ содержит в качестве подгруппы расширенную группу Галилея. Ее алгебра Ли задается базисными элементами:

$$\begin{aligned}&-L_1=M_{23},\quad -L_2=-M_{13},\quad -L_3=M_{12},\quad G_a=-(M_{a4}+M_{a0}),\\&P'_a\ (a=1,2,3),\quad H=-\frac{1}{2}(P'_4-P'_0),\quad M=P'_0+P'_4,\end{aligned}\tag{8}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}&[L_i,L_j]=+\varepsilon_{ijk}L_k,\qquad [L_i,P'_j]=+\varepsilon_{ijk}P'_k,\qquad [L_i,G_j]=+\varepsilon_{ijk}G_k,\\&[G_i,H]=P'_i,\qquad [G_i,P'_j]=+\delta_{ij}M,\qquad [G_i,G_j]=0,\\&[L_i,H]=[P'_i,P'_j]=[P'_i,H]=0,\\&[L_i,M]=[G_i,M]=[P'_i,M]=[H,M]=0,\quad (i,j=1,2,3).\end{aligned}\tag{9}$$

Кроме того, группа $P(1,4)$ содержит другие важные группы: $P(1,3)$, $O(1,3)$, $E(3)$, $O(3)$ и т.д. Подгрупповая структура этих групп изучена раньше.

Таким образом, обобщенная группа Пуанкаре $P(1,4)$ естественным образом объединяет группы движений нерелятивистской ($G(3)$) и релятивистской ($P(1,3)$ квантовых механик. Из этого факта, в частности, следует, что произвольное уравнение, инвариантное относительно группы $P(1,4)$, инвариантно также относительно группы Галилея $G(3)$. При этом, конечно, такое уравнение описывает частицы с нефиксированной массой и дискретным спином, поскольку оператор массы $M=P'_0+P'_4$ имеет непрерывный спектр, а оператор спина $S^2=\left(\vec{L}+\dfrac{\vec{G}\times\vec{P}'}{M}\right)^2$ имеет дискретный спектр. Это означает, что неприводимые представления группы $P(1,4)$ разлагаются в прямой интеграл (по массовой переменной) и в прямую сумму (по спину) неприводимых представлений группы $G(3)$.

В заключение выпишем несколько подалгебр высокой размерности ($\dim L\geq 10$) алгебры Ли группы $P(1,4)$. Имеется только одна 12-мерная подалгебра. Она задается базисными элементами

$$G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4.\tag{10}$$

Они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned}&[G,L_i]=0,\qquad [L_i,L_j]=\varepsilon_{ijk}L_k,\qquad [P_i,P_j]=0,\qquad [G,P_i]=-P_i,\\&[L_i,P_j]=\varepsilon_{ijk}P_k,\qquad [P_i,X_0]=X_i,\qquad [G,X_0]=X_0,\qquad [L_i,X_0]=0,\\&[P_i,X_j]=2\delta_{ij}X_4,\qquad [G,X_i]=0,\qquad [L_i,X_j]=\varepsilon_{ijk}X_k,\qquad [P_i,X_4]=0,\\&[G,X_4]=-X_4,\qquad [L_i,X_4]=0,\qquad [X_0,X_j]=0,\qquad [X_0,X_4]=0,\\&[X_i,X_j]=0,\qquad [X_i,X_4]=0,\qquad (i,j=1,2,3).\end{aligned}\tag{11}$$

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит 4 одиннадцатимерные подалгебры $A_{11,l}$ ($l = 1,\dots,4$). Выпишем их базисные элементы и коммутационные соотношения между ними. Подалгебра $A_{11,1}$ задается базисными элементами

$$G,\ L_1, L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{12}$$

и базисные элементы удовлетворяют соотношениям (11).

Подалгебра $A_{11,2}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1+C_1,\ P_2+C_2,\ P_3+C_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{13}$$

и коммутационными соотношениями:

$$\begin{gathered}
[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}L_k, \qquad [L_i, P_j+C_j] = \varepsilon_{ijk}(P_k+C_k), \qquad [L_i, X_0] = 0,\\
[L_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k, \qquad [L_i, X_4] = 0, \qquad [P_i+C_i, X_0] = X_i,\\
[P_i+C_i, X_j] = 2\delta_{ij}(X_4 - X_0), \qquad [P_i+C_i, X_4] = -X_i, \qquad [X_0, X_i] = 0,\\
[X_i, X_j] = 0, \qquad [X_i, X_4] = 0, \qquad [P_i+C_i, P_j+C_j] = 4\varepsilon_{ijk}L_k,\\
[X_0, X_4] = 0, \qquad (i,j = 1,2,3).
\end{gathered} \tag{14}$$

Подалгебра $A_{11,3}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_i - C_i\ (i = 1,2,3),\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk}L_k, \qquad [L_i, P_j - C_j] = \varepsilon_{ijk}(P_k - C_k), \qquad [L_i, X_0] = 0,\\
[L_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k, \qquad [L_i, X_4] = 0, \qquad [P_i - C_i, P_j - C_j] = -4\varepsilon_{ijk}L_k,\\
[P_i - C_i, X_0] = X_i, \qquad [P_i - C_i, X_j] = 2\delta_{ij}(X_0 + X_4), \qquad [X_0, X_i] = 0,\\
[P_i - C_i, X_4] = X_i, \qquad [X_0, X_4] = 0, \qquad [X_i, X_4] = 0, \qquad (i,j = 1,2,3).
\end{gathered} \tag{16}$$

Базисные элементы подалгебры $A_{11,4}$ и коммутационные соотношения между ними даются формулами (8) и (9).

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ содержит 4 десятимерные подалгебры $A_{10,l}$ ($l = 1,\dots.4$). Подалгебра $A_{10,1}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, \tag{17}$$

удовлетворяющими соотношениям (11).

Базисные элементы

$$G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{18}$$

подалгебры $A_{10,2}$ удовлетворяют соотношениям (11).

Базисные элементы

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1+C_1,\ P_2+C_2,\ P_3+C_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 - X_0 \tag{19}$$

подалгебры $A_{10,3}$ удовлетворяют соотношениям (14). Подалгебра $A_{10,4}$ задается базисными элементами

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 - C_1,\ P_2 - C_2,\ P_3 - C_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 + X_0 \tag{20}$$

Они удовлетворяют соотношениям (16).

1. Винтерниц П., Фриш И., *ЯФ*, 1965, **1**, 889.
2. Фущич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 717.
5. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 2259.
6. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, Препринт 78.18, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978.

Теоретико-алгебраический анализ уравнений Ламе

В.И. ФУЩИЧ, В.В. НАКОНЕЧНЫЙ

1. Постановка задачи. Система уравнений Ламе

$$\hat{L}(\hat{p})\vec{u}(t,\vec{x}) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\operatorname{div} - \alpha\Delta\right)\vec{u}(t,\vec{x}) = 0, \qquad \alpha = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \tag{1}$$

$\vec{u}(t,\vec{x}) = (u_1,u_2,u_3)$ — вектор смещения, α — параметр, $\vec{x} \in R^3$, — основной математический объект классической теории упругости. В [1] поставлена задача об отыскании алгебр инвариантности системы (1) с помощью нелиевского метода. В настоящей работе эта задача решена, т.е. найдены 4-, 10- и 15-мерные алгебры инвариантности уравнения Ламе. Базисные элементы этих алгебр инвариантности — интегро-дифференциальные операторы. Это означает, что с помощью классического метода Ли [2] такие алгебры инвариантности не могут быть найдены.

В рамках лиевского метода, где базисные элементы алгебр Ли — операторы первого порядка, максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1) является 8-мерная алгебра [3]

$$\begin{aligned} &X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1,2,3, \\ &J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a} + u_b\frac{\partial}{\partial u_a} - u_a\frac{\partial}{\partial u_b}, \\ &D = x_a\frac{\partial}{x_a} + t\frac{\partial}{\partial t}, \qquad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{2}$$

Для решения поставленной задачи представим уравнение (1) в матричном виде

$$\hat{p}_0^2 u(t,\vec{x}) = H(\hat{p}_a, s_a)u(t,\vec{x}), \tag{3}$$

$$H(\hat{p}_a, s_a) = (1+\alpha)\hat{p}^2 - (s_a\hat{p}_a)^2, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad x_0 \equiv t, \qquad a = 1,2,3, \\ &s_a\hat{p}_a = s_1\hat{p}_1 + s_2\hat{p}_2 + s_3\hat{p}_3, \qquad \hat{p}^2 = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 \equiv -\Delta. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь и дальше буквами со шляпкой обозначены операторы. Там, где это не может вызвать недоразумений, будем опускать шляпку. Матрицы s_a, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $SU(2)$

$$[s_a, s_b]_- = i\varepsilon_{abc}s_c, \qquad a,b,c = 1,2,3, \tag{6}$$

Украинский математический журнал, 1980, **32**, № 2, С. 267–272.

имеют явную структуру

$$
\begin{aligned}
&s_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&s_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{7}
$$

и реализуют трехмерное представление $D(1)$ алгебры Ли (6). Вектор-столбец $u(t,\vec{x})$ имеет три компоненты: (u_1, u_2, u_3).

Уравнение Ламе в форме (3), в отличие от (1), допускает различные обобщения. Действительно, если в уравнении (3) матрицы s_a реализуют любое представление коммутационных соотношений (6), то получаем целое семейство уравнений типа Ламе. И только в том случае, когда матрицы s_a реализуют трехмерное представление (7), уравнение (3) совпадает с уравнением Ламе (1).

Задача об отыскании алгебр инвариантности уравнения (3) состоит в явном построении некоторого множества операторов $\{\hat{Q}_A\}$, образующих алгебру Ли и удовлетворяющих условиям инвариантности

$$
\hat{L}(\hat{p}_a, s_a)\hat{Q}_A u(t,\vec{x}) = 0, \qquad A = 1, 2, \ldots, n \tag{8}
$$

или

$$
[\hat{L}, \hat{Q}_A]_- u(t,\vec{x}) = 0. \tag{9}
$$

Применить нелиевский алгоритм к уравнению (3) для вычисления алгебр инвариантности означает следующее [1, 4]: 1) систему (3) с помощью невырожденного преобразования расщепить (провести декомпозицию) на максимально возможные независимые системы; 2) найти алгебру инвариантности образованного уравнения; 3) посредством обратного преобразования найти явный вид базисных элементов алгебры инвариантности для исходного уравнения.

Все утверждения, приведенные ниже, будут доказаны с помощью этого алгоритма.

2. Конформная алгебра. Докажем, что уравнение Ламе (3) инвариантно относительно 15-мерной алгебры Ли.

Теорема 1. *Уравнение (3) инвариантно относительно 15-мерной конформной алгебры Ли $C(15)$, базисные элементы которой задаются интегро-дифференциальными операторами*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \left\{ 1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p} \right)^2 \right\}^{1/2} p_0, \qquad P_a = p_a, \quad a = 1, 2, 3, \\
&J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a, \qquad D = \tilde{x}_\mu p^\mu + i, \\
&J_{0a} = \left\{ 1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p} \right)^2 \right\}^{-1/2} \left\{ \left(1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p} \right)^2 \right) \tilde{x}_0 p_a - \tilde{x}_a p_0 \right\},
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$K_0 = -\left\{\tilde{x}_0^2 - \left(1+\alpha-\left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right)^{-1/2}\right\} p_0 + 2\left(1+\alpha-\left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right)^{1/2}\tilde{x}_0 D,$$

$$K_a = -\left\{\left(1+\alpha-\left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right)\tilde{x}_0^2 - \tilde{x}_a^2\right\} p_a + 2\tilde{x}_a D,$$

где $\tilde{x}_a^2 \equiv \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2$, *а операторы* $\tilde{x}_a$ *определяются выражениями:*

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_a = W^{-1} x_a W = x_a - \frac{1}{m}\left(\frac{s_{3a}}{p} - \frac{p_0}{p} - \frac{s_{3b}p_b}{m^2}\right) + \frac{s_{ab}p_b}{p(p+p_3)}, \quad a = 1,2, \\ &\tilde{x}_0 = W^{-1}x_0 W = x_0, \qquad \tilde{x}_3 = W^{-1}x_3W = x_3, \qquad mu \neq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Следуя нелиевскому алгоритму, преобразуем уравнение (3) с помощью такого унитарного интегрального преобразования

$$\begin{aligned} &W = \exp\left(i\frac{s_{3a}p_a}{m}\theta\right) \equiv 1 + i\frac{s_{3a}p_a}{p} - \frac{(s_{3a}p_a)^2}{p(p+p_3)}, \quad a = 1,2, \\ &\theta = \operatorname{arctg}\frac{m}{p_3}, \qquad m = \left(p_1^2+p_2^2\right)^{1/2}, \qquad s_{ab} = \varepsilon_{abc}s_c. \end{aligned} \tag{12}$$

Действуя слева оператором W на уравнение (3) и используя тождество Хаусдорфа–Кемпбелла

$$\begin{aligned} &(\exp A)B\exp(-A) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\{A,B\}^m}{m!}, \\ &\{A,B\}^{(m)} = [A,\{A,B\}^{(m-1)}]_-, \qquad \{A,B\}^{(0)} = B, \end{aligned} \tag{13}$$

получаем

$$p_0^2 v(t,\vec{x}) = H^c v(t,\vec{x}), \qquad v = Wu, \tag{14}$$

$$H^c = WHW^{-1} = \left(1+\alpha-s_3^2\right)p^2. \tag{15}$$

Поскольку s_3^2 — диагональная матрица, то система (14) расщепляется на три независимых уравнения второго порядка.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество операторов $\{Q'_A\}$, удовлетворяющих условию инвариантности

$$[L', Q'_A]_- v = 0, \tag{8'}$$

где

$$L' = p_0^2 - H^c = \hat{p}_0^2 - \left(1+\alpha-s_3^2\right)\hat{p}^2, \tag{16}$$

имеет следующую явную структуру

$$\begin{aligned} &P'_0 = \left(1+\alpha-s_3^2\right)^{1/2} p_0, \qquad P'_a = p_a, \quad a = 1,2,3, \\ &J'_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \qquad D' = x_\mu p^\mu + i, \\ &J'_{0a} = \left(1+\alpha-s_3^2\right)^{-1/2}\left\{\left(1+\alpha-s_3^2\right)x_0 p_a - x_a p_0\right\}, \\ &K'_0 = -\left\{x_0^2 - \left(1+\alpha-s_3^2\right)^{-1/2} x_a^2\right\} p_0 + 2\left(1+\alpha-s_3^2\right)^{1/2} x_0 D', \\ &K'_a = -\left\{\left(1+\alpha-s_3^2\right)x_0^2 - x_a^2\right\} p_a + 2x_a D', \end{aligned} \tag{17}$$

где $x_a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Операторы (17) — дифференциальные операторы первого порядка и удовлетворяют коммутационным соотношениям 15-мерной конформной алгебры $C(15)$ (см., например, [5])

$$\begin{aligned}
&[P'_\mu, P'_\nu]_- = 0, \qquad [J'_{\mu\nu}, P'_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}P'_\mu - g_{\mu\lambda}P'_\nu),\\
&[J'_{\mu\nu}, J'_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\nu\lambda}J'_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J'_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}J'_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J'_{\mu\lambda}),\\
&[J'_{\mu\nu}, K'_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda}K'_\mu - g_{\mu\lambda}K'_\nu), \qquad [K'_\mu, K'_\nu]_- = 0,\\
&[K'_\mu, P'_\nu]_- = 2i(g_{\mu\nu}D' - J'_{\mu\nu}), \qquad [J'_{\mu\nu}, D']_- = 0,\\
&[D', P'_\mu]_- = iP'_\mu, \qquad [D', K'_\mu]_- = -iK'_\mu, \qquad \mu,\nu,\lambda,\sigma = 0,1,2,3,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ — метрический тензор псевдоевклидова пространства $E(1,3)$.

Явный вид операторов конформной алгебры для исходного уравнения (3) получается с помощью обратного преобразования

$$Q_A = W^{-1}Q'_A W, \qquad A = 1,2,\ldots,15. \tag{19}$$

По формулам (19) находим базисные элементы алгебры инвариантности уравнения Ламе, которые, в отличие от (2), — интегро-дифференциальные операторы.

Замечание 1. Инвариантность уравнения (3) относительно конформной алгебры $C(15)$ вовсе не означает, что это уравнение инвариантно относительно собственно конформных, локальных преобразований

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - \alpha_\mu x_\nu x^\nu}{1 - 2\alpha_\nu x^\nu + \alpha_\lambda\alpha^\lambda x_\nu x^\nu}, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{20}$$

α_μ — параметры преобразования. Теорема 1 утверждает лишь то, что на множестве решений уравнения (3) реализуется представление конформной алгебры, заданное формулами (10). Операторы порождают нелокальные преобразования для координат и вектор-функции $\vec{u}(t,\vec{x})$.

Замечание 2. Преобразованное уравнение (14) — система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, поэтому оно может быть исследовано методом Ли–Овсянникова. На этом пути возможен синтез классического метода Ли с нелиевским методом [4]. Действительно, изучив групповые свойства уравнения Ламе в канонической форме с помощью метода Ли–Овсянникова, используя оператор преобразования (12), по найденной алгебре Ли группы инвариантности уравнения (14) найдем нелиевскую алгебру инвариантности исходного уравнения (3).

3. Алгебра Галилея. Докажем, что уравнение Ламе инвариантно относительно 10-мерной алгебры Галилея.

Теорема 2. *Уравнение Ламе инвариантно относительно алгебры Галилея $G(10)$, базисные элементы которой задаются интегро-дифференциальными операторами*

$$\begin{aligned}
&P_0 = \frac{p^2}{2\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0, \qquad P_a = p_a, \quad a = 1,2,3, \quad J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a,\\
&G_a = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{1}{p}, J_{0a}\right]_+ = \left\{1 + \alpha - \left(\frac{s_a p_a}{p}\right)^2\right\}^{1/2} \tilde{x}_0 \frac{\varkappa p_a}{p} - \varkappa\tilde{x}_a,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $\varkappa$ — произвольное число, а $\tilde{x}_a$, $\tilde{x}_0$ определяются формулами (11).

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 1 используем уравнение Ламе в диагональной форме (14). Для того, чтобы доказать теорему, достаточно явно указать набор операторов $\{Q''_A\}$, образующих алгебру Ли группы Галилея и удовлетворяющих условию

$$[L', Q''_A]_- v = 0, \qquad A = 1, 2, \ldots, 10. \tag{8''}$$

Нетрудно убедиться, что операторы

$$\begin{aligned} &P''_0 = \frac{p^2}{2\varkappa}, \quad \varkappa \neq 0, \qquad P''_a = p_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad J''_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ &G''_a = \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{1}{p}, J'_{0a}\right]_+ = \left\{1 + \alpha - s_3^2\right\}^{1/2} x_0 \frac{\varkappa p_a}{p} - \varkappa x_a, \end{aligned} \tag{22}$$

где J'_{0a} определяются формулами (17), образуют алгебру Галилея

$$\begin{aligned} &[J''_{ab}, J''_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J''_{bd} + \delta_{bd}J''_{ac} - \delta_{bc}J''_{ad} - \delta_{ad}J''_{bc}), \qquad [J''_{ab}, P''_0]_- = 0, \\ &[J''_{ab}, P''_c]_- = i(\delta_{ac}P''_b - \delta_{bc}P''_a), \qquad [P''_a, P''_b]_- = 0, \qquad [G''_a, P''_0]_- = 0, \\ &[J''_{ab}, G''_c]_- = i(\delta_{ac}G''_b - \delta_{bc}G''_a), \qquad [P''_a, G''_b]_- = i\varkappa\delta_{ab}, \qquad [G''_a, G''_b]_- = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

и удовлетворяют условию (8″). Явный вид базисных элементов алгебры Галилея (21), удовлетворяющих условию инвариантности (8), получен с помощью оператора преобразования (12).

Замечание 3. Так же, как и в теореме 1, инвариантность уравнения (3) относительно алгебры Галилея $G(10)$ не означает, что оно инвариантно относительно локальных преобразований Галилея

$$x'_a = R_{ab}x_b + v_a t + b_a, \qquad R_{ab}R_{bc} = \delta_{ac}, \qquad t' = t + b_0, \tag{24}$$

R_{ab}, v_a, b_a, b_0 — параметры, задающие преобразование Галилея.

4. Негеометрическая алгебра инвариантности. Найденная нами в предыдущих пунктах алгебра инвариантности уравнения Ламе порождает нелокальные преобразования независимых $(t, \vec{x}) = (t, x_1, x_2, x_3)$ и зависимых переменных $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. В некотором смысле такую симметрию уравнения (1) можно назвать геометрической [1], поскольку она возникла из-за наличия симметрии относительно пространственных координат (x_1, x_2, x_3) в уравнении (1).

Оказывается, что уравнение Ламе обладает алгеброй инвариантности, обусловленной симметрией только зависимых переменных (u_1, u_2, u_3). Эту последнюю алгебру инвариантности естественно назвать негеометрической алгеброй инвариантности.

Теорема 3. *Уравнение Ламе (3) инвариантно относительно четырехмерной алгебры Ли группы $GL(2)$, базисные элементы которой имеют вид*

$$\Sigma_0 = I, \qquad \Sigma_1 = -\tilde{\Lambda}_{12}, \qquad \Sigma_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda}_{22} - \tilde{\Lambda}_{11}), \qquad \Sigma_3 = \frac{s_a p_a}{p}, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{\Lambda}_{ab} = W^{-1}\Lambda_{ab}W = \tilde{s}_a\tilde{s}_b + \tilde{s}_b\tilde{s}_a - \delta_{ab}, \qquad \tilde{s}_3 = W^{-1}s_3W = \frac{s_a p_a}{p}, \\ &\tilde{s}_a = W^{-1}s_aW = s_a - \frac{p_a}{p}s_3 + \frac{p_a}{m^2}\left(\frac{p_3}{p} - 1\right)(s_b p_b), \qquad a = 1, 2. \end{aligned} \tag{26}$$

Доказательство. Оператор L^c уравнения Ламе в диагональном представлении имеет вид

$$L^c u = \begin{pmatrix} p_0^2 - \alpha p_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2 - \alpha p_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & p_0^2 - (1+\alpha) p_a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{27}$$

Из (27) следует, что множество всех невырожденных 3×3 матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \tag{28}$$

коммутирует с оператором L^c. В пространстве матриц размерности 3×3 выберем базис, состоящий из матриц

$$I, \quad s_a, \quad \Lambda_{ab} = s_a s_b + s_b s_a - \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3, \tag{29}$$

где s_a определены формулами (7), I — единичная матрица, причем

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{33} = I. \tag{30}$$

Используя этот базис, в множестве матриц (28) выбираем базисные алгебры $GL(2)$ в виде

$$\Sigma'_0 = I, \qquad \Sigma'_1 = -\Lambda_{12}, \qquad \Sigma'_2 = \frac{1}{2}(\Lambda_{22} - \Lambda_{11}), \qquad \Sigma'_3 = s_3. \tag{31}$$

Матрицы (31) реализуют представление $D\left(\frac{1}{2}\right) \oplus D(0)$ алгебры $GL(2)$ и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Sigma'_a, \Sigma'_b]_- = 2i\varepsilon_{abc}\Sigma'_c, \qquad [\Sigma'_0, \Sigma'_a]_- = 0, \qquad a, b, c = 1, 2, 3. \tag{32}$$

Осуществив над матрицами $\{\Sigma'_0, \Sigma'_a\}$ обратное преобразование W^{-1}, найдем явный вид операторов (26), удовлетворяющих условию инвариантности (8).

Следствие. *Уравнение Ламе (1) инвариантно относительно преобразований из группы* $SU(2) \subset GL(2)$

$$u' = \exp(i\Sigma_a \theta_a) u = \left\{ 1 + \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}_{11}(\cos\theta_a - 1) + i\Sigma_a \sin\theta_a \right\} u, \tag{33}$$

$a = 1, 2, 3$*; по* a *нет суммирования, где* Σ_a, $\tilde{\Lambda}_{11}$ *определены формулами (25), (26).*

В заключение приведем теорему о негеометрической симметрии уравнения типа (3) (обобщенного уравнения Ламе), когда $(2s+1) \times (2s+1)$ матрицы s_a реализуют конечномерное представление $D(s)$ алгебры Ли группы $SU(2)$. Число s, характеризующее неприводимое представление $SU(2)$, может быть целым или полуцелым.

Теорема 4. *Алгеброй инвариантности уравнения типа Ламе (3) является алгебра* $GL(2) \oplus GL(2) \oplus \cdots \oplus GL(2)$*, где число слагаемых в прямой сумме равно целой части числа* $\frac{1}{2}(2s+1)$*,* $s > 1$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

1. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–44.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978, 400 с.
3. Чиркунов Ю.А., Групповое свойство уравнений Ламе, В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 14, Новосибирск, 1973, 128–130.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles, *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, № 2, 471–475.

Reduction of the representations of the generalised Poincaré algebra by the Galilei algebra

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

The realisations of all classes of unitary irreducible representations of the generalised Poincaré group $P(1,4)$ have been found in a basis in which the Casimir operators of its important subgroup, i.e. the Galilei group, are of diagonal form. The exact form of the unitary operator which connects the canonical basis of the $P(1,4)$ group and the Galilei basis has been established.

1. Introduction

Some years ago it was proposed to use the generalised Poincaré group $P(1,4)$ the group of displacements and rotations in five-dimensional Minkovsky space, for the description of particles with variable masses and spins (Fushchych and Krivsky [9, 10], Fushchych [8]). This and other generalised groups $P(1,n)$, $P(2,3)$ etc were considered and used successively by Castell [4], Aghassi et al [1], Barrabes and Henry [3], Elizalde and Gomish [5] and many others.

The main property of the $P(1,4)$ group is that it contains the Poincaré group $P(1,3)$ as well as the Galilei group $G(3)$ as its subgroups[1]. So the $P(1,4)$ group unified the groups of motion of relativistic and non-relativistic quantum mechanics.

For the elucidation of the physical grounds of the generalised quantum mechanics based on the $P(1,4)$ group (Fushchych and Krivsky [9, 10, 11] the important problem is the reduction of the irreducible representations IR of the $P(1,4)$ group, or the Lie algebra of the $P(1,4)$ group, by the IR of its subgroups, or its subalgebras[2]. The problem of the reduction of IR of the $P(1,4)$ algebra corresponding to the time-like five-momenta by its subalgebra $P(1,3)$ has been solved (Fushchich et al [12], Nikitin et al [15]), i.e. the type of representations of the $P(1,3)$ algebra contained in the IR of the $P(1,4)$ algebra has been investigated and the unitary operator was found which connects the canonical basis of the $P(1,4)$ group representation with the $P(1,3)$ basis, in which the Casimir operators of the Poincaré group have the diagonal form (the spectrum of these operators is nondegenerate).

In this paper we find the realisation of the IR of the $P(1,4)$ algebra in the “Galilei basis” namely, in the basis in which the invariant operators of the Galilei subalgebra are diagonal ones. We also obtain the explicit form of the unitary operator, which carries out the reduction $P(1,3) \to G(2)$ which plays an important role in the null-plane approach (see e.g. Leutwyler and Stern [13]).

J. Phys. A: Math. Gen., 1980, **13**, P. 2319–2330.

[1]The paper of Fedorchuck [6] is devoted to the classification and the description of all subgroups of the $P(1,4)$ group.

[2]We will indicate the groups and the corresponding Lie algebras by the same indices.

2. Statement of the problem

The Lie algebra of the $P(1,4)$ group is specified by the fifteen generators P_μ, $J_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3,4)$ which satisfy the commutation relations

$$\begin{aligned}&[P_\mu,P_\nu]=0,\qquad [P_\mu,J_{\nu\sigma}]=i(g_{\mu\nu}P_\sigma-g_{\mu\sigma}P_\nu),\\&[J_{\mu\nu},J_{\rho\sigma}]=i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}+g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}-g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma}-g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

The algebra (2.1) has three main invariant (Casimir) operators (Fushchych and Krivsky [9, 10])

$$P^2=P_\mu P^\mu=P_0^2-\boldsymbol{P}^2-P_4^2,\qquad V_1=\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu},\qquad V_2=-\frac{1}{4}J_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu},\tag{2.2}$$

where

$$\omega_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}J^{\rho\sigma}P^\lambda.$$

As in the case of the Poincaré group, one can specify four different classes of the representations of the algebra (2.1), corresponding to $P^2>0$, $P^2=0$, $P^2<0$ and $P_\mu\equiv 0$ (in the last case one arrives at the representations of the homogeneous group $SO(1,4)$, which are not considered here).

Algebra (2.1) contains the Lie algebras of the Poincaré and of the Galilei groups as subalgebras. In order to select the subalgebra $P(1,3)$ it is enough to consider the relations (2.1) for $\mu,\nu\neq 4$. The subalgebra $G(3)$ may be obtained by the transition to the new basis

$$\begin{aligned}&\hat{P}_0=\frac{1}{2}(P_0-P_4),\qquad M=P_0+P_4,\qquad \hat{P}_a=P_a,\qquad K=J_{04},\\&J_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc},\qquad G_a^+=J_{0a}+J_{4a},\qquad G_a^-=\frac{1}{2}(J_{0a}-J_{4a}).\end{aligned}\tag{2.3}$$

The operators (2.3) satisfy the commutation relations

$$\begin{aligned}&[\hat{P}_0,\hat{P}_a]=[\hat{P}_0,M]=[\hat{P}_a,M]=[\hat{P}_a,\hat{P}_b]=0,\\&[\hat{P}_0,J_a]=[M,J_a]=[G_a^+,G_b^+]=[M,G_a^+]=0,\\&[\hat{P}_a,J_b]=i\varepsilon_{abc}\hat{P}_c,\qquad [G_a^+,\hat{P}_b]=i\delta_{ab}M,\\&[J_a,J_b]=i\varepsilon_{abc}J_c,\qquad [\hat{P}_0,G_b^+]=i\hat{P}_b,\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}&[\hat{P}_0,G_a^-]=[G_a^-,G_b^-]=0,\qquad [G_a^-,M]=-i\hat{P}_a,\qquad [G_a^-,J_b]=i\varepsilon_{abc}G_c^-,\\&[G_a^-,\hat{P}_b]=-i\delta_{ab}\hat{P}_0,\qquad [G_a^+,G_b^-]=i(\varepsilon_{abc}J_c+\delta_{ab}K),\qquad [\hat{P}_0,K]=-i\hat{P}_0,\\&[\hat{P}_a,K]=[J_a,K]=0,\qquad [M,K]=iM,\qquad [G_a^\pm,K]=\pm G_a^\pm.\end{aligned}\tag{2.5}$$

The commutation relations (2.4) specify the Lie algebra of the extended Galilei group (Bargman [2]). The invariant operators of this algebra are given by the formulae

$$C_1=2M\hat{P}_0-\boldsymbol{P}^2,\qquad C_2=(M\boldsymbol{J}-\hat{\boldsymbol{P}}\times\boldsymbol{G}^+)^2,\qquad C_3=M.\tag{2.6}$$

Our aim is to find the realisations of the generators (2.3) for any class of IR of the $P(1,4)$ algebra, in a basis where the Casimir operators (2.6) have a diagonal form. This enables us to answer the question what IR of the $G(3)$ algebra are contained in the given representation of the $P(1,4)$ algebra and to establish the connection between the vectors in the Poincaré and in the Galilei bases.

The realisations of all IR of the $P(1,4)$ algebra have already been found (Fushchych and Krivsky [9, 10, 11], Fushchych [8]). So the problem of the description of the IR of the $P(1,4)$ algebra in the Galilei basis reduces to transforming the known realisation to a form in which the operators (2.6) are diagonal.

3. The representations with $P^2 \geq 0$

Let us consider the IR of the $P(1,4)$ algebra, which corresponds to the positive values of the invariant operator $P^2 = \varkappa^2 > 0$. The generators P_μ, $J_{\mu\nu}$ in the canonical basis $|p_k, j_3, \tau_3; \varepsilon, j, \tau, \varkappa\rangle$ have the form (Fushchych and Krivsky [9, 10])

$$\begin{aligned} &P_0 = \varepsilon E \equiv \varepsilon\left(\boldsymbol{p}^2 + p_4^2 + \varkappa^2\right)^{1/2}, \qquad P_k = p_k, \\ &J_{kl} = i\left(p_l \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial p_l}\right) + S_{kl}, \qquad k,l = 1,2,3,4, \\ &J_{0k} = -i\varepsilon E \frac{\partial}{\partial p_k} - \varepsilon \frac{S_{kl} p_l}{E + \varkappa}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where S_{kl} $(k,l = 1,2,3,4)$ are the generators of the IR $D(j,\tau)$ of the $SO(4)$ group.

The basis of the realisation (3.1) is formed by the vectors $|p_k, j_3, \tau_3; \varepsilon, \tau, \varkappa\rangle$, which are the eigenfunctions of the complete set of the commuting operators

$$T = P_k, \qquad J_3 = \frac{1}{2}(\omega_{12} + \omega_{43}), \qquad T_3 = \frac{1}{2}(\omega_{12} - \omega_{43}), \qquad \hat{\varepsilon} = P_0/|P_0|,$$

$$J^2 = \frac{1}{4\varkappa^2}(V_1 + 2\varepsilon\varkappa V_2), \qquad T^2 = \frac{1}{4\varkappa^2}(V_1 - 2\varepsilon\varkappa V_2), \qquad P^2,$$

with the eigenvalues p_k, j_3, τ_3, ε, $j(j+1)$, $\tau(\tau+1)$ and $\varkappa^2$ correspondingly, where j and τ are the integers or half-integers labelling the IR of the $SO(4)$ group,

$$j_3 = -j, -j+1, \ldots, j, \quad \tau_3 = -\tau, -\tau+1, \ldots, \tau, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad -\infty < p_k < \infty.$$

The basis vectors may be normalised according to

$$\langle p_k, j_3, \tau_3; \varepsilon, j, \tau, \varkappa \mid p'_k, j'_3, \tau'_3; \varepsilon, j, \tau, \varkappa\rangle = 2E\delta(p_k - p'_k)\delta_{j_3 j'_3}\delta_{\tau_3\tau'_3},$$

and the generators (3.1) are Hermitian with respect to the scalar product

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \left(d^4p/E\right) \Psi_1^\dagger(p_k, j_3, \tau_3)\Psi_2(p_k, j_3, \tau_3). \tag{3.2}$$

The basis of the IR of the $P(1,4)$ algebra, in which the invariant operators (2.6) of the $G(3)$ algebra and the operators P_a $(a = 1,2,3)$ and $S_3 = J_3 - (1/m)(P_2G_1^+ - P_1G_2^+)$ have the diagonal form, will be called “Galilei basis” (or “$G(3)$ basis”) and denoted by $|p_a, m, s, s_3; \varepsilon, j, \tau, \varkappa\rangle$.

We will normalise the basis vectors as

$$\langle p_a, m, s, s_3; \varepsilon, j, \tau, \varkappa \,|\, p'_a, m', s', s'_3; \varepsilon, j, \tau, \varkappa\rangle = 2m\delta(m - m')\delta(p_a - p'_a)\delta_{ss'}\delta_{s_3 s'_3}.$$

This will lead us to the scalar product

$$(\phi_1, \phi_2) = \sum_{|j-\tau| \leq s \leq j+\tau} \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{dm}{m} \int d^3p\, \phi_1^\dagger(s, s_3, m, \boldsymbol{p})\phi_2(s, s_3, m, \boldsymbol{p}). \tag{3.3}$$

Our task is to establish the explicit form of the generators of the $P(1,4)$ group in the Galilei basis and to find the transition operator, which connects the canonical and Galilei bases. First we substitute (3.1) into (2.3) and (2.6) and obtain the Galilei generators $\hat{P}_\mu$, J_a, G_a^+ the invariant operators C_a and the remaining generators G_a^-, K in the canonical basis in a form

$$\begin{gathered}\hat{P}_0=\frac{1}{2}(\varepsilon E-p_4), \qquad M=\varepsilon E+p_4, \qquad J_a=-i(\boldsymbol{p}\times(\partial/\partial\boldsymbol{p}))_a+S_a,\\ G_a^+=x_4p_a-Mx_a-\frac{\varepsilon S_{ab}p_b-S_{4a}(E+\varkappa+\varepsilon p_4)}{E+\varkappa},\end{gathered}\tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}C_1=\varkappa^2, \qquad C_3=M,\\ C_2=\Big\{\boldsymbol{S}^2\left[M(E+\varkappa)-\varepsilon\boldsymbol{p}^2\right]^2+\left[\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{N}^2-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{N})^2\right]\times\\ \times(E+\varkappa+\varepsilon p_4)^2+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{S})^2\left[2\varepsilon M(E+\varkappa)-\boldsymbol{p}^2\right]\Big\}(E+\varkappa)^{-2},\end{gathered}\tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}G_a^-=\frac{1}{2}\left[-x_4p_a-2\hat{P}_0x_a-\frac{\varepsilon S_{ab}p_b-S_{4a}(E+\varkappa-\varepsilon p_4)}{E+\varkappa}\right],\\ K=-\hat{P}_0x_4-\varepsilon\frac{S_{4a}p_a}{E+\varkappa},\end{gathered}\tag{3.6}$$

where

$$S_a=\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad N_a=S_{4a}, \qquad x_k=i(\partial/\partial p_k).\tag{3.7}$$

The Casimir operator C_2 (3.5) is in general the matrix which has elements depending on p_k. Our second step is to diagonalise this matrix with the help of some unitary transformation. We will look for the diagonalising operator in a form

$$U_1=\exp(iS_{4a}p_a\theta/p),\tag{3.8}$$

where $p=\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right)^{1/2}$ and θ is an unknown function of p, p_4.

With the help of the operator (3.8) one may derive from (3.4) and (3.6) a new realisation:

$$\begin{gathered}\hat{P}_0'=U_1\hat{P}_0U_1^\dagger=\hat{P}_0, \qquad \hat{P}_a'=U_1\hat{P}_aU_1^\dagger=\hat{P}_a,\\ J_a'=U_1J_aU_1^\dagger=J_a, \qquad M'=U_1MU_1^\dagger=M,\end{gathered}\tag{3.9}$$

$$(G_a^+)'=U_1G_a^+U_1^\dagger=x_4'p_a-x_a'M-\frac{\varepsilon S_{ab}'p_b-S_{4a}'(E+\varkappa+\varepsilon p_4)}{E+\varkappa},\tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}(G_a^-)'=U_1G_a^-U_1^\dagger=\frac{1}{2}\left(-x_4'p_a-2\hat{P}_0x_a'-\frac{\varepsilon S_{ab}'p_b-S_{4a}'(E+\varkappa-\varepsilon p_4)}{E+\varkappa}\right),\\ K'=U_1kU_1^\dagger=-\hat{P}_0x_4'-\varepsilon S_{4a}'p_a/(E+\varkappa),\end{gathered}\tag{3.11}$$

where

$$x_k'=U_1x_kU_1^\dagger, \qquad S_{kl}'=U_1S_{kl}U_1^\dagger.$$

Using the Hausdorf–Campbell formula

$$\exp(A)B\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{A,B\}^n,$$
$$\{A,B\}^n = [A,\{A,B\}^{n-1}], \qquad \{A,B\}^0 = B$$

it is not difficult to calculate

$$\begin{aligned}
&x'_a = x_a + \left(p_a S_{4b} p_b/p^2\right)[\partial\theta/\partial p - (\sin\theta)/p] + \\
&\qquad + \left(S_{ab}p_b/p^2\right)(1-\cos\theta) + (1/p)S_{4a}\sin\theta, \\
&S'_{4a} = S_{4a}\cos\theta + \left(p_a S_{4b}p_b/p^2\right)(1-\cos\theta) + S_{ab}p_b(\sin\theta)/p, \\
&S'_{ab}p_b = S_{ab}p_b\cos\theta + [(p_a S_{4b}p_b/p) - pS_{4a}]\sin\theta, \\
&x'_4 = x_4 + (S_{4b}p_b/p)(\partial\theta/\partial p_4).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituting (3.12) into (3.10), one obtains

$$\begin{aligned}
(G_a^+)' = x_4p_a - Mx_a &+ \frac{p_a S_{4b}p_b}{p}\left[\frac{\partial\theta}{\partial p_4} - \frac{M}{p}\left(\frac{\partial\theta}{\partial p} - \frac{1}{p}\sin\theta\right) - \frac{\varepsilon}{E+\varkappa}\sin\theta + \right.\\
&\left. + \frac{E+\varkappa+\varepsilon p_4}{(E+\varkappa)p}(1-\cos\theta)\right] + \frac{S_{ab}p_b}{p}\left[\left(\frac{M}{p} - \frac{\varepsilon p}{E+\varkappa}\right) - \frac{M}{p} + \right.\\
&\left. + \frac{E+\varkappa+\varepsilon p_4}{E+\varkappa}\sin\theta\right] + S_{4a}\left[\left(\frac{\varepsilon p}{E+\varkappa} - \frac{M}{p}\right)\sin\theta + \frac{E+\varkappa+\varepsilon p_4}{E+\varkappa}\cos\theta\right].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

The expression (3.13) for G_a^+ is much simplified, if one puts

$$\theta = 2\tan^{-1}[p/(E+\varepsilon p_4+\varkappa)]. \tag{3.14}$$

For such a value of the parameter θ, we have:

$$\sin\theta = \frac{p(E+\varkappa+\varepsilon p_4)}{(E+\varkappa)(E+\varepsilon p_4)}, \qquad 1-\cos\theta = \left[p^2/(E+p)(E+\varepsilon p_4)\right],$$
$$\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial p_4} - \frac{E+\varepsilon p_4}{p}\frac{\partial\theta}{\partial p} = -\sin\theta\frac{E+\varepsilon p_4}{p^2}$$

and

$$(G_a^+)' = x_4p_a - Mx_a. \tag{3.15}$$

Substituting (3.9) and (3.15) into (2.6), we have

$$C'_2 = M^2\boldsymbol{S}^2, \tag{3.16}$$

where the matrix $\boldsymbol{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ always may be chosen in the diagonal form,

$$\boldsymbol{S}^2\phi_s = s(s+1)\phi_s, \qquad |j-\tau| \le s \le j+\tau.$$

The operators (3.9)–(3.11) are defined in a Hilbert space of square integrable functions $\phi(p_1,p_2,p_3,p_4)$. In order to diagonalise the operator M and (3.5) we introduce in place of $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ the new variables $\{p_1,p_2,p_3,m\}$, where $m = E+\varepsilon p_4$. Then

$$\frac{\partial}{\partial p_4} \to \left(\varepsilon + \frac{p_4}{E}\right)\frac{\partial}{\partial m}, \qquad \frac{\partial}{\partial p_a} \to \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{p_a}{E}\frac{\partial}{\partial m}$$

and the operators (3.9)–(3.11) and (3.15) take the form

$$\hat{P}_0' = m_0 + \varepsilon\frac{p^2}{2m}, \qquad \hat{P}_a' = p_a, \qquad M' = \varepsilon m,$$

$$J_a' = -i(\boldsymbol{p}\times(\partial/\partial\boldsymbol{p}))_a + S_a, \qquad (G_a^+)' = -i\varepsilon m(\partial/\partial p_a), \tag{3.17a}$$

$$C_1' = \varkappa^2, \qquad C_2' = m^2\boldsymbol{S}^2, \qquad C_3' = \varepsilon m, \tag{3.17b}$$

$$\begin{gathered} K' = -im(\partial/\partial m), \\ (G_a^-)' = i[\varepsilon p_a(\partial/\partial m) - \hat{P}_0'(\partial/\partial p_a)] - \varepsilon(S_{ab}p_b + S_{4a}\varkappa)/m, \end{gathered} \tag{3.17c}$$

where

$$\varkappa \le m < \infty, \qquad m_0 = \varepsilon\left(\varkappa^2/2m\right).$$

The generators (3.17) are Hermitian with respect to the scalar product (3.3).

So we reach the following result:

Theorem. *The Hilbert space of the IR $D^\varepsilon(\varkappa,j,\tau)$ of the $P(1,4)$ algebra, corresponding to $P^2 = \varkappa^2 > 0$, is expanded into the direct integral of the subspaces, which correspond to the IR of the $G(3)$ algebra with the following values of the invariant operators: $C_1 = \varkappa^2$, $C_2 = m^2 s(s+1)$, $C_3 = \varepsilon m$, $|\varkappa| \le m < \infty$, $|j-\tau| \le s \le j+\tau$. The explicit form of the $P(1,4)$ group generators in the Galilei basis and that of the transition operator, which connects the canonical and the $G(3)$ bases, are given by the formulae (3.8), (3.14) and (3.17).*

To conclude this section we consider the IR of the $P(1,4)$ algebra, corresponding to $P^2 = 0$. The realisations of such an IR have been obtained in the form (Fushchych and Krivsky [9, 10]):

$$P_0 = \varepsilon E_0 \equiv \varepsilon\left(p^2 + p_4^2\right)^{1/2}, \qquad P_a = p_a, \qquad P_4 = p_4,$$

$$J_{0a} = -i\varepsilon E_0\frac{\partial}{\partial p_a} - \varepsilon\frac{S_{ab}p_b}{E_0 + p_4}, \qquad J_{04} = -i\varepsilon E_0\frac{\partial}{\partial p_4},$$

$$J_{4a} = i\left(p_a\frac{\partial}{\partial p_4} - p_4\frac{\partial}{\partial p_a}\right) + \varepsilon\frac{S_{ab}p_b}{E_0 + p_4},$$

where S_{ab} are the generators of the IR $D(s)$ of the $SO(3)$ group. Substituting (3.18) into (2.3), one obtains

$$\begin{gathered} \hat{P}_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon E_0 - p_4), \qquad M = \varepsilon E_0 + p_4, \qquad J_1 = -i\left(\boldsymbol{p}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right)_a + S_a, \\ G_a^+ = i\left(p_a\frac{\partial}{\partial p_4} - p_4\frac{\partial}{\partial p_a}\right) + i\varepsilon E_0\frac{\partial}{\partial p_a}, \qquad K = -i\varepsilon E_0\frac{\partial}{\partial p_4}, \\ G_a^- = \frac{1}{2}\left(-ip_a\frac{\partial}{\partial p_4} - i\hat{P}_0\frac{\partial}{\partial p_a}\right) - \varepsilon\frac{S_{ab}p_b}{E_0 + \varepsilon p_4}. \end{gathered} \tag{3.18}$$

It is not difficult to see that replacement of the variables $\{\boldsymbol{p}, p_4\} \to \{\boldsymbol{p}, m\}$, where $m = E_0 + \varepsilon p_4$, reduces the generators (3.18) to the form (3.17), where, however, $\varkappa = 0$, $0 \le m < \infty$ and s has the fixed value, which characterises the IR of the $SO(3)$

group. So we have established the explicit form of the generators of the $P(1,4)$ group, corresponding to $P^2=0$, in the Galilei basis.

4. The representations with $P^2<0$

We now use the IR of the $P(1,4)$ group, which corresponds to $P^2=-\eta^2<0$. The generators of such representations have been obtained in the form (Fushchych and Krivsky [9, 10, 11])

$$
\begin{gathered}
P_0=p_0, \qquad P_a=p_a, \qquad P_4=\varepsilon\left(p_0^2+\eta^2-p_a^2\right)^{1/2}, \\
J_{\alpha\beta}=i\left(p_\beta\frac{\partial}{\partial p_\alpha}-p_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\beta}\right)+S_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon=\pm 1, \\
J_{4\alpha}=-iP_4\frac{\partial}{\partial p_\alpha}-\varepsilon\frac{S_{\alpha\beta}p^\beta}{|P_4|+\eta}, \qquad \alpha,\beta=0,1,2,3,
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

where $S_{\alpha\beta}$ are the matrices which realise IR of the Lie algebra of the $SO(1,4)$ group.

Reducing the representation (4.1) by the representations of the Lie algebra of the Galilei group, the mass operator $M=P_0+P_4$ may take the zero value. Let us impose the $G(3)$-invariant condition of turning into zero in the hyperspace, corresponding to zero eigenvalues of the operator M, on the functions from the space of the IR (4.1) (this hyperspace is the five-dimensional half-cylinder $p^2=\eta^2$, $\varepsilon p_0<0$).

Using the transformation operator on the generators (4.1)

$$
U_2=\exp(iS_{0a}p_a\theta/p), \qquad \theta=2\tanh^{-1}[p/(\eta+|P_4|+\varepsilon p_0)]
\tag{4.2}
$$

and using the relations

$$
\begin{gathered}
U_2x_0U_2^{-1}=x_0+S_{0a}p_a\frac{1}{p}\frac{\partial\theta}{\partial p_0}, \qquad x_\mu=i\frac{\partial}{\partial p_\mu}, \\
U_2x_aU_2^{-1}=x_a+\frac{p_a}{p}\frac{S_{0b}p_b}{p}\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}-\frac{1}{p}\sinh\theta\right)+\frac{1}{p}S_{0a}\sinh\theta+\frac{S_{ab}p_b}{p^2}(1-\cosh\theta), \\
U_2S_{0a}U_2^{-1}=S_{0a}\cosh\theta-(1/p)S_{ab}p_b\sinh\theta+(p_a/p)(S_{0b}p_b/p)(1-\cosh\theta), \\
U_2S_{ab}p_bU_2^{-1}=S_{ab}p_b\cosh\theta+[(p_aS_{0b}p_b/p)-pS_{0a}]\sinh\theta, \\
\sinh\theta=\frac{p(\varepsilon p_0+|P_4|+\eta)}{(\varepsilon p_0+|P_4|)(|P_4|+\eta)}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial p_0}=\frac{p}{|P_4|(|P_4|+\eta)}, \\
1-\cosh\theta=\frac{-p^2}{(|P_4|+\eta)(\varepsilon p_0+|P_4|)}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial p}=\frac{|P_4|(\varepsilon p_0+\eta)+p_0^2+\eta^2}{|P_4|(|P_4|+\eta)(|P_4|+\varepsilon p_0)},
\end{gathered}
$$

one comes to the realisation

$$
\begin{gathered}
P_0''=p_0, \qquad P_a''=p_a, \qquad P_4''=\varepsilon\left(p_0^2+\eta^2-p^2\right)^{1/2}, \\
J_{ab}''=i\left(p_b\frac{\partial}{\partial p_a}-p_a\frac{\partial}{\partial p_b}\right)+S_{ab}, \\
J_{0a}''=i\left(p_a\frac{\partial}{\partial p_0}-p_0\frac{\partial}{\partial p_a}\right)-\frac{S_{ab}p_b+S_{a0}\eta}{|P_4''|+\varepsilon p_0}, \\
J_{4a}''=-iP_4''\frac{\partial}{\partial p_a}+\frac{S_{ab}p_b+S_{0a}\eta}{|P_4''|+\varepsilon p_0}, \qquad J_{04}''=iP_4''\frac{\partial}{\partial p_0}.
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Substituting (4.3) into (2.3) and going from $\{p_a, p_0\}$ to the new variables $\{p_a, m\}$, where $m = p_0 + \left(p_0^2 + \eta^2 - p_a^2\right)^{1/2}$, one obtains the Galilei group generators in the form (3.17a), and the remaining generators G_a^-, K in the form (3.17c), where, however, $m_0 = -\eta^2/2m$, $-\eta^2 < m < 0$, $0 < m < \infty$, and S_{ab} are the generators of the group $SO(3) \subset SO(1,3)$.

5. Covariant representation of the $P(1,4)$ group

Consider an arbitrary covariant representation of the Lie algebra of the $P(1,4)$ group. Such a representation is realised by the operators

$$P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = i\left(p_\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu}\right) + S_{\mu\nu}, \tag{5.1}$$

where $S_{\mu\nu}$ are the generators of a representation of the $SO(1,4)$ group. Let us confine ourselves to the case where $P_\mu P^\mu \Psi > 0$.

Substituting (5.1) into (2.3), we obtain

$$\begin{gathered}\hat{P}_0 = \frac{1}{2}(p_0 - p_4), \qquad \hat{P}_a = p_a, \qquad J_a = -i\left(\boldsymbol{p} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_a + S_a, \\ M = p_0 + p_4, \qquad G_a^+ = \tilde{x}_0 p_a - x_a M + \lambda_a^+, \\ G_a^- = \tilde{x}_4 p_a - x_a \hat{P}_0 + \frac{1}{2}\lambda_a^-, \qquad K = \tilde{x}_4 M - \tilde{x}_0 \hat{P}_0 + S_{04},\end{gathered} \tag{5.2}$$

where

$$\lambda^\pm = S_{0a} \pm S_{4a}, \qquad \tilde{x}_0 = 2i\left(\frac{\partial}{\partial p_0} - \frac{\partial}{\partial p_4}\right), \qquad \tilde{x}_4 = i\left(\frac{\partial}{\partial p_0} + \frac{\partial}{\partial p_4}\right).$$

For the transition of the realisation (5.2) into the Galilei basis we use the operator

$$U_3 = \exp[i\lambda^+ \boldsymbol{p}/M]. \tag{5.3}$$

With the help of the transformation

$$\begin{gathered}\hat{P}_\mu \to \hat{P}_\mu''' = U_3 \hat{P}_\mu U_3^{-1}, \qquad J_a \to J_a''' = U_3 J_a U_3^{-1}, \\ G_a^\pm \to (G_a^\pm)''' = U_3 G_a^\pm U_3^{-1}, \qquad K \to K''' = U_3 K U_3^{-1},\end{gathered}$$

one comes to the realisation in which the invariant operators (2.6) of the $G(3)$ subalgebra are of diagonal form:

$$\begin{gathered}\hat{P}_0''' = \frac{1}{2}(p_0 - p_4), \qquad \hat{P}_a''' = p_a, \qquad M''' = M = p_0 + p_4, \\ J_a''' = -i(\boldsymbol{p} \times \partial/\partial \boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^+ = \tilde{x}_0 p_a - x_a M, \\ G_a^- = \tilde{x}_4 p_a - x_a \hat{P}_0''' - \frac{S_{ab} p_b + S_{40} p_a}{M} + \frac{1}{2}\lambda_a^- - \lambda^+ \frac{p_\mu p^\mu}{M^2}, \\ K''' = \tilde{x}_4 M - \tilde{x}_0 \hat{P}_0''' + S_{04},\end{gathered}$$

where $S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} S_{bc}$. The operators C_a (2.6) take the form

$$C_1''' = p_\mu p^\mu, \qquad C_2''' = M^2 \boldsymbol{S}^2, \qquad C_3''' = M$$

i.e. the eigenvalues of the operator C_1 coincide with the values of P^2, the eigenvalues of the operator C_2 are characterised by the spectrum of the Casimir operator of the group $SO(3) \subset SO(1,4)$, and the eigenvalues of the operator C_3 lie in the interval $(C_1''')^{1/2} \le C_3''' < \infty$.

The results of this section may be used for the diagonalisation of the wave equations, which are invariant under the $P(1,4)$ group. As an example we will consider the five-dimensional generalisation of the Dirac equation

$$(\gamma_\mu p^\mu + \varkappa)\Psi = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3,4. \tag{5.4}$$

On the set of the solutions of the equation (5.4) the generators of the $P(1,4)$ group have the form (5.1) where $S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Using the operator (5.3) on equation (5.4), one obtains an equation, which is equivalent to (5.4) but is manifestly invariant under the Galilei group

$$\hat{P}_0'''\Phi_+ = \left(\varkappa/2m + p^2/2m\right)\Phi_+, \qquad \Phi_- = 0, \tag{5.5}$$

where

$$\Phi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0\gamma_4)\Phi, \qquad \Phi = U_3\Psi, \qquad \varkappa \le m < \infty.$$

If one imposes the Galilean-invariant subsidiary condition $(p_0 + p_4)\Psi = m_0\Psi$ and puts $\varkappa = 0$, then equation (5.4) is reduced to the Levi-Leblond equation for the non-relativistic particle of spin $s = \frac{1}{2}$ (Levi-Leblond [14]). In this case (5.3) coincides with the operator which diagonalises the Levi-Leblond equation (Nikitin and Salogub [16]).

6. IR of the Poincaré group in the $G(2)$ basis

The transition of the IR of the $P(1,3)$ group to the basis of a two-dimensional Galilei group $G(2)$ may be made by complete analogy with the reduction $P(1,4) \to G(3)$. Here we consider only the representations of the $P(1,3)$ group, which correspond to time-like four-momenta. The generators of such a representation in a Shirokov–Foldy realisation (Shirokov [17, 18], Foldy [7]) have the form (3.1) where $\mu, \nu = 0,1,2,3$; $k,l = 1,2,3$. With the help of the transformation

$$P_\mu \to \tilde{P}_\mu = UP_\mu U^{-1}, \qquad J_{\mu\nu} \to \tilde{J}_{\mu\nu} = UJ_{\mu\nu}U^{-1},$$

where

$$U = \exp\left\{(iS_{3\alpha}p_\alpha/|p|)\tan^{-1}[|p|/(|P_0| + \varepsilon p_3 + \varkappa)]\right\},$$
$$|p| = \left(p_1^2 + p_2^2\right)^{1/2}, \qquad \alpha = 1,2,$$

and the following replacement of the variables $\{p_1,p_2,p_3\} \to \{p_1,p_2,m\}$, where $m = \varepsilon p_3 + \left(p_1^2 + p_2^2 + \varkappa^2\right)^{1/2}$, one obtains the generators of the Poincaré group in the $G(2)$ basis:

$$\begin{aligned} &\hat{P}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{P}_0 + \tilde{P}_3) = \varkappa^2/2m + |p|^2/2m, \qquad \hat{P}_\alpha = p_\alpha, \\ &J_3 = i[p_2(\partial/\partial p_1) - p_1(\partial/\partial p_2)] + S_{12}, \qquad M = \varepsilon m, \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$G_\alpha^+ = \tilde J_{0\alpha} + \tilde J_{3\alpha} = -i\varepsilon m\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \qquad |\varkappa| \le m < \infty,$$
$$G_\alpha^- = \frac12(\tilde J_{0\alpha} - \tilde J_{3\alpha}) = i[p_\alpha(\partial/\partial m) - \hat P_0(\partial/\partial p_\alpha)] - \varepsilon(S_{\alpha\beta}p_\beta + S_{3\alpha}\varkappa)/m, \tag{6.2}$$
$$K = \tilde J_{03} = -im(\partial/\partial m).$$

The operators (6.1) coincide with the “kinematical group generators”, which are used in the null-plane formalism (see e.g. Leutwyler and Stern [13]).

Using the results of §§ 3–5, it is not difficult to make the transition into the $G(2)$ basis of the representations of the $P(1,3)$ algebra which corresponds to light-like and space-like four-momenta.

7. Connection between the Galilei and the Poincaré bases

We now consider the connection between the realisations of the generators of the $P(1,4)$ group (corresponding to time-like five-momenta) in both the Galilei and Poincaré bases.

The generators of the $P(1,4)$ group in the Poincaré basis (i.e. in the basis where the Casimir operators of the $P(1,3)$ group are of diagonal type) have the form (Fushchych et al [12], Nikitin et al [15])

$$\begin{gathered}
P_0 = E = \left(p^2 + \bar m^2\right)^{1/2}, \qquad P_a = p_a, \qquad P_4 = \varepsilon_4\left(\bar m^2 + \varkappa^2\right)^{1/2},\\
J_{ab} = i[p_b(\partial/\partial p_a) - p_a(\partial/\partial p_b)], \qquad \varepsilon_4 = \pm 1,\\
J_{0a} = -ip_0(\partial/\partial p_a) - S_{ab}p_b/(E+\bar m), \qquad a,b = 1,2,3,\\
J_{04} = -iE\left\{\varepsilon_4\left(1 - \varkappa^2/\bar m^2\right)^{1/2}, \partial/\partial \bar m\right\} - (\varkappa/\bar m)(S_{4a}p_a/\bar m),\\
J_{4a} = ip_a\left\{\varepsilon_4\left(1-\varkappa^2/\bar m^2\right)^{1/2}, \partial/\partial\bar m\right\} - i\varepsilon\bar m\left(1-\varkappa^2/\bar m^2\right)^{1/2}\partial/\partial p_a +\\
+\frac{\varkappa p_a S_{4b}p_b}{m^2(E+m)} + \varepsilon_4\left(1-\varkappa^2/\bar m^2\right)^{1/2}[S_{ab}p_b/(E+\bar m)] + \frac{\varkappa S_{4a}}{\bar m},
\end{gathered} \tag{7.1}$$

where

$$\{A,B\} = AB + BA, \qquad |\varkappa| \le \bar m < \infty.$$

The generators (7.1) are Hermitian with respect to the scalar product

$$(\chi_1,\chi_2) = \sum_{s=|j-\tau|}^{j+\tau}\int_\varkappa^\infty d\bar m\int\frac{d^3p}{2E}\chi_1^\dagger(\boldsymbol p,\bar m,s,s_3)\chi_2(\boldsymbol p,\bar m,s,s_3).$$

As soon as the operators (7.1) and (3.17) realise the same IR $D^+(\varkappa,j,\tau)$ of the $P(1,4)$ group, the equivalence transformation, which connects these two realisations, exists. In order to come from (7.1) to (3.17), we make the isometric transformation

$$P_\mu \to WP_\mu W^{-1}, \qquad J_{\mu\nu}\to WJ_{\mu\nu}W^{-1} \tag{7.2}$$

and the following replacement of variables

$$p_a \to p_a, \qquad \bar m \to \bar m(m,\boldsymbol p), \tag{7.3}$$

where

$$
\begin{aligned}
&W=\left(1-\varkappa/\bar{m}^2\right)^{1/4}\exp[i(S_{4a}p_a/p)(\theta_1-\theta_2)],\\
&\theta_1=2\tan^{-1}\left\{p/\left[E+\varepsilon_4\left(\bar{m}^2-\varkappa^2\right)^{1/2}+\varkappa\right]\right\},\\
&\theta_2=2\tan^{-1}\left[\varepsilon_4 p\left(\bar{m}^2-\varkappa^2\right)^{1/2}/(E+m)(m+\varkappa)\right],\\
&\bar{m}=(1/2m)\left[\left(m^2-\varkappa^2-p^2\right)^2+4m^2\varkappa^2\right]^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

One can ensure by direct verification that the transformations (7.2)–(7.4) reduce the generators (7.1) into the Galilei basis (i.e. that the transformed generators coincide with (3.17) after substitution into (2.3)). We do not give the detailed calculations here because the transformations (7.2)–(7.4) may be represented as two consequent ones: namely, the transition from the Poincaré to the canonical basis (Nikitin et al [15])

$$
\begin{aligned}
&P_\mu\to VP_\mu V^{-1},\qquad J_{\mu\nu}\to VJ_{\mu\nu}V^{-1},\\
&\bar{m}\to\bar{m}(p_4)=\varepsilon_4\left(p_4^2+\varkappa^2\right)^{1/2},\\
&V=\left(1-\varkappa^2/\bar{m}^2\right)^{1/4}\exp(iS_{0a}p_a\theta_2/p)
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

and then the transition from the canonical basis to the Galilei one (see § 3). So

$$
W=U_1V,
$$

where V and U_1 are given by equations (7.5), (3.8), (3.14).

The transformation (7.2)–(7.4) may be used to establish the connection between the vectors in the Galilei and in the Poincaré bases. This connection is given by the equations:

$$
\begin{aligned}
&\phi(\boldsymbol{p},m,s,s_3)=W\hat{P}_s\hat{P}_{s_3}P_{s'}P_{s_3'}\chi(\boldsymbol{p},m(\bar{m},\boldsymbol{p}),s,s_3),\\
&\chi(\boldsymbol{p},m,s,s_3)=W^{-1}\tilde{P}_s\tilde{P}_{s_3}P_{s'}P_{s_3'}\phi(\boldsymbol{p},m(\bar{m},\boldsymbol{p}),s,s_3),\\
&m(\bar{m},\boldsymbol{p})=\varepsilon_4\left(\bar{m}^2-\varkappa^2\right)^{1/2}+\left(p^2+\bar{m}^2\right)^{1/2},\\
&|j-\tau|\le s,s'\le j+\tau,\qquad -s\le s_3\le s,\qquad -s'\le s_3'\le s',
\end{aligned}
$$

where P_s, P_{s_3}, $\hat{P}_s$, $\hat{P}_{s_3}$, $\tilde{P}_s$, $\tilde{P}_{s_3}$ are the projectors into the subspace with the corresponding fixed value of s and s_3.

$$
P_s=\prod_{\tilde{s}\ne s}\frac{\boldsymbol{S}^2-\tilde{s}(\tilde{s}+1)}{s(s+1)-\tilde{s}(\tilde{s}+1)},\qquad P_{s_3}=\prod_{\tilde{s}_3\ne s_3}\frac{S_3-\tilde{s}_3}{s_3-\tilde{s}_3},
\tag{7.6}
$$

$$
\hat{P}_s=W^{-1}P_sW,\quad \hat{P}_{s_3}=W^{-1}P_{s_3}W,\quad \tilde{P}_{s_3}=WP_{s_3}W^{-1},\quad \tilde{P}_s=WP_sW^{-1}.
$$

$\hat{P}_s$, $\hat{P}_{s_3}$, $\tilde{P}_s$, $\tilde{P}_{s_3}$ may be obtained from (7.6) by the substitution

$$
\begin{aligned}
&S_a\to\hat{S}_a=W^{-1}S_aW=S_a\cos\tilde{\theta}+\frac{p_aS_bp_b}{p^2}(1-\cos\tilde{\theta})+\frac{1}{p}\varepsilon_{abc}p_bS_{4c}\sin\tilde{\theta},\\
&S_a\to\tilde{S}_a=WS_aW^{-1}=S_a\cos\tilde{\theta}+\frac{p_aS_bp_b}{p^2}(1-\cos\tilde{\theta})-\frac{1}{p}\varepsilon_{abc}p_bS_{4c}\sin\tilde{\theta},\\
&\tilde{\theta}=\theta_1-\theta_2.
\end{aligned}
$$

Acknowledgment
We would like to express our gratitude to the referee for his useful comments.

1. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, 2297–2305.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1–46.
3. Barrabes K., Henry J., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1976, **9**, 1428–1434.
4. Castell L., *Nuovo Cim.*, 1967, **49**, 285–294.
5. Elizalde E., Gomish J., *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, 1790–1797.
6. Fedorchuk V.M., Preprint 78-18, Mathematical Institute, Kiev, 1978.
7. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568–574.
8. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1970, **4**, 360–367.
9. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79–87.
10. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., Preprint 68-72, Institute for Theoretical Physics, Kiev, 1968.
11. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 537–544.
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Yurik I.I., Preprint 75-85, Mathematical Institute, Kiev, 1975.
13. Leutwyler H., Stern J., *Ann. Phys.*, 1968, **112**, 94–164.
14. Levi-Leblond J.-M., *Comm. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286–311.
15. Nikitin A.G., Fushchych W.I., Yurik I.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1976, **26**, 202–220 (transl. *Teor. and Math. Phys.*, 1976, **26**, 138–147).
16. Nikitin A.G., Salogub V.A., *Ukr. Fiz. J.*, 1975, **20**, 1730–1732.
17. Shirokov Yu.M., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1954, **94**, 857–861.
18. Shirokov Yu.M., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1954, **99**, 737–739.

Инвариантные системы уравнений в обобщенной механике

В.И. ФУЩИЧ, Ю.Н. СЕГЕДА, Г.А. РЕДЧЕНКО

Введение. М.В. Остроградский [1] обобщил вариационный принцип Гамильтона на случай, когда лагранжиан L зависит от обобщенных координат q_i, обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и высших производных $\ddot{q}_i, \ldots, q_i^{(r)}$, и одновременно решил задачу о приведении соответствующей системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} - \cdots + (-1)^r \frac{d^r}{dt^r}\frac{\partial L}{\partial q_i^{(r)}} = 0, \tag{1}$$

N — число степеней свободы, к каноническому виду.

Уравнения (1) в общем случае порядка $2r$.

В настоящее время механику материальных систем, описываемую уравнениями вида (1), принято называть обобщенной механикой Лагранжа–Остроградского (ЛО).

Уравнения вида (1) встречаются, например, в задаче о взаимодействии двух точечных зарядов в электродинамике [2, 3]. Это говорит о том, что механика ЛО является неформальным обобщением механики Лагранжа и может иметь различные физические приложения.

В работе [4] поставлена задача об исследовании теоретико-групповой структуры механики ЛО. В данной статье изучим групповые свойства уравнений вида (1) четвертого порядка, описывающих движение системы двух частиц.

Более точно задача формулируется следующим образом. Рассмотрим уравнения 4-го порядка

$$\frac{\partial L}{\partial q_i^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^\alpha} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i^\alpha} = 0, \tag{1$'$}$$

q_i^α — обобщенные координаты частиц, $\alpha = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, N$.

Пусть система ($1'$) разрешена относительно старших производных. В качестве обобщенных координат системы выберем декартовы координаты. Обозначая координаты первой частицы символом x_i, а второй y_j, систему уравнений ($1'$) можно записать в виде

$$S: \begin{cases} x_i^{(4)} = f_i^I\left(t, \vec{x}, \vec{y}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{y}}\right), \\ y_i^{(4)} = f_i^{II}\left(t, \vec{x}, \vec{y}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{y}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{y}}, \dddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{y}}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть заданы преобразования независимых и зависимых переменных

$$t \to t' = \varphi(t, \vec{x}, \vec{y}; a), \qquad \vec{x} \to \vec{x}\,' = \psi(t, \vec{x}, \vec{y}; a), \qquad \vec{y} \to \vec{y}\,' = \chi(t, \vec{x}, \vec{y}; a), \tag{3}$$

образующие некоторую однопараметрическую группу G.

Украинский математический журнал, 1980, **32**, № 4, С. 569–576.

Определение. *Уравнения (2) назовем инвариантными относительно преобразований (3), если выполняются соотношения*

$$x_i^{(4)'} = f_i^I \left(t', \vec{x}\,', \vec{y}\,', \dot{\vec{x}}\,', \dot{\vec{y}}\,', \dots, \dddot{\vec{y}}\,'\right), \quad y_i^{(4)'} = f_i^{II} \left(t', \vec{x}\,', \vec{y}\,', \dot{\vec{x}}\,', \dot{\vec{y}}\,', \dots, \dddot{\vec{y}}\,'\right). \tag{2'}$$

Наша задача состоит в следующем: описать всевозможные функции f_i^I, f_i^{II}, при которых система (2) инвариантна относительно смещений координат и времени, масштабных и проективных преобразований, а также преобразований Галилея. Тот факт, что система (4) содержит уравнения четвертого порядка, позволяет найти новый класс преобразований, оставляющих уравнения (4) инвариантными, подобно тому, как уравнения второго порядка допускают преобразования Галилея. Эти новые преобразования соответствуют переходу к неинерциальным системам отсчета. Естественно поэтому назвать их обобщенными преобразованиями Галилея.

Для решений поставленной задачи воспользуемся понятием продолженного оператора группы [5]

$$\tilde{X} = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_{y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} + \xi_{\dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \dots + \xi_{y_i^{(4)}} \frac{\partial}{\partial y_i^{(4)}}, \tag{4}$$

где

$$\xi_t = \frac{dt'}{da}\Big|_{a=0}, \qquad \xi_{x_i} = \frac{dx_i'}{da}\Big|_{a=0}, \qquad \dots, \qquad \xi_{x_i}^{(r)} = \frac{dx_i^{(r)'}}{da}\Big|_{a=0}, \qquad \dots$$

Как показано в [5], необходимым и достаточным условием инвариантности уравнений (2) относительно группы преобразований (3) является выполнение равенства

$$\tilde{X}S|_S = 0, \qquad S \equiv \begin{cases} x_i^{(4)} - f_i^I = 0, \\ y_i^{(4)} - f_i^{II} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Условие (5) означает, что искомая система уравнений (2) образует инвариантное дифференциальное многообразие группы преобразований (3).

1. Инвариантность относительно сдвигов и масштабных преобразований. 1. Для простоты изложения, здесь и в последующих разделах ограничимся одной пространственной координатой, т.е. исследуем систему уравнений вида

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= f_1\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right), \\ x_2^{(4)} &= f_2\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right), \end{aligned} \tag{2''}$$

где $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, и т.д. Обобщение на случай большего числа пространственных координат очевидно.

Рассмотрим преобразование смещения времени

$$t' = t + a, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2. \tag{3'}$$

В этом случае согласно (4) имеем $\xi_t = 1$, $\xi_{x_1} = \xi_{x_2} = 0$; $\xi_{\dot{x}_1} = \xi_{\dot{x}_2} = \dots = \xi_{x_1^{(4)}} = \xi_{x_2^{(4)}} = 0$, и оператор $\tilde{X}$ имеет весьма простой вид: $\tilde{X} = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Условие инвариантности (5) сводится к уравнениям: $\dfrac{\partial f_1}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial t}=0$. Следовательно, уравнения $(2'')$ инвариантны относительно временных трансляций, если функции f_1 и f_2 не зависят от времени:

$$f_\alpha \equiv f_\alpha\left(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_2\right), \qquad \alpha=1,2. \tag{6}$$

В случае пространственных трансляций $t'=t$, $x_1'=x_1+a$, $x_2'=x_2+a$, имеем

$$\xi_t=0, \quad \xi_{x_1}=\xi_{x_2}=1, \quad \xi_{\dot{x}_1}=\xi_{\dot{x}_2}=\cdots=\xi_{x_2^{(4)}}=0, \tag{$3''$}$$

вследствие чего условие (5) сводится к системе уравнений

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}=0, \qquad \alpha=1,2,$$

общее решение которой, очевидно, следующее:

$$f_\alpha \equiv f_\alpha\left(t, x_1-x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dddot{x}_2\right), \qquad \alpha=1,2. \tag{7}$$

Таким образом, уравнения $(2'')$ инвариантны относительно преобразования смещения координат в том и только том случае, если функции f_α зависят от разности координат.

2. Рассмотрим масштабные преобразования координат:

$$t'=t, \qquad x_1'=ax_1, \qquad x_2'=ax_2, \tag{$3'''$}$$

где a — вещественный параметр.

Коэффициенты оператора $\tilde{X}$ в этом случае равны:

$$\xi_t=0, \quad \xi_{x_1}=x_1, \quad \xi_{x_2}=x_2, \quad \xi_{\dot{x}_1}=\dot{x}_1, \quad \xi_{\dot{x}_2}=\dot{x}_2, \quad \xi_{\ddot{x}_1}=\ddot{x}_1, \quad \xi_{\ddot{x}_2}=\ddot{x}_2,$$
$$\xi_{\dddot{x}_1}=\dddot{x}_1, \quad \xi_{\dddot{x}_2}=\dddot{x}_2, \quad \xi_{x_1^{(4)}}=x_1^{(4)}, \quad \xi_{x_2^{(4)}}=x_2^{(4)}.$$

Если подставить оператор $\tilde{X}$ с этими коэффициентами в уравнение (5), то в качестве условия инвариантности получим систему уравнений

$$\begin{gathered} x_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}+\dot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1}+\dot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}+\ddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1}+\ddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}+ \\ +\dddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1}+\dddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2}=f_\alpha, \qquad \alpha=1,2, \end{gathered} \tag{8}$$

Общее решение системы (8) представляется в виде

$$F_\alpha\left(t, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{\dot{x}_1}, \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}, \frac{x_1}{\ddot{x}_1}, \frac{x_2}{\ddot{x}_2}, \frac{x_1}{\dddot{x}_1}, \frac{x_2}{\dddot{x}_2}, \frac{x_1}{f_1}, \frac{x_2}{f_2}\right)=0, \tag{9}$$

где F_α — произвольные дифференцируемые функции.

Если, в частности, систему (9) разрешить относительно f_1 и f_2, то получим такое представление для f_α: $f_\alpha=x_a\Phi_\alpha\left(t, \dfrac{x_1}{x_2}, \dfrac{x_1}{\dot{x}_1}, \dfrac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2}, \dfrac{x_1}{\ddot{x}_1}, \dfrac{x_2}{\ddot{x}_2}, \dfrac{x_1}{\dddot{x}_1}, \dfrac{x_2}{\dddot{x}_2}\right)$, где Φ_α — произвольные дифференцируемые функции.

Результат этого раздела сформулируем в виде утверждения.

Теорема 1. *Для того, чтобы уравнение ($2''$) было инвариантным относительно масштабного преобразования координат, необходимо и достаточно, чтобы правые части уравнений удовлетворяли условиям (9), где F_1 и F_2 — произвольные дифференцируемые функции.*

3. Пусть задано масштабное преобразование времени

$$t' = bt, \qquad x_1' = x_1, \qquad x_2' = x_2, \tag{3^{IV}}$$

b — вещественный параметр.

Согласно (4) для оператора $\tilde{X}$ имеем выражение

$$\tilde{X} = t\frac{\partial}{\partial t} - \dot{x}_1\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} - 2\ddot{x}_1\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_1} - 2\ddot{x}_2\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_2} - \\ -3\dddot{x}_1\frac{\partial}{\partial \dddot{x}_1} - 3\dddot{x}_2\frac{\partial}{\partial \dddot{x}_2} - 4x_1^{(4)}\frac{\partial}{\partial x_1^{(4)}} - 4x_2^{(4)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(4)}},$$

а в качестве условия инвариантности (5) получим систему уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{gathered}\tilde{X} = t\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \dot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} - 2\ddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} - 2\ddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2} - \\ -3\dddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} - 3\dddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2} = -4f_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2,\end{gathered} \tag{10}$$

общее решение которой имеет вид

$$\Phi_\alpha\left(x_1, x_2, \dot{x}_1 t, \dot{x}_2 t, \ddot{x}_1 t^2, \ddot{x}_2 t^2, \dddot{x}_1 t^3, \dddot{x}_2 t^3, f_1 t^4, f_2 t^4\right) = 0, \tag{11}$$

где Φ_α — произвольные дифференцируемые функции.

Итак, мы пришли к такому результату.

Теорема 2. *Для инвариантности уравнений ($2''$) относительно масштабного преобразования времени (3^{IV}) необходимо и достаточно, чтобы их правые части удовлетворяли уравнениям (11), где Φ_α — произвольные дифференцируемые функции.*

Если уравнения (11) разрешимы относительно f_1 и f_2, то

$$f_\alpha = t^{-4}\Psi_\alpha\left(x_1, x_2, \dot{x}_1 t, \dot{x}_2 t, \ddot{x}_1 t^2, \ddot{x}_2 t^2, \dddot{x}_1 t^3, \dddot{x}_2 t^3\right), \tag{$11'$}$$

т. е. уравнения ($2''$) инвариантны относительно масштабного преобразования времени, если правые части уравнений — однородные по t функции порядка $m = -4$ и имеют представление ($11'$), где Ψ_α — произвольные дифференцируемые функции.

2. Проективные и обобщенные масштабные преобразования. Рассмотрим проективные преобразования

$$t' = \frac{t}{1-\gamma t}, \qquad x_1' = \frac{x_1}{1-\gamma t}, \qquad x_2' = \frac{x_2}{1-\gamma t} \tag{3^{V}}$$

и обобщенные масштабные преобразования

$$t' = e^{2\lambda}t, \qquad x_1' = e^{\lambda}x_1, \qquad x_2' = e^{\lambda}x_2, \tag{3^{VI}}$$

γ, λ — вещественные параметры.

Преобразования (3^{V}), (3^{VI}) образуют двухпараметрическую некоммутативную группу Ли, которая вместе с 10-параметрической группой Галилея образует 12-параметрическую группу.

1. Выясним, при каких условиях уравнения ($2''$) инвариантны относительно преобразований (3^{V}), (3^{VI}). Сначала рассмотрим преобразования (3^{V}). Согласно (4), имеем $\xi_t = t^2$, $\xi_{x_1} = tx_1$, $\xi_{x_2} = tx_2$, для коэффициентов $\xi_{\dot{x}_1}, \xi_{\ddot{x}_1}, \ldots$, согласно [5], получаем выражения

$$\begin{aligned}
&\xi_{\dot{x}_1} = x_1 - \dot{x}_1 t, \quad \xi_{\dot{x}_2} = x_2 - \dot{x}_2 t, \quad \xi_{\ddot{x}_1} = -3\ddot{x}_1 t, \quad \xi_{\ddot{x}_2} = -3\ddot{x}_2 t,\\
&\xi_{\dddot{x}_1} = -3\ddot{x}_1 - 5\dddot{x}_1 t, \quad \xi_{\dddot{x}_2} = -3\ddot{x}_2 - 5\dddot{x}_2 t,\\
&\xi_{x_1^{(4)}} = -8\dddot{x}_1 - 7tx_1^{(4)}, \quad \xi_{x_2^{(4)}} = -8\dddot{x}_2 - 7tx_2^{(4)}.
\end{aligned}$$

Условие инвариантности (5) сводится к системе уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
&t^2\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + tx_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + tx_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} + (x_1 - \dot{x}_1 t)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + (x_2 - \dot{x}_2 t)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} -\\
&\qquad -3\ddot{x}_1 t\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} - 3\ddot{x}_2 t\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2} - (3\dot{x}_1 + 5t\dddot{x}_1)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} - (3\dot{x}_2 + 5t\dddot{x}_2)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2} =\\
&\qquad = -(8\dddot{x}_\alpha + 7tf_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2,
\end{aligned} \tag{12}$$

общее решение которой представимо в виде

$$F_\alpha(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{13}$$

где F_α — произвольные дифференцируемые функции, а ее аргументы — первые интегралы характеристической системы уравнений (12):

$$\begin{aligned}
&\omega_1(t, x_1, x_2, \ldots, f_1, f_2) = \frac{x_1}{t} = C_1, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{t} = C_2, \quad \omega_3 = x_1 x_1 - \frac{x_1^2}{t} = C_3,\\
&\omega_4 = x_1^3\ddot{x}_1 = C_4, \quad \omega_5 = x_2^3\ddot{x}_2 = C_5, \quad \omega_6 = \dddot{x}_1 t^5 + 3x_1^3\ddot{x}_1 t = C_6,\\
&\omega_7 = \dddot{x}_2 t^5 + 3x_2^3\ddot{x}_2 t = C_7, \quad \omega_8 = \dddot{x}_2 + \frac{3}{\ddot{x}_2 t} = C_8,\\
&\omega_9 = f_1 t^7 - 12x_1^3\ddot{x}_1 t^2 - \frac{4}{3}\dddot{x}_1 x_1^5 t - 4x_1^8\ddot{x}_1 t^3 = C_9,\\
&\omega_{10} = f_2 t^7 - 12x_2^3\ddot{x}_2 t^2 - \frac{4}{3}\dddot{x}_2 x_2^5 t - 4x_2^8\ddot{x}_2 t^3 = C_{10},
\end{aligned} \tag{14}$$

$C_1, \ldots, C_{10}$ — произвольные постоянные.

Сформулируем результат.

Теорема 3. *Для того чтобы, уравнения ($2''$) были инвариантными относительно проективных преобразований (3^{V}), необходимо и достаточно, чтобы функции f_1 и f_2 удовлетворяли уравнениям (13), где F_α дифференцируемые функции, зависящие от переменных, определяемых соотношениями (14).*

2. В случае обобщенных масштабных преобразований (3^{VI}) $\xi_t = 2t$, $\xi_{x_1} = x_1$, $\xi_{x_2} = x_2$. Вычисляя по известным правилам [5] коэффициенты $\xi_{\dot{x}_1}, \xi_{\dot{x}_2}, \ldots$

оператора $\tilde{X}$ и подставляя в (5), получаем следующее условие инвариантности системы ($2''$) относительно (3^{VI}):

$$\begin{gathered}2t\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+x_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}-\dot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1}-3\ddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1}-5\dddot{x}_1\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1}+x_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}-\\ -\dot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}-3\ddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}-5\dddot{x}_2\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2}=-7f_\alpha, \qquad \alpha=1,2.\end{gathered}\tag{15}$$

Общее решение системы (15) представимо в виде

$$\Phi_\alpha(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{10})=0, \qquad \alpha=1,2, \tag{16}$$

где переменные $\omega_1,\ldots,\omega_{10}$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\omega_1=\frac{x_1^2}{t}=C_1, \quad \omega_2=x_1\dot{x}_1=C_2, \quad \omega_3=x_1^3\ddot{x}_1=C_3, \quad \omega_4=x_1^5\dddot{x}_1=C_4,\\ \omega_5=f_1t^{7/2}=C_5, \quad \omega_6=\frac{x_2^2}{t}=C_6, \quad \omega_7=x_2\dot{x}_2=C_7, \quad \omega_8=x_2^3\ddot{x}_2=C_8,\\ \omega_9=x_2^5\dddot{x}_2=C_9, \quad \omega_{10}=f_2t^{7/2}=C_{10},\end{gathered}\tag{17}$$

а Φ_1, Φ_2 как обычно, предполагаются дифференцируемыми функциями.

Если уравнения (16) удается разрешить относительно f_1 и f_2, то уравнения ($2''$) принимают вид

$$f_\alpha=t^{-7/2}\Psi_\alpha\left(\frac{x_1^2}{t},x_1\dot{x}_1,x_1^3\ddot{x}_1,x_1^5\dddot{x}_1,\frac{x_2^2}{t},x_2\dot{x}_2,x_2^3\ddot{x}_2,x_2^5\dddot{x}_2\right),$$

где Ψ_α — произвольные дифференцируемые функции.

Подытожим сказанное.

Теорема 4. *Для того чтобы уравнения ($2''$) были инвариантными относительно масштабных преобразований (3^{VI}), необходимо и достаточно, чтобы функции f_1 и f_2 удовлетворяли уравнениям (16) с произвольными дифференцируемыми функциями Φ_α.*

3. *Обобщенные галилеевские преобразования.* Известно, что если в какой-либо инерциальной системе отсчета выполняется равенство

$$\ddot{x}_i'=\ddot{x}_i, \tag{18}$$

то оно выполняется и во всех других инерциальных системах. Это утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея.

Совокупность преобразований, удовлетворяющих условию (18), очевидно, задается равенствами

$$x_i'=x_i+v_it+a_i, \tag{19}$$

где a_i, v_i — вещественные параметры, и называются преобразованиями Галилея.

В случае системы уравнений четвертого порядка ($2''$) естественно рассматривать преобразования, удовлетворяющие условиям

$$x^{(4)'}=x^{(4)}. \tag{20}$$

Интегрируя (20), получаем

$$x' = x + a^{(1)}t + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}t^3 + a^{(0)}. \tag{21}$$

Преобразования (21) в случае одной пространственной координаты образуют 4-параметрическую коммутативную группу Ли, а в случае 3-пространственных координат — 12-параметрическую группу. Они содержат, очевидно, преобразования (19) как подгруппу. Параметры $a^{(2)}$ и $a^{(3)}$ задают преобразования к неинерциальным системам отсчета, движущимся относительно исходной с ускорениями $a^{(2)}$ и $a^{(3)}$.

Опишем уравнения ($2''$), инвариантные относительно преобразований

$$\begin{aligned} &t' = t, \qquad x'_1 = x_1 + a^{(1)}t + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}t^3 + a^{(0)},\\ &x'_2 = x_2 + a^{(1)}t + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}t^3 + a^{(0)}. \end{aligned} \tag{3^{VII}}$$

Найдем операторы $\tilde{X}$, соответствующие каждому параметру $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ в отдельности. Из (4) имеем соответственно

$$\begin{aligned} &\tilde{X}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \tilde{X}^{(1)} = t\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2},\\ &\tilde{X}^{(2)} = t^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + 2t\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_2}\right),\\ &\tilde{X}^{(3)} = t^3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + 3t^2\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\right) + 6t\left(\frac{\partial}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_2}\right) +\\ &\qquad\quad + 6\left(\frac{\partial}{\partial \dddot{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \dddot{x}_2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая (5) и (22), получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2} = 0, \qquad t\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2} = 0,\\ &t^2\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right) + 2t\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}\right) + 2\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}\right) = 0,\\ &t^3\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}\right) + 3t^2\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{x}_2}\right) + 6t\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \ddot{x}_2}\right) +\\ &\qquad +6\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_1} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dddot{x}_2}\right) = 0, \qquad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{23}$$

Нетрудно проверить, что общие решения уравнений (23) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} &f_\alpha \equiv f_\alpha^0\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right),\\ &f_\alpha \equiv f_\alpha^1\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2, x_\alpha - \dot{x}_\alpha t, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right),\\ &f_\alpha \equiv f_\alpha^2\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2, 2x_\alpha - \dot{x}_\alpha t, 2x_\alpha - \ddot{x}_\alpha t^2, \dddot{x}_1, \dddot{x}_2\right),\\ &f_\alpha \equiv f_\alpha^3\left(t, x_1 - x_2, \dot{x}_1 - \dot{x}_2, \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2, \dddot{x}_1 - \dddot{x}_2, 3x_\alpha - \dot{x}_\alpha t, 6x_\alpha - \ddot{x}_\alpha t^2,\right.\\ &\qquad\quad \left. 6x_\alpha - \dddot{x}_\alpha t^3\right), \qquad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \tag{24}$$

причем $f^0_\alpha, \ldots, f^3_\alpha$ предполагаются произвольными дифференцируемыми функциями.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для инвариантности системы (2′′) относительно однопараметрических преобразований (3^{VII}) необходимо и достаточно, чтобы функции f_1 и f_2 были дифференцируемыми и представлялись в виде (24).*

1. Остроградский М.В., Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрическим задачам, Полн. собр. соч., Киев, Изд-во АН УССР, 1961, Т. 2, 359 с.
2. Kerner E.H., Hamiltonian Formulation of Action-at-a-Distance in Electrodynamics, *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, № 1, 35–42.
3. Kennedy F.J., Hamiltonian formulation of classical two-charge problem in straight-line approximation, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 9, 1844–1856.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т. мат. АН УССР, 1978, 5–44.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

Уравнения движения для частиц произвольного спина, инвариантные относительно группы Галилея

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

The first and the second order differential equations are derived which are invariant under the Galilei group and describe the motion of a particle with arbitrary spin. These equations admit the Lagrangian formulation and describe the dipole, spin-orbital and Darwin couplings of a particle with external electromagnetic field which are considered traditionally as pure relativistic effects. The problem of the motion of spin 1/2 nonrelativistic particle in an external electromagnetic field is exactly solved.

Выведены системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков, инвариантные относительно группы Галилея и описывающие движение частицы с произвольным спином. Эти уравнения допускают лагранжеву формулировку и описывают дипольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем, которые традиционно считались чисто релятивистскими эффектами. Приведены примеры бесконечнокомпонентных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Точно решена задача о движении нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$ в однородном магнитном поле.

Введение

Релятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином вызывают большой и устойчивый интерес физиков и математиков (см. [1] и цитируемую там литературу). И в то же время имеется удивительно мало публикаций, посвященных уравнениям, инвариантным относительно группы Галилея. Между тем еще в 1954 г. Баргман [2] показал, что с помощью центрального расширения группы Галилея понятие спина частицы может быть последовательно введено и в нерелятивистскую квантовую механику.

В [3, 4] получены галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение нерелятивистской частицы произвольного спина. Эти уравнения описывают дипольное взаимодействие частицы с внешним полем, но не учитывают такие хорошо известные физические эффекты, как спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия.

В настоящей работе с использованием методики, разработанной в [1, 5, 6] для вывода пуанкаре-инвариантных уравнений, получены галилеевски-инвариантные уравнения движения для частицы с произвольным спином s, позволяющие описать указанные взаимодействия. Это достигнуто с помощью расширения группы Галилея G до группы G^*, включающей преобразование одновременного отражения координат и времени. Полученные уравнения имеют шредингерову форму

$$i\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = H_s(\boldsymbol{p})\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \tag{0.1}$$

Теоретическая и математическая физика, 1980, **44**, № 1, С. 34–46.

(где $H_s(\boldsymbol{p})$ — некоторый дифференциальный оператор второго порядка, Ψ — $2(2s+1)$-компонентная волновая функция), допускают лагранжеву формулировку и описывают дипольное, спин-орбитальное, дарвиновское и квадрупольное взаимодействия частицы спина s с внешним электромагнитным полем. Это означает, в частности, что перечисленные взаимодействия, которые обычно вводятся как релятивистские поправки, могут последовательно рассматриваться в рамках нерелятивистской квантовой механики.

В работе получены также галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение частицы с произвольным спином. После минимальной замены $p_\mu \to \partial_\mu - eA_\mu$ эти уравнения также описывают спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы с полем. Приведен пример бесконечнокомпонентных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея.

1. Основные определения и постановка задачи

Группой Галилея G называется совокупность преобразований координат x_a $(a = 1, 2, 3)$ и времени t следующего вида:

$$x_a \to x'_a = R_{ab}x_b + V_a t + b_a, \qquad t \to t' = t + b_0, \tag{1.1}$$

где R_{ab} — оператор трехмерного поворота, V_a и b_μ — произвольные действительные параметры.

Представление группы G однозначно определяется заданием явного вида инфинитезимальных операторов P_μ, J_a и G_a, соответствующих сдвигам, поворотам и собственно галилеевским преобразованиям координат.

Определение. *Будем говорить, что уравнение (0.1) инвариантно относительно группы Галилея, если гамильтониан $H_s = P_0$ и генераторы P_a, J_a, G_a удовлетворяют коммутационным соотношениям*

$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c, \tag{1.2а}$$

$$[G_a, G_b] = 0, \qquad [G_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c, \tag{1.2б}$$

$$[P_a, G_b] = i\delta_{ab}M, \qquad [M, P_\mu] = [M, J_a] = [M, G_a] = 0, \tag{1.2в}$$

$$[H_s, P_a] = [H_s, J_a] = 0, \tag{1.2г}$$

$$[H_s, G_a] = iP_a, \qquad a, b = 1, 2, 3, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{1.2д}$$

Соотношения (1.2) определяют алгебру Ли группы Галилея. Алгебра (1.2) имеет три инвариантных оператора (оператора Казимира)

$$\begin{aligned} &2MC_1 = 2MP_0 - P_aP_a, \qquad C_2 = M,\\ &C_3 = (MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c)(MJ_a - \varepsilon_{ade}P_dG_e). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Собственные значения операторов C_1, C_2 и C_3 ассоциируются с внутренней энергией, спином и массой частицы, описываемой инвариантным уравнением (0.1).

Задачу нахождения всех возможных (с точностью до эквивалентности) галилеевски-инвариантных уравнений вида (0.1) мы решим в двух, вообще говоря, неэквивалентных подходах. В подходе I задача формулируется следующим образом: найти все такие гамильтонианы H_s^{I}, чтобы операторы

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{I}} = H_s^{\mathrm{I}}, \qquad P_a^{\mathrm{I}} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a^{\mathrm{I}} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^{\mathrm{I}} = tp_a - mx_a + \lambda_a^{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

удовлетворяли алгебре Ли расширенной группы Галилея (1.2). Здесь

$$S_c = \begin{pmatrix} s_c & 0 \\ 0 & s_c \end{pmatrix}, \qquad (a,b,c) \quad \text{— цикл } (1,2,3); \tag{1.5}$$

s_c — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, m — параметр, задающий массу частицы, λ_a^{I} — некоторые числовые матрицы, явный вид которых мы определим ниже.

Формулы (1.4) задают общий вид генераторов группы Галилея, соответствующих локальным преобразованиям $2(2s+1)$-компонентной волновой функции при переходе к новой системе координат (1.1),

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t',\boldsymbol{x}') = \exp[if(t,\boldsymbol{x})]D^s(R_{ab},v_a)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{1.6}$$

где $D^s(R_{ab},v_a)$ — некоторая числовая матрица, зависящая от параметров преобразования (1.1), $f(t,\boldsymbol{x})$ — фазовый множитель [2]:

$$f(t,\boldsymbol{x}) = mv_aR_{ab}x_b + \frac{1}{2}mv_av_a. \tag{1.7}$$

Мы убедимся ниже, что операторы H_s^{I} всегда могут быть выбраны такими, чтобы уравнение (0.1) было инвариантно также относительно антиунитарного преобразования отражения координат и времени:

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to r_1\Psi^*(-t,-\boldsymbol{x}), \qquad r_1^2 = 1, \tag{1.8}$$

где r_1 — некоторая матрица.

В подходе II задача сводится к определению всех возможных дифференциальных операторов H_s^{II} таких, чтобы генераторы

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{II}} = H_s^{\mathrm{II}}, \qquad P_a^{\mathrm{II}} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a^{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^{\mathrm{II}} = tp_a - \sigma_3 mx_a + \lambda_a^{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{1.9}$$

удовлетворяли алгебре (1.2). Здесь σ_3 — одна из матриц Паули

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

I и 0 — $(2s+1)$-рядные квадратные единичная и нулевая матрицы, λ_a^{II} — некоторые операторы (в общем случае зависящие от p_a), которые нам также предстоит найти. Можно показать, что формулы (1.9) задают общий вид генераторов группы G, при котором уравнение (0.1) инвариантно относительно унитарного преобразования $\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to r_2\Psi(-t,-\boldsymbol{x})$, $r_2 = \sigma_2$.

Потребуем, чтобы генераторы (1.9) были эрмитовы относительно обычного принятого в квантовой механике скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \Psi_2. \tag{1.10}$$

Существенное отличие представления (1.4) от (1.9) состоит в том, что генераторы H_s^{I}, G_a^{I} неэрмитовы относительно (1.10), но эрмитовы в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \hat{M} \Psi_2, \tag{1.11}$$

где $\hat{M}$ — некоторый положительно-определенный дифференциальный оператор, или относительно индефинитной метрики, когда $\hat{M}$ в (1.11) — некоторая числовая положительно-неопределенная матрица. Явный вид $\hat{M}$ будет найден ниже. Таким образом, усложнение метрики — это та цена, которую приходится платить за локальные преобразования (1.6) волновой функции. Аналогичная ситуация имеет место и для релятивистских уравнений [1].

Потребуем, чтобы H_s^{II} удовлетворял условию

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right) = \left(m + p^2/2m\right)^2. \tag{1.12}$$

Это эквивалентно требованию, чтобы внутренняя энергия частицы совпадала с ее массой.

Таким образом, задача нахождения галилеевски-инвариантных уравнений вида (0.1) сводится к решению системы соотношений (1.2) для операторов (1.4) и (1.9).

2. Явный вид гамильтонианов H_s^{I}

Решение задачи I приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^{I}, удовлетворяющие совместно с генераторами (1.4) коммутационным соотношениям (1.2), (1.4), задаются формулами*

$$H_s^{\mathrm{I}} = \sigma_3 \eta m - 2i\eta k \sigma_1 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{1}{2m} C_{ab} p_a p_b, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{2.1а}$$

$$\tilde{H}_s^{\mathrm{I}} = \sigma_1 \tilde{\eta} m + \frac{p^2}{2m} - 2\eta k (\sigma_2 - i\sigma_3) \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{2.1б}$$

где $C_{ab} = \delta_{ab} - 2\eta k^2 (\sigma_3 + i\sigma_2)(S_a S_b + S_b S_a)$, η, k и $\tilde{k}$ — произвольные параметры.

Доказательство. Определим сначала явный вид матриц λ_a^{I} из (1.4). Из (1.2б) получаем для λ_a^{I} следующие уравнения:

$$[\lambda_a^{\mathrm{I}}, \lambda_b^{\mathrm{I}}] = 0, \qquad [\lambda_a^{\mathrm{I}}, S_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c^{\mathrm{I}}, \qquad [S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc} S_c. \tag{2.2}$$

Из (1.5), (2.2) заключаем, что матрицы λ_a^{I}, не умаляя общности, можно представить в форме

$$\lambda_a^{\mathrm{I}} = k(\sigma_3 + i\sigma_2) S_a, \tag{2.3}$$

где k — произвольный коэффициент.

Найдем общий вид гамильтониана H_s^{I} в представлении, где $\lambda_a^{\mathrm{I}} = 0$. Переход к такому представлению осуществляется с помощью оператора [7]

$$V = \exp\left(i\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{p}/m\right) = 1 + i\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{p}/m. \tag{2.4}$$

Используя (2.4), получаем

$$\begin{aligned} &\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = VH_s^{\mathrm{I}}V^{-1}, \qquad &&\left(P_a^{\mathrm{I}}\right) = VP_a^{\mathrm{I}}V^{-1} = p_a, \\ &J_a' = VJ_aV^{-1} = J_a, \qquad &&\left(G_a^{\mathrm{I}}\right) = VG_a^{\mathrm{I}}V^{-1} = tp_a - mx_a. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5), (1.2) заключаем, что общий вид оператора $\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)'$ задается формулой

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = p^2/2m + A, \qquad A = \sigma_\mu a^\mu m, \tag{2.6}$$

где a_μ — произвольные коэффициенты, причем, не умаляя общности, можно положить $a_0 = 0$.

Можно показать, что с помощью преобразований, не изменяющих общего вида λ_a^{I} (2.3), матрица A (2.6) сводится к одной из следующих форм:

$$A = \sigma_3\eta m \qquad \text{или} \qquad A = \sigma_1\tilde{\eta}m. \tag{2.7}$$

Подставив (2.7) в (2.6), с помощью преобразования, обратного (2.5), приходим к формулам (2.1). Теорема доказана.

Формулы (2.1) задают нерелятивистские гамильтонианы для частиц с произвольным спином. В случае $s = 1/2$, $k = -i$, $\eta = 1$ уравнение (0.1), (2.1a) может быть записано в компактной форме

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi = (1 + \gamma_4 - \gamma_0)\,\frac{p^2}{2m}\Psi, \tag{2.8}$$

где $\gamma_0 = \sigma_3$, $\gamma_a = -2i\sigma_2 S_a$, $\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ — матрицы Дирака.

Отметим, что все гамильтонианы (2.1) принадлежат классу дифференциальных операторов второго порядка, что априори не требовалось. В рамках группы Пуанкаре гамильтонианы частицы с произвольным спином бывают, как правило, интегродифференциальными операторами [1, 5].

Параметры k, η и $\tilde{\eta}$ всегда можно выбрать такими, чтобы уравнения (0.1), (2.1) были инвариантны относительно антиунитарной операции отражения координат и времени (1.8). Необходимым и достаточным условием такой инвариантности является одновременное выполнение соотношений

$$\eta^* = \pm\eta, \qquad k^* = \pm k \qquad \text{или} \qquad \tilde{\eta}^* = \tilde{\eta}, \qquad k^* = k, \tag{2.9}$$

при этом $r_1 = \sigma_1\Delta$, если $\eta^* = -\eta$, $k^* = -k$ или $\tilde{\eta}^* = \eta$, $k^* = k$, $r_1 = \Delta$, если $\eta^* = \eta$, $k^* = k$, $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}$, где Δ' — матрицы, определяемые с точностью до фазы соотношениями [8]

$$\Delta' s_a = -s_a^*\Delta', \qquad (\Delta')^2 = (-1)^{2s}.$$

Таким образом, при ограничениях на параметры η, $\tilde{\eta}$ и k, задаваемых формулами (2.9), уравнения (0.1), (2.1) инвариантны относительно расширенной группы Галилея, включающей преобразования (1.8).

Гамильтонианы (2.1) и операторы (1.4), (2.3) неэрмитовы в скалярном произведении (1.10). Однако эти операторы эрмитовы в метрике (1.11), где $\hat{M}$ — положительно-определенный оператор

$$\hat{M} = \left(V^{-1}\right)^{+} V^{-1} = 1 + [i(k-k^*)\sigma_3 - (k+k^*)\sigma_2]\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/m + \\ +2(k^*k)(1+\sigma_1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2/m^2. \tag{2.10}$$

Кроме того, если η, k и $\tilde{\eta}$ удовлетворяют условиям (2.9), гамильтонианы (2.1) эрмитовы в индефинитной метрике вида (1.11), когда

$$\hat{M} = \xi = \begin{cases} \sigma_3, & \text{если } \eta^* = \eta,\ k^* = k,\ \tilde{\eta}^* = -\eta, \\ \sigma_2, & \text{если } \eta^* = -\eta,\ k^* = -k,\ \tilde{\eta}^* = -\tilde{\eta}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Если выполняется (2.11), то уравнения (0.1), (2.1) могут быть получены с помощью вариационного принципа. Соответствующие лагранжианы имеют вид

$$L(t,\boldsymbol{x}) = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) - \eta m\bar{\Psi}\sigma_3\Psi - \\ -\eta k\left(\bar{\Psi}\sigma_1 S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}\sigma_1 S_a\Psi\right) - \frac{1}{2m}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}C_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b}, \tag{2.12а}$$

когда H_s^{I} задается формулой (2.1а), и

$$L(t,\boldsymbol{x}) = \frac{i}{2}\left\{\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\Psi - 2i\tilde{\eta}m\bar{\Psi}\sigma_1\Psi + \right. \\ \left. +2\tilde{\eta}k\left[\bar{\Psi}(\sigma_2 - i\sigma_3)S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}(\sigma_2 - i\sigma_3)S_a\Psi\right]\right\} - \frac{1}{2m}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b}, \tag{2.12б}$$

если гамильтониан имеет вид (2.16). Здесь $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\xi$.

Лагранжианы (2.12) являются скалярами относительно преобразований (1.1), (1.6), где

$$D^s(R_{ab}, V_a) = \left(1 + i\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{v}\right)D^s(R_{ab}), \tag{2.13}$$

где $D^s(R_{ab})$ — матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений $D(s)\oplus D(s)$ группы $SO(3)$.

3. Явный вид гамильтонианов H_s^{II}

Решим задачу II, т. е. найдем дифференциальные операторы, удовлетворяющие совместно с (1.9) соотношениям (1.2), (1.12).

Теорема 2. *Все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности) дифференциальные операторы H_s^{II}, которые эрмитовы в метрике (1.10) и удовлетворяют условиям (1.2), (1.9), (1.12), задаются формулами*

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sigma_3\left[m + \frac{p^2}{m} - \frac{(S_aS_b + S_bS_a)p_ap_b}{2mS^2}\sin^2\theta_s\right] + \\ +\sigma_2\sqrt{2}\sin\theta_s\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{S} + \sigma_1\left[a_s\frac{p^2}{2m} + \frac{b_s}{4ms^2}(S_aS_b + S_bS_a)p_ap_b\right], \tag{3.1}$$

где

$$a_{1/2} = \sin 2\theta_{1/2}, \qquad b_{1/2} = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = \sin 2\theta_1,$$

$$a_{3/2} = b_{3/2} - \frac{5}{4}\sin 2\theta_{3/2} = -\frac{1}{8}\sin 2\theta_{3/2} - \frac{3}{4}\sin\theta_{3/2}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\theta_{3/2}\right)^{1/2},$$

$$a_s = b_s = \theta_s = 0, \qquad s > 3/2,$$

а $\theta_{1/2}$, θ_1, $\theta_{3/2}$ — *произвольные действительные параметры.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что операторы H_s^{II} могут включать производные не выше второго порядка. Действительно, пусть $H_s^{\mathrm{II}} = \sum\limits_{i=0}^{N} H_i$, где H_i содержит производные только i-го порядка, тогда из (1.12) получаем

$$H_N H_N = H_N^+ H_N = 0 \qquad \text{или} \qquad H_N = 0, \quad \text{если } N > 2. \tag{3.2}$$

Представим искомые дифференциальные операторы H_s^{II} в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули (1.9):

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sum_{\mu=0}^{s}\left[a_\mu^s m + b_\mu^s \frac{p^2}{2m} + c_\mu^s \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + d_\mu^s \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}\right]\sigma_\mu, \tag{3.3}$$

где a_μ^s, b_μ^s, c_μ^s, d_μ^s — произвольные действительные коэффициенты. Используя операторы ортогонального проектирования [1, 5]

$$\Lambda_r = \prod_{r'\neq r}\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})p^{-1} - r'}{r - r'}, \qquad r, r' = -s, -s+1, \ldots, s,$$

$$\Lambda_r \cdot \Lambda_{r'} = \delta_{rr'}, \qquad \sum_r \Lambda_r = 1, \qquad \sum_r r^l \Lambda_r = \left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right)^l,$$

H_s^{II} можно переписать в виде

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{r=-s}^{s}\left[a_\mu^s m + \left(b_\mu^s + r^2 d_\mu^s\right)\frac{p^2}{2m} + rpc_\mu^2\right]\sigma_\mu \Lambda_r. \tag{3.4}$$

Операторы (3.4), очевидно, удовлетворяют условиям (1.2г), (1.10). Потребуем, чтобы выполнялось (1.12). Подставив (3.4) в (1.12), используя ортогональность операторов Λ_r и приравнивая независимые слагаемые, получаем, что a_μ^s, b_μ^s, c_μ^s, d_μ^s должны удовлетворять одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{3}\left(a_i^s\right)^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left[r^2\left(c_i^s\right)^2 + a_i^s\left(b_i^s + r^2 d_i^s\right)\right] = 1, \\
\sum_{i=1}^{r} r c_i^s\left(b_i^s + r^2 d_i^s\right) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} r c_i^s a_i^s = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left(b_i^s + r^2 d_i^s\right)^2 = 1, \\
a_0^s = b_0^s = d_0^s = c_0^s = 0
\end{gathered} \tag{3.5}$$

или

$$a_0^s = b_0^s = 1, \qquad d_0^s = c_0^s = a_i^s = c_i^s = d_i^s = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.6}$$

Общее решение уравнений (3.5), (3.4) (с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых числовыми матрицами) и задается формулами (3.1). Можно показать, что решение (3.6) несовместно с (1.2а), (1.2б) и (1.2д).

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь указать явный вид операторов λ_a^{II}, при котором операторы (1.8) удовлетворяют соотношениям (1.2б), (1.2д). Нетрудно убедиться, что λ_a^{II} можно выбрать в форме

$$\lambda_a^{\mathrm{II}} = [U, \sigma_3 x_a]U^+, \tag{3.7}$$

где

$$U = \left(E + \sigma_3 H_s^{\mathrm{II}}\right) \Big/ \sqrt{2E\left(E + \frac{1}{2}H_s^{\mathrm{II}}\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_3 H_s^{\mathrm{II}}\right)}, \quad E = m + p^2/2m, \tag{3.8}$$

— оператор, диагонализующий гамильтонианы (3.1) и генераторы (1.8):

$$U^\dagger H_s^{\mathrm{II}} U = \sigma_3 E, \qquad U^\dagger G_a U = tp_a - \sigma_3 m x_a. \tag{3.9}$$

Теорема доказана.

В случае $\theta_{1/2} = \pi/4$ уравнение (0.1), (3.1а) принимает особо простой вид (ср. 2.8):

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)\,\Psi = i\gamma_4 \frac{p^2}{2m}\Psi. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) отличается от релятивистского уравнения Дирака только наличием слагаемого в правой части, которое, очевидно, нарушает инвариантность относительно группы Пуанкаре, но сохраняет инвариантность относительно группы Галилея.

4. Нерелятивистская частица во внешнем электромагнитном поле

Для того, чтобы перейти к описанию движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в уравнении (0.1) обычную замену

$$p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \tag{4.1}$$

где A_μ — четырехвектор-потенциал внешнего поля. В результате приходим к уравнениям

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \boldsymbol{x}) = H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0)\Psi(t, \boldsymbol{x}), \qquad \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \tag{4.2}$$

где $H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — один из гамильтонианов, полученных из (2.1), (3.1) заменой (4.1):

$$\begin{aligned} H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3 \eta m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - 2i\eta k \sigma_1 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + eA_0 - \\ -(\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\eta k^2}{m}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right], \end{aligned} \tag{4.3а}$$

$$\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3 \tilde{\eta} m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - 2\eta k(\sigma_2 - i\sigma_3)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + eA_0, \tag{4.3б}$$

$$H_s^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_3\left[m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}{ms^2}\sin^2\theta_s - e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{2ms^2}\sin^2\theta_s\right] + \\ +\sigma_1\left[a_s\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + b_s\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}{2ms^2} + eb_s\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{4ms^2}\right] + \sigma_2\sqrt{2}\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{s}\sin\theta_s + eA_0. \tag{4.3в}$$

В формулах (4.3) $H_a = -i\varepsilon_{abc}\pi_b\pi_c$ — напряженность магнитного поля.

Уравнения (4.2), (4.3), очевидно, инвариантны относительно калибровочных преобразований. Кроме того, как и до введения взаимодействия уравнения (4.3) с гамильтонианами (4.3а), (4.3б) инвариантны относительно преобразований из группы Галилея (1.6), (2.13), если вектор-потенциал преобразуется по закону [3]

$$A_b \to A'_b = R_{bc}A_c, \qquad A_0 \to A'_0 = A_0 + v_aA_a. \tag{4.4}$$

Анализ уравнений (4.2) удобно производить в представлении, в котором операторы (4.3) квазидиагональны (т.е. коммутируют с одной из σ-матриц). Как и в случае уравнения Дирака, гамильтонианы (4.3) могут быть диагонализованы только приближенно. Ниже мы осуществим такую диагонализацию и представим гамильтониан частицы с произвольным спином в виде ряда по степеням $1/m$, удобном для вычислений с использованием теории возмущений.

Диагонализация гамильтонианов (4.3) с точностью до членов порядка $1/m^2$ осуществляется с помощью операторов

$$V^\alpha = \exp\left(iC_s^\alpha + \sigma_3\frac{1}{2\eta^\alpha m}\frac{\partial B_s^\alpha}{\partial t}\right)\exp\left(iB_s^\alpha\right)\exp\left(iA_s^\alpha\right), \qquad \alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II}, \\ \tilde{V}^\alpha = \exp\left(i\tilde{C}_s^\alpha\right)\exp\left(i\tilde{B}_s^\alpha\right)\exp\left(i\tilde{A}_s^\alpha\right), \tag{4.5}$$

где

$$A_s^{\mathrm{I}} = -i\sigma_2 k\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad A_s^{\mathrm{II}} = -\sigma_1\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \qquad \eta^{\mathrm{I}} = \eta, \quad \eta^{\mathrm{II}} = 1,$$

$$B_s^{\mathrm{I}} = \sigma_1\frac{k}{2m^2}\left\{\frac{1}{2\eta}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2] + ik[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e}{\eta}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},$$

$$C_s^{\mathrm{I}} = \sigma_2\frac{k^2}{m^2}\left\{-\frac{2ik}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + iek[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}]_+ + [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, eA_0]\right\},$$

$$B_s^{\mathrm{II}} = \sigma_2\frac{1}{4m^2}\left\{a_s\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{b_s}{2s^2}[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},$$

$$C_s^{\mathrm{II}} = \sigma_1\frac{1}{8m^3}\left\{\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\left[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{e\sin^2\theta_s}{s^2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]_+ - \right. \\ \left. -\frac{4\sqrt{2}\sin^3\theta_s}{s^3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - iea_s[\boldsymbol{\pi}^2, A_0] - \frac{ieb_s}{s^2}[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, A_0]\right\},$$

$$\tilde{A}_s^{\mathrm{I}} = -ik(\sigma_2 - i\sigma_3)\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad \tilde{B}_s^{\mathrm{I}} = \frac{k}{2\eta m^2}(\sigma_2 - i\sigma_3)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E},$$

$$\tilde{C}_s^{\mathrm{I}} = -\frac{ik}{4\tilde{\eta}m^3}(\sigma_2 - i\sigma_3)[\boldsymbol{\pi}^2, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] - \frac{i}{2\tilde{\eta}m}\frac{\partial\tilde{B}_s^{\mathrm{I}}}{\partial t}.$$

Непосредственным вычислением получаем

$$
\begin{aligned}
&[H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi},A_0)]' = V^\alpha H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi},A_0)(V^\alpha)^{-1} = A^\alpha m + B^\alpha\left(\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}+eA_0\right)+\\
&+\sigma_3 e C^\alpha\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m}+\frac{e}{4m^2}D^\alpha\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi})+\frac{e}{6m^2}F^\alpha s(s+1)\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\\
&+\frac{1}{12m^2}G^\alpha Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}+\frac{n^\alpha}{m^2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})+\frac{L^\alpha e}{m^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}+o\left(\frac{1}{m^3}\right),\\
&\left[\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\right]' = \tilde{V}^{\mathrm{I}}\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}\left(\tilde{V}^{\mathrm{I}}\right)^{-1} = \sigma_3\tilde{\eta}m+\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}+eA_0+o\left(\frac{1}{m^3}\right).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A^{\mathrm{I}}=\sigma_3\eta, \qquad B^{\mathrm{I}}=1, \qquad C^{\mathrm{I}}=-\eta k^2,\\
&-D^{\mathrm{I}}=F^{\mathrm{I}}=G^{\mathrm{I}}=k^2, \quad n^{\mathrm{I}}=-3L^{\mathrm{I}}=\eta k^3,
\end{aligned}
\tag{4.7а}
$$

$$
\begin{aligned}
&A^{\mathrm{II}}=B^{\mathrm{II}}=\sigma_3, \quad -C^{\mathrm{II}}=D^{\mathrm{II}}=-F^{\mathrm{II}}=-G^{\mathrm{II}}=\frac{\sin^2\theta_s}{2s^2},\\
&n^{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{2s}\left(-a_s+\frac{b_s}{4s^2}\right), \qquad L^{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{2}b_s\sin\theta_s}{24s^2},\\
&Q_{ab}=(e/2)\{3[S_a,S_b]_+-2\delta_{ab}s(s+1)\}.
\end{aligned}
\tag{4.7б}
$$

Операторы (4.6), (4.7) содержат слагаемые, соответствующие дипольному ($\sim\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}$), спин-орбитальному ($\sim\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi})$), квадрупольному ($\sim Q_{ab}\partial E_a/\partial x_b$) и дарвиновскому ($\sim\operatorname{div}\boldsymbol{E}$) взаимодействиям частицы с полем. Два последних слагаемых в (4.6), (4.7) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия. Аналогичную структуру имеют приближенные гамильтонианы, полученные из релятивистских уравнений [5, 6]. В случае $s=1/2$, $\eta=1$, $k^2=-1$, $\theta_s=\pi/4$ семь первых слагаемых в (4.6), (4.7) совпадают с гамильтонианом Фолди–Вуйтхойзена [9], полученным при диагонализации уравнения Дирака. Таким образом, в приближении $1/m^2$ нерелятивистские уравнения (4.2), (4.6), (4.7) описывают движение частицы со спином $s=1/2$ во внешнем электромагнитном поле с той же точностью, что и релятивистское уравнение Дирака.

Отметим, что для некоторых классов внешних полей уравнения (4.2) могут быть решены точно. Приведем без доказательств собственные значения гамильтониана (4.3б) для частицы со спином, взаимодействующей с постоянным однородным магнитным полем [10]

$$
\begin{aligned}
&H_{1/2}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\Psi_{\varepsilon s_3 n p_3}=E_{\varepsilon s_3 n p_3}\Psi_{\varepsilon s_3 n p_3},\\
&E_{\varepsilon s_3 n p_3}=\varepsilon\left\{m^2+\xi^2+p_3^2+\frac{\left(\xi^2+p_3^2\right)^2}{4m^2}+\left(\frac{eH_3}{2m}\right)^2+\right.\\
&\qquad\left.+\varepsilon\frac{eH_3}{m}\left[m^2\cos^2 2\theta_{1/2}+\xi^2+\frac{\left(\xi^2+p_3^2\right)^2}{4m^2}\right]^{1/2}\right\}^{1/2},
\end{aligned}
$$

где $\xi^2=(2n+1)eH_3$, $H_1=H_2=0$, $n=0,1,2,\ldots$, $\varepsilon=\pm1$, $s_3=\pm1/2$.

5. Уравнения первого порядка

Остановимся вкратце на задаче описания галилеевски-инвариантных дифференциальных уравнений вида

$$F\Psi = 0, \qquad F = \beta_\mu p^\mu + \beta_5 m, \qquad p_\mu - i\partial/\partial x_\mu, \tag{5.1}$$

где β_μ, β_5 — некоторые числовые матрицы.

Уравнение (5.1) по определению инвариантно относительно группы Галилея, если выполняются соотношения

$$[F, Q_A] = f_A F, \qquad A = 1, 2, \ldots, 10, \tag{5.2}$$

где через Q_A обозначен произвольный генератор группы $G : \{Q_A\} = \{P_0, P_a, G_a, J_a\}$, а через f_A — некоторые операторы, определенные на множестве решений уравнения (5.1).

Полагая $f_A \equiv 0$ и выбирая генераторы P_μ, J_a, G_a в форме (1.4), где S_a и λ_a — произвольные матрицы (что соответствует локальным преобразованиям Галилея (1.6) для функции Ψ), получаем из (5.2) следующую систему перестановочных соотношений для матриц β_μ, β_4, λ_a, S_a:

$$\begin{gathered} [S_a, \beta_5] = [S_a, \beta_0] = 0, \qquad [S_a, \beta_b] = i\varepsilon_{abc}\beta_c, \\ [\lambda_a, \beta_5] = i\beta_a, \qquad [\lambda_a, \beta_b] = i\delta_{ab}\beta_0, \qquad [\lambda_a, \beta_0] = 0, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где λ_a, S_a — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.2).

Таким образом, задача описания галилеевски-инвариантных уравнений вида (5.1) сводится в нашей постановке к нахождению матриц S_a, λ_a, β_5, β_a, удовлетворяющих условиям (2.2), (5.3).

Приведем частное решение системы (2.2), (5.3), позволяющее получить уравнения вида (5.1) для нерелятивистских частиц произвольного спина. Обозначим через S_{kl}, $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, генераторы неприводимого представления группы $SO(6)$. Тогда матрицы

$$\begin{gathered} S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad \lambda_a = \frac{1}{2}(iS_{6a} + S_{5a}), \qquad a = 1, 2, 3 \\ \beta_a = 2S_{4a}, \qquad \beta_0 = iS_{46} + S_{45}, \qquad \beta_5 = 2(I + iS_{46} - S_{45}) \end{gathered} \tag{5.4}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.2), (5.3), т.е. формулы (5.4) дают решение поставленной задачи.

Полагая в (5.1), (5.4) $S_{kl} = (i/4)[\gamma_k, \gamma_l]$, $S_{6k} = \frac{1}{2}\gamma_k$, где γ_k — эрмитовы четырехрядные матрицы Дирака, получаем уравнение, эквивалентное уравнению Леви–Леблонда [3] для частицы со спином $s = 1/2$. Выбирая иные представления алгебры Ли группы $SO(6)$, получаем из (5.1), (5.4) уравнения для частиц с другими значениями спина.

Уравнения (5.1), (5.4), как и уравнения второго порядка, рассмотренные выше, позволяют описать спин-орбитальное взаимодействие частицы с внешним полем. Так, например, полагая $S_{kl} = i[\hat\beta_k, \hat\beta_l]$, $S_{6k} = \hat\beta_k$, где $\hat\beta_k$ — десятирядные матрицы Кеммера–Деффина–Петье (которые могут быть выбраны, скажем, в форме, приведенной в монографии [12]), и делая в (5.1) замену $p_\mu \to \pi_\mu$, где $\pi_a = p_a$,

$\pi_0 = p_0 - eA_0$, мы получаем после несложных, но несколько громоздких вычислений, уравнение для трехкомпонентной волновой функции $\Psi^{(3)}$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^{(3)} = H\Psi^{(3)}, \qquad H = m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + e\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}}{4m}, \tag{5.5}$$

где S_a — спиновые матрицы для $s = 1$. Посредством преобразования $H \to H' = VHV^{-1}$, где $V = \exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}/m)$, гамильтониан (5.5) приводится к форме, аналогичной (4.6),

$$\begin{aligned} H' = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{1}{32m^2}\big[\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) - \\ -\frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - \frac{4}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\Big] + o\left(\frac{1}{m^3}\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Оператор (5.6), как и (4.6), (4.7), содержит слагаемые, описывающие дарвиновское, спин-орбитальное и квадрупольное взаимодействия частицы с внешним электрическим полем.

6. Заключительные замечания

1. Выше получены системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков, которые инвариантны относительно преобразований Галилея и калибровочных преобразований и описывают дипольное, квадрупольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы произвольного спина с внешним электромагнитным полем. Перечисленные взаимодействия, таким образом, не являются чисто релятивистскими эффектами и могут последовательно рассматриваться в рамках нерелятивистской квантовой механики (см. также [10, 11]).

2. Уравнения (2.8), (3.10) имеют такую структуру, что левая часть их совпадает с релятивистским уравнением Дирака, а в правой части содержатся члены, которые нарушают симметрию относительно группы Пуанкаре и обеспечивают инвариантность уравнения относительно группы Галилея. Такой способ нарушения пуанкаре-симметрии является одним из возможных подходов для получения галилеевски-инвариантных уравнений движения частиц с произвольным спином. Так, исходя из релятивистских уравнений без лишних компонент, выведенных в [1, 6], с помощью добавления членов, нарушающих пуанкаре-инвариантность, но сохраняющих симметрию относительно группы $E(3)$, можно получить уравнения (1.2), (2.1a).

3. Уравнения вида (0.1) и (5.1), конечно, не исчерпывают всех возможных линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Так, например, для описания движения нерелятивистской частицы со спином $s = 1$ можно использовать галилеевски-инвариантный аналог уравнений Прока

$$\begin{aligned} &\left(2mp_0 - p^2\right)\Psi_\nu = 0, \qquad \nu = 0,1,2,3, \\ &m\Psi_0 - p_a\Psi_a, \qquad a = 1,2,3. \end{aligned}$$

4. Неэрмитовость генераторов (1.4) относительно обычного скалярного произведения (1.10) обусловлена неэрмитовостью конечномерных представлений алгебры (2.2) (которая изоморфна алгебре Ли группы Евклида $E(3)$). Аналогичная ситуация имеет место и в релятивистской теории, где на решениях конечномерных по спиновым индексам уравнений движения всегда реализуются неунитарные представления однородной группы Лоренца, а требование унитарности этих представлений приводит к бесконечнокомпонентным уравнениям. Поэтому представляет интерес рассмотреть бесконечнокомпонентные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея. Приведем пример таких уравнений.

Обозначим через $\tilde{S}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ генераторы унитарного бесконечномерного представления группы $O(1,5)$. Тогда уравнение в форме (5.1), (5.4), где $S_{kl} = \tilde{S}_{kl}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4, 5)$, $S_{6k} = i\tilde{S}_{0k}$, инвариантно относительно группы Галилея.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, 501.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1;
   Hammermesh M., *Ann. Phys.*, 1960, **9**, 518.
3. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
4. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1974, **7**, 1185.
5. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, 192.
6. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **34**, 319.
7. Никитин А.Г., Салогуб В.А., *УФЖ*, 1975, **20**, 1730.
8. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
9. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **68**, 29.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cim.*, 1975, **14**, 483;
    Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, 81.
11. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Rep. Math. Phys.*, 1978, **13**, 175.
12. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, Наука, 1969, 176.

Галилеевски инвариантные уравнения движения со спин-орбитальным взаимодействием

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

Хорошо известно, что если в релятивистское уравнение Дирака для электрона ввести взаимодействие с внешним электромагнитным полем и затем приближенно (с точностью до членов $\frac{1}{m^2}$) диагонализировать гамильтониан с помощью серии преобразований Фолди–Воутхойзена, то оператор энергии будет иметь вид [1]

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \tag{1}$$

где

$$H_1 = \gamma_0 \left(m + \frac{\vec{\pi}^{\,2}}{2m} \right) + eA_0 \tag{2}$$

описывает взаимодействие точечного заряда с электромагнитным полем,

$$H_2 = -\frac{e}{2m}\gamma_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \quad - \tag{3}$$

дипольное взаимодействие,

$$H_3 = -\frac{e}{8m^2}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{\pi}) \quad - \tag{4}$$

спин-орбитальное взаимодействие,

$$H_4 = -\frac{e}{m^2} \operatorname{div} \vec{E} \quad - \tag{5}$$

дарвиновское взаимодействие. Здесь $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Паули, γ_0 — диагональная матрица Дирака, $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$.

Каждый член в формуле (1) имеет четкую физическую интерпретацию.

В 1954 г. Баргман [2] показал, что спин частицы можно последовательно ввести в нерелятивистскую квантовую механику, если рассмотреть центральное расширение группы Галилея. В связи с этим результатом возникает задача об отыскании уравнений движения для частицы с произвольным спином s, инвариантных относительно расширенной группы Галилея, с помощью которых можно бы описать, например, поведение электрона во внешних электромагнитных полях. Другими словами эту задачу можно сформулировать так: описать уравнения движения в рамках релятивистской квантовой механики для частиц со спином, которые подобно уравнению Дирака приводили бы к гамильтониану типа (1). Первые результаты в этом направлении получил Леви-Леблонд [3] для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$,

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 28–30 ноября 1979 г., Москва, Наука, 1980, Т.2, С. 35–41.

а затем Хатен и Герлей [4] для частицы с произвольным. спином. Эти уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. После введения взаимодействия в такие уравнения получаем гамильтонианы типа (1), в которых, однако, отсутствуют члены, описывающие спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия (т.е. члены типа H_3 и H_4).

Во многих книгах и статьях утверждается, что спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия — чисто релятивистские эффекты. В дальнейшем будет показано, что такое широко распространенное утверждение ошибочно, поскольку указанные взаимодействия могут быть описаны с помощью уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Вывод и анализ таких уравнений и является целью настоящей работы.

Перейдем к формулировке нашей задачи. Группой Галилея G называется совокупность преобразований координат x_a $(a = 1, 2, 3)$ и времени t следующего вида

$$x_a \to x'_a = R_{ab} x_b + V_a t + b_a, \qquad t \to t' = t + b_0, \tag{6}$$

где R_{ab} — оператор трехмерного поворота, V_a, b_μ — произвольные действительные параметры.

Мы рассмотрим два класса уравнений, инвариантных относительно преобразований (6), а именно системы дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка. Наиболее общий вид уравнения первого порядка задается формулой

$$L^{(1)} \Psi(, \vec{x}) = 0, \qquad L^{(1)} = \beta_\mu p^\mu + \beta_5 m, \qquad p_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{7}$$

где β_μ — матрицы, подлежащие определению, Ψ — столбец функций с компонентами $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$.

Уравнение второго порядка ищем в виде

$$\begin{aligned} &L^{(2)} \Psi(t, \vec{x}) = 0, \qquad L^{(2)} = i \frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{p}), \\ &H(\vec{p}) = A_0 + A_b p_b + A_{bc} \frac{1}{2} (p_a p_b + p_b p_a), \end{aligned} \tag{8}$$

A_0, A_b, A_{bc} — матрицы, которые будут определены из условия галилеевской инвариантности.

Определение. *Будем говорить, что уравнение (7) (или (8)) галилеевски инвариантно, если на множестве решений этих уравнений выполняются условия*

$$[L^{(n)}, P_\mu]_- = [L^{(n)}, J_a]_- = [L^{(n)}, G_a]_- = [L^{(n)}, M]_- = 0, \qquad n = 1, 2, \tag{9}$$

где P_μ, G_a, J_a, M — генераторы группы Галилея, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[P_a, P_b]_- = [P_0, P_a]_- = [P_0, J_a]_- = [G_a, G_b]_- = [M, P_0]_- = [M, P_a]_- = \\ &= [M, J_a]_- = [M, G_a]_- = 0, \quad [P_a, J_b]_- = i\varepsilon_{abc} P_c, \quad [G_a, J_b]_- = i\varepsilon_{abc} G_c, \\ &[J_a, J_b]_- = i\varepsilon_{abc} J_c, \quad [P_a, G_b]_- = i\delta_{ab} M, \quad [P_0, G_a]_- = i P_a. \end{aligned} \tag{10}$$

11-мерная алгебра Галилея (10), как известно имеет три инвариантных оператора (операторы Казимира)

$$C_1 = P_0 - \frac{P_a P_a}{2M}, \qquad C_2 = M,$$
$$C_3 = (MJ_a - \varepsilon_{abc} P_b G_c)(M_a - \varepsilon_{abc} P_b G_c), \tag{11}$$

собственные значения которых ассоциируются с внутренней энергией, массой и квадратом спина частицы.

Из условия инвариантности (9) относительно алгебры (10), а значит и группы Галилея, видно, что, задавшись некоторым представлением алгебры (10), можно описать широкий класс галилеевски инвариантных уравнений движения. В работе [5] в аналогичной постановке решена задача об описании уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре. Будем исходить из следующей явной структуры для генераторов P_μ, G_a, J_a, M:

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = m,$$
$$J_a = (\vec{x} \times \vec{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \lambda_a, \tag{12}$$

где S_a — матрицы, реализующие приводимое представление алгебры $O(3)$, λ_a — некоторые пока неизвестные числовые матрицы.

Операторы (12) порождает обычные локальные преобразования для волновой функции, т.е.

$$\Psi(t, \vec{x}) \to \Psi'(t', \vec{x}') = \exp[if(t, \vec{x})] D^s(R_{ab}, V_a) \Psi(t, \vec{x}),$$

где $D^s(R_{ab}, V_a)$ — некоторая числовая матрица, зависящая от параметров преобразования Галилея (6),

$$f(t, \vec{x}) = mR_{ab} V_a x_b + \frac{1}{2} m V^2 t.$$

Подставив (7), (8), (12) в (9) и приравняв коэффициенты при линейно независимых слагаемых, получаем систему коммутационных соотношений для матриц S_a, λ_a, β_μ, A_μ, A_{bc}:

$$[S_a, S_b]_- = i\varepsilon_{abc} S_c, \qquad [S_a, \lambda_b]_- = i\varepsilon_{abc}\lambda_c, \qquad [\lambda_a, \lambda_b]_- = 0,$$
$$[\Lambda_a, \beta_b]_- = i\delta_{ab}\beta_0, \qquad [\beta_0, S_a]_- = 0, \qquad [\lambda_a, \beta_0]_- = 0, \tag{13}$$

$$[\beta_5, S_a]_- = 0, \qquad [\lambda_a, \beta_5]_- = i\beta_a, \qquad [\beta_a, S_b]_- = \varepsilon_{abc}\beta_c, \tag{13$'$}$$

$$[\lambda_a, A_0]_- = iA_a, \qquad [A_0, S_a]_- = 0, \qquad [A_a, S_b]_- = i\varepsilon_{abc} A_c,$$
$$[\lambda_a, A_{bc}]_- = 0, \qquad [\lambda_a, A_b]_- = i(\delta_{ab} + 2A_{ab}), \tag{13$''$}$$
$$[A_{ab}, S_c]_- = i(\varepsilon_{acd} A_{db} + \varepsilon_{bck} A_{ak}).$$

Таким образом, задача об описании галилеевских уравнений первого и второго порядков сводится к решению коммутационных соотношений (13), (13$'$), (13$''$).

Сначала опишем уравнения вида (8). Для этой цели используем следующую структуру для матриц S_a и λ_a:

$$S_a = \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = -(\sigma_2 - i\sigma_3) S_a, \tag{14}$$

где s_a — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, σ_a — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

I и 0 — $(2s+1)$-рядные единичные и нулевые матрицы.

Поскольку матрицы S_a и λ_a имеют размерность $2(2s{+}1)\times(2(2s{+}1)$, то волновая функция $\Psi(t,\vec{x})$ в уравнениях (8) имеет $2(2s+1)$ компонент, что соответствует числу степеней свободы для частицы и античастицы.

Не приводя здесь детального решения коммутационных соотношений (13), (13″), сформулируем только окончательный результат.

Теорема. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) матрицы A_μ, A_{ab}, удовлетворяющие соотношениям (13), (13″), задаются формулами*

$$\begin{aligned} &A_0 = A_0^{\mathrm{I}} = \sigma_3\eta m, \qquad A_b = A_b^{\mathrm{I}} = -2\eta\sigma_1 S_b, \\ &A_{bc} = A_{bc}^{\mathrm{I}} = [\delta_{bc} - 2(\sigma_3 + i\sigma_2)]\frac{\eta}{2m}S_b S_c, \end{aligned} \tag{15}$$

или

$$A_0 = A_0^{\mathrm{II}} = \sigma_3\tilde{\eta}m, \qquad A_b = A_b^{\mathrm{II}} = -2\tilde{\eta}(\sigma_2 - i\sigma_3)S_b, \qquad A_{ab} = A_{ab}^{\mathrm{II}} = \delta_{ab}, \tag{16}$$

где η и $\tilde{\eta}$ — произвольные постоянные.

Уравнение (8) с матрицами (15) описывает свободное движение нерелятивистской частицы с произвольным спином s, массой m и внутренней энергией $\pm\eta m$. В том случае, когда спин $s = \frac{1}{2}$, $\eta = 1$, уравнение (7) может быть записано с использованием матриц Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi(t,\vec{x}) = (1 - \gamma_0 + \gamma_4)\,\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\Psi(t,\vec{x}), \tag{17}$$

где $\gamma_0 = \sigma_3$, $\gamma_a = -2i\sigma_2 S_a$, $\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Из (17) видно, что если к уравнению Дирака добавить оператор второго порядка вида $-(1-\gamma_0+\gamma_4)\,\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$, то релятивистское уравнение превращается в уравнение, инвариантное относительно группы Галилея.

Покажем теперь, что уравнения (8) с матрицами (15) и (16) могут быть успешно использованы для описания движения заряженной частицы со спином во внешнем электромагнитном поле. Действительно, сделав в (8), (15) стандартную замену $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, приходим к уравнению

$$\left\{ i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{\pi}) \right\} \Psi(t,\vec{x}) = 0, \tag{18}$$

$$H(\vec{\pi}) = \sigma_3\eta m + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - 2\eta\sigma_1\vec{S}\cdot\vec{\pi} - (\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\eta}{m}\left[(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}\vec{S}\cdot\vec{H}\right] + eA_0. \tag{19}$$

Уравнение (19) инвариантно относительно преобразований Галилея. При этом

$$D^s(R_{ab}, V_a) = (1 + i\vec{\lambda}\cdot\vec{V})D^s(R_{ab}),$$

$D^s(R_{ab})$ — матрицы, реализующие представление группы $O(3)$, а вектор-потенциал преобразуется по правилу

$$A_b \to A'_b = R_{bc}A_c, \qquad A_0 \to A'_0 = A_0 + R_{ab}V_aA_b.$$

Такие преобразования для A_μ образуют представление группы Галилея. Для того, чтобы показать, что гамильтониан (19) описывает спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия, необходимо, как и в случае уравнения Дирака, приближенно диагонализировать $H(\vec{\pi})$. Такая диагонализация может быть осуществлена с помощью оператора

$$V = \exp(iC)\exp(iB)\exp(iA), \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered}
A = -\frac{1}{m}\sigma_2(\vec{S}\cdot\vec{\pi}),\\
B = -\frac{1}{m^2}\sigma_1\left\{\frac{-i[(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}\vec{S}\cdot\vec{H}]}{2} + \frac{[\vec{S}\cdot\vec{\pi},\vec{\pi}^2]_-}{4\eta} - \frac{\vec{S}\cdot\vec{E}}{2\eta}\right\},\\
C = \frac{1}{m^3}\sigma_2\left\{-\frac{2}{3}(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2 + [\vec{S}\cdot\vec{\pi},\vec{S}\cdot\vec{H}]_+ - [(\vec{S}\cdot\vec{\pi})^2, eA_0]\right\}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Преобразованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{gathered}
H'(\vec{\pi}) = VH(\vec{\pi})V^{-1} = \sigma_3\eta m + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \eta\sigma_3\frac{\vec{S}\cdot\vec{H}}{m} -\\
-\frac{e}{4m^2}\vec{S}\cdot(\vec{\pi}\times\vec{E} - \vec{E}\times\vec{\pi}) + \frac{e}{6m^2}s(s+1)\operatorname{div}\vec{E} + \frac{e}{3m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} +\\
+\frac{\eta e}{m^2}\vec{S}\cdot(\vec{\pi}\times\vec{H} - \vec{H}\times\vec{\pi}) - \frac{1}{3}\frac{\eta e}{m^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} + o\left(\frac{1}{m^3}\right),
\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$Q_{ab} = -\frac{1}{2}\left\{3[S_a,S_b]_+ - \delta_{ab}s(s+1)\right\} \quad -$$

тензор квадрупольного взаимодействия.

Гамильтониан (22) содержит те же члены, что и оператор Дирака (1) плюс три дополнительных слагаемых. Для $s = \frac{1}{2}$, $\eta = 1$ семь первых слагаемых в (22) в точности совпадают с гамильтонианом Дирака (1) в представлении Фолди–Воутхойзена.

Два последних члена гамильтониана (22) (которые можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействие) неинвариантны относительно преобразований пространственной инверсии P

$$\vec{x} \to -\vec{x}, \qquad t \to t, \qquad \vec{H}(\vec{x},t) \to \vec{H}(-\vec{x},t).$$

Причиной появления таких P-неинвариантных членов является то обстоятельство, что уравнение (8) неинвариантно относительно преобразования отражения пространственных координат

$$\Psi(t,\vec{x}) \to r\Psi(t,-\vec{x}), \tag{23}$$

где r — некоторая унитарная матрица, $r^2 = 1$. Это особенно просто показать для уравнения (17), которое имеет вид уравнения Дирака с дополнительным P-неинвариантным членом (в этом случае $r = \gamma_0$).

Примером уравнения, инвариантного относительно преобразований Галилея и преобразований (23), может служить система

$$\left(\Gamma_\mu p^\mu - m\right)\tilde{\Psi} = \left(1 - \Gamma_0 + \Gamma_4\right)\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\tilde{\Psi},$$

где $\tilde{\Psi}$ — восьмикомпонентная функция;

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_4 \\ \gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix},$$

где γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака. Удвоив число компонент функции Ψ, можно получить P-инвариантные уравнения вида (8) для галилеевской частицы с произвольным значением спина.

В заключение покажем, что галилеевски инвариантные уравнения первого порядка (7) также описывают спин-орбитальное взаимодействие. Для этого приведем одно частное решение системы (13), $(13'')$. Обозначим через S_{mn} $(m, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ генераторы произвольного представления группы $O(1, 5)$. Тогда матрицы

$$\begin{aligned} &S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad \lambda_a = S_{0a} + S_{5a}, \qquad \beta_a = S_{4a}, \\ &\beta_5 = S_{40} + 1 - S_{45}, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2}(S_{40} + S_{45}) \end{aligned} \tag{24}$$

удовлетворяют соотношениям (13), $(13')$.

Уравнение (7) с матрицами (24) после минимальной замены $p_\mu \to \pi_\mu$ м принимает вид

$$\left(\beta_\mu \pi^\mu + \beta_5 m\right)\Psi(t, \vec{x}) = 0. \tag{25}$$

Для выяснения физического смысла решений уравнения (25) подвергнем волновую функцию $\Psi(t, \vec{x})$ преобразованию

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi, \qquad U = \exp\left(i\frac{\vec{\lambda}\cdot\vec{\pi}}{m}\right). \tag{26}$$

После преобразования получим эквивалентную систему

$$\left[\beta_0\left(\pi_0 - \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{5}{4}\frac{\vec{\pi}\times\vec{\lambda}\cdot\vec{H}}{m^2} - \frac{\vec{\lambda}\cdot\vec{E}}{m}\right) + \frac{\vec{\beta}\times\vec{\lambda}\cdot\vec{H}}{2m} + \beta_5 m\right]\Psi = 0. \tag{27}$$

Подставляя в (27) матрицы S_{mn} из представления $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ алгебры $O(1, 5)$ (при этом (25) сводится к уравнению Леви-Леблонда), получаем из (27) двухкомпонентное уравнение Паули

$$\left(\pi_0 - \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{H}}{2m}\right)\Psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{28}$$

которое не описывает спин-орбитальное взаимодействие. Если же матрицы S_{mn} реализуют представление $D\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, то уравнение (27) учитывает спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия. В этом случае (27) сводится к уравнению

$$\left[\pi_0-\frac{\vec{\pi}^2}{2m}+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{H}}{2m}+\frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\pi}\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\vec{\pi}\right)+\frac{\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\pi}\times\vec{H}-\vec{H}\times\vec{\pi}\right)}{4m^2}\right]\Psi=0.$$

Отметим, что формулы (7), (24) задают широкий класс как конечно-компонентных, так и бесконечнокомпонентных галилеевских уравнений. В частности, если матрицы S_{mn} реализуют бесконечномерное представление алгебры $O(1,5)$, то соотношения (7), (24) определяют бесконечнокомпонентное нерелятивистское уравнение. Таким образом, бесконечнокомпонентные уравнения имеют право на существование не только в рамках группы Пуанкаре, но и в рамках группы Галилея.

Некоторые из приведенных результатов частично опубликованы в [6].

1. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1.
3. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
4. Hagen C.R., *Commun. Math. Phys.*, 1970, **18**, 97;
   Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, 2339.
5. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **34**, 319;
   Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, 501.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Nuovo Cim.*, 1975, **14**, 483; *Rep. Math. Phys.*, 1978, **13**, 175;
   Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, 81.

Симметрия в задачах математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Введение

Уравнения математической физики — это уравнения с высокой симметрией, т.е. они, как правило, инвариантны относительно широких групп Ли [1–6]. Это важное свойство линейных и нелинейных уравнений математической физики приводит к том, что если найдено хотя бы одно решение такого уравнения, то можно построить многопараметрические семейства решений*.

Наиболее распространенный подход к решению нелинейных уравнений в частных производных в идейном отношении такой же, как и в нелинейной механике Крылова–Боголюбова [7], т.е. рассматриваются нелинейные уравнения, в некотором смысле близкие к линейным. Такой подход к решению нелинейных уравнений в частных производных развит в работе [8], где, в частности, детально рассмотрено волновое уравнение для функции двух независимых переменных

$$\Box u(t,x) = \varepsilon F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon\right),$$

ε — малый параметр. Далее речь пойдет о методе решения нелинейных уравнений, в которых отсутствует малый параметр ε.

Создать эффективные методы решения произвольных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП), если даже ограничиться лишь уравнениями второго порядка, как нам кажется, безнадежная задача. Поэтому для продвижения в этом направлении, видимо, нужно, прежде всего, выработать какой-то классификационный принцип (принцип отбора) НДУЧП, с помощью которого можно было бы выделить некоторые классы НДУЧП и подвергнуть их всестороннему исследованию. В основу такого классификационного принципа можно положить симметрийные свойства НДУЧП (§ 1). Как будет видно ниже, симметрийные свойства НЦУЧП дают возможность найти целые семейства точных решений многомерных НДУЧП.

В дальнейшем решается не начальная или краевая задача математической физики, поэтому желательно находить довольно широкий класс функций, удовлетворяющих НДУЧП. Начальные или краевые условия приведут к выделению из найденного класса функций одного или нескольких решений НДУЧП.

Можно выделить классические представители НДУЧП, обладающие высокой симметрией. Такие уравнения имеют следующую структуру.

Гиперболические уравнения:

$$p_\mu p^\mu u(x) = F_1\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1.1}$$

Сборник научных трудов “Теоретико-алгебраические исследования в математической физике”, отв. ред. В.И. Фущич, Киев, Институт математики АН УССР, 1981, С. 6–28.

*В основу этой статьи положен доклад автора, прочитанный на Ученом совете Института математики АН УССР в октябре 1981 г.

$$-p_\mu p^\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta \equiv \Box, \qquad p_\mu = i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad \mu = \overline{0,n},$$

$g_{\mu\nu}$ — метрический тензор с сигнатурой $(1,-1,-1,\ldots,-1)$, $u \equiv u(x)$, $x \equiv (x_0 = t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, F_1 — произвольная дважды дифференцируемая функция. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

$$\Box u = \lambda_1 \exp u \quad — \tag{1.2}$$

уравнение Лиувилля, λ_1 — параметр,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = \lambda_2 \quad — \tag{1.3}$$

уравнение эйконала или релятивистское уравнение Гамильтона, λ_2 — параметр, $a = \overline{1,n}$;

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi = F_2(x, \Psi, \Psi^*)\Psi \quad — \tag{1.4}$$

нелинейная система Дирака, Ψ, Ψ^* — спиноры с компонентами

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3), \qquad \Psi^* = (\Psi_0^*, \Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*).$$

Параболические уравнения:

$$p_0 u + \lambda_3 p_a p_a u = F_3\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_a}\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \lambda_4 \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0 \tag{1.6}$$

уравнения Гамильтона–Якоби;

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_0} + \lambda_5 u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \lambda_6 \Delta u_k = 0 \tag{1.7}$$

система типа Навье–Стокса.

§ 1. Симметрийный принцип классификации нелинейных уравнений

На первый взгляд может показаться, что дифференциальных или интегродифференциальных уравнений, моделирующих реальные физические процессы, слишком много. На самом деле это не так. Если в реальном физическом процессе имеют место законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения и если учесть тот факт, что для физических процессов выполняется либо принцип относительности Галилея, либо принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна, то оказывается, что уравнений, для которых выполнялись бы все эти законы и один из принципов относительности, не так уж много.

Дифференциальные уравнения (ДУ), для которых выполняются указанные законы сохранения, должны быть инвариантны либо относительно группы Галилея $G(1,3)$, либо относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ (или ее подгрупп), либо относительно групп, содержащих в качестве подгрупп группы $P(1,3)$, $G(1,3)$. Примерами таких групп, содержащих группу $P(1,3)$, является конформная группа

$C(1,3)$. Группа сдвигов и вращении в 5-мерном пространстве $P(1,4)$ содержит в качестве подгрупп как группу $P(1,3)$, так и группу $G(1,3)$ [9, 10].

Задача о явном описании, в некотором смысле, всех систем линейных ДУ, инвариантных относительно групп $P(1,3)$ и $C(1,3)$, решена (см. [9–13] и цитированную там литературу). Задача о явном описании всех НДУЧП вида (1.1), (1.5), инвариантных относительно группы $P(1,3)$ или $G(1,3)$, дополненных группой масштабных преобразований, может быть так же конструктивно решена. Ее решение приведем в виде теорем 1–5.

Группы Галилея $G(1,n)$ и Пуанкаре $P(1,n)$ в $(1+n)$-мерном пространстве, дополненные группой масштабных преобразований $x'_\mu = dx_\mu$, обозначим соответственно символами $\tilde{G}(1,n) \supset G(1,n)$ и $\tilde{P}(1,n) \supset P(1,n)$.

Теорема 1 [14]. *Уравнение (1), если функция F_1 не зависит от $\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, инвариантно относительно группы $\tilde{P}(1,n)$ только в таких двух случаях: $F_1(u) = \lambda_1 u^k$, либо $F_2(u) = \lambda_2 \exp u$, λ_1, λ_2, k — произвольные постоянные.*

Из этого результата видно, что уравнение Лиувилля — единственное уравнение неполиномиального типа, инвариантное относительно группы $\tilde{P}(1,n)$.

Замечание 1. Если потребовать, чтобы уравнение вида (1) было инвариантно относительно конформной группы $C(1,n) \supset \tilde{P}(1,n)$, то, как хорошо известно, это будет выполняться только в том случае, когда $F_1 = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$ (см., например, [1, 3]).

Теорема 2 [15, 16]. *Если уравнение (1.1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,n)$, то с помощью локальной невырожденной замены $w = \psi(u)$ оно приводится к нелинейному волновому уравнению*

$$\Box w + \lambda w^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \qquad \lambda = \text{const}, \quad n \neq 2.$$

Замечание 2. Если F_1 не зависит от u и уравнение (1) конформно инвариантно, то такое уравнение с помощью локальной замены приводится к линейному волновому уравнению $\Box w = 0$.

Обозначим символом $E(1,n)$ группу сдвигов и вращений в $(1+n)$-мерном пространстве, символом $\tilde{E}(1,n)$ — группу $E(1,n)$, дополненную группой масштабных преобразований. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 [17]. *Уравнение*

$$\Box u + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

инвариантно относительно группы $\tilde{E}(1,n)$ только в таких трех случаях:

$$1)\ F = u^k f\left(\frac{u_a u_a}{u^{2k+2}}\right); \qquad 2)\ F = \sqrt{u_a u_a}\, f(u);$$

$$3)\ F = \exp u\, f\left(\frac{u_a u_a}{\exp 4u}\right), \qquad u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a},$$

где k — произвольная постоянная, f — произвольная дифференцируемая функция.

Теорема 4 [18]. *Уравнение (1.5), если F_3 не зависит от $\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, инвариантно относительно группы $\tilde{G}(1,n)$ и группы проективных преобразований*

$$x_0' = \frac{x_0}{1+\alpha x_0}, \qquad x_a' = \frac{x_a}{1+\alpha x_0}$$

тогда и только тогда, когда $F_3 = \lambda u|u|^{4/n}$.

Таким образом, требование инвариантности НДУЧП относительно групп $\tilde{P}(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$ или их подгрупп дает возможность провести классификацию нелинейных уравнений. Во многих случаях эта классификация значительно шире, чем стандартное разделение уравнений на эллиптические, параболические, гиперболические и ультрагиперболические. Одно из преимуществ такой классификации состоит в том, что она пригодна как для линейных, так и для нелинейных ДУ.

Особенностью многих НДУЧП, обладающих нетривиальной симметрией $\tilde{P}(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$, является то, что на множестве решений этих нелинейных уравнений реализуется, как правило, линейное представление алгебры Ли. Именно это обстоятельство является тем решающим фактом, который дал нам возможность построить в явном виде многопараметрические семейства точных решений многих НДУЧП.

§ 2. О точных решениях нелинейных уравнений, инвариантных относительно групп $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{E}(1,n)$

1. Для отыскания решений уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) поступим следующим образом. Решения уравнения (1.1) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega)f(x) + g(x), \tag{2.1}$$

где φ — некоторая неизвестная функция от новых переменных $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$, число которых на единицу меньше, чем переменных в уравнении (1.1). Эти переменные выбираются из инвариантов группы симметрии уравнения (1.1). Новые переменные $\omega(x)$ и явные выражения для функций $f(x)$ и $g(x)$ определяются из систем уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_0}{A_0} = \frac{dx_1}{A_1} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{du}{B}, \tag{2.2}$$

где A_μ и B — функции, задающие инфинитезимально группу инвариантности уравнения (1.1), т.е.

$$\begin{aligned} &x_\mu' = x_\mu + \varepsilon A_\mu, \qquad A_\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ &u' = u + \varepsilon B, \qquad B = au + b, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ, a, b — параметры группы инвариантности данного уравнения. Инвариантные переменные $\omega(x)$ являются первыми интегралами системы (2.2), зависящими только от x.

Структура (2.1) решений уравнения (1.1) находится из уравнения (2.2). Формула (2.1) лежит в основе нашего подхода к решению НДУЧП*. Подставив (2.1)

*Для некоторых уравнений решения следует искать в более общем виде

$$u = F\{\varphi(\omega), f(x), g(x)\} \qquad \text{или} \qquad u = F\left\{\varphi(\omega_1), \tilde{\varphi}(\omega_2), \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\omega_2}\right\}.$$

в уравнение (1.1), в силу того, что ω — инвариантные переменные, получим для $\varphi(\omega)$ уравнение, не зависящее от f, g. Для уравнения (1.1) с полиномиальной нелинейностью $g = 0$. Полученное таким путем уравнение для $\varphi(\omega)$ зависит только от новых переменных ω. Если удается найти какие-либо решения НДУЧП для $\varphi(\omega)$, то тем самым по формуле (2.1) найдем решения исходного уравнения.

Очевидно что к НДУЧП для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$ может быть применен повторно сформулированный алгоритм. Конечно, при этом необходимо, чтобы уравнение для $\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1})$ обладало нетривиальной симметрией. Решение в этом случае ищется в виде

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) = \varphi_1(\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_{n-2}^1)\times\\ \times f_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}) + g_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

где новые инварианты $\omega^1 \equiv \{\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_{n-2}^1\}$, зависящие от $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\}$. Функция φ_1 зависит от $n-2$ независимых переменных.

2. Не вдаваясь в детали, приведем явный вид некоторых частных решений уравнения

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \qquad k \neq 1, \tag{2.5}$$

полученных указанным способом [19, 20]. Решение ищем в виде $u = \varphi(\omega) f(x)$,

$$u = \left\{-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]\right\}^{\frac{1}{1-k}}, \tag{2.6}$$

$$\beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.7}$$

$$u = \left\{\frac{\lambda}{2}(1-k)^2 \alpha_\nu y^\nu \beta_\sigma y^\sigma\right\}^{\frac{1}{1-k}}, \tag{2.8}$$

$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \alpha_\nu \beta^\nu = -1, \tag{2.9}$$

$$u = \{F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu\}^{\frac{2}{1-k}}, \tag{2.10}$$

$$\beta_\nu \beta^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1} \neq 0, \tag{2.11}$$

F — произвольная дважды дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν — параметры, удовлетворяющие условиям (2.7), (2.9), (2.11) .

Следует подчеркнуть, что решения (2.6), (2.8) при $k > 1$ в точке $\lambda = 0$ имеют особенность. Это означает, что с помощью метода последовательного приближения, каким бы малым ни был параметр λ, невозможно получить решения, близкие к точным решениям (2.6), (2.8).

3. Решения многомерного уравнения Лиувилля (1.2) ищутся в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + g(x). \tag{2.12}$$

Полученные нами решения имеют вид [14]

$$u = -2\ln\{\gamma P(x) \operatorname{sh} Q(x)\}, \qquad u = -2\ln\{\gamma P(x) \operatorname{ch} Q(x)\},$$
$$u = -2\ln\{\gamma P(x) \cos Q(x)\}, \qquad u = -2\ln\{c P(x) R(x)\},$$

где

$$P(x) = \alpha_\nu y^\nu, \qquad Q(x) = c_1(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}\sqrt{y_\nu y^\nu} + c_2,$$
$$R(x) = Q(x)|_{c_1=1}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0,$$
$$P(x) = F^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \qquad Q(x) = c_1\beta_\nu y^\nu F(\alpha_\nu y^\nu) + c_2,$$
$$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1, \qquad y_\mu = x_\mu + a_\mu.$$

4. Решения четырехмерного уравнения [17]

$$\Box u + \lambda u\frac{\partial u}{\partial x_0} = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{2.13}$$

ищем в виде $u(x) = \varphi(\omega)f(x)$.

Решениями уравнения (2.13) будут функции

$$u = F(\beta_a x_a)\,\mathrm{th}\left\{c_2 + \frac{\lambda y_0}{2}F(\beta_a y_a)\right\},$$

$$u = F(\beta_a x_a)\,\mathrm{cth}\left\{c_2 + \frac{\lambda y_0}{2}F(\beta_a y_a)\right\}, \qquad y_0 = x_0 + a_0, \qquad y_i = x_i + a_i,$$

$$u = \left\{c\sqrt{\left[\beta\frac{(\alpha_a x_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a\right] - (\beta_\nu x^\nu + b)^2} + \frac{\sigma}{2}(\beta_\nu x^\nu + b)\right\}^{-1},$$

$$\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = \beta \neq 0, \qquad b = \frac{\alpha_0}{\alpha}, \qquad \sigma = \frac{\lambda i}{\alpha_a\alpha_a}, \qquad c = \mathrm{const}.$$

5. Решения уравнения sine-Гордон (sine-Даламбер)

$$\Box u + \sin u = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.14}$$

полученные указанным способом, имеют вид

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left\{c_0\exp\left[\alpha_\nu x^\nu + F(\beta_\nu x^\nu)\right]\right\},$$

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left\{\mathrm{th}\left[\alpha_\nu x^\nu + F(\beta_\nu x^\nu) + c_0\right]\right\}.$$

Для одномерного случая $x = (x_0, x_1)$

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left\{c_0\exp\left[(\alpha_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]^{1/2}\right\},$$

$$y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \alpha_\nu\beta^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = -1.$$

По найденным решениям, используя преобразование Беклунда или преобразование Лоренца, можно найти целое семейство точных решений.

6. Решение нелинейного уравнения Шредингера [18]

$$p_0 u + \lambda_3 p_a p_a u = \lambda u|u|^m \tag{2.15}$$

ищем в виде

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Явные решения уравнения (2.15), зависящие от одиннадцати параметров, приведены в [18].

7. Решения уравнения Гамильтона–Якоби (1.6) ищем в виде

$$u=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)+g(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

Приведем явный вид трех простейших решений уравнения (1.6):

1) $\varphi=\dfrac{1}{4\lambda}\left(\omega_1^2+\omega_3^2\right),\qquad \lambda=\lambda_4,$

$$g=\frac{1}{4\lambda}\left\{2(\alpha_i z_i)\sqrt{2qx_0+b}+\alpha_i\alpha_i x_0\right\},$$

$$\omega_1=\sqrt{z_iz_i-\omega_3^2},\qquad \omega_3=\frac{\eta_i z_i}{\sqrt{\eta_k\eta_k}},\qquad z_i=\frac{x_i-\alpha_i x_0-\beta_i}{\sqrt{2qx_0+b}},$$

$$\omega_2=\left|\arcsin\left[\sqrt{\eta_l\eta_l(2qx_0+b)}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\left(\eta_1^2+\eta_3^2\right)^{-1/2}\right]\right|-\frac{(\eta_l\eta_l)^{1/2}}{2q}\ln|2qx_0+b|,$$

$$\eta_1^2+\eta_3^2\neq 0,\qquad \alpha_i=\frac{q^2V_i+\eta_i(\eta_kV_k)+q\varepsilon_{ijk}\eta_iV_k}{q(q^2+\eta_k\eta_k)},$$

$$\beta_i=\frac{bV_i-qa_i+\varepsilon_{ijk}\eta_ja_k}{q^2+\eta_k\eta_k}+\eta_i\frac{\eta_k(bV_k-qa_k)}{q^2(q^2+\eta_k\eta_k)},$$

a_i,b,q,V_i,η_i — параметры группы $\tilde{G}(1,3)$;

2) $u=(2\lambda)^{-1}\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_0+C},\qquad C$ — постоянная величина;

3) комплексные решения уравнения (1.6) задаются формулой

$$u=F(\alpha_ix_i-\alpha_i\beta_ix_0)+\frac{1}{2\lambda}\left(\beta_ix_i+\frac{\beta_i\beta_i}{2}x_0\right),$$

F — произвольная функция, $\alpha_i\alpha_i=0$, $\alpha_i\beta_i\neq 0$, $\beta_i\beta_i\neq 0$.

Новые решения u' уравнения (1.6) по известным решениям (нелинейный принцип суперпозиции) u находятся по формуле

$$u'(t,x_a)=u(t',x'_a)-\frac{\theta}{1-\theta t}\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4\lambda},\qquad \theta\ \text{— параметр},$$
$$t'=\frac{t}{1-\theta t},\qquad x'_a=\frac{x_a}{1-\theta t}. \tag{2.16}$$

Нетрудно написать и другие формулы типа (2.16) для размножения решений.

8. Решения уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_0}+(u_k\nabla_k)u^i+\nabla^ip=\Delta u^i,\qquad \frac{\partial u^i}{\partial x_i}=0, \tag{2.17}$$

ищем в виде

$$u^i=\varphi^j(\omega)F_j^i(x_0,x_1,x_2,x_3)+f_i(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

Одно из решений уравнения (2.17) имеет вид

$$u^i=\left[\frac{c_1}{\omega_1}\ln\omega_1+\frac{c_2}{2}\omega_1\right]\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}-c_2\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial x_i}-c_2\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}+\alpha_i,$$

$$p=\frac{c_1}{2qx_0+b}\left\{2q\ln\omega_1+\sqrt{\eta_l\eta_l}\omega_2-\frac{c_1}{\omega_1^2}\ln\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)\right\},$$

c_1, c_2 — постоянные величины.

Комплексные решения уравнения (2.21) при $p = 0$ можно представить через произвольную функцию F

$$u^i = \alpha^i F\left\{\beta_k(x_k + \beta_k x_0)\right\} - \beta^i,$$
$$\alpha_i\alpha_i = 0, \qquad \alpha_i\beta_i = 0, \qquad \beta_k\beta_k \neq 0, \qquad i,k = 1,2,3.$$

§ 3. О симметрийных свойствах уравнения Ламе и его дифференциального следствия

Система уравнений Ламе имеет вид

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\vec{u} + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}, \tag{3.1}$$

$\vec{u} = \vec{u}(t,\vec{x}) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения, ρ_0, λ, μ — постоянные величины. В рамках лиевского подхода, где базисные элементы алгебры Ли — операторы первого порядка, максимальной алгеброй инвариантности уравнения (3.1) является 8-мерная алгебра [21]. В [5, 22] показано, что в классе интегро-дифференциальных операторов алгеброй инвариантности являются 10- и 15-мерные алгебры Ли. Это означает, что уравнение Ламе не инвариантно ни относительно преобразований Галилея, ни относительно преобразований Лоренца. То есть, для уравнения Ламе не справедлив ни один из известных в настоящее время принципов относительности. Этот факт ставит под сомнение правомерность использования уравнения Ламе в качестве основного уравнения линейной теории упругости. Поэтому вопрос о правиле сложения скоростей упругих волн, описываемых уравнением (3.1), в различных инерциальных системах отсчета не может быть решен.

Некоторые из указанных трудностей, связанных с уравнением Ламе, как будет видно ниже, отсутствуют для системы уравнений, которые являются дифференциальными следствиями системы (3.1). Эти уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца. Действительно, взяв дивергенцию и ротор от (3.1), получим незацепленную систему четырех волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = a^2\Delta v_0, \qquad v_0 = \mathrm{div}\,\vec{u}, \qquad a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = b^2\Delta\vec{v}, \qquad \vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{u}, \qquad b^2 = \frac{\mu}{\rho_0} \tag{3.3}$$

для функций v_0 и $\vec{v}$.

Очевидно, что уравнения (3.2) и (3.3) инвариантны относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3)$. Кроме того, система (3.3) инвариантна относительно группы $GL(3)$, т.е. относительно линейных преобразований

$$v_i' = a_{ik}v_k, \qquad i,k = 1,2,3. \tag{3.4}$$

Таким образом, система уравнений (3.2), (3.3) инвариантна относительно группы $C(1,3)\otimes GL(1)\otimes GL(3)$. Инвариантность уравнений (3.2), (3.3) относительно указанной группы означает, что помимо известных законов сохранения (энергии, импульса, количества движения) существуют новые законы сохранения, обусловленные инвариантностью относительно конформных преобразований и преобразований (3.4).

Последнее утверждение означает, что билинейная форма

$$\langle Q_\alpha \rangle = \int d^3x \left\{ v_\mu^* \frac{\partial (Q_\alpha v)^\mu}{\partial x_0} - \frac{\partial v_\mu^*}{\partial x_0} (Q_\alpha v)^\mu \right\}$$

сохраняется во времени. Q_α — базисный элемент алгебры Ли группы $C(1,3) \otimes GL(1) \otimes GL(3)$. Оператор Q_α отображает множество решений уравнений (3.2), (3.3) в себя.

Приведем явный вид базисных элементов алгебры Ли группы $C(1,3)$, относительно которых система (3.3) инвариантна:

$$\begin{aligned} &P_\mu^{\mathrm{I}} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad J_{\mu\nu}^{\mathrm{I}} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ &K_\mu^{\mathrm{I}} = 2x_\mu D^{\mathrm{I}} - x_\alpha x^\alpha P_\mu^{\mathrm{I}}, \qquad D^{\mathrm{I}} = x_\mu p^\mu + i. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Важно подчеркнуть, что операторы (3.5) порождают такие конечные преобразования, при которых каждая компонента вектора $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ преобразуется независимым путем, т.е. $\vec{v}$ не является вектором ни относительно группы $O(3)$, ни относительно группы $O(1,3)$.

Система (3.3), помимо алгебры (3.5) инвариантна относительно алгебры $\tilde{P}(1,3)$ с такими базисными элементами:

$$\begin{aligned} &P_\mu^{\mathrm{II}} = P_\mu^{\mathrm{I}}, \qquad J_{ab}^{\mathrm{II}} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad S_{ab} = \varepsilon_{abc} S_c, \\ &J_{0a}^{\mathrm{II}} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \qquad S_{0a} = i S_a, \qquad D^{\mathrm{II}} = D^{\mathrm{I}}, \\ &S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Операторы (3.6) порождают конечные преобразования из группы $\tilde{P}(1,3)$, при которых $\vec{v}$ является действительным вектором относительно группы $O(3)$. При лоренцовых преобразованиях действительный вектор $\vec{v}$ перейдет в комплексный вектор. Последнее свойство лоренцовых преобразований связано с тем, что матрицы S_{0a} — неэрмитовы.

Из уравнений (3.2) и (3.3) следует, что скорость поперечных и продольных волн является постоянной величиной в любых инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство противоречит релятивистскому принципу относительности, согласно которому только величина скорости света в однородных средах не зависит от системы отсчета. Эту трудность можно преодолеть, если модифицировать систему (3.2), (3.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = a^2 \Delta v_0 + a_1^2 v_0, \\ &\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = b^2 \Delta \vec{v} + b_1^2 \vec{v}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где постоянные величины a_1 и b_1 характеризуют свойство упругой среды. Скорость волн, описываемых уравнениями (3.7), не будет постоянной в различных инерциальных системах. На физическом языке это означает, что волне в упругих средах следует приписать некую массу (a_1 и b_1).

Укажем еще на одну, более радикальную, возможность преодоления указанных трудностей. Гиперболическую систему уравнений (3.2) и (3.3) заменить на следующую параболическую систему:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \mu_1 \Delta v_0, \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mu_2 \Delta \vec{v}, \tag{3.8}$$

μ_1, μ_2 — некоторые параметры, характеризующие свойства среды. Эта система удовлетворяет принципу относительности Галилея, поскольку она инвариантна относительно 10-параметрической группы Галилея $G(3)$ [9, 11, 13].

Из приведенного следует, что линейное уравнение Ламе, на основе которого в настоящее время решаются многие динамические задачи теории упругости, должно быть модифицировано так, чтобы в теории упругости выполнялся какой-либо принцип относительности. Кроме указанных нами путей модификации уравнения Ламе наиболее реалистичен нелинейный. Подробное обсуждение этой возможности будет опубликовано в другом месте.

§ 4. О некоторых нерешенных задачах

В этом параграфе укажем задачи, которые представляются автору важными для развития и применения теоретико-алгебраических методов к линейным и нелинейным задачам математической и теоретической физики.

1. Исследовать симметричные свойства и найти частные решения следующих уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_0} = \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + m^2 \right\}^{1/2}, \tag{4.1}$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x_0} = \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + m^2 \right\}^{1/2}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)^2, \tag{4.3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu}\right)^k = \lambda F(u), \qquad k = \frac{1}{2}, 1, 2, n. \tag{4.4}$$

Рассмотреть случаи $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$, $m = 0$ и $m \neq 0$. Уравнения (4.1), (4.2) представляют собой "корень" из эйконального уравнения. Система (4.1), (4.2) инвариантна относительно дискретных преобразований ($t \to -t$). Уравнение (4.3) можно рассматривать как нерелятивистское приближение уравнения (4.1). Если $\lambda_2 = 0$, то (4.3) совпадает с уравнением Гамильтона–Якоби.

2. Описать все уравнения

$$\lambda_1 \Box u + \lambda_2 \Box^k u = F_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad k = \overline{2, n},$$

$$i\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} = \Box u(\tau, x) + F_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right),$$

где $\Box^k = \Box \cdot \Box \cdots \Box$ — поливолновой оператор, инвариантные относительно групп $\tilde{P}(1,3)$ и $C(1,n)$. Найти частные решения при конкретных F_1 и F_2. Например, $F_1 = F_2 = \exp u$.

3. Найти максимальные алгебры инвариантности (МАИ) и построить в явном виде частные решения следующих уравнений:

$$\Box u + \lambda u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 \Delta\Delta u + \lambda_2 (\Delta u)^2 + \lambda_3 u^k = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 \sin(\Box u) + \lambda_2 \sin \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 u + \lambda_2 \left(1 - \lambda_3 u^2\right) \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda_1 \Delta(u^k) + \lambda_2 (\Delta u)^k = 0,$$

$$\Box u + \lambda_1 u + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3 = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} = \lambda_1 \Box u(\tau,x) + \lambda_2 \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x^\mu} u(\tau,x).$$

Если в уравнениях (4.5), (4.6) функция u зависит только от одной переменной t, то эти уравнения совпадают, соответственно, с классическими уравнениями Ван-дер-Поля и Дюффинга.

4. Построить теоретико-алгебраические основы квантовой механики в основу которой положены уравнения

$$\lambda_3 \left(p_0 + \lambda_1 p_a^2\right) \Psi + \lambda_4 \left(p_0 + \lambda_1 p_a^2\right)^k \Psi + V(x)\Psi = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \tag{4.7}$$

$$\left(p_0^2 + \lambda_2 p_a^2 p_a^2\right) \Psi + V(x)\Psi = 0, \tag{4.8}$$

$$\left\{p_0 + \sqrt{\lambda_1 (p_a^2)^2 + \lambda_2} + V(x)\right\} \Psi = 0. \tag{4.9}$$

Описать потенциалы V, при которых уравнения (4.7)–(4.9) инвариантны относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$ и некоторых ее подгрупп.

Описать уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} + \lambda_2 V(x) + \lambda_3 F(u), \tag{4.10}$$

инвариантные относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$. Аналогичную задачу решить для уравнений (4.1), (4.2) с потенциалом.

5. Построить точные решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 \left\{(\operatorname{grad} u)^2\right\}^{1/2} + \lambda_2 \Delta \left\{(\operatorname{grad} u)^2\right\}^{1/2} = 0. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) можно рассматривать как многомерный аналог уравнения Кортвега-де-Фриза (КдФ), В том случав, когда u зависит от двух переменных (t, x) оно совпадает с уравнением КдФ.

6. Описать системы уравнений вида

$$\begin{gathered}
\left(p_0 + \lambda_1 p_a^2\right) \Psi_i = F_1 \left(\Psi, \Psi^*, \frac{\partial \Psi}{\partial x_a}, \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_a}\right) \Psi_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\
i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau} + \lambda_2 \Box \Psi_i(\tau, x) + F_2 \left(\Psi, \Psi^*, \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu}\right), \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n,
\end{gathered} \tag{4.12}$$

инвариантные относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$ и $Sch(1, 1+n)$. Ψ_i, Ψ_i^* — компоненты вектора-столбца $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$ и $\Psi^* = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \ldots, \Psi_n^*)$.

$$\Box \Psi_i + F \left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}\right) \Psi_i = 0.$$

7. Провести детальный теоретико-алгебраический анализ систем дифференциальных уравнений

$$\lambda_1 \Box u_\mu + \lambda_2 u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} (u_\nu u^\nu) + \lambda_4 u_\mu = 0, \tag{4.13}$$

$$\Box u_\mu = 0, \qquad \Box u_\mu u^\mu = 0, \tag{4.14}$$

$$K_\mu K^\mu \Psi = F(\Psi, \Psi^*) \Psi, \tag{4.15}$$

$K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu}$ — генератор конформной группы, $D = \frac{1}{2}(x_\nu p^\nu + p_\nu x^\nu)$, $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие представления группы Лоренца $O(1,3)$.

8. При каких условиях шесть эйкональных уравнений

$$\frac{\partial E_a}{\partial x_\mu} \frac{\partial E_a}{\partial x^\mu} = \lambda_1, \qquad \frac{\partial H_a}{\partial x_\mu} \frac{\partial H_a}{\partial x^\mu} = \lambda_2, \qquad a = 1, 2, 3, \tag{4.16}$$

для векторов $\vec{E}(E_1, E_2, E_3)$, $\vec{H}(H_1, H_2, H_3)$, преобразующихся по векторному представлению группы Лоренца $D(1,0)$, $D(0,1)$, инвариантны относительно групп $P(1,3)$, $C(1,3)$. По повторяющемуся индексу "a" суммирование не подразумевается.

9. Предложить методы исследования теоретико-групповых свойств следующих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left(p_0 + \lambda p_a\right)^2 u(t, x) = \lambda_1 \int d^3x \, F(u^*, u) V(x - y),$$

$$\Box u + \lambda \int d\tau \, d^3y \, F(u^*, u) V(\tau - t, x - y),$$

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi = \lambda \int d\tau \, d^3y \, F(\Psi^*, \Psi) V(\tau - t, x - y),$$

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + \lambda\right)^{1/2} \chi(t) + \lambda_1 \chi(t) = 0,$$

γ_μ — матрицы Дирака. Указать класс функций F и V, при которых уравнения инвариантны относительно групп $\tilde{G}(1,n)$ или $Sch(1,n)$, $\tilde{P}(1,n)$ или $C(1,n)$.

Последнее одномерное интегральное уравнение при $\lambda = 0$ совпадает со стандартным уравнением для гармонического осциллятора. Об одном способе исследования симметрийных свойств таких интегральных уравнений см. [23].

10. Провести теоретико-алгебраический анализ следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}\lambda_1 \Box \vec{E} + \lambda_2 \Box\Box \vec{E}(t,\vec{x}) = 0, \qquad \lambda_1 \Box \vec{H} + \lambda_2 \Box\Box \vec{H}(t,\vec{x}) = 0,\\ \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_a}\right)^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_a}\right)^2 = 0,\end{gathered} \tag{4.17}$$

w_1 и w_2 — инварианты электромагнитного поля;

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lambda_1 (\vec{u}\,\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda_2 (\vec{u}\,\vec{\nabla}) \operatorname{rot} \vec{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{4.18}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial u}{\partial x_0} - \lambda_0 A_0\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - \lambda_1 A_a\right)^2 = \lambda_2,\\ \Box A_\mu = 0, \qquad \mu = \overline{0,3},\end{gathered} \tag{4.19}$$

$$\begin{gathered}i\frac{\partial u}{\partial x_0} - \lambda_0 A_0 + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - \lambda_2 A_a\right)^2 = 0,\\ \left(p_0 - \lambda_3 p_a^2\right) A_\mu = 0,\end{gathered} \tag{4.20}$$

A_μ — векторный потенциал.

11. С помощью лиевского и нелиевского методов провести детальный теоретико-алгебраический анализ уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}, \qquad \operatorname{div} \vec{D} = 0,$$

со следующими уравнениями связи:

$$\vec{B} = \mu_1 \vec{H} + \mu_2 \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_3 \operatorname{rot} \vec{H} + \mu_4 \operatorname{rot} \left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right) \vec{H} + \mu_5 \operatorname{rot} (\vec{E}\vec{H})\vec{E},$$

$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{H} + \varepsilon_2 \operatorname{rot} \vec{E} + \varepsilon_3 \operatorname{rot} \vec{H} + \varepsilon_4 \operatorname{rot} \left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right) \vec{E} + \varepsilon_5 \operatorname{rot} (\vec{E}\vec{H})\vec{H},$$

$$B_i = \mu_{ik}^{(1)} E_k + \mu_{ikl}^{(2)} \nabla_k H_l + \mu_{ikl}^{(3)} \nabla_k E_l + \mu_{ikl}^{(4)} E_k E_l + \mu_{ikl}^{(5)} H_k H_l + \mu_{ikl}^{(6)} H_k E_l,$$

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(1)} E_k + \varepsilon_{ikl}^{(2)} \nabla_k E_l + \varepsilon_{ikl}^{(3)} \nabla_k H_l + \varepsilon_{ikl}^{(4)} E_k E_l + \varepsilon_{ikl}^{(5)} H_k H_l + \varepsilon_{ikl}^{(6)} H_k E_l,$$

где $\nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}$, ε, μ — величины, характеризующие свойство среды, в которой распространяется электромагнитное поле.

12. Описать все системы вида

$$A_{\mu\nu}\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + B_\mu \left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + C\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0,$$

инвариантные относительно: $\tilde{E}(1,n)$, $\tilde{P}(1,n)$, $Sch(1,n)$, $C(1,n)$. Ψ — вектор-функция.

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
3. Ибрагимов Н.Х., Группы Ли в некоторых вопросах математической физики, Новосибирск, госуниверситет, 1972, 200 с.
4. Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Д., Группы касательных преобразований Ли–Беклунда, *ДАН СССР*, 1976, **227**, № 3, 539–542.
5. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
6. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., “Наука”, 1974, 500 с.
8. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, Киев, Вища школа, 1976, 589 с.
9. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I , *Теор. и мат. физ.*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Reduction of the representation of the generalized Poincaré algebra by the Galilei algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, № 11, 2319–2330.
11. Сокур Л.П., Фущич В.И., Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1,n)$. II, *Теор. и мат. физ.*, 1971, **6**, № 3, 348–363.
12. Фущич В.И., Никитин А.Г., Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1978, **9**, вып. 3, 501–653.
13. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1981, **12**, вып. 5, 1167–1219.
14. Фущич В.И., Серов Н.И., О некоторых точных решениях многомерных уравнений типа Лиувилля и эйконала, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 4, 543–549.
15. Фущич В.И. Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна–Инфельда, *ДАН СССР*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
16. Серов Н.И., Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений, В кн: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 59–63.
17. Фущич В.И., Серова М.М., Симметрия и точные решения одного класса нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 6, 780–784.
18. Fushchych W.I., Moskaliuck S.S., On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimension, *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, **11**, № 16, 571–576.
19. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С., О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений, В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа – 6 сентября 1981 г.), Тез. докл., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 338–339.
20. Фущич В.И., Серов Н.И., Точные решения нелинейного волнового уравнения, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 697–702.
21. Чиркунов В.А., Групповые свойства уравнений Ламе, В кн.: Динамика сплошной среды, 1978, вып. 14, 128–130.
22. Фущич В.И., Наконечный В.В., Теоретико-алгебраический анализ уравнений Ламе, *Укр. мат. журн.*, 1980, **32**, № 2, 267–272.
23. Фущич В.И., Об одном способе исследования симметрии свойств интегродифференциальных уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 6, 834–838.

Об одном способе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений

В.И. ФУЩИЧ

Хорошо разработанные методы исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных [1] не применимы к интегральным уравнениям. В настоящее время отсутствуют какие-либо методы исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений.

Здесь приведен способ отыскания алгебр инвариантности для интегро-дифференциального уравнения специального типа

$$\hat{p}_0\varphi(t,x) = \hat{L}^{r/n}\varphi(t,x), \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a=1,2,\dots,n, \qquad \hat{L} = \hat{p}_a\hat{p}_a + m^2,\\ \hat{p}_a\hat{p}_a = \hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2+\hat{p}_3^2+\cdots+\hat{p}_n^2 = -\Delta, \qquad x\in R^n,\end{gathered} \tag{2}$$

k, r — целые числа (число r нацело не делится на k), $m>0$ — постоянная величина.

В релятивистской квантовой теории часто встречается уравнение вида

$$\hat{p}_0\varphi(t,x) = \hat{L}^{1/2}\varphi(t,x). \tag{3}$$

Ради простоты рассмотрим уравнение (3). Все сказанное ниже очевидным образом переносится и на уравнение (1) с произвольными r и k, а также на уравнения, в которых $\hat{L}$ — произвольный положительный дифференциальный оператор.

Уравнение (3) может быть записано так:

$$\hat{p}_0\varphi(t,x) = \int d^3q\,d^3y\,\exp\{iq_a(x_a-y_a)\}L^{1/2}(q)\varphi(t,y), \tag{4}$$

где

$$L^{1/2}(q) = \left(q_aq_a+m^2\right)^{1/2} = \left(q_1^2+q_2^2+q_3^2+m^2\right)^{1/2} \quad - \tag{5}$$

символ оператора $\hat{L}^{1/2}$. В дальнейшем все операторы будем писать без “крышки”.

1. Уравнение (3) инвариантно относительно некоторой совокупности операторов $\{Q_A\}$, если выполняются условия [2, 3]

$$[p_0 - L^{1/2}, Q_A]\varphi(t,x) = 0, \tag{6}$$

Укр. мат. журнал, 1981, **33**, № 6, С. 834–838.

где [,] — коммутатор. Для отыскания операторов Q_A, удовлетворяющих условию (6), поступим следующим образом. Подействовав слева на уравнение (3) оператором p_0, получим волновое дифференциальное уравнение

$$\left(p_0^2 - p_a^2 - m^2\right)\varphi(t,x) = \left(p_0 - L^{1/2}\right)\left(p_0 + L^{1/2}\right)\varphi(t,x) = 0. \tag{7}$$

К дифференциальному уравнению (7) можем применить лиевский [1] или нелиевский метод [2]. С помощью метода Ли–Овсянникова можно показать, что максимальной (в смысле Ли) алгеброй инвариантности уравнения (7) является 10-мерная алгебра Пуанкаре, базисные элементы $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{10}\} \equiv \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ которой задаются операторами

$$P_0^{\mathrm{I}} = p_0, \qquad P_a^{\mathrm{I}} = p_a, \qquad J_{\mu\nu}^{\mathrm{I}} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{8}$$

Поскольку всякое решение уравнения (3) является решением уравнения (7) (обратное, конечно, неверно), можно ожидать, что алгебра (8) или ее подалгебры могут оказаться алгеброй инвариантности интегро-дифференциального уравнения (3). В нашем случае непосредственной проверки можно убедиться, что условия (6) выполняются для всех операторов (8), т.е.

$$\begin{aligned} &[p_0 - L^{1/2}, P_\mu^{\mathrm{I}}] = 0 = [p_0 - L^{1/2}, J_{ab}^{\mathrm{I}}], \qquad a,b = 1,2,3, \\ &[p_0 - L^{1/2}, J_{0a}^{\mathrm{I}}]\varphi(t,x) = ip_a L^{-1/2}(p_0 - L^{1/2})\varphi(t,x) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Алгеброй инвариантности уравнения (3) является 10-мерная алгебра Ли; базисные элементы этой алгебры задаются дифференциальными операторами первого порядка (8).*

Из приведенного вытекает следующий способ вычисления алгебр инвариантности для уравнений типа (1): 1) построить дифференциальное уравнение, подмножество решений которого является решениями интегро-дифференциального уравнения; 2) лиевским или нелиевским методом найти алгебру инвариантности дифференциального уравнения; 3) по найденной алгебре инвариантности дифференциального уравнения, проверяя условие инвариантности (6), отыскать алгебру инвариантности интегро-дифференциального уравнения (1).

2. Выясним вопрос: существуют ли алгебры инвариантности интегро-дифференциального уравнения (3), которые не являются таковыми для дифференциального уравнения?

Рассмотрим совокупность таких десяти $\{Q\}$ интегро-дифференциальных операторов [4]:

$$\begin{aligned} &P_0^{\mathrm{II}} = L^{1/2}, \qquad P_a^{\mathrm{II}} = p_a, \\ &J_{ab}^{\mathrm{II}} = x_a p_b - x_b p_a, \qquad J_{0a}^{\mathrm{II}} = tp_a - \frac{1}{2}\left(x_a L^{1/2} + L^{1/2} x_a\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя операторы (10) в условие инвариантности, убеждаемся, что

$$[p_0 - L^{1/2}, P_\mu^{\mathrm{II}}]_- = 0 = [p_0 - L^{1/2}, J_{\mu\nu}^{\mathrm{II}}], \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,$$

т.е. уравнение (3) инвариантно относительно алгебры (10). Проверяя условие инвариантности для уравнения (7)

$$[p_0^2 - p_a^2 - m^2, Q_A]_- \varphi = 0, \qquad A = 1, 2, \ldots, 10, \tag{11}$$

убеждаемся, что оно не выполняется, если $\{Q_A\}$ задаются формулами (10). Следовательно, интегро-дифференциальное уравнение (3) инвариантно относительно алгебры (10), а дифференциальное уравнение не инвариантно относительно этой алгебры. Уравнение (7) инвариантно только относительно 7-мерной подалгебры алгебры (10).

Укажем еще одну алгебру инвариантности уравнения (3), которая также не является алгеброй инвариантности дифференциального уравнения (7). Рассмотрим совокупность операторов

$$\begin{aligned} &P_a^{\rm III} = P_a = p_a, \qquad J_{ab}^{\rm III} = J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ &J_{0a}^{\rm III} = G_a = t\tilde{p}_a - m x_a, \qquad M = m\hat{1}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\hat{1}$ — единичный оператор, $\tilde{p}_a$ — неизвестный оператор, явный вид которого определим из условия инвариантности уравнения (3) относительно операторов G_a, т.е. из условия

$$[p_0 - L^{1/2}, G_a]_- = i\tilde{p}_a + m[L^{1/2}, x_a]_- = 0, \tag{13}$$

откуда получаем

$$\tilde{p}_a = m p_a L^{-1/2}. \tag{14}$$

Для операторов (12) условие инвариантности (6) выполняется и, кроме того, они удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[P_a, J_{bc}]_- = i(\delta_{ac} P_b - \delta_{ab} P_c), \qquad [P_a, P_b]_- = 0, \\ &[P_a, G_b]_- = i\delta_{ab} M, \qquad [G_a, J_{bc}]_- = i(\delta_{ac} G_b - \delta_{ab} G_c), \\ &[J_{ab}, J_{cr}]_- = i(\delta_{ac} J_{br} + \delta_{br} J_{ac} - \delta_{ar} J_{bc} - \delta_{bc} J_{ar}), \\ &[G_a, G_b]_- = 0, \qquad a, b, c, r = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{15}$$

Следует отметить, что оператор $P_0^{\rm III} = p_0$ коммутирует с оператором $p_0 - L^{1/2}$ уравнения (3). Однако оператор $P_0^{\rm III}$ вместе с операторами (12) не образуют конечномерной алгебры Ли. Подытожим сказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Уравнение (3) инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли, являющейся подалгеброй 11-мерной алгебры Галилея. Базисные элементы этой алгебры задаются формулами (12) и удовлетворяют коммутационным соотношениям (15).*

Аналогичную теорему можно доказать и для интегро-дифференциального уравнения вида

$$p_0 \varphi(t, x) = \left\{ m_0^2 + \frac{(p_a p_a)^2}{4m_1^2} \right\}^{1/2} \varphi(t, x), \tag{16}$$

где m_0 и m_1 — постоянные.

Для уравнения (16) базисные элементы алгебры инвариантности будут задаваться формулами (12), где

$$\tilde{p}_a = p_a \frac{p_b^2}{2m_1} \left\{ m_0^2 + \frac{(p_a p_a)^2}{4m_1^2} \right\}^{-1/2} \tag{17}$$

— интегро-дифференциальный оператор.

Уравнение (16) можно интерпретировать как уравнение движения для неточечной частицы в нерелятивистской квантовой механике. Если в (16) положить $m_0 = 0$, то оно совпадет с дифференциальным уравнением Шредингера.

Замечание 1. Все найденные базисные элементы алгебр инвариантности уравнений, кроме алгебры (8), задаются интегро-дифференциальными операторами. Вот почему для построения группы по заданному представлению алгебры Ли мы не имеем возможности применить теоремы Ли. Они применимы только тогда, когда базисные элементы алгебры Ли являются операторами первого порядка. В нашем случае для построения группы по алгебре Ли необходимо воспользоваться формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа [2, 3].

Замечание 2. Основная идея настоящей заметки — сопоставление интегро-дифференциального уравнения с некоторым дифференциальным уравнением. С помощью аналогичной идеи можно изучить теоретико-алгебраические свойства квазилинейного уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \tag{18}$$

Это нелинейное уравнение можно сопоставить с линейным уравнением вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) \frac{\partial V(x,u)}{\partial x_i} + a(x,u) \frac{\partial V(x,u)}{\partial u} = 0. \tag{19}$$

Изучив теоретико-алгебраические свойства этого линейного уравнения и воспользовавшись известной теоремой о связи решений уравнений (18) и (19), можно установить алгебру инвариантности нелинейного уравнения (18). Таким же способом можно исследовать алгебраические свойства не только квазилинейного уравнения, но и существенно нелинейного, если, конечно, удается сопоставить этому уравнению либо линейное, либо более простое нелинейное уравнение.

Предложенный алгоритм, конечно, применим и к определенным системам интегро-дифференциальных уравнений. Так, например, к системам уравнений [3]

$$\begin{aligned}
&p_0 \vec{E}(t, \vec{x}) = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2} \vec{H}(t, \vec{x}), \\
&p_0 \vec{H}(t, \vec{x}) = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2} \vec{E}(t, \vec{x}), \\
&\vec{E} = (E_1, E_2, E_2), \qquad \vec{H} = (H_1, H_2, H_3), \\
&p_0 A_\mu(x) = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2} A_\mu(x), \qquad p_\mu A^\mu(x) = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Эти системы уравнений, в некотором смысле, очень близки к системе Максвелла для электромагнитного поля. Первая система обладает той же группой симметрии, что и дифференциальная система Максвелла в вакууме. Каждая компонента векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяет уравнению Даламбера.

Следует отметить, что дифференциальное уравнение, полученное как следствие из интегро-дифференциального уравнения может иметь группу инвариантности, вообще говоря, шире или уже, чем исходное уравнение.

В заключение приведем интегро-дифференциальное уравнение с осцилляторным потенциалом:

$$p_0\varphi(t,\vec{x}) = (p_a p_a + m^2 + \lambda x_a x_a)^{1/2}\varphi(t,x), \tag{20}$$

где $x_a x_a = x_1^2+x_2^2+x_3^2$, λ — постоянная величина, для которого можно эффективно применить указанный алгоритм.

Чтобы воспользоваться нелиевским алгоритмом для отыскания алгебры инвариантности уравнения (18), необходимо привести оператор $L = p_a p_a + m^2 + \lambda x_a x_a$ диагональному виду.

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В сб.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–44.
3. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846.
4. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока, *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570.

On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions

W.I. FUSHCHYCH, S.S. MOSKALIUK

1. In 1881 Lie introduced the study of the solutions of partial differential equations, based, on the infinitesimal transformations of the continuous groups. Afterwards these methods have been used for finding exact and approximate solutions of the nonlinear partial differential equations by various authors [1]. In the main these solutions were obtained in one spatial dimension. In this paper some exact similarity solutions of nonlinear parabolic partial differential equations, possessing high symmetry, are obtained, in three spatial dimensions.

Consider the nonlinear equation

$$i\frac{\partial u}{\partial x_0}+\frac{1}{2M}\Delta u=F(u), \tag{1}$$

where

$$u=u(x_0,\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\qquad M=\mathrm{const},\qquad \Delta\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Lemma 1.* *Equation (1) is invariant under a $(n^2+3n+8)/2$-parameter Schrödinger group if*

$$F(u)=\lambda u|u|^{4/n}, \tag{2}$$

where λ is an arbitrary constant, n is a number of the spatial variables in eq. (1).

Lemma 2.* *Equation (1) is invariant under a $(n^2+3n+6)/2$-parameter transformation group if*

$$F(u)=\lambda u|u|^{m}, \tag{3}$$

where λ, m are arbitrary constants.

This group consists of the Galilean group and the one-parameter group of scale transformations.

Lemma 1 and lemma 2 can be proved by using the finite or infinitesimal transformations of the Schrödinger group [2]. By means of the Lie–Ovsjannikov method [3] one can show that the above-mentioned groups are the maximal ones in the sense of Lie which leave eq. (1) with the nonlinearities (2) and (3) invariant.

In the sequel we restrict ourselves to $\mathbf{R}^3$ and consider the infinitesimal transformations of the Schrödinger group

$$x_0'=x_0+\varepsilon A_0+O\left(\varepsilon^2\right),\qquad x_i'=x_i+\varepsilon A_i+O\left(\varepsilon^2\right),$$

Lettere al Nuovo Cimento, 1981, **31**, № 16, P. 571–576.

* Misprints in formulations of Lemmas 1 and 2 are corrected.

where

$$A_0 = -cx_0^2 + 2qx_0 + b, \qquad A_i = (-cx_0 + q)x_i + \varepsilon_{ijk} r_j x_k + v_i x_0 + a_i.$$

The parameters a_i, b, c, q, v_i, r_i are arbitrary real constants. The parameter a_i, represents spatial translations, b represents time translations, c represents invariance under the one-parameter group of projective transformations, q represents dilatations, v_i signifies Galilean invariance and r_i denotes rotation invariance.

2. We need the invariants ω^1, ω^2, ω^3 of the Schrödinger group for finding the solutions of eq. (1). These invariants are obtained by solving the Lagrange equations

$$\frac{dx_0}{A_0} = \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3}.$$

We will give the explicit form of these invariants.

Case I. $cb + q^2 \neq 0$:

$$\omega^1 = \sqrt{\frac{z_i z_i}{-cx_0^2 + 2qx_0 + b}}, \qquad \omega^3 = \frac{r_i z_i}{\sqrt{r_l r_l \left(-cx_0^2 + 2qx_0 + b\right)}},$$
$$\omega^2 = \left|\arcsin \frac{z_2 \Big/ \sqrt{-cx_0^2 + 2qx_0 + b} - r_2\omega^3 \Big/ \sqrt{r_l r_l}}{\sqrt{\left(\left(r_1^2 + r_3^2\right)/r_l r_l\right)\left[(\omega^1)^2 - (\omega^3)^2\right]}}\right| - \sqrt{r_l r_l} \int^{x_0} \frac{dt}{-ct^2 + 2qt + b}, \tag{4}$$

where $z_i = x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i$,

$$\alpha_i = \frac{qv_i + ca_i - \varepsilon_{ijk} v_j r_k}{bc + q^2 + r_l r_l} + r_i \frac{c(r_k a_k) + q(r_k r_k)}{\left(bc + q^2\right)\left(bc + q^2 + r_l r_l\right)},$$
$$\beta_i = \frac{bv_i - qa_i + \varepsilon_{ijk} r_j a_k}{bc + q^2 + r_l r_l} + r_i \frac{r_k(bv_k - qa_k)}{\left(bc + q^2\right)\left(bc + q^2 + r_l r_l\right)}.$$

Here and in the sequel the summation convention is being employed.

Case II. $cb + q^2 = 0$, $c \neq 0$:

1) $r_3 \neq 0$:

$$\omega^1 = \frac{\sqrt{y_i y_i}}{\tau}, \qquad \omega^3 = \frac{r_i y_i}{\tau\sqrt{r_l r_l}},$$
$$\omega^2 = \left|\arcsin \frac{y_2/\tau - r_2\omega^3/\sqrt{r_l r_l}}{\left(\left(r_1^2 + r_3^2\right)/r_l r_l\right)\left[(\omega^1)^2 - (\omega^3)^2\right]}\right| + \frac{\sqrt{r_l r_l}}{\tau}, \tag{5}$$

where

$$y_i = x_i - \gamma_i \tau - \delta_i + \frac{\eta_i}{\tau}, \qquad \tau = -cx_0 + q,$$
$$\gamma_i = \frac{1}{c(r_l r_l)}\left[\varepsilon_{ijk} v_j r_k - (v_i q + ca_i) + r_i r_k (v_k q + ca_k)\right],$$
$$\delta_i = \frac{1}{c(r_l r_l)}\left[\varepsilon_{ijk} r_j (qv_k + ca_k) + r_i (r_k v_k)\right], \qquad \eta_i = \frac{1}{2}\frac{r_i r_k}{r_l r_l}\left(\frac{v_k q}{c} + a_k\right).$$

2) $r_1 = r_2 = r_3 = 0$:

$$\omega^i = \frac{1}{\tau}\left[x_i - \frac{v_i}{c} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{v_i q}{c} + a_i\right)\right]. \tag{6}$$

Case III. $c=0$, $q=0$, $b\neq 0$:
1) $r_3\neq 0$:

$$\omega^1=\sqrt{S_iS_i},\qquad \omega^3=\frac{r_iS_i}{\tau\sqrt{r_lr_l}},$$
$$\omega^2=\left|\arcsin\frac{S_2-(r_2\omega^3)/\sqrt{r_lr_l}}{\sqrt{\left(\left(r_1^2+r_3^2\right)/r_lr_l\right)\left[(\omega^1)^2-(\omega^3)^2\right]}}\right|+\frac{\sqrt{r_lr_l}}{b}x_0, \tag{7}$$

where

$$S_i=x_i-\frac{x_0^2}{2br_lr_l}r_i(r_kv_k)-\frac{x_0}{b(r_lr_l)}[r_i(a_kr_k)+b\varepsilon_{ijk}r_jv_k]-$$
$$-\frac{1}{r_lr_l}\{\varepsilon_{ijk}r_ja_k+b[v_i-(z_kv_k)\tau_i]\}.$$

2) $r_1=r_2=r_3=0$:

$$\omega^i=x_i-\frac{v_i}{2b}x_0^2-\frac{a_i}{b}x_0. \tag{8}$$

Case IV. $c=0$, $q=0$, $b=0$, $v_ix_0+a_i\neq 0$:
1) $r_3\neq 0$, $r_2\neq 0$, $r_1\neq 0$:

$$\omega^1=x_0,\qquad \omega^2=\sqrt{w_iw_i},\qquad \omega^3=\frac{r_iw_i}{\sqrt{r_lr_l}}, \tag{9}$$

where

$$w_i=x_i+\frac{\varepsilon_{ijk}r_j(v_kx_0+a_k)}{(r_ir_l/(v_ix_0+a_i))(v_lx_0-a_l)-r_kr_k}$$

(there is no summation over i).
2) $r_3\neq 0$, $r_2=0$, $r_1=0$:

$$\omega^1=x_0,\qquad \omega^2=x_1^2+x_2^2+\frac{2}{r_3}[(v_2x_0+a_2)x_1-(v_1x_0+a_1)x_2],$$
$$\omega^3=(v_3x_0+a_3)\arcsin\left|\frac{r_3x_1+v_2x_0+a_2}{\sqrt{(v_1x_0+a_1)^2+(v_2x_0+a_2)+r_3^2\omega^2}}\right|-x_3. \tag{10}$$

3) $r_1=r_2=r_3=0$:

$$\omega^1=x_0,\qquad \omega^2=x_1(v_2x_0+a_2)-x_2(v_1x_0+a_1),$$
$$\omega^3=x_1(v_3x_0+a_3)-x_3(v_1x_0+a_1). \tag{11}$$

Case V. $c=q=b=0$, $v_ix_0+a_i=0$, $r_i\neq 0$:

$$\omega^1=x_0,\qquad \omega^2=\sqrt{x_ix_i},\qquad \omega^3=\frac{r_ix_i}{\sqrt{r_lr_l}}. \tag{12}$$

Now we construct the solutions of the eq. (1) of the form

$$u=\varphi\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right)f(x_0,\boldsymbol{x}),\qquad F(u)=\lambda u|u|^m. \tag{13}$$

Substituting (13) into eq. (1), we require the functions φ and f to satisfy the non-coupled equations. In accordance with this requirement the following equations are obtained:

$$\frac{1}{2M}\varphi_{\omega^l\omega^k}\psi^{lk}(\omega^1,\omega^2,\omega^3)+\varphi_{\omega^k}\psi^k(\omega^1,\omega^2,\omega^3)+\varphi\psi(\omega^1,\omega^2,\omega^3)=\lambda\varphi|\varphi|^m, \quad (14)$$

$$i\frac{\partial f}{\partial x_0}+\frac{1}{2M}\Delta f=f|f|^m\psi(\omega^1,\omega^2,\omega^3), \quad (15)$$

$$\omega^l_{x_i}\omega^k_{x_i}=|f|^m\psi^{lk}(\omega^1,\omega^2,\omega^3), \quad (16)$$

$$\left(i\omega^k_{x_0}+\frac{1}{2M}\Delta\omega^k\right)f+\frac{1}{M}\omega^k_{x_i}f_{x_i}=f|f|^m\psi^k(\omega^1,\omega^2,\omega^3), \quad (17)$$

where

$$\varphi_{\omega^k}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial\omega^k}, \qquad \varphi_{\omega^k\omega^l}\equiv\frac{\partial^2}{\partial\omega^k\partial\omega^l}, \qquad \omega^k_{x_0}\equiv\frac{\partial\omega^k}{x_0}.$$

In fact, the nonlinear equation (15) with the additional conditions (16) and (17) is the inhomogeneous linear Schrödinger equation which one can easily integrate. Substituting the solution of eq. (15) into eq. (14), we obtain for φ a nonlinear partial differential equation. Thus the solution of eq. (14) is a function of only three variables ω^1, ω^2, ω^3.

3. Let us consider some exact solutions of eqs. (14)–(17).

For the invariants (4) and the nonlinearity $F=\lambda u|u|^{4/3}$, the functions f and φ take the form ($c\neq 0$)

$$f=\left(-cx_0^2+2qx_0+b\right)^{-3/4}\left[\frac{-cx_0+q-\sqrt{bc+q^2}}{-cx_0+q+\sqrt{bc+q^2}}\right]^{i\rho}\times$$

$$\times\exp\left[iM(\alpha_iz_i)+\frac{iM}{2}\frac{-cx_0+q-\sqrt{cb+q^2}}{-cx_0^2+2qx_0+b}z_iz_i+\frac{iM}{2}(\alpha_i\alpha_i)x_0\right],$$

$$\varphi=\left[\frac{1}{2\lambda M}\left(\frac{9}{4}-B^2\right)\right]^{3/4}\left[(\omega^1)^2-(\omega^3)^2\right]^{-3/4}\exp\left[iB\omega^2\right],$$

where

$$B=\frac{2\sqrt{bc+q^2}}{\sqrt{r_lr_l}}\rho, \qquad \rho=\frac{M}{4\sqrt{cb+q^2}}[2(v_i\beta_i)+b(\alpha_i\alpha_i)-c(\beta_i\beta_i)].$$

For the invariants (4) and the nonlinearity $F=\lambda\varphi|\varphi|^m$ the functions f and φ take the form ($c=0$, $q\neq 0$)

$$f=(2qx_0+b)^{-1/m+i\rho}\exp\left\{iM(\alpha_iz_i)+\frac{iM}{2}(\alpha_i\alpha_i)x_0\right\},$$

$$\varphi=\left[\frac{1}{2\lambda M}\left(\frac{4}{m^2}-B^2\right)\right]^{1/m}\left[(\omega^1)^2-(\omega^3)^2\right]^{-1/m}\exp\left[iB\omega^2\right],$$

where

$$B = \frac{2q}{\sqrt{r_l r_l}}\rho, \qquad \rho = \frac{M}{4q}[2(v_i\beta_i) + b(\alpha_i\alpha_i)].$$

For the invariants (12) and the nonlinearity $F = \lambda\varphi|\varphi|^m$ the functions f and φ take the form $u_1 = f\varphi_1$, $u_2 = f\varphi_2$:

$$f = \exp[ic_1], \qquad \varphi_1 = \left[\frac{c_2}{2\lambda M}\left(\frac{2}{m}\right)^2\right]^{1/m}\left[x_i x_i - \frac{(r_i x_i)^2}{r_l r_l}\right]^{-1/m},$$

$$\varphi_2 = c_3 x_0^{-1}\exp\left[i\frac{\lambda c_3^m}{m-1}x_0^{-m+1} + i\frac{m}{2x_0}\left[x_i x_i - \frac{(r_i x_i)^2}{r_l r_l}\right]\right],$$

where $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$, $c_3 = \text{const}$.

Remark. We have considered only a part of the exact solutions obtained by the same method for the invariants (4)–(12) and the nonlinearities (2) and (3). Three-spatial-dimension exact solutions of Liouville, eikonal, Hamilton–Jacobi and Navier–Stokes equations are obtained by this method too [4, 5].

1. Ames W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol. I and II, New York, N. Y., 1965, 1972.
2. Niederer V., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802.
3. Ovsjannikov L.V., The Group Analysis of Differential Equations, Moscow, 1978 (in Russian).
4. Fushchych W.I., Serov N.I., *Ukr. Math. J.*, 1981, **33**, № 6, 780–784 (in Russian).
5. Fushchych W.I. (Editor), Algebraic-Theoretical Investigations in Mathematical Physics, Kiev, 1981 (in Russian).

О точных решениях нелинейных многомерных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, С.С. МОСКАЛЮК, Н.И. СЕРОВ

В работе приведены в явном виде некоторые классы точных решений следующих нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП): гиперболические уравнения

$$\Box u + \lambda_1 u = 0, \tag{1}$$

$$\Box u + \lambda_2 \exp u = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0, \tag{3}$$

$$\Box u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1} = 0, \tag{4}$$

$$\Box u + F_1(u) = 0, \qquad \Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta, \tag{5}$$

параболические уравнения

$$i\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2M}\Delta u + F_2(u) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2M}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p = \Delta\vec{u}, \qquad \operatorname{div}\vec{u} = 0, \tag{7a}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^n$, $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$, Δ — оператор Лапласа; F_1, F_2 — произвольные интегрируемые функции; k, λ_1, λ_2, M, m — произвольные постоянные величины.

Все приведенные уравнения, как и другие основные уравнения математической и теоретической физики [1], обладают высокой симмерией. Именно это свойство уравнений (1)–(7) дает возможность отыскать целые семейства (классы) точных решений. Для уравнений (1)–(5) решения найдены через произвольные функции, зависящие от инвариантов группы симметрии [2, 3].

С помощью метода Ли [4] можно установить следующие группы инвариантности уравнений (1)–(7).

Теорема 1. *Максимальной группой инвариантности (МГИ) уравнений (1), (2) и (4) является расширенная группа Пуанкаре* $\tilde{P}(1, n-1) = \{P(1, n-1), D\}$ —

IX международная конференция по нелинейным колебаниям, Киев, 30.08–06.09 1981, Том 1, Аналитические методы теории нелинейных колебаний, Киев, Наукова думка, 1984, С. 384–389.

группа Пуанкаре $P(1,n-1)$ и масштабных преобразований D. МГИ уравнения (5) является группа $P(1,n-1)$.

Замечание 1. Уравнение Лиувилля (2) в двухмерном пространстве ($x \in R^2$) допускает бесконечную группу преобразований. Этот факт является причиной того, что все решения уравнения (2) в этом частном случае задаются известной формулой Лиувилля через две произвольные функции. Нами будут приведены решения уравнения Лиувилля в пространстве $x \in R^n$ при $n \geq 3$.

Теорема 2. *МГИ уравнения эйконала (3) является бесконечная группа преобразований. Инфинитезимально эта группа задается преобразованиями*

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon A_\mu, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \qquad u' = u + \varepsilon B, \tag{8}$$

$$A_\mu = -b_\mu(u) x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu(u) x^\nu - c_{\mu\nu}(u) x^\nu + d_\mu(u), \qquad B = \eta(u), \tag{9}$$

где b_μ, $c_{\mu\nu}$, d_μ, η — произвольные функции от u, причем $c_{00} = -c_{aa}$, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, $\nu \neq \mu$.

Теорема 3. *МГИ уравнения (6) (при $F_2(u) = -\lambda u|u|^{4/(n-1)}$, $n = 4$) является 13-параметрическая группа. Инфинитезимально эта группа задается формулами (8), где*

$$\begin{aligned} &A_0 = -cx_0^2 + 2qx_0 + b, \\ &A_i = (-cx_0 + q)x_i + \varepsilon_{ijk} r_j x_k + v_i x_0 + a_i, \\ &B = -\left[\frac{3}{2}(-cx_0 + q) + iM\left(\frac{1}{2} c x_i x_i - v_i x_i\right)\right] u, \end{aligned} \tag{10}$$

a_i, b, r_i, v_i, q, c — параметры преобразований [5].

В основе нашего подхода к отысканию точных решений уравнений (1)–(7) лежит представление

$$u(x) = \Phi[\varphi(\omega), f(x)], \tag{11}$$

где Φ, φ, f — произвольные дифференцируемые функции соответствующих переменных; $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \dots, \omega_{n-1}(x)\}$ — инварианты групп инвариантности уравнений (1)–(7).

В силу того, что ω являются инвариантами группы инвариантности уравнений, подстановка (11) в уравнения (1)–(7) приводит к ДУЧП для функции $\varphi(\omega)$, зависящей от меньшего числа переменных, чем $u(x)$. Функции Φ, f и инварианты ω находим из системы уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_0}{A} = \frac{dx_1}{A_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{du}{B}.$$

I. Решения уравнения (1) ищем в виде $u(x) = \varphi(\omega) f(x)$.

Приведем явный вид некоторых решений уравнений (1):

$$\begin{aligned} &u = \left[-\frac{\lambda}{4}(1-k)^2((\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu)\right]^{1/(k-1)}, \\ &\beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \nu = \overline{0, n-1}; \end{aligned}$$

$$u = \left[\frac{\lambda}{2}(1-k)^2 a_\nu y^\nu \cdot \beta_\nu y^\nu\right]^{1/(1-k)}, \qquad a_\nu a^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = 0, \quad a_\nu \beta^\nu = -1;$$

$$u = \mu\left[x_3 \cos(c_1 + x_0 \pm x_1) \pm x_2 \sin(c_1 + x_0 \pm x_1)\right]^{1/(1-k)},$$

$$\mu = \left[\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1}\right]^{1/(1-k)};$$

$$u = [F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu]^{2/(1-k)}, \qquad \alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0,$$

$$\beta_\nu \beta^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1},$$

F — произвольная дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν — const;

$$u = \left[x_3 \Phi(x_0 \pm x_1) \pm x_2(\beta^2 - \Phi^2(x_0 \pm x_1))^{1/2}\right]^{2/(1-k)},$$

$$\beta^2 = \frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1},$$

Φ — произвольная дифференцируемая функция;

$$u = [F(\alpha_{1\nu} x^\nu, \ldots, \alpha_{n-1\nu} x^\nu) + \alpha_{n\nu} x^\nu]^{2/(1-k)},$$

$$\alpha_{a\mu} \alpha_b^\mu = 0, \quad a = \overline{1,n}, \; b = \overline{1,n-1}, \qquad \alpha_{n\nu}\alpha_n^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1},$$

F — произвольная дифференцируемая функция.

II. Решения уравнения Лиувилля (2) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + f(x). \tag{12}$$

Найденные нами решения уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} &u = -2\ln[\gamma \mathcal{P}(x) \operatorname{sh} Q(x)], \qquad u = -2\ln[\delta \mathcal{P}(x) \operatorname{ch} Q(x)], \\ &u = -2\ln[\gamma \mathcal{P}(x) \cos Q(x)], \qquad u = -2\ln[\sigma \mathcal{P}(x) \mathcal{R}(x)], \end{aligned} \tag{13}$$

где

1) $\mathcal{P}(x) = \alpha_\nu y^\nu, \qquad Q(x) = c_1(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}\sqrt{y_\nu y^\nu} + c_2, \qquad \mathcal{R}(x) = Q(x)|_{c_1=1},$

$\gamma = \dfrac{\sqrt{-2\lambda}}{2c_1}, \qquad \delta = \dfrac{\sqrt{2\lambda}}{2c_1}, \qquad \sigma = \gamma|_{c_1=1}, \qquad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0;$

2) $\mathcal{P}(x) = \dfrac{1}{2}\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]^{-1/2},$

$Q(x) = c_1 \ln\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right] + c_2, \qquad \beta_\nu \beta^\nu = 1;$

3) $\mathcal{P}(x) = \Phi^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \quad Q(x) = c_1 \beta_\nu y^\nu \Phi(\alpha_\nu y^\nu) + c_2, \quad \alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0,$

$\beta_\nu \beta^\nu = 1, \qquad \Phi$ — произвольная дифференцируемая функция;

4) $\mathcal{P}(x) = \Phi^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \qquad Q(x) = c_1\left[\beta_\nu y^\nu \Phi(\alpha_\nu y^\nu) - \ln \Phi(\alpha_\nu y^\nu)\right] + c_2,$

$\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu \beta^\nu = 1;$

$$5)\quad \mathcal{P}(x) = 1, \qquad Q(x) = c_1\left[\beta_\nu y^\nu + \Phi(\alpha_\nu y^\nu)\right] + c_2,$$
$$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = -1.$$

III. Решения уравнения (5) ищем в виде $u(x) = \varphi(\omega)$. Решения уравнения (5) даются интегралом

$$\int\limits_0^u \frac{d\psi}{\sqrt{c_1 \pm \int\limits_0^\varphi F_1(\xi)d\xi}} = \omega + \ln c_2, \tag{14}$$

где

$$1)\quad \omega = \alpha_\nu x^\nu + f(\beta_\nu x^\nu), \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{15}$$

f — произвольная дифференцируемая функция;

$$2)\quad \omega = \sqrt{2\left[(\alpha_\nu y_\nu)^2 \pm y_\nu y^\nu\right]}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \pm 1, \qquad \nu = 0, 1. \tag{16}$$

В случае $F_1(u) = \sin u$ имеем решение уравнения синус-Гордона в форме (14). Кроме того, при $c_1 = 2$ решения этого уравнения записываются в явном виде:

$$u = 4\,\mathrm{arctg}\,(c_2 \exp\omega), \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = -1,$$
$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left(c_2\,\mathrm{th}\,\frac{\omega}{2}\right), \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \pm 1,$$

где ω задается формулами (15), (16).

IV. Решения уравнения эйконала (3) ищем в виде

$$u(x) = F[\varphi(\omega) + f(x)].$$

Полученные решения имеют вид

$$u(x) = F(w), \tag{17}$$

где

$$1)\quad w = \alpha_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0;$$
$$2)\quad w = \beta_\nu y^\nu + \sqrt{(\beta_\nu y^\nu)^2 - y_\nu y^\nu}, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1;$$
$$3)\quad w = (\alpha_\nu y^\nu)^{-1} y_\nu y^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0.$$

В (17) F — произвольная дифференцируемая функция.

V. Решения уравнения Борна–Инфельда (4) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + f(x) \qquad \text{или} \qquad u(x) = \varphi(\omega)f(x) + c. \tag{18}$$

Полученные решения имеют вид

$$u = f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2 = 0.$$

В частности, при $\beta_0 = \beta_1 = 0$, $\alpha_0 = \pm\alpha_1$ имеем решение $u = f(x_0 \pm x_1)$ полученное в [6].

$$u = \frac{a}{2}\ln\left\{\frac{y_0 + y_1}{y_0 - y_1}\,\mathrm{th}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2 - y_\nu y^\nu}{a^2 + y_\nu y^\nu}\right)\right]\right\} + b\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a^2 + y_\nu y^\nu}{b^2 - y_\nu y^\nu}} + c,$$

$$u = \pm\left[c_1\exp[c_2(y_0-y_1)] + \frac{2}{c_2}(y_0+y_1)\right]^{1/2} + c_2,$$

$$u = \pm\left[\frac{y_0-y_1}{c_1}F(w)\right]^{1/2} + c_3, \qquad w = c_1(y_0+y_2)+c_2,$$

где 1) $F(w)=\operatorname{th} w$, 2) $F(w)=\operatorname{cth} w$, 3) $F(w)=\operatorname{tg} w$, 4) $F(w)=w$,

$$\frac{\Phi(x,u)+1}{\Phi(x,u)-1}\frac{1}{y_0+y_1}\exp\left[\frac{-2}{\Phi(x,u)-1} - \frac{y_0-y_1}{a}\right] = c,$$

$$\Phi(x,u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+4a(y_0+y_1)}}.$$

VI. Решение нелинейного уравнения Шредингера (6) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega)f(x).$$

Приведем одно из полученных решений при $F_2(u) = -\lambda u|u|^m$, $(c=0,\ q\neq 0,\ r_3\neq 0)$

$$f = (2qx_0+b)^{-1/m+i\rho}\exp\left\{iM(\alpha_i z_i) + \frac{iM}{2}(\alpha_i\alpha_i)x_0\right\},$$

$$\varphi = \left[\frac{1}{2\lambda M}\left(\frac{4}{m^2}-B^2\right)\right]^{1/m}\left[(\omega^1)^2-(\omega^3)^2\right]^{-1/m}\exp[iB\omega^2],$$

где

$$\rho = \frac{M}{4q}[2(\alpha_i\beta_i)+b(\alpha_i\alpha_i)], \qquad B = \frac{2q}{\sqrt{r_l r_l}}\rho, \qquad z_i = x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i,$$

$$\alpha_i = \frac{q^2 v_i + r_i(r_k v_k) + q\varepsilon_{ijk}v_k}{q(q^2+r_l r_l)}, \quad \beta_i = \frac{bv_i - qa_i + \varepsilon_{ijk}r_j a_k}{q^2+r_k r_k} + r_i\frac{r_k(bv_k-qa_k)}{q(q^2+r_l r_l)},$$

$$\omega^1 = \sqrt{\frac{z_i z_i}{2qx_0+b}}, \qquad \omega^3 = \frac{r_i z_i}{\sqrt{r_l r_l(2qx_0+b)}},$$

$$\omega^2 = \left|\arcsin\frac{z_2\Big/\sqrt{2qx_0+b-r_2\omega^3\Big/\sqrt{r_l r_l}}}{\sqrt{\left[\left(r_1^2+r_3^2\right)/r_l r_l\right]\left[(\omega^1)^2-(\omega^3)^2\right]}}\right| - \frac{\sqrt{r_k r_k}}{2q}\ln(2qx_0+b).$$

VII. Решения уравнения Гамильтона–Якоби (7) ищем в виде

$$u = \varphi(\omega^1,\omega^2,\omega^3) + f(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

Приведем одно из полученных решений:

$$u = \frac{Mq}{2qx_0+b}z_i z_i + M(\alpha_i z_i) + \frac{M}{2}(\alpha_i\alpha_i)x_0, \quad z_i = x_i-\alpha_i x_0-\beta_i, \quad i=1,2,3,$$

где q, α_i, β_i — произвольные постоянные.

VIII. Решения уравнения Навье–Стокса (7а) ищем в виде

$$u^i = F^{ij}(x_0,x_1,x_2,x_3)\varphi_j\left(\omega^1,\omega^2,\omega^3\right) + f^i(x_0,x_1,x_2,x_3).$$

Приведем одно из полученных решений:

$$u^i = \frac{q(r_k r_k) z_i - r_i(r_k z_k)}{(r_l r_l)(z_j z_j) - (r_l z_l)^3} + \alpha_i, \qquad l, k, i, j = 1, 2, 3,$$

$$p = -\frac{1}{2}\frac{q^2(r_l r_l)}{(r_k r_k)(z_j z_j) - (r_k z_k)^2}, \qquad z_i = x_i - \alpha_i x_0 - \beta_i,$$

где q, r_i, α_i, β_i — произвольные постоянные.

1. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы и математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
2. Фущич В.И., Серов Н.И., О точных решениях Борна–Инфельда, *Докл. АН СССР*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнении, М., Наука, 1978, 400 с.
5. Fushchych W.I, Moskaliuk S.S., On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions, *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, № 16, 571–576.
6. Барбашов Б.М., Черников Н.А., Решение и квантования нелинейной двухмерной модели тина Борна–Инфельда, *Журн. эксперим. и теор. физики*, 1966, **50**, 1296–1308.

Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

The Galilei-invariant systems of partial differential equations, which describe the nonrelativistic motion of arbitrary spin particle, have been deduced. The found equations admit Lagrangian formulation and describe dipole, quadrupole and spin-orbit couplings of a particle with an external field, which traditionally are considered as a relativistic effects. Using the found equations, the problem of an arbitrary spin particle motion in homogeneous magnetic field have been solved exactly. The generators of all classes of irreducible representations of Galilei group have been found.

Выведены галилеевски-инвариантные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядка, описывающие движение нерелятивистской частицы произвольного спина. Найденные уравнения допускают лагранжеву формулировку и описывают дипольное, квадрупольное и спин-орбитальное взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем, которые традиционно считались чисто релятивистскими эффектами. На основе полученных уравнений точно решена задача о движении нерелятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Найдены генераторы всех классов неприводимых представлений группы Галилея.

Введение

Более 300 лет известны принцип относительности и преобразования Галилея. Однако структура группы Галилея G и ее представления начали изучаться сравнительно недавно. В 1952 г. Иноню и Вигнер [1] описали точные представления этой группы. Баргман [2] впервые указал на фундаментальную роль проективных представлений группы G в нерелятивистской квантовой механике. Любопытно отметить, что проективные представления группы Галилея могли быть открыты значительно раньше, поскольку еще Ли [3] установил алгебру и группу инвариантности уравнения диффузии, которое с точностью до постоянных коэффициентов совпадает с одномерным уравнением Шредингера для невзаимодействующей частицы. Исходя из алгебры инвариантности уравнения диффузии (или уравнения Шредингера) и используя приемы, известные еще с начала века (формулу Кэмпбелла, уравнения Ли), мы, как будет показано ниже, с необходимостью приходим к проективным представлениям группы G.

Леви-Леблонд [4, 5] начал систематическое исследование представлений группы Галилея и уравнений, инвариантных относительно этой группы. Хаген и Герлей [6, 7] получили галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение нерелятивистской частицы с произвольным спином. Особенностью этих уравнений является то, что они не дают полного описания движения частицы со спином во внешнем электромагнитном поле, так как не учитывают такие хорошо известные физические эффекты, как спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия. Во многих книгах и статьях

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1981, **12**, вып. 5, С. 1157–1219.

утверждается даже, что такие взаимодействия являются чисто релятивистскими эффектами и могут быть адекватно описаны только с помощью уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре (например, уравнений Дирака).

Настоящий обзор, в основу которого положены работы авторов [8–14], посвящен выводу и подробному исследованию нового класса галилеевски-инвариантных уравнений движения для частиц произвольного спина. С помощью полученных уравнений, подобно тому как и в релятивистской теории Дирака для электрона, можно последовательно описать спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия. Найденные уравнения — частный случай уравнения Леви-Леблонда и Хагена–Герлея (уравнения ЛХГ) — представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка параболического типа.

Для получения и анализа галилеевски-инвариантных уравнений используется алгебраический подход, развитый в работах [15–17]. Суть этого подхода состоит в том, что, исходя из некоторой общей формы генераторов группы G и используя коммутационные соотношения алгебры Ли группы Галилея, находят явный вид генератора временного сдвига (гамильтониана) H, с помощью которого определяется инвариантное уравнение типа Шредингера.

Следует отметить, что в принципе можно построить очень много различных галилеевски-инвариантных уравнений для частиц произвольного спина (то же самое можно сказать и о релятивистских уравнениях), которые в отсутствие взаимодействия могут быть эквивалентными. Поэтому важно иметь критерии, выделяющие из них те, которые позволяют наиболее полно описать физическую реальность — например в случае взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем. В работе найдено необходимое условие, которому должны удовлетворять уравнения первого порядка, описывающие спин-орбитальное взаимодействие частицы с полем. Это условие можно сформулировать в виде требования (которому не удовлетворяют уравнения ЛХГ), чтобы генераторы представления однородной группы Галилея, реализующегося на множестве решений инвариантного уравнения, были нильпотентными матрицами с индексом нильпотентности $N > 2$.

Структура уравнений, полученных в настоящей работе, позволяет во многих случаях находить их решения сразу для произвольного значения спина. Ниже с использованием найденных уравнений точно решена задача о спектре энергии заряженной нерелятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле.

В работе получены генераторы всех классов неприводимых представлений расширенной группы Галилея. Найденная реализация отличается относительно простой (симметричной) формой генераторов, которая является универсальной для всех унитарных представлений этой группы. Исследованы также представления полной группы Галилея, включающей дискретные преобразования P, T и C.

За пределами настоящей статьи остались задачи о разложении тензорного произведения двух и трех неприводимых представлений группы Галилея. Эти вопросы (и многие другие, касающиеся теории представлений группы хорошо изложены в [4, 18–20].

1. Галилеевская инвариантность

В этом разделе обсуждается алгебра инвариантности уравнения Шредингера для невзаимодействующей частицы и дискретные P-, T-, C-преобразования в нерелятивистской квантовой механике. Исходя из алгебры инвариантности, с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа строится представление расширенной группы Галилея и вычисляется мультипликатор, характеризующий проективные представления этой группы.

Алгебра инвариантности уравнения Шредингера. Исследуем свойства симметрии основного уравнения нерелятивистской квантовой механики

$$L\Psi = 0, \qquad L = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}, \tag{1}$$

где

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad \Psi = \Psi(t, \boldsymbol{x}) \subset L_2.$$

Обозначим $\{Q_A\}$, $A = 1, 2, \ldots, N$; $N < \infty$ некоторое множество операторов, определенных на множестве, всюду плотном в пространстве L_2 и образующих алгебру Ли. Уравнение (1) по определению инвариантно относительно алгебры $\{Q_A\}$, если выполняются соотношения

$$[Q_A, L] \equiv Q_A L - L Q_A = f_A L, \tag{2}$$

где $\{f_A\}$ — некоторое множество операторов, определенных в L_2. Действительно, если выполняется (2), то преобразование $\Psi \to Q_A\Psi$ переводит решение уравнения (1) в другое решение этого уравнения.

Рассмотрим задачу о нахождении алгебры инвариантности (АИ) уравнения (1) в классе дифференциальных операторов первого порядка. Эта задача сводится к определению всех возможных операторов вида

$$Q_A = B_A(t, \boldsymbol{x}) + C_A^i(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i} + D_A(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial t}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

(где $B_A(t, \boldsymbol{x})$, $C_a^i(t, \boldsymbol{x})$, $D_A(t, \boldsymbol{x})$ — функции от t и $\boldsymbol{x}$), удовлетворяющих условиям (2) и образующих конечномерную алгебру Ли. Как отмечалось выше, эта задача для одномерного уравнения Шредингера впервые была решена Ли [3]. Решение ее приведено в книге [21], а недавно для трехмерного случая получено в работах [22, 23]. Результат [22, 23] можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Максимальной АИ уравнения (1) в классе дифференциальных операторов первого порядка является тринадцатимерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются формулами*

$$\begin{aligned} &P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a, \qquad M = m, \\ &J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a, \end{aligned} \tag{4}$$

$$D = 2tP_0 - x_a p_a + \frac{3}{2}i, \qquad A = t^2 P_0 - tD - \frac{1}{2}m\boldsymbol{x}^2. \tag{5}$$

Доказательство теоремы здесь не приведено (см. [22, 23]). Отметим только, что инвариантность уравнения (1) относительно алгебры (4), (5) легко проверить непосредственно. Операторы (4) удовлетворяют условию (2) при $f_A \equiv 0$, а для операторов (5) выполняется

$$[D, L] = -2iL, \qquad [A, L] = 2itL.$$

Операторы (4), (5) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [P_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}P_c, \tag{6}$$

$$[G_a, G_b] = 0, \qquad [G_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c, \tag{7}$$

$$[P_a, G_b] = i\delta_{ab}M, \qquad [P_\mu, M] = [G_a, M] = [J_a, M] = 0, \tag{8}$$

$$[P_0, P_a] = [P_0, J_a] = 0, \tag{9}$$

$$[P_0, G_a] = iP_a, \qquad a, b, c = 1, 2, 3, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} [D, P_a] = -iP_a, \qquad [D, G_a] = iG_a, \qquad [D, P_0] = -2iP_0, \\ [D, J_a] = [D, M] = [A, G_a] = [A, M] = [A, J_a] = 0, \\ [A, P_a] = iG_a, \qquad [A, P_0] = iD, \qquad [A, D] = 2iA, \end{gathered} \tag{11}$$

т. е. образуют алгебру Ли, называемую алгеброй Ли группы Шредингера.

Заметим, что операторы (5) на множестве решений уравнения (1) могут быть выражены через генераторы (4):

$$D = (2M)^{-1}(P_aG_a + G_aP_a), \qquad A = (2M)^{-1}G_aG_a \tag{12}$$

и, следовательно, симметрия относительно, преобразований, генерируемых операторами D и A, не приводит к новым законам сохранения. Таким образом, основной интерес представляет симметрия уравнения (1) относительно АИ (4) (алгебры Ли расширенной группы Галилея).

Алгебра (4) имеет три основных инвариантных оператора (оператора Казимира)

$$\begin{gathered} C_1 = 2MP_0 - P_aP_a, \qquad C_2 = M, \\ C_3 = W_aW_a = [MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c][MJ_a - \varepsilon_{abc}P_bG_c], \end{gathered} \tag{13}$$

собственные значения которых ассоциируются с внутренней энергией, массой и спином нерелятивистской частицы. Подставив (4) в (13), убеждаемся, что уравнение Шредингера (1) описывает частицу со спином $s = 0$, внутренней энергией $\varepsilon_0 = 0$ и массой m.

Таким образом, мы рассмотрели симметричные свойства уравнения Шредингера относительно АИ, базисные элементы которых принадлежат классу дифференциальных операторов первого-порядка. Отметим, что если рассмотреть АИ в классе интегродифференциальных операторов, то можно показать, что уравнение (1) инвариантно относительно алгебр $O(1, 3)$ [24] и $O(2, 4)$ [25].

Возникает естественный вопрос — существуют ли другие [кроме (1)] дифференциальные уравнения, имеющие такую же симметрию [обладающие такой же АИ (4), (5)], как уравнение Шредингера? Положительный ответ на этот вопрос дан в разделах 2 и 3.

В заключение этого пункта сформулируем следующее утверждение, в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой.

Лемма 1. *Пусть* $\{P_0, P_a, J_a, G_a, M\}$ *— произвольная совокупность операторов, удовлетворяющих алгебре (6)–(10) и дополнительному требованию, чтобы существовал оператор, обратный оператору* M. *Тогда операторы (12) совместно с* P_a, G_a, J_a, M *и* $\hat{P}_0 = P_0 - (2M)^{-1}C_1$ *удовлетворяют алгебре Ли (6)–(11).*

Сформулированный в лемме результат означает, что произвольное представление алгебры Галилея (6)–(10) (соответствующее $c_2 \neq 0$) может быть пополнено до представления алгебры Ли группы Шредингера (6)–(12) (подобно тому, как произвольное представление группы $P(1,3)$, соответствующее нулевой массе и дискретному спину, может быть пополнено до представления конформной группы [26].

Конечные преобразования. Зная АИ некоторого дифференциального уравнения, обычно бывает нетрудно найти его группу симметрии. Так, исходя из (4), можно получить в явном виде преобразования Галилея для координат x_a, времени t и волновой фунции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} &x_a \to x'_a = U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) x_a U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = R_{ab}x_b + v_a t + a_0, \\ &t \to t' = U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) t U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = t + a_0, \end{aligned} \tag{14а}$$

$$\begin{aligned} &x_a \to x''_a = U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) x_a U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = R^{-1}_{ab}(x_b - v_b t - a_b), \\ &t \to t'' = U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) t U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = t - a_0, \end{aligned} \tag{14б}$$

$$\begin{aligned} \Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi'(t, \boldsymbol{x}) &= U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \\ &= \exp[if(t', \boldsymbol{x}') - imb]\Psi(t', \boldsymbol{x}'), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = \exp(iJ_c\theta_c)\exp(iG_c v_c)\exp[iP_\mu a^\mu + imb], \tag{16}$$

θ_c, v_c, a_c, a_0, b — произвольные действительные параметры; R_{ab} — оператор трехмерного поворота:

$$R_{ab} = \delta_{ab}\cos\theta + \frac{\varepsilon_{abc}\theta_c}{\theta}\sin\theta + \frac{\theta_a\theta_b}{\theta^2}(1 - \cos\theta), \qquad \theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_2^2\right)^{1/2}, \tag{17}$$

$f(t', \boldsymbol{x}')$ — фазовый множитель [2]:

$$f(t', \boldsymbol{x}') = m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 t. \tag{18}$$

Для доказательства соотношений (14)–(18) достаточно воспользоваться формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \cdots\right). \tag{19}$$

Согласно (4), (19)

$$\exp(-iG_a$$

и

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = \\
&\quad = \exp[if(t', \boldsymbol{x}') - imb] \exp(-iJ_c\theta_c) \exp[ip_a(a_a - v_a t) - iP_0 a_0],
\end{aligned}
\tag{20}
$$

откуда непосредственно следует выполнение (14)–(18).

Таким образом, представление расширенной группы Галилея на множестве решений уравнения (1) задается операторами (20), действие которых на волновую функцию и независимые переменные x_a и t определено формулами (14)–(18).

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что операторы (20) удовлетворяют групповому закону

$$
\begin{aligned}
&U\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, a_0^{(2)}, b^{(2)}\right) U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(1)}, a_0^{(1)}, b^{(1)}\right) = \\
&\quad = U\Bigg(\boldsymbol{\theta}^{(1)} + \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(1)} + R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(1)} + R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)} + \boldsymbol{v}^{(1)} a_0^{(2)}, \\
&\quad a_0^{(1)} + a_0^{(2)}, b^{(1)} + b^{(2)} + v_a^{(1)} R_{ab}^{(1)} a_b^{(2)} + \frac{1}{2} a_0^{(2)} \left(v_a^{(1)}\right)^2\Bigg), \\
&U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) = \\
&\quad = U\left(-\boldsymbol{\theta}, -R^{-1}\boldsymbol{v}, -R^{-1}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}a_0), -a_0, -b_0 + a_c v_c - \frac{1}{2} a_0 v_a v_a\right),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $R\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, $R\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$, $a'_a = R_{ab}a_b$, $v'_a = R_{ab}v_b$, который можно принять за абстрактное определение расширенной группы Галилея.

Положив в (15) $b \equiv 0$, приходим к подгруппе расширенной группы Галилея, которую называют группой Галилея. При этом формулы (15) определяют не точное, а только проективное представление этой группы. Действительно, групповой закон для преобразований Галилея (14а) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&g\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(1)}, a_0^{(1)}\right) g\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, a_0^{(2)}\right) = \\
&= g\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)} + \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(1)} + R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(1)} + R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)} + \boldsymbol{v}^{(1)} a_0^{(2)}, a_0^{(1)} + a_0^{(2)}\right).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Но из (21) следует, что

$$
\begin{aligned}
&U\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, a_0^{(2)}, 0\right) U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(1)}, a_0^{(1)}, 0\right) = \exp(i\omega_{12}) \times \\
&\times U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)} + \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(1)} + R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(1)} + R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)} + \boldsymbol{v}^{(1)} a_0^{(2)}, a_0^{(1)} + a_0^{(2)}, 0\right),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где фазовый множитель:

$$
\omega_{12} = v_a^{(1)} R_{ab}^{(1)} a_b^{(2)} + \frac{1}{2} a_0^{(2)} v_a^{(1)} v_a^{(1)}.
\tag{24}
$$

Иными словами, операторы (20) при $b \equiv 0$ удовлетворяют закону групповой композиции (22) только с точностью до умножения на множитель $\exp(i\omega_{12})$, который не изменяет нормы волновой функции.

Мы убедились, что АИ уравнения (1), задаваемая операторами (4), содержит полную информацию о свойствах симметрии этого уравнения относительно непрерывных преобразований. Можно рассмотреть также дискретные преобразования вида

$$\begin{aligned} &x_a \to -x_a, \qquad t \to t, \\ &x_a \to x_a, \qquad t \to -t, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to P\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \eta_1 \Psi(t, -\boldsymbol{x}), \tag{26}$$

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to T\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \eta_2 \Psi(-t, \boldsymbol{x}), \tag{27}$$

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to C\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \eta_3 \Psi^*(t, -\boldsymbol{x}), \tag{28}$$

где $\eta_a = \pm 1$. Операторы (25)–(28) по определению удовлетворяют условиям $P^2 = T^2 = C^2 = I$, где I — единичный оператор.

Нетрудно убедиться, что уравнение Шредингера (1) инвариантно относительно преобразований P и CT, но C и T — неинвариантно. Это не означает, конечно, что не существует галилеевски-инвариантных уравнений с другими свойствами симметрии относительно преобразований (25)–(28). Поэтому рассмотрим полную группу Галилея, определяемую как совокупность преобразований (14)–(18) и (25)–(28). Произвольный оператор, задающий такие преобразования в пространстве квадратично-интегрируемых функций, можно представить в виде

$$U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b, \varepsilon_P, \varepsilon_T, \varepsilon_C) = U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b) P^{\frac{1-\varepsilon_P}{2}} T^{\frac{1-\varepsilon_T}{2}} C^{\frac{1-\varepsilon_C}{2}}, \tag{29}$$

где $U(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b)$ задан в (16), (20), а ε_P, ε_T, ε_C — параметры, независимо принимающие значения $+1$ или -1.

Операторы (29) удовлетворяют групповому закону

$$\begin{aligned} &U\left(\boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, a_0^{(2)}, b^{(2)}, \varepsilon_P^{(2)}, \varepsilon_T^{(2)}, \varepsilon_C^{(2)}\right) \times \\ &\times U\left(\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(1)}, a_0^{(1)}, b^{(1)}, \varepsilon_P^{(1)}, \varepsilon_T^{(1)}, \varepsilon_C^{(1)}\right) = \\ &U\Big(\boldsymbol{\theta}^{(1)} + \varepsilon_C^{(1)}\boldsymbol{\theta}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(1)} + \varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)} R^{(1)}\boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{a}^{(1)} + \varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_C^{(1)} R^{(1)}\boldsymbol{a}^{(2)} + \\ &+\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)}\boldsymbol{v}^{(1)} a_0^{(2)}, a_0^{(1)} + \varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)} a_0^{(2)}, b^{(1)} + \varepsilon_C^{(1)} b^{(2)} + \varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_C^{(1)} v_a^{(1)} R_{ab}^{(1)} a_b^{(2)} + \\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_C^{(1)} a_0^{(2)} v_a^{(1)} v_a^{(1)}, \varepsilon_P^{(1)}\varepsilon_P^{(2)}, \varepsilon_T^{(1)}\varepsilon_T^{(2)}, \varepsilon_C^{(1)}\varepsilon_C^{(2)}\Big), \\ &U^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, a_0, b, \varepsilon_P, \varepsilon_T, \varepsilon_C) = U\Big(-\varepsilon_C\boldsymbol{\theta}, -\varepsilon_P\varepsilon_T\varepsilon_C R^{-1}\boldsymbol{v}, \\ &-R^{-1}(\varepsilon_P\varepsilon_C\boldsymbol{a} - \varepsilon_P\boldsymbol{v}a_0), -\varepsilon_C\varepsilon_T a_0, -\varepsilon_C b + \varepsilon_T a_a v_a - \frac{1}{2}\varepsilon_C\varepsilon_T a_0 v_a v_a, \varepsilon_P, \varepsilon_T, \varepsilon_C\Big). \end{aligned} \tag{30}$$

Закон групповой композиции (30) будем считать определением 14-параметрической группы $\tilde{G}$. Ниже описан класс неприводимых проективных представлений группы $\tilde{G}$ (30), соответствующий отличным от нуля значениям инвариантного оператора C_2.

Неприводимые представления алгебры (6)–(10) в конфигурационном пространстве. Неприводимые представления алгебры (6)–(10) можно разделить на три класса, соответствующих следующим значениям инвариантных операторов C_2 и C_3 [4]:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} \quad c_2 = m \neq 0, \qquad c_3 = m^2 s(s+1), \qquad s = 0, 1/2, 1, \ldots;\\
&\text{II.} \quad c_2 = 0, \qquad c_3 = 0;\\
&\text{III.} \quad c_2 = 0, \qquad c_3 = r^2 > 0.
\end{aligned}
$$

В приложении 1 найдены в явном виде все неэквивалентные представления алгебры (6)–(10) в импульсном пространстве.

Для исследования дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея, используем представления алгебры Ли расширенной группы Галилея 1-го класса в пространстве квадратично-интегрируемых функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$. Неприводимые представления 1-го класса задаются тремя числами — ε_0 (собственное значение инвариантного оператора C_1 [13]), m и s. Явный вид соответствующих генераторов P_0, P_a, J_a, G_a и M задается формулами

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon_0, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = m,\\
&J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где S_a — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$, образующие представление $D(s)$ алгебры Ли группы $O(3)$, ε_0 и m — произвольные действительные числа. Можно проверить непосредственным вычислением, что операторы (31) удовлетворяют коммутационным соотношениям (6)–(10). Инвариантные операторы (13) для генераторов (31) принимают вид:

$$
C_1 = 2m\varepsilon_0, \qquad C_2 = m, \qquad C_3 = m^2\boldsymbol{S}^2 = m^2 s(s+1).
$$

Наконец, операторы (31) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$
(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\, \Psi_1^+(t,\boldsymbol{x})\Psi_2(t,\boldsymbol{x}),
\tag{32}
$$

где $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — $(2s+1)$-компонентные функции;

$$
\Psi = \text{столбец}\,(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{2s+1}), \qquad \Psi_\alpha \subset L_2.
$$

Иными словами, операторы (31) образуют эрмитовые неприводимые представления алгебры (6)–(10).

В случае $s=0$ генераторы (31) сводятся к представлению (4), которое реализуется на множестве решений уравнения Шредингера. В общем случае пространство неприводимого представления (31) можно ассоциировать с пространством состояний свободной нерелятивистской частицы с массой m, спином s и внутренней энергией ε_0.

Используя формулу (19), нетрудно найти преобразования волновой функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$, генерируемые операторами (31):

$$
\begin{aligned}
&\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{x}) = \exp(-iP_\mu a^\mu - imb)\exp(-iG_a v_a)\times\\
&\quad\times\exp(-iJ_a\theta_a)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \exp[if(t',\boldsymbol{x}') - imb]D^s(\boldsymbol{\theta})\Psi(t',\boldsymbol{x}'),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где $D^s(\boldsymbol{\theta})$ — числовые матрицы, образующие представление $D(s)$ группы $O(3)$:

$$D^s(\boldsymbol{\theta}) = \exp(-i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta}), \tag{34}$$

а $\boldsymbol{x}'$, t' и $f(t',\boldsymbol{x}')$ заданы формулами (14), (18).

Иногда под преобразованиями Галилея для волновой функции подразумевают переход от $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ к $\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'')$, где $\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'')$ — функция, получаемая из (33) заменой $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}''$, $t\to t''$ [см. (146)]. Делая такую замену в правой части (33), приходим к преобразованию

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi''(t'',\boldsymbol{x}'') = \exp[if(t,\boldsymbol{x}) - imb]D^s(\boldsymbol{\theta})\Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{35}$$

Формулы (14), (33) [или (14), (35)] задают неприводимое представление $D(m, \varepsilon_0, s)$ группы Галилея в конфигурационном пространстве.

Ниже используются также приводимые представления алгебры (6)–(10), базисные элементы которых имеют вид:

$$\begin{gathered} P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ J_a = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \eta_a, \end{gathered} \tag{36}$$

где η_a — числовые матрицы, удовлетворяющие совместно с S_a алгебре Ли однородной группы Галилея:

$$[\eta_a,\eta_b] = 0, \qquad [\eta_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c, \qquad [S_a,S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c. \tag{37}$$

Формулы (36) задают общий вид генераторов группы Галилея в пространстве квадратично-интегрируемых функций: $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ = столбец $(\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_n)$, порождающих локальные преобразования

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi''(t'',\boldsymbol{x}'') = \exp[if(t,\boldsymbol{x}) - imb]D^s(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{38}$$

где $\boldsymbol{x}''$, t'' и $f(t,\boldsymbol{x})$ заданы в (14), (18), а $D(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})$ — числовые матрицы, образующие представление однородной группы Галилея:

$$D(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v}) = \exp(-i\boldsymbol{S\theta})\exp(-i\boldsymbol{\eta v}). \tag{39}$$

Операторы дискретной симметрии. Рассмотрим теперь представления полной группы Галилея $\tilde{G}$, определяемой групповым законом (30).

Если $\varepsilon_P = \varepsilon_T = \varepsilon_C \equiv 1$, то группа $\tilde{G}$ сводится к расширенной: группе Галилея G (21), которая является подгруппой группы $\tilde{G}$. Из (30) следует, что фактор-группа $\tilde{G}/G$ содержит восемь элементов $\{I,P,C,T,PC,PT,CT,CPT\}$, соответствующих значениям параметров ε_T, ε_P, ε_C, $\varepsilon_{PC} = \varepsilon_P\varepsilon_C$, $\varepsilon_{PT} = \varepsilon_P\varepsilon_T$, $\varepsilon_{CT} = \varepsilon_C\varepsilon_T$, $\varepsilon_{CPT} = \varepsilon_P\varepsilon_C\varepsilon_T$, где $\varepsilon_P,\varepsilon_C,\varepsilon_T = \pm 1$. Закон группового умножения для элементов группы $\tilde{G}/G$ можно представить в следующем виде:

Элементы	I	P	T	C	PT	CP	CT	CPT
I	I	P	T	C	PT	CP	CT	CPT
P	P	I	PT	PC	T	C	CPT	CT
T	T	PT	I	CT	P	CPT	C	CP
C	C	CP	CT	I	CPT	P	T	PT
PT	PT	T	P	CPT	I	CT	CP	C
CP	CP	C	CPT	P	CT	I	PT	T
CT	CT	CPT	C	T	CP	PT	I	P
CPT	CPT	CT	CP	PT	C	T	P	I

Будем искать представления группы (30) в пространстве квадратично-интегрируемых функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ со скалярным произведением (32). Рассмотрим только такие представления группы $\tilde{G}$, которые при редукции по G сводятся к представлениям 1-го класса (когда $m \neq 0$). Генераторы группы G для представлений 1-го класса задаются формулами (31), и поэтому остается только определить явный вид операторов P, T и C, которые порождают представление фактор-группы $\tilde{G}/G$.

Из (29), (30) заключаем, что операторы P, T и C должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям с генераторами P_μ, J_a, G_a, M:

$$PJ_a = J_aP, \qquad PP_0 = P_0P, \qquad PM = MP, \tag{40}$$

$$PP_a = -P_aP, \qquad PG_a = -G_aP, \tag{41}$$

$$TJ_a = J_aT, \qquad TP_a = P_aT, \tag{42}$$

$$TP_0 = -P_0T, \qquad TG_a = -G_aT, \qquad TM = -MT, \tag{43}$$

$$CJ_a = -J_aC, \qquad CP_a = -P_aC, \qquad CG_a = -G_aC, \tag{44}$$

$$CP_0 = -P_0C, \qquad CM = -MC. \tag{45}$$

Из (30) следует также, что операторы P, T и C удовлетворяют условиям

$$C^2 = T^2 = P^2 = 1, \qquad CP = PC, \qquad CT = TC, \qquad PT = TP. \tag{46}$$

Поскольку нас интересуют не только точные, но и проективные представления группы (30), то соотношения (46) должны выполняться с точностью до фазового множителя [27]

$$\begin{aligned} &C^2 = \exp(i\varphi_3), \qquad T^2 = \exp(i\varphi_2), \qquad P^2 = \exp(i\varphi_1),\\ &CP = PC\exp(i\varphi_4), \qquad CT = TC\exp(i\varphi_5), \qquad PT = TP\exp(i\varphi_6), \end{aligned} \tag{47}$$

где φ_n — некоторые действительные числа, причем можно положить $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Из (40)–(45) видно, что операторы P, T и C не коммутируют с инвариантными операторами (13) (например, T не коммутирует с C_2), поэтому областью определения операторов P, T и C может служить только пространство приводимого представления алгебры (6)–(10). Генераторы такого представления для $m \neq 0$ можно выбрать в виде прямой суммы генераторов (31) (где для упрощения выкладок положим $\varepsilon_0 = 0$):

$$\begin{aligned} &P_0 = \boldsymbol{P}^2(2M)^{-1}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = \tilde{M},\\ &J_a = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = tp_a - Mx_a, \end{aligned} \tag{48}$$

где S_a — генераторы приводимого представления группы $O(3)$, а M — числовая матрица, коммутирующая с S_a.

Из (40)–(45), (48) следует, что операторы P, T и C удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &Px_a = -x_aP, \qquad Pp_a = -p_aP, \qquad Pt = tP,\\ &Tx_a = x_aT, \qquad Tp_a = p_aT, \qquad Tt = -tT,\\ &Cx_a = x_aC, \qquad Cp_a = -p_aC, \qquad Ct = tC, \end{aligned} \tag{49}$$

где x_a и t — операторы умножения на независимые переменные. Общий вид операторов, удовлетворяющих (49), можно задать формулами

$$\begin{aligned} &P\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r_1\Psi(t,-\boldsymbol{x}),\\ &T\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r_2\Psi(-t,\boldsymbol{x}),\\ &C\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r_3\Psi^*(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{50}$$

где r_a — некоторые числовые матрицы.

Из (40)–(45), (48) и (49) получаем, что матрицы r_a должны удовлетворять следующим условиям:

$$r_0r_2 = -r_2r_0, \qquad r_0^2 = 1, \qquad r_2^2 = 1, \tag{51}$$

$$r_0S_a = S_ar_0, \qquad r_2S_a = S_ar_2, \tag{52}$$

$$r_0r_1 = r_1r_0, \qquad r_1^2 = 1, \qquad r_1r_2 = r_2r_1\exp(i\varphi_6), \qquad r_1S_a = S_ar_1, \tag{53}$$

$$\begin{aligned} &r_3r_1 = r_1^*r_3\exp(i\varphi_5), \qquad r_3r_2 = r_2^*r_3\exp(i\varphi_4),\\ &r_3^2 = \exp(i\varphi_3), \qquad r_3r_0 = r_0^*r_3, \end{aligned} \tag{54}$$

где r_0 — оператор знака массы:

$$r_0 = M\cdot|M|^{-1}. \tag{55}$$

Таким образом, задача описания представлений группы $\tilde{G}$ для $m \neq 0$ сводится к решению системы уравнений (51)–(54) для матриц r_μ и S_a.

Решение системы (51)–(54) приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) неприводимые матрицы, удовлетворяющие системе соотношений (51)–(55), можно пронумеровать набором чисел* $(s,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\eta)$, *где* $s = 0, 1/2, 1, \ldots,\ \varepsilon_\mu, \eta = \pm 1$.

Явный вид соответствующих матриц задается формулами:

при $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned} &r_1 = \eta\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & \varepsilon_3 I\end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}, \qquad r_3 = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & \varepsilon_1 I\end{pmatrix}\Delta_2,\\ &r_0 = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} S_a & 0\\ 0 & S_a\end{pmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{pmatrix} \Delta & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{56}$$

при $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned} &r_1 = \eta\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_3 I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 I\end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ 0 & 0 & I & 0\end{pmatrix},\\ &r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_1 I & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad r_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & -I\end{pmatrix},\\ &S_a = \eta\begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 & 0\\ 0 & S_a & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_a & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_a\end{pmatrix}, \qquad \Delta_4 = \eta\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta\end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{57}$$

при $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_3 = \pm 1$

$$
\begin{gathered}
r_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \\
r_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_0 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0\varepsilon_1 I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
r_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_a \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{58}
$$

где S_a *— генераторы неприводимого представления* $D(s)$ *группы* $O(3)$, 0 *и* I *—* $(2s+1)$*-рядные единичная и нулевая матрицы;* Δ *— матрицы, определяемые с точностью до знака соотношениями [27]*

$$
\Delta s_a = -s_a^* \Delta, \qquad \Delta^2 = (-1)^{2s}. \tag{59}
$$

Доказательство. Рассмотрим соотношения (51) и (52). Используя лемму Шура и принимая во внимание, что представления алгебры (51) можно записать в виде прямой суммы матриц Паули, получаем неприводимые представления соотношений (51), (52) в форме

$$
r_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_a \end{pmatrix}, \tag{60}
$$

где S_a, I и 0 — матрицы, определяемые в формулировке теоремы.

Рассмотрим теперь соотношения (51)–(53). Так как операторы S_a, r_0 и r_2 всегда можно представить в виде прямой суммы матриц (60), нетрудно показать, что $\varphi_6 = \pm\pi$ и что неприводимые решения системы соотношений (51)–(53) задаются формулами (60) и (61):

$$
r_1 = \eta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 I \end{pmatrix}, \qquad \eta = \pm 1. \tag{61}
$$

Наконец, представляя r_1, r_2 и r_0, S_a в виде прямой суммы матриц (56), (57), учитывая соотношения

$$
r_1^* = r_1, \qquad r_2^* = r_2, \qquad r_0^* = r_0
$$

и используя преобразования эквивалентности

$$
r_k \to r_k' = V r_k V^{-1} \quad (k \neq 3), \qquad r_3 \to r_3' = V r_3 (V^{-1})^*,
$$

получаем неприводимые решения соотношений (51)–(54) в виде (56)–(59).

Заметим, что значения параметров ε_μ следующим образом связаны со свойствами матриц r_μ:

$$
r_1 r_2 = \varepsilon_3 r_2 r_1, \qquad r_1 r_3 = \varepsilon_2 r_3 r_1, \qquad r_2 r_3 = \varepsilon_1 r_3 r_2, \qquad r_3^2 = \varepsilon_0 (-1)^{2s}. \tag{62}
$$

Формулы (46), (52)–(54) задают все возможные (с точностью до эквивалентности) представления операторов P, T и C, удовлетворяющих условиям (40)–(45), (47), (48). Из (40)–(45), (47), (48) заключаем, что

$$M = r_0 m. \tag{63}$$

Следовательно, *неприводимые проективные представления полной группы Галилея (30), соответствующие* $m \neq 0$, *нумеруются числами* ε, s, m, ε_μ, η *и задаются формулами (29), (48), (50), (56)–(58), (63).*

Отметим, что представления подгруппы группы $\tilde{G}$ (включающей преобразования (14), (15), (26) и произведение преобразований CT, где C и T заданы в (27) и (28)), найдены в работе [19].

2. Дифференциальные уравнения второго порядка для частиц с произвольным спином

В этом разделе получены два класса галилеевски-инвариантных систем дифференциальных уравнений второго порядка для частиц произвольного спина и дана их лагранжева формулировка.

Постановка задачи. Уравнение Шредингера (1) инвариантно относительно расширенной группы Галилея и описывает движение свободной бесспиновой частицы. Естественно, возникает вопрос, существуют ли уравнения вида

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = H_s(\boldsymbol{p})\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{64}$$

где $H_s(\boldsymbol{p})$ — некоторый дифференциальный оператор, которые, как и уравнение (1), обладают галилеевской симметрией, но описывают частицы с произвольным значением спина. Выводу таких уравнений и посвящен настоящий раздел.

Определение 1. *Уравнение (64) галилеевски-инвариантно, если оператор* $L = i\dfrac{\partial}{\partial t} - H_s(\boldsymbol{p})$ *удовлетворяет условиям (2), где* $\{Q_A\}$ *— совокупность операторов* $\{P_0, P_a, J_a, G_a, M\}$, *удовлетворяющих алгебре (6)–(10).*

Будем искать инвариантные уравнения (64) в пространстве $2(2s+1)$-компонентных квадратично-интегрирующих функций:

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t,\boldsymbol{x}) \\ \Psi_2(t,\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \Psi_{2(2s+1)}(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \qquad \Psi_n \subset L_2. \tag{65}$$

Задачу описания таких уравнений решим в двух, вообще говоря неэквивалентных подходах. В первом подходе (I) задача формулируется следующим образом: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) операторы H_s^{I}, удовлетворяющие условию галилеевской инвариантности (2), если генераторы группы Галилея имеют вид (36), где

$$S_a = \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}, \qquad \eta_a = k(\sigma_1 + i\sigma_2)S_a, \tag{66}$$

s_a — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$, σ_1 и σ_2 — $2(2s+1)$-рядные матрицы Паули:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{67}$$

I и 0 — $(2s+1)$-рядные единичные и нулевые матрицы; k — произвольный комплексный параметр.

Формулы (36), (66) задают самый общий (с точностью до эквивалентности) вид генераторов группы Галилея, соответствующих локальным преобразованиям (38) волновой функции (65).

Ниже покажем, что операторы H_s^{I} всегда можно выбрать такими, чтобы уравнение (64) было инвариантно также относительно произведения преобразований $P\cdot T\cdot C$, где операторы P, T и C заданы в (50) и (56).

Подставляя (36), (64) в (2), убеждаемся, что уравнение (64) удовлетворяет условию галилеевской инвариантности, если гамильтониан H_s^{I} удовлетворяет условиям

$$[H_s^{\mathrm{I}}, P_a] = [H_s^{\mathrm{I}}, J_a] = 0, \tag{68}$$

$$[H_s^{\mathrm{I}}, G_a] = iP_a, \tag{69}$$

где P_a, J_a, G_a — генераторы (36).

Во втором подходе (II) задача сводится к нахождению всех возможных дифференциальных операторов H_s^{II}, таких, чтобы операторы

$$P_0^{\mathrm{II}} = H_s^{\mathrm{II}}, \qquad P_a^{\mathrm{II}} = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M^{\mathrm{II}} = \sigma_1 m,$$
$$J_a^{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a^{\mathrm{II}} = tp_a - Mx_a + \eta_a^{\mathrm{II}} \tag{70}$$

удовлетворяли алгебре (6)–(10). Здесь σ_1 — одна из матриц Паули (67); η_a^{II} — некоторые операторы (явный вид которых нужно найти); S_a — матрицы (66).

Можно показать, что формулы (70) задают самый общий (с точностью до эквивалентности) вид генераторов группы G, соответствующих значениям инвариантных операторов (13) $|c_2| = m$, $c_3 = m^2 s(s+1)$, при котором уравнение (60) инвариантно относительно преобразования $P\cdot T$, где P и T определены в (50), (56) при $\varepsilon_3 = -1$.

Потребуем, чтобы генераторы (70) были эрмитовы относительно обычного принятого в квантовой механике скалярного произведения (32) (где $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — $2(2s+1)$-компонентные функции (65)). Существенное отличие представления (36) от (70) состоит в том, что генераторы H_s^{I} и G_a^{I} оказываются неэрмитовыми относительно (32), но эрмитовыми в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi_1^\dagger \hat{M}\Psi_2, \tag{71}$$

где $\hat{M}$ — некоторый положительно определенный дифференциальный оператор, или относительно индефинитной метрики (71), $\hat{M}$ — некоторая положительно неопределенная числовая матрица. Явный вид $\tilde{M}$ определен ниже. Усложнение метрики — следствие локальных трансформационных свойств (38) функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$.

Потребуем, чтобы гамильтониан H_s^{II} удовлетворял условию

$$\left(H_s^{\mathrm{II}}\right)^2 = \left(m + p^2/2m\right)^2. \tag{72}$$

Это эквивалентно требованию, чтобы внутренняя энергия частицы (собственные значения инвариантного оператора G_1 (13)) совпадала с ее массой.

Итак, задача описания галилеевски-инвариантных уравнений вида (64) сводится к решению системы коммутационных соотношений (68), (69) для операторов H_s^{I} и P_a^{I}, G_a^{I}, J_a^{I}, M^{I} (36), (66) и соотношений (6)–(10) для генераторов (70).

Явный вид гамильтонианов $\boldsymbol{H_s^{\mathrm{II}}}$. Решение задачи 1 приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы H_s^{I}, удовлетворяющие совместно с генераторами (36), (66) коммутационным соотношениям (68), (69), задаются формулами*

$$H_s^{\mathrm{I}} = \sigma_1 a m + 2iak\sigma_3 S_a p_a + \frac{1}{2m} C_{ab} p_a p_b, \tag{73}$$

$$\tilde{H}_s^{\mathrm{I}} = \frac{a}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)m + \sigma_3 \tilde{a} m - 2\tilde{a}k(i\sigma_1 - \sigma_2) S_a p_a + \frac{1}{2m} C_{ab} p_a p_b, \tag{74}$$

где

$$C_{ab} = \delta_{ab} - 2ak^2(\sigma_1 + i\sigma_2)(S_a S_b + S_b S_a), \tag{75}$$

a, $\tilde{a}$ и k — произвольные параметры.

Доказательство. Общий вид гамильтониана H_s^{I} проще найти в представлении, где $\eta_a^{\mathrm{I}} = 0$. Переход к такому представлению осуществляется с помощью преобразования

$$\begin{aligned} &H_s^{\mathrm{I}} \to \left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = V H_s^{\mathrm{I}} V^{-1}, \qquad P_a^{\mathrm{I}} \to \left(P_a^{\mathrm{I}}\right)' = V P_a^{\mathrm{I}} V^{-1} = p_a, \\ &J_a^{\mathrm{I}} \to \left(J_a^{\mathrm{I}}\right)' = V J_a^{\mathrm{I}} V^{-1} = J_a^{\mathrm{I}}, \qquad G_a^{\mathrm{I}} \to \left(G_a^{\mathrm{I}}\right)' = V G_a^{\mathrm{I}} V^{-1} = t p_a - m x_a, \end{aligned} \tag{76}$$

где

$$V = \exp[(i/m)\eta_a p_a] = 1 + (i/m)\eta_a p_a. \tag{77}$$

Преобразование (76), (77) сводит генераторы (36) к прямой сумме генераторов (31).

Из (68), (69) и (76) находим общий вид оператора $\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)'$:

$$\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' = p^2/2m + A, \qquad A = \sigma_\mu a^\mu m, \tag{78}$$

где σ_μ — матрицы (67); a^μ — произвольные комплексные коэффициенты.

Таким образом, в представлении (76) уравнение (64) принимает вид:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi' = \left(p^2/2m + \sigma_\mu a^\mu m\right)\Psi', \qquad \Psi' = V\Psi, \tag{79}$$

а уравнение в исходном Ψ-представлении можно получить из (79) с помощью преобразования, обратного (76), (77).

Покажем, что матрицу A (78) можно свести к одной из следующих форм:

$$A = \sigma_3\tilde{a}m + (a/2)(\sigma_1 - i\sigma_2)m \tag{80}$$

или

$$A = \sigma_1 am, \tag{81}$$

где a, $\tilde{a}$ — произвольные коэффициенты.

Действительно, коэффициент a_0 всегда может быть обращен в нуль с помощью унитарного преобразования

$$\begin{gathered}\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' \to \exp(ia_0mt)\left(H_s^{\mathrm{I}}\right)'\exp(-ia_0mt)+\\ +i\exp(ia_0mt)\frac{\partial}{\partial t}\exp(-ia_0mt) = \left(H_s^{\mathrm{I}}\right)' - a_0m.\end{gathered} \tag{82}$$

Далее имеется три возможности:

$$A \equiv 0, \qquad a_b = 0, \quad b = 1,2,3, \tag{83}$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0, \qquad a_b \neq 0, \tag{84}$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2 \neq 0. \tag{85}$$

Формула (83) совпадает с (80) при $a = \tilde{a} = 0$. Случай (84) соответствует неунитарному представлению расширенной группы Галилея (инвариантный оператор $C_1 = 2mP_0 - P_aP_a = 2m^2A$ задается нильпотентной матрицей) и поэтому должен быть отброшен.

Рассмотрим третью возможность — (85). Пусть $\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2 \neq 0$, тогда преобразование

$$A \to V_1AV_1^{-1}, \qquad V_1 = b + i\sigma_3c + (\sigma_1 + i\sigma_2)d, \quad V_1^{-1} = b - i\sigma_3c - (\sigma_1 + i\sigma_2)d, \tag{86}$$

$$b = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{a_1 + 2d^2}{a_2 - 2id^2}\right), \quad d = \left[\frac{a_3^2(a_1 - ia^2)}{4a(a_1^2 + a_2^2)}\right]^{1/2}, \tag{87}$$

приводит матрицу A (78) к форме (81). Если же $a_1^2 + a_2^2 = 0$, то посредством преобразования $A \to V_2AV_2^{-1}$, где

$$\begin{gathered}V_2 = 1 + (\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{f}{2}, \qquad V_2^{-1} = 1 - (\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{f}{2},\\ f = \begin{cases} a_1/a_3, & \text{если } a_2 = ia_1,\\ 0, & \text{если } a_2 = -ia_1,\end{cases}\end{gathered} \tag{88}$$

матрица (82) приводится к виду (80).

Операторы (86) и (88) удовлетворяют условиям

$$V_\alpha \eta_a V_\alpha^{-1} = \varkappa_\alpha \eta_a, \qquad \alpha = 1,2, \tag{89}$$

где η_a — матрицы (66), а $\varkappa_\alpha$ — числовые коэффициенты, причем $\varkappa_1 = \exp(2i\varphi)$, $\varkappa_2 = 1$, параметр φ задан в (87). Нетрудно убедиться, что не существует оператора, удовлетворяющего одному из условий (89) и преобразующего (80) к форме (81).

Подвергая операторы (78), (80), (81) преобразованию, обратному (76), приходим к гамильтонианам (73), (74). Операторы (73), (74), очевидно, удовлетворяют условиям (68), (69). Кроме того, эти операторы исчерпывают все возможные решения соотношений (36), (66), (68), (69) с точностью до преобразований эквивалентности $H_s^{\mathrm{I}} \to V_\alpha H_s^{\mathrm{I}} V_\alpha^{-1} + i(\partial V_\alpha/\partial t)V_\alpha^{-1}$, где V_α — числовые матрицы (88), не изменяющие согласно (89) общего вида генераторов (36), (66). Итак, теорема доказана.

Таким образом, мы получили галилеевски-инвариантные дифференциальные уравнения в форме (64), (73), (74). Инвариантность этих уравнений относительно преобразований Галилея (14), (38) можно проверить непосредственно. Действительно, используя соотношение (см. (66))

$$\exp(-i\eta_a v_a) = 1 - i\eta_a v_a, \tag{90}$$

получаем, что операторы (73), (74) удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\exp[if(t,\boldsymbol{x})]D(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p})\right]\times \\ \times D^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})\exp[-if(t,\boldsymbol{x})] = i\frac{\partial}{\partial t''} - H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}''),\end{gathered} \tag{91}$$

где $H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}'')$ — гамильтонианы, получаемые из (73), (74) заменой $p_a \to p_a'' = -i\dfrac{\partial}{\partial x_a''}$. Из (91) следует, что $\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'')$ (38) удовлетворяет такому же уравнению, как и непреобразованная функция $\Psi(t,\boldsymbol{x})$:

$$i\frac{\partial}{\partial t''}\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'') = H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}'')\Psi''(t'',\boldsymbol{x}'').$$

Нетрудно убедиться (проще всего это сделать в представлении (76)), что операторы Казимира (13), построенные из генераторов (36), имеют следующие собственные значения: $c_1 = \pm m$, $c_2 = m$, $c_3 = m^2 s(s+1)$. Итак, уравнения (64), (73), (74) можно интерпретировать как уравнения движения свободной нерелятивистской частицы с массой m, спином s и внутренней энергией $\pm m$.

Лагранжева формулировка. Формулы (73), (74) задают нерелятивистские гамильтонианы для частицы с произвольным спином. Эти гамильтонианы определены с точностью до произвольных параметров a, $\tilde{a}$ и k, которые можно выбрать такими, чтобы уравнения (64), (73), (74) были инвариантны относительно антиунитарного преобразования $\Theta^* = P{\cdot}T{\cdot}C$, где операторы P, T и C заданы формулами (50):

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Theta^*\Psi(t,\boldsymbol{x}) = r\Psi^*(-t,-\boldsymbol{x}), \qquad r = r_1 r_2 r_3.$$

Необходимым и достаточным условием такой инвариантности для H_s^{I} или $\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}$ является одновременное выполнение соотношений

$$a^* = \pm a, \quad k^* = \pm k \qquad \text{или} \qquad a = 0, \quad \tilde{a}^* = \tilde{a}, \quad k^* = k. \tag{92}$$

При этом

$$r = \begin{cases} \sigma_3\Delta_2, & \text{если } a^* = -a, \quad k^* = -k \quad \text{или} \quad a = 0, \quad \tilde{a}^* = \tilde{a}, \quad k^* = k, \\ \Delta_2, & \text{если } a^* = a, \quad k^* = k, \end{cases}$$

где Δ_2 — матрицы, заданные в (56), (59).

При ограничениях на параметры a, $\tilde{a}$ и k, задаваемых формулами (92), уравнения (64), (73), (74) инвариантны относительно группы $G \times F$, где F — группа, состоящая из двух элементов: $F = \{\Theta^*, I\}$, где I — тождественное преобразование. Отметим, однако, что эти уравнения неинвариантны относительно каждого из преобразований (50) в отдельности.

Согласно лемме 1 уравнения (64), (73), (74) инвариантны также относительно алгебры Ли группы Шредингера, базисные элементы которой включают помимо генераторов P_a, G_a J_a и M (36) также операторы

$$\begin{aligned} &\hat{P}_0 = \frac{p^2}{2m}, \qquad D = t\hat{P}_0 - x_a p_a + \frac{3i}{2} + \frac{1}{m}\eta_a p_a, \\ &A = t^2\hat{P}_0 - tD - \frac{1}{2}m\boldsymbol{x}^2 + \eta_a x_a. \end{aligned} \tag{93}$$

Операторы P_a, J_a, G_a, M (36) и $\hat{P}_0$, D, A (93) удовлетворяют алгебре (6)–(11).

Гамильтонианы (73), (74) и генераторы (36), (66) неэрмитовы в скалярном произведении (32). Однако гамильтонианы (73) эрмитовы в метрике (71), где положительно определенный оператор $\hat{M}$ равен

$$\hat{M} = V^\dagger V = 1 + [i(k^* - k)\sigma_1 - (k^* + k)\sigma_2]\frac{S_a p_a}{m} + 2k^* k(1 - \sigma_3)\left(\frac{S_a p_a}{m}\right)^2.$$

Кроме того, если параметры a, $\tilde{a}$ и k удовлетворяют условиям (92), гамильтонианы (73), (74) эрмитовы также в индефинитной метрике, когда $\hat{M}$ в (71) имеет вид:

$$\hat{M} = \xi = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если } a^* = a,\ k^* = k \quad \text{или} \quad k^* = k,\ \tilde{a}^* = \tilde{a},\ a = 0, \\ \sigma_2, & \text{если } a^* = -a,\ k^* = -k. \end{cases} \tag{94}$$

Если выполняется (94), то уравнения (64), (73), (74) можно получить из вариационного принципа. Действительно, выбирая лагранжиан $L_0(t, \boldsymbol{x})$ в виде

$$\begin{aligned} L_0(t, \boldsymbol{x}) = {}& \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) - am\bar{\Psi}\sigma_1\Psi + \\ & + a\tilde{k}\left(\bar{\Psi}\sigma_3 S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}\sigma_3 S_a\Psi\right) - \frac{1}{2m}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_b}C_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b}, \qquad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger\xi, \end{aligned} \tag{95}$$

если H_s^{I} задается формулой (73), и

$$\begin{aligned} L_0(t, \boldsymbol{x}) = {}& \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t}\Psi\right) + m\bar{\Psi}\left[\frac{a}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) + a\sigma_3\right]\Psi + \\ & + 2\tilde{a}k\left[\bar{\Psi}(\sigma_2 - i\sigma_1)S_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}(\sigma_2 - i\sigma_1)S_a\Psi\right] - \frac{1}{2m}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}C_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b}, \end{aligned} \tag{96}$$

если гамильтониан имеет вид (74), можно убедиться, что уравнения Лагранжа–Эйлера для функций (95), (96) совпадают с уравнениями (64), (73), (74) для $\bar{\Psi}(t, \boldsymbol{x})$. Для $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ получаем уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi} = \left[H_s^{\mathrm{I}}\right]^T \bar{\Psi},$$

где $\left[H_s^{\mathrm{I}}\right]^T$ — операторы, которые можно получить из (73), (74) с помощью операции транспонирования всех входящих в H_s^{I} и $\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}$ матриц.

Кроме того, легко показать, что формулы (95), (96) задают действительные функции от Ψ, $\bar{\Psi}$ и их первых производных, инвариантные относительно преобразований Галилея (38), (66), и, следовательно, $L_0(t, \boldsymbol{x})$ можно интерпретировать как лагранжиан свободной нерелятивистской частицы с произвольным спином s.

Явный вид гамильтонианов $\boldsymbol{H_s^{\mathrm{II}}}$. Найдем теперь дифференциальные операторы H_s^{II}, удовлетворяющие совместно с генераторами (70) соотношениям (6)–(10), (72).

Теорема 4. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы H_s^{II}, эрмитовые в метрике (32) и удовлетворяющие условиям (6)–(10), (70), (72), задаются формулами*

$$\begin{aligned} H_s^{\mathrm{II}} = \sigma_1 &\left[m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{ms^2}\sin^2\theta_s\right] + \\ &+\sigma_2\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} - \sigma_3\left[a_s\frac{p^2}{2m} + b_s\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2ms^2}\right], \end{aligned} \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{1/2} = \sin 2\theta_{1/2}, \qquad b_{1/2} = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = \sin 2\theta_1, \\ &a_{3/2} = b_{3/2} - \frac{5}{4}\sin 2\theta_{3/2} = -\frac{1}{8}\sin 2\theta_{3/2} - \frac{3}{4}\sin\theta_{3/2}\left(1 - \frac{1}{9}\sin\theta_{3/2}\right)^{1/2}, \\ &a_s = b_s = \theta_s = 0, \qquad s > 3/2, \end{aligned} \tag{98}$$

а $\theta_{1/2}$, θ_1, $\theta_{3/2}$ — произвольные действительные параметры.

Доказательство. Сначала покажем, что операторы H_s^{II} могут включать производные не выше второго порядка. Действительно, пусть $H_s^{\mathrm{II}} = \sum\limits_{i=0}^{N} H_i$, где H_i содержит производные только i-го порядка. Тогда из (72) получаем:

$$H_N H_N = H_N^\dagger H_N = 0 \qquad \text{или} \qquad H_N = 0, \quad \text{если} \quad N > 2. \tag{99}$$

Представим искомые дифференциальные операторы H_s^{II} в виде разложения по спиновым матрицам и $2(2s+1)$-рядным матрицам Паули (67):

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sum_{\mu=0}^{3}\left(a_\mu m + b_\mu\frac{p^2}{2m} + c_\mu\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + d_\mu\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m}\right)\sigma_\mu, \tag{100}$$

где a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные действительные коэффициенты. Используя операторы ортогонального проектирования [16, 17]

$$\Lambda_r = \prod_{r'\neq r}\frac{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})p^{-1} - r'}{r - r'}, \qquad r, r' = -s, -s+1, \ldots, s,$$

удовлетворяющие условиям ортогональности и полноты

$$\Lambda_r \Lambda_{r'} = \delta_{rr'} \Lambda_r, \qquad \sum_r \Lambda_r = 1, \qquad \sum_r r^k \Lambda_r = \left(\frac{\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}}{p} \right)^k,$$

формулу (100) можно переписать в виде

$$H_s^{\mathrm{II}} = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{r=-s''}^{s'} \left[a_\mu m + \left(b_\mu + r^2 d_\mu \right) \frac{p^2}{2m} + r p c_\mu \right] \sigma_\mu \Lambda_r. \tag{101}$$

Операторы (101), очевидно, удовлетворяют условиям (68). Потребуем, чтобы выполнялось (77). Подставляя (101) в (72), используя ортогональность проекторов Λ_r и приравнивая независимые слагаемые, получаем, что a_r, b_r, c_r и d_r должны удовлетворять одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} \left[r^2 c_i^2 + a_i \left(b_i + r^2 d_i \right) \right] = 1, \\ \sum_{i=1}^{3} c_i r \left(b_i + r^2 d_i \right) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} r c_i a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \left(b_i + r^2 d_i \right)^2 = 1 \end{gathered} \tag{102}$$

или

$$a_0 = b_0 = 1, \qquad d_0 = c_0 = a_i = b_i = c_i = d_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{103}$$

Общее решение системы алгебраических уравнений (102) (с точностью до линейных преобразований эквивалентности) задается формулами

$$\begin{aligned} & a_1 = 1, \qquad a_0 = a_2 = a_3 = 0, \\ & b_1 = 1, \qquad b_3 = a_s, \qquad b_0 = b_2 = 0, \\ & c_2 = \frac{\sqrt{2} \sin \theta_{s'}}{s^2}, \qquad c_0 = c_1 = c_3 = 0, \\ & d_1 = -(c_2)^2, \qquad d_3 = \frac{b_s}{s^2}, \qquad d_0 = d_2 = 0, \end{aligned} \tag{104}$$

где a_s, b_s, θ_s заданы в (98). Можно показать, что уравнения (103) несовместны с (6)–(10).

Подставив (104) в (100), приходим к гамильтонианам (97). Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь указать явный вид операторов η_a^{II}, при котором операторы (70) удовлетворяют соотношениям (10), (57). Нетрудно убедиться, что η_a^{II} можно выбрать в форме

$$\eta_a^{\mathrm{II}} = [U, \sigma_1 x_a m] U^\dagger, \tag{105}$$

где

$$U = \frac{E + H_s^{\mathrm{II}} \sigma_1}{\sqrt{2E \left[2E - \left(\frac{pr}{ms} \sin \theta_s \right)^2 \right]}} \Lambda_r, \qquad E = m + \frac{p^2}{2m} \tag{106}$$

есть оператор, диагонализующий гамильтонианы (97) и генераторы (70):

$$\begin{aligned} &U^{+}H_{s}^{\mathrm{II}}U=\sigma_{1}E, \qquad U^{+}G_{a}^{\mathrm{II}}U=tp_{a}-\sigma_{1}mx_{a}, \\ &U^{+}J_{a}^{\mathrm{II}}U=J_{a}^{\mathrm{II}}, \qquad U^{+}P_{a}^{\mathrm{II}}U=P_{a}^{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{107}$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили гамильтонианы нерелятивистской частицы со спином s в виде (97). Уравнения (64) с гамильтонианами H_s^{II} инвариантны относительно алгебры Ли расширенной группы Галилея (70), а значит, и относительно алгебры Ли группы Шредингера, базисные элементы которой задаются формулами (12), (70). Эти уравнения инвариантны также относительно дискретного преобразования $\Theta = P \cdot T$, где P и T определены в (50)

$$\Psi(r,\boldsymbol{x}) \to \Theta\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \sigma_2\Psi(-t,-\boldsymbol{x}). \tag{108}$$

Здесь σ_2 — одна из матриц (67). Можно показать, что уравнения (64), (97) инвариантны относительно каждого из преобразований (50), но только в том случае, если r_a задаются не числовыми матрицами, но некоторыми интегродифференциальными операторами.

Отметим, что в случае $s = 1/2$, $\theta_{1/2} = \pi/4$, $k = -i$, $a = 1$ уравнения (64), (73) и (64), (97) можно записать в компактной форме:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi(t,\boldsymbol{x}) = i\gamma_4\frac{p^2}{2m}\Psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{109}$$

и

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,\Psi(t,\boldsymbol{x}) = (1+\gamma_4-\gamma_0)\frac{p^2}{2m}\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{110}$$

где

$$\gamma_0 = \sigma_1, \qquad \gamma_a = -2i\sigma_2 S_a, \qquad \gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

суть матрицы Дирака.

Уравнения (109), (110) отличаются от релятивистского уравнения Дирака только наличием слагаемых в правой части, которые, очевидно, нарушают инвариантность относительно группы Пуанкаре, но обеспечивают инвариантность соответствующих уравнений относительно группы Галилея.

Для решения конкретных задач с использованием полученных выше уравнений может понадобиться явный вид матриц S_a, входящих в гамильтонианы H_s^{I} и H_s^{II}. Матричные элементы генераторов S_a в базисе Гельфанда–Цетлина [28] приведены в формулах (149), (150). Приведем также уравнения (64), (73) для $s = 1/2, 1$ в покомпонентной записи:

1. $s = 1/2$, $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — столбец $(\Phi_1,\Phi_2,\chi_1,\chi_2)$,

$$\begin{aligned} &\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{p^2}{2m}\right)\Phi = am\chi + iak\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\Phi - \frac{a^2k^2}{2m}p^2\chi, \\ &\left(i\frac{p}{\partial t}-\frac{p^2}{2m}\right)\chi = am\Phi - iak\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi, \end{aligned} \tag{111}$$

где Φ и χ — двухкомпонентные спиноры:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

σ_a — матрицы Паули.

2. $s = 1$, $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ — столбец $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$,

$$\begin{gathered} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\boldsymbol{\Phi} = am\boldsymbol{\chi} - 2ak\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Phi} - \frac{ak^2}{m}\left[p^2\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\chi})\right], \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2m}\right)\boldsymbol{\chi} = am\boldsymbol{\Phi} + 2ak\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\chi}, \end{gathered} \tag{112}$$

где $\boldsymbol{\chi}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ — векторы с компонентами χ_1, χ_2, χ_3 и Φ_1, Φ_2, Φ_3. Уравнения (112) совпадают с (64), (73), если матричные элементы генераторов S_a выбрать в виде

$$(S_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}, \tag{113}$$

где ε_{abc} — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга.

3. Уравнения первого порядка

Здесь рассматриваются системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами, т. е. уравнения вида

$$L\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad L = \beta_\mu p^\mu + \beta_5 m, \tag{114}$$

где $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ — вектор-столбец:

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \Psi_2(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \Psi_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \qquad n < \infty,$$

β_μ, β_5 — некоторые числовые матрицы.

Имеется хорошо разработанная теория уравнений вида (114), инвариантных относительно преобразований из группы $O(3)$ и группы Лоренца [28], и в то же время мало изучены системы дифференциальных уравнений первого порядка, инвариантные относительно группы Галилея.

Построению галилеевски-инвариантных систем дифференциальных уравнений первого порядка для частиц с произвольным спином посвящен этот раздел. Среди полученных ниже уравнений имеются такие, которые, в отличие от уравнений ЛХГ, описывают спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействие частицы с полем.

Основные определения и постановка задачи. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений (114) и определим условия, которым должны удовлетворять матрицы β_μ, β_5 чтобы эти уравнения были инвариантными относительно преобразований Галилея.

Обобщая свойства симметрии уравнения Шредингера (1), будем говорить, что уравнение (114) инвариантно относительно группы Галилея, если оператор L (114) удовлетворяет условиям (2), где Q_A — генераторы произвольного представления расширенной группы Галилея. Потребуем, чтобы генераторы группы Галилея на множестве решений уравнения (114) имели локально-ковариантную форму (36), а операторы f_A задавались числовыми матрицами (в этом и только в этом случае конечные преобразования Галилея для $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ имеют локальную форму (38). Тогда условие галилеевской инвариантности можно сформулировать следующим образом.

Определение 2. *Уравнение (114) локально-инвариантно относительно группы Галилея, если оператор L (114) удовлетворяет условиям*

$$\tilde{J}_a L - L J_a = 0, \qquad \tilde{G}_a L - L G_a = 0, \tag{115}$$

где J_a, G_a и $\tilde{J}_a$, $\tilde{G}_a$ — генераторы расширенной группы Галилея в представлении (36):

$$\begin{aligned} J_a &= (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad & G_a &= tp_a - mx_a + \eta_a, \\ \tilde{J}_a &= (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + \tilde{S}_a, \qquad & \tilde{G}_a &= tp_a - mx_a + \tilde{\eta}_a, \end{aligned} \tag{116}$$

а S_a, η_a (и $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$) — матрицы, образующие представления (в общем случае неэквивалентные) алгебры Ли однородной группы Галилея (37).

Подставив генераторы (116) и оператор L из (114) в (115), получаем условие локальной галилеевской инвариантности уравнений (114) в виде следующих соотношений для матриц β_k $(k = 0, 1, 2, 3, 5)$:

$$\begin{aligned} &\tilde{S}_a \beta_0 - \beta_0 S_a = 0, \qquad \tilde{S}_a \beta_5 - \beta_5 S_a = 0, \qquad \tilde{\eta}_a \beta_0 - \beta_0 \eta_a = 0, \\ &\tilde{\eta}_a \beta_5 - \beta_5 \eta_a = -i\beta_a, \qquad \tilde{\eta}_a \beta_b - \beta_b \eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \end{aligned} \tag{117}$$

где S_a, η_a и $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ — матрицы, удовлетворяющие алгебре (37).

Таким образом, задачу описания галилеевски-инвариантных уравнений первого порядка вида (114) можно свести к решению матричных уравнений (37), (117).

Особый интерес для физики представляют уравнения, допускающие лагранжеву формулировку. Исследуем дополнительные ограничения, налагаемые на матрицы β_k, S_a, η_a, $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ требованием, чтобы уравнение (114) могло быть получено при использовании принципа минимального действия из соответствующим образом подобранного лагранжиана. Для этого сформулируем сначала следующее утверждение, которое позволяет выделить классы эквивалентных галилеевски-инвариантных уравнений (114).

Лемма 2. *Пусть η_a, S_a, $\tilde{\eta}_a$, $\tilde{S}_a$, β_k — совокупность матриц, удовлетворяющих условиям (37), (117). Тогда матрицы*

$$\begin{aligned} &\beta'_k = B\beta_k, \qquad S'_a = S_a, \qquad \eta'_a = \eta_a, \\ &\tilde{\eta}'_a = B\eta_a B^{-1}, \qquad \tilde{S}'_a = B\tilde{S}_a B^{-1}, \end{aligned} \tag{118}$$

где B — произвольная невырожденная матрица, также удовлетворяют уравнениям (37), (117).

Для доказательства леммы достаточно умножить каждое из уравнений (117) слева на матрицу B и воспользоваться соотношением $B^{-1}B = 1$.

Согласно лемме 2, каждое решение системы соотношений (117) определяет целый класс уравнений, локально инвариантных относительно группы Галилея

$$B(\beta_\mu p^\mu + \beta_5 m)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{119}$$

где B — произвольная невырожденная матрица.

Потребуем, чтобы уравнения (114) допускали лагранжеву формулировку. Общий вид лагранжиана, соответствующего уравнению (114) (с точностью до членов, не вносящих вклада в уравнения движения), задается формулой

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\beta_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\beta_\mu \Psi\right) - \bar{\Psi}\beta_5 m\Psi, \tag{120}$$

где $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger B$, а B — некоторая неособенная матрица. Из условия вещественности лагранжиана получаем, что

$$(B\beta_\mu)^\dagger = B\beta_\mu, \qquad (B\beta_5)^\dagger = B\beta_5. \tag{121}$$

В силу леммы 2 и с учетом (121) делаем вывод, что матрицы β_μ, β_5 можно выбрать эрмитовыми (что соответствует лагранжиану (120) с $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger$). Но тогда из требования инвариантности лагранжиана относительно инфинитезимальных преобразований

$$\Psi \to (1 + iG_a v_a)\Psi, \qquad \Psi \to (1 + iJ_a\theta_a)\Psi, \tag{122}$$

где G_a и J_a заданы формулами (116), получаем следующие условия для матриц $\tilde{S}_a$ и $\tilde{\eta}_a$ из (117):

$$\tilde{S}_a = S_a^\dagger, \qquad \tilde{\eta}_a = \eta_a^\dagger. \tag{123}$$

Подставляя (123) в (117) и принимая во внимание эрмитовость матриц S_a приходим к системе уравнений

$$S_a\beta_0 - \beta_0 S_a = 0, \tag{124}$$

$$S_a\beta_5 - \beta_5 S_a = 0, \tag{125}$$

$$\eta_a^\dagger\beta_0 - \beta_0\eta_a = 0, \tag{126}$$

$$\eta_a^\dagger\beta_5 - \beta_5\eta_a = -i\beta_a, \tag{127}$$

$$\eta_a^\dagger\beta_b - \beta_b\eta_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \tag{128}$$

$$\beta_k^\dagger = \beta_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 5. \tag{129}$$

Итак, мы получили, что задача описания галилеевски-инвариантных уравнений вида (114), допускающих лагранжеву формулировку, эквивалентна решению системы уравнений (37), (124)–(129) для матриц β_k, S_a, η_a.

Сформулируем еще одно утверждение, используемое ниже при вычислении явного вида матриц β_k.

Лемма 3. *Пусть матрицы S_a, η_a, β_k удовлетворяют соотношениям (37), (124)–(129). Тогда совокупность матриц $\{S_a, \eta_a, \beta'_k\}$, где*

$$\beta'_k = V^\dagger\beta_k V, \tag{130}$$

где V — произвольная матрица, коммутирующая с S_a и η_a:

$$[V, S_a] = [V, \eta_a] = 0, \tag{131}$$

также удовлетворяет уравнениям (37), (124)–(129).

Доказательство. Умножим каждое из соотношений (124)–(129) слева на $V^{\dagger}$, а справа на V. В результате, учитывая (131), приходим к уравнениям (124)–(129) для β'_k, определяемых формулой (130).

Если матрица V обратима, то β_k и β'_k являются эквивалентными решениями системы соотношений (124)–(129). Будем искать решения этих соотношений с точностью до преобразований эквивалентности, задаваемых формулами (130), (131).

Каноническая форма уравнений (114). Прежде чем приступать к решению системы соотношений (37), (124)–(129), исследуем некоторые свойства уравнений (114), которые можно вывести, не используя явный вид матриц β_k.

Хорошо известно (см. [29]), что релятивистские волновые уравнения вида (114) (где β_5 — обратимая матрица) могут быть приведены к стандартной (канонической) форме (включающей только одну матрицу $\beta'_0 = \beta_5^{-1}\beta_0$):

$$\beta'_0\sqrt{p_\mu p^\mu}\Psi = m\Psi.$$

Покажем, что галилеевски-инвариантные уравнения (114) также приводятся к некоторой канонической форме (в которой оператор L выражается только через две матрицы — β_0 и β_5). Для этого подвергнем функцию $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ из (144) преобразованию $\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{x}) = V^{-1}\Psi(t,\boldsymbol{x})$, где

$$V = \exp(-i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{p}/m). \tag{132}$$

Функция $\Psi'(t,\boldsymbol{x})$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$L'\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad L' = V^{\dagger}LV, \tag{133}$$

где L — оператор (114).

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\begin{aligned} &\exp(A^{\dagger})B\exp(A) = \sum\{A,B\}^n\frac{1}{n!},\\ &\{A,B\}^n = [A^{\dagger}\{A,B\}^{n-1}], \qquad \{A,B\}^0 = B \end{aligned} \tag{134}$$

и коммутационные соотношения (124)–(128), получаем:

$$\begin{aligned} &V^{\dagger}\beta_0 V = \beta_0, \qquad V^{\dagger}\beta_a p_a V = \beta_a p_a + \beta_0\frac{p^2}{m},\\ &V^{\dagger}\beta_5 V = \beta_5 + \frac{1}{m}\beta_a p_a + \frac{1}{2m}\beta_0 p^2, \end{aligned} \tag{135}$$

откуда

$$L' = V^{\dagger}(\beta_0 p_0 - \beta_a p_a + \beta_5 m)V = \beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_5 m. \tag{136}$$

Подставляя (136) в (133), приходим к уравнению в канонической форме:

$$\left[\beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_5 m\right]\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = 0. \tag{137}$$

Итак, произвольное галилеевски-инвариантное уравнение первого порядка (114) можно преобразовать к системе уравнений второго порядка в форме (137) (для уравнений АХГ [5–7] этот факт был установлен в работе [11]). Однако уравнения (114) и (137) становятся неэквивалентными после введения минимального взаимодействия с внешним электромагнитным полем (т.е. после замены $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$, где A_μ — 4-вектор-потенциал электромагнитного поля).

Уравнения (137) имеют форму явно инвариантную относительно преобразований Галилея. Генераторы группы Галилея на решениях уравнений (137) имеют квазидиагональный вид, задаваемый формулами (31), где S_a — генераторы некоторого приводимого представления группы $O(3)$, коммутирующие с матрицами β_0 и β_5.

Используя представление (137), сформулируем еще одно дополнительное требование, которое будет налагаться на матрицы β_k. А именно, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\det\left(\beta_\mu p^\mu + \beta_5 m\right) \equiv \det\left[\beta_0\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right) + \beta_5 m\right] = c\left(p_0 - \frac{p^2}{2m}\right)^n, \qquad (138)$$

где c — некоторая не равная нулю константа; n — целое число ($n \neq 0$).

Условие (138) означает, что уравнение (114) принадлежит параболическому типу.

Конечномерные представления алгебры Ли однородной группы Галилея. Приступим к решению системы соотношений (37), (124)–(129).

Рассмотрим сначала соотношения (37), определяющие алгебру Ли однородной группы Галилея, которая локально-изоморфна группе Евклида $E(3)$. Каждое решение соотношений (37), т. е. каждый набор конечномерных матриц S_a и η_a, удовлетворяющих (37), задает представление этой алгебры.

Группа $E(3)$ не является полупростой, поэтому ее конечномерные представления неунитарны и не вполне приводимы. Описанию неразложимых конечномерных представлений алгебры Ли группы $E(3)$ посвящена работа [30]. Однако результаты, полученные в ней, имеют весьма общую и, по-видимому, не очень конструктивную форму. Кроме того, не все из приведенных в [30] представлений являются неэквивалентными.

Ниже конструктивно описан класс конечномерных представлений алгебры (37). Алгебра (37) имеет два инвариантных оператора

$$D_1 = S_a\eta_a, \qquad D_2 = \eta_a\eta_a, \qquad (139)$$

которые в случае конечномерных представлений являются нильпотентными матрицами, т.е. удовлетворяют условиям

$$D_1^N = D_2^{N'} = 0, \qquad (140)$$

где N и N' — некоторые положительные целые числа.

Алгебра (37) включает подалгебру $O(3)$, образуемую матрицами S_a. Представления этой подалгебры хорошо известны и задаются целым или полуцелым числом s.

Рассмотрим только такие представления алгебры (37), которые при редукции по алгебре $O(3)$ включают не более двух неэквивалентных представлений. В этом случае матрицы S_a можно выбрать в виде

$$S_a = S_a^{nm} = \left(\begin{array}{c|c} I_n \otimes \hat{S}_a & \hat{0}^\dagger \\ \hline \hat{0} & I_m \otimes \Sigma_a \end{array}\right), \qquad (141)$$

где $\hat{S}_a$ и Σ_a — генераторы неприводимых представлений $D(s)$ и $D(s')$ группы $O(3)$, т.е. матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\varepsilon_{abc}s_c, \qquad s_a s_a = s(s+1), \\ &[\Sigma_a, \Sigma_b] = i\varepsilon_{abc}\Sigma_c, \qquad \Sigma_a\Sigma_a = s'(s'+1), \end{aligned} \tag{142}$$

I_n и I_m — единичные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$, $\hat{0}$ — нулевые матрицы с размерностью $m \times n$, а символ $A \otimes B$ означает прямое (кронекеровское) произведение матриц. Ограничимся также случаем, когда пространство представления алгебры $E(3)$ включает не более двух ортогональных подпространств, инвариантных относительно действия оператора (139). Описание указанных выше представлений дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) неразложимые конечномерные представления алгебры $E(3)$ (37), включающие не более двух неэквивалентных представлений подалгебры $O(3)$ и удовлетворяющие дополнительному требованию, чтобы инвариантный оператор D_1 (139) имел не более двух ортогональных собственных подпространств, можно пронумеровать набором целых чисел (n, m, α), где*

$$\alpha = 1, 2, \quad n \leq 4, \quad m \leq 4, \quad |n - m| \leq 2, \quad nm \neq 9.$$

Явный вид соответствующих матриц S_a и η_a задается формулами

$$\begin{aligned} &S_a = S_a^{(nm\alpha)} = S_a^{nm}, \qquad \eta_a = \eta_a^{(nm\alpha)}, \\ &\eta_a^{(nm1)} = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c} a_1^{nm} \otimes \hat{S}_a & a_2^{nm} \otimes K_a \\ \hline a_3^{nm} \otimes K_a^\dagger & a_4^{nm} \otimes \Sigma_a \end{array}\right), \qquad \eta_a^{(nm2)} = \left[\eta_a^{(nm1)}\right]^\dagger, \end{aligned} \tag{143}$$

где S_a^{nm} — матрицы (141); $s' = s - 1$; K_a — матрицы размерности $(2s-1) \times (2s+1)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} &K_a\hat{S}_b - \Sigma_b K_a = i\varepsilon_{abc}K_c, \\ &\hat{S}_a\hat{S}_b + K_a^\dagger K_b = is\varepsilon_{abc}\hat{S}_c + s^2\delta_{ab}, \end{aligned} \tag{144}$$

a_l^{nm} — матрицы с матричными элементами

$$\begin{aligned} &[a_1^{nm}]_{ij} = \begin{cases} \delta_{i-1,j}, & n \geq m,\ i, j, \leq n, \\ \dfrac{s-1}{s+1}\delta_{i-1,j}, & n < m, \end{cases} \\ &[a_2^{nm}]_{ij} = \begin{cases} -(2s-1)^{-1/2}\delta_{i-2,j}, & n > m,\ i \leq n,\ j \leq m, \\ (2s+1)^{-1/2}\delta_{i,j}, & n < m, \\ k\delta_{i,j+1}, & n = m, \end{cases} \\ &[a_3^{nm}]_{ij} = \begin{cases} (2s-1)^{-1/2}\delta_{i,j}, & n > m,\ i \leq m,\ j \leq n, \\ (2s+1)^{-1/2}\delta_{i-2,j}, & n \leq m, \end{cases} \\ &[a_4^{nm}]_{ij} = \begin{cases} \dfrac{s+1}{s-1}\delta_{i-1,j}, & n \geq m, \\ \delta_{i-1,j}, & n < m \end{cases} \end{aligned} \tag{145}$$

где k — произвольный параметр.

Представления $D(n,m,\alpha=1)$ и $D(n,m,\alpha=2)$ эквивалентны в том и только в том случае, если $|n-m|=1$.

Доказательство. Полное доказательство теоремы здесь не приведено. Однако следует заметить, что формулы (143) определяют общий вид матриц η_a, удовлетворяющих перестановочным соотношениям $[\eta_a, S_a] = i\varepsilon_{abc}\eta_c$ генераторами (141). Потребуем, чтобы матрицы η_a (143) коммутировали друг с другом, и используем соотношения [7]:

$$
\begin{aligned}
&K_a\hat{S}_b - K_b\hat{S}_a = i(s+1)\varepsilon_{abc}K_c,\\
&\Sigma_a K_b - \Sigma_b K_a = i(1-s)\varepsilon_{abc}K_c,\\
&K_a K_b^\dagger - K_b K_a^\dagger = -i(2s+1)\varepsilon_{abc}\Sigma_c,\\
&K_a^\dagger K_b - K_b^\dagger K_a = i(2s-1)\varepsilon_{abc}\hat{S}_c,
\end{aligned}
\tag{146}
$$

тогда получим следующую систему уравнений для матриц a_l^{nm}:

$$
\begin{aligned}
&(a_1^{nm})^2 + (2s-1)a_2^{nm}a_3^{nm} = 0,\\
&(s+1)a_1^{nm}a_2^{nm} - (s-1)a_2^{nm}a_4^{nm} = 0,\\
&(s+1)a_3^{nm}a_1^{nm} - (s-1)a_4^{nm}a_3^{nm} = 0,\\
&(a_4^{nm})^2 - (2s+1)a_3^{nm}a_2^{nm} = 0.
\end{aligned}
\tag{147}
$$

Условие, чтобы инвариантный оператор D_1 (139) имел не более двух инвариантных собственных подпространств, сводится к требованию, чтобы матрицы a_1^{nm} и a_3^{nm} не были вполне приводимыми.

Все неэквивалентные решения соотношений (147) и задаются формулами (142), (145). При этом большее из чисел (n,m) совпадает с индексом нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139).

Приведем для полноты явный вид матриц S_a и K_a в базисе $|s,s_3\rangle$, в котором операторы $\boldsymbol{S}^2$ и S_3 диагональны [7]:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}^2|s,s_3\rangle = s(s+1)|s,s_3\rangle, \qquad S_3|s,s_3\rangle = s_3|s,s_3\rangle,\\
&S_1|s,s_3\rangle = a^s_{s_3,s_3+1}|s,s_3+1\rangle + a^s_{s_3,s_3-1}|s,s_3-1\rangle,\\
&S_2|s,s_3\rangle = ia^s_{s_3,s_3+1}|s,s_3+1\rangle - ia^s_{s_3,s_3-1}|s,s_3-1\rangle,\\
&K_1|s,s_3\rangle = C^{s,s-1}_{s_3}|s-1,s_3\rangle + C^{s,s-1}_{s_3,s_3-2}|s-1,s_3-2\rangle,\\
&K_2|s,s_3\rangle = iC^{s,s-1}_{s_3}|s-1,s_3\rangle - iC^{s,s-1}_{s_3,s_3-2}|s-1,s_3-2\rangle,\\
&K_3|s,s_3\rangle = f^{s,s-1}_{s_3}|s-1,s_3\rangle,
\end{aligned}
\tag{148}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&s_3 = -s,-s+1,\ldots,s, \qquad a^s_{s_3,s_3\pm1} = \frac{1}{2}\sqrt{s_3(s_3\pm1) - s(s+1)},\\
&f^{s,s-1}_{s_3} = \sqrt{s_3(2s-s_3)}, \qquad C^{s,s-1}_{s_3} = \frac{1}{2}\sqrt{(2s-s_3)(2s+1-s_3)},\\
&C^{s,s-1}_{s_3,s_3-2} = \frac{1}{2}\sqrt{s_3(s_3+1)}.
\end{aligned}
\tag{149}
$$

Выражения для матриц Σ_a можно получить из формул (148), (149) заменой $s\to s'$, $s'=s-1$.

Явный вид матриц $\boldsymbol{\beta_k}$. При решении системы уравнений (37), (124)–(129) ограничимся случаем, когда матрицы S_a и η_a реализуют неразложимые представления алгебры (37), описанные в теореме 5.

Рассмотрим сначала представления алгебры (37), соответствующие $N \leq 3$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139). Потребуем, чтобы матрицы β_k удовлетворяли условию (138).

Решение задачи приведем в виде следующего утверждения.

Теорема 6. *Все возможные (с точностью до эквивалентности) маьрицы β_k, S_a, η_a, удовлетворяющие соотношениям (124)–(129), (138)–(140) (с $N \leq 3$) и условиям теоремы 5, задаются формулами (150)–(153):*

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} I & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & I & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & c^{-2}I \end{array}\right),$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \hat{S}_a & c^{-1}K_a^{\dagger} \\ \hline -\hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline -c^{-1}K_a & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad S_a = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \hat{S}_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \tag{150}$$

$$\eta_a = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline cK_a & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad c = (2s-1)^{-1/2};$$

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c|c} d^{-2}I & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right),$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & -d^{-1}K_a^{\dagger} & \cdot \\ \hline d^{-1}K_a & \cdot & \Sigma_a \\ \hline \cdot & -\Sigma_a & \cdot \end{array}\right), \qquad S_a = \left(\begin{array}{c|c|c} \hat{S}_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \Sigma_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \tag{151}$$

$$\eta_a = \frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c} \cdot & dK_a^{\dagger} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \Sigma_a & \cdot \end{array}\right), \qquad d = (2s+1)^{-1/2};$$

$$\beta_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \quad \beta_5 = 2\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \frac{a^2}{2}I & aI & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{a^2}{2}I & aI & I & \cdot & \cdot \\ \hline aI & I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & -a\hat{1} & (s-1)\hat{1} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & (s-1)\hat{1} & \cdot \end{array}\right), \tag{152}$$

$$\beta_a = \frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & S_a & \cdot & c(s-1)K_a^{\dagger} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & csK_a^{\dagger} & \cdot \\ \hline -S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & -csK_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline -c(s-1)K_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right),$$

$$S_a=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & S_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & S_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \quad \eta_a=\frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & S_a & \cdot & -cK_a^\dagger & \cdot \\ \hline cK_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & cK_a & \cdot & \frac{s+1}{s-1}\Sigma_a & \cdot \end{array}\right);$$

$$\beta_0=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \hat{1} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \hat{1} & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \quad \beta_5=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} bI & (s+1)I & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline (s+1)I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b^2}{2} & b\hat{1} \\ \hline \cdot & \cdot & \frac{b^2}{2}\hat{1} & b\hat{1} & \hat{1} \\ \hline \cdot & \cdot & b\hat{1} & \hat{1} & \cdot \end{array}\right),$$

$$\beta_a=\frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot & -dsK_a^\dagger & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & -d(s+1)K_a^\dagger & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & d(s+1)K_a & \cdot & \cdot & \Sigma_a \\ \hline dsK_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & -\Sigma_a & \cdot & \cdot \end{array}\right), \tag{153}$$

$$S_a=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} S_a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & S_a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma_a \end{array}\right), \quad \eta_a=\frac{1}{2s}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & dK_a^\dagger & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{s-1}{s+1}S_a & \cdot & \cdot & dK_a^\dagger & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot & \cdot \\ \hline dK_a & \cdot & \cdot & \Sigma_a & \cdot \end{array}\right),$$

где символами S_a, Σ_a и K_a обозначены матрицы размерности $(2s+1)\times(2s+1)$, $(2s-1)\times(2s-1)$ и $(2s-1)\times(2s+1)$, определяемые соотношениями (144), (146), 1 и $\hat{1}$ — $(2s+1)$- и $(2s-1)$-рядные единичные матрицы, а точками — нулевые матрицы соответствующей размерности; a и b — произвольные числа.

Доказательство. Используя лемму Шура заключаем, что общий вид матриц β_0 и β_5, удовлетворяющих соотношениям (124), (125), (129), (141), задается формулами

$$\beta_0=\left(\begin{array}{c|c} y_1\otimes I & 0 \\ \hline 0 & y_2\otimes\hat{1} \end{array}\right), \qquad \beta_5=2\left(\begin{array}{c|c} x_1\otimes I & 0 \\ \hline 0 & x_2\otimes 1 \end{array}\right), \tag{154}$$

где x_1, y_1 (и x_2, y_2) — неизвестные эрмитовые матрицы размерности $(n\times n)$ и $(m\times m)$.

Потребуем, чтобы матрица β_0 удовлетворяла условиям (126). Используя (143), (154), получаем следующие уравнения для y_1 и y_2:

$$\left(a_1^{nm}\right)^\dagger y_1-y_1a_1^{nm}=\left(a_3^{nm}\right)^\dagger y_2-y_1a_2^{nm}=\left(a_4^{nm}\right)^\dagger y_2-y_2a_4^{nm}=0. \tag{155}$$

Подставляя β_5 (154) и η_a (143) в (127), находим β_a:

$$\beta_a=\frac{i}{s}\left(\begin{array}{c|c} A\otimes S_a & B^\dagger\otimes K_a^\dagger \\ \hline -B\otimes K_a & D\otimes\Sigma_a \end{array}\right), \tag{156}$$

где

$$A=\left(a_1^{nm}\right)^\dagger x_1-x_1a_1^{nm},\ B=\left(a_2^{nm}\right)^\dagger x_1-x_2a_3^{nm},\ D=\left(a_4^{nm}\right)^\dagger x_2-x_2a_4^{nm}. \tag{157}$$

Наконец, подставив (143), (154), (156) в (128), приходим к следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
& A a_1^{nm} \otimes S_a S_b + B^\dagger a_3^{nm} \otimes K_a^\dagger K_b - \left(a_1^{nm}\right)^\dagger A \otimes S_b S_a + \\
& \qquad + \left(a_3^{nm}\right)^\dagger B K_b^\dagger K_a = 2s^2 y_1 \otimes I \delta_{ab}, \\
& A a_2^{nm} \otimes S_a K_b^\dagger + B^\dagger a_4^{nm} \otimes K_a \Sigma_b - \left(a_1^{nm}\right)^\dagger B^\dagger \otimes S_b K_a^\dagger - \\
& \qquad - \left(a_3^{nm}\right)^\dagger D \otimes K_b^\dagger \Sigma_a = 0, \\
& D a_4^{nm} \otimes \Sigma_a \Sigma_b - B a_2^{nm} \otimes K_a K_b^\dagger - \left(a_2^{nm}\right)^\dagger B^\dagger \otimes K_b K_a^\dagger - \\
& \qquad - \left(a_4^{nm}\right)^\dagger D \otimes \Sigma_b \Sigma_a = 2s^2 y_2 \otimes I \delta_{ab}.
\end{aligned}
\tag{158}
$$

Выражая в (158) с помощью соотношений (144), (146) $K_a^\dagger K_b$, $S_b S_a$, $K_b^\dagger K_a$, $\Sigma_a \Sigma_b$ через $S_a S_b$, $\Sigma_a \Sigma_b$, S_c, Σ_c и $\delta_{ab} I$, δ_{ab}, $\hat{1}$ и приравнивая матричные коэффициенты при этих линейно независимых операторах, приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
& \Big\{(a_1^\dagger x_1 a_1 - x_1 a_1 a_1)(2s-1) + x_1 a_3 a_2 - a_3^\dagger x_2 a_3\Big\} + \text{э.с.} = 0, \\
& (2s-1)(a_1^\dagger a_1^\dagger x_1 - a_1^\dagger x_1 a_1 + a_3^\dagger x_2 a_3) + (s-1) a_3^\dagger a_2^\dagger x_1 - s x_1 a_2 a_3 = 0, \\
& (a_3^\dagger x_2 a_3 - x_1 a_2 a_3) + \text{э.с.} = 2(2s-1) y_1, \\
& \Big\{(s-1)(x_2 a_3 a_2 - a_2^\dagger x_1 a_2) + (s+1)(2s-1)(a_4^\dagger x_2 a_4 - x_2 a_4 a_4)\Big\} + \text{э.с.} = 0, \\
& (2s+1)(s-1) a_2^\dagger x_1 a_2 + s(s-1) x_2 a_3 a_2 + (s^2-1) a_2^\dagger a_3^\dagger x_2 + \\
& \qquad + (s+1)(2s-1)(a_4^\dagger a_4^\dagger x_2 - a_4^\dagger x_2 a_4) = 0, \\
& \\
& (a_2^\dagger x_1 a_2 - x_2 a_3 a_2) + \text{э.с.} = 2(2s-1) y_2, \\
& 2 a_2^\dagger x_1 a_2 - a_2^\dagger a_1^\dagger x_1 - x_2 a_3 a_1 + 2 a_4^\dagger x_2 a_3 - a_4^\dagger a_2^\dagger x_1 - x_2 a_4 a_3 = 0, \\
& 2 a_2^\dagger x_1 a_1 - a_2^\dagger a_1^\dagger x_1 - x_2 a_3 a_1 - (s-1)(a_4^\dagger x_2 a_3 - x_2 a_4 a_3) + \\
& \qquad + (s+1)(a_2^\dagger a_1^\dagger x_1 - a_2^\dagger x_1 a_1) = 0,
\end{aligned}
\tag{159}
$$

где введены обозначения

$$
A + \text{э.с.} = A + A^\dagger, \qquad a_k = a_k^{nm}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.
$$

При заданных a_1, a_2, a_3 и a_4 формулы (155), (159) определяют систему линейных однородных уравнений для матричных элементов $(x_\alpha)_{ij}$ и $(y_\alpha)_{ij}$. Решая эту систему для матриц $a_k = a_k^{nm}$, заданных формулами (145), приходим к результатам, сформулированным в теореме 6.

Мы получили четыре неэквивалентных класса галилеевски-инвариантных уравнений вида (114), где матрицы β_k задаются формулами (150)–(153). Если матрицы β_kимеют вид (150), то функция $\Psi(t, \boldsymbol{x})$ имеет $6s+1$ компонент, а уравнение (114) описывает движение свободной нерелятивистской частицы с произвольным спином s. Такие уравнения эквивалентны уравнениям Хагена–Герлея [6, 7], а в случае $s = 1/2$ совпадают с уравнениями Леви-Леблонда [5].

Уравнения (114), (151) имеют $6s-1$ компонент и описывают галилеевскую частицу со спином $s' = s-1$. Ниже показано, что эти уравнения приводят к константе дипольного взаимодействия, отличной от предсказываемой уравнениями Герлея.

Уравнения (114) представляют наибольший интерес в том случае, когда матрицы β_k имеют вид (152) и (153). Эти уравнения также можно интерпретировать как уравнения движения нерелятивистской частицы с произвольным спином. Как будет показано ниже, именно эти уравнения (в отличие от уравнений ЛХГ) позволяют описать галилеевски-инвариантным образом спин-орбитальное взаимодействие заряженной частицы с внешним электромагнитным полем (в рамках принципа минимального взаимодействия).

Приведем решения соотношений (124)–(129) для случая, когда представление алгебры (37) соответствует $N = 4$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139). Такая задача имеет нетривиальные решения только для $n = 2$, $m = 4$, $s = 1/2$. При этом матрицы β_k задаются формулами (154), где отличные от нуля матричные элементы матриц x_1 и x_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}&(x_1)_{13} = (x_1)_{14} = (x_1)_{22} = (x_1)_{23} = \frac{1}{s+1}(x_1)_{24} = \\ &\quad = (x_1)_{31} = (x_1)_{32} = s(x_1)_{33} = (x_1)_{41} = \frac{1}{s+1}(x_1)_{42} = \\ &\quad = (x_2)_{11} = (x_2)_{12} = (x_2)_{21} = \frac{s}{(s+1)^2}(x_2)_{22} = 1.\end{aligned} \tag{160}$$

Используя формулы (154), (160) и соотношения (143), (145), (124)–(128), нетрудно найти явный вид соответствующих матриц β_0 и β_a.

Приведем некоторые из уравнений (114), (150)–(153) для $s = 0$, $1/2$, 1 в покомпонентной записи:

$$s = 0, \qquad \begin{cases} p_0\psi_0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\psi} = 0, \\ 2m\boldsymbol{\psi} - i\boldsymbol{p}\cdot\psi_0 = 0, \end{cases} \tag{161}$$

$$s = \frac{1}{2}, \qquad \begin{cases} p_0\boldsymbol{\varphi} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\chi} = 0, \\ 2m\boldsymbol{\chi} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\varphi} = 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \tag{162}$$

$$s = 1, \qquad \begin{cases} p_0\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Phi} + a^2m\boldsymbol{\chi} + 2am\boldsymbol{\varphi} = 0, \\ p_0\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{p}\Phi_0 + a^2m\boldsymbol{\varphi} + 2am(\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\Phi}) = 0, \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\chi} + 2am\Phi_0 = 0, \\ -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\chi} + 2am(\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\varphi}) = 0, \end{cases} \tag{163}$$

где σ_a — матрицы Паули; ψ_μ, χ_α, φ_α, χ_a, φ_a, Φ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2$, $a = 1, 2, 3$) — однокомпонентные волновые функции.

К уравнениям (163)–(165) сводятся (при заданных значениях спина s) системы (114) с матрицами (151), (150) и (152) соответственно. Уравнения (114), (152) при $s = 1$ (или, что то же, систему уравнений (163)) можно записать также в виде

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\hat\beta_0 + \hat\beta_4\right)p_0 + \left[\hat\beta_0 - \hat\beta_4 + 2aI + \frac{a^2}{2}\left(\beta_0 + \hat\beta_4\right)\right]m - \hat\beta_a p_a\right\}\Psi = 0,$$

где $\hat\beta_l$ ($l = 0, 1, 2, 3, 4$) — матрицы Кеммера–Дэффина.

Уравнения (114) для представлений с произвольным индексом нильпотентности. Выше получены все возможные (с точностью до эквивалентности) решения уравнений (124)–(129) для представлений алгебры (37), перечисленных в теореме 5. Однако в этой теореме описан только некоторый класс представлений алгебры (37), соответствующий $N \leq 4$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139).

Ниже получен класс уравнений, соответствующий произвольным значениям N. Уравнения выведены с учетом того, что расширенная группа Галилея G является подгруппой обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ (группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского), и, следовательно, каждое уравнение) инвариантное относительно группы $P(1,4)$, автоматически оказывается инвариантным также относительно группы G.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных следующего вида:

$$\left(\tilde{\beta}_\mu p^\mu + \varkappa\right) \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{164}$$

где $p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0,1,2,3,4$, $\tilde{\beta}_\mu$ — некоторые числовые матрицы; $\varkappa$ — произвольный параметр.

Потребуем, чтобы матрицы $\tilde{\beta}_\mu$ удовлетворяли соотношениям

$$\left[\tilde{\beta}_\mu, S_{\nu\lambda}\right] = i\left(g_{\mu\lambda}\tilde{\beta}_\nu - g_{\mu\nu}\tilde{\beta}_\lambda\right), \tag{165}$$

где $S_{\mu\nu}$ — генераторы группы $O(1,4)$; $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1,-1,-1,-1)$. Если выполняется (165), то уравнение (167) инвариантно относительно группы $P(1,4)$ [31].

Как указывалось выше, в этом случае уравнение (167) инвариантно также относительно группы Галилея. Действительно, делая в (164) замену переменных

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(2\hat{x}_0 + \hat{x}_4\right), \qquad x_4 = \frac{1}{2}\left(2\hat{x}_0 - \hat{x}_4\right), \tag{166}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \tag{167}$$

получаем следующее уравнение:

$$\left(\beta_0\hat{p}_0 - \beta_4\hat{p}_4 - \hat{\beta}_a p_a + \varkappa\right) \Psi\left(\hat{x}_0, \hat{x}_4, \boldsymbol{x}\right) = 0, \tag{168}$$

где

$$\hat{p}_0 = i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0}, \qquad \hat{p}_4 = -i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \qquad \beta_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_4\right), \qquad \beta_4 = \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_4. \tag{169}$$

Галилеевскую инвариантность уравнения (168) нетрудно проверить непосредственно, воспользовавшись следующей реализацией генераторов расширенной группы Галилея:

$$\begin{gathered} P_0 = -i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_0}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad M = \hat{p}_4 = -i\frac{\partial}{\partial \hat{x}_4}, \\ J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + S_a, \qquad G_a = \hat{x}_0 p_a - x_a M + \eta_a, \end{gathered} \tag{170}$$

где

$$S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \qquad \eta_a = \frac{1}{2}(S_{0a} + S_{4a}).$$

Оператор $L = \beta_0 \hat{p}_0 - \beta_4 \hat{p}_4 - \tilde{\beta}_a p_a$ и генераторы (170) удовлетворяют условию (2).

Накладывая на решения уравнения (168) галилеевски-инвариантное дополнительное условие

$$\hat{p}_4 \Psi(\hat{x}_0, \hat{x}_4, \boldsymbol{x}) = -\lambda \varkappa \Psi(\hat{x}_0, \hat{x}_4, \boldsymbol{x}),$$

получаем из (168) галилеевски-инвариантное уравнение в форме (114), где

$$\beta_a = \tilde{\beta}_a, \qquad \beta_5 = \beta_4 + \lambda I, \qquad m = \varkappa/\lambda, \tag{171}$$

I — единичная матрица.

Таким образом, каждому решению системы перестановочных соотношений (165) можно поставить в соответствие галилеевски инвариантное уравнение (114), где матрицы β_μ и β_5 задаются формулами (169), (171).

Полное решение соотношений (165), в отличие от аналогичных соотношений для матриц, определяющих пуанкаре-инвариантные уравнения [28], до сих пор не получено. Воспользуемся частным решением уравнений (165), предложенным в работе [31]. Обозначим $\hat{S}_{kl}$ — генераторы неприводимого конечномерного представления группы $O(1,5)$. Тогда матрицы

$$S_{\mu\nu} = \hat{S}_{\mu\nu}, \qquad \tilde{\beta}_\mu = \tilde{S}_{5\mu}, \qquad \mu = 0,1,2,3,4, \tag{172}$$

удовлетворяют соотношениям (165). Подставив (175) в (169) и (171) получим матрицы β_k в форме

$$\beta_a = \hat{S}_{5a}, \qquad \beta_0 = \left(\hat{S}_{40} + \hat{S}_{50}\right)/2, \qquad \beta_5 = S_{40} - S_{50} + \lambda I. \tag{173}$$

Следовательно, каждому неприводимому представлению группы $O(1,5)$ можно сопоставить галилеевски-инвариантное уравнение (114), (173). Генераторы группы Галилея на множестве решений уравнения (114), (173) имеют локально-ковариантную форму (36), где

$$M = m = \varkappa/\lambda, \qquad \eta_a = \left(\hat{S}_{4a} + \hat{S}_{0a}\right)/2, \qquad S_a = \varepsilon_{abc}\hat{S}_{bc}/2. \tag{174}$$

Конечномерные представления группы $O(1,5)$, которая локально-изоморфна группе $O(6)$, задаются тремя числами (n_1, n_2 и n_3), одновременно целыми или полуцелыми [28]. Если матрицы $\hat{S}_{kl}$ из (173) образуют представление $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ алгебры Ли группы $O(1,5)$, то уравнения (114), (173) эквивалентны уравнению Леви-Леблонда [5] для нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$. Представление $D(1,1,0)$ приводит к уравнениям (114), (152) для частиц со спином $s = 1$. При этом матрицы (172) совпадают с матрицами Кеммера–Дэффина. В общем случае уравнения (114), (173) описывают мультиплет нерелятивистских частиц со спинами $s_1, s_2, \ldots$, где числа s_i характеризуют представления группы $O(3)$, входящие в неприводимое представление $D(n_1,n_2,n_3)$ группы $O(1,5)$.

Можно показать, что матрицы (174) удовлетворяют условиям

$$(\eta_a S_a)^{2s+1} = 0, \qquad (\eta_a S_a)^{2s} \neq 0, \tag{175}$$

где s — максимальное значение спина частиц, описываемых уравнениями (114), (173). Таким образом, найденные здесь уравнения соответствуют представлениям алгебры (37) с произвольным значением индекса нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139).

4. Нерелятивистская частица с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле

Уравнения движения свободных нерелятивистских частиц могут представлять реальный интерес для физики только в том случае, если они являются первым шагом на пути описания частиц, участвующих в различного рода взаимодействиях. Одним из них является взаимодействие заряженной частицы, обладающей спином, с внешним электромагнитным полем.

Ниже показано, что найденные уравнения в рамках принципа минимального взаимодействия описывают дипольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия заряженной нерелятивистской частицы с внешним полем, т.е. учитывают все физические эффекты, предсказываемые в порядке $1/m^2$ релятивистским уравнением Дирака. Точно решена задача о движении заряженной частицы с произвольным спином в постоянном магнитном поле.

Уравнения второго порядка для частицы со спином, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем. Выше получены уравнения Шредингера (64), (73), (74) и (64), (97), описывающие движение свободных нерелятивистских частиц с произвольным спином. Для того чтобы перейти к описанию движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в этих уравнениях обычную замену

$$p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \tag{176}$$

где A_μ — 4-вектор-потенциал электромагнитного поля. В результате приходим к уравнениям

$$L(\pi)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad L(\pi) = i\frac{\partial}{\partial t} - H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0), \tag{177}$$

где $H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — один из гамильтонианов, полученных из (73), (74) или (97) с помощью замены (176):

$$\begin{aligned} H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + 2iak\sigma_3\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} - \\ &-(\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{2ak^2}{m}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right], \end{aligned} \tag{178}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_3\tilde{a}m + \frac{a}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)m - 2\tilde{a}k(i\sigma_1 - \sigma_2)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} - \\ &-(\sigma_1 + i\sigma_2)\frac{2ak^2}{m}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right] + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0, \end{aligned} \tag{179}$$

$$\begin{aligned} H_s^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_1\left\{m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{\sin^2\theta_s}{ms^2}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]\right\} - \\ &-\sigma_3\left\{a_s\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{b_s}{2ms^2}\left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]\right\} + \sigma_2\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}. \end{aligned} \tag{180}$$

В формулах (178)–(180) символом $\boldsymbol{H}$ обозначен вектор напряженности магнитного поля: $\boldsymbol{H} = -i\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}$.

Уравнения (177)–(180), очевидно, инвариантны относительны калибровочных преобразований:

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) \to \Psi(t, \boldsymbol{x}) \exp[ie\varphi(t, \boldsymbol{x})], \qquad A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial\varphi(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_\mu}. \tag{181}$$

Покажем, что уравнения (177), (178) и (177), (179) инвариантны относительно преобразований из группы Галилея (14), (38) если вектор-потенциал A_μ преобразуется по галилеевскому закону [5]

$$A_0 \to A_0'' = A_0 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}, \qquad A_a \to A_a'' = R_{ab} A_b, \tag{182}$$

где R_{ab} — оператор трехмерного поворота (17). Инвариантность уравнения

$$L(\pi)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{183}$$

где $L(\pi)$ — некоторый линейный оператор, функционально зависящий от π_μ (176); относительно галилеевских преобразований (14), (38), (182) означает, что преобразованная функция $\Psi''(t'', \boldsymbol{x}'')$ (38) удовлетворяет такому же уравнению, как и исходная функция

$$L(\pi'')\Psi(t'', \boldsymbol{x}'') = 0, \tag{184}$$

где $L(\pi'')$ — оператор, получаемый из $L(\pi)$ заменой $\pi_\mu \to \pi_\mu'' = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu''} - eA_\mu''$, а x_a'', t'' и A_μ'' задаются формулами (14), (182).

Условие галилеевской инвариантности уравнения (185) можно сформулировать в виде следующего требования, налагаемого на оператор $L(\pi)$ [ср. (91)].

Определение 3. *Уравнение (183) инвариантно относительно преобразований из группы Галилея (14), (38), если оператор $L(\pi)$ удовлетворяет условиям*

$$\exp[if(t, \boldsymbol{x})\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})L(\pi)D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) \exp[-if(t, \boldsymbol{x})] = L(\pi''), \tag{185}$$

где $f(t, \boldsymbol{x})$ — фазовый множитель (18);

$$\begin{aligned} &\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \exp\left(-i\tilde{\boldsymbol{S}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}}\right) \exp(-i\tilde{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{v}), \\ &D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \exp\left(-i\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) \exp(-i\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{v}), \end{aligned} \tag{186}$$

а S_a, η_a и $\tilde{S}_a$, $\tilde{\eta}_a$ — матрицы, реализующие представления (в общем случае неэквивалентные) алгебры Ли однородной группы Галилея (37).

Если выполняется (185), то (184) непосредственно следует из (14), (38), (182) и (183).

Используя соотношения

$$\begin{aligned} &\pi_0'' = \pi_0 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\pi}, \qquad \pi_a'' = R_{ab}\pi_b, \\ &\exp[if(t, \boldsymbol{x})]\pi_a \exp[-if(t, \boldsymbol{x})] = \pi_a + mv_a \end{aligned} \tag{187}$$

и формулу (90), прямой проверкой убеждаемся, что операторы (177) удовлетворяют условию (185), (186), где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$, а $D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$ заданы в (39), (66) и, следовательно, уравнения (177), (178) и (177), (179) галилеевски-инвариантны.

Анализ уравнений (177) удобно проводить в представлении, в котором операторы (180)–(182) квазидиагональны, т.е. коммутируют с матрицей σ_1 или σ_3 (67). Как и в случае уравнения Дирака, гамильтонианы (178)–(180) могут быть диагонализованы только приближенно. Ниже покажем, что с точностью до членов порядка $1/m^2$ операторы (178), (179) при $a=0$, и (180) можно привести к следующей форме:

$$\begin{aligned}\left[H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\right]' &= \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - eB\sigma_1\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m} + \\ &+ \frac{eD^2}{2m^2}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \frac{1}{3}s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\right] + \\ &+ \frac{eBD}{m^2}\left[\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}) - \frac{2}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right),\end{aligned} \tag{188}$$

$$\left[\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\right]' = \sigma_3\tilde{a}m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + o\left(\frac{1}{m^3}\right), \tag{189}$$

$$\begin{aligned}\left[H_s^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\right]' &= \sigma_1\left(m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + \frac{e\sin^2\theta_s}{2ms^2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right) + \\ &+ \frac{e\sin^2\theta_s}{4m^2s^2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) - \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\right] + \\ &+ \frac{e\sqrt{2}\sin\theta_s}{4m^2s}\left(\frac{b_s}{4s^2} - a_s\right)\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}) + \\ &+ \frac{e\sqrt{2}b_s\sin\theta_s}{24m^2s^3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} + o\left(\frac{1}{m^3}\right),\end{aligned} \tag{190}$$

где $\boldsymbol{E} = i[\bar{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{\pi}_0]$ — вектор напряженности электрического поля; Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия:

$$Q_{ab} = \frac{1}{3}\left\{3[S_a,S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1)\right\}; \tag{191}$$

B и D — произвольные коэффициенты, следующим образом выражаемые параметрами a и k:

$$B = ak^2, \qquad D = k. \tag{192}$$

Если же в (179) $a \neq 0$, то приближенный гамильтониан $\left[\tilde{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi},A_0)\right]'$ имеет структуру, аналогичную (188).

Гамильтонианы (188) и (190) содержат слагаемые, соответствующие взаимодействию точечной заряженной частицы с внешним электромагнитным полем $\left(\sim \dfrac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0\right)$, а также дипольному ($\sim \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}$), спин-орбитальному ($\sim \boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi})$), дарвиновскому ($\sim \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$) и квадрупольному ($\sim Q_{ab}\partial E_a/\partial x_b$) взаимодействиям. Два последние слагаемые (которые P-неинвариантны и могут быть сделаны как угодно малыми в пределе $D\to 0$, $\theta_s\to 0$) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия.

Аналогичную структуру имеют приближенные гамильтонианы, получаемые при диагонализации релятивистских уравнений для частиц произвольного спина [16, 17].

Подчеркнем, что в отличие от уравнения Дирака галилеевски инвариантные уравнения (177), (178) и (177), (180) (и гамильтонианы (188), (190)) определены с точностью до произвольных параметров a, k и θ_s, которые могут быть выбраны, скажем, из условия соответствия величины констант дипольного и спин-орбитального взаимодействий экспериментальным данным. Если

$$\theta_s = \pi/4, \qquad a = 1, \qquad k = 2, \qquad s = 1/2, \tag{193}$$

то шесть первых слагаемых в (188) и (190) совпадают с гамильтонианом, получаемым при диагонализации уравнения Дирака [32]. При этом, однако, операторы (188) и (190) содержат дополнительные члены (зависящие от напряженности магнитного поля), которые можно получить из обобщенного уравнения Дирака, учитывающего аномальное взаимодействие частицы с полем.

Отметим, что уравнения (177), (178) и (177), (179) можно получить в рамках лагранжева формализма — если параметры a, $\tilde{a}$ и k удовлетворяют условиям (92). Действительно, делая в лагранжианах (95), (96) минимальную замену $\partial/\partial x_\mu \to \partial/\partial x_\mu + ieA_\mu$, получаем операторы [14]

$$\begin{aligned} &L(t,\boldsymbol{x}) = L_0(t,\boldsymbol{x}) + L^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}),\\ &\tilde{L}(t,\boldsymbol{x}) = \tilde{L}_0(t,\boldsymbol{x}) + \tilde{L}^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{194}$$

где $L_0(t,\boldsymbol{x})$ и $\tilde{L}_0(t,\boldsymbol{x})$ заданы формулами (95), (96), а $L^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x})$ и $\tilde{L}^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x})$ равны соответственно:

$$\begin{aligned} L^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}) = e\Bigg\{&\bar{\Psi}A_0\Psi + 2ik\bar{\Psi}\sigma_3 S'_a A_a\Psi + \\ &+\frac{1}{2m}\left[i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}C_{ab}A_b\Psi - i\bar{\Psi}A_aC_{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x_b} - e\bar{\Psi}C_{ab}A_aA_b\Psi\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{195}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{\text{вз}}(t,\boldsymbol{x}) = e\Bigg\{&\bar{\Psi}A_0\Psi - 2\tilde{a}k\bar{\Psi}(\sigma_1 + i\sigma_2)S_aA_a\Psi + \\ &+\frac{i}{2m}\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_a}A_a\Psi - \bar{\Psi}A_a\frac{\partial\Psi}{\partial x_a}\right) - \frac{e}{2m}A_bA_b\bar{\Psi}\Psi\Bigg\}. \end{aligned} \tag{196}$$

Нетрудно убедиться, что уравнения Лагранжа–Эйлера для функций (194)–(196) приводят к (177), (178) и (177), (179).

Приведем явный вид операторов, преобразующих гамильтонианы (178), (179) при $a = 0$ и (180) к форме (188), (189) и (190) соответственно:

$$V^{\text{I}} = \exp\left(iC_s^{\text{I}}\right)\exp\left(iB_s^{\text{I}}\right)\exp\left(iA_s^{\text{I}}\right), \tag{197}$$

$$\tilde{V}^{\text{I}} = \exp\left(i\tilde{C}_s^{\text{I}}\right)\exp\left(i\tilde{B}_s^{\text{I}}\right)\exp\left(i\tilde{A}_s^{\text{I}}\right), \tag{198}$$

$$V^{\text{II}} = \exp\left(iC_s^{\text{II}}\right)\exp\left(iB_s^{\text{II}}\right)\exp\left(iA_s^{\text{II}}\right), \tag{199}$$

где

$$A_s^{\mathrm{I}} = -i\sigma_2 k\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}, \qquad A_s^{\mathrm{II}} = \sigma_3\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi},$$

$$B_s^{\mathrm{I}} = \sigma_3\frac{k}{2m^2}\left\{\frac{1}{2a}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}^2]_+ + ik[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 + e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{1}{a}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},$$

$$C_s^{\mathrm{I}} = \sigma_2\frac{k^2}{m^3}\left\{-\frac{2ik}{3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 + ik[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}]_+ + [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, eA_0]\right\} + \frac{i}{2m}\sigma_1\frac{\partial B_s^{\mathrm{I}}}{\partial t},$$

$$B_s^{\mathrm{II}} = \sigma_2\frac{1}{4m^2}\left\{a_s\boldsymbol{\pi}^2 + \frac{b_s}{2s^2}[2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\right\},$$

$$C_s^{\mathrm{II}} = \sigma_1\frac{1}{8m^3}\left\{\frac{\sqrt{2}\sin\theta_s}{s}\left[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}^2 + \left(\frac{e\sin\theta_s}{s}\right)^2 e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}\right]_+ + iea_s[\boldsymbol{\pi}^2, A_0] -\right.$$
$$\left. -\frac{4\sqrt{2}\sin^3\theta_s}{s^3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^3 - \frac{ieb_s}{s^2}[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2, A_0]\right\} + \frac{i}{2m}\sigma_1\frac{\partial B_s^{\mathrm{II}}}{\partial t},$$

$$\tilde{A}_s^{\mathrm{I}} = \frac{ik}{m}(\sigma_2 - i\sigma_1)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \qquad \tilde{B}_s^{\mathrm{I}} = \frac{k}{2\tilde{a}m^2}(\sigma_2 - i\sigma_1)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E},$$

$$\tilde{C}_s^{\mathrm{I}} = \frac{ik}{4m^3}(\sigma_2 - i\sigma_1)[\boldsymbol{\pi}^2, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}] + \frac{i}{2m}\sigma_3\frac{\partial\tilde{B}^{\mathrm{I}}}{\partial t}.$$

Гамильтонианы (178)–(180) и (188)–(190) связаны соотношениями

$$H' = VHV^{-1} + i\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1},$$

где H — один из гамильтонианов (178), (179) или (180), а V — один из операторов (197), (198) или (199) соответственно.

Введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка. Осуществив замену (176) в формуле (114), приходим к системам уравнений вида

$$L(\pi)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad L(\pi) = \beta_\mu\pi^\mu + \beta_5 m, \tag{200}$$

которые также можно интерпретировать как уравнения движения частицы, обладающей спином, во внешнем электромагнитном поле.

Обсудим вкратце свойства уравнений (200), которые можно получить без использования явного вида β-матриц. Нетрудно убедиться, что эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований (181). Из соотношений (124)–(128) непосредственным вычислением получаем, что оператор $L(\pi)$ (200) удовлетворяет условиям галилеевской инвариантности (185) (где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v}) = [D^{-1}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{v})]^\dagger$). Наконец, уравнения (200) можно получить с использованием вариационного принципа, исходя из следующего лагранжиана:

$$\hat{L}(t,\boldsymbol{x}) = L(t,\boldsymbol{x}) + ie\bar{\Psi}\beta_\mu A_\mu\Psi,$$

где $L(t,\boldsymbol{x})$ задается формулой (120).

Для дальнейшего анализа уравнений (200) и физической интерпретации их решений подвергнем функцию $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ и оператор $L(\pi)$ преобразованиям

$$\Psi \to \Psi' = V\Psi, \qquad L(\pi) \to L'(\pi) = V^\dagger L(\pi)V, \tag{201}$$

где

$$V = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right). \tag{202}$$

В результате приходим к эквивалентному уравнению

$$L'(\pi)\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = 0. \tag{203}$$

Найдем явный вид оператора $L'(\pi)$. Используя формулу (134) и коммутационные соотношения (124)–(128), получаем:

$$V^\dagger\beta_0\pi_0V = \beta_0\left(\pi_0 + \frac{e}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{e}{2m^2}\eta_a\eta_b\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right),$$

$$V^\dagger\beta_a\pi_aV = \beta_a\pi_a + \beta_0\left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{3e}{4m^2}\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \frac{e}{m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H},$$

$$\begin{aligned} V^\dagger\beta_5mV = {}&\beta_5m + \beta_a\pi_a + \\ &+\frac{1}{2}\beta_0\left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{m} - \frac{e}{2m^2}\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \frac{2}{2m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}, \end{aligned}$$

откуда следует непосредственно, что

$$\begin{aligned} L'(\pi) = {}&\beta_0\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + \beta_5m + \frac{e}{m}\left(\beta_0\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}\right) + \\ &+\frac{e}{m^2}\beta_0\left[\eta_a\eta_b\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right]. \end{aligned} \tag{204}$$

Уравнения (203), (204) нельзя получить из (137) заменой $p_\mu \to \pi_\mu$, но они содержат дополнительные слагаемые, зависящие от напряженности электромагнитного поля. Ниже показано, что эти слагаемые описывают взаимодействия, обусловленные наличием у частицы спина.

Уравнения (203), (204) могут описывать различные физические эффекты — в зависимости от того, какое представление алгебры (37) реализуют матрицы η_a. Несложный анализ показывает, что если эти матрицы образуют представления, соответствующие $N \le 2$, где N — индекс нильпотентности инвариантного оператора D_1 (139), то оператор (204) не включает слагаемых, зависящих от напряженности электрического поля. Действительно, в этом случае выполняется $\eta_a\eta_b = 0$, откуда (и из соотношений (128)) следует, что

$$\beta_0\eta_a \equiv 0. \tag{205}$$

Подставив (205) в (204), получим оператор $L'(\pi)$ в форме

$$L'(\pi) = \beta_0\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + \beta_5m + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}. \tag{206}$$

Если $\boldsymbol{H} \equiv 0$, а напряженность электрического поля $\boldsymbol{E} \ne 0$, то оператор (206) коммутирует с матрицами спина S_a и, следовательно, уравнение (203) не описывает взаимодействия спина частицы с электрическим полем. Этот результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Лемма 4. *Необходимым условием того, чтобы уравнение (200), где* β_k *— матрицы, удовлетворяющие уравнениям (124)–(129), (37), описывало взаимодействие спина частицы с электрическим полем, является выполнение соотношения*

$$(S_a\eta_a)^2 \neq 0. \tag{207}$$

Матрицы (150), (151) не удовлетворяют условию (207). Следовательно, уравнения (200), (150) и (200), (151) (в число которых входят уравнения ЛХГ) не описывают взаимодействия (спин-орбитального, квадрупольного и т.д.) спина частицы с внешним электрическим полем.

Далее увидим, что уравнения (200) с матрицами (152), (153) (для которых соотношения (207) выполняются) описывают перечисленные выше взаимодействия.

Рассмотрим теперь подробно уравнения (203), (204) для случаев, когда матрицы β_k задаются одной из формул (150)–(153). Обозначив

$$\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t,\boldsymbol{x}) \\ \Phi_2(t,\boldsymbol{x}) \\ \chi(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

где Φ_1, Φ_2 — $(2s+1)$-компонентные, а χ — $(2s-1)$-компонентная функция, и подставив в (203) и (204) явный вид матриц β_k и η_a из (150), приходим к уравнениям

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(t,\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 - \frac{eg}{2m}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H}\right]\Phi_1, \qquad g = \frac{1}{s}. \tag{208}$$

Таким образом, уравнения (150), (200) (уравнения ЛХГ) сводятся к уравнению Паули (208) для $(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_1(t,\boldsymbol{x})$.

Далее, обозначив

$$\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Phi(t,\boldsymbol{x}) \\ X_1(t,\boldsymbol{x}) \\ X_2(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \tag{209}$$

и подставив (209), (151) в (203), (206), получим:

$$i\frac{\partial}{\partial t}X_1 = HX_1, \qquad X_2 = \Phi = 0, \qquad H = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{H}}{2sm} + eA_0,$$

или в обозначениях $s' = s-1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{S}'$

$$H = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - g'\frac{e}{2m}\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{H} + eA_0, \qquad g' = \frac{1}{s'+1}. \tag{210}$$

Следовательно, уравнения (151), (200) также сводятся к уравнению Паули для частицы с произвольным спином, но предсказывают другое свойство (по сравнению с уравнениями ЛХГ) дипольного момента частицы (так как при $s = s'$ факторы g и g' не равны друг другу).

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы β_k задаются формулами (152). Обозначим

$$\Psi'(t,\boldsymbol{x}) \quad \text{— столбец } (\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\chi_1,\chi_2), \tag{211}$$

и подставим (152), (211) в (203), (204). После несложных вычислений приходим к следующим уравнениям:

$$L\Phi_1 \equiv \left\{\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e}{4sm}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H} + \frac{e}{4sam}\left[\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{16am^2s(2s-1)}\left[s^2\boldsymbol{H}^2 - (\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H})^2\right]\right\}\Phi_1 = 0, \tag{212}$$

$$\Phi_2 = -a\Phi_1, \qquad \Phi_3 = -\frac{1}{2m}\left[\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - a^2m + \frac{e\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{H}}{4sm}\right]\Phi_1, \\ \chi_1 = -\frac{(s+1)e\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{H}}{8am^2s\sqrt{2s-1}}\Phi_1, \qquad \chi_2 = 0. \tag{213}$$

Итак, уравнения (203), (204) с матрицами (152) сводятся к уравнению (212) для $(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_1(t,\boldsymbol{x})$ (остальные компоненты $\Psi'(t,\boldsymbol{x})$ выражаются через Φ_1 по формулам (213)). Для выяснения физического смысла решений уравнения (212) подвергнем функцию Φ_1 и оператор L преобразованию, которое позволяет устранить слагаемое $\dfrac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}}{4sam}$, соответствующее нефизическому электрическому дипольному взаимодействию:

$$\Phi_1 \to \Phi_1' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{4sam}\right)\Phi_1, \\ L \to L' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{4sam}\right)L\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{4sam}\right).$$

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа (134) и принимая во внимание тождества

$$i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] = \frac{1}{2}[S_a, S_b]_+\frac{\partial H_a}{\partial x_b} + \frac{1}{2}i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2], \\ i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2] = e\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi}), \\ i[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}] = -\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E},$$

получаем:

$$L' = \pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e}{4sm}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} + \frac{e}{16s^2m^2a^2}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \right. \\ + \frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \frac{a}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} - \\ \left. - \frac{a}{2}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right) + o\left(e^2\right). \tag{214}$$

Оператор (214), как и приближенные гамильтонианы (178)–(180), содержит слагаемые, соответствующие дипольному, квадрупольному и спин-орбитальному взаимодействию заряженной частицы с внешним электромагнитным полем.

Совершенно аналогично можно показать, что уравнение (203), (204) с матрицами (153) сводится к уравнению

$$\pi_0\chi_1 = \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{4(s'+1)m} - \frac{e}{4b(s'+1)m}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + o\left(e^2\right)\right\}\chi_1,$$

которое в результате унитарного преобразования

$$\chi_1 \to \chi_1' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{\pi}}{4(s'+1)mb}\right)\chi_1$$

приводится к форме $L'\chi_1 = 0$;

$$L' = \pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{H}}{4(s'+1)m} + \frac{e}{16(s'+1)^2b^2m^2}\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{S}'\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\pi}) + \right.$$
$$+\frac{1}{3}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} + \frac{b}{3}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b} - \tag{215}$$
$$\left. -\frac{b}{2}\boldsymbol{S}'\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right) + o\left(e^2\right).$$

Оператор (215) можно получить из (214) заменой $s \to s'+1$, $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}'$, $a \to b$.

В заключение отметим, что все приближенные гамильтонианы (208), (210), (214), (215), получаемые при диагонализации уравнений первого порядка (200), можно получить из оператора (188) соответствующим подбором коэффициентов B и D. Иными словами, уравнения второго порядка (179), (180) являются более универсальными, чем уравнения (200), так как включают последние как частные случаи в приближении $1/m^2$.

Следует заметить, что уравнения в форме Шредингера (177) в рамках группы Галилея представляются более естественными, чем уравнения вида (200), поскольку в нерелятивистской квантовой механике временная координата t выделена и, следовательно, не обязана входить в уравнения движения на равных правах с пространственными переменными x_a.

Аномальное взаимодействие в нерелятивистской квантовой механике. Замена $p_\mu \to \pi_\mu$ в уравнении движения не является единственно возможным способом описания взаимодействия частицы с внешним электромагнитным нолем. Более общий подход, который широко используется в релятивистской квантовой механике, состоит в том, чтобы учесть так называемое аномальное взаимодействие частицы с полем. Такое взаимодействие математически описывается добавлением в уравнения движения членов, зависящих от напряженности электромагнитного поля.

В настоящей работе ограничимся случаем дипольного аномального взаимодействия и рассмотрим уравнения вида

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\Psi, \\ &\hat{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) = H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) + \frac{e}{m}(A_a^s E_a + B_a^s H_a) \end{aligned} \tag{216}$$

и

$$L\Psi \equiv \beta_\mu \pi^\mu + \beta_5 m + \frac{e}{m}(C_a H_a + D_a E_a), \tag{217}$$

где E_a и H_a — компоненты векторов напряженности магнитного и электрического полей; $H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ — оператор (178); β_μ — матрицы (150), (151); A_a^s, B_a^s, C_a и D_a — некоторые (пока неизвестные) матрицы, которые должны быть такими, чтобы уравнения (216) и (217) были инвариантны относительно группы Галилея.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 7. *Оператор* $i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s^I(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ *удовлетворяет условию галилеевской инвариантности (185) тогда и только тогда, когда матрицы* A_a^s *и* B_a^s *имеют вид:*

$$A_a^s = k_1 \eta_a, \qquad B_a^s = k_1 S_a + k_1' \eta_a, \tag{218}$$

где k_1 *и* k_1' *— произвольные числа, а* η_a *и* S_a *— матрицы, задаваемые формулами (66).*

Доказательство. Подробное доказательство теоремы 7 имеется в работе [14], поэтому приведем только его схему. Условие инвариантности (185) сводится к следующим уравнениям:

$$D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})(A_a^s E_a + B_a^s H_a) D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = A_a^s E_a'' + B_a^s H_a'', \tag{219}$$

где матрицы $D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})$ задаются формулами (39), (66) и

$$\begin{aligned} &H_a'' = -i\varepsilon_{abc}\pi_b''\pi_c'' = R_{ab}H_b, \\ &E_a'' = i[\pi_0'', \pi_a''] = R_{ab}E_b - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})_a. \end{aligned} \tag{220}$$

Подставив (39), (66) в (219) и (220), приходим к следующим уравнениям для A_a^s и B_a^s:

$$\begin{aligned} &[B_a^s, S_b] = i\varepsilon_{abc}B_c^s, \qquad [A_a^s, S_b] = i\varepsilon_{abc}A_c^s, \\ &[\eta_a, A_b^s] = 0, \qquad [\eta_a, B_b^s] = i\varepsilon_{abc}A_c^s, \\ &\eta_a A_b^s \eta_c + \eta_c A_b^s \eta_a = \eta_a B_b^s \eta_c + \eta_c B_b^s \eta_a = 0. \end{aligned} \tag{221}$$

Общее решение уравнений (221) и задается формулами (218).

Подставляя (218) в (216) и подвергая гамильтониан $H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)$ преобразованию

$$\hat{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0) \to \left[\hat{H}_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' = V\hat{H}_s^{\mathrm{I}}V^{-1} + i\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1},$$

где

$$V = \exp\left(iD\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp\left(\frac{1}{2m}\sigma_1\frac{\partial S}{\partial t}\right)\exp(iS)\exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right),$$

$$D = \sigma_1 k(k'-1), \qquad S = \frac{\sigma_2}{2m^2}\left\{(k_1' - \eta k^2)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} - \right.$$

$$\left. -k(k'-1)\left[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2m}\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})\right] + \frac{k'k_1'}{2m}[S_a, S_b]_+\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right\},$$

получаем [14]:

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \left[H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]' + \frac{kk_1'}{3m^2}Q_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \tag{222}$$

где $\left[H_s^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\pi}, A_0)\right]'$ задается формулой (186) при следующих значениях D и B:

$$B = k_1 + \sigma_1(k_1' - ak^2), \qquad D = \sigma_1 k(k_1' - 1). \tag{223}$$

Сравнивая (186) и (223), убеждаемся, что введение аномального дипольного взаимодействия в уравнения второго порядка (177), (178) почти не изменяет структуры гамильтониана в приближении $1/m^2$ (по существу меняется только коэффициент при слагаемом, представляющем магнитное квадрупольное взаимодействие, так как коэффициенты (192) и (223) на множествах функций $\Psi'_\pm = \frac{1}{2}(1 \mp \sigma_1)\Psi'$ в равной мере могут рассматриваться как произвольные параметры).

Рассмотрим теперь уравнение (217). Потребовав, чтобы оператор L удовлетворял условию галилеевской инвариантности (187), где $\tilde{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = [D^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})]^\dagger$, и приняв во внимание соотношения (220), непосредственным вычислением получаем, что общий вид матриц C_a и D_a задается формулами

$$C_a = \frac{k_2}{2}\varepsilon_{abc}\beta_0\beta_b\beta_c, \qquad D_a = \frac{k_2'}{2}\varepsilon_{abc}\beta_0\beta_b\beta_c + \frac{ik_2}{2}(1 - 2\beta_0)\beta_a, \tag{224}$$

где k_2 и k_2' — произвольные постоянные.

Подставляя (224) в (217) и используя явный вид β-матриц (150), (151), после несложных вычислений получаем уравнения для $(2s+1)$-компонентной функции $\Phi_1 = \beta_0\Psi$ и для $(2s'+1)$-компонентной функции χ_1:

$$i\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = H_s\Phi_1, \qquad i\frac{\partial \chi_1}{\partial t} = H_s'\chi_1, \tag{225}$$

где

$$H_s = \frac{\boldsymbol{\pi}}{2m} + eA_0 - \frac{e(1+k_2')}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} - \frac{ek_2}{2ms}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H} - \frac{ek_2}{2m^2 s}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}] + \frac{e^2k_2^2}{4m^2}H^2, \tag{226}$$

а H_s' можно получить из (226) заменой $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}'$, $s \to s'+1$.

Подвергая функции Φ_1, χ_1 и гамильтонианы H_s и H_s' преобразованиям

$$\begin{aligned} &\Phi_1 \to U\Phi_1, \qquad H_s \to UH_sU^{-1} + i\frac{\partial U}{\partial t}U^{-1}, \\ &\chi_1 \to U'\chi_1, \qquad H_s' \to U'H_s'(U')^{-1} + i\frac{\partial U'}{\partial t}(U')^{-1}, \end{aligned} \tag{227}$$

где

$$U = \exp\left(\frac{ik_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2sm}\right), \qquad U' = \exp\left(\frac{ik_2\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{\pi}}{2(s'+1)m}\right), \tag{228}$$

приходим к оператору (188), где

$$B = (1+k_2')/2s, \qquad D = k_2/2s. \tag{229}$$

Таким образом, гамильтонианы частиц с произвольным спином, получаемые из уравнений (150), (151) и (217), в приближении $1/m^2$ совпадают с точностью до коэффициентов D и B с гамильтонианом (188), получаемым при диагонализации уравнений (177), (178). Следовательно, уравнения ЛХГ (150), (217) и уравнения (150), (217), обобщенные на случай аномального дипольного взаимодействия частицы с внешним полем, также описывают дипольное, квадрупольное и спин-орбитальные взаимодействия.

Введение аномального взаимодействия в уравнение Шредингера. Мы убедились, что различные галилеевски-инвариантные уравнения (177), (178), (200), (216), (217) в приближении $1/m^2$ приводят к одинаковым (с точностью до коэффициентов) гамильтонианам частиц с произвольным спином. Для объяснения этого факта докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $L(\pi)$ — произвольный линейный оператор, функционально зависящий от π_μ (176) и удовлетворяющий условию галилеевской инвариантности (185). Тогда оператор*

$$\hat{L}(\pi) = \exp\left(i\frac{\tilde{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right) L(\pi) \exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right) \tag{230}$$

также удовлетворяет условию (185) с $\eta_a = \tilde{\eta}_a = 0$.

Доказательство. Подействуем на $\hat{L}(\pi)$ (230) слева оператором $\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\times \exp(-i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})$, а справа — оператором $\exp[-if(t,\boldsymbol{x})]\exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})$. Используя тождества, которые несложно получить с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа,

$$\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\exp\left(i\frac{\tilde{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right) = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\exp(-i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v}),$$

$$\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp(-if(t,\boldsymbol{x})] = \exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{v})\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\exp[-if(t,\boldsymbol{x})]$$

и принимая во внимание, что оператор $L(\pi)$ по определению удовлетворяет соотношениям (185), получаем:

$$\exp[if(t,\boldsymbol{x})]\exp(-i\tilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\theta})\hat{L}(\pi)\exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})\exp[-if(t,\boldsymbol{x})] = \hat{L}(\pi''),$$

т.е. $\hat{L}(\pi)$ действительно удовлетворяет условию галилеевской инвариантности (185) с $\eta_a = \tilde{\eta}_a = 0$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что произвольное галилеевски-инвариантное уравнение (183) с помощью перехода к новой волновой функции

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \hat{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{m}\right)\Psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{231}$$

может быть сведено к уравнению, инвариантному относительно группы Галилея

$$\hat{L}(\pi)\hat{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{232}$$

где функция $\hat{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ имеет простые трансформационные свойства (34), (35) (в этом случае представление однородной группы Галилея, реализующееся на множестве решений инвариантного уравнения, сводится к представлению группы $O(3)$).

Рассмотренные выше уравнения (177), (178), (200), (218), (219) с помощью преобразований (230), (231) сводятся к (232), где оператор $\hat{L}(\pi)$ имеет следующую общую форму:

$$\hat{L}(\pi) = A^1\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\right) + A^2 m + \frac{e}{m}B^1_a H_a + \frac{e}{m}B^2_a\left[E_a + \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{H})_a - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2m}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\pi})_a\right] + \frac{e}{m^2}\left(Q^1_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} + Q^2_{ab}\frac{\partial H_a}{\partial x_b}\right), \tag{233}$$

где A^α, B^α_a, Q^α_{ab} $(\alpha = 1,2)$ — некоторые матрицы, следующим образом коммутирующие с генераторами группы вращений:

$$[A^\alpha, S_a] = 0, \qquad [B^\alpha_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}B^\alpha_c, \qquad [Q^\alpha_{ab}, S_c] = i(\varepsilon_{acd}Q_{bd} - \varepsilon_{bcd}Q_{ad}). \tag{234}$$

Итак, вместо рассмотренных выше различных галилеевски-инвариантных уравнений можно исследовать уравнение вида (232), (233), которое при соответствующем выборе матриц A^α, B^α_a и Q^α_{ab} эквивалентно (177), (178), (200), (218) или (219).

Если $A^\alpha = I$, $B^\alpha_a = S_a$, $Q^\alpha_{ab} = Q_{ab}$, где S_a — генераторы неприводимого представления $D(s)$ группы $O(3)$; Q_{ab} — тензор квадрупольного взаимодействия (191), то уравнения (232), (233) сводятся к (212). Эти уравнения можно рассматривать как галилеевски-инвариантное обобщение уравнения Шредингера (1) для $(2s+1)$-компонентной функции, учитывающее минимальное и аномальное взаимодействия частицы с электромагнитным полем (такие обобщения в другом подходе рассматривались в работах [32]). Итак, введение минимального взаимодействия в уравнения первого порядка (152), (200) оказалось эквивалентным введению аномального взаимодействия в уравнение Шредингера.

Нерелятивистская частица произвольного спина в однородном магнитном поле. Рассмотрим уравнения (216), (217) для случая постоянного однородного магнитного поля и найдем собственные значения оператора $H^{\mathrm{I}}_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)$. Можно считать, что вектор напряженности такого поля параллелен третьей компоненте импульса, т.е. в (217) достаточно положить

$$H_1 = H_2 = E_1 = E_2 = E_3 = 0, \qquad H_3 = H. \tag{235}$$

Согласно (240) вектор-потенциал A_μ можно выбрать в виде

$$A_0 = A_2 = A_3 = 0, \qquad A_1 = -eHx_2. \tag{236}$$

Подставляя (178), (240) в (216) и (218) и полагая для упрощения выкладок $k_1 = 1$, приходим к гамильтониану

$$H_s = \sigma_1 am + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{m} + 2iak\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{m}(\sigma_1 + i\sigma_2)[2a(k\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 - ek_0\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}], \tag{237}$$

где $k_0 = (ak^2 - k_1')$ можно считать независимым параметром.

Преобразуем H_s к такой форме, чтобы он зависел только от коммутирующих операторов. Это позволит определить собственные значения гамильтониана (235), не решая уравнений движения.

Используя оператор

$$U=\frac{1}{2}\left(1+\sigma_3\frac{h}{\sqrt{h^2}}\right)\left(1+\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\right),\quad U^{-1}=\left(1-\frac{i}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\pi}\right)\left(1-\sigma_3\frac{h}{\sqrt{h^2}}\right),$$

где η_a заданы формулой (66), а $h=\sigma_1 am+\frac{ek_0}{m}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{H}$, получаем:

$$H_s'=UH_sU^{-1}=\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}+S_3H+\sigma_3\left(a^2m^2+2ak_0S_3H\right)^{1/2}. \tag{238}$$

Все величины, входящие в гамильтониан (238), коммутируют друг с другом и с H_s' и имеют такие собственные значения [34]:

$$\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m}\Phi=\frac{1}{2m}\left[(2n+1)eH+p_3^2\right],\qquad n=0,1,2,\dots,$$
$$S_3\Phi=s_3\Phi,\qquad s_3=-s,-s+1,\dots,s,\qquad \sigma_3\Phi=\varepsilon\Phi,\qquad \varepsilon=\pm1,$$

откуда заключаем, что собственные значения H_s' равны:

$$E_{\varepsilon ns_3p_3}=(2n+1+2s_3)\frac{eH}{2m}+\frac{p_3^2}{2m}+\varepsilon\left(a^2m^2+2ak_0s_3H\right)^{1/2}. \tag{239}$$

Положив в (239) $k_0=0$, $s=1/2$, получаем формулу, которая с точностью до несущественного слагаемого εam задает известный спектр энергий нерелятивистской частицы в однородном магнитном поле (уровни Ландау). Если же $k_0\neq0$, но $k_o\ll am$, то

$$E_{\varepsilon ns_3p_3}=\left[2n+1+2s_3(1+\varepsilon k_0)\right]\frac{eH}{2m}+\varepsilon am+\frac{\varepsilon k_0^2e^2H^2S_3^2}{8am^3}+o\left(\frac{1}{m^5}\right). \tag{240}$$

Формула (240) в отличие от случая $k_0=0$ включает поправку, учитывающую отклонение дипольного момента частицы от единицы, и поправку, квадратичную по напряженности магнитного поля.

Явный вид собственных функций оператора (237), который легко найти, используя результаты [17], здесь не приведен.

Заключение

1. Найденные выше системы дифференциальных уравнений первого и второго порядка (177), (178), (200), (216)–(218) и (224) инвариантны относительно преобразований Галилея и калибровочных преобразований и описывают дипольное, квадрупольное, спин-орбитальное и дарвиновское взаимодействия частицы произвольного спина с внешним электромагнитным полем. Альтернативный способ галилеевски-инвариантного описания спин-орбитального взаимодействия предложен в работе [10], где используются уравнения ЛХГ в гамильтоновой форме. Перечисленные взаимодействия, таким образом, не являются чисто релятивистскими эффектами и их можно последовательно рассматривать в рамках нерелятивистской квантовой механики. В работе [38] наш вывод [8, 9] о нерялитивистской природе спин-орбитального взаимодействия обсужден с классических позиций.

2. Уравнения вида (64) и (114), конечно, не исчерпывают всех возможных линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея. Так, для описания нерелятивистской частицы со спином $s = 1$ можно использовать галилеевски-инвариантный аналог уравнений Прока

$$\begin{aligned} &\left(2mp_0 - \boldsymbol{p}^2\right)\Psi_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \\ &m\Psi_0 - p_a\Psi_a = 0, \qquad a = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{241}$$

Уравнения (241) являются частным случаем систем уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} &C_1\Psi \equiv \left(2mp_0 - \boldsymbol{p}^2\right)\Psi, \\ &C_2\Psi \equiv W_aW_a\Psi \equiv \left[m^2\boldsymbol{S}^2 + m\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{S})\right]\Psi = m^2 s(s+1)\Psi, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — операторы Казимира (13) для представлений (36).

3. Неэрмитовость генераторов (36) относительно скалярного произведения типа (32) обусловлена неунитарностью конечномерных представлений однородной группы Галилея. Аналогичная ситуация имеет место в релятивистской теории, где на решениях конечных систем уравнений реализуются неунитарные представления однородной группы Лоренца, а требование унитарности этих представлений эквивалентно переходу к системам уравнений для функций с бесконечным числом компонент. Поэтому интересно рассмотреть бесконечнокомпонентные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея. Примером таких уравнений могут служить системы (114), (173), где $\hat{S}_{kl}$ — генераторы унитарного бесконечномерного представления группы $O(1,5)$.

4. После того как рукопись настоящей статьи была сдана в редакцию, мы познакомились с работой [37], где также показано, что требование галилеевской инвариантности уравнений движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле не приводит однозначно к минимальному взаимодействию частицы с полем, но допускает также другие типы взаимодействий. Этот результат хорошо согласуется с данными [8]–[14].

Приложение 1
Неприводимые представления алгебры Ли расширенной группы Галилея

Неприводимые представления алгебры (6)–(10) получим в ортогональном базисе $|c, p, \lambda\rangle$, где $|\ldots\rangle$ — собственные векторы полного набора коммутирующих операторов C_a (13), P_μ и $\Lambda = P_a \cdot J_a \cdot P^{-1}$, $P = \left\{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right\}^{1/2}$:

$$\begin{aligned} &C_a|c,\hat{p},\lambda\rangle = c_a|c,\hat{p},\lambda\rangle, \qquad a = 1, 2, 3, \\ &P_\mu|c,\hat{p},\lambda\rangle = p_\mu|c,\hat{p},\lambda\rangle, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ &\Lambda|c,\hat{p},\lambda\rangle = \lambda|c,\hat{p},\lambda\rangle. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Интересно рассмотреть только такие представления, которые не сводятся к представлениям какой-нибудь подалгебры алгебры (6)–(10).

Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма. *Алгебра Ли, определяемая коммутационными соотношениями*

$$
\begin{aligned}
&[\lambda_1, \lambda_2] = [\lambda_2, \lambda_3] = [\lambda_3, \lambda_1] = i\frac{c_2^2}{\sqrt{3}}\lambda_0, \\
&[\lambda_0, \lambda_a] = \frac{i}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{abc}(\lambda_b - \lambda_c), \qquad a, b, c = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{П.2}
$$

где c_2^2 — произвольное действительное число; при $c_2^2 > 0$ изоморфна алгебре Ли группы $O(3)$, в случае $c_2^2 = 0$ — алгебре Ли группы $E(2)$ и при $c_2^2 < 0$ — алгебре Ли группы $O(1,2)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что среди четырех элементов λ_μ алгебры (П.1) только три линейно независимых, поскольку всегда можно положить

$$
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.
$$

Изоморфизм, сформулированный в лемме, можно установить с помощью следующих соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0 = K_3, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[K_1\left(1+\sqrt{3}\right) + K_2\left(1-\sqrt{3}\right)\right], \\
&\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[K_1\left(1-\sqrt{3}\right) + K_2\left(1+\sqrt{3}\right)\right], \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{3}(K_1 + K_2),
\end{aligned} \tag{П.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&K_1 = mS_1, \qquad K_2 = mS_2, \qquad K_3 = S_3, \qquad \text{если} \quad c_2^2 = m^2 > 0, \\
&K_1 = T_1, \qquad K_2 = T_2, \qquad K_3 = T_0, \qquad \text{если} \quad c_2^2 = 0, \\
&K_1 = \eta S_{01}, \qquad K_2 = \eta S_{02}, \qquad K_3 = S_{12}, \qquad \text{если} \quad c_2^2 = -\eta^2 < 0,
\end{aligned} \tag{П.4}
$$

а S_a, T_α, $S_{\alpha\beta}$ ($a = 1, 2, 3$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2$) — генераторы групп $O(3)$, $E(2)$ и $O(1,2)$ соответственно, т.е. матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$
\begin{aligned}
&[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c, \\
&[T_1, T_0] = -iT_2, \qquad [T_2, T_0] = iT_1, \qquad [T_1, T_2] = 0, \\
&[S_{01}, S_{02}] = -iS_{12}, \qquad [S_{01}, S
\end{aligned}
$$

Теорема. *Произвольное эрмитовое представление алгебры Ли расширенной группы Галилея (6)–(10) можно реализовать с помощью операторов*

$$\begin{aligned}
&P_0 = p_0, \qquad P_a = p_a, \qquad M = m,\\
&J_a = -i\left(\boldsymbol{p}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right)_a + \lambda_0\frac{\sqrt{3}p_a + p}{\sqrt{3}p + p_1 + p_2 + p_3},\\
&G_a = -ip_0\frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{p})_a}{p^2} - \frac{\varepsilon_{abc}(p_b - p_c)\lambda_0 mp - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p}}{2p^2\left(\sqrt{3}p + p_1 + p_2 + p_3\right)},
\end{aligned} \qquad (\text{П}.6)$$

где λ_μ — матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (П.2).

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы (П.6) удовлетворяют коммутационным соотношениям (6)–(10), т.е. реализуют представление алгебры Ли расширенной группы Галплея.

Покажем, что перебирая все неприводимые представления алгебры (П.2), получим по формулам (П.6) представления алгебры (6)–(10), соответствующие всем возможным значениям инвариантных операторов (13). Подставив (П.6) в (13), получим:

$$C_1 = 2mp_0 - \boldsymbol{p}^2, \qquad C_2 = m, \qquad C_3 = m^2\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \qquad (\text{П}.7)$$

Используя изоморфизм (П.3), (П.4), оператор C_3 (П.7) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&C_3 = m^2\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right), \quad \text{если} \quad C_2^2 = m^2 > 0,\\
&C_3 = T_1^2 + T_2^2, \quad \text{если} \quad C_2 = 0.
\end{aligned} \qquad (\text{П}.8)$$

Из (П.8) видно, что инвариантный оператор C_3 выражается через операторы Казимира групп $O(3)$ и $E(2)$ — малых групп группы Галилея, собственные значения которых (совместно с C_1 и C_2) нумеруют все неприводимые эрмитовые представления алгебры (6)–(10). Теорема доказана.

Таким образом, эрмитовые неприводимые представления $D(C_1, C_2, C_3)$ алгебры (6)–(10) можно разделить на три класса, соответствующих следующим значениям инвариантных операторов (П.6):

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad -\infty < C_1 < \infty, \quad -\infty < C_2 < 0, \quad 0 < C_2 < \infty, \quad C_3 = m^2 s(s+1),\\
&\text{II.} \quad -\infty < C_1 < 0, \quad C_2 = C_3 = 0,\\
&\text{III.} \quad -\infty < C_1 < \infty, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = r^2 > 0.
\end{aligned} \qquad (\text{П}.9)$$

Используя явный вид матриц S_a и T_α [35] и принимая во внимание изоморфизм (П.3) и (П.4), нетрудно вычислить явные выражения для матриц λ_μ в базисе $|c, \hat{p}, \lambda\rangle$

$$\begin{aligned}
&\lambda_0|c,\hat{p},\lambda\rangle = \lambda^\alpha|c,\hat{p},\lambda\rangle, \qquad \alpha = \text{I}, \text{II}, \text{III},\\
&\lambda_1|c,\hat{p},\lambda\rangle = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(a^\alpha_{\lambda,\lambda+1}|c,\hat{p},\lambda+1\rangle + a^\alpha_{\lambda,\lambda-1}|c,\hat{p},\lambda-1\rangle\right),\\
&\lambda_2|c,\hat{p},\lambda\rangle = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(b^\alpha_{\lambda,\lambda+1}|c,\hat{p},\lambda+1\rangle + b^\alpha_{\lambda,\lambda-1}|c,\hat{p},\lambda-1\rangle\right)\\
&\lambda_3|c,\hat{p},\lambda\rangle = -(\lambda_1 + \lambda_2)|c,\hat{p},\lambda\rangle,
\end{aligned} \qquad (\text{П}.10)$$

где значения индекса α зависят от величин c_a (эта зависимость приведена в (П.8)). При этом

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{\rm I} = -s, -s+1, -s+2\ldots, s,\\
&a^{\rm I}_{\lambda,\lambda\pm1} = \left[\left(1+\sqrt{3}\right)\mp\left(1\pm\sqrt{3}\right)\right]\sqrt{s(s+1)-\lambda^{\rm I}\left(\lambda^{\rm I}\pm1\right)},\\
&b^{\rm I}_{\lambda,\lambda\pm1} = \left[\left(1-\sqrt{3}\right)\mp\left(1\mp\sqrt{3}\right)\right]\sqrt{s(s+1)-\lambda^{\rm I}\left(\lambda^{\rm I}\pm1\right)},\\
&\lambda^{\rm II} = \tilde\lambda, \qquad a^{\rm II}_{\lambda,\lambda\pm1} = b^{\rm II}_{\lambda,\lambda\pm1} = 0,\\
&\lambda^{\rm III} = n+\varphi, \qquad a^{\rm III}_{\lambda,\lambda\pm1} = r\left(1\pm\sqrt{3}\right)(1\pm i), \qquad b^{\rm III}_{\lambda,\lambda\pm1} = r\left(1\mp\sqrt{3}\right)(1\pm i),
\end{aligned}
\tag{П.11}
$$

где $n = 0,1,2,\ldots$, $0\le\varphi\le1$, а $\tilde\lambda$ и s — произвольные целые или полуцелые числа.

Формулы (П.1), (П.6), (П.9)–(П.11) (при фиксированных значениях C_a) полностью определяют явный вид генераторов группы Галилея для всех классов неприводимых представлений.

Представления I класса (которые обычно сопоставляются нерелятивистской частице со спином s, массой m и внутренней энергией $\varepsilon_0 = C_1/2m$) в другой реализации получены в [4]. Там же были найдены представления II класса алгебры (6)–(10), которые можно сопоставить нерелятивистской безмассовой частице. Такие представления имеют дополнительный инвариантный оператор $C_4 = J_aP_aP^{-1}$ и являются одномерными по индексу λ. Представления III класса бесконечномерны по спиновому индексу. Представления этого класса алгебры Ли расширенной группы Галилея по-видимому впервые получены в настоящей работе.

Отличительной чертой реализации (П.6) является одинаковая и симметричная форма генераторов P_μ, J_a, G_a для всех классов неприводимых представлений (в то время как обычно [4] неприводимые представления различных классов имеют совершенно разную реализацию). В случае $m=0$ особенно $C_3=0$ аналитические выражения для операторов G_a значительно упрощаются (при этом $m=\lambda_a\equiv0$).

Связь представления (П.6) с реализациями, полученными в [4], задается формулами

$$
\begin{aligned}
&U_\alpha G^\alpha_a U^\dagger_\alpha = G_a, \qquad U_\alpha J^\alpha_a U^\dagger_\alpha = J_a, \qquad U_\alpha P^\alpha_\mu U^\dagger_\alpha = P_\mu, \qquad \alpha = {\rm I}, {\rm II},\\
&U_{\rm I} = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p}}{2m\tilde p}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\tilde p}{p_1+p_2+p_3}\right),\\
&\tilde p = \left[(p_1-p_2)^2+(p_3-p_1)^2+(p_2-p_3)^2\right]^{1/2},\\
&U_{\rm II} = \exp\left(2i\lambda_0\,\mathrm{arctg}\,\frac{p_2-p_1}{\left(\sqrt{3}+1\right)(p+p_3)+p_1+p_2}\right),
\end{aligned}
$$

где $P^{\rm I}_\mu$, $J^{\rm I}_a$, $G^{\rm I}_a$ и $P^{\rm II}_\mu$, $J^{\rm II}_a$, $G^{\rm II}_a$ — генераторы группы Галилея I и II класса в реализации, найденной в [4], а P_μ, J_a, G_a задаются формулами (П.6).

Отметим, что формулы (П.2), (П.6) определяют также представления IV класса, соответствующие $C_2^2<0$. Эти представления неэрмитовы, хотя и порождаются эрмитовыми представлениями алгебры $O(1,2)$. Однако операторы, образующие прямую сумму таких представлении:

$$\hat{P}_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu & 0 \\ 0 & P_\mu \end{pmatrix}, \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_a = \begin{pmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_a \end{pmatrix}, \qquad \hat{G}_a = \begin{pmatrix} G_a & 0 \\ 0 & G_a \end{pmatrix},$$

где P_μ, J_a, G_a задаются соотношениями (П.2), (П.6) с $c_2^2 < 0$, эрмитовы в индефинитной метрике

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int d^3p\, \varphi_1^\dagger(\boldsymbol{p})\sigma_1\varphi_2(\boldsymbol{p}),$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

Ψ и χ — элементы из пространства представлений $D(c_1, c_2, c_3)$ и $D(c_1^*, c_2, c_3)$, I и 0 — единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности.

Приложение 2
О связи между представлениями расширенной группы Галилея и обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$

Расширенная группа Галился G является подгруппой обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ — группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского. Это означает, в частности, что каждое представление группы $P(1,4)$ определяет представление группы G, которое в общем случае будет приводимым.

Алгебру Ли группы $P(1,4)$ образуют пятнадцать генераторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$), удовлетворяющих коммутационным соотношениям [31]

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\lambda}] = i(g_{\mu\nu}P_\lambda - g_{\mu\lambda}P_\nu), \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma}), \end{aligned} \tag{П.12}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор; $g_{00} = -g_{kk} = 1$, $k = 1,2,3,4$; $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$.

Переходя в (П.12) к новому базису

$$\begin{aligned} &\hat{P}_0 = P_0 - P_4, \qquad M = \frac{1}{2}(P_0 + P_4), \qquad \hat{P}_a = P_a, \qquad K = J_{04}, \\ &J_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}J_{bc}, \qquad G_a^+ = \frac{1}{2}(J_{0a} + J_{4a}), \qquad G_a^- = J_{0a} - J_{4a}, \end{aligned} \tag{П.13}$$

получаем следующую алгебру (изоморфную (П.12)):

$$\begin{aligned} &[\hat{P}_0, \hat{P}_a] = [\hat{P}_0, M] = [\hat{P}_a, M] = [\hat{P}_a, \hat{P}_b] = 0, \\ &[\hat{P}_0, J_a] = [M, J_a] = [G_a^+, G_b^+] = [M, G_a^+] = 0, \qquad [\hat{P}_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}\hat{P}_c, \\ &[\hat{P}_a, G_b^+] = i\delta_{ab}M, \qquad [J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \qquad [\hat{P}_0, G_b^+] = i\hat{P}_b, \end{aligned} \tag{П.14}$$

$$\begin{aligned} &[\hat{P}_0, G_a^-] = [G_a^-, G_b^-] = 0, \qquad [G_a^-, M] = -i\hat{P}_a, \qquad [G_a^-, J_b] = i\varepsilon_{abc}G_c^-, \\ &[G_a^-, \hat{P}_b] = -i\delta_{ab}\hat{P}_0, \quad [G_a^-, G_b^+] = -i(\varepsilon_{abc}J_c + \delta_{ab}K), \quad [\hat{P}_0, K] = -i\hat{P}_0, \\ &[\hat{P}_a, K] = [J_a, K] = 0, \qquad [M, K] = iM, \qquad [G_a^\pm, K] = \pm iG_a^\pm. \end{aligned} \tag{П.15}$$

Коммутационные соотношения (П.13) совпадают с (6)–(10), т.е. определяют алгебру Ли расширенной группы Галплея.

Из изложенного выше следует, что любое уравнение, инвариантное относительно группы $P(1,4)$, инвариантно также относительно расширенной группы Галилея. Так, например, пятимерное уравнение Клейна–Гордона

$$P_\mu P^\mu \Psi = 0, \qquad P_\mu = p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \mu = 0,1,2,3,4,$$

с помощью замены (П.13) приводят к форме, явно инвариантной относительно группы Галилея

$$\left(2M\hat{P}_0 - \hat{P}_a\hat{P}_a\right)\Psi = 0. \tag{П.16}$$

Уравнение (П.16) можно интерпретировать как уравнение Шредингера для частицы с переменной массой.

В работе [36] осуществлена редукция произвольного неприводимого представления группы $P(1,4)$ по представлениям группы G, т.е. полностью исследован вопрос, какие неприводимые представления группы G входят в заданное представление группы $P(1,4)$, и найден явный вид унитарных операторов, связывающих канонический базис представлений группы $P(1,4)$ с G-базисом, в котором операторы Казимира (13) диагональны.

1. Inönü E., Wigner E.P., *Nuovo Cimento*, 1952, **9**, 705.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1.
3. Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 2, Leipzig, 1890.
4. Levi-Leblond J.-M., *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, 776.
5. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286; 1967, **4**, 157; in: Group Theory and Its Applications, ed. E.M. Loebl, Vol.2, N.Y.–Lond., Academic Press, 1971.
6. Hagen C.R., Hurley W.J., *Phys. Rev. Lett.*, 1970, **26**, 1381.
7. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, 2339; 1974, **7**, 1185.
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, 483.
9. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, 81.
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Rep. Math. Phys.*, 1977, **13**, 175.
11. Никитин А.Г., Салогуб В.А., *Укр. физ. журн.*, 1975, **20**, 1730.
12. Никитин А.Г., Фущич В.И., Международный семинар по теоретико-групповым методам в физике, Звенигород, 1979, Москва, Наука, 1980, Т.2, 35–41.
13. Никитин А.Г., Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1980, **44**, 34.
14. Никитин А.Г., *Укр. физ. журн.*, 1981, **26**, 2011.
15. Никитин А.Г., *Укр. физ. журн.*, 1973, **12**, 1000.
16. Фущич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **8**, 192; Никитин А. Г., Фущич В. И., *Теор. и мат. физ.*, 1978, *34*, 319.
17. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, 501.
18. Ryder L.H., *Nuovo Cimento*, 1967, **3**, 879.
19. Brennich R.H., *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1970, **13**, 137.
20. Steinwedel N., *Fort. Phys.*, 1976, **24**, 211.
21. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

22. Hagen C.R., *Phys. Rev. D*, 1972, **5**, 377.
23. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802.
24. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Докл. АН СССР*, 1977, **232**, 801.
25. Никитин А.Г., Наконечный В.В., *Укр. физ. журн.*, 1980, **25**, 618.
26. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Math. Phys.*, 1978, **2**, 471.
27. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
28. Гельфанд И.М., Минлос Р.В., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения, М., Физматгиз, 1958.
29. Paravicini G., Sparzani A., *Nuovo Cimento A*, 1970, **66**, 579.
30. George C., Levi-Nahas M., *J. Math. Phys.*, 1966, **7**, 980.
31. Фущич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, 3.
32. Roman P., Leveille J.P., *J. Math. Phys.*, 1974, **10**, 1760;
    Celeghni E., Lusanna L., Sorace E., *Nuovo Cimento A*, 1976, **31**, 89.
33. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
34. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М., Квантовая механика, М., Физматгиз, 1969, с. 493.
35. Lomont D.S., Moses H.E., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 405.
36. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A*, 1980, **13**, 2319.
37. Kraus K., *Ann. Phys.*, 1980, **37**, 82.
38. Chatterjee R., Lulek T., *Acta Phys. Polon. A*, 1979, **56**, 205;
    Chatterjee R., *Canad. J. Phys.*, 1979, **57**, 2072.

О дополнительной инвариантности уравнений для векторных полей

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ВЛАДИМИРОВ

В работах [1, 2] предложен метод исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений, отличный от классического метода Ли–Овсянникова. С помощью этого метода, называемого в дальнейшем нелиевским, установлена дополнительная инвариантность уравнений Дирака, Максвелла [2], а также ряда других пуанкаре-инвариантных уравнений.

В настоящей работе показано, что система уравнений Прока

$$\left(\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} - m^2\right)\psi^{\nu}(x) = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{1.1}$$

$$\hat{p}_{\mu}\psi^{\mu}(x) = 0, \tag{1.2}$$

где $\hat{p}_{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, $\mu = 0,1,2,3$, и некоторые другие уравнения второго порядка обладают дополнительной симметрией, которая не может быть найдена с помощью метода Ли–Овсянникова [3].

1. Определение. *Пусть $L(x,\hat{p})$ — линейный дифференциальный оператор. Будем говорить, что уравнение*

$$L(x,\hat{p})\psi(x) = 0, \tag{2}$$

инвариантно относительно некоторого множества операторов $Q = \{Q_A\}$, если для всякого A

$$L(x,\hat{p})Q_A\psi = 0. \tag{3}$$

Максимальной в смысле С. Ли алгеброй инвариантности уравнения Прока является алгебра Пуанкаре P [1, 3], базисные элементы которой задаются операторами

$$\begin{aligned} &\hat{P}_{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad \mu = 0,1,2,3,\\ &\hat{J}_{\mu\nu} = x_{\mu}\hat{p}_{\nu} - x_{\nu}\hat{p}_{\mu} + S_{\mu\nu}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \end{aligned} \tag{4}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие конечномерное представление $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ алгебры Ли группы $O(1,3)$[1]. Если в (1.1) положить $m = 0$, перейдя таким образом к уравнениям, описывающим 4-потенциал свободного электромагнитного поля, то алгебра инвариантности системы (1) помимо множества (5) будет включать оператор дилатации

$$D = x^{\mu}\hat{p}_{\mu} + R, \tag{5}$$

Доклады Академии наук СССР, 1981, **257**, № 5, С. 1105–1108.

[1]Матричные элементы $S_{\mu\nu}$ имеют следующий вид:

$$(S_{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = i\left(g^{\alpha}_{\mu}g_{\beta\nu} - g^{\alpha}_{\nu}g^{\beta}_{\mu}\right), \qquad \alpha,\beta,\mu,\nu = 0,1,2,3, \qquad q_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1).$$

где R — произвольная постоянная. Напомним, что в подходе С. Ли алгебра симметрии ищется в классе дифференциальных операторов первого порядка. Ниже с помощью нелиевского метода будет показано, что система (1) при $m = 0$ инвариантна относительно 15-мерной конформной алгебры, базисные элементы которой являются интегродифференциальными операторами.

Теорема 1. *Уравнение Прока (дополнительно) инвариантно относительно 9-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами следующего вида*[2]*:*

$$\begin{aligned}\hat{D}_{ab} = 2^{-1}\left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{-1}\{&2^{-1}p_ap_b(2\boldsymbol{S}^2+[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})][\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})])+\\ &+p_0\left[p_b(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})_a+p_a(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})_b-\left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)\boldsymbol{S}^2\delta_{ab}\right]-\\ &-(p_b[\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{N})\times\boldsymbol{p}]_a+[(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{S})\times\boldsymbol{p}]_bp_a)-2p_0[(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_bS_a+\\ &+\boldsymbol{S}_b(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_a]+2(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_b(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{p})_a\},\quad a,b=1,2,3,\end{aligned} \tag{6}$$

где $S_a = -\frac{i}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}$*,* $N_a = -iS_{0a}$*,* $a, b, c = 1, 2, 3.$

Доказательство. Запишем систему (1)в следующих обозначениях:

$$L_0(p)\psi(x) = 0, \qquad L_0(p) = \left(p^\mu p_\mu - m^2\right)I, \tag{7.1}$$

$$L_1(p)\psi(x) = 0, \qquad L_1(p) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

где $\psi(x)$ — вектор- функция с компонентами $\{\psi^0(x), \psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x)\}$.

Следуя нелиевскому алгоритму [2], найдем множество операторов $\{Q_A\} = \{D_{ab}\}$, удовлетворяющих условию инвариантности (3). Для этой цели расщепим систему (7) на незацепляющиеся подсистемы. Это достигается с помощью обратимого оператора $U(p)$, матричные элементы которого имеют вид

$$(U(p))^\mu_\nu = \left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left[p_0g^\mu_\nu - g^\mu_0p_\nu + p^\mu g_{\nu0} + 2g^\mu_0g_{\nu0}p_0 - \varepsilon_{krj}p_kg^\mu_rg_{\nu j}\right], \tag{8}$$

$$\left(U^{-1}(p)\right)^\mu_\nu = \left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left[p_0g^\mu_\nu + g^\mu_0p_\nu + p^\mu g_{\nu0} - 2g^\mu_0g_{\nu0}p_0 + \varepsilon_{krj}p_kg^\mu_rg_{\nu j}\right]. \tag{9}$$

В силу коммутативности $L_0(p)$ и $U^{-1}(p)$ система (7) эквивалентна следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$L_0\tilde{\psi} = 0, \qquad \tilde{L}_1\tilde{\psi} = 0, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\psi} = \tilde{U}^{-1}(p)\psi, \qquad \tilde{L}_1 = L_1U(p) = \left(p_0^2+\boldsymbol{p}^2\right)^{1/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Теперь нетрудно найти оператор, удовлетворяющий условию инвариантности

$$L_0\tilde{Q}_A\tilde{\psi} = 0, \qquad \tilde{L}_1\tilde{Q}_A\tilde{\psi} = 0. \tag{12}$$

[2]В формуле (6) и далее мы опускаем “шляпку” над символом p.

Очевидно, что каждый оператор вида

$$Q(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{11}(p) & q_{12}(p) & q_{13}(p) \\ 0 & q_{21}(p) & q_{22}(p) & q_{23}(p) \\ 0 & q_{31}(p) & q_{32}(p) & q_{33}(p) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $q_{ij}(p)$ — произвольные функции от p^μ, удовлетворяет условию (12).

Зададим базис в множестве (13) с помощью матриц

$$\tilde{D}_{ab} = S_b S_a = \frac{1}{2}(N_a N_b + S_b S_a), \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{14}$$

реализующих трехмерное представление алгебры Ли группы $GL(3)$. Операторы (6) получаются из матриц $\tilde{D}_{ab}$ согласно формулам

$$\hat{D}_{ab} = U(p)\tilde{D}_{ab}U^{-1}(p). \tag{15}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Матричные элементы операторов (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\hat{D}^{ab}\right)^\mu_\nu &= -2^{-1}\left(p_0^2 + \boldsymbol{p}^2\right)^{-1}\left(p_0 g^\mu_a - g^\mu_0 p_a + \varepsilon_{akr} g^\mu_r p_k\right) \times \\ &\quad \times \left(p_0 g_{\nu b} + p_b g_{\nu 0} - \varepsilon_{jsb} g_{\nu j} p_s\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$\hat{D}_{ab}$ — ограниченные интегродифференциальные операторы. Вся интегральность содержится в члене $\left(p_0^2 + \boldsymbol{p}^2\right)^{-1}$.

Замечание 2. Преобразование $U(p)$, расщепляющее уравнения (7), очевидно, не единственно. Так, например, оператор

$$\begin{aligned} (V(p))^\mu_\nu &= \left(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left(p_0 g^\mu_\nu - g^\mu_0 p_\nu + p^\mu g_{\nu 0} - i\varepsilon_{krl} g^\mu_r g_{\nu l} p_k\right), \\ \left(V^{-1}(p)\right)^\mu_\nu &= \left(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2\right)^{-1/2}\left(p_0 g^\mu_\nu + g^\mu_0 p_\nu - p^\mu g_{\nu 0} + i\varepsilon_{krl} g^\mu_r g_{\nu l} p_k\right) \end{aligned} \tag{17}$$

также диагонализирует $L_1(p)$. Если использовать преобразование $V(p)$ вместо $U(p)$ и вычислить по формуле (15) явный вид операторов $\hat{D}_{ab}$, то получатся не интегродифференциальные операторы, а дифференциальные операторы второго порядка

$$\left(\hat{D}_{ab}\psi\right)^\mu = m^{-2}\left(p_0 g^\mu_a - g^\mu_0 p_a + i\varepsilon_{kaj} g^\mu_k p_j\right)\left(p_b g_{\nu 0} - p_0 g_{\nu b} + i\varepsilon_{bsn} g_{\nu s} p_n\right)\psi^\nu. \tag{18}$$

2. Рассмотрим систему (1) для случая $m = 0$

$$L_0\psi = 0, \qquad L_0 = p^\mu p_\mu I, \tag{19.1}$$

$$L_1\psi = 0. \tag{19.2}$$

Условие (19.2) называется *калибровочным условием Лоренца*, нередко также используют *калибровку Кулона*

$$L_2\psi = 0, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Калибровка Кулона эквивалентна калибровке Лоренца. Эквивалентность устанавливается с помощью интегродифференциального оператора*

$$
\begin{aligned}
W(p) &= 2^{-1/2} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \left(p_0 I - \boldsymbol{S}\boldsymbol{p} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{N}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})] \right), \\
W^{-1}(p) &= 2^{-1/2} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \left(p_0 I + \boldsymbol{S}\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{N}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})] \right),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
L_2(p) W(p) \tilde{\psi} = 2^{-1/2} L_1(p) \tilde{\psi}, \tag{22}
$$

где $\tilde{\psi} = W^{-1}(p)\psi$.

Теорема 3. *Система уравнений (19) инвариантна относительно 9-мерной алгебр Ли группы* $GL(3)$*, базисные элементы которой имеют вид*

$$
\hat{D}_{ab} = 2^{-1} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \left\{ p_0 \left(2S_b S_a - \boldsymbol{S}^2 \delta_{ab} \right) + p_a (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})_b \right\}. \tag{23}
$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 1. Для получения формулы (23) нужно использовать вместо $U(p)$ оператор

$$
\begin{aligned}
W_1(p) = \exp \Bigg\{ & (\ln \sqrt{2}) \left[1 + \left(\frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \right)^2 \right] - \\
& - \frac{\pi}{4} \cdot 2^{-1} p_0 \boldsymbol{p}^{-2} [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{N}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})] \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Теорема 4. *Система (7) инвариантна относительно конформной алгебры, базисные элементы которой задаются интегродифференциальными операторами*

$$
\begin{aligned}
& p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad D = x^\mu p_\mu + i, \\
& J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + 2^{-1} i p_0 \boldsymbol{p}^{-2} [(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})_a p_b - (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})_b p_a], \\
& J_{0k} = x_0 p_k - x_k p_0 + i p_0 (2p)^{-2} \{ 2p_0 (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})_k - [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})][\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{N}) p_k \}, \\
& K_\alpha = 2x_\alpha D - x^\sigma x_\sigma p_\alpha + 2^{-1} i p_0 \boldsymbol{p}^{-2} \{ [\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})][\boldsymbol{p}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{N})](x_0 p_\alpha - D g^0_\alpha) - \\
& \qquad - 2(\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{S})_k (g^k_\alpha D - x^k p_\alpha) \}, \qquad a, b, k = 1, 2, 3, \quad \alpha, \sigma = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Доказательство. Воспользовавшись оператором (24), получим каноническую систему незацепляющихся интегродифференциальных уравнений для вектор-функции $(\tilde{\psi})^\mu = \left(W_1^{-1}(p)\psi \right)^\mu$, причем компоненты $(\tilde{\psi})^j$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнению Даламбера без дополнительных условий. Представление конформной алгебры в канонической форме можно реализовать с помощью операторов

$$
\begin{aligned}
& \tilde{p}_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Pi_3, \qquad \tilde{J}_{\mu\nu} = (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) \Pi_3, \\
& \tilde{D} = (x^\mu p_\mu + i) \Pi_3, \qquad \tilde{K}_\alpha = (2x_\alpha \tilde{D} - x^\sigma x_\sigma p_\alpha) \Pi_3,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где Π_3 — матрица вида

$$
\Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Совершив обратное преобразование, получаем формулу (25).

Замечание 3. Операторы $\hat{J}_{ab}$, $\hat{J}_{0k}$ и K_α задаются на множестве решений системы (19), поэтому слагаемые вида $R_0(p)L_0(p)+R_1(p)L_1(p)$ в форму ле (25) опускаются.

1. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint 70-32E, Inst. for Theor. Phys., Kiev, 1970; *Теор. и матем. физ.*, 1971, **7**, № 1,3; *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508.
2. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.

On the new symmetries of Maxwell equations

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

The known symmetries of the Maxwell equations are summarized. Then new symmetries of these equations found by the authors are reviewed. These symmetries are generated by infinitesimal integrodifferential operators of the eight-dimensional Lie algebra. Their physical meaning is not clear.

Before considering the new symmetries of the Maxwell equations

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0 \tag{1}$$

it is natural to remind shortly the well-known data on symmetry properties of eqs. (1).

In 1890 Heaviside wrote the original Maxwell equations in the modern form (1) (independently it has been done by Hertz) and paid attention to their invariance under the transformation

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}. \tag{2}$$

Larmor [1] and Rainich [2] demonstrated that this symmetry may be extended to one-parametrical group of the following transformations

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}\cos\theta + \boldsymbol{H}\sin\theta, \\ &\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}\cos\theta - \boldsymbol{E}\sin\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

In 1904 Lorentz found the linear transformations of space and time variables and the corresponding transformations for $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$, under which the free Maxwell equations remain invariant. In 1905 Poincaré and Einstein have demonstrated that the Maxwell equations are invariant under the Lorentz transformations also in the presence of charges and currents. Poincaré first established and studied in detail one of the most important properties of these transformations — their group structure and demonstrated that “Lorentz transformations are nothing but the rotations in the space of four dimensions, a point of which has coordinates $(x, y, z, \sqrt{-1}t)$”. So it was Poincaré who united the space and time into the four-dimensional space-time three years before Minkowski [3].

In 1909 Bateman [4] and Cunningham [5] proved eqs. (1) to be invariant under non-linear conformal transformations. Bateman demonstrated the conformal group $C(1,3)$ to be the maximal symmetry group of Maxwell equations with charges and currents.

One hundred years ago, S. Lie created the mathematical methods of group analysis of differential equations [6]. It is a surprising fact that these methods have only recently been used for the investigation of group properties of eqs. (1). It turned

Czechoslovak Journal of Physics B, 1982, **32**, P. 476–480.
Invited talk presented at the International Symposium “Selected Topics in Quantum Field Theory and Mathematical Physics”, Bechyne, Czechoslovakia, June 14–19, 1981.

out that the maximal local invariance group of eqs. (1) is the direct product of the conformal group and of the Heaviside–Larmor–Rainich one (3), i.e. $C(1,3) \otimes H$ [7].

In connection with the facts mentioned above the impression may arise that the symmetry properties of eqs. (1) have been completely investigated and there is no hope to discover any new symmetry of these equations. But it is not true. It appears that all the relativistic equations of motion for spinning particles possess an additional non-geometrical symmetry under the group $U(2) \otimes U(2)$ (the only exception is the Weyl equation) [9–11]. The basis elements Q_A $(A = 1, 2, \dots, 8)$ of Lie algebra of this group are not the first-order differential operators, but the integro-differential ones. That is why this non-geometrical symmetry could not be discovered by the infinitesimal Lie method.

In general case the non-geometrical symmetry of the relativistic equations of motion is more extensive than the symmetry $U(2) \otimes U(2)$ and increases with the rise of spin [9, 15].

Let us denote by $\{Q_A\}$ the basis elements of a finite-dimensional Lie algebra. This algebra is by the definition the invariance algebra of Maxwell equations if Q_A are defined on the set of solutions of eqs. (1), i.e. satisfy the conditions

$$\begin{aligned} &L_1 Q_A \psi = 0, \qquad L_1 = i\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad \psi = \text{column}\,(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}), \\ &L_2 Q_A \psi = 0, \qquad L_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} S_1, \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & 0 \\ 0 & \hat{S}_a \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = i \begin{pmatrix} \hat{0} & I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

I and $\hat{0}$ are unit and zero 3×3 matrices, $\hat{S}_a$ are the spin matrices, $(\hat{S}_a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}$.

Theorem 1 [11, 14, 16]. *The Maxwell equations (1) are invariant under the 8-dimensional Lie algebra A_8, basis elements of which are the integro-differential operators of the form*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sigma_3 \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p} D, \qquad Q_2 = i\sigma_2, \qquad Q_3 = \sigma_1 \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p} D, \\ &Q_{3+a} = -i\sigma_2 \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p} Q_a, \qquad Q_7 = I, \qquad Q_8 = i\sigma_2 \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}, \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\begin{aligned} D = \Bigg\{ &\sum_{a\neq b\neq c} \left[\left(p_a^2 p_b^2 + p_a^2 p_c^2 - p_b^2 p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1 p_2 p_3 S_a S_b p_c \right] - \\ &- p p_1 p_2 p_3 \left[1 - \left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p} \right)^2 \right] \Bigg\} \varphi^{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[p_1^4 \left(p_2^2 - p_3^2\right)^2 + p_2^4 \left(p_3^2 - p_1^2\right)^2 + p_3^4 \left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \right]^{1/2},$$

σ_a are the Pauli matrices, commuting with S_a, $p = \left(\sum p_a^2\right)^{1/2}$. The operators (6) satisfy the algebra

$$[Q_a, Q_b] = -[Q_{3+a}, Q_{3+b}] = -\varepsilon_{abc} Q_c,$$
$$[Q_{3+a}, Q_b] = \varepsilon_{abc} Q_{3+c}, \qquad [Q_7, Q_A] = [Q_8, Q_A] = 0, \tag{8}$$

which is isomorphic to the Lie algebra of the group $U(2) \otimes U(2)$.

Proof. The correctness of the Theorem, i.e. that the operators (6) satisfy the commutation relations (8) and the conditions of invariance (4), may be verified by the direct calculations. But it is necessary to note that such a verification is very complicated. There exists another, more constructive proof of Theorem 1, which explains the nature of the non-geometrical symmetry of the relativistic equations of motion. This proof consists in the diagonalization (decomposition) of the Maxwell equations into independent subsystems [11, 14, 15]. Such a diagonalization of the operator L_1 is carried out by the operator

$$W = U_4 U_3 U_2 U_1, \qquad W^{-1} = W^{\dagger}, \tag{9}$$

where

$$U_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \sigma_2 - (1-\sigma_2) D \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{p}\right], \qquad U_2 = \exp(-iS_a\tilde{\theta}_a),$$
$$U_3 = \left[1 - i\left(S_1S_2 + S_2S_1 + 1 - S_3^2\right)\right]\Big/\sqrt{2}, \qquad U_4 = \exp\left[(S_2 - S_1) i\pi/4\sqrt{2}\right],$$
$$\tilde{\theta}_a = \varepsilon_{abc}(p_b - p_c)\,\mathrm{arctg}\left[\tilde{p}/(p_1+p_2+p_3)\right]/2\tilde{p},$$
$$\tilde{p} = \left[(p_1-p_2)^2 + (p_3-p_1)^2 + (p_2-p_3)^2\right]^{1/2}.$$

As a result one obtains

$$L_1' = W L_1 W^{-1} = i\frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0 p, \tag{10}$$

where Γ_0 is the diagonal matrix

$$\Gamma_0 = -i(S_1S_2 + S_2S_1)S_3 = \mathrm{diag}\,(1,-1,0,1,-1,0). \tag{11}$$

Now it is not difficult to find eight linearly independent matrices Q_A', which commute with the operator L_1'. These matrices may be chosen in the form

$$Q_a' = i\sigma_a, \qquad Q_{3+a}' = -i\Gamma_0 Q_a', \qquad Q_7' = I, \qquad Q_8' = i\Gamma_0. \tag{12}$$

The matrices (12) satisfy the algebra (8) and are connected with Q_A (6) by the transformation $Q_A = W^{-1} Q_A W$. It is obvious that the matrices (12) operating on the vector-function $\psi' = W\psi$ change their components but do not alter the variables (t, x). The theorem is proved.

Since Q_A (6) are integro-differential operators, we give the finite transformations, generated by Q_A, for the Fourier-components of E_a and H_a

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a' = \tilde{E}_a \cos\theta_1 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd} \tilde{E}_d \sin\theta_1,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a' = \tilde{H}_a \cos\theta_1 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd} \tilde{H}_d \sin\theta_1, \tag{13a}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \cos\theta_2 + \tilde{H}_a \sin\theta_2,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \cos\theta_2 - \tilde{E}_a \sin\theta_2, \tag{13b}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_3,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_3, \tag{13c}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab}\tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_4,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab}\tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_4, \tag{13d}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \operatorname{sh}\theta_5,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \operatorname{sh}\theta_5, \tag{13e}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_6 - D_{ab}\tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_6,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_6 + D_{ab}\tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_6, \tag{13f}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \exp\theta_7, \qquad \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \exp\theta_7, \tag{13g}$$

$$\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \cos\theta_8 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sin\theta_8,$$
$$\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \cos\theta_8 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sin\theta_8, \tag{13h}$$

So the formulae (13) give the explicit form of the transformations from the group $U(2)\otimes U(2)$ which remain (1) invariant. The transformation (13b) coincides with the Heaviside–Larmor–Rainich one (3). The transformations for $E(t,x)$ and $H(t,x)$ may be obtained from (13) by the Fourier integral

$$E'(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\,\tilde{E}'\exp(ipx),$$
$$H'(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\,\tilde{H}'\exp(ipx). \tag{14}$$

One can make sure that from the invariance of eqs. (1) under the algebra (6) it follows the existence of the following new constants of motion for the electromagnetic field

$$I_1 = \int d^3x \sum_{a,b,c,b\neq c}\left(\frac{\partial^2 E_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2 H_a}{\partial x_c^2} - \frac{\partial \dot{E}_a}{\partial x_a}\frac{\partial \dot{H}_a}{\partial x_a}\right),$$
$$I_2 = \int d^3x \sum_{a,b,c,b\neq c}\left(\frac{\partial^2 E_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2 E_a}{\partial x_c^2} - \frac{\partial^2 H_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2 H_a}{\partial x_c^2} - \frac{\partial \dot{E}_a}{\partial x_a}\frac{\partial \dot{E}_a}{\partial x_a} + \frac{\partial \dot{H}_a}{\partial x_a}\frac{\partial \dot{H}_a}{\partial x_a}\right), \tag{15}$$
$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Theorem 2. *The Maxwell equations (1) are invariant under the 23-dimensional Lie algebra, basis elements of which have the form (6) and (16):*

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x'_\mu p_\nu - x'_\nu p_\mu, \quad D = x'_\mu p^\mu + i, \quad K_\mu = 2x'_\mu D - x'_\nu x'^\nu p_\mu, \tag{16}$$

where

$$x'_a = W^{-1}x_a W, \qquad x'_0 = x_0 = t.$$

This theorem may be considered as unification of the results of Bateman and of the ones, established in Theorem 1. Proof is adduced in [14, 16].

In conclusion we note that the equations for the electromagnetic potential A_μ possess the non-geometrical symmetry $U(3)$ [17].

1. Larmor I., Collected papers, London, 1928.
2. Rainich G.I., *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
3. Minkowski G., in Principle of relativity, Atomizdat, Moscow, 1973 (in Russian).
4. Bateman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223.
5. Cunningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
6. Ovsjannikov L.V., Group analysis of differential equations, Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
7. Ibragimov N.H., Group properties of some differential equations, Nauka, Novosibirsk, 1967 (in Russian).
8. Danilov Yu.A., Group properties of Dirac equation, Preprint N 1736 of Kurchatov Atomic Energy Institute, Moscow, 1968 (in Russian).
9. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint 70-32E of Institute for Theoretical Physics, Kiev, 1970.
10. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **7**, 3 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1971, **7**, 3 (in English).
11. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 508.
12. Nikitin A.G., Segeda Yu.N., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1976, **29**, 82 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1976, **29**, 943 (in English).
13. Fushchych V.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 347.
14. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gnen.*, 1979, **12**, 747.
15. Fushchych W.I., in Group-Theoretical Methods in Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Kiev, 1978, 5–44 (in Russian).
16. Fushchych W.I., Nikitin A. G., in Group-Theoretical Methods in Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Kiev, 1978, 45–80 (in Russian).
17. Fushchych W.I., Vladimirov V.A., *Dokl. Akad. Nauk of USSR*, 1981, **257**, № 5, 1105–1108.

О точных решениях уравнения Борна–Инфельда

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Некоторый класс точных решений нелинейного уравнения Борна–Инфельда

$$u_{00} - u_{11} + u_0^2 u_{11} + u_1^2 u_{00} - 2u_0 u_1 u_{01} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1$, найден в [1]. Решения Барбашова и Черникова [1], как показано в [2], можно получить с помощью преобразования годографа.

I. В этой статье с использованием групповых свойств уравнения (1) найдены новые классы точных решений уравнения (1).

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно 5-мерной алгебры Ли с базисными операторами*

$$\begin{gathered} P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad J_{01} = x_0 P_1 - x_1 P_0, \\ D = x_\nu P^\nu - i, \qquad Q = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad x_\nu P^\nu = x_0 P_0 - x_1 P_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Доказательство теоремы проводится с помощью метода Ли–Овсянникова [3].

Алгебра (2) порождает следующие инфинитезимальные преобразования:

$$\begin{aligned} &x'_\mu = x_\mu + a\xi^\mu(x, u) + O\left(a^2\right), \qquad \mu = 0, 1, \\ &u' = u + a\eta(x, u) + O\left(a^2\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \qquad \eta = c_{00} u + d_2, \qquad \mu = 0, 1, \tag{4}$$

где $c_{00} = -c_{11}$, $c_{01} = -c_{10}$, d_μ, d_2 — некоторые параметры.

Решения уравнения (1) ищем в виде

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{5}$$

где $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$ — инварианты группы преобразований (3), т.е. первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x, u)} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}(x, u)} = \frac{du}{\eta(x, u)}. \tag{6}$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ находятся из (6), $\varphi(\omega)$ — неизвестная пока функция. В случае уравнения (1) φ зависит только от одной переменной $\omega = \omega_1$. Структура решения в виде (5) определяется из (6). О решении нелинейных многомерных волновых уравнений указанным способом см. [4].

Доклады Академии наук СССР, 1982, **263**, № 3, С. 582–586.

II. Не вдаваясь в подробности интегрирования системы (6), выпишем явный вид функций $f(x)$, $g(x)$ и инварианта $\omega = \omega_1(x)$. В зависимости от соотношений между $c_{\mu\nu}$, d_μ и d_2 рассмотрим несколько случаев.

$$1) \quad \omega = a_\nu x^\nu, \qquad f(x) = 1, \qquad g(x) = \beta_\nu x^\nu, \qquad a_\nu, \beta_\nu \quad \text{— const.}$$

Для функции $\varphi(\omega)$ получаем уравнение

$$\left[a_\nu a^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2\right]\varphi'' = 0. \tag{7}$$

В том случае, когда $a_\nu a^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2 \neq 0$, решением (1) является линейная функция $u = \gamma_\nu x^\nu + C$, где γ_ν, C — произвольные постоянные величины. В случае, когда $a_\nu a^\nu + (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2 = 0$, решением уравнения (1) будет

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \tag{8}$$

где φ — произвольная дважды дифференцируемая функция. Это решение совпадает с решением [1], когда $\alpha_1 = \pm\alpha_0$, $\beta_1 = \beta_0 = 0$.

$$\begin{aligned} 2) \quad & \omega = y_\nu y^\nu, \qquad f(x) = 1, \qquad g(x) = a\ln(y_0 + y_1), \\ & y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad a_\nu, a \quad \text{— const.} \end{aligned}$$

В этом случае для функции $\varphi'(\omega)$ получаем уравнение Абеля

$$\left(\omega + a^2\right)\varphi'' - 2\omega\varphi'^3 - 3a\varphi'^2 + \varphi' = 0. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[c\left(\dfrac{b\sqrt{\omega+a^2} - a\sqrt{\omega+b^2}}{b\omega\sqrt{\omega+a^2} + a\omega\sqrt{\omega+b^2}}\right)^a \left(\dfrac{\sqrt{\omega+a^2} + \sqrt{\omega+b^2}}{\sqrt{\omega+a^2} - \sqrt{\omega+b^2}}\right)^b\right], \\ \dfrac{1}{2}\ln\left[c\left(\dfrac{b\sqrt{a^2+\omega} - a\sqrt{b^2-\omega}}{b\omega\sqrt{a^2+\omega} + a\omega\sqrt{b^2-\omega}}\right)^a\right] + b\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2+\omega}{b^2-\omega}}, \\ \ln\left[c\left(\sqrt{\omega+a^2} + a\right)^{-a}\right] + \sqrt{\omega+a^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Решения уравнения (1) можно записать в виде

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left\{c\left(\dfrac{y_0+y_1}{y_0-y_1}\right)^a \mathrm{th}^a\left[\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{y_\nu y^\nu + b^2}{y_\nu y^\nu + a^2}\right)\right]\mathrm{cth}^b\left[\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{y_\nu y^\nu + b^2}{y_\nu y^\nu + a^2}\right)\right]\right\}, \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\{c\left(\dfrac{y_0+y_1}{y_0-y_1}\right)^a \mathrm{th}^a\left[\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{b^2 - y_\nu y^\nu}{a^2 + y_\nu y^\nu}\right)\right]\right\} + b\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2 + y_\nu y^\nu}{b^2 - y_\nu y^\nu}}, \\ a\ln\left[c(y_0+y_1)\left(\sqrt{y_\nu y^\nu + a^2} + a\right)^{-1}\right] + \sqrt{y_\nu y^\nu + a^2}. \end{cases} \tag{11}$$

$$3) \quad \omega = y_1/y_0, \qquad f(x) = y_0, \qquad g(x) = \text{const}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\varphi^2 + \omega^2 - 1\right)\varphi'' = 0. \tag{12}$$

Помимо линейной функции от ω, решением уравнения (1) будет функция

$$u = \pm\sqrt{y_\nu y^\nu} + C. \tag{13}$$

$$4) \quad \omega = y_0 + y_1, \qquad f(x) = (y_0 - y_1)^{1/2}, \qquad g(x) = \text{const}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$\varphi^2\varphi'' - 3\varphi\varphi'^2 + 2\varphi' = 0. \tag{14}$$

С помощью нелинейной замены

$$\varphi' = z(x), \qquad x = \varphi, \tag{15}$$

нелинейное уравнение (14) сводится к линейному

$$x^2 z' - 3xz + 2 = 0, \tag{16}$$

общее решение которого задается формулой

$$z = \frac{c_1 x^4 + 1}{2x}.$$

Решениями уравнения (1) будут функции

$$u = \begin{cases} \pm\left\{\dfrac{y_0 - y_1}{c_1}\,\mathrm{th}\,[c_1(y_0+y_1)+c_2]\right\}^{1/2} + c_3, \\ \pm\left\{\dfrac{y_0 - y_1}{c_1}\,\mathrm{cth}\,[c_1(y_0+y_1)+c_2]\right\}^{1/2} + c_3, \\ \pm\left\{\dfrac{y_0 - y_1}{c_1}\,\mathrm{tg}\,[c_1(y_0+y_1)+c_2]\right\}^{1/2} + c_3, \\ \pm[y_\nu y^\nu + c_2(y_0 - y_1)]^{1/2} + c_3. \end{cases} \tag{17}$$

$$5) \quad \omega = y_0 - y_1 + a\ln(y_0 + y_1), \qquad f(x) = (y_0 + y_1)^{1/2}, \qquad g(x) = \text{const}.$$

Функция $\varphi(\omega)$ находится из уравнения

$$\left(\varphi^2 + 4a\right)\varphi'' - 4a\varphi'^3 - 3\varphi\varphi'^2 + 2\varphi' = 0, \tag{18}$$

которое с помощью замены (15) приводится к уравнению Риккати

$$\left(x^2 + 4a\right) z' = 4az^2 + 3xz - 2. \tag{19}$$

Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$z = \frac{2a - x\left(c_1\sqrt{x^2+4a} - x\right)}{2a\left(c_1\sqrt{x^2+4a} - x\right)}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (15), получаем уравнение для φ

$$\varphi' = \frac{2a - \varphi\left(c_1\sqrt{\varphi^2+4a} - \varphi\right)}{2a\left(c_1\sqrt{\varphi^2+4a} - \varphi\right)}. \tag{21}$$

В зависимости от постоянной величины c_1 получим следующие решения для уравнения (1):

$$u = \pm\left\{c_2\exp[c_3(y_0-y_1)] + \frac{2}{c_3}(y_0+y_1)\right\}^{1/2} + c_4, \qquad c_1 = 0. \tag{22}$$

Для всех других значений c_1 решения (1) получаем в неявном виде

$$\Psi\exp\left(u\Psi + \frac{y_0-y_1}{2a}\right) = c_2, \qquad \Psi = \left(u - \sqrt{u^2+4a(y_0+y_1)}\right)^{-1} \tag{23}$$

для $c_1 = 1$.

В том случае, когда $c_1^2 - 1 > 0$, решение уравнения (1) имеет вид

$$\frac{(V+1)^A(V-1)^{1/A}(V-K_+)^{B_-}(V-K_-)^{B_+}}{(y_0+y_1)\exp\left[a^{-1}(y_0-y_1)\right]} = c_2, \tag{24}$$

где

$$V = u\left[u^2+4a(y_0+y_1)\right]^{-1/2}, \qquad A = \frac{1-c_1}{1+c_1},$$

$$B_\pm = \frac{\left(c_1^2+1\right)\left(c_1^2-1\right)\pm\left(c_1^3-1\right)}{\left(c_1^2-1\right)^{3/2}}, \qquad K_\pm = c_1 \pm \sqrt{c_1^2-1}.$$

Если $c_1^2 - 1 < 0$, то решение уравнения (1) задается следующей неявной функцией:

$$\frac{(V-1)^A(V+1)^{1/A}\left(V^2-2c_1V+1\right)^{A/2+1/2A}}{\left\{(y_0+y_1)\exp\left[\frac{2c_1}{\sqrt{1-c_1^2}}\operatorname{arctg}\frac{V-c_1}{\sqrt{1-c_1^2}} + \frac{y_0-y_1}{a}\right]\right\}^{-1}} = c_2. \tag{25}$$

III. В заключение сформулируем теорему о приводимости квазилинейного волнового уравнения вида

$$\Box u + F(u, u_0, \ldots, u_{n-1}) = 0, \tag{26}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$, $\Box = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, F — произвольная дифференцируемая функция, к каноническому виду.

Теорема 2. *Если уравнение (26) инвариантно относительно конформной группы, то с помощью локальной невырожденной замены $W = \Psi(u)$ оно приводится к нелинейному волновому уравнению*

$$\Box W + \lambda W^{(n+2)/(n-2)} = 0, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{27}$$

Замечание. Если F не зависит от u, то конформно инвариантное уравнение (26) с помощью той же замены приводится к линейному волновому уравнению $\Box W = 0$.

1. Барбашова Б.М., Черников Н.А., *ЖЭТФ*, 1966, **50**, 1296.
2. Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, М., Мир, 1977.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., *Укр. мат. жур.*, 1982, **34**, № 2.
5. Fushchych W.I., Moskaljuk S.S., *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, № 6, 571.

The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN

We discuss the symmetry group of the relativistic eikonal equation. It is found to be the conformal group $C_{1,4}$ of the $(4+1)$-dimensional Poincaré–Minkowski space. Some exact multiparametrical solutions of the equation are obtained.

Introduction

The relativistic eikonal or the relativistic Hamilton–Jacobi equation

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = m^2 \tag{1}$$

is a fundamental one in theoretical physics.

Without loss of generality we shall put $m=1$ and consider the equation

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

In the study of partial differential equations one often gains deep insight by studying the symmetry of the equation both from the point of view of its physical interpretation and from being able to find exact solutions and to generate new solutions from known ones.

In this note we have shown that the maximally extensive local (in sense of Lie) invariance group of eq. (2) is the conformal group $C_{1,4}$ of the $(4+1)$-dimensional Poincaré-Minkowski space with the metric

$$s^2 = x^A x_A = g^{AB} x_A x_B = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2, \tag{3}$$

where $A,B = 0,1,\ldots,4$; $x_4 = u$; $g^{AB} = g_{AB} = \{1,-1,-1,-1,-1\}\delta_{AB}$, δ_{AB} is the Kronecker delta.

Some exact multiparametrical solutions of eq. (2) are obtained with the help of the method recently proposed [1]. A procedure of generating new exact solutions from known ones is presented.

The symmetry group

Theorem. *The maximally extensive local invariance group of eq. (2) is the 21-parametrical Lie group, basis elements of its Lie algebra having the form*

$$\begin{aligned}
&P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \qquad a,b = 1,2,3,\\
&J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,\\
&J_{04} = x_0 P_4 - u P_0, \qquad J_{a4} = x_a P_4 - u P_a,\\
&D = x^A P_A \equiv x_0 P_0 - x_1 P_1 - x_2 P_2 - x_3 P_3 - u P_4,\\
&K_\mu = 2x_\mu D - x^B x_B P_\mu, \qquad x^B x_B \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_3^3 - u^2,\\
&K_4 = 2uD - x^B x_B P_4,
\end{aligned} \tag{4}$$

Lettere al Nuovo Cimento, 1982, **34**, № 16, P. 498–502.

and satisfying commutation rules of the conformal algebra $C_{1,4}$

$$
\begin{aligned}
&[P_A, P_B] = 0, \qquad [P_A, J_{BC}] = g_{AB} P_C - g_{AC} P_A, \\
&[J_{AB}, J_{CD}] = g_{BC} J_{AD} + g_{AD} J_{BC} - g_{AC} J_{BD} - g_{BD} J_{AC}, \qquad [P_A, D] = P_A, \\
&[J_{AB}, D] = 0, \qquad [P_A, K_B] = 2(g_{AB} D - J_{AB}), \qquad [D, K_A] = K_A, \\
&[J_{AB}, K_C] = g_{BC} K_A - g_{AC} K_B, \qquad [K_A, K_B] = 0, \qquad A, B, C, D = 0, 1, \ldots, 4.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

One can get the proof of this theorem living Lie's method [2]. This being the case, one has to solve the set of first-order coupled partial differential equations:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi^a}{\partial x_b} + \frac{\partial \xi^b}{\partial x_a} = 0, \qquad a \neq b, \quad a, b = 1, 2, 3, \\
&\frac{\partial \xi^0}{\partial x_a} - \frac{\partial \xi^a}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^0}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi^3}{\partial x_3} = \frac{\partial \eta}{\partial u}, \\
&\frac{\partial \xi^a}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial x_a} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^0}{\partial u} - \frac{\partial \eta}{\partial x_0} = 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

which can be integrated in a straightforward manner to obtain the infinitesimal transformations ξ^μ and η and then, from the formula

$$
Q = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u},
\tag{7}
$$

the vector fields (4).

It is emphasized that because u is a dependent variable, the nonlinear representation of the conformal group $C_{1,4}$ is realized on the manifold of the solutions of eq. (2). Let us remind that the Klein–Gordon equation with $m \neq 0$ is invariant under the Poincaré group $A_{1,3} \subset C_{1,3} \subset C_{1,4}$ only; the massless Klein–Gordon equation is invariant under the conformal group $C_{1,3}$. In both cases one has usual (linear) group representations as contrasted with the case of eq. (2).

The finite group transformations

Below we present the finite transformations generated by the operators (4), which can be obtained by direct integration of corresponding Lie equations:

$$
\begin{aligned}
&P_\mu: \quad x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \qquad u'(x') = u(x), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \\
&P_4: \quad x'_\mu = x_\mu, \qquad u'(x') = u(x) + a_4,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{ab}: \quad & x'_0 = x_0, \qquad u'(x') = u(x), \\
& \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \cos\alpha + \frac{\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\alpha}}{\alpha} \sin\alpha + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x})}{\alpha^2} (1 - \cos\alpha), \\
& \boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3), \qquad \boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \alpha \equiv \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{a4}: \quad & x'_0 = x_0, \qquad x'_a = x_a \cos\beta_a - u(x) \sin\beta_a, \\
& x'_b = x_b, \qquad x'_c = x_c, \qquad a \neq b \neq c, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \\
& u'(x') = u(x) \cos\beta_a + x_a \sin\beta_a,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{0a}: \quad & x'_0 = x_0 \cosh\theta_a + x_a \sinh\theta_a, \qquad x'_a = x_a \cosh\theta_a + x_0 \sinh\theta_a, \\
& x'_b = x_b, \qquad x'_c = x_c, \qquad a \neq b \neq c, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \\
& u'(x') = u(x),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{04}: \quad & x_0' = x_0 \cosh\theta_4 + u(x)\sinh\theta_4, \qquad x_a' = x_a, \quad a = 1,2,3, \\
& u'(x') = u(x)\cosh\theta_4 + x_0\sinh\theta_4,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
D: \quad x_\mu' = e^{\varkappa} x_\mu, \qquad u'(x') = e^{\varkappa} u(x), \qquad \mu = 0,1,2,3,
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
K_A: \quad & x_\mu' = \frac{x_\mu - C_\mu\left(x^2 - u^2(x)\right)}{1 - 2C_\nu x^\nu + 2C_4 u(x) + C^A C_A\left(x^2 - u^2(x)\right)}, \\
& u'(x') = \frac{u(x) - C_4\left(x^2 - u^2(x)\right)}{1 - 2C_\nu x^\nu + 2C_4 u(x) + C^A C_A\left(x^2 - u^2(x)\right)}, \\
& x^2 \equiv x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\
& C_A C^A \equiv C_0^2 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 - C_4^2, \quad A = 0,1,2,3,4,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

where a_μ, a_4, α_a, β_a, θ_a, θ_4, $\varkappa$, C_A are arbitrary real constants.

Contrary to the usual (linear with respect to the dependent function) transformations hare we have the nonlinear ones. Hence it is *the nonlinear representation* of the conformal group $C_{1,4}$, previously mentioned.

Some exact solutions of the equation

One can make sure by the straightforward calculations that the following functions satisfy eq. (2):

$$
u(x) = F(\alpha^\nu x_\nu) + \beta^\nu x_\nu, \qquad \alpha^\nu x_\nu = \alpha^\nu \beta_\nu = 0, \qquad \beta^\nu \beta_\nu = 1,
\tag{15}
$$

where F is an arbitrary differentiable function;

$$
u(x) = \left[(\alpha^\nu x_\nu)^2 + x^\nu x_\nu\right]^{1/2}, \qquad \alpha^\nu \alpha_\nu = -1,
\tag{16}
$$

$$
u(x) = \left[x_0^2 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})^2\right]^{1/2}, \qquad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha} = 1,
\tag{17}
$$

$$
u(x) = (x_\nu x^\nu)^{1/2} \equiv \left(x_0^2 - \boldsymbol{x}^2\right)^{1/2},
\tag{18}
$$

where α_ν, β_ν are arbitrary real constants satisfying the mentioned conditions.

Equation (2) is invariant under the transformations

$$
x \to x' = f(x, u(x), \{\theta\}), \qquad u(x) \to u'(x') = g(x, u(x), \{\theta\}),
\tag{19}
$$

where $\{\theta\}$ are parameters of transformations; the functions f and g are defined by (8)–(14). It is obvious that if $u(x) = \varphi(x)$ is a solution of eq. (2), then the new solutions can be obtained from the functional equation

$$
g(x, u_{\text{new}}(x), \{\theta\}) = \varphi\left(x' = f(x, u_{\text{new}}(x), \{\theta\})\right).
\tag{20}
$$

For example, the functions

$$
\begin{aligned}
& u(x) = \frac{-1 \pm [1 + 4A(Ax^\nu x_\nu + \beta^\nu x_\nu)]^{1/2}}{2A}, \\
& A \equiv C_4 - \beta^\nu C_\nu \neq 0, \quad \beta^\nu \beta_\nu = 1,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$u(x) = \frac{C_4 \pm \left[C_4^2 + C^A C_A (1 - 2C^\nu x_\nu + C^A C_A x_\nu x^\nu)\right]^{1/2}}{C_A C^A},$$
$$C_A C^A = C_0^2 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 - C_4^2 \neq 0 \tag{22}$$

are obtained from (16) with $F = 0$ and (18), respectively, by means of eqs. (14) and (20).

Formulae (21), (7) imply that the function

$$u(x) = (2A)^{-1}[1 + 4A(Ax_\nu x^\nu + \beta^\nu x_\nu)]^{1/2}, \tag{23}$$

where $\beta^\nu \beta_\nu = 1$, $A \neq 0$ and are arbitrary real constants, satisfies eq. 2.

Upon application of (20) and (12) to (23), we have another solution of eq. (2):

$$u(x) = (2A)^{-1}\beta_0 \sinh\theta_4 \pm \left[\left(\frac{\beta_0 \sinh\theta_4}{2A}\right)^2 + \left(\frac{1}{2A}\right)^2 + x_\nu x^\nu + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{A}(\beta_0 x_0 \cosh\theta_4 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x})\right], \qquad A \neq 0, \qquad \beta^\nu\beta_\nu = 1. \tag{24}$$

It is obvious that one can use the rest of finite group transformations to generate more exact solutions of eq. (2).

Remarks

Firstly, it id important to note that what has been said about the symmetry of eq. (2) holds true for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} \pm \left(\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} + m^2\right)^{1/2} = 0$$

recently proposed [1] as the most natural relativistic generalization of the Hamilton–Jacobi equation.

Secondly, the symmetry group of eq. (1) with $m = 0$ turns out to be an infinite-dimensional one because of the arbitrary dependence of ξ^μ and η from (7) on u. The arbitrary dependence of η on u implies that the arbitrary differentiable function $F(u(x))$ will be a solution of eq. (1) with $m = 0$ as well as $u(x)$. The contrary is the case $m \neq 0$.

1. Fushchych W.I., in Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kiev, 1981, 6–28 (in Russian).
2. Ovsyannikov L.V., The group analysis of differential equation, Moscow, 1978 (in Russian).

О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ТЫЧИНИН

С помощью нелокальных преобразований линеаризованы многие, широко встречающиеся в прикладных вопросах, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. В явном виде построены такие преобразования для уравнений Лиувилля, Монжа–Ампера, Плато и других. Это позволило найти точные решения нелинейных уравнений. В основном рассмотрены нелинейные уравнения, зависящие от двух независимых переменных. Исследованы групповые свойства нелинейных дифференциальных уравнений. Большинство из рассмотренных уравнений допускают бесконечную группу.

В данной работе показано, что многочисленные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных от двух независимых переменных, для которых в известных книгах Форсайта [1] и Эймса [2] получены частные и общие решения, с помощью нелокальных преобразований приводятся к линейным уравнениям. Установлено, что большинство из этих уравнений инвариантны относительно бесконечных групп. Видимо, этот факт является причиной того, что для таких уравнений построены общие решения. Найдена максимальная группа инвариантности уравнения для минимальной поверхности (уравнение Плато), которое при соответствующей замене сводится к уравнению Борна–Инфельда.

Рассмотрены многомерные нелинейные уравнения в частных производных, которые также допускают линеаризацию.

§ 1. Введение

В основе большинства методов построения точных решений линейных и нелинейных уравнений лежит одна из самых плодотворных и эффективных идей в теории дифференциальных уравнений — преобразование независимых и зависимых переменных, т.е. преобразований исходного дифференциального уравнения к простейшему виду. Чаще всего используются локальные преобразования независимых и зависимых переменных. Теория таких преобразований наиболее полно изучена в том случае, когда совокупность преобразований образует группу Ли.

Знание группы Ли, допускаемой тем или иным дифференциальным уравнением, дает способ отыскания эффективных замен. Так, например, если нелинейное волновое уравнение вида

$$\Box u = F\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.0.0}$$

инвариантно относительно конформной группы, то существует невырожденная локальная замена $w = \psi(u)$, приводящая (1.0.0) к линейному волновому уравнению [3]

$$\Box w = 0.$$

Препринт № 82.33, Киев, Институт математики АН УССР, 1982, 54 с.

Очевидно, что, зная решения последнего уравнения и явный вид замены, мы находим решения исходного нелинейного уравнения. На этой идее и построено наше дальнейшее исследование. При этом рассматриваем, в основном, нелокальные замены вида

$$w = \psi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \dots\right),$$

т.е. преобразования зависят от производных.

К нелокальным преобразованиям такого типа относятся преобразования Эйлера, Лежандра, Ли–Бэклунда, Коула–Хопфа, годографа, градиентные преобразования второго рода в электродинамике.

Замену независимых и зависимых переменных вида

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \varepsilon^i(x, u^\alpha, \underset{1}{u}^\alpha, \dots, \underset{m}{u}^\alpha), \qquad \alpha = \overline{1,p}, \\ u^{\alpha'} &= \zeta^i(x, u^\alpha, \underset{1}{u}^\alpha, \dots, \underset{s}{u}^\alpha), \qquad i = \overline{1,N}, \end{aligned} \tag{1.1.0}$$

будем называть нелокальными преобразованиями порядка n.

Преобразование производных на многообразии в случае неособой замены переменных (1.1.0) осуществляется по формуле

$$\begin{aligned} u^{\alpha'}_{x^{i'}} = \Bigg[&\sum_j (\partial_{x^i}\zeta^\alpha)\cdot x^j_{x^{i'}} + \sum_\beta \sum_i (\partial_{u^\beta}\zeta^\alpha)\cdot u^\beta_{x^j}\cdot x^j_{x^{i'}} + \\ &+ \sum_\beta\sum_k\sum_i (\partial_{u^\beta_{x^k}}\zeta^\alpha)\cdot u^\beta_{x^k x^j}\cdot x^j_{x^{i'}} + \cdots \Bigg]\Bigg|_{\mathfrak{M}}. \end{aligned} \tag{1.2.0}$$

Производная берется на многообразии, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Оператор полного дифференцирования

$$D_j = \partial_{x^i} + \sum_\alpha u^\alpha_i \partial_{u^\alpha} + \sum_\alpha\sum_k u^\alpha_{ki}\partial_{u^\alpha_k} + \cdots$$

позволяет записать (1.2.0) иначе:

$$D_j\zeta^\alpha = u^{\alpha'}_{x^{i'}}\cdot D_j x^{i'}.$$

В случае одной зависимой u и двух независимых x и y переменных замена имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= x' = \varepsilon(x, y, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}), \\ \eta &= y' = \varkappa(x, y, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}), \\ z &= u' = \zeta(x, y, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}). \end{aligned} \tag{1.3.0}$$

При этом следует решать систему двух линейных алгебраических уравнений (1.2.0)

$$D_x\zeta = u'_{x'}\cdot D_x\varepsilon + u'_{y'}\cdot D_x\varkappa, \qquad D_y\zeta = u'_{x'}\cdot D_y\varepsilon + u'_{y'}\cdot D_y\varkappa.$$

Если определитель системы δ не равен нулю, получим

$$u'_{x'} = \frac{D_x\zeta D_y\varkappa - D_y\zeta D_x\varkappa}{D_x\varepsilon D_y\varkappa - D_y\varepsilon D_x\varkappa} \equiv \frac{H}{\delta},$$
$$u'_{y'} = \frac{D_y\zeta D_x\varepsilon - D_x\zeta D_y\varepsilon}{D_x\varepsilon D_y\varkappa - D_y\varepsilon D_x\varkappa} \equiv -\frac{K}{\delta}. \tag{1.4.0}$$

Для производных второго порядка из (1.2.0) находим

$$D_{jk}\zeta^\alpha = u^{\alpha'}_{i'l'} \cdot D_k\varepsilon^l \cdot D_j\varepsilon^i + u^{\alpha'}_{i'} \cdot D_{jk}\varepsilon^i.$$

Решая систему трех линейных алгебраических уравнений относительно $u^{\alpha'}_{i'j'}$, с учетом (1.4.0) получаем

$$\begin{aligned}
&\delta \cdot D_{xx}\zeta - H \cdot D_{xx}\varepsilon + K \cdot D_{xx}\varkappa \equiv P,\\
&\delta \cdot D_{yy}\zeta - H \cdot D_{yy}\varepsilon + K \cdot D_{yy}\varkappa \equiv Q,\\
&\delta \cdot D_{xy}\zeta - H \cdot D_{xy}\varepsilon + K \cdot D_{xy}\varkappa \equiv R,\\
&u'_{x'x'} = \left[P(D_y\varkappa)^2 + Q(D_x\varkappa)^2 - 2RD_x\varkappa D_y\varkappa\right]\delta^{-3},\\
&u'_{x'y'} = \left[PD_y\varkappa D_y\varepsilon + QD_x\varkappa D_x\varepsilon - R_D[\varepsilon,\varkappa]^+_{x,y}\right]\delta^{-3},\\
&u'_{y'y'} = \left[P(D_y\varepsilon)^2 + Q(D_x\varepsilon)^2 - 2RD_x\varepsilon D_y\varepsilon\right]\delta^{-3},\\
&{}_D[\varepsilon,\varkappa]^+_{x,y} \equiv D_x\varepsilon D_y\varkappa + D_y\varepsilon D_x\varkappa.
\end{aligned} \tag{1.5.0}$$

Наряду с (1.1.0) будем рассматривать нелокальные преобразования, содержащие функцией (1.3.0) под знаком неопределенного интеграла. Считаем при этом справедливым внесение оператора дифференцирования под знак интеграла.

Уравнение $F(u') = 0$ будем называть приводимым нелокальным преобразованием T к уравнению $L(u) = 0$, если существует нетривиальное решение системы определяющих уравнений, полученных из соотношений

$$T_1 L(u')\Big|_{{}_D\mathfrak{M}^F} \equiv 0, \tag{1.6.0}$$

$$T_2 F(u')\Big|_{{}_D\mathfrak{M}^L} \equiv 0. \tag{1.6$'$.0}$$

Многообразие ${}_D\mathfrak{M}^P$ в пространстве $(x, y, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u})$ может быть задано уравнением $P(u) = 0$, его дифференциальными следствиями и, возможно, некоторыми дополнительными условиями. Связь уравнений F и L может быть выражена при помощи операторов $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ соотношениями

$$T_1 L(u') = \hat{P}_1 F(u), \tag{1.7.0}$$

или

$$T_2 F(u') = \hat{P}_2 L(u). \tag{1.7$'$.0}$$

Приведение уравнения F к линейному L назовем нелокальной линеаризацией уравнения F.

§ 2. Линеаризация и точные решения

Рассмотрим серию нелинейных уравнений [1, 2, 4] от двух независимых переменных. Для этих уравнений построим точные решения сведением их к линейным уравнениям наиболее простого вида. Преобразования переменных при этом оказываются либо нелокальными, либо точечными. Номер уравнения в скобках соответствует нумерации, принятой в [3].

1. Уравнение (№ 1) [1]:

$$F_1 \equiv z_{xy} + zz_x = 0. \tag{2.1.0}$$

Будем искать нелокальное преобразование, обеспечивающее приведение к уравнению $\mathfrak{M} : u_{xy} = 0$ по схеме:

$$T_1 F_1 \Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0, \qquad T_1 : \; z = \zeta(u, u_y, u_{yy}).$$

Вычислим выражения производных на многообразии, подставим их в уравнение (2.1.0) и выполним расщепление по производным третьего порядка. Это даст уравнения:

$$\zeta_{uu_{yy}} = 0,$$

$$u_y \zeta_{uu} + \zeta\zeta_u + u_{yy}\zeta_{uu_y} = 0.$$

В силу первого уравнения ζ ищем в виде

$$\zeta = \varphi(u, u_y) + \psi(u_y, u_{yy}).$$

Второе уравнение теперь оказывается таким:

$$u_y \varphi_{uu} + \varphi\varphi_u + \psi\varphi_u + u_{yy}\varphi_{uu_y} = 0.$$

Здесь от u_{yy} зависят третье и четвертое слагаемые. Поэтому получим следующие два уравнения, определяющие φ и ψ:

$$\varphi_u \psi + u_{yy}\varphi_{uu_y} = -\lambda(u, u_y), \tag{2.1.1}$$

$$\varphi_{uu} u_y + \varphi\varphi_u = \lambda(u, u_y). \tag{2.1.2}$$

Из (2.1.1) следует, что

$$\frac{\lambda}{\varphi_u} = A_1(u_y), \qquad \frac{\varphi_{uu_y}}{\varphi_u} = A_2(u_y), \tag{2.1.3}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi &= A_3(u_y)\Omega(u) \exp \int A_2(u_y)\, du_y + A_4(u_y), \\ \lambda &= A_1(u_y) A_3(u_y) \Omega'(u) \exp \int A_2(u_y)\, du_y. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

В силу произвольности функций A_i, $i = \overline{1,4}$, можем выбрать φ и λ в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= u_y \left[-2\alpha(u_y)\Omega(u) + \beta(u_y)\right], \\ \lambda &= -2u_y^2 \alpha(u_y)\beta(u_y)\Omega'(u). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Здесь α и β — произвольные функции u_y. Подставив (2.1.5) в (2.1.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение о тносительно функции $\Omega(u)$:

$$\Omega' = \alpha\left(\Omega^2+\gamma\right), \tag{2.1.6}$$

где $\gamma(u_y)$ — произвольная функция. Из (2.1.6) следует, что α, β, γ — постоянные. При интегрировании (2.1.6) возможны такие три случая:

1) $\gamma = -\frac{a^2}{\alpha^2} < 0$; при этом

$$\Omega = \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{th}\,[-(au+c_1)], \tag{2.1.7}$$

$$\Omega = \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{cth}\,[-(au+c_2)]; \tag{2.1.8}$$

2) $\gamma = 0$. В этом случае находим

$$\Omega = -(u+c_3)^{-1}\alpha; \tag{2.1.9}$$

3) $\gamma = \frac{b^2}{\alpha^2} > 0$ дает

$$\Omega = \frac{b}{\alpha}\,\mathrm{tg}\,(bu+c_4), \tag{2.1.10}$$

$$\Omega = -\frac{b}{\alpha}\,\mathrm{ctg}\,(bu+c_4). \tag{2.1.10$'$}$$

В формулах (2.1.7)–(2.1.10) a, b, c_i $(i=\overline{1,4})$ — произвольные постоянные. Тогда

$$\varphi = u_y\left[-2a\,\mathrm{th}\,[-(au+c_1)]+\beta\right], \qquad \lambda = \frac{-2u_y^2a^2\beta}{\mathrm{ch}^2[-(au+c_1)]}, \tag{2.1.11}$$

$$\varphi = u_y\left[-2a\,\mathrm{cth}\,[-(au+c_2)]+\beta\right], \qquad \lambda = \frac{2u_y^2a^2\beta}{\mathrm{sh}^2[-(au+c_2)]}, \tag{2.1.12}$$

$$\varphi = u_y\left[\frac{2}{u+c_3}+\beta\right], \qquad \lambda = \frac{-4u_y^2\beta}{u+c_3}, \tag{2.1.13}$$

$$\varphi = u_y\left[-2b\,\mathrm{tg}\,(bu+c_4)+\beta\right], \qquad \lambda = \frac{-2u_y^2b^2\beta}{\cos^2(bu+c_4)}, \tag{2.1.14}$$

$$\varphi = u_y\left[2b\,\mathrm{ctg}\,(bu+c_4)+\beta\right], \qquad \lambda = \frac{-2u_y^2b^2\beta}{\sin^2(bu+c_4)}. \tag{2.1.14$'$}$$

Из (2.1.1), учитывая (2.1.5), получим

$$\psi = -\beta u_y - u_{yy}u_y^{-1}. \tag{2.1.15}$$

Следовательно, существует несколько замен:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{u_y}\left\{2au_y^2\,\mathrm{th}\,[-(au+c_1)]+u_{yy}\right\}, \tag{2.1.11$'$}$$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{u_y}\left\{2au_y^2 \operatorname{cth}\left[-(au+c_2)\right] + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.12$'$}$$

$$\zeta_3 = \frac{2u_y}{u+c_3} - \frac{u_{yy}}{u_y}, \tag{2.1.13$'$}$$

$$\zeta_4 = -\frac{1}{u_y}\left\{2bu_y^2 \operatorname{tg}(bu+c_4) + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.14$'$}$$

$$\zeta_5 = -\frac{1}{u_y}\left\{-2bu_y^2 \operatorname{ctg}(bu+c_4) + u_{yy}\right\}, \tag{2.1.14$''$}$$

Замечание. Уравнение (2.1.0) весьма просто может быть проинтегрировано следующим образом: заметим, что уравнение допускает запись

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2z_y + z^2\right] = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$2z_y + z^2 = F(y). \tag{2.1.16}$$

Если $z_0(y)$ — частное решение уравнения (2.1.16), то

$$z(x,y) = \frac{2\exp\left(-\int z_0(y)\,dy\right)}{f(x) + \int \exp\left(-\int z_0(y)\,dy\right)dy} + z_0(y). \tag{2.1.17}$$

Введем обозначение

$$\int \exp\left(-\int z_0(y)\,dy\right)dy \equiv g(y).$$

Это позволяет придать (2.1.17) вид

$$z(x,y) = \frac{2g'(y)}{f(x)+g(y)} - \frac{g''(y)}{g'(y)}. \tag{2.1.13$''$}$$

Рассмотренное решение допускает формулировку в виде такой простой задачи линеаризации: пусть многообразие $\mathfrak{M}$ задано уравнением (2.1.0), следует найти преобразование T, приводящее уравнение $w_x = 0$ к (2.1.0). Запишем определяющее соотношение в виде

$$Tw_x\Big|_{\mathfrak{M}(2.1.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z, z_y),$$

или в развернутом виде

$$z_x\zeta_z + z_{xy}\zeta_{z_y}\Big|_{z_{xy}=-zz_x} \equiv 0.$$

Отсюда сразу же находим

$$\zeta = \mathcal{F}\left(2z_y + z^2\right),$$

где $\mathcal{F}(s)$ — произвольная функция аргумента. Решение уравнений известно: $w = F(y)$. Это позволяет найти из (2.1.16) решение (2.1.13$''$), называемое *общим решением* уравнения (2.1.0) [3].

2. Уравнение (№ 2) Лиувилля [1]:

$$F_2 \equiv z_{xy} + \alpha e^z = 0. \tag{2.2.0}$$

Пусть преобразование зависимой переменной T: $z = \zeta(u, \underset{1}{u})$ обеспечивает приведение (2.2.0) к уравнению u_{xy} по схеме

$$T_2 F_2\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0, \qquad \mathfrak{M}: \ u_{xy} = 0, \quad u = \phi(x) + \psi(y),$$

Расщепляя по производным второго порядка $\underset{2}{u}$ определяющее соотношение, полученное подстановкой производной z_{xy} и z, приходим к системе уравнений

$$\zeta_{uu_x} = 0, \qquad \zeta_{uu_y} = 0, \qquad \zeta_{u_x u_y} = 0, \qquad u_x u_y \zeta_{uu} + \alpha \exp\zeta = 0.$$

Решение будем искать в виде $\zeta = \ln u_x u_y \varphi(u)$. Тогда из предыдущих уравнений находим

$$\varphi_{uu} - \varphi_u^2 \varphi^{-1} + \alpha\varphi^2 = 0.$$

Обозначим $\varphi_u = p$, $\varphi_{uu} = \dot{p}p$, $p = p(\varphi)$. Тогда

$$\dot{p} - p\varphi^{-1} = -\alpha\varphi^2 p^{-1}.$$

Полагая $p = wv$, найдем $w = \varphi$, $v = \sqrt{-2(\alpha\varphi + \tilde{c})}$, откуда

$$p = \varphi_u = \varphi\sqrt{-2(\alpha\varphi + \tilde{c})}, \tag{2.2.1}$$

или

$$\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{-\alpha\varphi + c}} = \sqrt{2}\, du. \tag{2.2.2}$$

Интегрируем подстановкой

$$-\alpha\varphi + c = t^2, \qquad \varphi = -\frac{1}{\alpha}\left(t^2 - c\right), \qquad d\varphi = -\frac{1}{\alpha} 2t\, dt.$$

Возможны такие случаи:

I. $\alpha = a^2 > 0$.

$$1)\ c = b^2 > 0, \qquad \varphi_{1,2} = \frac{b^2}{a^2}\left\{1 - \begin{matrix}\text{th}^2\\ \text{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_1)\right]\right\}, \tag{2.2.3}$$

$$2)\ c = b^2 = 0, \qquad \varphi_3 = \frac{-2}{a^2(u + c_3)^2}, \tag{2.2.4}$$

$$3)\ c = -b^2 < 0, \qquad \varphi_{4,5} = -\frac{b^2}{a^2}\left\{1 + \begin{matrix}\text{tg}^2\\ \text{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}. \tag{2.2.5}$$

II. $\alpha = -a^2 < 0$.

$$1)\ c = b^2 > 0, \qquad \varphi_{6,7} = -\frac{b^2}{a^2}\left\{1 - \begin{matrix}\text{th}^2\\ \text{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_6)\right]\right\}, \tag{2.2.6}$$

$$2)\ c = b^2 = 0, \qquad \varphi_8 = \frac{2}{a^2(u+c_8)^2}, \tag{2.2.7}$$

$$3)\ c = -b^2 < 0, \qquad \varphi_{9,10} = \frac{b^2}{a^2}\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_9)\right]\right\}. \tag{2.2.8}$$

В соответствии с этим существует несколько замен

$$\zeta_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}u_x u_y\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_1)\right]\right\}\right], \tag{2.2.6$'$}$$

$$\zeta_3 = \ln\left[\frac{\mp 2u_x u_y}{a^2(u+c_3)^2}\right], \tag{2.2.7$'$}$$

$$\zeta_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}u_x u_y\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_4)\right]\right\}\right]. \tag{2.2.8$'$}$$

Верхний знак отвечает значениям $\alpha > 0$, нижний — значениям $\alpha < 0$, c_i, $(i = \overline{1,9})$ — произвольные постоянные.

Замечание. Столь же просто могут быть получены решения уравнения

$$z_{xx} + \alpha e^z = 0. \tag{2.2ᵃ.0}$$

Опуская вычисления, перечислим несколько различных форм подстановок, обеспечивающих приведение к уравнению $u_{xx} = 0$, $u = \phi(y)x + \psi(y)$:

$$\begin{gathered}\zeta_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}u_x^2\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_1)\right]\right\}\right],\\ \zeta_3 = \ln\left[\frac{\mp 2u_x^2}{a^2(u+c_3)^2}\right],\\ \zeta_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}u_x^2\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_4)\right]\right\}\right].\end{gathered} \tag{2.2ᵃ.1}$$

Соответствующие решения имеют вид:

$$\begin{gathered}z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\phi^2(y)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\phi(y)x+\psi(y)-c_1)\right]\right\}\right],\\ z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2\phi^2(y)}{a^2(\phi(y)x+\psi(y)+c_3)^2}\right],\\ z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\phi^2(y)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\phi(y)x+\psi(y)-c_4)\right]\right\}\right].\end{gathered} \tag{2.2ᵃ.2}$$

3. Уравнение (№ 7) [1]:

$$F_3 \equiv z_{xy}^2 - 4\lambda(x,y)z_x z_y = 0. \tag{2.3.0}$$

Будем искать нелокальное преобразование вида

$$\zeta = \int f(x,y,u,\underset{1}{u})\,dx + \int \varphi(x,y,u,\underset{1}{u})\,dy,$$

приводящее уравнения (2.3.0) к линейному

$$\mathfrak{M}^{\Phi}: \quad \Phi \equiv u_{xy} - \frac{\lambda_{\lambda_x}}{2\lambda} u_y - \lambda u = 0, \tag{2.3.1}$$

$$T_3 F_3 \Big|_{D\mathfrak{M}^{\Phi}} \equiv 0. \tag{2.3.2}$$

Вычислим значения производных z_x, z_y, z_{xy} на многообразии $\mathfrak{M}^{\Phi}$ и запишем определяющее соотношение (2.3.2) в виде

$$\begin{gathered}
\left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x} + u_{yy} f_{u_y}\right]^2 + \\
+ \left[\varphi_x + u_x \varphi_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) \varphi_{u_y} + u_{xx} \varphi_{u_x}\right]^2 + \\
+2 \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x} + u_{yy} f_{u_y}\right] \times \\
\times \left[\varphi_x + u_x \varphi_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) \varphi_{u_y} + u_{xx} \varphi_{u_x}\right] - \\
-4\lambda \left[f + \int \left[\varphi_x + u_x \varphi_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) \varphi_{u_y} + u_{xx} \varphi_{u_x}\right] dy\right] \times \\
\times \left[\varphi + \int \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x} + u_{yy} f_{u_y}\right] dx\right] \equiv 0.
\end{gathered} \tag{2.3.3}$$

Выполняя расщепление (2.3.3) по $\underset{2}{u}$, получаем $f_{u_y} = 0$, $\varphi_{u_x} = 0$. Учитывая наличие в (2.3.3) интегралов, потребуем выполнения на многообразии условия

$$\begin{gathered}
\varphi_\lambda \lambda_x + u_x \varphi_u + \varphi_{u_y} \frac{\lambda_x}{2\lambda} + \varphi_{u_y} \lambda u = \frac{\partial}{\partial y} \psi(\lambda, u, \underset{1}{u}) = \\
= \psi_\lambda \lambda_y + \psi_u u_y + \psi_{u_x} u_{xy} + \psi_{u_y} u_{yy}.
\end{gathered}$$

Расщепление по $\underset{2}{u}$ сразу же дает $\psi_{u_x} = 0$, $\varphi_{u_y} = 0$, а по u_x и $\lambda_y - \varphi_u = 0$, $\psi_\lambda = 0$, соответственно. Остается соотношение для φ и ψ

$$\varphi_\lambda \lambda_x + \varphi_{u_y} \frac{\lambda_x}{2\lambda} + \varphi_{u_y} \lambda u = \psi_u u_y. \tag{2.3.4}$$

Пусть $\varphi = \omega(\lambda) u_y^2$, тогда $\lambda_x \varphi_\lambda = \omega_\lambda \lambda_x u_y^2$ и (2.3.4) приобретает вид

$$\omega_\lambda \lambda_x u_y^2 + 2u_y^2 \frac{\lambda_x}{2\lambda} + 2u_y \lambda u = \psi_u u_y.$$

Отсюда следует: $\omega = \lambda^{-1}$, $\psi_u = -2u$, $\psi = -u^2$. Значит, φ можно взять в виде

$$\varphi = \lambda^{-1} u_y^2.$$

С учетом полученных результатов определяющее приводимость соотношение записывается так:

$$\begin{gathered}
\left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} + \lambda u\right) f_{u_x}\right]^2 + 4 \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x}\right] u u_y + \\
+(2u u_y)^2 - 4\lambda \left[f + u^2\right] \int \left[f_y + u_y f_u + \left(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_y + \lambda u\right) f_{u_x}\right] dx \equiv 0.
\end{gathered}$$

Анализ показывает, что в последнем слагаемом интегральный сомножитель обращаться в ноль не должен (это ведет к противоречию). Обращение в ноль последнего слагаемого достигается выполнением равенства $f = u^{-2}$. Проверка показывает, что это значение f удовлетворяет определяющему соотношению. При этом получаем

$$\zeta = -\int u^2\,dx + \int \lambda^{-1} u_y^2\,dy. \tag{2.3.5}$$

Решение уравнения (2.3.0) получится подстановкой решения уравнения (2.3.1) в (2.3.5).

4. Уравнение (№ 4) [1]:

$$F_4 \equiv z_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}\left[g(x)e^z\right] = 0. \tag{2.4.0}$$

Решим задачу приведения этого уравнения к линейному

$$\mathfrak{M}^\Phi: \quad \Phi \equiv u_{xy} - \frac{g'}{g}u_y = 0, \quad u = \psi(x) + g(x)\phi(y) \tag{2.4.1}$$

преобразованием

$$T_4F_4\Big|_{D\mathfrak{M}^\Phi} \equiv 0, \qquad T_4: \ z = \zeta(z, y, u, \underset{1}{u}). \tag{2.4.2}$$

Расщепление (2.4.2) по $u_{xx}u_{yy}$, u_{xx}, u_{yy} на многообразии (2.4.1) дает, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned}
&\zeta_{u_xu_y} = 0,\\
&\zeta_{yu_x} + u_y\zeta_{u_xu} + \frac{g'}{g}u_y\zeta_{u_xu_x} + ge^\zeta\zeta_{u_x} = 0,\\
&\zeta_{xu_y} + u_x\zeta_{uu_y} + \frac{g'}{g}(u_y\zeta_{u_yu_y} + \zeta_{u_y}) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть $\zeta_{u_x} = 0$. Тогда возможно дальнейшее расщепление по u_x:

$$\zeta_{uu_y} = 0, \qquad \zeta_{yu} + u_y\zeta_{uu} + ge^\zeta\zeta_u = 0.$$

Слагаемые, остающиеся после расщепления и не содержащие $\underset{2}{u}$ и u_x, дадут еще одно уравнение

$$\zeta_{xy} + \frac{g'}{g}u_y\zeta_u + u_y\zeta_{xu} + \frac{g'}{g}u_y\zeta_{yu_y} + g'e^\zeta + ge^\zeta\left[\zeta_x + \frac{g'}{g}u_y\zeta_u\right] = 0.$$

Пусть, далее $\zeta_{yu_y} = \zeta_{xu_y} = \zeta_y = 0$. Теперь система определяющих уравнений станет такой:

$$\begin{aligned}
&u_y\zeta_{u_yu_y} + \zeta_{u_y} = 0,\\
&u_y\zeta_{uu} + ge^\zeta\zeta_u = 0,\\
&\frac{g'}{g}u_y\zeta_u + u_y\zeta_{xu} + g'e^\zeta + ge^\zeta\left[\zeta_x + \frac{g'}{g}u_y\zeta_{u_y}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

ζ ищем в виде

$$\zeta = \ln\varphi(u_y) - \ln\psi(u,x).$$

Первое из уравнений (2.4.3) теперь дает:

$$\ddot\varphi - \varphi^{-1}\dot\varphi^2 = -\dot\varphi u_y^{-1}, \tag{2.4.4}$$

второе —

$$u_y\left(\frac{\psi_{uu}}{\psi} - \frac{\psi_u^2}{\psi^2}\right) + g\frac{\psi_u}{\psi}\varphi = 0. \tag{2.4.5}$$

Из последнего сразу же получаем, что $\varphi = c_1u_y$ ($c_1 = \mathrm{const}$), а уравнение (2.4.5) приобретает вид

$$\psi_{uu} - \frac{\psi_u^2}{\psi} + c_1g\frac{\psi_u}{\psi} = 0. \tag{2.4.6}$$

Решение этого уравнения нетрудно найти

$$\psi = c_3(x)\left[\exp c_2(x)u - c_1c_2^{-1}(x)g(x)\right], \tag{2.4.7}$$

c_2, c_3 — произвольные функции от x.

Третье уравнение системы (2.4.3) для ψ дает выражение

$$2c_1 - gc_1\psi_g\psi^{-1} - g^{-1}\psi_u - \psi_{ug} + \psi_u\psi_g\psi^{-1} = 0. \tag{2.4.8}$$

Расщепление (2.4.8) по $\exp 2c_2u$ дает уравнение

$$g^{-1}c_3^2c_2 + c_3\left[(\dot c_3)_gc_2 + c_3(\dot c_2)_g + c_3c_2(\dot c_2)_g\right] - c_3c_2\left[(\dot c_3)_g + c_3(\dot c_2)_g\right] = 0. \tag{2.4.9}$$

После простых преобразований оно примет вид

$$(\dot c_2)_g = -g^{-1}c_2. \tag{2.4.10}$$

Решение этого уравнения легко найти:

$$c_2(x) = \alpha g^{-1}. \tag{2.4.11}$$

Здесь α — произвольная постоянная.

Оставшиеся два уравнения, получающиеся из (2.4.8) расщеплением по $\exp c_2u$, выполняются при этом тождественно. Искомая подстановка приобретает вид

$$\zeta_1 = \ln\frac{c_1u_y}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}u) - c_1g^2\alpha^{-1}}. \tag{2.4.12}$$

В случае $c_2 \equiv 0$ находим

$$\psi = c_1gu + c_4,$$

c_4 — постоянная интегрирования. Нелокальная замена в этой случае оказывается такой:

$$\zeta_2 = \ln\frac{c_1u_y}{c_1gu + c_4}. \tag{2.4.13}$$

Соответствующие две формы решения уравнения (2.4.0) запишем в виде

$$z_1 = \ln \frac{c_1\phi'(y)g(x)}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}[\psi(x)+\phi(y)g(x)]) - \alpha^{-1}c_1 g^2}, \tag{2.4.14}$$

$$z_2 = \ln \frac{c_1\phi'(y)g(x)}{c_1 g(x)[\psi(x)+\phi(y)g(x)] + c_4}. \tag{2.4.15}$$

Замечание. Уравнение (2.4.0) может быть проинтегрировано иначе. Для этого заметим, что его можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[z_y + g(x)e^z\right] = 0,$$

откуда

$$z_y + g(x)e^z = G'(y). \tag{2.4.16}$$

$G'(y)$ — произвольная функция. Выполняя замену $z = u + G(y)$ в (2.4.16), получаем

$$u_y + g(x)\exp G(y)\exp u = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\exp(-u) = g(x)\int \exp G(y)\,dy + f(x).$$

Введем обозначение: $\int \exp G(y)dy \equiv F(y)$. Тогда: $G(y) = \ln F'(y)$ и

$$u = -\ln[g(x)F(y) + f(x)].$$

Решение уравнения (2.4.0) теперь может быть записано в виде

$$z = \ln F'(y) - \ln[g(x)F(y) + f(x)].$$

Данному решению отвечает следующая задача приведения: для уравнения $w_x = 0$ следует найти преобразование T такое, что

$$Tw_x\Big|_{\mathfrak{M}(2.4.0)} \equiv 0, \qquad T:\ w = \zeta(x, z, z_y).$$

Решая эту задачу, получаем подстановку

$$w = z_y + g(x)e^z.$$

Учитывая, что $w = G'(y)$, можем выразить z как функцию от w, решая уравнение (2.4.16).

Следующие ниже уравнения объединяет то, что все они допускают линеаризацию *точечной заменой всех переменных.*

5. Уравнение (№ 8):

$$F_5 \equiv z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0. \tag{2.5.0}$$

Первое решение. Ищем преобразование вида T: $z = \zeta(u)$, которое позволило бы привести (2.5.0) к уравнению

$$\mathfrak{M}:\quad u_x - [\psi'(y)]^{-1}u_y = 0.$$

Для последнего, как известно, решение можно записать так:

$$u = \Phi(x + \psi(y)).$$

Соотношение, определяющее приводимость, имеет вид

$$TF_5\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0. \tag{2.5.0$'$}$$

Подстановка в него значений производных, вычисленных на $\mathfrak{M}$, дает

$$u_y(\psi')^{-1}u_{xy}\zeta_u - u_x u_{xy}\zeta_u \equiv 0$$

или

$$u_{xy}\zeta_u\left(u_y\frac{1}{\psi'} - u_x\right) \equiv 0.$$

Полученный результат означает, что $\zeta(u)$ — произвольная функция. Решение уравнения (2.5.0), следовательно, может быть записано в виде

$$z = f(x + \psi(y)).$$

Второе решение. Решим задачу об отыскании уравнения $F(z) = 0$, получающегося в результате преобразования (1.3.0) уравнения $u_{\xi\eta} = 0$.

Воспользуемся формулами (1.5.0) для преобразования переменных

$$T_5: \quad \zeta = x, \quad \varepsilon = z, \quad \varkappa = y.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
&D_x\zeta = 1, \qquad D_y\zeta = 0, \qquad D_{ij}\zeta = 0 \quad (i, j = x, y),\\
&D_x\varkappa = 0, \qquad D_y\varkappa = 1, \qquad D_{ij}\varkappa = 0,\\
&D_x\varepsilon = z_x, \qquad D_y\varepsilon = z_y, \qquad D_{ij}\varepsilon = z_{ij},\\
&\delta = z_x, \qquad K = z_y, \qquad H = 1, \qquad u_\xi = z_x^{-1},\\
&P = -z_{xx}, \qquad Q = -z_{yy}, \qquad R = -z_{xy}, \qquad u_\eta = -z_y z_x^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Вычисляя $u_{\xi\eta}$, находим

$$u_{\xi\eta} = [z_x z_{xy} - z_y z_{xx}]z_x^{-3} = 0, \tag{2.5.2}$$

т.е. как раз уравнение (2.5.0). Решение последнего получим, заменяя u, ξ, η их значениями на $\mathfrak{M}^F$:

$$u = \phi(\xi) - \psi(\eta), \quad \Longrightarrow \quad x = \phi(z) - \psi(y),$$

что эквивалентно найденному выше первым методом.

Ближайшее обобщение уравнения (2.5.0) наиболее просто получим, задавая, например, уравнение

$$u_{\xi\eta} = \alpha S(u_\xi) + \beta N(u_\eta) + \gamma T(u). \tag{2.5.3}$$

Если здесь α, β, γ выбрать функциями ξ, получим уравнение

$$z_x z_{xy} - z_y z_{xx} = z_x^3\left\{\alpha(z)S\left(\frac{1}{z_x}\right) + \beta(z)N\left(-\frac{z_y}{z_x}\right) + \gamma(z)T(x)\right\}. \tag{2.5.4}$$

По известному решению уравнения (2.5.3) легко, как было показано, строится решение нелинейного уравнения (2.5.4).

Иной способ построения более общих нелинейных уравнений можно получить изменением преобразования переменных. Так, выбирая преобразование T в виде

$$\zeta = x, \qquad \varepsilon = \sin z, \qquad \varkappa = y,$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\delta = z_x \cos z, \qquad u_\eta = -\frac{z_y}{z_x}, \qquad -P = z_{xx}\cos z - z_x \sin z,\\
&K = z_y \cos z, \qquad u_\xi = (z_x \cos z)^{-1}, \qquad -Q = z_{yy}\cos z - z_y \sin z,\\
&H = 1, \qquad -R = z_{xy}\cos z - z_y \sin z,
\end{aligned}$$

а уравнение оказывается таким:

$$z_x z_{xy} - z_y z_{xx} = z_x^3 \cos^2 z \left\{\alpha S\left(\frac{1}{z_x \cos z}\right) + \beta N\left(-\frac{z_y}{z_x}\right) + \gamma T(x)\right\}.$$

Замечание. Уравнение (2.5.0) можно решить иначе. Рассмотрим уравнение $w_x = 0$, решение которого запишем в виде $w = c_1(y)$. Найдем преобразование T такое, что

$$T w_x \Big|_{\mathfrak{M}(2.5.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z_x, z_y).$$

Получим

$$z_{xy}\zeta_{z_y} + z_{xx}\zeta_{z_x}\Big|_{z_{xy} = z_y z_x^{-1} z_{xx}} \equiv 0$$

или

$$z_y \zeta_{z_y} + z_x \zeta_{z_x} = 0.$$

Отсюда

$$\zeta = f_1\left(\frac{z_x}{z_y}\right).$$

Чтобы выразить z через w, следует решить уравнение

$$z_x - [\psi'(y)]^{-1} z_y = 0.$$

Получим

$$z = f(x + \psi(\psi(y))).$$

6. Уравнение (№ 9):

$$F_6 \equiv z_y z_{xy} - z_x z_{xy} = 0 \tag{2.6.0}$$

аналогично предыдущему. В этом случае также можно указать несколько способов решения. Первый — решение задачи приведения к уравнению

$$u_y - [\psi'(y)]^{-1} u_x = 0.$$

Второй — преобразование уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ заменой

$$\begin{aligned}
&T_4: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = z, \qquad \varkappa = x, \\
&\delta = -z_y, \qquad K = -z_x, \qquad H = -1, \qquad u_\xi = z_y^{-1}, \\
&P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}, \qquad u_\eta = -\frac{z_x}{z_y}.
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Находим

$$u_{\xi\eta} = z_y^{-3}(z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) = 0.$$

Преобразование уравнения (2.5.3) при $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ дает в этом случае уравнение

$$F_6 = z_y^3 \left\{ \alpha(z) S\left(\frac{1}{z_y}\right) + \beta(z) N\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + \gamma(z) T(y) \right\}.$$

Замечание. Это уравнение (2.6.0) может быть приведено к $w_y = 0$

$$T w_y\Big|_{\mathfrak{M}(2.6.0)} \equiv 0, \qquad w = [\psi'(x)]^{-1}.$$

Подстановка будет иметь вид

$$w = f_1\left(\frac{z_x}{z_y}\right).$$

Решая уравнение

$$z_y - [\psi'(x)]^{-1} z_x = 0,$$

получаем $z = f(y + \psi(x))$.

7. Уравнение (№ 11):

$$F_7 \equiv z_y z_{xy} - z_x z_{yy} - z_y^3 = 0 \tag{2.7.0}$$

может быть построено как частный случай предыдущего, в котором следует положить $u_{\xi\eta} = 1$. Выполним преобразование (2.6.1). Получим

$$u_{\xi\eta} = (-z_y)^3 (z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) = 1.$$

Уравнение (2.7.0) может быть получено иначе. Полагая исходное уравнение таким: $u_{\xi\eta} = -1$, и выполняя преобразование

$$T: \qquad \zeta = -y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = z,$$

найдем $\delta = z_y$, $K = 1$, $H = z_x$, $P = z_{xx}$, $Q = z_{yy}$, $R = z_{xy}$,

$$u_{\xi\eta} = z_y^{-3}(z_x z_{yy} - z_y z_{xy}) = -1.$$

Для уравнения (2.7.0) может быть решена также еще одна задача приведения — к уравнению $w_y = 0$, имеющему решение вида $w = f'(x)$:

$$T w_y\Big|_{\mathfrak{M}(2.7.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z, z_x, z_y).$$

Расщепление по производным $\underset{2}{z}$ дает

$$z_x\zeta_{z_x} + z_y\zeta_{z_y} = 0,$$

откуда $\zeta = \Phi(\alpha, z)$, $\alpha \equiv \frac{z_x}{z_y}$.

Второе уравнение оказывается таким:

$$\Phi_z + \Phi_\alpha = 0.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\zeta = \Phi(z_x z_y^{-1} - z).$$

8. Уравнение (№ 14):

$$F_8 \equiv z_y(1+z_y)z_{xx} - (1+2z_y)(1+z_x)z_{xy} + (1+z_x)^2 z_{yy} = 0. \tag{2.8.0}$$

Выполним преобразование

$$T_8: \qquad \zeta = x, \qquad \varepsilon = x+y+z, \qquad \varkappa = x+y,$$

уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ с решением $u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$. Получим

$$\delta = -(1+z_x), \qquad K = (1+z_y), \qquad H = z_y, \qquad u_\eta = \frac{1+z_y}{1+z_x},$$
$$u_\xi = -z_y(1+z_x)^{-1}, \qquad P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}.$$

Подставляя в выражение $u_{\xi\eta}$ из (1.5.0), находим

$$u_{\xi\eta} = \frac{-1}{(1+z_x)^3}\left[z_y(1+z_y)z_{xx} + (1+z_x)^2 z_{yy} - z_{xy}(1+2z_y)(1+z_x)\right] = 0,$$

что при $z_x z_y \neq 1$, $z_x \neq -1$ дает (2.8.0), решение которого имеет вид

$$x = \phi(x+y+z) + \psi(x+z).$$

Выбирая в качестве исходного уравнение (2.5.3), получим такое обобщение уравнения (2.8.0):

$$F_8 = -(1+z_x)^3\left\{\alpha S\left(\frac{-z_y}{1+z_x}\right) + \beta N\left(\frac{1+z_y}{1+z_x}\right) + \gamma T(x)\right\}.$$

9. Уравнение (№ 15):

$$F_9 \equiv z_y z_{xx} - (1+z_x+z_y)z_{xy} + (1+z_x)z_{yy} = 0 \tag{2.9.0}$$

получается из $u_{\xi\eta} = 0$ $(u = \phi(\xi) + \psi(\eta))$ преобразованием

$$T_9: \qquad \zeta = z, \qquad \varepsilon = x+z, \qquad \varkappa = x+y.$$

При этом

$$\delta = 1 + z_x - z_y, \qquad K = -z_y, \qquad H = z_x - z_y, \qquad u_\eta = z_y(1+z_x-z_y),$$
$$u_\xi = \frac{z_x - z_y}{1+z_x-z_y}, \qquad P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}.$$

Вычисляя $u_{\xi\eta}$, получаем (2.9.0)

$$u_{\xi\eta} = (1+z_x-z_y)^{-3}\left[z_{xx}z_y + z_{yy}(1+z_x) - z_{xy}(1+z_x+z_y)\right] = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$z = \phi(x+z) + \psi(x+y).$$

Преобразование уравнения (2.5.3) дает результат

$$F_9 = [1+z_x-z_y]^3\left\{\alpha S\left(\frac{z_x-z_y}{1+z_x-z_y}\right) + \beta N\left(\frac{z_y}{1+z_x-z_y}\right) + \gamma T(z)\right\}. \tag{2.9.1}$$

10. Уравнение (№ 17):

$$F_{10} \equiv (e^x-1)(z_y z_{xx} - z_x z_{xy}) - z_x z_y e^x = 0. \tag{2.10.0}$$

Выполним преобразование

$$T_{10}: \qquad \zeta = x - e^x, \qquad \varepsilon = z, \qquad \varkappa = y,$$

уравнения $u_{\xi\eta} = 0$. В этом случае

$$\delta = z_x, \qquad K = z_y(1-e^x), \qquad H = (1-e^x),$$

$$u_\xi = \frac{1-e^x}{z_x}, \qquad u_\eta = -\frac{(1-e^x)z_y}{z_x},$$

$$-P = z_{xx}(1-e^x) + z_x e^x, \qquad -Q = z_{yy}(1-e^x), \qquad -R = z_{xy}(1-e^x).$$

Вычисляя теперь $u_{\xi\eta}$, получаем

$$u_{\xi\eta} = (-z_x)^3\left[z_x z_y e^x + (1-e^x)z_y z_{xx} - z_x z_{xy}(1-e^x)\right] = 0,$$

откуда следует (2.10.0). Решение последнего имеет вид

$$x - e^x = \phi(z) - \psi(y).$$

В рассмотренном примере, как и в предыдущем, легко можно построить обобщение уравнения (2.10.0), усложняя, например, исходное уравнение до (2.5.3).

Для уравнения (2.10.0) возможно решение другой задачи приведения. Выберем в качестве исходного такое линейное уравнение:

$$\Phi \equiv w_x + e^x(1-e^x)^{-1}w = 0. \tag{2.10.1}$$

Найдем преобразование T такое, что

$$T\Phi(w)\Big|_{\mathfrak{M}(2.10.0)} \equiv 0, \qquad w = \zeta(z_x, z_y). \tag{2.10.2}$$

Тогда

$$z_{xy}\zeta_{z_y} + z_{xx}\zeta_{z_x} + e^x(1-e^x)\zeta\Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

или

$$z_{xy}\zeta_{z_y} - e^x(1-e^x)^{-1}\zeta_{z_x} + z_{xy}z_x z_y^{-1}\zeta_{z_x} + e^x(1-e^x)^{-1}\zeta \equiv 0.$$

Расщепление по z_{xy} дает

$$z_y\zeta_{z_y} + z_x\zeta_{z_x} = 0, \tag{2.10.3}$$

откуда следует $\zeta = f\left(\frac{z_x}{z_y}\right)$, что удовлетворяет и второму уравнению, остающемуся от (2.10.3):

$$z_x\zeta_{z_x} - \zeta = 0.$$

Решение (2.10.1) имеет вид $w = F(y)(e^x - 1)$. Поэтому из замены

$$z_x z_y^{-1} = F(y)(e^x - 1)$$

находим $z = \omega(e^x - x + F(y))$.

11. Уравнение (№ 18) [1]:

$$F_{11} \equiv z_y(1 + z_y)z_{xx} - (1 + z_x + z_y + 2z_xz_y)z_{xy} + z_x(1 + z_x)z_{yy} = 0. \tag{2.11.0}$$

Данное уравнение получим из $u_{\xi\eta} = 0$ подстановкой

$$T_{11}: \qquad \zeta = z, \qquad \varepsilon = x + z, \qquad \varkappa = y + z.$$

При этом

$$\delta = 1 + z_x + z_y, \qquad K = -z_y, \qquad H = z_x, \qquad u_\eta = \frac{z_y}{1 + z_x + z_y},$$
$$u_\xi = \frac{z_x}{1 + z_x + z_y}, \qquad P = z_{xx}, \qquad Q = z_{yy}, \qquad R = z_{xy}.$$

Вычисление $u_{\xi\eta}$ дает уравнение (2.11.0). Решение его таково:

$$z = \phi(x + z) + \psi(y + z).$$

Преобразованием уравнения (2.5.3) получим

$$F_{11} = (1 + z_x + z_y)^3\left[\alpha S\left(\frac{z_x}{1 + z_x + z_y}\right) + \beta N\left(\frac{z_y}{1 + z_x + z_y}\right) + \gamma T(z)\right].$$

12. Уравнение (№ 23):

$$F_{12} \equiv z(z_yz_{xy} - z_xz_{yy}) \pm z_xz_y^2 = 0. \tag{2.12.0}$$

Исходным здесь может быть взято уравнение

$$u_{\xi\eta} = \eta^{-1}u_\xi, \tag{2.12.1}$$

имеющее решением функцию $u = \phi(\eta) + \eta\psi(\xi)$.

Выполним следующее преобразование уравнения (2.12.1):

$$T_{12}: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = \pm z.$$

При этом находим

$$\delta = \pm z_y, \qquad K = -1, \qquad H = \mp z_x, \qquad u_\eta = \pm z_y^{-1},$$
$$u_\xi = \mp z_xz_y^{-1}, \qquad P = -z_{xx}, \qquad Q = -z_{yy}, \qquad R = -z_{xy}.$$

Полученные выражения позволяют вычислить производные $u_{\xi\eta}$ и u_ξ на $\mathfrak{M}$ многообразии. Подставим их в (2.12.1), получим

$$u_{\xi\eta} = [\mp z_y z_{xy} \pm z_x z_{yy}] (\pm z_y)^{-3} = \mp \frac{z_x}{z_y z} = \eta^{-1} u_\xi.$$

Решение (2.12.0) может быть, следовательно, записано в виде

$$y = \phi(z) \pm z\psi(x).$$

Потребовав, чтобы исходное уравнение имело вид (2.5.3) с α, β, γ, зависящими от η, придем к такому обобщению (2.12.0)

$$z_y z_{xy} - z_x z_{yy} = z_y^3 \left[\alpha(z) S\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + \beta(z) N\left(\frac{1}{z_y}\right) + \gamma(z) T(y)\right].$$

В частности, потребовав, чтобы (2.5.3) имело вид

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{f(\eta)} u_\xi, \qquad (\eta = z),$$

получим

$$f(z)[z_y z_{xy} - z_x z_{yy}] = -z_x z_y^2.$$

Решение этого уравнения выглядит так:

$$y = \int \phi(x) \exp \int f^{-1}(z)\, dz\, dx + \psi(z).$$

13. Уравнение (№ 12):

$$F_{13} \equiv z_y^2 z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0 \tag{2.13.0}$$

может быть получено преобразованием

$$T_{13}: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = z$$

уравнения $u_{\xi\xi} = 0$ с решением $u = \xi\phi(\eta) + \psi(\eta)$. В самом деле

$$\delta = z_y, \qquad K = -1, \qquad H = -z_x, \qquad u_\eta = z_y^{-1},$$
$$u_\xi = -z_x z_y^{-1}, \qquad P = -z_{xx}, \qquad Q = -z_{yy}, \qquad R = -z_{xy}.$$

Вычисляя $u_{\xi\xi}$ и приравнивая результат нулю, приходим к (2.13.0). Решение записывается в виде

$$y = \phi(z) x + \psi(z).$$

В случае преобразования T_{13} уравнения

$$u_{\xi\xi} = \alpha(\eta) S(u_\xi) + \beta(\eta) N(u_\eta) + \gamma(\eta) T(u) \tag{2.13.1}$$

получим

$$F_{13} = z_y^3 \left[\alpha(z) S\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + \beta(z) N\left(\frac{1}{z_y}\right) + \gamma(z) T(y)\right].$$

14. Уравнение (№ 13):

$$F_{14} \equiv z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} - z_x z_y^2 = 0 \tag{2.14.0}$$

получается как частный случай предыдущего (2.13.1).

Выполним преобразование

$$T_{14}: \qquad \zeta = y, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = z$$

уравнения $u_{\xi\xi} = u_\xi$, имеющего решение $u = e^\xi \phi(\eta) + \psi(\eta)$. Решение уравнения (2.14.0) запишется в виде

$$y = e^x \phi(z) + \psi(z).$$

15. Уравнение (№ 16) [1]:

$$F_{15} \equiv (b + z_y)^2 z_{xx} - 2(a + z_x)(b + z_y) z_{xy} + (a + z_x)^2 z_{yy} = 0 \tag{2.15.0}$$

получается из $u_{\xi\xi} = 0$ заменой

$$T_{15}: \qquad \zeta = z, \qquad \varepsilon = x, \qquad \varkappa = ax + by + z.$$

При этом находим

$$\delta = b + z_y, \qquad K = -z_y, \qquad H = z_x(b + z_y) - z_y(a + z_x),$$
$$u_\eta = z_y (b + z_y)^{-1}, \qquad u_\xi = z_x - z_y \frac{a + z_x}{b + z_y},$$
$$P = b z_{xx}, \qquad Q = b z_{yy}, \qquad R = b z_{yy}.$$

С помощью полученных выражений вычислим $u_{\xi\xi}$. Приходим к (2.15.0). Решение этого уравнения имеет вид $(u = \xi\phi(\eta) + \psi(\eta))$:

$$z = x\phi(ax + by + z) + \psi(ax + by + z).$$

Преобразованием уравнения (2.13.1) получим

$$F_{15} = b^{-1}(b + z_y)^3 \left\{ \alpha S \left[z_x - z_y \frac{a + z_x}{b + z_y} \right] + \beta N \left(\frac{z_y}{b + z_y} \right) + \gamma T(z) \right\}.$$

Уравнения, которые будут рассмотрены ниже, объединяет то, что все они допускают линеаризацию посредством нелокального преобразования всех переменных.

16. Уравнение (№ 21) [1]:

$$F_{16} \equiv z_{xx} + z_x z_{yy} \mp z_y z_{xy} = 0. \tag{2.16.0}$$

Поставим следующую задачу приведения: найти преобразование

$$T_{16}: \quad \begin{aligned} z &= \zeta(\xi, \eta, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \\ x &= \varepsilon(\xi, \eta, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \\ y &= \varkappa(\xi, \eta, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \end{aligned} \tag{2.16.1}$$

осуществляющее приведение (2.16.0) к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$ по схеме

$$T_{16} F_{16} \Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0.$$

Полученное преобразование может быть полезно для построения решения уравнения (2.16.0) в основном в тех случаях, когда (2.16.1) есть линейные функции (возможно с переменными коэффициентами), т.е.

$$\begin{aligned}
&\zeta = \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_\xi + \gamma u_{\eta\eta} + \delta u_\eta + \nu u + c_1,\\
&\varepsilon = h u_{\xi\xi} + l u_\xi + k u_{\eta\eta} + m u_\eta + n u + c_2,\\
&\varkappa = a u_{\xi\xi} + b u_\xi + c u_{\eta\eta} + d u_\eta + e u + c_3,
\end{aligned} \tag{2.16.2}$$

Здесь все коэффициенты — функции ξ, η. Выписывать значения производных на $\mathfrak{M}$ не будем ввиду их громоздкости. Определяющее соотношение может быть записано так:

$$\begin{aligned}
&P\left[\delta(D_\eta\varkappa)^2 + H(D_\eta\varepsilon)^2 \pm K D_\eta\varkappa D_\eta\varepsilon\right] + Q\left[\delta(D_\xi\varkappa)^2 + H(D_\xi\varepsilon)^2 \pm K D_\xi\varkappa D_\xi\varepsilon\right] -\\
&-R\left[2\delta D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa + 2H D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon \pm K(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)\right]\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Легко увидеть, что $u_{\xi\xi\xi\xi}$ встретится лишь в P, а $u_{\eta\eta\eta\eta}$ — только в Q. Отсюда следует, что $R = 0$. Выполняя дальнейшее расщепление в P и Q по $\underset{4}{u}$ и затем по $\underset{3}{u}$, получаем систему большого числа простых уравнение, позволяющую в завершение процесса решения получить замену

$$\begin{aligned}
&\zeta = \xi^2 u_{\xi\xi} - 2\xi u_\xi + 2u + \eta^2 u_{\eta\eta} - 2\eta u_\eta + c_1,\\
&\varepsilon = -(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + c_2,\\
&\varkappa = \pm(\xi u_{\xi\xi} - u_\xi + \eta u_{\eta\eta} - u_\eta) + c_3.
\end{aligned} \tag{2.16.3}$$

Проверим, что преобразование (2.16.3) в самом деле дает решение задачи. Вычисление дает следующие результаты на $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned}
&D_\xi\zeta = \xi^2 u_{\xi\xi\xi}, \qquad D_\xi\varepsilon = -u_{\xi\xi\xi}, \qquad D_\xi\varkappa = \pm\xi u_{\xi\xi\xi},\\
&D_\eta\zeta = \eta^2 u_{\eta\eta\eta}, \qquad D_\eta\varepsilon = -u_{\eta\eta\eta}, \qquad D_\eta\varkappa = \pm\eta u_{\eta\eta\eta},\\
&D_{\xi\xi}\zeta = 2\xi u_{\xi\xi\xi} + \xi^2 u_{\xi\xi\xi\xi}, \qquad D_{\xi\xi}\varepsilon = -u_{\xi\xi\xi\xi}, \qquad D_{\xi\xi}\varkappa = \pm(u_{\xi\xi\xi} + \xi u_{\xi\xi\xi\xi}),\\
&D_{\eta\eta}\zeta = 2\eta u_{\eta\eta\eta} + \eta^2 u_{\eta\eta\eta\eta}, \qquad D_{\eta\eta}\varepsilon = -u_{\eta\eta\eta\eta}, \qquad D_{\eta\eta}\varkappa = \pm(u_{\eta\eta\eta} + \eta u_{\eta\eta\eta\eta}),\\
&D_{\xi\eta}\zeta = 0, \qquad D_{\xi\eta}\varepsilon = 0, \qquad D_{\xi\eta}\varkappa = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда легко найти значения вспомогательных величин

$$\begin{aligned}
&\delta = \mp u_{\xi\xi\xi} u_{\eta\eta\eta}(\eta - \xi), \qquad K = \mp\delta(\eta + \xi), \qquad H = \delta(\xi\eta),\\
&z_y = \pm(\eta + \xi), \qquad z_x = \xi\eta, \qquad P = \delta(\xi - \eta)u_{\xi\xi\xi}, \qquad Q = \delta(\eta - \xi)u_{\eta\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Производные второго порядка теперь вычисляются весьма просто:

$$\begin{aligned}
&z_{xx} = \mp\delta^{-1}\left[\xi^2 u_{\xi\xi\xi} - \eta^2 u_{\eta\eta\eta}\right],\\
&z_{yy} = \mp\delta^{-1}\left[u_{\xi\xi\xi} - u_{\eta\eta\eta}\right],\\
&z_{xx} = \mp\delta^{-1}\left[\xi u_{\xi\xi\xi} - \eta u_{\eta\eta\eta}\right].
\end{aligned}$$

Подстановка найденных выше выражений производных на многообразии в (2.16.0) обращает последнее в тождество. Следовательно, (2.16.3) есть искомое преобразование. Замечая, что $u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$, запишем решение уравнения (2.16.0)

$$\begin{aligned}
&z = \xi^2\phi'' - 2\xi\phi' + 2(\phi + \psi) + \eta^2\psi'' - 2\eta\psi' + c_1,\\
&x = -(\phi'' + \psi'') + c_2,\\
&y = \pm(\xi\phi'' - \phi' + \eta\psi'' - \psi') + c_3.
\end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

17. Уравнение (№ 10):

$$F_{17} \equiv z_{xy} - \left(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2\right) = 0. \tag{2.17.0}$$

Будем искать линейное преобразование

$$T_{17}: \quad \begin{aligned} \zeta &= \beta u_\xi + \delta u_\eta + \nu u + c_1, \\ \varepsilon &= l u_\xi + m u_\eta + n u + c_2, \\ \varkappa &= b u_\xi + d u_\eta + e u + c_3, \end{aligned} \tag{2.17.1}$$

осуществляющее приведение к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$ по схеме

$$T_{17} F_{17}\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0. \tag{2.17.2}$$

Определяющее соотношение (2.17.2) запишем так:

$$\begin{aligned} &[P D_\eta\varepsilon D_\eta\varkappa + Q D_\xi\varkappa D_\xi\varepsilon - R(D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)]\,\delta^3 - \\ &-\Big\{P^2 (D_\eta\varkappa)^2 (D_\eta\varepsilon)^2 + PQ (D_\eta\varkappa)^2 (D_\xi\varepsilon)^2 - 2RP (D_\eta\varkappa)^2 D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon + \\ &+QP (D_\xi\varkappa)^2 (D_\eta\varepsilon)^2 + Q^2 (D_\xi\varkappa)^2 (D_\xi\varepsilon)^2 - 2RQ (D_\xi\varkappa)^2 D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon - \\ &-2RP (D_\eta\varepsilon)^2 D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa - 2RQ (D_\xi\varepsilon)^2 D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa + 4R^2 D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon - \\ &-P^2 (D_\eta\varepsilon)^2 (D_\eta\varkappa)^2 - Q^2 (D_\xi\varkappa)^2 (D_\xi\varepsilon)^2 - R^2 (D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)^2 + \\ &+2RP D_\eta\varkappa D_\eta\varepsilon (D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa) - 2PQ D_\xi\varkappa D_\eta\varkappa D_\xi\varepsilon D_\eta\varepsilon + \\ &+2RQ D_\xi\varkappa D_\xi\varepsilon (D_\xi\varepsilon D_\eta\varkappa + D_\eta\varepsilon D_\xi\varkappa)\Big\}\Big|_{D\mathfrak{M}} \equiv 0. \end{aligned} \tag{2.17.3}$$

Здесь слагаемые с P^2 и Q^2 взаимно уничтожаются. Следует учесть, что $u_{\xi\xi\xi}$ содержится только в P, а $u_{\eta\eta\eta}$ — в Q; R не зависит от $\underset{3}{u}$. Выполняя расщепление в оставшихся слагаемых (2.17.3) по произведению $u_{\xi\xi\xi} u_{\eta\eta\eta}$, по $u_{\xi\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta\eta}$, получим систему определяющих уравнений. Решение последней имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi\eta + \xi u_\xi + \eta u_\eta - u + c_1, \\ \varepsilon &= u_\xi + \eta + c_2, \\ \varkappa &= u_\eta + \xi + c_3. \end{aligned} \tag{2.17.4}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования.

Убедимся в том, что найденная подстановка в самом деле осуществляет приведение уравнений. Простые вычислений дают

$$\begin{gathered} D_\xi\zeta = \eta + \xi u_{\xi\xi}, \qquad D_{\xi\xi}\zeta = u_{\xi\xi} + \xi u_{\xi\xi\xi}, \qquad D_{\xi\eta}\zeta = 1, \qquad D_\eta\zeta = \xi + \eta u_{\eta\eta}, \\ D_{\eta\eta}\zeta = u_{\eta\eta} + \eta u_{\eta\eta\eta}, \qquad D_\xi\varepsilon = u_{\xi\xi}, \qquad D_\eta\varepsilon = 1, \qquad D_{\xi\xi}\varepsilon = u_{\xi\xi\xi}, \\ D_{\xi\eta}\varepsilon = D_{\eta\eta}\varepsilon = 0, \qquad D_\xi\varkappa = 1, \qquad D_\eta\varkappa = u_{\eta\eta}, \qquad D_{\eta\eta}\varkappa = u_{\eta\eta\eta}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D_{\xi\eta}\varkappa = D_{\xi\xi}\varkappa = 0, \qquad \delta = u_{\xi\xi} u_{\eta\eta} - 1, \qquad K = -\eta\delta, \\ H = \xi\delta, \qquad P = u_{\xi\xi}\delta, \qquad Q = u_{\eta\eta}\delta, \qquad R = \delta. \end{gathered}$$

Теперь легко вычисляются значения $\underset{2}{z}$

$$z_{xx} = u_{\eta\eta}\delta^{-1}, \qquad z_{yy} = u_{\xi\xi}\delta^{-1}, \qquad z_{xy} = \delta^{-1}.$$

Подставляя их в (2.17.0) на многообразии, убеждаемся в том, что результат верен:

$$\left(u_{\eta\eta}u_{\xi\xi}\delta^{-2}-\delta^{-2}\right)-\delta^{-1}\equiv 0.$$

Решение получим, подставив в (2.17.4)

$$\begin{aligned}&z=\xi\eta+\xi\phi'+\eta\psi'-\phi-\psi+c_1,\\&x=\phi'+\eta+c_2,\\&y=\psi'+\xi+c_3.\end{aligned}\tag{2.17.5}$$

18. Уравнение (№ 20) (уравнение Plateou) [1, 2]:

$$F_{18}\equiv\left(1+z_y^2\right)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+\left(1+z_x^2\right)z_{yy}=0.\tag{2.18.0}$$

Покажем, что преобразование (подстановка Монжа (Monge))

$$T_{18}:\quad\begin{aligned}&\zeta=i\int\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}d\xi+i\int\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}d\eta+c_1,\\&\varepsilon=\xi+\eta+c_2,\\&\varkappa=u+c_3,\qquad c_i\ (i=\overline{1,3})\text{ — const}\end{aligned}\tag{2.18.1}$$

является преобразованием, осуществляющим приведение (2.18.0) к уравнению $u_{\xi\eta}=0$ по схеме

$$T_{18}F_{18}\Big|_{D\mathfrak{M}}\equiv 0,\qquad u=\phi(\xi)+\psi(\eta).\tag{2.18.2}$$

Вычислим значения на многообразии вспомогательных величин

$$\begin{aligned}&D_\xi\varepsilon=1,\qquad D_\eta\varepsilon=1,\qquad D_{ij}\varepsilon=0,\qquad D_\xi\varkappa=u_\xi,\qquad D_\eta\varkappa=u_\eta,\\&D_{ij}\varkappa=0,\qquad D_\xi\zeta=i\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2},\qquad D_{\xi\xi}\zeta=iu_\xi u_{\xi\xi}\left(1+u_\xi^2\right)^{-1/2},\\&D_\eta\zeta=i\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2},\qquad D_{\eta\eta}\zeta=iu_\eta u_{\eta\eta}\left(1+u_\eta^2\right)^{-1/2},\\&\delta=u_\eta-u_\xi,\qquad K=i\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}-i\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2},\qquad R=0,\\&H=i\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}u_\eta-i\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}u_\xi,\\&P=i\delta u_\xi u_{\xi\xi}\left(1+u_\xi^2\right)^{-1/2}+iu_{\xi\xi}\left[\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}-\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}\right],\\&Q=i\delta u_\eta u_{\eta\eta}\left(1+u_\xi^2\right)^{-1/2}+iu_{\eta\eta}\left[\left(1+u_\xi^2\right)^{1/2}-\left(1+u_\eta^2\right)^{1/2}\right].\end{aligned}\tag{2.18.3}$$

Определяющее соотношение на многообразии имеет вид

$$\begin{aligned}&\left[1+K^2\delta^{-2}\right]\left[Pu_\eta^2+Qu_\xi^2\right]+2KH\delta^{-2}[Pu_\eta+Qu_\xi]+\\&\qquad+\left[1+H^2\delta^{-2}\right][P+Q]\Big|_{D\mathfrak{M}}\equiv 0.\end{aligned}\tag{2.18.4}$$

Выполняя здесь все действия, убеждаемся в справедливости тождества (2.18.2). Решение уравнения (2.18.0) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}&z=i\int\left(1+\phi'^2\right)^{1/2}d\xi+i\int\left(1+\psi'^2\right)^{1/2}d\eta+c_1,\\&x=\xi+\eta+c_2,\\&y=u+c_3.\end{aligned}$$

19. Уравнение (№ 22) [1]:

$$F_{19} \equiv (z_y + yz_{yy})(z_{xx}+1) - (yz_{xy} - z_x - x)z_{xy} = 0,$$
$$\equiv \left(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2\right) + \frac{z_y}{y}z_{xx} + z_{yy} + \frac{z_x + x}{y}z_{xy} + \frac{z_y}{y} = 0. \tag{2.19.0}$$

Покажем, что уравнение (2.19.0) может быть приведено к линейному

$$\mathfrak{M}^w: \qquad w_{yy} + \xi y^{-1} w_{\xi y} + y^{-1} w_y = 0. \tag{2.19.1}$$

Решение последнего легко находится из задачи приведения к уравнению $u_{\xi\eta} = 0$. Подстановка оказывается такой:

$$\eta = \varkappa(\xi, y, w) = \frac{\xi}{y}, \qquad \xi = \varepsilon(\xi, \eta, w) = \xi, \qquad u = \zeta(\xi, y, w) = w,$$
$$\delta = -\frac{\xi}{y^2}, \qquad K = -w_y, \qquad H = -\frac{1}{y}\left(\frac{\xi}{y}w_\xi + w_y\right),$$
$$P = -\frac{\xi}{y^2}w_{\xi\xi}, \qquad Q = \delta\left(w_{yy} + \frac{2}{y}w_y\right), \qquad R = \delta\left(w_{\xi y} - \frac{1}{\xi}w_y\right).$$

При этом решение (2.19.1) записывается в следующем виде ($u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$):

$$w = \phi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right). \tag{2.19.2}$$

Преобразование, осуществляющее приведение (2.19.0) к (2.19.1)

$$T_{19}: \quad \begin{aligned} &\zeta = -\xi w_\xi - \frac{1}{2}w_\xi^2 + w + c_1, \\ &\varepsilon = -w_\xi, \\ &\varkappa = y \end{aligned}$$

дает следующие значения вспомогательных величин на многообразии:

$$\delta = -w_{\xi\xi}, \qquad H = \delta(\xi + w_\xi), \qquad K = -\delta\left(\frac{1}{2}w_{\xi\eta}w_\xi + w_y\right), \qquad P = -\delta w_{\xi\xi}^2,$$
$$R = \delta^2 w_{\xi y}, \qquad Q = \delta\left\{-\frac{1}{2}w_{\xi\eta}^2 + \frac{1}{2}w_\xi\left(\frac{2}{y}w_{\xi\eta} + \frac{\xi}{y}w_{\xi\xi y}\right) - \frac{\xi}{y}w_{\xi y} - \frac{1}{y}w_y\right\}.$$

Подстановка последних в (2.19.0) обращает его в тождество. Решение уравнения (2.19.0) имеет вид

$$z = -\xi x - \frac{1}{2}x^2 + \phi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right) + c_1,$$
$$x = -\left(\phi' - \frac{1}{y}\psi'\right), \qquad y = y,$$

иди в другой форме

$$z = -\xi x - \frac{1}{2}x^2 + \phi(\xi) - \psi\left(\frac{\xi}{y}\right) + c_1,$$
$$x = -\phi' + \frac{1}{y}\psi', \qquad y = y.$$

20. Уравнение (№ 19) [1]:

$$F_{20} \equiv [z_{xx} - z_x z_{yy}]^2 - z_y^2 z_{xx} z_{yy} = 0. \tag{2.20.0}$$

В отличие от рассмотренных ранее уравнений подстановка, осуществляющая приведение этого уравнения, зависит сразу от двух различных решений последнего. Это соответствует заданию многообразия системой двух линейных уравнений

$$\mathfrak{M}^S: \qquad u_\xi = 0, \qquad v_\eta = 0. \tag{2.20.1}$$

Решая систему определяющих уравнений, найдем

$$T_{20}: \qquad \begin{aligned} &\zeta = \frac{1}{3}\left(2\eta - \xi^3\right)u' - \frac{2}{3}u + \int \xi^4 v'\, d\xi + c_1, \\ &\varepsilon = \frac{1}{\xi}u' + v + c_2, \\ &\varkappa = \xi u' - \int \xi^2 v'\, d\xi + c_3, \qquad c_i = \text{const}. \end{aligned} \tag{2.20.2}$$

Покажем, что данное преобразование обеспечивает приведение уравнения (2.20.0) к системе (2.20.1). Вычислял вспомогательные величины на многообразии, получаем

$$\begin{aligned} &\delta = 2\xi^{-1}u''\left(\xi^2 v' - u'\right), \qquad K = \delta(3\xi)^{-1}\left(2\xi^3 - \eta\right), \qquad H = \frac{1}{3}\delta\xi\left(\xi^3 + \eta\right), \\ &P = \frac{2}{3}\delta(\xi v' - u')\left(4\xi^2 + \eta\right), \qquad Q = \frac{2}{3}\delta u'', \qquad R \equiv 0, \\ &z_{xx} = \frac{2}{3}\delta^{-2}\left(\xi^2 v' - u'\right)u''\left[\xi^2\left(4\xi^2 + \eta\right)u'' + \xi^2 v' - u'\right] \equiv A \neq 0, \\ &z_{yy} = \xi^{-4}A, \qquad z_x = \frac{1}{3}\xi\left(\xi^3 + \eta\right), \qquad z_y = -\frac{1}{3\xi}\left(2\xi^2 - \eta\right). \end{aligned}$$

Определяющее соотношение

$$T_{20}F_{20}\Big|_{D\mathfrak{M}^S} \equiv 0$$

с учетом полученных результатов принимает вид

$$A^2\left\{1 + 9^{-1}\xi^{-6}\left(\xi^3 + \eta\right)^2 - \xi^{-4}\left[2 \cdot 3^{-1}\xi\left(\xi^3 + \eta\right) + 9^{-1}\xi^{-2}\left(2\xi^3 - \eta\right)^2\right]\right\} \equiv 0,$$

откуда видно, что тождество выполняется за счет обращения в ноль сомножителя. Заменяя в (2.20.2) u и v произвольными функциями $\phi(\eta)$ и $\psi(\xi)$ получаем решение уравнения (2.20.0).

21. Уравнение (№ 3) Лиувилля [1]:

$$F_{21} \equiv z_{xx} + z_{yy} + \lambda_1^2 h e^{2hz} = 0. \tag{2.21.0}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, многообразие зададим системой уравнений, дополненной условиями Коши–Римана:

$$\mathfrak{M}^S: \qquad \begin{aligned} &\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \qquad \phi_x = -\psi_y, \\ &\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \qquad \phi_y = \psi_x. \end{aligned} \tag{2.21.1}$$

При $u=\phi\pm i\psi$ это отвечает уравнению $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Линеаризующее преобразование ищем в виде

$$T_{21}:\quad z=\alpha\ln\zeta(\phi,\psi,\phi_x,\phi_y),\qquad (\alpha=\mathrm{const}). \tag{2.21.2}$$

Определяющее соотношение будет таким:

$$T_{21}F_{21}\Big|_{{}_D\mathfrak{M}^S}\equiv 0. \tag{2.21.3}$$

Подставляя значения $\underset{2}{z}$, вычисленные на ${}_D\mathfrak{M}^S$, в (2.21.3) и выполняя расщепление по ϕ_{xx}^2 и ϕ_{xy}^2, находим

$$\zeta_{\phi_x\phi_x}-\zeta^{-1}\zeta_{\phi_x}^2+\zeta_{\phi_y\phi_y}-\zeta^{-1}\zeta_{\phi_y}^2=0. \tag{2.21.4}$$

Расщепление по ϕ_{xx} и ϕ_{xy} даст совпадающие уравнения вида

$$\begin{gathered}\phi_y[\zeta_\psi\zeta_{\phi_x}-\zeta_\phi\zeta_{\phi_y}-\zeta(\zeta_{\phi_x\psi}-\zeta_{\phi_y\psi})]+\\ +\phi_x[\zeta_\phi\zeta_{\phi_x}+\zeta_\psi\zeta_{\phi_y}-\zeta(\zeta_{\psi\phi_x}+\zeta_{\psi_y\psi})]\equiv 0.\end{gathered} \tag{2.21.5}$$

Легко убедиться, что данное уравнение обладает решением

$$\zeta=w^{-1}(\phi,\psi)\left[\phi_x^2+\phi_y^2+c\right], \tag{2.21.6}$$

где $w(\phi,\psi)$ — произвольная функция. Последнее уравнение, остающееся после расщепления, но содержащее ϕ_{ij}, таково:

$$\begin{gathered}\phi_x^2\left[\zeta_\phi^2+\zeta_\psi^2-\zeta(\zeta_{\phi\phi}+\zeta_{\psi\psi})\right]-4\alpha^{-1}\lambda^2h\zeta^{2\alpha h+2}+\\ +\phi_y^2\left[\zeta_\phi^2+\zeta_\psi^2-\zeta(\zeta_{\phi\phi}+\zeta_{\psi\psi})\right]=0,\qquad (4\lambda^2=\lambda_1^2).\end{gathered} \tag{2.21.7}$$

Если в него подставить ζ из (2.21.6), получим $\alpha=(2h)^{-1}$, $c=0$, и уравнение

$$w_{\phi\phi}+w_{\psi\psi}-w^{-1}\left(w_\phi^2+w_\psi^2\right)=8\lambda^2h^2\equiv k. \tag{2.21.8}$$

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+u_{yy}-u^{-1}\left[u_x^2+u_y^2\right]=k. \tag{2.21.8$'$}$$

Будем искать решения вида $u=u(x+y)$. Тогда

$$u''-u^{-1}(u')^2=\frac{1}{2}k.$$

Решая последнее, находим

$$\frac{d(u-a)}{\sqrt{(u-a)^2-a^2}}=\sqrt{c}dx, \tag{2.21.9}$$

где $a=k(2c)^{-1}$, c — произвольная постоянная. Интегрирование (2.21.9) дает несколько форм решений уравнения (2.21.8$'$):

$$\begin{gathered}1)\quad a^2>0,\quad c\neq 0,\\ u_{1,2}=\frac{k}{2c}\left\{\begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \mp i\,\mathrm{sh}\end{matrix}\left[\sqrt{c}(x+y)+A_1\right]+1\right\};\end{gathered} \tag{2.21.10}$$

$$2)\quad a^2>0,\quad c=0,$$
$$u_3=-\frac{k}{4}[x+y+A_3]^2; \tag{2.21.11}$$

$$3)\quad a^2=-b^2<0,\quad c\neq 0,\quad \sqrt{c}=(i\pm 1)\sqrt{\tfrac{\sigma}{2}},\quad \sigma\in R,$$
$$u_{4,5}=-\frac{k}{2\sigma}\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}\\ \pm i\,\mathrm{ch}\end{matrix}\left[\sqrt{c}(x+y)+A_4\right]+1\right\}. \tag{2.21.12}$$

Кроме того, можно указать еще одно решение уравнения (2.21.8′)

$$u_6=\left[x^2+y^2+1\right]^2\frac{k}{8}, \tag{2.21.13}$$

которое получится, если рассмотреть случай $(i=x,y)$

$$u_{ii}=N_i=\mathrm{const},\qquad u_i^2u^{-1}=M_i=\mathrm{const},\qquad \sum_i N_i-\sum_i M_i=k.$$

Найденные выше решения уравнения (2.21.8′) можно использовать для построения решений уравнения (2.21.0). Получим соответственно:

$$z_{1,2}=\frac{1}{2h}\ln\frac{2c\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)}{8h^2\lambda^2\left\{\begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \pm i\,\mathrm{sh}\end{matrix}[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_1]+1\right\}}; \tag{2.21.10′}$$

$$z_3=\frac{1}{2h}\ln\frac{-4\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)}{8h^2\lambda^2(\phi+\psi+A_3)^2}; \tag{2.21.11′}$$

$$z_{4,5}=\frac{1}{2h}\ln\frac{-2\sigma\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)}{8h^2\lambda^2\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}\\ \pm i\,\mathrm{ch}\end{matrix}[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_4]+i\right\}},$$
$$\sqrt{c}=(i\pm 1)\sqrt{\frac{\sigma}{2}},\qquad \sigma\in R; \tag{2.21.12′}$$

$$z_6=\frac{1}{2h}\ln\frac{\phi_x^2+\phi_y^2}{h^2\lambda^2\left(\phi^2+\psi^2+1\right)^2}. \tag{2.21.13′}$$

§ 3. Линеаризация некоторых многомерных уравнений

Наличием произвольных функций и постоянных интегрирования в построенных решениях двумерных нелинейных уравнений можно воспользоваться при отыскании решений некоторых их многомерных обобщений.

1. Один из возможных методов трехмерного обобщения рассмотрим на примере уравнения (2.1.0). Заметим, что два уравнения

$$z_{xy}+zz_x=0,\qquad \tilde z_{x\tilde y}+\tilde z\tilde z_x=0$$

могут быть независимо приведены к линейным $u_{xy}=0$ и $u_{x\tilde y}=0$, соответственно, подстановками (2.1.11′)–(2.1.14′). Это обстоятельство наводит на мысль о существовании подстановок, линеаризующих уравнение

$$z_{xy}+z_{xt}+zz_x=0. \tag{3.1.1}$$

Решением задачи приведения могут быть получены подстановки

$$z_{1,2} = -2b(u_y+u_t)\ \begin{matrix}\mathrm{th}\\ \mathrm{cth}\end{matrix}[-(bu+c_1)] - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

$$z_3 = \frac{2(u_y+u_t)}{u+c_3} - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

$$z_{4,5} = -2b(u_y+u_t)\ \begin{matrix}\mathrm{tg}\\ (-1)\mathrm{ctg}\end{matrix}[bu+c_4] - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

и некоторые дополнительные условия на многообразие, вытекающие из системы определяющих уравнений. Получим эти условия здесь более простым путем, при этом убедимся в справедливости указанных подстановок. Многообразие зададим системой соотношений

$$\mathfrak{M}^S: \quad u_{xy} = u_{xt} = u_{yt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \phi(y) + \psi(t) + \omega(x).$$

Вычислим производные на многообразии для каждой из подстановок и подставим найденные значения в уравнение (3.1.1). Потребуем обращения его в тождество на многообразии. Это возможно при условии

$$u_{tt}u_t^{-2} + u_{yy}u_y^{-2} = 0. \tag{3.1.2}$$

С учетом того, что $u = \phi(y) + \psi(t) + \omega(x)$, получим два уравнения

$$\ddot\phi = \lambda\dot\phi^2, \qquad \ddot\psi = -\lambda\dot\psi^2, \qquad \lambda = \mathrm{const}.$$

Решение их дает следующие выражения:

$$\phi = -\frac{1}{\lambda}\left\{\ln[-(\lambda y + A_2)] + A_1\right\},$$

$$\psi = -\frac{1}{\lambda}\left\{\ln[\lambda t - A_4] + A_3\right\},$$

где A_i, $i = \overline{1,4}$ — произвольные постоянные. Теперь соответствующие решения имеют вид

$$z_{1,2} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{\frac{2b}{\lambda}\ \begin{matrix}\mathrm{th}\\ \mathrm{cth}\end{matrix}\left[\ln\left[\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right]^{-b/\lambda} + \omega_1(x) + c_1\right] + 1\right\},$$

$$z_3 = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{-\frac{2}{\lambda}\left[\ln\left[\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right]^{1/\lambda} + \omega_2(x) + c_2\right] + 1\right\}, \tag{3.1.3}$$

$$z_{4,5} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{\frac{2b}{\lambda}\ \begin{matrix}\mathrm{tg}\\ (-1)\,\mathrm{ctg}\end{matrix}\left[\ln\left[\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right]^{b/\lambda} + \omega_4(x) + c_4\right] + 1\right\}.$$

При $u_{tt} = u_{yy} = 0$ получим $u = \omega(x) + \alpha y + \beta t + \gamma$, α, β, γ — const. Решение оказываются такими:

$$z'_{1,2} = -2b(\alpha+\beta)\ \begin{matrix}\mathrm{th}\\ \mathrm{cth}\end{matrix}[-b(\omega(x) + \alpha y + \beta t + \gamma) + c_1],$$

$$z'_3 = \frac{2(\alpha+\beta)}{\omega_3(x) + \alpha y + \beta t + c_3}, \tag{3.1.4}$$

$$z'_{4,5} = -2b(\alpha+\beta)\ \begin{matrix}\mathrm{tg}\\ (-1)\,\mathrm{ctg}\end{matrix}[b(\omega_4(x) + \alpha y + \beta t + \gamma) + c_4].$$

2. Рассмотрим уравнение

$$z_{xy} + z_{xt} + z_{yt} + e^z = 0. \tag{3.2.0}$$

Рассуждая как и в предыдущем случае, находим, что подстановки могут быть выбраны в виде

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}(u_x u_y + u_t u_x + u_y u_t)\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_1)\right]\right\}\right], \tag{3.2.1}$$

$$z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2(u_x u_y + u_t u_x + u_y u_t)}{a^2(u + c_3)^2}\right], \tag{3.2.2}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}(u_x u_y + u_t u_x + u_y u_t)\left\{1 + \begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}\right]. \tag{3.2.3}$$

Записанные подстановки могут быть получены вместе с дополнительными условиями решением задачи приведения на многообразие

$$\mathfrak{M}^S: \quad u_{xy} = u_{xt} = u_{yt} = 0, \qquad u = \phi(x) + \psi(y) + \omega(t). \tag{3.2.4}$$

Вычислив значения производных па многообразии для каждого из выражений (3.2.1)–(3.2.3), подставим их в левую часть уравнения (3.2.0). Обращение его в тождество возможно при выполнении соотношений

$$\frac{\phi''}{(\phi')^2} = \lambda, \qquad \frac{\psi''}{(\psi')^2} = \mu, \qquad \frac{\omega''}{(\omega')^2} = \nu, \tag{3.2.5}$$

где

$$\mu^{-1} + \nu^{-1} = \lambda^{-1}, \qquad \mu, \nu, \lambda \quad \text{— постоянные.} \tag{3.2.6}$$

Нетрудно получить отсюда выражения для ϕ, ψ, ω:

$$\phi = -\lambda^{-1}\left\{\ln[-(\lambda x + A_2)] + A_1\right\}, \tag{3.2.7}$$

$$\psi = -\mu^{-1}\left\{\ln[-(\mu y + A_4)] + A_3\right\}, \tag{3.2.8}$$

$$\omega = -\nu^{-1}\left\{\ln[-(\nu t + A_6)] + A_5\right\}. \tag{3.2.9}$$

A_i, $i = \overline{1,6}$ — произвольные постоянные. Заметим, что

$$\phi' = -(\lambda x + A_2)^{-1}, \qquad \psi' = -(\mu y + A_4)^{-1}, \qquad \omega' = -(\nu t + A_6)^{-1}.$$

Это позволяет записать несколько форм решения уравнения (3.2.0):

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1}{(\lambda x + A_2)(\mu y + A_4)} + \frac{1}{(\nu t + A_6)(\lambda x + A_2)} + \frac{1}{(\mu y + A_4)(\nu t + A_6)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1 - \begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[\ln(-\lambda x - A_2)^{\frac{b}{\sqrt{2}\lambda}} + \ln(-\mu y - A_4)^{\frac{b}{\sqrt{2}\mu}} + \ln(-\nu t - A_6)^{\frac{b}{\sqrt{2}\nu}} + c_1\right]\right\}\right],$$

$$z_3 = \ln\left[\mp\frac{2}{a^2}\left\{\frac{1}{(\lambda x + A_2)(\mu y + A_4)} + \frac{1}{(\nu t + A_6)(\lambda x + A_2)} + \frac{1}{(\mu y + A_4)(\nu t + A_6)}\right\}\times\right.$$

$$\times\left\{\ln(-\lambda x-A_2)^{-\frac{1}{\lambda}}+\ln(-\mu y-A_4)^{-\frac{1}{\mu}}+\ln(-\nu t-A_6)^{-\frac{1}{\nu}}+c_3\right\}^{-2}\Bigg], \qquad (3.2.10)$$

$$z_{4,5}=\ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1}{(\lambda x+A_2)(\mu y+A_4)}+\frac{1}{(\nu t+A_6)(\lambda x+A_2)}+\frac{1}{(\mu y+A_4)(\nu t+A_6)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1+\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\ln(-\lambda x-A_2)^{-\frac{b}{\sqrt{2}\lambda}}+\ln(-\mu y-A_4)^{-\frac{b}{\sqrt{2}\mu}}+\ln(-\nu t-A_6)^{-\frac{b}{\sqrt{2}\nu}}+c_4\right]\right\}\right],$$

Условия (3.2.5). (3.2.6) будут выполнены и при $\phi''=\psi''=\omega''=\lambda=\mu=\nu=0$, когда $u=\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta$. Решения в этом случае оказываются такими:

$$z_{1,2}=\ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\left\{1-\begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta-c_1)\right]\right\}\right],$$

$$z_3=\ln\left[\frac{\mp2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}{a^2(\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta+c_3)^2}\right], \qquad (3.2.11)$$

$$z_{4,5}=\ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\left\{1+\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta-c_4)\right]\right\}\right],$$

Замечание. В замечании к п.2 раздела II были построены решения уравнения ($2.2^{\text{а}}.0$). Это позволяет так же, как это было сделано выше, найти решения уравнения

$$z_{xx}+z_{yy}+z_{tt}+\alpha e^z=0, \qquad (\alpha=\pm a^2) \qquad (3.2^{\text{а}}.0)$$

сведением к уравнению

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{tt}=0.$$

Линеаризующие подстановки выберем в виде

$$z_{1,2}=\ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\left(u_x^2+u_y^2+u_t^2\right)\left\{1-\begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_1)\right]\right\}\right],$$

$$z_3=\ln\left[\frac{\mp2\left(u_x^2+u_y^2+u_t^2\right)}{a^2(u+c_3)^2}\right], \qquad (3.2^{\text{а}}.1)$$

$$z_{4,5}=\ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\left(u_x^2+u_y^2+u_t^2\right)\left\{1+\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u-c_4)\right]\right\}\right],$$

Если дополнительно потребовать, чтобы было $u_{ij}=0$, т.е.

$$u=\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta,$$

получим несколько соответствующих форм решения ($3.2^{\text{а}}.0$)

$$z_{1,2}=\ln\left[\pm\frac{b^2}{a^2}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\left\{1-\begin{matrix}\mathrm{th}^2\\ \mathrm{cth}^2\end{matrix}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta-c_1)\right]\right\}\right],$$

$$z_3=\ln\left[\frac{\mp2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}{a^2(\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta+c_3)^2}\right], \qquad (3.2^{\text{а}}.2)$$

$$z_{4,5}=\ln\left[\mp\frac{b^2}{a^2}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\left\{1+\begin{matrix}\mathrm{tg}^2\\ \mathrm{ctg}^2\end{matrix}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\alpha x+\beta y+\gamma t+\delta-c_4)\right]\right\}\right].$$

Еще одна возможность построения решений уравнения (3.2ª.0) связана со следующим замечанием. Введение новой переменной

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+t)$$

для

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{tt} = 0$$

дает

$$\mathfrak{M}: \quad u_{xx} + u_{\eta\eta} = 0$$

и позволяет записать (3.2ª.0) в виде

$$z_{xx} + z_{\eta\eta} + \lambda_1^2 h e^{2hz} = 0.$$

Решения последнего были построены ранее, что позволяет записать такие решения уравнения (3.2ª.0): $\left(\phi = \phi\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}}; x\right),\ \psi = \psi\left(\frac{y+t}{\sqrt{2}}; x\right)\right)$,

$$\begin{aligned}
z'_{1,2} &= \frac{1}{2h}\ln\left[2\sqrt{2}c\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(8h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \pm i\,\mathrm{sh}\end{matrix}\left[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_1\right]+1\right\}^{-1}\right];\\
z'_3 &= \frac{1}{2h}\ln\left[-4\sqrt{2}\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(8h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\phi+\psi+A_3\right\}^{-2}\right];\\
z'_{4,5} &= \frac{1}{2h}\ln\left[-2\sqrt{2}\sigma\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(8h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\begin{matrix}\mathrm{sh}\\ \pm\,\mathrm{ch}\end{matrix}\left[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_4\right]+i\right\}^{-1}\right];\\
z'_6 &= \frac{1}{2h}\ln\left[\sqrt{2}\left(\phi_x^2+\phi_\eta^2\right)\left(h^2\lambda^2\right)^{-1}\left\{\phi^2+\psi^2+1\right\}^{-2}\right].
\end{aligned} \tag{3.2ª.3}$$

3. Обратимся теперь к уравнению (2.3.0). Для него характерно то, что на многообразии, заданном уравнением

$$\mathfrak{M}^1: \quad u_{x_0x_1} - \frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}u_{x_1} - \lambda u = 0, \tag{3.3.1}$$

преобразование

$$z = -\int u^2\,dx_0 + \int \lambda^{-1}u_{x_1}^2\,dx_1 \tag{3.3.2}$$

обращает z_{x_0} тождественно в ноль:

$$z_{x_0}\Big|_{\mathfrak{M}^1} = -u^2 + \int\left[-\frac{\lambda_{x_0}}{\lambda^2}u_{x_1}^2 + \frac{1}{\lambda}2u_{x_1}\left(\frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}u_{x_1}+\lambda u\right)\right]dx_1 = -u^2+u^2 \equiv 0.$$

Отсюда следует, что на $\mathfrak{M}^1$ всегда будет иметь место тождество $z_{x_0x_1} \equiv 0$. Таким образом, всякое решение, полученное из решения уравнения (3.3.1) подстановкой (3.3.2), окажется решением широкого класса уравнений, например, такого:

$$\Phi(z_{x_0x_1}, z_{x_0}) = z_{x_0} f(x_0, x_1, z, \underset{1}{z}, \ldots, \underset{n}{z}). \tag{3.3.3}$$

Здесь $\Phi(z_{x_0x_1}, z_{x_0})$ может быть, например, однородной функцией своих аргументов, $f(\cdot)$ — произвольная функция.

Зададим теперь многообразие $\mathfrak{M}^N$ уравнением

$$\mathfrak{M}^N: \quad \sum_{i=1}^{N} u_{x_0x_i}u_{x_i} - \frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}\sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2 - \lambda u \sum_{i=1}^{N} u_{x_i} = 0. \tag{3.3.4}$$

Легко проверить, что по-прежнему условие $z_{x_0}\Big|_{\mathfrak{M}^N} \equiv 0$ будет выполнено, если подстановку взять в виде

$$z = -N\int u^2\,dx_0 + \sum_{i=1}^{N}\int \lambda^{-1}u_{x_i}^2\,d_{x_i}. \tag{3.3.5}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} z_{x_0}\Big|_{\mathfrak{M}^N} &= -Nu^2 + \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\lambda_{x_0}}{\lambda^2}u_{x_i}^2 + 2\lambda^{-1}u_{x_i}u_{x_0x_i}\right]dx_i\Big|_{\mathfrak{M}^N} = \\ &= -Nu^2 + \int\left[-\frac{\lambda_{x_0}}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{N}u_{x_i}^2 + 2\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_{x_0}}{2\lambda}u_{x_i}^2 + \lambda u u_{x_i}\right]dx_i = \\ &= -Nu^2 + \int\sum_{i=1}^{N}2uu_{x_i}\,dx_i = -Nu^2 + Nu^2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Теперь при соблюдении всех перечисленных выше условий многомерным аналогом уравнения (3.3.3) оказывается такое:

$$\Phi(z_{x_0}, z_{x_0x_i}) = z_{x_0}f(\cdot).$$

4. Получим теперь решение такого многомерного расширения уравнения (2.4.0)

$$z_{xy} + z_{xt} + g'e^z + gz_xe^z = 0. \tag{3.4.0}$$

Зададим многообразие $\mathfrak{M}$ уравнением

$$\mathfrak{M}: \quad u_{xt} + u_{xy} = g'g^{-1}(u_y + u_t),$$

решением которого является функция

$$u = \phi(x) + g(x)[\psi(y) + \omega(t)].$$

Двум найденным в п. 4 раздела II решениям уравнения (2.4.0) поставим в соответствие такие подстановки:

$$z_1 = \ln\frac{c_1(u_y + u_t)}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}u) - c_1\alpha^{-1}g^2}; \tag{3.4.1}$$

$$z_2 = \ln\frac{u_y + u_t}{gu}. \tag{3.4.2}$$

Отметим, что в этом примере не появляется никаких дополнительных ограничений на многообразие. Соответствующие решения будут вида:

$$z_1 = \ln \frac{c_1(\phi'(y)+\omega'(t))g(x)}{c_3(x)\exp\alpha g^{-1}[\psi(x)+g(x)(\phi(y)+\omega(t))] - c_1\alpha^{-1}g^2}; \tag{3.4.1$'$}$$

$$z_2 = \ln\left[(\phi'(y)+\omega'(t))[\psi(x)+g(x)(\phi(y)+\omega(t))]^{-1}\right]. \tag{3.4.2$'$}$$

Возможность распространения на большее число независимых переменных очевидна.

5. Многомерное расширение уравнения (2.21.0) запишем в форме

$$\Delta_4 u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+u_{tt} = -\lambda_1^2 h e^{2hu}. \tag{3.5.0}$$

Многообразие зададим системой соотношений

$$\mathfrak{M}^S: \begin{array}{llll} \phi_{xx}+\phi_{yy}=0, & \psi_{xx}+\psi_{yy}=0, & \phi_x=\psi_y, & \phi_y=-\psi_x, \\ \phi_{zz}+\phi_{tt}=0, & \psi_{zz}+\psi_{tt}=0, & -\phi_z=\psi_t, & \phi_t=\psi_z. \end{array} \tag{3.5.1}$$

Рассмотрим нелокальные замены функции u:

$$u_{1,2} = \frac{1}{2h}\ln\frac{2c\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2+\phi_t^2\right)}{8h^2\lambda^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{ch}\\ \pm i\,\mathrm{sh}\end{array}[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_1]+1\right\}}, \tag{3.5.2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2h}\ln\frac{-4\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2+\phi_t^2\right)}{8h^2\lambda^2(\phi+\psi+A_3)^2}, \tag{3.5.3}$$

$$u_{4,5} = \frac{1}{2h}\ln\frac{-2\sigma\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2+\phi_t^2\right)}{8h^2\lambda^2\left\{\begin{array}{c}\mathrm{sh}\\ \pm i\,\mathrm{ch}\end{array}[\sqrt{c}(\phi+\psi)+A_4]+i\right\}},$$

$$\sqrt{c} = (i\pm1)\sqrt{\frac{\sigma}{2}}, \qquad \sigma\in R, \tag{3.5.4}$$

$$u_6 = \frac{1}{2h}\ln\frac{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2+\phi_t^2}{h^2\lambda^2\left(\phi^2+\psi^2+1\right)^2}. \tag{3.5.5}$$

Подстановка каждой из них в уравнение (3.5.0) на $\mathfrak{M}^S$ дает дополнительные условия, связывающие ϕ_{ij} и ϕ_i. Ввиду громоздкости его здесь выписывать не будем. Для всех замен эти условия могут быть удовлетворены, например, функциями, связанными соотношениями (3.5.1) и имеющими вид

$$\phi = \phi[(x+t),(y+z)], \qquad \psi = \psi[(x+t),(y+z)].$$

Другое решение получим, полагая $\phi_{ij}=\psi_{ij}=0$, $(i,j=x,y,z,t)$, когда

$$\phi = \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t+\mu,$$
$$\psi = -\beta x+\alpha y+\delta z-\gamma t+\nu,$$

α, β, γ, δ, μ, ν — произвольные постоянные.

Соотношения (3.5.2)–(3.5.5) в этом случае также являются решениями уравнения (3.5.0).

6. Воспользуемся известным решением уравнения (2.5.0) для исследования уравнения

$$F(x, y, z, \dots, \underset{n}{z}) z_{tt} + z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0. \tag{3.6.0}$$

Потребуем выполнения условий

$$z_{tt} = 0, \qquad z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0. \tag{3.6.1}$$

Решение второго записывается в виде $z = \phi(x + \psi(y, t))$. Первое уравнение тогда дает соотношение

$$\phi'' \psi_t^2 + \phi' \psi_{tt} = 0.$$

Отсюда сразу же следует

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{\psi_{tt}}{\psi_t^2} = k = \mathrm{const}.$$

Интегрируя эти два уравнения, находим

$$\begin{aligned} &\phi = J_1 k^{-1} \exp[k(x + \psi)], \\ &\psi = k^{-1} \ln(kt + J_2) + J_3(y), \qquad J_1 = \mathrm{const}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z = J_1 k^{-1} (kt + J_2(y)) \exp[k(x + J_3(y))]. \tag{3.6.2}$$

Другая возможность увеличения размерности уравнения (2.5.0) связана с переходом к преобразованиям в пространстве большего числа переменных x, y, z:

$$T: \quad \begin{aligned} &u' = u' = \zeta(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{n}{u}), \\ &x' = \xi = \varepsilon^x(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}), \\ &y' = \eta = \varepsilon^y(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}), \\ &z' = \tau = \varepsilon^z(x, y, z, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{s}{u}). \end{aligned}$$

При таких преобразованиях производные вычисляются по формулам

$$u_i = \frac{d^i}{d}, \qquad u_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}, \tag{3.6.3}$$

где

$$\begin{aligned} &d = D_y \varepsilon_D^y [\varepsilon^x, \varepsilon^z]_{x,z} + D_x \varepsilon_D^y [\varepsilon^z, \varepsilon^x]_{y,z} + D_z \varepsilon_D^y [\varepsilon^z, \varepsilon^x]_{x,y}, \\ &d^x = D_y \varepsilon_D^y [\zeta, \varepsilon^z]_{x,z} + D_x \varepsilon_D^y [\zeta, \varepsilon^z]_{z,y} + D_z \varepsilon_D^y [\zeta, \varepsilon^z]_{y,x}, \\ &d^y = D_z \varepsilon_D^z [\zeta, \varepsilon^x]_{y,x} + D_y \varepsilon_D^z [\zeta, \varepsilon^x]_{x,z} + D_x \varepsilon_D^z [\zeta, \varepsilon^x]_{z,y}, \\ &d^z = D_x \varepsilon_D^x [\zeta, \varepsilon^y]_{z,y} + D_y \varepsilon_D^x [\zeta, \varepsilon^y]_{x,z} + D_z \varepsilon_D^x [\zeta, \varepsilon^y]_{y,x}. \end{aligned}$$

Определитель D имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} (D_x\varepsilon^x)^2 & (D_x\varepsilon^y)^2 & 2D_x\varepsilon^x D_x\varepsilon^y & (D_x\varepsilon^z)^2 & 2D_x\varepsilon^x D_x\varepsilon^z & 2D_x\varepsilon^y D_x\varepsilon^z \\ (D_y\varepsilon^x)^2 & (D_y\varepsilon^y)^2 & 2D_y\varepsilon^x D_y\varepsilon^y & (D_y\varepsilon^z)^2 & 2D_y\varepsilon^x D_y\varepsilon^z & 2D_y\varepsilon^y D_y\varepsilon^z \\ D_x\varepsilon^x D_y\varepsilon^x & D_x\varepsilon^y D_y\varepsilon^y & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_y\varepsilon^y \\ +D_y\varepsilon^x D_x\varepsilon^y \end{matrix} & D_x\varepsilon^z D_y\varepsilon^z & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_y\varepsilon^z \\ +D_y\varepsilon^x D_x\varepsilon^z \end{matrix} & \begin{matrix} D_x\varepsilon^y D_y\varepsilon^z \\ +D_y\varepsilon^y D_x\varepsilon^z \end{matrix} \\ (D_z\varepsilon^x)^2 & (D_z\varepsilon^y)^2 & 2D_z\varepsilon^x D_z\varepsilon^y & (D_z\varepsilon^z)^2 & 2D_z\varepsilon^x D_z\varepsilon^z & 2D_z\varepsilon^y D_z\varepsilon^z \\ D_x\varepsilon^x D_z\varepsilon^x & D_x\varepsilon^y D_z\varepsilon^y & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_z\varepsilon^y \\ +D_z\varepsilon^x D_x\varepsilon^y \end{matrix} & D_x\varepsilon^z D_z\varepsilon^z & \begin{matrix} D_x\varepsilon^x D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^x D_x\varepsilon^z \end{matrix} & \begin{matrix} D_x\varepsilon^y D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^y D_x\varepsilon^z \end{matrix} \\ D_y\varepsilon^x D_z\varepsilon^x & D_y\varepsilon^y D_z\varepsilon^y & \begin{matrix} D_y\varepsilon^x D_z\varepsilon^y \\ +D_z\varepsilon^x D_y\varepsilon^y \end{matrix} & D_y\varepsilon^z D_z\varepsilon^z & \begin{matrix} D_y\varepsilon^x D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^x D_y\varepsilon^z \end{matrix} & \begin{matrix} D_y\varepsilon^y D_z\varepsilon^z \\ +D_z\varepsilon^y D_y\varepsilon^z \end{matrix} \end{vmatrix}. \tag{3.6.4}$$

Определители D_{ij} получаются заменой элементов столбцов в D с индексами ij на элементы b^{ij} $(i,j = x,y,z)$

$$b^{ij} = \left[dD_{ij}\zeta - d^x D_{ij}\varepsilon^x - d^y D_{ij}\varepsilon^y - d^z D_{ij}\varepsilon^z\right] d^{-1}. \tag{3.6.5}$$

Легко убедиться, что преобразование

$$T: \qquad \zeta = x, \qquad \varepsilon^x = u, \qquad \varepsilon^y = y, \qquad \varepsilon^z = z \tag{3.6.6}$$

уравнения $u'_{\xi\eta} = 0$, $(u = \phi(\xi,\tau) + \psi(\eta,\tau) + \omega(\tau))$ дает уравнение

$$u_y u_{xx} - u_x u_{xy} = 0.$$

Изменим преобразование (3.6.6), полагая его таким:

$$T_1: \qquad \zeta = x, \qquad \varepsilon^x = u + \int u_z\,dx, \qquad \varepsilon^y = y, \qquad \varepsilon^z = z.$$

Из $u'_{\xi\eta} = 0$ сразу же получим уравнение

$$(u_x + u_z)(u_{xy} + u_{yz}) = (u_{xx} + u_{xz})\int u_{zy}\,dx, \tag{3.6.7}$$

решение которого имеет вид

$$x = \phi\left(u + \int u_z\,dx, z\right) + \psi(y,z) + \omega(z).$$

Второй пример получаем для преобразования переменных

$$T_2: \qquad \zeta = x + \int u_z\,dx, \qquad \varepsilon^x = u, \qquad \varepsilon^y = y, \qquad \varepsilon^z = z.$$

В этом случае получается

$$\begin{aligned} &d = u_x, \qquad d^x = 1 + u_z, \qquad b^{xx} = u_x^{-1}(u_x u_{xx} - (1+u_z)u_{xx}), \\ &D_{xx}\zeta = u_{xz}, \qquad D_{xy}\zeta = u_{yz}, \qquad b^{yx} = u_x^{-1}(u_x u_{yz} - (1+u_z)u_{xy}). \end{aligned}$$

Простой подсчет дает уравнение

$$(1 + u_z)(u_x u_{xx} - u_y u_{xy}) = u_x(u_x u_{xz} - u_y u_{yz}). \tag{3.6.8}$$

Решение уравнения (3.6.8) выглядит так:

$$x + \int u_z\,dx = \phi(u,z) + \psi(y,z) + \omega(z).$$

§ 4. Групповые свойства уравнений, допускающих линеаризацию

В этом параграфе приведем кратко результаты исследований групповых свойств уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Теорема 1. *Уравнения (2.1.0), (2.2.0), (2.2a.0), (2.4.0)–(2.15.0), (2.21.0), (2.21.8) инвариантны относительно бесконечной группы Ли.*

Утверждение доказывается прямым вычислением по стандартной методике С. Ли [5].

Замечание. Перечисленные в теореме 1 уравнения, линеаризуются либо точечной заменой переменных, либо нелокальным преобразованием функции. Уравнение (2.3.0), линеаризуемое с помощью интегральной подстановки (2.3.5) для зависимой переменной, и уравнения (2.16.0) ,(2.17.0) (2.19.0), (2.20.0), линеаризация которых достигается нелокальной заменой по всем переменным, указанным свойством не обладают.

Теорема 2. *1) Базисные элементы алгебры инвариантности уравнения минимальной поверхности (2.18.0) (уравнения Плато) имеют вид:*

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_4 = u\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 = u\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_6 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u}. \end{gathered} \tag{4.1.0}$$

2) Замена независимой переменной

$$y = iv \tag{4.1.1}$$

приводит уравнение (2.18.0) к уравнению Борна–Индельфа

$$\left(1 - u_v^2\right) u_{xx} + 2u_x u_v u_{xv} - \left(1 + u_x^2\right) u_{vv} = 0. \tag{4.1.2}$$

Доказательство осуществляется прямым вычислением.

Сформулированные в теореме 2 результаты позволяют строить точные решения уравнения (4.3.0) [3, 6].

По найденным решениям уравнения (2.18.0) строятся решения уравнения (4.3.0) по формулам

$$\begin{aligned} &u = i\int \left[1 + \phi'(\xi)^2\right]^{1/2} d\xi + i\int \left[1 + \psi'(\eta)^2\right]^{1/2} d\eta + c_1, \\ &x = \xi + \eta + c_2, \\ &v = -i[\phi + \psi + c_3], \end{aligned}$$

где $\phi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ — произвольные функции.

Приложение 1

Таблица 1

№ п/п	Исходное уравнение	Подстановка	Полученое уравнение	Решение
1.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = x$ $\varepsilon = z$ $\varkappa = y$	$z_{xx}\left(1 \pm z_y^2\right) \pm \left(z_{yy} z_x^2 + 2 z_x z_y z_{xy}\right) = 0$	“+” $x = \phi(z, y) \pm i\psi(z, y)$ $\phi_z = -\psi_y,\ \phi_y = \psi_z$ “–” $x = \phi(z + y) + \psi(z - y)$
2.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = -y$ $\varepsilon = x$ $\varkappa = z$	$z_{yy}\left(z_x^2 \pm 1\right) \pm \left(z_{xx} z_y^2 - 2 z_x z_y z_{xy}\right) = 0$	“+” $-y = \phi(x, z) \pm i\psi(x, z)$ $\phi_x = -\psi_z,\ \phi_z = \psi_x$ “–” $-y = \phi(x + z) + \psi(x - z)$
3.	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = x$ $\varkappa = z + x$ $\varepsilon = x + y + z$	$z_{xx}\left(1 + 2z_y + 2z_y^2\right) + 2z_{yy}(1 + z_x)^2 -$ $-4z_y(1 + z_x) z_{xy} = 0$	$x = \phi(z + x, x + y + z) \pm i\psi(z + x, x + y + z)$ $\phi_{z+x} = -\psi_{x+y+z},\ \phi_{x+y+z} = \psi_{x+z}$
4.	$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$	— ” —	$(1 - z_x z_y)(1 + 2z_y) z_{xx} (1 + z_x)^{-3} = 0$	$x = \phi(2x + 2z + y) + \psi(y)$
5.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = z$ $\varkappa = x + y$ $\varepsilon = x + z$	$z_{xx}\left(1 \pm z_y^2\right) + z_{yy}\left[1 \pm (1 + z_x)^2\right] -$ $-2z_{xy}[1 \pm z_y(1 + z_x)] = 0$	“+” $z = \phi(x + y, x + z) \pm i\psi(x + y, x + z)$ $\phi_{x+y} = -\psi_{x+z},\ \phi_{x+z} = \psi_{x+y}$ “–” $z = \phi(2x + y + z) + \psi(z - y)$
6.	$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = x - e^x$ $\varepsilon = x$ $\varkappa = y$	$(1 - e^x)\left[(1 \pm z_y^2) z_{xx} \pm z_x^2 z_{yy} \mp 2 z_x z_y z_{xy}\right] +$ $+ z_x e^x (1 \pm z_y^2) = 0$	“+” $x - e^x = \phi(y, z) \pm i\psi(y, z)$ $\phi_y = -\psi_z,\ \phi_z = \psi_y$ “–” $x - e^x = \phi(z + y) + \psi(z - y)$
7.	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$	$\zeta = z$ $\varepsilon = x + z$ $\varkappa = y + z$	$z_{xx}\left(1 + 2z_y + 2z_y^2\right) + z_{yy}\left(1 + 2z_x + 2z_x^2\right) -$ $-2z_{xy}[z_x + z_y + 2z_x z_y] = 0$	$z = \phi(x + z, y + z) \pm i\psi(x + z, y + z)$ $\phi_{x+z} = -\psi_{y+z},\ \phi_{y+z} = \psi_{x+z}$
8.	$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$	— ” —	$z_{xx}(1 + 2z_y) - z_{yy}(1 + 2z_x) -$ $-2z_{xy}(z_x - z_y) = 0$	$z = \phi(2z + x + y) + \psi(x - y)$

Приложение 2

Таблица 2

№ п/п	Исходное уравнение	№ в тексте	Подстановка	Полученое уравнение
1.	$z_{xy} + zz_x = 0$	(2.1.0)	$x = x,\ y = iv,\ z = i\tilde{z}$	$\tilde{z}_{xv} - \tilde{z}\tilde{z}_x = 0$
2.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta} + z(z_\xi + z_\eta) = 0$
3.	$z_{xx} + \alpha e^z = 0$	(2.2ª.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} + \alpha e^z = 0$
4.	$z_{xy}^2 - 4\lambda(x,y)z_x z_y = 0$	(2.3.0)	$x = x,\ y = iv$	$z_{xv} - 4\lambda(x,iv)z_x z_v = 0$
5.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$(z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta})^2 - 4\lambda(\xi+\eta,\xi-\eta)\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right) = 0$
6.	— " —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$(z_{\xi\xi} + z_{vv})^2 - 4\lambda(\xi+iv,\xi-iv)\left(z_\xi^2 + z_v^2\right) = 0$
7.	$z_y z_{xx} - z_x z_{xy} = 0$	(2.5.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_\xi z_{\eta\eta} - z_{\xi\eta}(z_\xi - z_\eta) - z_\eta z_{\xi\xi} = 0$
8.	— " —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$z_{\xi v}z_v + z_\xi z_{vv} = 0,\ z_{\xi v}z_\xi + z_v z_{\xi\xi} = 0$
9.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно
10.	$z_y z_{xy} - z_x z_{yy} = z_y^3$	(2.7.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\eta}(z_\xi + z_\eta) - z_\xi z_{\eta\eta} - z_\eta z_{\xi\xi} - \frac{1}{2}(z_\xi - z_\eta)^3 = 0$
11.	$z_y z_{xx} - (1 + z_x + z_y)z_{xy} + (1 + z_x)z_{yy} = 0$	(2.9.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\eta\eta}(1 + 2z_\xi) - z_{\xi\eta} = 0$
12.	$(e^x - 1)(z_y z_{xx} - z_x z_{xy}) - z_x z_y e^x = 0$	(2.10.0)	$x = x,\ y = iv$	инвариантно
13.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_\xi z_{\eta\eta} + z_{\xi\eta}(z_\xi - z_\eta) - z_\eta z_{\xi\xi} - \frac{1}{2}\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right)\frac{e^{\frac{\xi+\eta}{2}}}{e^{\frac{\xi+\eta}{2}}-1} = 0$
14.	$z(z_y z_{xy} - z_x z_{yy}) \pm z_x z_y^2 = 0$	(2.12.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z[z_{\xi\eta}(z_\xi + z_\eta) - z_\xi z_{\eta\eta} - z_\eta z_{\xi\xi}] \pm \frac{1}{2}\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right)(z_\xi - z_\eta) = 0$
15.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно
16.	$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0$	(2.13.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	инвариантно
17.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно

Продолжение таблицы 2

№ п/п	Исходное уравнение	№ в тексте	Подстановка	Полученое уравнение
18.	$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} - z_x^2 z_y^2 = 0$	(2.14.0)	$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_\eta^2 z_{\xi\xi} - 2z_\xi z_\eta z_{\xi\eta} + z_\xi^2 z_{\eta\eta} = \frac{1}{4}\left(z_\xi^2 - z_\eta^2\right)(z_\xi - z_\eta)$
19.	— " —		$x = x,\ y = iv$	инвариантно
20.	$z_{xx} + z_x z_{yy} \mp z_y z_{xy} = 0$	(2.16.0)	$x = x,\ y = iv$	$z_{xx} - z_x z_{vv} \pm z_v z_{xv} = 0$
21.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$z_{\xi\xi}(1 + 2z_\eta) + z_{\eta\eta}(1 + 2z_\xi) = 2z_{\xi\eta}(1 - z_\xi - z_\eta)$
22.	$z_{xy} - \left(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2\right) = 0$	(2.17.0)	$x = x,\ y = iv$	$z_{xv} + \left(z_{xx} z_{vv} - z_{xv}^2\right) = 0$
23.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$(z_{\xi\xi} - z_{\eta\eta}) - 4\left(z_{\xi\xi} z_{\eta\eta} - z_{\xi\eta}^2\right) = 0$
24.	— " —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$(z_{\xi\xi} + z_{vv}) + 4\left(z_{\xi\xi} z_{vv} - z_{\xi v}^2\right) = 0$
25.	$1 - \left(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2\right) = 0$	б/н	$x = x,\ y = iv$	$1 + \left(z_{xx} z_{vv} - z_{xv}^2\right) = 0$
26.	— " —		$x = \frac{\xi+\eta}{2},\ y = \frac{\xi-\eta}{2}$	$1 - 4\left(z_{\xi\xi} z_{\eta\eta} - z_{\xi\eta}^2\right) = 0$
27.	— " —		$x = \frac{\xi+iv}{2},\ y = \frac{\xi-iv}{2}$	$1 + 4\left(z_{\xi\xi} z_{vv} - z_{\xi v}^2\right) = 0$
28.	$\left(1 + z_y^2\right) z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + \left(1 + z_x^2\right) z_{yy} = 0$	(2.18.0)	$x = x,\ y = iv$	$\left(1 - z_v^2\right) z_{xx} + 2z_x z_v z_{xv} - \left(1 + z_x^2\right) z_{vv} = 0$

1. Forsyth A.R., Theory of differential equations, Vol. V, VI, N.Y., Dover Publication, 1959, 478 p., 596 p.
2. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. I, N.Y., Academic press, 1965, 301 p.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна–Инфельда, *ДАН СССР*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
4. Погорелов А.В., Об уравнениях Монжа–Ампера эллиптического типа, Харьков, госуниверситет, 1960, 110 с.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 399 с.
6. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 6–27.

О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Предложен способ построения точных решений многомерных нелинейных волновых уравнений. В явном виде построены семейства точных решений многомерных нелинейных уравнений Лиувилля, Дирака. Проведен теоретико-алгебраический анализ уравнений Навье–Стокса. Показано, что система уравнений Навье–Стокса описывает физическую систему с бесконечным набором спинов. Выведены нелинейные уравнения для описания тепломассопереноса, инвариантные относительно группы Галилея.

The method of construction of some exact solutions of multidimensional nonlinear wave equations is proposed. The families of exact solutions of multidimensional nonlinear Lioville's and Dirac equations are obtained. The algebraic-theoretical analysis of Navier–Stokes equation is performed. It is shown that the system of Navier–Stokes equations describes the physical system with infinite number of spins. The non-linear Galilei-invariant equation is derived for the description of heat and mass transport.

Введение. Принцип симметрии

Настоящая статья представляет собой, в основном, краткий обзор исследований по симметрийным свойствам и точным решениям некоторых многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), которые широко встречается в математической физике. Ряд результатов публикуется впервые.

В современных исследованиях по математической и теоретической физике все возрастающую роль играют принципы симметрии. Это, прежде всего, связано с тем, что основные физические законы, уравнения движения, различные модели обладают явной или скрытой, геометрической или негеометрической, локальной [1, 2] или нелокальной [3–5] симметриями. Построение математического аппарата, способного выявить разнообразные виды симметрии, — одна из важных задач математической физики. Не менее важной является задача в определенном смысле обратная к только что сформулированной: по заданной группе или алгебре и их представлениям построить математические модели, обладающие заданной симметрией.

Для адекватного математического описания физических явлений естественно, как нам представляется, поставить идеи и принципы симметрии в основу науки о построении математических моделей [6]. Симметрийный принцип в такой науке должен играть роль правила отбора, выделяющего из множества допустимых математических моделей (уравнений) только такие, которые обладали бы соответствующими симметрийными свойствами. Этот принцип в явном или неявном виде

Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1983, С. 4–23.

используется при построении современных физических теорий, но, к сожалению, мало используется в классической математической физике.

В некоторых случаях требование инвариантности уравнений движения относительно той или иной группы приводит к тому, что среди множества математически допустимых уравнений заданными свойствами обладают только одно или несколько уравнений. Так, например, среди множества линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для двух вектор-функций $\vec{E}(t,\vec{x}) = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\vec{H}(t,\vec{x}) = \{H_1, H_2, H_3\}$ существует единственная система ДУЧП, инвариантная относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. Этой системой являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме (более подробно об этом см. [5]).

Аналогичным свойством обладает и система уравнений Дирака. Единственной (с точностью до преобразований эквивалентности) линейной системой четырех ДУЧП первого порядок, инвариантной относительно группы $P(1,3)$, является система Дирака (см. [5] и цитированную там литературу). Указанными свойствами обладают не только линейные уравнения движения, но и нелинейные ДУЧП. Примером нелинейного уравнения, обладающего широкой группой симметрии, является хорошо известная система уравнений Эйлера–Навье–Стокса (см. § 4). Следует подчеркнуть, что некоторые нелинейные ДУЧП обладают такими широкими группами симметрии, какими не обладают ни одно линейное ДУЧП. Примерами таких скалярных уравнений являются многомерное уравнение Монжа–Ампера [7] и эйкональное уравнение [8].

С чисто математической точки зрения важно знать максимальные (в некотором смысле) группы симметрии ДУЧП. Особенно ценную информацию дает знание нелинейных преобразований независимых и зависимых переменных, относительно которых инвариантно то или иное ДУЧП, поскольку это дает возможность по заданному одному (иногда тривиальному) решению построить (генерировать) целые семейства точных решений нелинейных ДУЧП.

Таким образом, классы нелинейных ДУЧП, обладающие богатыми симметрийными свойствами, представляются нам важными и интересными как в теоретическом, так и прикладом плане. В последующих параграфах эту точку зрения мы постараемся оправдать и реализовать на конкретных нелинейных ДУЧП.

§ 1. О точных решениях многомерного уравнения Лиувилля

Среди множества пуанкаре-инвариантных нелинейных волновых уравнений вида

$$p_\mu p^\mu u + F(u) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad \mu = \overline{0,n},$$
$$u \equiv u(x), \qquad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad x_0 \equiv t,$$

F — произвольная дифференцируемая функция из пространства C^n, существует только два типа уравнений, инвариантных относительно расширенной группы Пуанкаре $\bar{P}(1,n)$. Группа $\bar{P}(1,n)$ — группа Пуанкаре, дополненная однопараметрической группой масштабных преобразований $D(1)$, т.е. $\bar{P}(1,n) = \{P(1,n), D(1)\}$.

Теорема 1 [8]. *Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы $\bar{P}(1,n)$ только в случаях*

$$F = F_1 = \lambda_1 u^k \qquad \text{или} \qquad F = F_2 = \lambda_2 \exp u, \tag{1.2}$$

где λ_1, λ_2, $k \neq 1$ — произвольные вещественные параметры.

В этих случаях на множестве решений (1.1) реализуется следующие неэквивалентные представления алгебры Ли группы $\bar{P}(1,n)$:

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} p_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad D = x_\mu p^\mu - \frac{2i}{1-k}\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{при } F = F_1, \tag{1.3}$$

$$P_\mu = ig^{\mu\nu} p_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad D = x_\mu p^\mu - 2i\frac{\partial}{\partial u} \quad \text{при } F = F_2. \tag{1.4}$$

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что уравнение Лиувилля является единственным (в классе (1.1)) уравнением неполиномиального типа, инвариантным относительно группы $\bar{P}(1,n)$.

Замечание 1. Двумерное уравнение (1.1) при $F = F_1 = 0$ или $F = F_2 = \lambda_2 \exp u$ инвариантно относительно более широкой алгебры, чем алгебра Ли группы $\bar{P}(1,n)$. Можно доказать [9], что в этих и только в этих двух случаях двумерное уравнение (1.1) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры $A_\infty \supset \bar{P}(1,n)$.

Замечание 2. Двумерное уравнение Лиувилля с помощью одной из нелокальных подстановок [10]

$$u = \ln\left[w_\xi w_\eta \left(1 - \tanh^2 \frac{c_1 - w}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

или

$$u = \ln\left[2w_\xi w_\eta/(w+c_2)^2\right], \quad w_\xi = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad w_\eta = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{1.5}$$

$$u = \ln\left[w_\xi w_\eta \left(1 + \tanh^2 \frac{w + c_3}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad \xi = x_0 + x_1, \quad \eta = x_0 - x_1,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, приводится к линейному волновому уравнению

$$\Box w = -p_\mu p^\mu w = 0. \tag{1.6}$$

Зная общее решение уравнения (1.6)

$$w = f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1),$$

получаем решение двумерного нелинейного уравнения Лиувилля. Решение это представим в виде ($F = F_2 = \lambda_2 \exp u$)

$$u = \ln\left\{\frac{-8f_1'(\omega_1)f_2'(\omega_2)}{\lambda_2(f_1(\omega_1) + f_2(\omega_2))^2}\right\}, \tag{1.7}$$

где $\omega_1 = \alpha_\mu x^\mu$, $\omega_2 = \beta_\mu x^\mu$, параметры α_μ, β_μ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_\mu \alpha^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = 0, \qquad \alpha_\mu \beta^\mu = 2,$$
$$f_1' = \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}, \qquad f_2' = \frac{\partial f_2}{\partial \omega_2}. \tag{1.8}$$

Решение (1.7) совпадает с лиувиллевским решением, если положить $\omega_1 = x_0 + x_1$ ($\alpha_0 = \alpha_1 = 1$), $\omega_2 = x_0 - x_1$ ($\beta_0 = \beta_1 = 1$). Представление решений двумерного уравнения (1.1) в виде (1.7) имеет важное, с точки зрения обобщения, преимущество по сравнению с лиувиллевским решением. Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество функций вида (1.7) удовлетворяет n-мерному уравнению Лиувилля, если параметры удовлетворяют условиям типа (1.8).

Приведенное наблюдение подсказывает следующий способ построения частных решений многомерного уравнения по решениям двумерного (или трехмерного) уравнения:

1) представить (построить) решения двумерного (или трехмерного) уравнения в явно инвариантном виде, т.е. решения записать через всевозможные инвариантные переменные ω_1, ω_2 или, например,

$$\omega_3 = \alpha_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \qquad \omega_4 = \beta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \tag{1.9}$$

где $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$ — параметры;

2) подставить явно инвариантные решения двумерного уравнения в многомерное нелинейное ДУЧП и найти условия на параметры α_μ, β_μ, $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$, при которых “двумерные” решения типа (1.7) являются решениями многомерного уравнения. Этот способ построения решений многомерных уравнений по решениям двумерного и трехмерного уравнения широко использовался в [8] для уравнения Тейлора–Даламбера.

Очевидно, что многомерное уравнение Лиувилля помимо решений вида (1.7) имеет много других решений. Широкий класс решений многомерного уравнения Лиувилля, неэквивалентных (1.7), построен в [8].

§ 2. Решения нелинейного уравнения Дирака

Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака

$$\left\{\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar\Psi\Psi)^k\right\}\Psi = 0, \qquad \mu = \overline{0,3}, \tag{2.1}$$

γ_μ — матрицы Дирака, λ, k — произвольные постоянные, $\Psi = \Psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\bar\Psi = \bar\Psi(x) = \Psi^\dagger\gamma_0$ — сопряженный по Дираку спинор. Уравнение (2.1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3)$ только в том случае, когда $k = 1/3$ [11].

Решения уравнения ищем в виде [6]

$$\Psi = A(\tilde\omega_1)\varphi(\tilde\omega_2), \tag{2.2}$$

где $A(\tilde\omega_1)$ — функция, зависящая от матрицы $\tilde\omega_1$, матричные элементы которой зависят от x. Матрица $\tilde\omega_1$ выбирается таким образом, чтобы она била инвариантной относительно подгруппы конформной группы, например, относительно группы Лоренца. Требование лоренц-инвариантности может быть записано в виде

$$[\tilde\omega_1, J_{\mu\nu}] = 0, \qquad J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \tag{2.4}$$

$\varphi(\tilde\omega_2)$ — четырехкомпонентный спинор, $\tilde\omega_2$ — скалярная инвариантная переменная типа (1.8), для которой по определению выполняется

$$[\tilde\omega_2, M_{\mu\nu}] = 0. \tag{2.5}$$

Формуле (2.2) можно дать простую физическую интерпретацию: решение уравнения (2.1) представляет собой волну с “амплитудой” $A(\tilde{\omega}_1)$ и “фазой” $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. Подставив (2.2) в (2.1) получим уравнение для $A(\tilde{\omega}_1)$ и $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. При некотором специальном виде амплитуды $A(\tilde{\omega}_1)$ для $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ получим систему обыкновенных ДУ относительно переменной $\tilde{\omega}_2$. Можно, конечно, задать явный вид фазы $\varphi(\tilde{\omega}_2)$, а амплитуду искать в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \gamma_\mu x^\mu f(\tilde{\omega}_3), \tag{2.6}$$

$f(\tilde{\omega}_3)$ — произвольная функция скалярного инварианта $\tilde{\omega}_3$.

Воспользуемся теперь анзатцем (2.1) для отыскания конформно-инвариантных решений уравнения (2.1). Следуя [12, 13], выбираем амплитуду в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_1^4}, \qquad \tilde{\omega}_1 = \gamma_\mu x^\mu, \qquad \tilde{\omega}_1^4 = (x_\mu x^\mu)^2. \tag{2.7}$$

В качестве скалярного инварианта $\tilde{\omega}_2$ выберем инвариант конформных преобразований

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\beta_\mu x^\mu}{x_\nu x^\nu} \equiv \omega, \qquad x_\nu x^\nu \neq 0. \tag{2.8}$$

Формула (2.2) принимает вид

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\mu x^\mu}{(x_\nu x^\nu)^2}\varphi(\omega). \tag{2.9}$$

Подстановка (2.9) в (2.1) приводит к системе обыкновенных ДУ для $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i\frac{\lambda}{\beta_\nu\beta^\nu}(\bar{\varphi}\varphi)^{1/3}(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\varphi. \tag{2.10}$$

Общее решение уравнения (2.10) имеет вид [12]

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\omega\}\,\chi, \qquad k = 1/3, \tag{2.11}$$

χ — постоянный спинор.

Таким образом, получили четырехпараметрическое семейство точных решений уравнения (2.1) ($k = 1/3$) в форме

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\alpha x^\alpha}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\omega\}\,\chi, \qquad \beta_\nu\beta^\nu > 0. \tag{2.12}$$

§ 3. Какие уравнения описывают нелинейную теплопроводность?

Процессы тепломассопереноса описывают линейным или нелинейным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} + F(u), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

$u = u(t, x_1, x_2, x_3)$, $c(u) > 0$, $F(u)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства одномерного линейного уравнения (3.1) ($c(u) = \lambda_1$, $F(u) = \lambda_2 u$, $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}$) полностью изучил еще С. Ли. Для нас важно подчеркнуть, что в трехмерном случае линейное уравнение (3.1) инвариантно относительно 10-параметрической группы Галилея $G(1,3)$ более подробно об этом см., например, [5, 14]).

Групповой анализ одномерного нелинейного уравнения (3.1) (в случае $F(u) = 0$) осуществил Л.В. Овсянников [2]. Методом С. Ли [2] можно изучить групповые свойства трехмерного уравнения (3.1). Такие исследования были проведены М.М. Серовой и Р.М. Чернигой. Результат их исследования таков: среди нелинейных уравнений вида (3.1) ($c(u) \neq \mathrm{const}$) не существует уравнений инвариантных относительно всей группы Галилея $G(1,3)$. Это означает, что *для нелинейного уравнения вида (3.1)* ($F = 0$)*, в отличие от линейного, не выполняется принцип относительности Галилея [6]*. Если функции c и F явным образом зависят от t, т.е. $c(u,t)$, $F(u,t)$, то уравнения вида (3.1) не будут инвариантны относительно всей группы $G(1,3)$, но могут быть инвариантны относительно преобразований Галилея. Для таких уравнений будет иметь место принцип Галилея. Поэтому представляется важной задача о построении классов нелинейных ДУЧП второго порядка

$$\begin{gathered} u_0 + F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \\ \underset{1}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad \underset{2}{u} = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn}), \qquad u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \\ u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}, \qquad u \equiv u(x_0 \equiv t, x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{3.2}$$

инвариантных относительно группы Галилея $G(1,n)$ и группы Шредингера $Sch(1,n) \supset G(1,n)$. Эта задача для случая $n \leq 3$ решена Серовой М.М. и автором. Решения ее приведем в виде следующих теорем.

Теорема 2. *Уравнение (3.2) инвариантно относительно группы* $G(1,n)$ *только в таких случаях:*

1. При $n = 1$

$$F = \lambda_i u_i + \Phi_1(v_1), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11}. \tag{3.3}$$

2. При $n = 2$

$$\begin{gathered} F = \lambda u_i u_i + \Phi_2(v_1, v_2), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11} + u_{22}, \\ v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{12}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

3. При $n = 3$

$$\begin{gathered} F = \lambda u_i u_i + \Phi_3(v_1, v_2, v_3), \qquad v_1 = \Delta u, \\ v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}, \\ v_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 *— произвольные функции из пространства* C^∞.

При доказательстве использована следующая реализация базисных элементов расширенной алгебры Ли группы $\bar{G}(1,n) = \{G(1,n), D(1)\}$:

$$P_0 = p_0, \qquad P_a = p_a, \qquad J_{ab} = M_{ab}, \qquad G_a = x_0 p_a - \frac{1}{2\lambda} x_a p_u,$$
$$p_u = i\frac{\partial}{\partial u}, \qquad a, b = \overline{1, n}, \qquad D = 2x_0 p_0 - x_a p_a. \tag{3.6}$$

Если алгебру $\bar{G}(1,n)$ дополнить оператором A (соответствующим проективным преобразованиям), то получим алгебру Шредингера $Sch(1,n)$. В нашем случае

$$A = x_0(x_0 p_0 - x_a p_a) + \frac{1}{4\lambda} x_i^2 p_u.$$

Теорема 3. *Уравнение (3.2) инвариантно относительно группы $\bar{G}(1,n)$ $(n \leq 3)$ только в таких случаях:*

$$\text{При } n = 1, \qquad F = \lambda u_i u_i + \lambda_1 u_{11}.$$
$$\text{При } n = 2, \qquad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi\left(\frac{v_2}{v_1^2}\right), \quad v_1 \neq 0. \tag{3.7}$$
$$\text{При } n = 3, \qquad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi\left(\frac{v_2}{v_1^2}, \frac{v_3}{v_1^3}\right).$$

Теорема 4. *Уравнение (3.2) инвариантно относительно группы Шредингера $Sch(1,n)$ $(n \leq 3)$ только в таких случаях:*

$$\text{При } n = 1, \qquad F = \lambda u_i u_i.$$
$$\text{При } n = 2, \qquad F = \lambda u_i u_i + \lambda_1 \left(v_1^2 - 4v_2\right)^{1/2}.$$
$$\text{При } n = 3, \qquad F = \lambda u_i u_i + \left(v_1^2 - 3v_2\right)^{1/2} \Phi(w), \tag{3.8}$$
$$w = \frac{2v_1^3 - 9v_1 v_2 + 27 v_3}{\left(v_1^2 - 3v_2\right)^{3/2}}, \qquad v_1^2 \neq 3v_2, \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0.$$

Для всех приведенных уравнений вида (3.2), инвариантных относительно групп $G(1,n) \subset \bar{G}(1,n) \subset Sch(1,n)$, выполняется принцип относительности Галилея и справедливы законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Среди множества уравнений (3.2) с нелинейностями (3.5) имеется, в частности, уравнение (при $\Phi_3 = \sqrt{v_1}$, $v_2 = v_3 = 0$)

$$u_0 + \lambda u_i u_i + \lambda_1 \sqrt{(\Delta u)^2} = 0. \tag{3.9}$$

Это уравнение эквивалентно стандартному линейному уравнению теплопроводности $v_0 + \lambda_1 \Delta v = 0$, $v = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp \frac{\lambda}{\lambda_1} u$.

Для найденных нелинейных уравнений можно ставить те же задачи, что и для линейного уравнения теплопроводности. Конечно, начальные или граничные условия будут, как и в линейном случае, нарушать галилеевскую симметрию.

§ 4. Какой спин несет поле Навье–Стокса?

1. Для наших целей достаточно рассмотреть простейший вариант системы типа Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_1 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \lambda_2 \Delta u_i = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3, \tag{4.1}$$

и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{4.2}$$

Тот факт, что система уравнений (4.1), (4.2) инвариантна относительно расширенной группы $\bar{G}(1,3)$, известен давно (см., например, [15]). Сравнительно недавно [16, 17, 2] доказано, что $\bar{G}(1,3)$ является максимальной (в смысле С. Ли) группой инвариантности (МГИ) системы (4.1), (4.2). Базисные элементы 11-мерной алгебры инвариантности (АИ) уравнений (4.1), (4.2) имеют вид (при $\lambda_1 = 1$)

$$P^{\mathrm{I}}_\mu = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mu = \overline{0,3}, \tag{4.3}$$

$$J^{\mathrm{I}}_{ab} = M^{\mathrm{I}}_{ab} + S^{\mathrm{I}}_{ab}, \qquad M^{\mathrm{I}}_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1,3}, \tag{4.4}$$

$$G^{\mathrm{I}}_a = t\partial_a - \frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{4.5}$$

$$D^{\mathrm{I}} = 2t\partial_0 + x_a \partial_a - u_a \frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{4.6}$$

где

$$S^{\mathrm{I}}_{ab} = u_a \frac{\partial}{\partial u_b} - u_b \frac{\partial}{\partial u_a}. \tag{4.7}$$

Провести теоретико-алгебраический анализ уравнений означает [4, 18]: 1) найти алгебру инвариантности (АИ); 2) построить по АИ группу инвариантности ДУ; 3) установить, какое именно представление реализуют базисные операторы АИ. В соответствии с работами С. Ли и Л.В. Овсянникова провести групповой анализ ДУ означает решить только задачи 1), 2)*. Как нам кажется, уместно использовать словосочетание "теоретико-алгебраический анализ уравнения" в том случае, когда решаются все три задачи.

Важность решения третьей задачи теоретико-алгебраического анализа ДУ представляется нам очевидней. Действительно, если, например, провести только групповой анализ уравнения Дирака (т.е. решить задачи 1), 2)), то мы не получим существенной информации о спиновой структуре этого уравнения, т.е. не будем знать, что система Дирака описывает частицу и античастицу со спином 1/2. Последняя информация является следствием того, что на множестве решений уравнения Дирака реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ со спином $s = 1/2$ (более подробно об этом см., например, работу [5]). Алгебра $P(1,3)$ является алгеброй инвариантности уравнения Дирака.

*Во времена С. Ли третья задача не могла и ставиться, поскольку только в 30–50-е годы нашего столетия построена теория представлений групп и алгебр Ли.

2. Рассмотрим линейную систему типа (4.1), (4.2) (положив $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = 0, \tag{4.8}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{4.9}$$

В матричной записи систему (4.8), (4.9) можно представить в виде

$$L_0\Psi = 0, \qquad L_0 = (\partial_t - \Delta)I_3, \tag{4.10}$$

$$L_1\Psi = 0, \qquad L_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

Ψ — вектор-функция с компонентами (u_1, u_2, u_3), I_3 — единичная матрица 3×3.

Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности системы (4.8), (4.9) выглядят как

$$P_\mu^{\mathrm{II}} = \partial_\mu, \qquad D_1^{\mathrm{II}} = 2x_0\partial_0 - x_a\partial_a, \qquad D_2^{\mathrm{II}} = u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{4.12}$$

$$J_{ab}^{\mathrm{II}} = J_{ab}^{\mathrm{I}} = M_{ab}^{\mathrm{I}} + S_{ab}^{\mathrm{I}}. \tag{4.13}$$

На множестве решений уравнений (4.10), (4.11) операторы (4.12), (4.13) можно представить в виде

$$P_\mu^{\mathrm{II}} = \partial_\mu, \qquad D_1^{\mathrm{II}} = 2x_0\partial_0 - x_a\partial_a, \qquad D_2^{\mathrm{II}} = I_3, \tag{4.14}$$

$$J_{ab}^{\mathrm{II}} = M_{ab}^{\mathrm{I}} + S_{ab}^{\mathrm{II}}, \tag{4.15}$$

где 3×3 матрицы $S_{ab}^{\mathrm{II}} = S_{ab}$ реализуют векторное представление алгебры Ли группы вращений $SO(3)$, т.е.

$$\begin{gathered} S_{12} = S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{23} = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{31} = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Легко подсчитать, что квадрат спинового оператора

$$-\left(S_{ab}^{\mathrm{II}}\right)^2\Psi = -\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)\Psi = s(s+1)I_3\Psi = 2\Psi. \tag{4.17}$$

Проведенный анализ представлений (4.14), (4.15) показывает, что система ДУ (4.8) (4.9) списывает физическую систему со спином $s = 1$.

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что линейная система Навье–Стокса (4.6), (4.9), в отличие от нелинейной, не инвариантна относительно преобразований Галилея, т.е. для нее не выполняется основной принцип механики — принцип относительности Галилея. Это обстоятельство как нам кажется, ставит под сомнение правомерность использования линеаризованной системы Навье–Стокса для описания реальных гидродинамических систем.

Замечание 2. Максимальной АИ системы (4.8), без условия (4.9), является 22-мерная алгебра с базисными операторами

$$P^{\mathrm{III}}_\mu = \partial_\mu, \qquad J^{\mathrm{III}}_{ab} = x_a\partial_b - x_b p_a, \tag{4.18}$$

$$G^{\mathrm{III}}_a = 2x_0\partial_a + x_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \tag{4.19}$$

$$D^{\mathrm{III}} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \qquad A^{\mathrm{III}} = x_0\left(x_\mu\partial_\mu - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}x_a x_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \tag{4.20}$$

$$S^{\mathrm{III}}_{ab} = u_a\frac{\partial}{\partial u_b}. \tag{4.21}$$

Это означает, что группой инвариантности системы (4.8) является группа $Sch(1,3)\otimes GL(3)$.

Замечание 3. Система (4.8), (4.9), помимо локальной группы инвариантности, порождаемой операторами (4.12), (4.13), обладает нелокальной симметрией $SU(2)$. Доказательство этого утверждения проводится с помощью метода [3–5]. По трем базисным операторам алгебры Ли группы $SU(2)$ можно построить новые законы сохранения для системы (4.8), (4.9).

Замечание 4. Нелинейная система ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u^k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \tag{4.22}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{4.23}$$

инвариантна относительно группы $\bar{G}(1,3)$. Максимальной АИ системы (4.22), (4.23) является алгебра Ли группы $IGL(4,R)\supset P(1,3)$. Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$\begin{gathered} P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{ab} = J^{\mathrm{I}}_{ab}, \qquad J_{0a} = x_a\partial_0 - u_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \\ G_a = x_0\partial_a - \frac{\partial}{\partial u_a}, \qquad D_0 = x_0\partial_0 - u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \qquad D_a = x_a\partial_a + u_a\frac{\partial}{\partial u_a}. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Из явного вида операторов (4.24) следует, что система уравнений Эйлера (4.22), (4.23) инвариантна как относительно преобразований Галилея, так и относительно преобразований Лоренца. Таким образом, система (4.22), (4.23) является примером уравнений, для которых выполняется как принцип относительности Галилея, так и принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна.

Замечание 5. Уравнение неразрывности (4.2) инвариантно относительно бесконечной алгебры.

3. Чтобы ответить на вопрос, вынесенный в заглавие, достаточно провести сравнительный анализ операторов (4.12), (4.13) и (4.3)–(4.7). Совокупность всех операторов (4.3)–(4.7), в отличие от операторов (4.12), (4.13), не может быть определена в пространстве вектор-функций $\{\Psi(t,x) =$ столбец $(u_1(t,\vec{x}), u_2(t,\vec{x}), u_3(t,\vec{x})\}$, поскольку G_a^{I} выражается через оператор сдвига $\frac{\partial}{\partial u_a}$. Оператор $\frac{\partial}{\partial u_a}$ является неограниченным оператором, поэтому его невозможно представить матрицей конечного порядка.

В силу этого действие всех операторов (4.3)–(4.7) можно задать только в пространстве функций $\{\chi = \chi(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3)\}$, зависящих от семи переменных. Это главное отличие операторов (4.3)–(4.7) от операторов (4.12), (4.13). Конечно, операторы (4.12), (4.13) можно задать в пространстве $\{\chi\}$. При этом пространство $\{\chi\}$ будет приводимо относительно операторов (4.12), (4.13).

Из приведенного следует, что квадрат оператора спина

$$\left(S_{ab}^{\mathrm{I}}\right)^2 = \left(S_{12}^{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(S_{23}^{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(S_{31}^{\mathrm{I}}\right)^2 \tag{4.25}$$

в пространстве $\{\chi(t,\vec{x},\vec{u})\}$ не равен 2, но принимает бесконечно много различных значений.

Подведем итог. Поле Навье–Стокса (уравнения (4.1), (4.2)) и поле Эйлера (уравнения (4.22), (4.23)) несут всевозможные целочисленные спины $s = 0, 1, 2, \ldots$ Этот результат принципиально отличен от того, что мы знаем о нелинейном уравнении Дирака (2.1) или о нелинейном уравнении для векторного поля, или о полях Янга–Милса, где спин принимает либо одно, либо конечное количество различных значений.

В заключение этого параграфа приведем пример релятивистской алгебры (содержащей в качеств подалгебры алгебру $P(1,3)$) операторов, которые приводят также к бесконечному набору целых спинов. Совокупность таких операторов выглядит как

$$\begin{gathered}
P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad R_\mu = \frac{\partial}{\partial u_\mu}, \\
G_{\mu\nu}^{\pm} = x_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \pm u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad S_{\mu\nu} = u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu}.
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Часть операторов (4.26) инвариантна относительно замены зависимых $(u(x))$ и независимых переменных (x): $x_\mu \to u_\mu$, $u_\mu \to x_\mu$.

§ 5. О некоторых нерешенных задачах

В этом параграфе укажем несколько задач, которые представляются автору важными для развития и применения теоретико-алгебраических методов.

1. Описать нелинейные системы ДУЧП второго порядка для вектор-функции $\Psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантные относительно групп, содержащих в качестве подгрупп группу Галилея $G(1,n)$ и группу Пуанкаре $P(1,n)$.

Нетривиальным примером системы ДУЧП, инвариантной как относительно группы $G(1,3)$, так и относительно $P(1,3)$, является система уравнений Эйлера (4.22), (4.23).

Построить класс систем ДУЧП, инвариантных относительно групп $P(1, n+m)$, $C(1, n+m)$, m — число компонент у вектор-функции $\Psi(t,x) = \{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m\}$.

Примером таких уравнений являются скалярные уравнения эйконала, Монжа–Ампера, инвариантные относительно группы $C(1, n+1)$.

2. Провести групповую классификацию системы уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_i}{\partial t}+\lambda_1 v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda_2 S_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\lambda_3\Delta v_i+F_i\left(v_k,S_k,\frac{\partial v_k}{\partial x_l},\frac{\partial S_n}{\partial x_l}\right)=0,\\&\frac{\partial S_i}{\partial t}+\mu_1 S_k\frac{\partial S_i}{\partial x_k}+\mu_2 v_k\frac{\partial S_i}{\partial x_k}+\mu_3\Delta S_i+\tilde{F}_i\left(v_k,S_k,\frac{\partial v_k}{\partial x_l},\frac{\partial S_n}{\partial x_l}\right)=0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

где $i,k,l,n=\overline{1,3}$, v_i — скорость жидкости, S_i — внутренний момент количества движения жидкости, F_i, $\tilde{F}_i$ — произвольные функции, λ_i, μ_i — произвольные постоянные.

Известные в литературе уравнения движения жидкости с внутренним моментом [21, 22], как показано в [23], не инвариантны ни относительно $G(1,3)$, ни относительно $P(1,3)$.

3. Описать уравнения вида

$$\begin{aligned}&a_1\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+a_2\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\\&\qquad+a_3\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\Delta u+F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)=0,\end{aligned}\tag{5.2}$$

инвариантные относительно групп $Sch(1,3)$, $Sch(1,4)$, $G(1,3)$, $G(1,4)$, $P(1,3)$, $P(1,4)$, $C(1,3)$, $C(1,4)$ и их подгрупп.

Уравнения (5.2), инвариантные относительно группы $P(1,3)$ или ее подгруппы $O(1,3)$, могут быть использованы, в частности, для описания процессов теплообмена с конечной скоростью распространения ($a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$).

4. Провести групповой анализ и построить семейство частных решений уравнений

$$\sum_{n=0}^{N}\lambda_n S^n u+F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)=0,\tag{5.3}$$

$$\{\exp\mu S\}u=u+\frac{\mu}{1!}Su+\frac{\mu^2}{2!}S^2u+\cdots=0,\tag{5.4}$$

$$S^n=\underbrace{S\cdot S\cdots S}_{n},\qquad S=\frac{\partial}{\partial t}-\lambda\Delta,\tag{5.5}$$

μ, λ, λ_n, N — постоянные.

Уравнение (5.4) является линейным интегральным уравнением. Уравнение (5.3) (в частности, при $F=0$) и (5.4) инвариантны относительно группы Галилея $G(1,3)$, поэтому можно предполагать, что они могут быть использованы для описания тепловых и диффузионных процессов. Уравнение (5.3) совпадает со стандартным уравнением теплопроводности, если положить в (5.3) $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_n=0$ для $n>1$ и $F=0$.

5. Провести групповую классификацию уравнений

$$\Delta u=F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right).\tag{5.6}$$

Построить классы точных решений для тех уравнений вида (5.6), которые инвариантны относительно нетривиальной бесконечномерной алгебры.

6. Исследовать групповые свойства и построить семейства частных решений уравнения четвертого порядка

$$\begin{gathered}\det|u_{ik}| + \lambda_1 \det|u_{ikl}| + \lambda_2 \det|u_{iklm}| = F(u),\\ u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad u_{ikl} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}, \qquad u_{iklm} = \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l \partial x_m},\end{gathered} \tag{5.7}$$

$|u_{ik}|$ — плоская матрица, $|u_{ikl}|$ — пространственная матрица, $|u_{iklm}|$ — матрица в четырехмерном пространстве.

Полагая в (5.7) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $F = 0$, получаем многомерное уравнение Монжа–Ампера. В этом случае уравнение (5.7) инвариантно относительно группы $C(n+1)$ [7].

7. Описать уравнения вида

$$\begin{gathered}\gamma_\mu p^\mu \Psi + F_1(\bar\Psi\Psi, \varphi)\Psi + F_2(\overline{\gamma_\mu p^\mu \Psi}, \gamma_\alpha p^\alpha \Psi, \bar\Psi\Psi)\Psi = 0,\\ p_\mu p^\mu \varphi + F_3\left(\bar\Psi\Psi, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\varphi = 0,\end{gathered} \tag{5.8}$$

инвариантные относительно конформной группы $C(1,3)$. Построить семейства частных решений. Система (5.8) описывает взаимодействие спинорного поля Ψ со скалярным полем φ.

8. Провести теоретико-алгебраический анализ пуанкаре-инвариантной системы

$$\lambda_1 v_{\mu\nu\rho} v^{\mu\nu\rho}\Psi + \lambda_2 (v_{\mu\nu\rho}\Psi)^\dagger (v^{\mu\nu\rho}\Psi) = F(\Psi^\dagger\Psi)\Psi, \tag{5.9}$$

$$v_{\mu\nu\rho} = P_\mu J_{\nu\rho} + P_\nu J_{\rho\mu} + P_\rho J_{\mu\nu}, \qquad P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{5.10}$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{5.11}$$

$S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие представление $D(m,n) \oplus D(n,m)$ алгебры Ли группы Лоренца $O(1,3)$. Ψ — вектор-столбец, размерность которого зависит от размерностей матриц $S_{\mu\nu}$,

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + \lambda \Psi_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = 0, \qquad \Psi_\mu = \bar\Psi \gamma_\mu \Psi,$$

Ψ — четырехкомпонентный спинор.

9. Провести теоретико-алгебраический анализ галилеевски-инвариантной системы

$$\lambda_1 W_a W_a \Psi + \lambda_2 (W_a\Psi)^\dagger (W_a\Psi)\Psi = F(\Psi^\dagger\Psi)\Psi, \tag{5.12}$$

$$\begin{gathered}W_a = mJ_a - \varepsilon_{abc} P_b G_c, \qquad J_a = \varepsilon_{abc} J_{bc},\\ J_{bc} = x_b p_c - x_c p_b + S_{ab}, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \eta_a,\end{gathered} \tag{5.13}$$

S_{ab} — матрицы, реализующие представление алгебры группы $O(3)$, η_a — матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям [14]

$$[\eta_a, \eta_b] = 0, \qquad [\eta_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}\eta_c.$$

10. Провести теоретико-алгебраический анализ релятивистских уравнений движений во внешних электромагнитных полях

$$(\pi_\mu \pi^\mu + \lambda F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})\, u(x) = 0, \tag{5.14}$$

$$\begin{gathered}(\gamma_\mu \pi^\mu + \lambda_1 S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda_2 p_\mu p^\mu \gamma_\nu A^\nu)\, \Psi = 0, \\ \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu).\end{gathered} \tag{5.15}$$

11. Описать системы обыкновенных ДУ

$$\ddot{x}_i = F_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.16}$$

инвариантные относительно следующих групп (или их подгрупп) преобразований:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= a_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}, \quad x_0 \equiv t, \\ x'_\mu &= \frac{x_\mu}{1 + c_\mu x^\mu}, \qquad c_\mu x^\mu \neq -1, \\ x'_\mu &= \frac{c_{\mu\nu} x^\nu}{d_\alpha x^\alpha}, \qquad d_\alpha x^\alpha \neq 0, \\ x'_\mu &= \frac{x_\mu + c_\mu x_\nu x^\nu}{1 + 2c_\nu x^\nu + c_\nu c^\nu x_\nu x^\nu}. \end{aligned}$$

Используя симметрийные свойства уравнений (5.16), построить первые интегралы системы (5.16).

12. Описать системы обыкновенных ДУ

$$\ddot{x}_i = F_i(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \qquad i = \overline{1, 3}, \tag{5.17}$$

обладающие интегралом движения Лапласа–Рунге–Ленца.

1. Lie S., Über die Integration durch bestimente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen, *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328–368.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
5. Фущич В.И.. Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
6. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
7. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *ДАН СССР*, 1983, **273**, № 3, 24–64.
8. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solution of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
9. Шульга М.В., О двумерных нелинейных волновых уравнениях, инвариантных относительно некоторых алгебр Ли, в кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 84–86.
10. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 49 с.

11. Gürsey F., On a conform-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, № 10, 988–1006.

12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 2, 271–277.

13. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.

14. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольных спином, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1981, **12**, вып. 3, 1157–1219.

15. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 183 с.

16. Пухначев Вл.В., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 1, 83–90.

17. Данилов Ю.А., Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье–Стокса, Препринт Ин-та атом. энергии им. И.В. Курчатова, 1967, 15 с.

18. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, в кн. Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.

19. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1963, 260 с.

20. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie-Bäcklund transformations in applications, Philadelphis, 1979, 150 p.

21. Сорокин В.С., О внутреннем трении жидкостей н газов, обладающих скрытым моментом импульса, *Журн. эл. техн. физики*, 1943, **13**, 306–314.

22. Шлиомис М.И., Динамика жидких парамагнетиков, Пермь: Пермский госуниверситет, 1983, 68 с.

23. Славуцкий С.Л., Групповые свойства некоторых уравнений гидро-газодинамики, в кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 71–74.

24. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р.,* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Диф. ур-ния*, 1983, **19**, № 7, 1215–1224.

*В только что вышедшей статье, с которой автор познакомился после сдачи работы в печать, проведена подробная классификация уравнения (3.1) в двумерном и трехмерном случаях.

О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака *

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

Физическая природа величины подчинена ее математической форме ... Математика любит прежде всего симметрию.
Д.К.Максвелл

Д.К. Максвеллу удалось выманить у природы в результате одного лишь мышления такие тайны, которые лишь спустя целое поколение удалось показать в остроумных и трудоемких опытах.
М. Планк

Анализируются симметрийные свойства уравнений Максвелла для электромагнитного поля, а также уравнений Дирака и Кеммера–Дэффина–Петье. В рамках "нелиевского" подхода показано, что помимо хорошо известной инвариантности относительно конформной группы и преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича уравнения Максвелла обладают дополнительной симметрией относительно группы $U(2)\otimes U(2)$ и относительно 23-мерной алгебры Ли A_{23}. Преобразования дополнительной симметрии задаются нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами. Исследована симметрия уравнения Дирака в классе дифференциальных и интегро-дифференциальных преобразований. Показано, что это уравнение инвариантно относительно 18-параметрической группы, включающей в качестве подгруппы группу Пуанкаре. Найдена 28-параметрическая группа инвариантности уравнения Кеммера–Дэффина–Петье. Получены конечные преобразования из конформной группы для безмассового поля с произвольным спином. Приведен явный вид конформных преобразований для электромагнитного поля, а также для полей Дирака и Вейля.

Symmetry properties of the Maxwell equation for the electromagnetic field are analysed as well as of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau one. In the frame of the non-geometrical approach it is demonstrated, that besides to the well-known invariance under the conformal group and Heaviside–Larmor–Rainich transformation, Maxwell equations possess the additional symmetry under the group $U(2)\otimes U(2)$ and under the 23-dimensional Lie algebra A_{23}. The additional symmetry transformations are realized by the non-local (integro-differential) operators. The symmetry of the Dirac equation under the differential and integro-differential transformations is investigated. It is shown, that this equation is invariant under the 18-parametrical group, which includes the Poincaré group as a subgroup. The 28-parametrical invariance group of the Kemmer–Duffin–Petiau equation is found. The finite conformal group transformations for a massless field of any spin are obtained. The explicite form of the conformal transformations for the electro magnetic field as well as for the Dirac and Weyl fields in given.

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1983, **14**, вып. 1, С. 5–57.

* Эта статья посвящена 150-летию со дня рождения Джеймса Кларка Максвелла (1831–1879).

Введение

Исследование симметрии уравнений Максвелла имеет долгую и славную историю. Именно при изучении симметрии этих уравнений Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном были получены основные формулы релятивистской механики и электродинамики, а последующее обобщение принципа релятивистской инвариантности на все законы физики сыграло поистине революционную роль в современном естествознании.

Оказалось, что классические результаты Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Бейтмена, Канингхема не исчерпывают всех свойств симметрии уравнений Максвелла. В работах [15–27] были найдены новые группы инвариантности этих уравнений, а также уравнений Дирака, Кеммера–Дэффина–Петье (КПД) и других уравнений релятивистской физики. Особенностью новых групп симметрии релятивистских уравнений является то, что они включают нелокальные (неточечные) преобразования зависимых и независимых переменных и поэтому в принципе не могут быть получены в классическом подходе Ли. Детальному анализу нелокальных симметрий посвящена [64].

В настоящей статье, являющейся в основном обзором наших работ [15–35], в рамках единого теоретико-алгебраического похода будут получены классические результаты симметрии уравнений Максвелла, а также установлены не известные до недавнего времени (1974 г. [16], 1978 г. [28, 31, 32]) симметричные свойства этих уравнений (дополнительная инвариантность относительно группы $U(2)\otimes U(2)$ и 23-мерной алгебры Ли A_{23}). Будут также проанализированы свойства симметрии уравнений Дирака и КПД и найдены в явном виде конформные преобразования для безмассовых полей с произвольным спином.

1. Прежде чем приступать к краткому изложению полученных результатов и основных идей используемого подхода, остановимся кратко на истории вопроса о симметрии уравнений Максвелла.

Современный вид уравнениям Максвелла придали Герц и Хевисайд. В 1893 г. Хевисайд [1], записав их в симметричной форме, обратил внимание на то, что они инвариантны относительно замены:

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\qquad \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей. Лармор [2] и Райнич [3] обобщили эту симметрию до семейства однопараметрических преобразований следующего вида:

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}\cos\theta+\boldsymbol{H}\sin\theta,\qquad \boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}\cos\theta-\boldsymbol{E}\sin\theta. \tag{2}$$

В конце прошлого века выдающимся норвежским математиком Ли были созданы математические основы науки о симметрии дифференциальных уравнений (ДУ). Не ставя перед собой общей задачи исследования групповых свойств ДУ, Лоренц [4], Пуанкаре [5, 6] и Эйнштейн [7] получили один из наиболее фундаментальных результатов в этой области, сыгравший революционную роль в физике. Именно Лоренц, который не был знаком с теорией Ли, нашел линейные преобразования координат и времени (и соответствующие преобразования для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$), оставляющие инвариантными уравнения Максвелла для электромагнитного поля в отсутствие зарядов.

Пуанкаре и независимо от него Эйнштейн показали, что и при наличии зарядов и токов уравнения Максвелла инвариантны относительно тех же преобразований, если плотности токов и зарядов преобразуются соответствующим образом. Пуанкаре впервые установил и детально изучил одно из самых важных свойств подобных преобразований — их групповую структуру. Подчеркнем, что именно на основе анализа свойств симметрии уравнений Максвелла в работах Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна были заложены основы релятивистской теории.

В 1909 г. Бейтмен [8] и Канингхем [9] доказали, что уравнения Максвелла инвариантны относительно нелинейных конформных преобразований, которые можно представить как произведение преобразований инверсии:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu/(x_\lambda x^\lambda), \qquad \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3, \tag{3}$$

сдвига $x'_\mu \to x''_\mu = x_\mu - d_\mu$ и вторичной инверсии $x''_\mu \to x'''_\mu = x''_\mu/(x''_\lambda x''^\lambda)$. Канингхем [9] нашел в явном виде линейные преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, которые совместно с (3) оставляют уравнения Максвелла инвариантными.

Конформные преобразования совместно с преобразованиями Лоренца и преобразованиями изменения масштаба образуют 15-параметрическую конформную группу $C(1,3)$. Как показано Бейтменом [8], эта группа является максимальной точечной группой симметрии уравнений Максвелла с токами и зарядами. Отметим, что группа конформных преобразований в 4-пространстве R_4 была изучена еще Ли [10].

В последнее двадцатилетие основные идеи и методы классического теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений получили существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его учеников [11–14]. Сравнительно недавно алгоритм Ли–Овсянникова был применен при групповом анализе уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [13]. В результате было установлено, что максимальной локальной группой инвариантности такого уравнения является 16-параметрическая группа $C(1,3) \otimes H$, где H — однопараметрическая подгруппа преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича (2).

2. В связи с изложенным выше может сложиться впечатление, что свойства симметрии уравнений Максвелла полностью изучены и нет никаких надежд получить какой-либо новый результат в этой области. На самом деле это не так, поскольку уравнения Максвелла обладают скрытой (негеометрической) симметрией, которая не связана с локальными преобразованиями координат [16, 28, 31].

Как отмечалось в [15–35], инфинитезимальный метод Ли позволяет обнаружить далеко не все симметрии, которыми обладает та или иная система ДУ. Хорошо известным примером "нелиевской" симметрии является инвариантность уравнения Шредингера для атома водорода относительно группы $O(4)$, впервые обнаруженная Фоком [36].

Чтобы уяснить себе, какие группы инвариантности ДУ могут и какие не могут быть найдены в классическом подходе Ли–Овсянникова, рассмотрим произвольное линейное дифференциальное уравнение

$$\hat{L}(x, d/dx)\Psi(x) = 0, \tag{4}$$

где $\hat{L}$ — некоторый линейный оператор, Ψ — вектор-функция с компонентами $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\}$, $x \in R_n$. В подходе Ли–Овсянникова инфинитезимальные операторы группы инвариантности уравнения (9) ищутся в виде дифференциальных операторов первого порядка:

$$\hat{Q}_A = \xi^{\mu}_A(x,\Psi)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k_A(x,\Psi)\frac{\partial}{\partial \Psi_k}, \tag{5}$$

где $\xi^{\mu}_A(x,\Psi)$ и $\eta^k_A(x,\Psi)$ — неизвестные функции, которые можно найти исходя из требования, чтобы операторы (5) удовлетворяли условию инвариантности уравнения (4):

$$\hat{L}\hat{Q}_A\Psi(x) = 0. \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы операторы (5) задавали базис конечномерной алгебры Ли, то функции $\xi^{\mu}_A(x,\Psi)$ и $\eta^k_A(x,\Psi)$ должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям, которые вытекают из соотношений

$$[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B] = if_{ABC}\hat{Q}_C, \tag{7}$$

где f_{ABC} — структурные константы. Совокупность операторов, удовлетворяющих условиям (6) и (7), будем называть алгеброй инвариантности (АИ) уравнения (4).

Очевидно, что подход Ли–Овсянникова не позволяет найти все возможные АИ заданного дифференциального уравнения, поскольку на базисные элементы АИ накладывается априорное требование принадлежности классу дифференциальных операторов первого порядка*. Из сказанного ясно, что постановку задачи об исследовании алгебраических свойств ДУ можно существенно обобщить, если расширить класс искомых операторов $\hat{Q}_A$, удовлетворяющих (6), (7). Например, можно искать алгебру инвариантности ДУ в классе дифференциальных операторов второго порядка или даже интегро-дифференциальных операторов. Именно таким путем были найдены новые АИ уравнений Дирака [15–19], Максвелла [16, 28, 31, 32] и многих других уравнений квантовой механики [15–35]. Такие алгебры инвариантности, называемые ниже *негеометрическими*, соответствуют нелокальным преобразованиям зависимых и независимых переменных и поэтому не порождают локальных групп Ли.

Не будем здесь касаться широкого круга вопросов, которые связаны с динамической симметрией физических систем, достаточно полно освещенных в литературе (см., например, [38–40]). Физическим аспектам динамической симметрии посвящена книга [41].

3. Главный и самый трудный вопрос, возникающий в связи с негеометрическим подходом к исследованию симметрийных свойств ДУ, состоит в следующем: каким способом конструктивно вычислить операторы $\hat{Q}_A$, образующие АИ заданного дифференциального уравнения? Обобщая результаты конкретных вычислений АИ уравнений квантовой механики, можно сформулировать следующий алгоритм для нахождения явного вида таких операторов [24, 30, 33]: 1) система ДУ с помощью невырожденного преобразования приводится к каноническому диагональному виду, т.е. производится максимальное расщепление системы ДУ на независимые подсистемы; 2) находится АИ преобразованного уравнения; 3) если операторы $\hat{Q}_A$ удовлетворяют соотношениям (7), то устанавливается, какое именно представление алгебры Ли реализуют эти операторы на множестве решений исследуемого

*Следует отметить, что подход Ли–Овсянникова получил существенное-развитие в работе Ибрагимова и Андерсена с помощью преобразования Ли–Бэклувда [37].

уравнения; 4) с помощью обратного преобразования находится явный вид базисных элементов алгебры инвариантности исходного уравнения; 5) по найденному представлению АИ вычисляются конечные преобразования

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp(iQ_A\theta_A)\Psi(x), \tag{8}$$

где θ_A — параметры преобразований.

В основе сформулированного алгоритма лежит одна из самых плодотворных и эффективных идей в теории ДУ — преобразования независимых и зависимых переменных. Приведем более подробное описание первого шага этого алгоритма.

Важную роль в реализации алгоритма будет играть понятие символа оператора $\hat{L}(x, \partial/\partial x)$, который можно определить с помощью преобразования Фурье (более подробно о символах см., например, в [42]):

$$\hat{L}(x, \partial/\partial x)\Psi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{D(p)} L(x,p)\exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})\tilde{\Psi}(p)\, d^n p, \tag{9}$$

где $\tilde{\Psi} \in C_0^\infty(R^n)$, $\tilde{\Psi} = F\Psi(x)$ — фурье-образ $\Psi(x)$, F — унитарный оператор Фурье, отображающий вектор из гильбертова пространства H в $\tilde{H}$, $\tilde{\Psi}(p) \in \tilde{H}$, $D(p)$ — область интегрирования, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} = g^{\mu\nu}x_\mu p_\nu = g^{00}x_0p_0 + g^{11}x_1p_1 + \cdots + g^{n-1\, n-1}x_{n-1}p_{n-1}$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор риманова пространства R_n.

Связь между оператором $\hat{L}(x, \partial/\partial x)$ и его символом $L(x,p)$ задается формулами

$$\hat{L}(x, \partial/\partial x) = F^{-1}L(x,p)F, \tag{10}$$

$$L(x,p) = F\hat{L}(x, \partial/\partial x)F^{-1}. \tag{11}$$

Формулы (10), (11) указывают путь реализации первого шага алгоритма. Действительно, если уравнение (4) таково, что символ оператора $\hat{L}(x, \partial/\partial x)$ является матрицей с переменными коэффициентами, а это имеет место для абсолютного большинства уравнений математической физики, то задача о расщеплении системы (4) на максимально возможное число незацепляющихся уравнений сводится к преобразованию матрицы $L(x,p)$ (11) к диагональной или жордановой форме. Такая диагонализация в общем случае представляет достаточно сложную проблему, но если вектор-функция $\Psi(x)$ имеет не слишком много компонент, то трудности носят чисто технический характер.

Следует сказать, что полная реализация приведенного выше алгоритма для конкретных уравнений физики и механики, как правило представляет непростую математическую задачу. Сказанное в полной мере относится и к алгоритму Ли–Овсянникова.

1. Различные формулировки уравнений Максвелла

Изложим здесь основные формулировки уравнений Максвелл для электромагнитного поля в вакууме и в присутствии токов и зарядов. Все эти формулировки математически эквивалентны, но каждая из них может оказаться наиболее удобной при решении конкретно физической задачи. Кроме того, разные формы уравнений Максвелла открывают путь к совершенно различным обобщениям этих уравнений.

Уравнения Максвелла в векторных обозначениях. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}=i\partial\boldsymbol{H}/\partial t,\qquad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}=-i\partial\boldsymbol{E}/\partial t, \tag{12а}$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H}=0, \tag{12б}$$

где $p_a=-i\partial/\partial x_a$, $a=1,2,3$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей. Мы используем систему единиц Хевисайда, в которой $\hbar=c=1$.

При наличии токов и зарядов система уравнений Максвелла принимает вид:

$$i\partial\boldsymbol{E}/\partial t=-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-ij_0, \tag{13а}$$

$$i\partial\boldsymbol{H}/\partial t=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H}=0, \tag{13б}$$

где $j=(j_0,\boldsymbol{j})$ — 4-вектор электрического тока, а константа электромагнитного взаимодействия выбрана равной единице.

Запись уравнений Максвелла в форме (12) или (13) была предложена еще Герцем и Хевисайдом. Использование векторных обозначений делает уравнения (12) и (13) достаточно компактными и изящными. Однако формулировки (12) и (13) не являются явно релятивистски-инвариантными. Глядя на формулы (12) и (13), очень непросто догадаться, что эти уравнения можно интерпретировать как уравнения для безмассовых частиц со спиральностью $\lambda=\pm1$. Наконец, уравнения в форме (12) или (13) невозможно непосредственно обобщить на случай частиц с произвольным (отличным от ±1) значением спиральности. Форма уравнений (12) и (13) не очень удобна также для исследования их свойств симметрии. Поэтому приведем ниже другие формулировки уравнений Максвелла, свободные от перечисленных недостатков.

Уравнения Максвелла в операторной форме. Для исследования свойств симметрии уравнений Максвелла удобно представить систему (12) как результат действия некоторых линейных операторов на вектор-функцию

$$\varphi(t,\boldsymbol{x})=\text{столбец}\,(E_1,E_2,E_3,H_1,H_2,H_3), \tag{14}$$

где E_a и H_a — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей.

Обозначим символами S_a $(a=1,2,3)$ и σ_μ $(\mu=0,1,2,3)$ следующие матрицы:

$$\begin{gathered}
S_a=\begin{pmatrix}\hat S_a & 0\\ 0 & \hat S_a\end{pmatrix},\quad \sigma_0=\begin{pmatrix}1 & \hat 0\\ \hat 0 & 1\end{pmatrix},\\
\sigma_1=\begin{pmatrix}\hat 0 & 1\\ 1 & \hat 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=i\begin{pmatrix}\hat 0 & -1\\ 1 & \hat 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & \hat 0\\ \hat 0 & -1\end{pmatrix},\\
\hat S_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \hat S_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad \hat S_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{15}$$

где $\hat 0$ и 1 — трехрядные квадратные нулевые и единичные матрицы. Используя обозначения (15), уравнения (12а) можно записать в форме Шредингера:

$$\hat L_1\varphi(t,\boldsymbol{x})=0,\qquad \hat L_1=i\partial/\partial t+\sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}. \tag{16}$$

Что же касается уравнений (12б), то их также можно записать в операторной форме

$$\hat{L}_2^a \varphi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{17}$$

где $\hat{L}_2^a$ — любой из трех операторов

$$\hat{L}_2^a = (\delta_{ab} - S_b S_a) p_b, \qquad a, b = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Здесь и далее δ_{ab} означает символ Кронекера, а по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Таким образом, уравнения (12) можно представить в форме уравнения Шредингера (16) для шестикомпонентной вещественной функции (14) и дополнительного условия (17), которое, как будет показано ниже, уменьшает число независимых компонент функции (14) до четырех. Именно формулировку (16), (17) будем в основном использовать ниже при исследовании свойств симметрии уравнений Максвелла.

Рассмотрим здесь еще одну форму уравнений (12), в которой используется трехкомпонентная комплексная вектор-функция:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 - iE_1 \\ H_2 - iE_2 \\ H_3 - iE_3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

В обозначениях (15), (19) уравнения (12) можно переписать в следующем виде:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi, \qquad \hat{H} = \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{p}, \tag{20а}$$

$$(p_a - \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{p} S_a)\Psi = 0. \tag{20б}$$

Уравнение (20б), будучи записано покомпонентно, сводится к следующему условию для функции (19):

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$.

Формулировка уравнений Максвелла в виде (20а), (21) была впервые предложена Майорана (см. [43])*. Эта формулировка очень удобна для корпускулярной интерпретации уравнений (12) (см. ниже разд. 5).

Уравнения Максвелла в форме Дирака. Рассмотрим теперь другую формулировку уравнений (12), впервые полученную А.А. Боргардтом [44], а затем Лонтом [45] и Мозесом [46]. Обозначим символами α_1, α_2 и α_3 четырехрядные матрицы следующего вида:

$$\alpha_1 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

*Такая формулировка (но в покомпонентной, а не в матричной записи) использовалась значительно ранее Бейтменом и Циммерманом [63].

а символом $\chi(t,\boldsymbol{x})$ — четырехкомпонентную функцию, первая компонента которой тождественно равна нулю:

$$\chi(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 - iH_1 \\ E_2 - iH_2 \\ E_3 - iH_3 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Используя обозначения (22), (23), уравнения (12) можно записать в виде:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\right)\chi = 0. \tag{24}$$

Действительно, расписывая (12) и (22)–(24) покомпонентно и принимая во внимание вещественность $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, приходим к одинаковым системам уравнений.

Матрицы α_a (22) удовлетворяют алгебре Клиффорда–Дирака

$$\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a = 2\delta_{ab}. \tag{25}$$

Следует подчеркнуть, однако, что уравнение (24) даже в случае, когда $\chi(t,\boldsymbol{x})$ — произвольная функция, неэквивалентно уравнению Дирака с $m=0$, поэтому название *уравнения Максвелла в форме Дирака* очень условно.

Основное достоинство записи уравнений Максвелла в форме (22)–(24) состоит в том, что эта формулировка легко обобщается на случай релятивистского безмассового поля произвольного спина. Однако уравнения (22)–(24) неинвариантны относительно пространственной инверсии и, кроме того, с чисто эстетической точки зрения не очень привлекательно выглядит условие равенства нулю первой компоненты функции $\chi(t,\boldsymbol{x})$ (23).

Следуя [47, 48], приведем еще одну формулировку уравнений (12) в которой, как и в (15)–(17), используем вещественную вектор-функцию, имеющую на этот раз восемь компонент:

$$\Psi = \text{столбец}\,(H_1, H_2, H_3, \varphi_1, E_1, E_2, E_3, \varphi_2). \tag{26}$$

Уравнения (12) можно представить в виде следующей системы для функции (26):

$$\begin{aligned} &\hat{L}_1\Psi = 0, \qquad \hat{L}_1 = \gamma_\mu p^\mu, \\ &\hat{L}_2\Psi = 0, \qquad \hat{L}_2 = \gamma_\mu p^\mu S_{\sigma\nu}S^{\sigma\nu}, \end{aligned} \tag{27}$$

где γ_μ и $S_{\sigma\nu}$ — матрицы размерности 8×8

$$\begin{gathered} \gamma_0 = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = -i\begin{pmatrix} \alpha_a & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \alpha_a \end{pmatrix}, \quad S_{ab} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{ab} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{S}_{ab} \end{pmatrix}, \\ S_{0a} = i\begin{pmatrix} \tilde{0} & -\tilde{S}_{0a} \\ \tilde{S}_{0a} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ab} = -i\varepsilon_{abc}\tilde{S}_{0a} = \varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \hat{S}_c & & 0 \\ & - & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{28}$$

$\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ — нулевые и единичные матрицы размерности 4×4, α_a и $\hat{S}_c$ — матрицы (22), (15).

Подставляя (26), (28) в (27) и расписывая получившуюся систему покомпонентно, приходим к уравнениям (12) для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и следующим условиям для φ_1 и φ_2:

$$p_a\varphi_1 = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 = p_a\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 = 0, \tag{29}$$

откуда заключаем, что φ_1 и φ_2 — константы, которые, не умаляя общности, можно считать равными нулю.

Уравнения Максвелла в форме (26)–(28) также допускают самое непосредственное обобщение на случай полей с произвольным спином [47, 48] и, в отличие от (22), (23), инвариантны относительно пространственной инверсии (см. разд. 2).

Уравнения в форме Кеммера–Дэффина–Петье. Во всех рассмотренных выше формулировках уравнения Максвелла записывали как результат действия двух (или четырех) линейных операторев на некоторую вектор-функцию. Однако систему (12) можно представить также в виде единого уравнения:

$$(\beta_\mu p^\mu + \beta\varkappa)\Psi = 0, \tag{30}$$

где β_μ — десятирядные матрицы КДП, удовлетворяющие алгебре

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\nu\lambda}\beta_\mu, \tag{31}$$

$\beta = \beta_5^2$, $\beta_5 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma/4!$, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$.

Покажем, что уравнения (12) действительно можно представить в форме (30), (31). Выбирая β_μ и Ψ в виде

$$\beta_0 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & -1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 1 & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \lambda_a \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_a & 0 \\ \hat{0} & \hat{S}_a & \hat{0} & 0 \\ -\lambda_a^+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_5 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & -1 & \hat{0} & 0 \\ 1 & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{A} \\ A_0 \end{pmatrix} = \text{столбец}\,(E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, A_1, A_2, A_3, A_0),$$

где $\hat{S}_a$ — матрицы (15),

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$\hat{0}$ и 1 — нулевые и единичные матрицы размерности 3×3, $\hat{0}$ — нулевые матрицы соответствующей размерности, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &i\partial A_b/\partial t + i\partial A_0/\partial x_b = -i\varkappa E_b, \qquad \varkappa\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \\ &i\partial \boldsymbol{E}/\partial t = -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

из которой непосредственно следуют уравнения (12) для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Запись уравнений Максвелла в форме (30), (31) была впервые предложена, по-видимому, Ф.И. Федоровым ([49], а также см. [50, 51]).

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла с токами и зарядами (13) и покажем, что их можно записать в виде системы двух уравнении типа (30). Обозначим символом $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ десятикомпонентную функцию следующего вида:

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{j} \\ j_0 \end{pmatrix} = \text{столбец}\ (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, j_1, j_2, j_3, j_0). \tag{35}$$

Тогда уравнения (13) можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} &\hat{L}_1\tilde{\Psi} = 0, \qquad \hat{L}_1 = (1-\beta_5^2)(\beta_\mu p^\mu + 1), \\ &\hat{L}_2\tilde{\Psi} = 0, \qquad \hat{L}_2 = \beta_\mu p^\mu \beta_5, \end{aligned} \tag{36}$$

где β_μ и β_5 — матрицы (32). Подставив (32), (35) в (36), приходим к уравнениям (13).

Формулировка уравнений Максвелла в виде (35), (36) во многих отношениях более удобна, чем общепринятая запись этих уравнений в векторной форме (13). В частности, уравнения (36) явно инвариантны относительно группы Пуанкаре (см. разд. 2).

Отметим еще, что систему уравнений (13) можно записать также в виде единого уравнения типа (30), где β_μ — матрицы размерности 16×16, удовлетворяющие алгебре (29). Такие матрицы можно выбрать в форме [52]:

$$\beta_\mu = (\gamma_\mu^1 + \gamma_\mu^2)/2, \tag{37}$$

где $\{\gamma_\mu^1\}$ и $\{\gamma_\mu^2\}$ — два взаимно коммутирующих набора матриц Дирака

$$\gamma_\mu^\alpha\gamma_\nu^\alpha + \gamma_\nu^\alpha\gamma_\mu^\alpha = 2g_{\mu\nu}, \qquad [\gamma_\mu^1, \gamma_\nu^2] = 0, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Если теперь матрицу β в (30) выбрать в виде

$$\beta = \beta_5^2 + (1 + \gamma_\mu^1\gamma_\mu^2)(\gamma_5^1 - \gamma_5^2)/4\varkappa, \tag{38}$$

то уравнения (30), (37), (38) эквивалентны системе уравнений Максвелла с токами и зарядами (13).

Существуют и другие формулировки уравнений Максвелла (например, с использованием 4-потенциала A_μ), на которых не будем здесь останавливаться.

2. Релятивистская и конформная инвариантность уравнений Максвелла

Опишем здесь алгебру инвариантности уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка и найдем в явном виде конечные преобразования. Получим также явный вид конформных преобразований для безмассового поля с произвольным спином.

Определение алгебры инвариантности. Приступим к исследованию свойств симметрии уравнений Максвелла. Будем исходить из формулировки этих уравнений, задаваемой соотношениями (36). Рассмотрим также несколько более общую систему, задаваемую уравнениями (31), (36), где $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ — произвольная комплексная функция; β_μ — произвольные (не обязательно совпадающие с (32)) десятирядные матрицы, удовлетворяющие алгебре КДП.

Обозначим $\{Q_A\}$ ($A=1,2,\ldots,N$, $N<\infty$) некоторую совокупность линейных операторов, определенных на множестве, всюду плотном в пространстве десятикомпонентных квадратично интегрируемых функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ и образующих конечномерную алгебру Ли.

Определение 1. *Уравнения (36) инвариантны относительно алгебры $\{Q_A\}$, если операторы Q_A удовлетворяют условиям:*

$$\begin{aligned}
&[\hat{L}_1,Q_A]=f_A^1\hat{L}_1+g_A^1\hat{L}_2,\\
&[\hat{L}_2,Q_A]=f_A^2\hat{L}_1+g_A^2\hat{L}_2,
\end{aligned}\tag{39}$$

где f_A^1, g_A^1, f_A^2, g_A^2 — некоторые операторы, определенные на множестве решений уравнений (36), а символ $[A,B]$ означает коммутатор: $[A,B]=AB-BA$.

Действительно, если выполняется (39), то преобразование $\Psi\to Q_A\Psi$ переводит решение уравнения (23) в другое его решение.

Таким образом, задача описания алгебры инвариантности уравнений Максвелла сводится к нахождению возможно более широкого класса операторов Q_A, удовлетворяющих условиям (39). Отметим, что в определении 1 не содержится никаких требований относительно общего вида операторов Q_A — это могут быть, например, дифференциальные операторы, включающие производные выше первого порядка и даже интегро-дифференциальные операторы. В этом состоит принципиальное отличие нашей постановки задачи от классического подхода Ли–Овсянникова, в котором инфинитезимальные операторы группы инвариантности дифференциального уравнения, образующие, очевидно, АИ данного уравнения, всегда принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка.

Алгебра инвариантности уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка. Рассмотрим задачу о нахождении АИ уравнений (36) в классе дифференциальных операторов первого порядка, которая состоит в определении всех возможных операторов вида

$$Q_A=B_A(t,\boldsymbol{x})+C_A^b(t,\boldsymbol{x})\partial/\partial x_b+D_A(t,\boldsymbol{x})\partial/\partial t,\tag{40}$$

удовлетворяющих условиям (39) и образующих конечномерную алгебру Ли. В формуле (40) $C_A^b(t,\boldsymbol{x})$ и $D_A(t,\boldsymbol{x})$ — бесконечно дифференцируемые функции, а $B_A(t,\boldsymbol{x})$ — матрицы размерности 10×10, матричные элементы которых также бесконечно дифференцируемы.

Теорема 1. *Алгебра инвариантности уравнений (36) в классе дифференциальных операторов первого порядка — 15-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются формулами:*

$$\begin{aligned}
&P_\mu=p_\mu=ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu, \qquad J_{\mu\nu}=x_\mu p_\nu-x_\nu p_\mu+S_{\mu\nu},\\
&D=x_\mu p^\mu+ik, \qquad K_\mu=2x_\mu D-x_\nu x^\nu p_\mu+2S_{\mu\nu}x^\nu,
\end{aligned}\tag{41}$$

где

$$S_{\mu\nu}=i(\beta_\mu\beta_\nu-\beta_\nu\beta_\mu), \qquad k=\beta_\mu\beta^\mu=3-\beta_5^2.\tag{42}$$

Доказательство. Используя соотношения

$$\beta_5^2 = \beta_5, \qquad (1-\beta_5^2)\beta_\mu = \beta_\mu\beta_5^2, \tag{43}$$

которые вытекают из алгебры (31), непосредственной проверкой убеждаемся, что операторы (36) и (41) удовлетворяют условиям

$$[P_\mu, \hat{L}_\alpha] = [J_{\mu\nu}, \hat{L}_\alpha] = [D, \hat{L}_\alpha] = [K_\mu, \hat{L}_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{44}$$

которые совпадают с (39) при $g_A^\alpha = f_A^\alpha \equiv 0$.

Используя (31), нетрудно убедиться, что операторы (41) образуют 15-мерную алгебру Ли, так как удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu),\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda}),\\
&[J_{\mu\nu}, K_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}K_\mu - g_{\mu\lambda}K_\nu),\\
&[K_\mu, P_\nu] = -2i(g_{\mu\nu}D + J_{\mu\nu}), \qquad [K_\mu, K_\nu] = 0,\\
&[D, P_\mu] = -iP_\mu, \qquad [D, K_\mu] = iK_\mu, \qquad [J_{\mu\nu}, D] = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, операторы (41) действительно образуют АИ уравнений Максвелла. Теорема доказана.

Соотношения (45) определяют алгебру Ли конформной группы $C(1,3)$. Эта алгебра содержит подалгебру Пуанкаре, образуемую операторами P_μ и $J_{\mu\nu}$ и задаваемую соотношениями (45а).

Следствие 1. Каждое из уравнений (36) в отдельности инвариантно относительно алгебры $C(1,3)$.

Это утверждение следует непосредственно из того факта, что согласно (44) оператор $\hat{L}_1$ из первого и оператор $\hat{L}_2$ из второго уравнения (36) коммутируют со всеми базисными элементами алгебры $C(1,3)$, задаваемыми формулами (41).

Следствие 2. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме инвариантны относительно алгебры $C(1,3)$.

Действительно, уравнения Максвелла без токов и зарядов, задаваемые формулами (12), можно представить в виде системы (36), на множество решений которой наложено дополнительное условие

$$\hat{L}_3\tilde{\Psi} \equiv (1-\beta_5^2)\tilde{\Psi} = 0 \tag{46}$$

(при этом матрицы β_μ должны иметь вид (32)). Но матрица $\hat{L}_3$ коммутирует с генераторами (41) и, следовательно, уравнение (46), как и (36), инвариантно относительно алгебры $C(1,3)$.

Из симметрии уравнений (36) относительно алгебры (41) следует, что эти уравнения инвариантны также относительно множества преобразований вида

$$\Psi \to \exp(iQ_A\theta_A)\Psi, \qquad A = 1, 2, \ldots, 15, \tag{47}$$

где Q_A — произвольный оператор из множества (41), θ_A — вещественные параметры. Ниже получим в явном виде все преобразования типа (47), которые образуют представление конформной группы. Как показал еще Бейтмен [8], конформная группа является максимальной локальной группой преобразований переменных $\boldsymbol{x}$ и t, оставляющих инвариантными уравнения Максвелла с токами и зарядами.

Инвариантность уравнений для электромагнитного поля в вакууме относительно алгебры $C(1,3) \oplus H$. Выше было показано, что уравнения (36), (46) инвариантны относительно 15-мерной алгебры $C(1,3)$. Оказывается, АИ этих уравнений в классе дифференциальных операторов первого порядка можно расширить до 16-мерной алгебры Ли, как это устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2. *Система уравнений (36), (46) инвариантна относительно 16-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (41) и (48):*

$$F = \beta_5. \tag{48}$$

Доказательство. Используя соотношения (43), получаем для $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ из (36) и $\hat{L}_3$ из (46) $[\hat{L}_1, \beta_5] = -\hat{L}_2$, $[\hat{L}_2, \beta_5] = \hat{L}_1 - \hat{L}_3 - \beta_5 \hat{L}_2$, $[\hat{L}_3, \beta_5] = 0$, откуда непосредственно следует, что оператор (41) удовлетворяет условию инвариантности уравнений (36), (46). Оператор F (48) коммутирует со всеми операторами (41). Это означает, что операторы (41), (48) образуют алгебру $C(1,3) \oplus H$, где H включает единственный элемент (48). В силу следствия 2 из теоремы 1 эта алгебра является АИ уравнений (36), (46). Теорема доказана.

Как увидим ниже, оператор (48) порождает преобразования Хевисайда–Лармора–Райнича (2). В [13] показано, что алгебра $C(1,3) \oplus H$ является максимальной АИ уравнений Максвелла для электромагнитного ноля в вакууме. В разд. 3 найдем новые АИ уравнений Максвелла, базисные элементы которых являются нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами.

Замечание. Все формулировки уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме рассмотрены в разд. 1 и инвариантны относительно алгебры $C(1,3)$. Базисные элементы этой АИ во всех случаях принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка и задаются формулами (41), где

$$S_{ab} = \varepsilon_{abc} S_c, \qquad S_{0a} = i\sigma_2 S_a \qquad \text{для} \quad (16),\ (17); \tag{49а}$$

$$S_{ab} = \varepsilon_{abc} \hat{S}_c, \qquad S_{0a} = i\hat{S}_a \qquad \text{для} \quad (20); \tag{49б}$$

$$S_{\mu\nu} = \tilde{S}_{\mu\nu} \qquad \text{для} \quad (23),\ (24), \tag{49в}$$

и, наконец, $S_{\mu\nu}$ имеют форму (28) для (27). Здесь S_a, $\hat{S}_a$ и $\tilde{S}_{\mu\nu}$ — матрицы (15), (28). При этом уравнения (16), (17) и (27) инвариантны относительно более широкой алгебры $C(1,3) \oplus H$, где H включая единственный элемент F, равный σ_2 для уравнений (16), (17) и $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ для уравнений (27), в то время как для уравнений (20) и (23), (24) максимальной АИ в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка является $C(1,3)$.

Преобразования дискретной симметрии. Рассмотренные выше алгебры Ли — максимально широкие АИ уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка, но не исчерпывают, как увидим ниже, всех свойств симметрии этих уравнений. Хорошо известным примером симметрии, которую не включают рассмотренные выше АИ, является инвариантность уравнений Максвелла относительно следующих дискретных преобразований

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}, \qquad t \to t, \\ &\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) \to -\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{x}), \\ &\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}) \to -\boldsymbol{j}(t,-\boldsymbol{x}), \qquad j_0(t,\boldsymbol{x}) \to j_0(t,-\boldsymbol{x}); \end{aligned} \tag{50а}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}, \qquad t \to -t, \\ &\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{E}(-t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) \to -\boldsymbol{H}(-t,\boldsymbol{x}), \\ &\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}) \to -\boldsymbol{j}(-t,\boldsymbol{x}), \qquad j_0(t,\boldsymbol{x}) \to j_0(-t,\boldsymbol{x}); \end{aligned} \tag{50б}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}, \qquad t \to t, \\ &\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{E}^*(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{H}^*(t,\boldsymbol{x}), \\ &\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{j}^*(t,\boldsymbol{x}), \qquad j_0(t,\boldsymbol{x}) \to j_0^*(t,\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{50в}$$

Преобразования (50) называют пространственной инверсией P, обращением времени T и зарядовым сопряжением C.

Используя обозначения (32), (35), преобразования (50) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to P\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = (1-2\beta_0^2)\tilde{\Psi}(t,-\boldsymbol{x}), \\ &\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to T\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = (1+2\beta_1^2)(1+2\beta_2^2)(1+2\beta_3^2)\tilde{\Psi}(-t,\boldsymbol{x}), \\ &\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to C\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \Psi^*(t,\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{51}$$

Принимая во внимание соотношения (31), нетрудно убедиться, что преобразования (51) оставляют уравнения (46) инвариантными, поскольку выполняется

$$[P,\hat{L}_1] = [P,\hat{L}_2]_+ = [T,\hat{L}_1]_+ = [T,\hat{L}_2] = [C,\hat{L}_1] = [C,\hat{L}_2] = 0,$$

где $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ — операторы (36), символ $[A,B]_+$ означает антикоммутатор, $[A,B]_+ = AB+BA$. Операторы (51) удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям совместно с генераторами группы $C(1,3)$ (41):

$$\begin{aligned} &[P,P_0] = [P,P_a]_+ = [P,J_{ab}] = [P,J_{0a}]_+ = 0, \\ &[T,P_0]_+ = [T,P_a] = [T,J_{ab}] = [T,J_{0a}]_+ = 0, \\ &[C,P_\mu]_+ = [C,J_{\mu\nu}]_+ = 0, \qquad [P,D] = [P,K_0] = [P,K_a]_+ = 0, \\ &[T,D] = [T,K_0]_+ = [T,K_a] = 0, \qquad [C,D]_+ = [C,K_\mu]_+ = 0, \\ &[P,T] = [P,C] = [T,C] = 0, \qquad T^2 = P^2 = C^2 = 1. \end{aligned} \tag{52}$$

Коммутационные и антикоммутационные соотношения (52) могут служить абстрактным определением операторов P, T и C. Мы видим, что уравнения Максвелла инвариантны относительно множества операторов $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu, P, T, C\}$, образующих алгебру (52), которая не является алгеброй Ли.

Явный вид преобразований из конформной группы для $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{j_0}$. Найдем теперь в явном виде представление конформной группы, которое реализуется на множестве решений уравнений Максвелла с токами и зарядами, т.е. вычислим конечные преобразования координат времени, векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и 4-вектора тока, порождаемые генераторами (41).

Представление конформной группы на множестве решений системы (36) реализуется операторами вида

$$U = \exp(iQ_A\theta_A), \qquad A = 1,2,\dots,15, \tag{53}$$

где Q_A — генераторы (36), θ_A — произвольные вещественные параметры, а по повторяющемуся индексу A подразумевается суммирование от 1 до 15. Поскольку генераторы (38) образуют конечномерную алгебру Ли, то оператор (51) всегда можно представить в форме

$$U = U_5 U_4 U_3 U_2 U_1,$$

где

$$\begin{aligned} &U_1 = \exp(iP_\mu a^\mu) = \exp(ip_\mu a^\mu), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ &U_2 = \exp(iJ_a\theta_a), \qquad J_a = \varepsilon_{abc}J_{bc}/2, \\ &U_3 = \exp(iJ_{0a}\lambda_a), \qquad U_4 = \exp(iD\lambda_0), \qquad U_5 = \exp(iK_\mu b^\mu), \end{aligned} \tag{54}$$

где a_μ, θ_a, λ_a, b_μ — вещественные параметры. Следовательно, для определения явного вида конечных преобразований из конформной группы достаточно задать действие операторов (54).

Преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и 4-вектора $j = (\boldsymbol{j}, j_0)$, порождаемые операторами (54), хорошо известны. Преобразования из группы Пуанкаре, генерируемые U_1, U_2 и U_3, были найдены еще Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном, преобразования дилатации, совершаемые оператором D, для произвольного поля описаны Вейлем и, наконец, собственно конформные преобразования, порождаемые операторам K_μ, были описаны Канингхемом [9]. Однако насколько нам известно, явный вид конформных преобразований для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ нигде не приведен, хотя в [53] и имеется очень сложная формула для преобразования тензора электромагнитного поля.

Здесь выпишем в явном виде преобразования из конформной группы для $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и j, а ниже приведем доказательство этих формул и установим закон преобразования для конформно-инвариантного поля произвольного спина.

Конформные преобразования для независимых переменных $\boldsymbol{x}$ и t задаются формулами:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \\ &t \to t' = t - a_0; \end{aligned} \tag{55а}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}(1-\cos\theta)/\theta^2, \\ &t \to t'' = t; \end{aligned} \tag{55б}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}''' = \boldsymbol{x}\operatorname{ch}\lambda - \boldsymbol{\lambda}t\operatorname{sh}\lambda/\lambda + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})(\operatorname{ch}\lambda - 1)/\lambda^2, \\ &t \to t''' = t\operatorname{ch}\lambda - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\lambda}\operatorname{sh}\lambda/\lambda; \end{aligned} \tag{55в}$$

$$x_\mu \to x_\mu^{\mathrm{IV}} = \exp(-\lambda_0)x_\mu; \tag{55г}$$

$$x_\mu \to x_\mu^{\mathrm{V}} = (x_\mu + b_\mu x_\nu x^\nu)/(1 + 2b_\nu x^\nu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda), \tag{55д}$$

где $\theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}$, $\lambda = \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)^{1/2}$.

Преобразования (55а)–(55в) сохраняют квадратичную форму $x_0^2 - \boldsymbol{x}^2$ и образуют группу $P(1,3)$, называемую *группой Пуанкаре*. Формулы (55г), (55д) задают масштабные и собственно конформные преобразования, которые образуют совместно с (55а)–(55в) конформную группу $C(1,3)$. Операторы (54) реализуют представление этой группы на множестве решений уравнений (36) и порождают следующие преобразования функции $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$:

$$\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}'(t,\boldsymbol{x}) = U_1\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \tilde{\Psi}(t',\boldsymbol{x}'); \tag{56а}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) &\to \tilde{\Psi}''(t,\boldsymbol{x}) = U_2\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})\tilde{\Psi}(t'',\boldsymbol{x}'') = \\ &= \left[1 + i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta}\sin\theta/\theta + (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})^2(\cos\theta-1)/\theta^2\right]\tilde{\Psi}(t'',\boldsymbol{x}'');\end{aligned} \tag{56б}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) &\to \tilde{\Psi}'''(t,\boldsymbol{x}) = U_3\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp(iS_{0a}\lambda_a)\tilde{\Psi}(t''',\boldsymbol{x}''') = \\ &= \left[1 + iS_{0a}\lambda_a\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + (S_{0a}\lambda_a)^2(1-\mathrm{ch}\,\lambda))/\lambda^2\right]\tilde{\Psi}(t''',\boldsymbol{x}''');\end{aligned} \tag{56в}$$

$$\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}^{\mathrm{IV}}(t,\boldsymbol{x}) = U_4\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp(-k\lambda_0)\tilde{\Psi}(t^{\mathrm{IV}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{IV}}); \tag{56г}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) &\to \tilde{\Psi}^{\mathrm{V}}(t,\boldsymbol{x}) = \left[\varphi\beta_5^2 + \varphi^2(1-\beta_5^2)\right]\times \\ &\times\left[\varphi + 2iS_{\mu\nu}b^\mu x^{\mathrm{V}\nu}(b_\nu x^{\mathrm{V}\nu}-1) - 2(S_{\mu\nu}b^\mu x^{\mathrm{V}\nu})^2\right]\tilde{\Psi}(t^{\mathrm{V}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}),\end{aligned} \tag{56д}$$

где $S_a = \varepsilon_{abc}S_{bc}/2$, $\varphi = 1 - 2b^\nu x_\nu^{\mathrm{V}} + b_\nu b^\nu x_\lambda^{\mathrm{V}} x^{\mathrm{V}\lambda}$, $S_{\mu\nu}$ и k — матрицы (42). Подставляя в (56) выражения (35) для функции $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ и (32) для матриц β_μ, получаем конформные преобразования для векторов напряженности электрического и магнитного полей и 4-вектора электрического тока в виде:

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}, \qquad j_\mu \to j'_\mu = j_\mu; \tag{57а}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{E}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{E})(1-\cos\theta)/\theta^2, \\ &\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}'' = \boldsymbol{H}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{H}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{H})(1-\cos\theta)/\theta^2, \\ &\boldsymbol{j} \to \boldsymbol{j}'' = \boldsymbol{j}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{j}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{j})(1-\cos\theta)/\theta^2, \\ &j_0 \to j_0'' = j_0;\end{aligned} \tag{57б}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}''' = \boldsymbol{E}\,\mathrm{ch}\,\lambda - \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{H}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{E})(1-\mathrm{ch}\,\lambda)/\lambda^2, \\ &\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}''' = \boldsymbol{H}\,\mathrm{ch}\,\lambda + \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{E}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{H})(1-\mathrm{ch}\,\lambda)/\lambda^2, \\ &\boldsymbol{j} \to \boldsymbol{j}''' = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{\lambda}j_0\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j})(1-\mathrm{ch}\,\lambda)/\lambda^2, \\ &j_0 \to j_0''' = j_0\,\mathrm{ch}\,\lambda - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda;\end{aligned} \tag{57в}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{\mathrm{IV}} = \exp(-2\lambda_0)\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}^{\mathrm{IV}} = \exp(-2\lambda_0)\boldsymbol{H}, \\ &j_\mu \to j_\mu^{\mathrm{IV}} = \exp(-3\lambda_0)j_\mu;\end{aligned} \tag{57г}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}^{\mathrm{V}} &= \varphi\left[(b_\mu x^{\mathrm{V}\mu}-1)^2\boldsymbol{E} + (b^\mu x_\mu^{\mathrm{V}}-1)(b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{H} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{H} + \right. \\ &+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}(x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{E}) + \\ &\left.+(\boldsymbol{b}x_0^{\mathrm{V}} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{H} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{E} + b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{E})\right], \\ \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}^{\mathrm{V}} &= \varphi\left[(b_\mu x_\mu^{\mathrm{V}}-1)^2\boldsymbol{H} + (b^\mu x_\mu^{\mathrm{V}}-1)(x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{E} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{E} + \right. \\ &+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{H} + b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{E} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{E}) + \\ &\left.+(\boldsymbol{b}x_0^{\mathrm{V}} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}})(b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{H} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{E})\right], \\ j_\lambda \to j_\lambda^{\mathrm{V}} &= \varphi^2\left\{\varphi j_\lambda - 2[b_\lambda(1-2x_\nu^{\mathrm{V}}b^\nu) + x_\lambda^{\mathrm{V}}b_\nu b^\nu]x_\mu^{\mathrm{V}}j^\mu + \right. \\ &\left.+2(x_\lambda^{\mathrm{V}} - b_\lambda x_\nu^{\mathrm{V}}x^{\mathrm{V}\nu})b_\mu j^\mu\right\}.\end{aligned} \tag{57д}$$

В формулах (57) ради краткости опущены аргументы функций $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и j_μ.

Соотношения (55), (57) задают явный вид преобразований из конформной группы для векторов напряженности электрического и магнитного полей и 4-вектора тока. Эти формулы значительно упрощаются, если ограничиться однопараметрическими преобразованиями, когда отличен от нуля только один из входящих в (57) параметров. Так, полагая в (57д) $\boldsymbol{b}=0$, $b_0=b$, получаем:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}^{\mathrm{V}}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{x}})=\tilde{\varphi}\left[(bt-1)^2\boldsymbol{E}-b^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}+2b(bt-1)\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{H}\right],\\
&\boldsymbol{H}^{\mathrm{V}}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{x}})=\tilde{\varphi}\left[(bt-1)^2\boldsymbol{H}-b^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{H}-2b(bt-1)\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{E}\right],\\
&\boldsymbol{j}^{\mathrm{V}}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{x}})=\tilde{\varphi}^2\left[\tilde{\varphi}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}b^2-2b(1-bt)\boldsymbol{x}j_0\right],\\
&j_0^{\mathrm{V}}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{x}})=\tilde{\varphi}^2\left[\tilde{\varphi}j_0-2b(1-bt)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}\right],
\end{aligned}\tag{58}$$

где

$$\tilde{\varphi}=1-2bt+b^2x_\nu x^\nu,\qquad \tilde{x}_\mu=(x_\mu-bx_\nu x^\nu\delta_{\mu0})/\tilde{\varphi}.$$

Интегрирование представлений конформной алгебры, соответствующих произвольному спину. Приведем доказательство справедливости формул (57), задающих конечные преобразования из конформной группы. Одновременно решим более общую задачу получения в явном виде группы преобразований, порождаемых генераторами (46), где $S_{\mu\nu}$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие алгебре $O(1,3)$:

$$[S_{\mu\nu},S_{\rho\lambda}]=i(g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho}+g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda}-g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda}-g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho}).\tag{59}$$

Генераторы (41) имеют вид:

$$Q_A=\eta_A^\mu(x)\partial/\partial x_\mu+C_A(x),\qquad A=1,2,\ldots,15,\tag{60}$$

где $\eta_A^\mu(x)$ — функции от $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$, $C_A(x)$ — матрицы, матричные элементы которых также могут зависеть от x. Операторы (59) порождают конечные преобразования из конформной группы вида

$$\Psi(x)\to\Psi'(x'),$$

где $\Psi(x)$ — вектор-функции, образующие линейное пространство представления группы $C(1,3)$. Явный вид этих преобразований можно получить с помощью интегрирования уравнений Ли [54]:

$$\partial x'_\mu/\partial\theta_A=\eta_A^\mu(x')x'_\mu,\qquad x'_\mu|_{\theta_A=0}=x_\mu,\tag{61}$$

$$\partial\Psi'/\partial\theta_A=C_A(x')\Psi',\qquad \Psi'|_{\theta_A=0}=\Psi,\tag{62}$$

где θ_A — параметры преобразования.

Каждая из формул (61), (62) определяет систему обыкновенных дифференциальных уравнений с заданным начальным условием, т.е. задачу Коши, имеющую единственное решение. Укажем это решение для случая, когда операторы Q_A (60) совпадают с генераторами собственно конформных преобразований K_μ (41), поскольку преобразования, порождаемые остальными генераторами конформной группы, т.е. P_μ, $J_{\mu\nu}$ и D (41), хорошо известны.

Теорема 3. *Конечные преобразования, порождаемые генераторами* K_μ *(41), где* $S_{\mu\nu}$ *— матрицы, реализующие произвольное представление алгебры* $O(1,3)$ *(59),* k *— произвольное число, задаются формулами:*

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = \hat{\varphi}^k \exp\{2iS_{\mu_0\nu}x^\nu \operatorname{arctg}[a_{\mu_0}/(b_{\mu_0}x^{\mu_0} - 1)]/a_{\mu_0}\}\Psi(x), \tag{63}$$

$$x_\mu \to x'_\mu = (x_\mu - \delta_{\mu\mu_0}b_{\mu_0}x_\lambda x^\lambda)/(1 - 2x_{\mu_0}b^{\mu_0} + b_{\mu_0}b^{\mu_0}x_\lambda x^\lambda), \tag{64}$$

где

$$\hat{\varphi} = 1 - 2b_{\mu_0}x^{\mu_0} + g_{\mu_0\mu_0}b^2_{\mu_0}x_\lambda x^\lambda, \qquad a_{\mu_0} = b_{\mu_0}\sqrt{x_\nu x^\nu - x_{\mu_0}x^{\mu_0}}, \tag{65}$$

индекс μ_0 *принимает одно фиксированное значение,* b_{μ_0} *— параметр преобразования.*

Доказательство. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что преобразования (63), (64) удовлетворяют уравнениям Ли (61), (62). Действительно, сравнивая генераторы K_μ (41) с (60), получаем:

$$C_\mu(x) = -2kx_\mu + 2iS_{\mu\nu}x^\nu, \qquad \eta^\nu_\mu(x) = 2x_\mu x^\nu - \delta_{\mu\nu}x_\lambda x^\lambda. \tag{66}$$

Используя (66), уравнения Ли (61), (62) для случая собственно конформных преобразований перепишем в виде:

$$dx'_\mu/db_{\mu_0} = 2x'_\mu x'^{\mu_0} - x'_\lambda x'^\lambda\delta_{\mu\mu_0}, \qquad x'_\mu|_{b_{\mu_0}=0} = x_\mu, \tag{67}$$

$$\partial\Psi'/\partial b_{\mu_0} = 2(iS_{\mu_0\nu}x'^\nu - kx'_{\mu_0}), \tag{68а}$$

$$\Psi'|_{b_{\mu_0}=0} = \Psi. \tag{68б}$$

Легко видеть, что преобразование (64) удовлетворяет уравнениям (67). Убедимся, что решение уравнений (68) задается формулой (63), Дифференцируя (63) по b_{μ_0} и принимая во внимание легко проверяемые тождества

$$\frac{d}{db_{\mu_0}}\{2iS_{\mu_0\nu}b^{\mu_0}x^\nu \operatorname{arctg}[a_{\mu_0}/(b_{\mu_0}x^{\mu_0} - 1)]/a_{\mu_0}\} = 2iS_{\mu_0\nu}x^\nu,$$

$$\frac{d}{db_{\mu_0}}\hat{\varphi}^k = -2k\hat{\varphi}^k x'_{\mu_0},$$

получаем уравнение (68а). Положив в (63) $b_{\mu_0} = 0$, приходим к начальному условию (68б).

Таким образом, преобразования (63), (64) действительно удовлетворяют уравнениям и начальным условиям (67), (68) и в силу единственности решения задачи Коши задают единственное решение уравнений Ли для конформных преобразований, порождаемых генераторами K_μ (41). Теорема доказана.

Используя тот факт, что генераторы K_μ образуют абелеву подалгебру, нетрудно найти из (63), (64) общий вид собственно конформных преобразований

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = \hat{\varphi}^k \{2iS_{\mu\nu}b^\mu x^\nu \operatorname{arctg}[a/(b_\mu x^\mu - 1)]/a\}\Psi(x), \tag{69}$$

где

$$a = \left[b_\mu b^\mu x_\nu x^\nu - (b_\nu b^\nu)^2\right]^{1/2}, \qquad \varphi = 1 - 2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu, \tag{70}$$

x'_μ задаются формулой (55д).

Формулы (55д), (70) дают явный вид конформных преобразований для произвольного представления группы $C(1,3)$, порождаемого генераторами вида (41). Если задаться каким-либо конкретным конечномерным представлением алгебры (59), то экспоненту из (69) нетрудно представить в виде полинома по степеням матрицы $S_{\mu\nu}b^{\mu}x^{\nu}$. Для случая, когда матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют вид (42), формула (69) сводится к (56д). Если же матрицы $S_{\mu\nu}$ образуют представление $D(0,1/2)$ алгебры $O(1,3)$:

$$S_{ab} = \varepsilon_{abc}\sigma_c/2, \qquad S_{0a} = i\sigma_a/2,$$

где σ_a — матрицы Паули, $k = 3/2$, что соответствует представлению конформной алгебры, реализующемуся на множестве решений уравнения Вейля, то формула (69) принимает вид

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = (1-2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu)[b_\mu x^\mu - 1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot(x_0\boldsymbol{b} - b_0\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b})]\Psi(x), \tag{71}$$

где $\Psi(x)$ — двухкомпонентный вейлевский спинор. Для множеств решений безмассового уравнения Дирака, которому соответствуют матрицы $S_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu,\gamma_\nu]/4$, где γ_μ — матрицы Дирака, получаем из (69) конформные преобразования в следующем виде:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = (1 - 2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu)(b_\mu x^\mu - 1 + i\gamma_\mu\gamma_\nu b^\mu x^\nu)\Psi(x), \tag{72}$$

где $\Psi(x)$ — четырехкомпонентный биспинор Дирака.

Отметим, что формула (69) справедлива и в том случае, если k — не число, а произвольная матрица, коммутирующая с $S_{\mu\nu}$.

3. Негеометрическая симметрия уравнений Максвелла

Рассмотрим здесь скрытую (негеометрическую [24, 30]) симметрию уравнений Максвелла, которую нельзя обнаружить в классическом подходе Ли–Овсянникова. С помощью нелиевского метода исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений [24, 28, 30, 32] показано, что эти уравнения помимо конформно инвариантности обладают дополнительной симметрией относительно 8-мерной алгебры Ли, изоморфной алгебре $U(2)\otimes U(2)$, а также относительно 23-мерной алгебры A_{23}, включающей координаты $P(1,3)$ и $U(2)\otimes U(2)$.

Инвариантность относительно алгебры A_8. Рассмотрим задачу о нахождении АИ уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме в классе интегро-дифференциальных операторов. Будем исходить из формулировки этих уравнений, задаваемой соотношениями (14)–(18). Следуя первому шагу алгоритма, кратко изложенному во введении, перейдем от уравнений (16), (17) к уравнениям в импульсном пространстве:

$$L_1\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_1 = i\partial/\partial t + \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{73а}$$

$$L_2\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1, \tag{73б}$$

где $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ — фурье-образ вектор-функции (14):

$$\varphi(t,\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\, \varphi(t,\boldsymbol{x})\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}), \tag{74}$$

$\boldsymbol{p} = (p_1,p_2,p_3)$, p_1, p_2 и p_3 — независимые переменные.

Из условия вещественности функции $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ получаем, что для $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ должно выполняться:

$$\varphi^*(t,\boldsymbol{p}) = \varphi(t,-\boldsymbol{p}). \tag{75}$$

Условие инвариантности (39) в терминах операторов (73) принимает вид:

$$[L_1, Q_A] = f_A^1 L_1 + g_A^1 L_2, \qquad [L_2, Q_A] = f_A^2 L_1 + g_A^2 L_2, \tag{76}$$

где L_1, L_2 — операторы (73), Q_A — символы базисных элементов АИ исходной системы (16), (17), f_A^1, g_A^1, f_A^2, g_A^2 — матрицы размерности 6×6, в общем случае зависящие от p_μ и x_μ, $\mu = 0,1,2,3$.

Рассмотрим задачу описания всех возможных (с точностью до эквивалентности) операторов $Q_A = Q_A(\boldsymbol{p})$, удовлетворяющих условиям (76). Потребуем, чтобы эти операторы не выводили (74) из класса функций, удовлетворяющих условию (75). Это требование можно записать в виде

$$Q_A^*(\boldsymbol{p} = Q_A(-\boldsymbol{p}). \tag{77}$$

Теорема 4 [28, 31, 32]. *Уравнения Максвелла (16), (17) инвариантны относительно 8-мерной алгебры Ли A_8, базисные элементы которой принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов. Символы этих базисных элементов имеют вид:*

$$\begin{array}{llll} Q_1 = \sigma_3 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D/p, & Q_2 = i\sigma_2, & Q_3 = -\sigma_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D/p, & Q_4 = -\sigma_1 D, \\ Q_5 = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/p, & Q_6 = -\sigma_3 D, & Q_7 = I, & Q_8 = i\sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/p, \end{array} \tag{78}$$

где

$$\begin{gathered} D = \left\{ \sum_{a\neq b\neq c} \left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right] - \right. \\ \left. -pp_1p_2p_3\left[1 - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2/p^2\right]\right\}\delta^{-1}, \\ \delta = \left[p_1^4\left(p_2^2 - p_3^2\right)^2 + p_2^4\left(p_3^2 - p_1^2\right)^2 + p_3^4\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2\right]^{1/2}\Big/\sqrt{2}, \end{gathered} \tag{79}$$

σ_a и S_a — матрицы (15). Операторы (78) удовлетворяют алгебре

$$\begin{array}{ll} [Q_a, Q_b] = -[Q_{3+a}, Q_{3+b}] = -\varepsilon_{abc}Q_c, & \\ [Q_{3+a}, Q_b] = \varepsilon_{abc}Q_{3+c}, & a,b,c = 1,2,3, \\ [Q_7, Q_A] = [Q_8, Q_A] = 0, & A = 1,2,\dots,8, \end{array} \tag{80}$$

которая изоморфна алгебре Ли группы $U(2)\otimes U(2)$.

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться непосредственной проверкой. Для этого достаточно воспользоваться тождествами:

$$\begin{array}{lll} D\sigma_a = \sigma_a D, & D\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D, & D(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 = Dp^2, \\ D^2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, & L_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = 0, & [D, L_2] = (D + pp_1p_2p_3\delta^{-1})L_2, \end{array} \tag{81}$$

из которых вытекают соотношения (76), (80). Сами же тождества (81) несложно проверить, записав матрицы D и $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ в явном виде [см. (15), (79)]:

$$
\begin{aligned}
&D = D_0 + D_1, \qquad D_0 = \left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2/p^2 - 1\right] p p_1 p_2 p_3 \delta^{-1},\\
&D_1 = \begin{pmatrix} \hat{D}_1 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{D}_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{82}
$$

где $\hat{0}$ — квадратные трехрядные нулевые матрицы:

$$
\begin{aligned}
&\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} f - 2p_2^2p_3^2 & p_1p_2p_3^2 & p_1p_2^2p_3 \\ p_1p_2p_3^2 & f - 2p_1^2p_3^2 & p_1^2p_2p_3 \\ p_1p_2^2p_3 & p_1^2p_2p_3 & f - 2p_1^2p_2^2 \end{pmatrix} \delta^{-1},\\
&f = p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_2^2p_3^2, \qquad \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p} = i \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Поскольку согласно (82), (83) $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D_0 = D_0\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} \equiv 0$, проверка соотношений (81) сводится к перемножению матриц $\hat{D}_1$ и $\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p}$, D, $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ и L_2. Из (78), (82) видно также, что операторы Q_A удовлетворяют (77). Теорема доказана.

Таким образом, найдена новая АИ уравнений Максвелла, базисными элементами которой являются операторы (78). Эти операторы определены на множестве векторов $\varphi(t,\boldsymbol{p})$, являющихся фурье-образами решений уравнений Максвелла (16), (17). Каждой матрице Q_A (78) можно сопоставить интегральный оператор $\hat{Q}_A$, заданный в пространстве функций $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ (14):

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_A\varphi(t,\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\, Q_A\varphi(t,\boldsymbol{p})\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) =\\
&= (2\pi)^{-3}\int d^3p\, d^3x'\, Q_A\varphi(t,\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')].
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Интегральные операторы (84) удовлетворяют условию инвариантности уравнений (16), (17) и образуют алгебру Ли, изоморфную $U(2)\oplus U(2)$. В отличие от базисных элементов конформной алгебры эти операторы порождают нелокальные преобразования функции $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ (14), а значит, и векторов напряженности электрического п магнитного полей. Поэтому найденную здесь АИ уравнений Максвелла в принципе нельзя получить в классическом подходе Ли–Овсянникова.

Подчеркнем, что симметрия относительно алгебры A_8 не является специфическим свойством уравнений Максвелла в форме (16), (17), но ее можно установить для любой формулировки этих уравнений. Справедливость такого утверждения демонстрируется ниже, где найдены преобразования симметрии, порождаемые алгеброй A_8, непосредственно в терминах напряженностей электрического и магнитного полей.

Конечные преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, порождаемые негеометрической АИ. Приведем другое доказательство теоремы 4, из которого следует, что найденная выше АИ уравнений Максвелла является в некотором смысле максимально широкой. Основная идея его состоит в преобразовании уравнения (73) к такой эквивалентной диагональной форме, для которой утверждения теоремы станут очевидными.

Операторы L_1 и L_2 из (73) не коммутируют друг с другом и поэтому не могут быть диагонализованы одновременно. Чтобы обойти подобную трудность, рассмотрим вместо L_2 оператор L_3:

$$L_3 = L_4 L_2 \equiv p^2 - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2, \qquad L_4 = p_1 + iS_2p_3 - iS_3p_2, \tag{85}$$

коммутирующий с L_1. Из (73б), (85) вытекает: $L_2 \equiv p^{-2}L_2L_3$. Откуда следует, что если L_3 удовлетворяет условиям

$$[L_3, Q_A] = f_A^3 L_1 + g_A^3 L_3, \tag{86}$$

то для L_2 имеют место соотношения (76), где

$$f_A^2 = L_3 f_A^3/p, \qquad g_A^2 = [Q_A, L_2/p^2]L_4 + L_2 g_A^3 L_4/p^2. \tag{87}$$

Если матрица L_2 удовлетворяет (76), то для L_3 (85) выполняется (86), а первое из соотношений (76) можно переписать в виде

$$[L_1, Q_A] = f_A^1 L_1 + \tilde{g}_A^1 L_3, \tag{88}$$

где $\tilde{g}_A^1 = g_A^1 L_2/p$. Следовательно, условия инвариантности (76) эквивалентны условиям (86), (88), накладываемым на L_1 (73а) и L_3 (85).

Для диагонализации L_1 и L_3 воспользуемся оператором

$$W = U_4U_3U_2U_1, \tag{89}$$

где

$$\begin{aligned}
&U_1 = \exp\left(-P_+ D\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\pi/2\right) = P_- - P_+ D\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}},\\
&U_2 = \exp\left\{-i\varepsilon_{abc}S_a(p_b - p_c)\,\mathrm{arctg}\left[\tilde{p}/(p_1+p_2+p_3)\right]/2p\right\},\\
&U_3 = \exp\left[i(S_2 - S_1)\pi/4\sqrt{2}\right],\\
&U_4 = \left[1 - i(S_1S_2 + S_2S_1 + 1 - S_3^2)\right]/\sqrt{2},
\end{aligned} \tag{90}$$

$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/p$, $\tilde{p} = \left[(p_1-p_2)^2 + (p_2-p_3)^2 + (p_3-p_1)^2\right]^{1/2}$, $P_\pm = (1 \mp \sigma_2)/2$.

В результате несложных выкладок получаем:

$$WL_1W^\dagger = L_1' = i\partial/\partial t + \Gamma_0 p, \qquad WL_3W^\dagger = (1-\Gamma_0^2)p^2, \tag{91}$$

где Γ_0 — диагональная матрица,

$$\Gamma_0 = -i(S_1S_2 + S_2S_1)S_3 = \mathrm{diag}\,(1,-1,0,1,-1,0). \tag{92}$$

После преобразования (91) условия инвариантности (86), (88) принимают вид:

$$[L_1, Q_A'] = f_A'^1 L_1' + \tilde{g}_A^1 L_3', \qquad [L_3', Q_A'] = f_A'^3 L_1' + g_A'^3 L_3'. \tag{93}$$

Используя (91), (92), нетрудно найти общий вид матрицы $Q_A(\boldsymbol{p})$, удовлетворяющий условиям (93):

$$Q_A(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ e & 0 & 0 & f & 0 & 0\\ 0 & g & 0 & 0 & h & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{F}(p)L_3', \tag{94}$$

где $\hat{F}(p)$ — произвольная матрица размерности 6×6, элементы которой зависят от p; $a, b, \ldots, h$ — произвольные функции от p. При этом ввиду (73б), (85), (91), не умаляя общности, можно положить $\hat{F}(p) = 0$.

Таким образом, существует всего восемь линейно независимых матриц, удовлетворяющих условиям (93). Выберем эти матрицы в виде:

$$Q'_a = i\sigma_a, \qquad Q'_{3+a} = i\Gamma_0 Q'_a, \qquad Q'_7 = -1, \qquad Q'_8 = -i\Gamma_0, \tag{95}$$

где матрицы σ_a и Γ_0 задаются формулами (15), (92); 1 — единична матрица. С помощью оператора (89) получаем явный вид этих матриц на множестве решений исходной системы (73): $Q_A = W^\dagger Q'_A W$, где Q_A — операторы (78). Теорема 4 доказана.

Приведенное доказательство допускает простое обобщение на случай уравнений для безмассовых полей произвольного спина, например, при использовании формулировки таких уравнений, предложенной в [47, 48].

Из полученных результатов следует, что уравнения Максвелла (73) инварианты относительно восьмипараметрических преобразований:

$$\varphi(t, \boldsymbol{p}) \to \varphi'(t, \boldsymbol{p}) = \exp(Q_A \theta_A)\varphi(t, \boldsymbol{p}), \tag{96}$$

где θ_A — произвольные вещественные параметры. Принимая во внимание соотношения (73), формулу (96) можно переписать в виде

$$\varphi'(t, \boldsymbol{p}) = \begin{cases} (\cos\theta_A + Q_A \sin\theta_A)\varphi(t, \boldsymbol{p}), & A = 1, 2, 3, 8, \\ (\operatorname{ch}\theta_A + Q_A \operatorname{sh}\theta_A)\varphi(t, \boldsymbol{p}), & A = 4, 5, 6, 7. \end{cases} \tag{97}$$

Подставляя в (97) явный вид операторов Q_A (78) и используя для компонент функции $\varphi(t, \boldsymbol{p})$ обозначения

$$\varphi(t, \boldsymbol{p}) = \text{столбец } (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3), \tag{98}$$

где $\tilde{E}_a$ и $\tilde{H}_a$ — фурье-образы компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей, получаем закон преобразования для $\tilde{E}_a$ и $\tilde{H}_a$ в форме:

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \cos\theta_1 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_1, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \cos\theta_1 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_1; \end{aligned} \tag{99а}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \cos\theta_2 + \tilde{H}_a \sin\theta_2, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \cos\theta_2 - \tilde{E}_a \sin\theta_2; \end{aligned} \tag{99б}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_3, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_3; \end{aligned} \tag{99в}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab}\tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_4, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab}\tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_4; \end{aligned} \tag{99г}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \operatorname{sh}\theta_5, \\ &\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \operatorname{sh}\theta_5; \end{aligned} \tag{99д}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_6 - D_{ab}\tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_6,\\&\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_6 + D_{ab}\tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_6;\end{aligned} \tag{99е}$$

$$\tilde{E}_a = \tilde{E}_a \exp\theta_7, \qquad \tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \exp\theta_7; \tag{99ж}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \cos\theta_8 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sin\theta_8,\\&\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \cos\theta_8 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sin\theta_8.\end{aligned} \tag{99з}$$

Формулы (99б) задают преобразования Хевисайда–Лармора–Райнича [1–3]. Остальные соотношения (99), дополняющие преобразования (99б) до восьмипараметрической группы A_8, локально изоморфной $U(2)\otimes U(2)$, соответствуют нелокальным (интегральным) преобразованиям векторов $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\;\tilde{\boldsymbol{E}}\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}),\\&\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\;\tilde{\boldsymbol{H}}\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{100}$$

Преобразования (99а)–(99в), (99з) сохраняют билинейную форму

$$\mathcal{E} = \int d^3x\;\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right), \tag{101}$$

которая ассоциируется с энергией электромагнитного поля. Остальные преобразования (99г)–(99ж) не сохраняют (101). Однако существует положительно неопределенная билинейная форма, инвариантная относительно всех преобразований (99), которая имеет вид

$$\begin{aligned}(\varphi_1,\varphi_2) &= \int d^3p\;\varphi_1^\dagger(t,\boldsymbol{p})\sigma_2 D\varphi_2(t,\boldsymbol{p}) =\\&= (2\pi)^{-3}\int d^3p\;d^3x\;d^3x'\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\sigma_2 D\varphi_2(t,\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')].\end{aligned} \tag{102}$$

Таким образом, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме помимо хорошо известной симметрии относительно конформной группы дополнительно инвариантны относительно восьмипараметрической группы интегральных преобразований (99). Преобразования (99) с точностью до замены $\theta_b \to i\theta_b$, $b = 4,5,6,7$ совпадают с полученными в работах [28, 31, 32]. Отметим, что симметрию уравнений (73) относительно преобразований (99) легко можно проверить непосредственно.

Инвариантность относительно 23-мерной алгебры Ли. Мы показали выше, что существует два набора операторов — $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$ (41), (49а) и $\{Q_A\}$ (78), образующих АИ уравнений Максвелл. Однако, как нетрудно убедиться, операторы (41), (49а) и (78) не образуют совместно замкнутой алгебры. Докажем здесь теорему, устанавливающую симметрию уравнений Максвелла относительно 23-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры $C(1,3)$ и A_8. Такое объединение алгебр $C(1,3)$ и A_8 удается осуществить, если базисные элементы конформной алгебры задать в классе интегральных операторов.

Теорема 5. *Уравнения (73) инвариантны относительно 23-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (78) и (103):*

$$\begin{aligned} &P_\mu = ip_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = i(x'_\mu p_\nu - x'_\nu p_\mu), \\ &D = i(x'_\mu p^\mu - i), \qquad K_\mu = i(2x'_\mu D - x'_\nu x'^\nu p_\mu), \end{aligned} \tag{103}$$

где $x'_a = W^\dagger i\frac{\partial}{\partial p_a}W$, $x'_0 = t$, W *— оператор (89).*

Доказательство. Утверждения теоремы становятся почти очевидными в представлении, где операторы L_1 (73a) и L_3 (85) имеют диагональную форму (91), (92). В таком представлении операторы (78) принимают вид (95), а для операторов (103) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} &P'_\mu = ip_\mu, \qquad J'_{\mu\nu} = i(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu), \\ &D' = i(x_\mu p^\mu + i), \qquad K'_\mu = i(2x_\mu D' - x_\nu x^\nu p_\mu), \end{aligned} \tag{104}$$

где $x_\mu = i\frac{\partial}{\partial p_\mu}$, $B'_a = WB_aW^\dagger$, B_a произвольный оператор из (103). Прямой проверкой убеждаемся, что операторы L'_1 и L'_3 (91), (92) и генераторы (78), (104) удовлетворяют условиям инвариантности (86), (88):

$$\begin{aligned} &[L'_1, P'_\mu] = [L'_1, J'_{ab}] = [L'_1, Q'_A] = 0, \\ &[L'_1, J'_{0a}] = -ip_a p^{-2}L'_3 + ip_a p^{-1}Q'_7 L'_1, \qquad [L'_1, D'] = iL'_1, \\ &[L'_1, K'_0] = -2\left\{[x_0 + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i)Q'_7 p^{-1}]L'_1 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i)p^{-1}L'_3\right\}, \\ &[L'_1, K'_a] = -2\left\{(x_a + Q'_7 x_0 p_a p^{-1})L'_1 - x_0 p_a p^{-2}L'_3\right\}, \\ &[L'_3, P'_\mu] = [L'_3, J'_{ab}] = [L'_3, Q'_A] = 0, \\ &[L'_3, J'_{0a}] = -2p_a p_0 p^{-2}L'_3, \qquad [L'_3, D'] = -2L'_3, \\ &[L'_3, K'_0] = -2\left[2x_0 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})p_0 p^{-2}\right]L'_3, \\ &[L'_3, K'_a] = -2\left[2x_a + i2p_a D' p^{-1} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})p_a p^{-2}\right]L'_3. \end{aligned} \tag{105}$$

Операторы (104) принадлежат алгебре $C(1,3)$, так как они удовлетворяют коммутационным соотношениям (45). Кроме того, эти операторы коммутируют с матрицами Q'_A (95), которые, в свою очередь, образуют представление алгебры A_8 (80). Отсюда заключаем, то операторы (95), (104) образуют базис алгебры $C(1,3) \oplus A_8$. Теорема доказана.

Каждому оператору (78), (103), заданному в пространстве функций $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ (74), можно сопоставить интегральное преобразование в пространстве H функций $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ (14):

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) \to \varphi'(t,\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3}\int d^3p\, d^3x' \exp(iG_\alpha\theta_\alpha)\varphi(t,\boldsymbol{x})\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')], \tag{106}$$

где G_α — один из операторов (78), (103), θ_α параметр преобразования, $\alpha = 1, 2, \ldots, 23$. Преобразования (106) оставляют инвариантными уравнения Максвелла (16), (17) и образуют представление группы $C(1,3) \oplus A_8$.

Таким образом, получили 23-параметрическую группу симметрии уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме, включающую подгруппы $C(1,3)$ и A_8. Поскольку преобразования (106) нелокальны, соответствующую группу инвариантности в принципе нельзя найти в подходе Ли–Овсянникова [11–14], в котором инфинитезимальные операторы принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка и порождают точечные преобразования.

Симметрия относительно преобразований, не изменяющих времени. Со времени создания специальной теории относительности считалось, что преобразования Лоренца (55а)–(56в) — единственные преобразования симметрии уравнений Максвелла, которые можно сопоставить переходу к новой инерциальной системе отсчета. Поэтому сама постановка вопроса о существовании таких преобразований решений уравнений Максвелла, которые образуют представление группы Пуанкаре, но не изменяют времени, может показаться довольно неожиданной. Однако на самом деле такой вопрос вполне правомерен, и на него имеется положительный ответ [16, 28, 30]. А именно, существуют преобразования вида:

$$t \to t' = t, \qquad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t, \lambda_1, \ldots, \lambda_{10}), \tag{107а}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}\right), \\
&\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}\right),
\end{aligned} \tag{107б}$$

где λ_a — вещественные параметры, реализующие представление группы $P(1,3)$ и оставляющие инвариантность уравнения Максвелла.

В [15–17, 29] показано, что уравнение Шредингера–Клейна–Гордона–Фока и другие релятивистские уравнения помимо инвариантности относительно преобразований независимых переменных из группы Лоренца инвариантны также относительно преобразований вида (107а). Иными словами, все релятивистские уравнения обладают двойственной симметрией [29].

Здесь рассмотрим формулировку уравнений Максвелла, задаваемую соотношениями (23) и (24). Симметрия уравнений (23) и (24) также имеет двойственный характер, поскольку генераторы группы Пуанкаре (41), (49б), (28) на множестве решений этих уравнений можно представить также в виде:

$$\begin{aligned}
&P_0 = H = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \\
&J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab}, \qquad J_{0a} = tp_a - x_a H + \tilde{S}_{0a},
\end{aligned} \tag{108}$$

где α_a и $\tilde{S}_{\mu\nu}$ — матрицы (22), (28). Операторы (108), как и (41), (49в), (28), удовлетворяют условиям инвариантности уравнений (22)–(24) и коммутационным соотношениям (45а), т.е. образуют АИ уравнений Максвелла. Однако в отличие от генераторов (41), (49в) операторы (108) коммутируют с t, т.е. порождают преобразования из группы Пуанкаре, не изменяющие времени.

Найдем в явном виде группу преобразований, порождаемую операторами (108). Формально их можно записать в виде

$$\Psi \to \Psi' = W\Psi, \qquad W = \exp(i\theta_A Q_A), \tag{109}$$

где Q_A — генераторы (108), θ_A — вещественные параметры, Ψ — вектор-функция (23).

Ограничимся случаем, когда Q_A совпадают с генераторами J_{0a} (вычисление явного вида преобразований, порождаемых остальными генераторами P_μ и J_{ab}, не представляет трудностей (ср. (56а), (56б)). Генераторы J_{0a}, , задаваемые формулами (108), нельзя представить в виде суммы коммутирующих величин, одна из которых — числовая матрица, а вторая выражается через дифференциальные операторы первого порядка. Хотя оператор

$$W = \exp(iJ_{0a}\theta_a), \qquad a = 1, 2, 3, \tag{110}$$

всегда может быть представлен в виде конечного ряда по степеням спиновых матриц, вычисление этого ряда в явном виде представляет довольно сложную задачу.

Преобразуем оператор (110) к форме, не содержащей матриц под знаком экспоненты. Воспользуемся тождеством

$$iJ_{0a}\theta_a = A_+P_+ + A_-P_-, \tag{111}$$

где

$$P_\pm = (1 \pm H/p)/2, \qquad A_\pm = i(tp_a \mp x_a p + S_{0a})\theta_a. \tag{112}$$

Операторы (112) удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &P_\pm P_\pm = P_\pm, \qquad P_\pm P_\mp = P_\mp P_\pm = 0, \qquad P_\pm A_\mp P_\mp = 0,\\ &P_\mp A_\pm P_\pm = 0, \qquad A_\pm P_\pm A_\pm P_\pm = A_\pm^2 P_\pm, \end{aligned} \tag{113}$$

используя которые, нетрудно получить следующее выражение для оператора (110):

$$\begin{aligned} \exp(iJ_{0a}\theta_a) &\equiv \exp(A_+P_+ + A_-P_-) = \exp(A_+P_+)\exp(A_-P_-) =\\ &= \left(1 + A_+P_+ + \frac{1}{2!}A_+^2P_+ + \cdots\right)\left(1 + A_-P_- + \frac{1}{2!}A_-^2P_- + \cdots\right) =\\ &= [\exp(A_+)P_+ + P_-][\exp(A_-)P_- + P_+] = \exp(A_+)P_+ + \exp(A_-)P_-. \end{aligned} \tag{114}$$

Но вычисление экспонент от операторов A_+ и A_- (112) не составляет труда, поскольку $A_\pm$ состоят из двух коммутирующих слагаемых, одно из которых выражается через спиновые матрицы. Действительно:

$$\exp(A_\pm) \equiv \exp[i(tp_a \mp x_a p + S_{0a})\theta_a] = \exp[i(tp_a \mp x_a p)]\exp(iS_{0a}\theta_a), \tag{115}$$

где последнюю экспоненту можно записать в виде конечной суммы по степеням матриц $S_{0a}\theta_a$:

$$\exp(iS_{0a}\theta_a) \equiv N(\theta) = 1 + iS_{0a}\theta_a \operatorname{sh}\theta/\theta + (S_{0a}\theta_a)^2(1 - \operatorname{ch}\theta)/\theta^2, \tag{116}$$

где $\theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}$.

Подставив (115), (116) в (114), получим

$$W = \exp(iJ_{0a}\theta_a) = N(\theta)[\exp(iB_+)P_+ + \exp(iB_-)P_-], \tag{117}$$

где введены обозначения

$$B_\pm \equiv (tp_a \mp x_a p)\theta_a.$$

Аналогично вычисляется обратный оператор

$$W^{-1} = N(-\theta)[\exp(-iB_+)P_+ + \exp(-iB_-)P_-]. \tag{118}$$

Формулы (116)–(118) задают искомое представление операторов W, которое не содержит спиновых матриц под знаком экспоненты. Используя (116)–(118), нетрудно найти в явном виде закон преобразования функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ в импульсном пространстве

$$\Psi(t,\boldsymbol{p}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{p}) = W\Psi(t,\boldsymbol{p}) = N(\theta)[\Psi_+(t,\boldsymbol{p}') + \Psi_-(t,\boldsymbol{p}'')], \tag{119}$$

где

$$\begin{aligned} &p'_a = p_a \operatorname{ch}\theta - \theta_a p \operatorname{sh}\theta/\theta + \theta_a\theta_b p_b(\operatorname{ch}\theta - 1)/\theta^2, \\ &p''_a = p_a \operatorname{ch}\theta + \theta_a p \operatorname{sh}\theta/\theta + \theta_a\theta_b p_b(\operatorname{ch}\theta - 1)/\theta^2, \qquad \Psi_\pm = P_\pm\Psi. \end{aligned} \tag{120}$$

Преобразованиям (119) соответствуют нелокальные (интегральные) преобразования функции (23):

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{x}) = N(\theta)(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\, \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})[\Psi_+(t,\boldsymbol{p}')+\Psi_-(t,\boldsymbol{p}'')], \tag{121}$$

здесь $N(\theta)$, $\Psi_\pm(t,\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$ задаются формулами (116) и (120). Преобразования (121) совместно с (56а), (56б) образуют представление группы $P(1,3)$, но оставляют время инвариантным, $t' = WtW^+ = t$.

Нелиевская симметрия уравнений Максвелла в проводящей среде. Исследуем негеометрическую симметрию уравнений Максвелла в проводящей среде:

$$\begin{aligned} &i\partial\boldsymbol{E}/\partial t = -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H} + i\sigma\boldsymbol{E}, \qquad i\partial\boldsymbol{H}/\partial t = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}, \\ &\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \tag{122}$$

где σ — коэффициент проводимости. Покажем, что уравнения (122), как и уравнения (12) для электромагнитного поля в вакууме, инвариантны относительно алгебры A_8.

Используя обозначения (14), (15), запишем систему (122) в виде:

$$\hat{L}_1\varphi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \hat{L}_1 = i\partial/\partial t + \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + (i/2)(1+\sigma_3)\sigma, \tag{123}$$

$$\hat{L}_2\varphi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \hat{L}_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1. \tag{124}$$

Найти АИ уравнений (123), (124) означает определить совокупность операторов $\{Q_A\}$, образующих конечномерную алгебру Ли и удовлетворяющих условиям инвариантности (39). Поскольку здесь будем искать АИ в классе интегро-дифференциальных операторов, перейдем от (123) и (124) к эквивалентной системе уравнений в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} &L_1\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_1 = i\partial/\partial t + \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + (i/2)(1+\sigma_3)\sigma, \\ &L_2\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1, \end{aligned} \tag{125}$$

здесь $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ — фурье-образ $\varphi(t,\boldsymbol{x})$, p_a — независимые переменные $-\infty < p_a < \infty$.

Теорема 6. *Уравнения (125) инвариантны относительно алгебры A_8. Ее базисные элементы на множестве решений уравнений (125) задаются формулами:*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sigma_3\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}D, \qquad Q_2 = ih\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/|h|, \qquad Q_3 = ih\sigma_3 D/|h|, \\ &Q_{3+a} = ihQ_a/|h|, \qquad Q_7 = h/|h|, \qquad Q_8 = I, \end{aligned} \tag{126}$$

где σ_a, S_a, D — матрицы (6), (103), (104):

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/p, \qquad h = \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + (i/2)\sigma_3\sigma, \\
&h = \sqrt{h^2} = [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \sigma_2/4]^{1/2} = \\
&\qquad = (p^2 - \sigma^2/4)^{1/2}(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2 + (i/2)\sigma[1 - (\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2].
\end{aligned}
\tag{127}
$$

Доказательство. Подобно тому как это делалось выше [см. (85)–(88)], рассмотрим вместо (125) систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&L_1\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \\
&L_3\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_3 = 1 - (\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2,
\end{aligned}
\tag{128}
$$

где L_1 — оператор из (125).

Исследование симметрийных свойств системы (128) представляет более простую задачу ввиду коммутативности операторов L_1 и L_3. Вместе с тем, как можно показать в полной аналогии с (85)–(88), АИ уравнений (125) и (128) совпадают.

Используя тождества (81) и принимая во внимание антикоммутативность матриц Паули, нетрудно убедиться, что операторы (126) удовлетворяют условиям инвариантности (86), (88) уравнений (128) и коммутационным соотношениям (80), т.е. образуют АИ A_8 системы (128), а значит, и системы (125). Теорема доказана.

Итак, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в проводящей среде имеют такую же негеометрическую АИ, как и соответствующие уравнения в отсутствие токов и зарядов. Из теоремы 6 следует также инвариантность системы (125) относительно группы преобразований вида (96), где Q_A — оператор (126).

В заключение раздела отметим, что помимо наших работ [15–25] негеометрический подход к исследованию симметрии уравнений Максвелла использовался также в [55, 56]. Этот подход может оказаться эффективным и при исследовании групповых свойств новой формулировки электродинамики, предложенной в [57, 58].

4. Симметрия уравнений Дирака и КДП

Этот раздел в основном посвящен исследованию симметрии уравнения Дирака

$$
L\Psi(t,\boldsymbol{x}) \equiv (\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0,
\tag{129}
$$

где $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — четырехкомпонентная волновая функция, γ_μ — матрицы размерности 4×4, удовлетворяющие алгебре

$$
\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}.
\tag{130}
$$

Следуя [15–18, 19, 27, 31], установим АИ уравнения (129) в классе дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов. Отдельно будет рассмотрен случай $m = 0$ и показано, что симметрия уравнения Дирака для безмассовых частиц определяется той же самой 23-мерной алгеброй Ли, что и симметрия уравнения Максвелла.

Будет исследована также симметрия уравнения Кеммера–Дэффина–Петье.

АИ уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов. Хорошо известно, что уравнение (129) инвариантно относительно группы Пуанкаре. Генераторы этой группы на множестве решений уравнения (129) имеют вид:

$$
P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},
\tag{131}
$$

где $S_{\mu\nu} = (i/4)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Операторы (131) коммутируют с L из (129) и удовлетворяют коммутационным соотношениям (45a), т.е. образуют АИ уравнения (129). В [14, 59] показано, что алгебра Ли, натянутая на базисные элементы (131), является максимальной АИ уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка.

Однако инвариантность относительно алгебры (131) не исчерпывает всех свойств симметрии уравнения Дирака. Если расширить класс операторов, которому принадлежит АИ, то можно доказать следующее утверждение [18, 19].

Теорема 7. *Уравнение Дирака (129) инвариантно относительно алгебры A_8, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры на множестве решений уравнения (129) задаются формулами:*

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\mu\nu} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + (i/m)(1 - i\gamma_5)(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu), \\ &\Sigma_0 = 1, \qquad \Sigma_1 = \gamma_5 - (i/m)(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu p^\mu, \end{aligned} \tag{132}$$

где $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, 1 — единичная матрица.

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться прямой проверкой. Используя соотношения (130), получаем:

$$\begin{aligned} &[\Sigma_{\mu\nu}, L] = (i/m)(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu)L, \qquad [\Sigma_0, L] = 0, \\ &[\Sigma_1, L] = -(2i/m)\gamma_5\gamma_\mu p^\mu L, \qquad [\Sigma_1, \Sigma_2] = [\Sigma_\alpha, \Sigma_{\mu\nu}] = 0, \\ &[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\sigma}] = 2i(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\lambda}), \end{aligned} \tag{133}$$

откуда видно, что операторы (132) удовлетворяют условию инвариантности уравнения (129) и образуют 8-мерную алгебру Ли, изоморфную алгебре A_8 (80). Этот изоморфизм устанавливается следующими соотношениями:

$$\Sigma_{ab} \leftrightarrow \varepsilon_{abc}Q_c, \qquad \Sigma_{0a} \leftrightarrow Q_{3+a}, \qquad \Sigma_0 \leftrightarrow Q_7, \qquad \Sigma_1 \leftrightarrow Q_8.$$

Над полем вещественных чисел все элементы алгебры A_8, задаваемые формулами (132), линейно независимы. Чтобы убедиться в этом, достаточно подвергнуть операторы (132) преобразованию

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\mu\nu} \to \Sigma'_{\mu\nu} = V\Sigma_{\mu\nu}V^{-1} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ &\Sigma_0 \to \Sigma'_0 = V\Sigma_0V^{-1} = 1, \qquad \Sigma_1 \to \Sigma'_1 = V\Sigma_1V^{-1} = \gamma_5, \end{aligned} \tag{134}$$

где

$$V = \exp[-(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu p^\mu/2m] = 1 - (1 - i\gamma_5)\gamma_\mu p^\mu/2m. \tag{135}$$

Теорема доказана.

Отметим, что формулы (132) не задают базис алгебры Ли над полем комплексных чисел, поскольку

$$(\Sigma_{ab} - i\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c})\Psi = (\Sigma_1 - i\Sigma_0)\Psi = 0, \tag{136}$$

где Ψ — произвольное решение уравнения (129).

Таким образом, уравнение Дирака обладает такой же негеометрической АИ, как и система уравнений Максвелла (12). Хотя операторы (132) включают производные по независимым переменным не выше первого порядка, они не порождают локальных преобразований волновой функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$. Если использовать обозначения Овсянникова [11, 12], то генераторы (132) можно классифицировать как дифференциальные операторы второго порядка, включающие производные вида $\partial^2/\partial x_\mu \partial \Psi_\alpha$.

Из доказанной теоремы следует, что уравнение Дирака инвариантно относительно восьмипараметрической группы преобразований:

$$\begin{aligned}
&\Psi \to (\cos\theta_{ab} - \gamma_a\gamma_b \sin\theta_{ab})\Psi + \\
&\qquad +(1/m)\sin\theta_{ab}(1 - i\gamma_5)(\gamma_a \partial\Psi/\partial x_b - \gamma_b \partial\Psi/\partial x_a), \\
&\Psi \to (\operatorname{ch}\theta_{0a} - \gamma_0\gamma_a \operatorname{sh}\theta_{0a})\Psi + \\
&\qquad +(1/m)\operatorname{sh}\theta_{0a}(1 - i\gamma_5)(\gamma_0 \partial\Psi/\partial x_a - \gamma_a \partial\Psi/\partial x_0), \\
&\Psi \to (\operatorname{ch}\theta_1 + i\gamma_5 \operatorname{sh}\theta_1)\Psi + (1/m)\operatorname{sh}\theta_1(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu \partial\Psi/\partial x_\mu, \\
&\Psi \to \exp(i\theta_0)\Psi,
\end{aligned} \tag{137}$$

где θ_0, θ_1, $\theta_{\mu\nu}$ — произвольные вещественные параметры. Преобразования (137) унитарны в индефинитной метрике

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi. \tag{138}$$

Итак, уравнение Дирака помимо инвариантности относительно группы Пуанкаре обладает дополнительной симметрией относительно преобразований (137), образующих представление группы $U(2) \otimes U(2)$. Принципиальное отличие преобразований (137) от преобразований Лоренца для биспинора Ψ состоит в том, что преобразованная функция зависит не только от Ψ (и параметров преобразования), но также от производных $\partial\Psi/\partial x_\mu$.

Возникает вопрос, нельзя ли объединить группу симметрии уравнения Дирака, задаваемую преобразованиями (137), и группу Пуанкаре? Оказывается, такое объединение возможно, поскольку операторы (131) и (132) образуют 18-мерную алгебру Ли.

Теорема 8. *Уравнение Дирака (129) инвариантно относительно 18-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (131), (132). Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (45а), (133) и приведенным ниже соотношениям (139)*

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, \Sigma_{\lambda\sigma}] = [P_\mu, \Sigma_\alpha] = [J_{\mu\nu}, \Sigma_\alpha] = 0, \\
&[J_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\lambda}).
\end{aligned} \tag{139}$$

Доказательство. Оно сводится к проверке справедливости соотношений (139), которую несложно осуществить, используя соотношения (130).

Из доказанного выше заключаем, что уравнение Дирака инвариантно относительно 18-параметрической группы преобразований вида (11). Эта группа изоморфна группе $P(1,3) \otimes U(2) \otimes U(2)$ и включает неоднородные преобразования Лоренца для биспинора $\Psi(x)$, а также преобразования, явный вид которых приведен в (137).

АИ уравнения Дирака в классе интегро-дифференциальных операторов. Покажем теперь, что в классе нелокальных (интегро-дифференциальных) преобразований симметрия уравнения Дирака еще выше. А именно, справедливо следующее утверждение [16, 18, 19].

Теорема 9. *Уравнение Дирака (129) инвариантно относительно алгебры заданной над полем комплексных чисел. Базисные элементы АИ принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов и задаются формулами:*

$$\begin{aligned} &\tilde{\Sigma}_{\mu\nu} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu)(1 - i\gamma_5 H/E)/2m, \\ &\tilde{\Sigma}_0 = 1, \qquad \tilde{\Sigma}_1 = H/E, \end{aligned} \tag{140}$$

где

$$H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m, \qquad E = \sqrt{H^2} = \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{141}$$

Вместо доказательства приведем явный вид оператора, диагонализующего уравнение (129) и одновременно преобразующего операторы (140) к представлению, в котором они не зависят от p_a:

$$V = \exp[iS_{0a} p_a \operatorname{arth}(p/E)/p] \times \exp[\gamma_a p_a \operatorname{arctg}(p/m)/p]. \tag{142}$$

С помощью оператора (142) получаем

$$\begin{aligned} &\tilde{\Sigma}'_{ab} = V\tilde{\Sigma}_{ab}V^{-1} = (i/2)\gamma_a\gamma_b, \qquad \tilde{\Sigma}'_1 = V\tilde{\Sigma}_1 V^{-1} = \gamma_0, \\ &\tilde{\Sigma}'_{0a} = V\tilde{\Sigma}_{0a}V^{-1} = (i/2)\gamma_4\gamma_a, \qquad \tilde{L}' = V\gamma_0 L V^{-1} = i(\partial/\partial t) - \gamma_0 E, \end{aligned} \tag{143}$$

где L — оператор Дирака (129). В представлении (143) утверждения теоремы становятся очевидными.

Операторы (143) в отличие от (132) задают базис алгебры Ли над полем комплексных чисел. Поэтому из теоремы 9 вытекает инвариантность уравнения (129) относительно 16-параметрической группы Ли, включающей преобразования вида:

$$\Psi' = \exp(i\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}\tilde{\theta}_{\mu\nu})\Psi, \qquad \Psi'' = \exp(i\tilde{\Sigma}_\alpha\tilde{\theta}_\alpha)\Psi, \tag{144}$$

где $\tilde{\theta}_{\mu\nu} = \theta^1_{\mu\nu} + i\theta^2_{\mu\nu}$, $\tilde{\theta}_\alpha = \theta^1_\alpha + i\theta^2_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $\theta^1_{\mu\nu}$, $\theta^2_{\mu\nu}$, θ^1_α, θ^2_α — вещественные параметры. Подставляя (140) в (144) и принимая во внимание тот факт, что квадрат любого из операторов (140) совпадает с единичным оператором, получаем преобразования (144) в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi' = (\cos\tilde{\theta}_{ab} - \gamma_a\gamma_b \sin\tilde{\theta}_{ab})\Psi + \\ &\qquad + \sum_\varepsilon (1 - i\varepsilon\gamma_5)\sin\tilde{\theta}_{ab}(\gamma_a\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_b - \gamma_a\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_a)/m, \\ &\Psi \to \Psi'' = (\operatorname{ch}\tilde{\theta}_{0b} - \gamma_0\gamma_b \operatorname{sh}\tilde{\theta}_{0b})\Psi + \\ &\qquad + \sum_\varepsilon (1 - i\varepsilon\gamma_5)\operatorname{sh}\tilde{\theta}_{0b}(\gamma_0\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_b - \gamma_b\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_0)/m, \\ &\Psi \to \Psi''' = \operatorname{ch}\tilde{\theta}_1\Psi + \sum_\varepsilon \varepsilon \operatorname{sh}\tilde{\theta}_1\Psi^\varepsilon, \qquad \Psi \to \Psi'''' = \exp(i\tilde{\theta}_0)\Psi, \end{aligned} \tag{145}$$

где $\Psi^\varepsilon = (1/2)(1 - \varepsilon H/E)\Psi$, $\varepsilon = \pm 1$, $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$, $\tilde{\theta}_\alpha$ — комплексные параметры. Преобразования (145) образуют группу локально изоморфную группе $GL(2, C) \otimes GL(2, C)$.

Операторы (140) в отличие от (132) не образуют замкнутой алгебры совместно с генераторами группы Пуанкаре (131). Однако генераторы (131) на множестве решений уравнения (129) можно представить также в форме:

$$\begin{aligned} &P_0 = H, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \qquad J_{0a} = tp_a - [x_a, H]_+/2. \end{aligned} \tag{146}$$

Операторы (140) и (146) удовлетворяют коммутационным соотношениям (45а), (133), (139) и, следовательно, задают базис алгебры $P(1,3) \oplus U(2) \oplus U(2)$.

Симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака. Рассмотрим восьмикомпонентное уравнение Дирака

$$\tilde{L}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \tilde{L} = \Gamma_\mu p^\mu - m, \tag{147}$$

где Γ_μ $(\mu = 0,1,2,3)$ — матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие совместно с Γ_4, Γ_5, Γ_6 алгебре Клиффорда.

Выбирая Γ_μ и $\tilde{\Psi}$ в виде:

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi^c \end{pmatrix}, \qquad \Psi^c = \gamma_2 \Psi^*, \tag{148}$$

здесь γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака, Ψ — четырехкомпонентная волновая функция, получаем из (147) систему уравнений, совпадающую с уравнением Дирака (129) и уравнением, сопряженным (129). В общем же случае, когда Γ_μ — произвольные матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие алгебре Клиффорда, уравнение (147) допускает самую различную интерпретацию, в том числе как уравнение движения частиц со спином 1 [45, 47, 48] и 3/2 [60].

В результате увеличения числа компонент волновой функции уравнение (147) обладает более высокой симметрией, чем уравнение Дирака (129). Помимо почти очевидной инвариантности относительно группы Пуанкаре, генераторы которой задаются формулами (131), где $S_{\mu\nu} = (i/4)[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$, уравнение (147) имеет скрытую негеометрическую симметрию, описываемую следующей теоремой.

Теорема 10. *Восьмикомпонентное уравнение Дирака (147) инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, заданной над полем комплексных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу дифференциальных операторов и задаются формулами:*

$$\begin{aligned} &\Sigma_{nl} = i[\Gamma_n, \Gamma_l]/2 + (1 + i\Gamma_6)(\Gamma_n p_l - \Gamma_l p_n)/m, \\ &\Sigma_0 = 1, \qquad l,n = 0,1,\ldots,5. \end{aligned} \tag{149}$$

Доказательство повторяет почти дословно доказательство теоремы 7. Подчеркнем, что по определению

$$p_{3+a}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_{3+a}}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \equiv 0,$$

поэтому часть генераторов (149), у которых l и $n > 3$, на множестве функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ сводится к числовым матрицам.

Генераторы Σ_{mn} и Σ_0 удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[\Sigma_{mn}, \Sigma_{m'n'}] = 2i(g_{mn'}\Sigma_{nm'} + g_{nm'}\Sigma_{mn'} - g_{mm'}\Sigma_{nn'} - g_{nn'}\Sigma_{mm'}), \\ &[\Sigma_0, \Sigma_{mn}] = 0. \end{aligned} \tag{150}$$

Алгебра (150) изоморфна алгебре $O(1,5) \oplus T_1 \sim GL(4)$, где T_1 — одномерная подалгебра, реализуемая единичной матрицей.

Операторы (149) образуют замкнутую алгебру совместно с генераторами группы Пуанкаре, поскольку выполняется:

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, \Sigma_{mn}] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, \Sigma_{m'n'}] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, \Sigma_{m'\lambda}] = i(g_{\mu\lambda}\Sigma_{m'\nu} - g_{\nu\lambda}\Sigma_{m'\mu}),\\
&[J_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\rho}] = i(g_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\lambda}),
\end{aligned}
\tag{151}
$$

где $m, n = 0, 1, \dots, 6$; $3 < m'$, $n' \le 6$; $\mu, \nu, \rho, \lambda \le 3$. Отсюда следует, в частности, что уравнение (147) инвариантно относительно 26-мерной группы преобразований, включающей неоднородную группу Лоренца и преобразования вида:

$$
\begin{aligned}
&\tilde\Psi \to \tilde\Psi' = (\cos\theta_{kl} - \Gamma_k\Gamma_l \sin\theta_{kl})\Psi+\\
&\qquad +i(1+i\Gamma_6)(\Gamma_k\partial\Psi/\partial x_l - \Gamma_l\partial\Psi/\partial x_k)\sin\theta_{kl}/m, \qquad k, l \ne 0,\\
&\tilde\Psi \to \tilde\Psi'' = (\operatorname{ch}\theta_{0k} - \Gamma_0\Gamma_k \operatorname{sh}\theta_{0k})\Psi+\\
&\qquad +i(1+i\Gamma_6)(\Gamma_0\partial\Psi/\partial x_k - \Gamma_k\partial\Psi/\partial x_0)\operatorname{sh}\theta_{0k}/m,\\
&\tilde\Psi \to \tilde\Psi''' = \exp(i\theta_0)\Psi,
\end{aligned}
\tag{152}
$$

где θ_{kl}, θ_0, θ_{0k} — произвольные параметры. При $k, l > 3$ формулы (152) задают матричные преобразования функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$.

В полной аналогии с изложенным в предыдущем пункте можно показать, что уравнение (147) инвариантно относительно 42-мерной алгебры Ли, изоморфной $P(1,3) \otimes GL(4, C) \otimes GL(4, C)$. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов и задаются формулами (131), где $S_{\mu\nu} = i[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]/4$, и приведенными ниже формулами

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{kl} = i[\Gamma_k, \Gamma_l]/2 + (\Gamma_k p_l - \Gamma_l p_k)(1 + i\Gamma_6 H/E)/m,\\
&\Sigma_{5+k\,5+l} = \Sigma_{kl}\Sigma_1, \qquad \Sigma_0 = 1, \qquad \Sigma_0 = H/E,
\end{aligned}
\tag{153}
$$

где $H = \Gamma_0\Gamma_a p_a + \Gamma_0 m$, $k, l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Симметрия уравнения Дирака для безмассовой частицы. Рассмотрим теперь уравнение Дирака в том особом случае, когда параметр m, характеризующий массу частицы, равен нулю.

Хорошо известно, что уравнение Дирака при $m = 0$ инвариантно относительно 16-мерной конформной алгебры. Здесь покажем, что симметрия этого уравнения выше. Если расширить класс операторов, которому принадлежат базисные элементы АИ, включив в него интегро-дифференциальные операторы, то можно доказать следующее утверждение.

Теорема 11 [31]. *Уравнение Дирака (129) при $m = 0$ инвариантно относительно 23-мерной алгебры Ли, изоморфной алгебре $C(1,3) \oplus A_8$. Базисные элементы этой АИ принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов и задаются следующими формулами:*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = p_0 = i\partial/\partial t, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + iH(1 - i\gamma_5)\gamma_a\gamma_b p_b/2p^2 + (1/2)\hat\Sigma_{0a},\\
&D = x_\mu p^\mu + i,\\
&K_\mu = \left(-x_\nu x^\nu + J_{ab}S_{ab}p^{-2} + p^{-2}\right)p_\mu + 2[x_\mu + (1 - \delta_{\mu 0})(1 - \gamma_0)S_{\mu b}p_b p^{-1}]D,\\
&\hat\Sigma_{0a} = \gamma_4(p_a + \gamma_0 S_{ab}p_b)/p, \qquad \Sigma_0 = 1, \qquad \hat\Sigma_1 = iH/p, \qquad \hat\Sigma_{ab} = i\Sigma_1\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c},
\end{aligned}
\tag{154}
$$

где

$$H = \gamma_0\gamma_a p_a, \qquad p = \sqrt{H^2} = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}.$$

Приведем схему доказательства. С помощью преобразования

$$Q_A \to Q'_A = WQ_AW^{-1}, \qquad \hat{L} \to \hat{L}' = WLW^{-1}, \qquad \Psi \to \Psi' = W\Psi,$$

где Q_A — произвольный генератор из множества, заданного формулами (154):

$$\begin{aligned} &W = W^{-1} = [1 + \gamma_0 + (1 - \gamma_0)\varepsilon_{abc}S_{ab}\hat{p}_c], \\ &\hat{L} = \gamma_0 L = i\partial/\partial t - H, \qquad \hat{p}_c = p_c/p, \end{aligned} \tag{155}$$

приводим уравнение (129) (при $m = 0$) и операторы (154) к следующей форме:

$$\begin{aligned} &L'\Psi' = 0, \qquad L' = i\partial/\partial t - i\gamma_5 p, \qquad P'_\mu = P_\mu, \\ &J'_{ab} = J_{ab}, \qquad J'_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned} &D' = D, \qquad K'_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu, \\ &\hat{\Sigma}'_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2, \qquad \hat{\Sigma}'_0 = 1, \qquad \hat{\Sigma}'_1 = \gamma_5. \end{aligned} \tag{157}$$

Операторы (157) удовлетворяют коммутационным соотношениям (45а), (133), (151) и условиям инвариантности уравнения (156):

$$\begin{aligned} &[L', P'_\mu] = [L', J'_{\mu\nu}] = [L', \Sigma'_{\mu\nu}] = [L', \Sigma'_\alpha] = 0, \\ &[L', K'_0] = 2i[x_0 + (x_a p_a - i)i\gamma_5 p^{-1}]L', \\ &[L', K'_a] = 2i(x_a + ix_0\gamma_5 p_a/p)L', \\ &[L', D'] = iL', \qquad [L', J'_{0a}] = \gamma_5\hat{p}_a L'. \end{aligned} \tag{158}$$

Отсюда заключаем, что операторы (154) образуют АИ уравнения (129) с $m = 0$, изоморфную $C(1,3) \oplus A_8$.

Таким образом, уравнение Дирака для безмассовой частицы инвариантно относительно 23-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры $C(1,3)$ и A_8. Такой же симметрией, как было показано выше, обладают уравнения Максвелла (12). Можно показать (например, используя метод, предложенный в [47, 48]), что указанной симметрией обладают все релятивистские уравнения для безмассовых полей, инвариантные относительно преобразований P, T и C.

Симметрия уравнения Кеммера–Дэффина–Петье. Рассмотрим теперь уравнение Кеммера–Дэффина–Петье

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{159}$$

где Ψ — десятикомпонентная волновая функция, β_μ — матрицы размерности 10×10, удовлетворяющие алгебре:

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = i(g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\nu\lambda}\beta_\mu). \tag{160}$$

Хорошо известно, что уравнение (159) инвариантно относительно группы Пуанкаре. Генераторы этой группы на множестве решений сравнения (159) имеют вид, задаваемый формулами (131), где $S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu)$. Оказывается, что уравнение (159) обладает также скрытой (негеометрической) симметрией, причем более широкой, чем уравнение Дирака.

Теорема 12. *Уравнение КДП (159) инвариантно относительно 8-мерной алгебры Ли, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу дифференциальных операторов и задаются формулами:*

$$\begin{aligned}&A_b^a = C_{ad}C_{db}, \qquad \tilde{A}_b^a = \varepsilon_{adc}C_{0b}C_{dc}/2, \quad a \neq b, \qquad A_a^a = 2/3 - C_{bc}^2,\\ &\tilde{A}_a^a = \varepsilon_{adc}C_{0a}C_{dc}/6 - C_{0a}C_{bc}, \qquad (a,b,c) - \text{цикл } (1,2,3),\\ &A_0 = 1, \qquad \tilde{A}_0 = \varepsilon_{abc}C_{0a}C_{bc}/4, \qquad a,b,c,d = 1,2,3,\end{aligned} \tag{161}$$

где

$$\begin{aligned}&C_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + (a_\mu p_\nu - a_\nu p_\mu)/m, \qquad S_{\mu\nu} = i[\beta_\mu, \beta_\nu], \qquad a_\mu = S_{4\mu} + iS_{5\mu},\\ &S_{4\mu} = i\beta_\mu, \qquad S_{5\mu} = i[\beta_5, \beta_\mu], \qquad \beta_5 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma/4!.\end{aligned} \tag{162}$$

Доказательство. Используя тот факт, что матрицы β_μ, β_5 удовлетворяют алгебре КДП (160), а матрицы S_{kl} $(k,l = 0,1,\ldots,5)$ — алгебре $O(1,5)$, получаем

$$[C_{\mu\nu}, L_1] = f_{\mu\nu}^1 L, \qquad f_{\mu\nu}^1 = i(L+2m)(\beta_\mu p_\nu - \beta_\nu p_\mu)/m^2. \tag{163}$$

Из (163) заключаем, что операторы $C_{\mu\nu}$ (а следовательно, и A_a^b, $\tilde{A}_a^b$, A_0, $\tilde{A}_0$ (161)) удовлетворяют условию инвариантности уравнения (159).

Операторы (161) подчиняются коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}&[A_0, A_b^a] = [A_0, \tilde{A}_b^a] = [\tilde{A}_0, A_b^a] = [\tilde{A}_0, \tilde{A}_b^a] = [A_0, \tilde{A}_0] = 0,\\ &[A_a^b, A_c^d] = -[\tilde{A}_a^b, \tilde{A}_c^d] = i f_{abcd}^{kl} A_k^l, \qquad [A_a^b, \tilde{A}_c^d] = i f_{abcd}^{kl}\tilde{A}_k^l,\end{aligned} \tag{164}$$

где $a,b,c,d,k,l = 1,2,3$; f_{abcd}^{kl} — структурные константы группы $SU(3)$ в базисе Окубо.

Соотношения (164) можно проверить непосредственно. Проще всего такая проверка осуществляется с помощью предварительного преобразования $\lambda_n \to V\lambda_n V^{-1}$, где $V = \exp[ia_\mu p^\mu/m]$, при этом $C_{\mu\nu} \to C'_{\mu\nu} = VC_{\mu\nu}V^{-1} = i[\beta_\mu, \beta_\nu]$. Теорема доказана.

Итак, помимо симметрии относительно алгебры $P(1,3)$ уравнение КДП (159) инвариантно также относительно 18-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой заданы формулами (161). Отсюда следует, что уравнение КДП инвариантно относительно преобразований вида:

$$\begin{aligned}&\Psi \to \Psi' = \exp(iA_a^b\theta_a^b)\Psi, \qquad \Psi \to \Psi'' = \exp(iA_0\theta_0)\Psi,\\ &\Psi \to \Psi''' = \exp(i\tilde{A}_a^b\tilde{\theta}_a^b)\Psi, \qquad \Psi \to \Psi^{\mathrm{IV}} = \exp(i\tilde{A}_0\tilde{\theta}_0)\Psi,\end{aligned} \tag{165}$$

где θ_a^b, $\tilde{\theta}_a^b$, θ_0, $\tilde{\theta}_0$ — вещественные параметры. Согласно (164) преобразования (165) образуют 18-параметрическую группу Ли, локально изоморфную $U(3)\otimes U(3)$.

Операторы (164) образуют совместно с генераторами группы Пуанкаре замкнутую 28-мерную алгебру Ли. Это следует из соотношений

$$[P_\mu, C_{\lambda\sigma}] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, C_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}C_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}C_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}C_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}C_{\mu\lambda}). \tag{166}$$

Таким образом, уравнение КДП инвариантно относительно 28-мерной группы Ли, включающей неоднородные преобразования Лоренца и преобразования (165).

Преобразования (165) можно легко найти в явном виде, поскольку соответствующие экспоненты сводятся к полиномам от $(A_a^b\theta_a^b)^n$, $(\tilde{A}_a^b\tilde{\theta}_a^b)^n$, $(A_0\theta_0)^n$, $(\tilde{A}_0\tilde{\theta}_0)^n$, $n = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}
&\exp(iA_a^b\theta_a^b) = 1 + (\cos\theta_a^b - 1)(A_a^b)^2 + i\sin(\theta_a^b)A_a^b,\\
&\exp(i\tilde{A}_a^b\tilde{\theta}_a^b) = 1 + (\operatorname{ch}\tilde{\theta}_a^b - 1)(\tilde{A}_a^b)^2 + \operatorname{sh}(\tilde{\theta}_a^b)\tilde{A}_a^b,\\
&\exp(iA_0\theta_0) = \exp(i\theta_0), \qquad \exp(i\tilde{A}_0\tilde{\theta}_0) = 1 + (\operatorname{ch}\tilde{\theta}_0 - 1)\tilde{A}_0^2 + \operatorname{sh}(\tilde{\theta}_0)\tilde{A}_0.
\end{aligned} \tag{167}$$

Нетрудно убедиться, что общее преобразование функции $\Psi(x)$, включающее преобразования Лоренца и (165), имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Psi(x) \to \Psi'(x') = A\Psi(x) + B\Psi(x') + C_\mu\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_\mu} + \\
&+ D_{\mu\nu}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu} + E_{\mu\nu\lambda}\frac{\partial^3\Psi(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu\partial x_\lambda} + F_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial^4\Psi(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu\partial x_\lambda\partial x_\sigma},
\end{aligned} \tag{168}$$

где A, B, C_μ, $D_{\mu\nu}$, $E_{\mu\nu\lambda}$, $F_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — числовые матрицы.

Негеометрическая симметрия уравнений Дирака и КДП для частиц, взаимодействующих с внешним полем. До сих пор в этой главе исследовалась негеометрическая симметрия уравнений Дирака и КДП для невзаимодействующих частиц. Можно показать, что введение минимального взаимодействия в общем случае приводит к сужению негеометрической симметрии уравнений движения. Однако для некоторых классов внешних полей такая симметрия сохраняется. Кроме того, негеометрической симметрией обладают уравнения, описывающие аномальные взаимодействия типа Паули.

Здесь приведем без доказательства некоторые из результатов, полученных в [25, 27], относящихся к симметрии уравнений движения для взаимодействующих частиц.

Теорема 13. *Уравнение Дирака с взаимодействием типа Паули:*

$$L\Psi = 0, \qquad L = \gamma_\mu\pi^\mu + (i/4m)(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu} + m, \tag{169}$$

где $\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, $F_{\mu\nu} = -i[\pi_\mu, \pi_\nu]$, A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, инвариантно относительно алгебры A_8. Явный вид базисных элементов этой алгебры можно получить из (132) с помощью замены $p_\mu \to \pi_\mu$. Итак, уравнение (169) обладает такой же негеометрической симметрией, как уравнение Дирака для невзаимодействующей частицы (129).

Теорема 14. *Уравнение Дирака для частицы в однородном магнитном поле:*

$$\pi_0\Psi = \hat{H}\Psi, \qquad \hat{H} = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m, \tag{170}$$

где

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_3 = p_3, \quad \pi_1 = p_1 - eA_1(x_1, x_2), \quad \pi_2 = p_2 - eA_2(x_1, x_2),$$

инвариантно относительно алгебры A_8. Ее базисные элементы задаются следующими интегро-дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{12} = i\gamma_3\gamma_0\gamma_a\pi_a/|\gamma_0\gamma_a\pi_a|, \qquad \Sigma_{31} = i\gamma_5(\gamma_3 m + p_3)/(p_3^2 + m^2)^{1/2},\\
&\Sigma_{32} = i\Sigma_{12}\Sigma_{31}, \quad \Sigma_{0a} = i\varepsilon_{abc}\Sigma_{bc}H/2|H|, \quad \Sigma_0 = 1, \quad \Sigma_1 = iH/|H|.
\end{aligned} \tag{171}$$

Отметим, что аналогичный результат справедлив для уравнения Дирака, описывающего движение частицы в постоянном электрическом поле.

Рассмотрим теперь обобщенное уравнение КДП, описывающее движение частицы со спином 1, зарядом e и аномальным моментом q в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H} = (0, 0, H)$:

$$[\beta_\mu \pi^\mu + m(eq/4m)S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\Psi = 0, \tag{172}$$

где

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_1 = p_1 - eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2S_{12}H.$$

Теорема 15. *Уравнение (172) имеет шесть линейно-независимых интегралов движения, связанных с негеометрической симметрией. При $q = 1$ уравнение (172) инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли, включающей подалгебру $O(4)$.*

Явный вид базисных элементов, перечисленных в теореме АИ, не будем приводить здесь из-за их громоздкости (см. [25, 27]).

5. Законы сохранения

Хорошо известно, что из симметрии уравнений Максвелла относительно группы Пуанкаре следует существование некоторых интегральных комбинаций из векторов напряженности электрического и магнитного полей, которые сохраняются во времени. В этом разделе наряду с классическими законами сохранения (энергии, импульса, углового момента электромагнитного поля) обсуждаются новые величины, возникающие вследствие симметрии уравнений Максвелла относительно алгебры A_8. Рассматриваются также новые интегралы движения для поля Дирака, связанные с негеометрической симметрией уравнения Дирака.

Классические интегралы движения электромагнитного поля. Из уравнений Максвелла (12) для электромагнитного поля в вакууме следует сохранение во времени следующих величин:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \int d^3x \, \left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)/2, \tag{173а}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int d^3x \, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \tag{173б}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \int d^3x \, \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \tag{173в}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \int d^3x \, \left[t\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)/2\right], \tag{173г}$$

которые определяют энергию, импульсы, угловой момент и центр энергии поля.

Существование классических интегралов движения, перечисленных в (173), вытекает из симметрии уравнений Максвелла относительно группы Пуанкаре. Исходя из лагранжевой формулировки этих уравнений и используя теорему Нетер, можно показать, что сохранение энергии (173а) и импульса (173б) непосредственно следует из инвариантности лагранжиана относительно сдвигов по временной и пространственным координатам, сохранение момента — следствие инвариантности лагранжиана относительно пространственных поворотов и, наконец, сохранение центра энергии вытекает из инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Возникает естественный вопрос: какие сохраняющиеся величины связаны с симметрией уравнений Максвелла относительно негеометрических преобразований? Для ответа на этот вопрос невозможно воспользоваться теоремой Нетер, поскольку негеометрические преобразования (99), (100) имеют нелокальный характер. Следовательно, приходится применять другой метод нахождения сохраняющихся величин, который заключается в вычислении средних значений базисных элементов АИ в соответствующем скалярном произведении. Покажем, как в таком подходе можно получить классические интегралы движения (173).

Будем исходить из формулировки уравнений Максвелла в импульсном пространстве (73). Генераторы группы Пуанкаре на множестве решений уравнений (73) задаются формулами

$$\begin{aligned} &P_0 = -\sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} \equiv \hat{H}, \qquad P_a = p_a, \\ &J_a = -i\left(\boldsymbol{p}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right)_a + S_a, \qquad J_{0a} = tp_a - i\hat{H}\frac{\partial}{\partial p_a}, \end{aligned} \tag{174}$$

где p_a — независимые переменные, $-\infty < p_a < \infty$, σ_2 и S_a — матрицы (15). Операторы (174) эрмитовы относительно инденфинитного скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int d^3p\, \varphi_1^\dagger(t,\boldsymbol{p})(\hat{H}/2p^2)\varphi_2(t,\boldsymbol{p}), \tag{175}$$

где $\varphi_\alpha(t,\boldsymbol{p})$ — произвольные квадратично интегрируемые решения уравнений (73).

Из инвариантности уравнений (73) относительно алгебры (174) следует сохранение во времени средних значений операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ в метрике (175):

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Q_A\rangle = 0,$$

где

$$\langle Q_A\rangle = (\varphi, Q_A\varphi) \equiv \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})(\hat{H}/2p^2)Q_A\varphi(t,\boldsymbol{p}), \tag{176}$$

здесь Q_A — любой из генераторов (174). Подставляя в (176) выражения (174) для генераторов группы $P(1,3)$ и используя для вектор-функции $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ обозначения (98), после несложных вычислений получим:

$$\langle P_0\rangle = \mathcal{E}, \qquad \langle P_a\rangle = \mathcal{P}_a, \qquad \langle J_a\rangle = \mathcal{L}_a, \qquad \langle J_{0a}\rangle = \mathcal{N}_a, \tag{177}$$

где $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{L}_a$ и $\mathcal{N}_a$ — интегралы движения (173).

Приведем доказательство первой из формул (177). Подставляя в (176) выражение (174) для генератора $Q_A = P_0 = \hat{H}$ и принимая во внимание, что $\hat{H}^2\varphi = p^2\varphi$, находим

$$\langle P_0\rangle = (\varphi, H\varphi) \equiv \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\varphi(t,\boldsymbol{p})/2. \tag{178}$$

Подставляя в (178) выражение (98) для вектора-функции $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ и учитывая (75), получаем

$$\langle P_0\rangle = \int d^3p\,[\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]/2. \tag{179}$$

Выражая $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$ с помощью преобразования Фурье через $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$ и выполняя интегрирование по $\boldsymbol{p}$ с помощью соотношения

$$\int d^3p\,\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) = (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{x}),$$

приходим к формуле

$$\langle P_0\rangle = \int d^3x\,\left[\boldsymbol{E}^2(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{H}^2(t,\boldsymbol{x})\right]/2. \tag{180}$$

Аналогично можно доказать все остальные соотношения (173), (177).

Интегралы движения, вытекающие из негеометрической симметрии уравнений Максвелла. Классические интегралы движения для электромагнитного поля можно представить как средние значения (в квантовомеханическом смысле) базисных элементов алгебры $P(1,3)$. Таким же образом можно вычислить новые интегралы движения, связанные с негеометрической симметрией уравнения Максвелла, рассматриваемой в разд. 3.

Найдем сохраняющиеся величины, соответствующие базисным элементам алгебры A_8. Операторы (78) коммутируют с L_1 из уравнения (73а), и сохраняются во времени следующие интегралы:

$$\langle Q_A\rangle = \int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})MQ_A\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p, \tag{181}$$

где M — произвольный оператор, определенный на множестве решений уравнений (73), Q_A — операторы (78).

Ограничимся выбором $M = \hat{H}/p$. В этом случае (181) определяет средние значения операторов (78) в той же самой метрике, в которой заданы средние значения генераторов группы Пуанкаре (см. (173), (176), (177)).

Вычислим последовательно средние значения всех операторов (78). Для того чтобы получить вещественные величины, умножим Q_A (78) на i и обозначим $iQ_A = \tilde{Q}_A$. Выбирая $A=3$, $\tilde{Q}_A = iQ_3 = -\sigma_2$, получаем

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_3\rangle &= -\int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})(\hat{H}/2p^2)\sigma_2\varphi(t,\boldsymbol{p}) = \\ &= -\int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p^2.\end{aligned} \tag{182}$$

Подставив в (182) явный вид матриц S_a (15) и выражение (98) для функции $\varphi(t,\boldsymbol{p})$, придем к следующей формуле:

$$\langle\tilde{Q}_3\rangle = i\int d^3p\,\boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{E}^*(t,\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}^*(t,\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]/2p^2. \tag{183}$$

Если потребовать, чтобы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяли условию вещественности, то согласно (183), (75):

$$\langle \tilde{Q}_3 \rangle = i \int d^3p\, \boldsymbol{p} \cdot [\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]. \tag{184}$$

Таким образом, из инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича следует сохранение во времени интеграла (184). Найдем теперь среднее значение оператора Q_2 (73):

$$\langle \tilde{Q}_2 \rangle = \int d^3p \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p}) \sigma_3 D \varphi(t,\boldsymbol{p})/2p. \tag{185}$$

Используя явный вид матрицы D (82), (83) и принимая во внимание (73), (98), имеем

$$\varphi'(t,\boldsymbol{p}) = D\varphi = D_1\varphi = (i/\delta) \begin{pmatrix} p_2p_3(p_3\dot{H}_3 - p_2\dot{H}_2) \\ p_1p_3(p_1\dot{H}_1 - p_3\dot{H}_3) \\ p_1p_2(p_2\dot{H}_2 - p_1\dot{H}_1) \\ -p_2p_3(p_3\dot{E}_3 - p_2\dot{E}_2) \\ -p_1p_3(p_1\dot{E}_1 - p_3\dot{E}_3) \\ -p_1p_2(p_2\dot{E}_2 - p_1\dot{E}_1) \end{pmatrix} + (f/\delta) \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \tag{186}$$

где δ и f — функции (79), (83), $\dot{H}_a = \partial H_a/\partial t$, $\dot{E}_a = \partial E_a/\partial t$. Подставляя в (185) выражение (98) для $\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})$, а также явный вид матрицы σ_3 и функции $\varphi'(t,\boldsymbol{p})$ (186), получаем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q}_2 \rangle = \int d^3p \Bigg\{ & f\,[\boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{E}^*(t,\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})] + \\ & + \sum_a p_a^2 \left[\dot{H}_a^*(t,\boldsymbol{p}) \cdot \dot{H}_a(t,\boldsymbol{p}) - \dot{E}_a^*(t,\boldsymbol{p}) \cdot \dot{E}_a(t,\boldsymbol{p}) \right] \Bigg\} \Big/ 2\delta p. \end{aligned} \tag{187}$$

Если теперь наложить на $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$ условия вещественности (75), то интеграл (187) принимает вид:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q}_2 \rangle = \int d^3p \Bigg\{ & f\,[\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p})] + \\ & + \sum_a p_a^2 \left[\dot{E}_a(t,\boldsymbol{p}) \cdot \dot{E}_a(t,-\boldsymbol{p}) - \dot{H}_a(t,\boldsymbol{p}) \cdot \dot{H}_a(t,-\boldsymbol{p}) \right] \Bigg\} \Big/ 2\delta p. \end{aligned} \tag{188}$$

Совершенно аналогично получаем, что:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q}_1 \rangle &= \int d^3p \left[f\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p}) + \sum_a p_a^2 \dot{E}_a(t,-\boldsymbol{p}) \cdot \dot{H}_a(t,\boldsymbol{p}) \right] \Big/ \delta p, \\ \langle \tilde{Q}_8 \rangle &= \int d^3p\, [\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]/2p, \\ \langle \tilde{Q}_4 \rangle &= \langle \tilde{Q}_5 \rangle = \langle \tilde{Q}_6 \rangle = \langle \tilde{Q}_7 \rangle = 0. \end{aligned} \tag{189}$$

Соотношения (189) справедливы только для тех векторов $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$, которые удовлетворяют условию (75). При комплексных $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ интегралы $\langle Q_B\rangle$ ($B=4,5,6,7$) не равны нулю, но задают некоторые сохраняющиеся величины, явный вид которых здесь не приводится.

Формулы (184), (188), (189) определяют интегральные комбинации фурье-образов компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей, сохраняющиеся во времени в силу уравнений Максвелла. С помощью преобразования Фурье эти сохраняющиеся величины можно выразить через $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$. Так, для $\langle\hat{Q}_1\rangle$ получаем

$$\begin{gathered}\langle\tilde{Q}_1\rangle=(2\pi)^{-3}\int d^3x\,d^3x'\,d^3p\,(\delta p)^{-1}\times\\ \times\left\{f\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}')+\sum_a p_a^2\dot{E}_a(t,\boldsymbol{x})\dot{H}_a(t,\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\right\}.\end{gathered}\tag{190}$$

В отличие от классических интегралов движения (173) сохраняющаяся величина (190) зависит не только от напряженности электромагнитного поля, но, грубо говоря, также от бесконечного числа производных $\partial E/\partial x_a$, $\partial H/\partial x_a$, $\partial^2E/\partial x_a\partial x_b$, $\partial^2H/\partial x_a\partial x_b$, ...

Исходя из АИ уравнений Максвелла, задаваемой соотношениями (78), можно построить также такие интегралы движения, которые зависят от конечного числа производных. Воспользуемся неоднозначностью в определении оператора M, входящего в (181), и выберем

$$M=\begin{cases}\hat{H}\delta, & A=1,2,\\ \hat{H}p, & A=3,\\ \hat{H}, & A=8,\end{cases}\tag{191}$$

где $\hat{H}$ и δ заданы (174) и (79). Поступая далее по аналогии с (181)–(190), получаем следующие сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_1\rangle'&=\int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}\delta\hat{Q}_1\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p=\\ &=\sum_{\substack{a,\,b,\,c\\ b,\,c\neq a}}\int d^3x\left(\frac{\partial^2E_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2H_a}{\partial x_c^2}-\frac{\partial\dot{E}_a}{\partial x_a}\frac{\partial\dot{H}_a}{\partial x_a}\right),\end{aligned}\tag{192а}$$

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_2\rangle'&=\int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}\delta\tilde{Q}_2\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p=\sum_{\substack{a,\,b,\,c\\ b,\,c\neq a}}\int d^3x\left(\frac{\partial^2E_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2E_a}{\partial x_c^2}-\right.\\ &\left.-\frac{\partial^2H_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2H_a}{\partial x_c^2}+\frac{\partial\dot{H}_a}{\partial x_a}\frac{\partial\dot{H}_a}{\partial x_a}-\frac{\partial\dot{E}_a}{\partial x_a}\frac{\partial\dot{E}_a}{\partial x_a},\right),\end{aligned}\tag{192б}$$

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_3\rangle'&=\int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}pQ_3\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p=\\ &=\int d^3x\,[\dot{\boldsymbol{E}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\cdot\dot{\boldsymbol{H}}(t,\boldsymbol{x})]/2,\end{aligned}\tag{192в}$$

$$\langle\tilde{Q}_8\rangle' = \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}Q_8\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p = \int d^3x\, \left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)/2. \tag{192г}$$

Итак, помимо классических интегралов движения (192) в силу уравнений Максвелла сохраняются во времени еще три независимые интегральные величины, задаваемые (192а)–(192в) (что же касается (192г), то этот интеграл совпадает с (173 а)). Вопрос о физической интепретации величин (192а)–(192в) пока остается открытым.

Отметим еще, что законы сохранения величин (192а)–(192в) можно сформулировать с помощью уравнения непрерывности:

$$p_\mu j_a^\mu = 0, \tag{193}$$

где

$$j_a^0 = \varphi^\dagger B_a\varphi, \qquad j_a^b = \varphi^\dagger\sigma_2 S_b B_a\varphi,$$

B_a $(a = 1,2,3)$ — дифференциальные операторы, коммутирующие с $L_1 = i\partial/\partial t - \hat{H} = i\partial/\partial t + \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ (12а),

$$B_1 = -\tilde{D}\sigma_1, \qquad B_2 = -\tilde{D}\sigma_3, \qquad B_3 = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{194}$$

здесь

$$\tilde{D} = \sum_{a\neq b\neq c}\left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right].$$

Ввиду коммутативности операторов (194) с L_1 (12а) уравнения (193) следуют непосредственно из (12).

Законы сохранения для поля Дирака. Найдем теперь сохраняющиеся величины, связанные с негеометрической симметрией уравнения Дирака.

Любому эрмитову оператору Q, определенному на множестве решений уравнений Дирака (129), можно поставить в соответствие 4-вектор тока

$$j_\mu^\theta = \bar{\Psi}\gamma_\mu Q\Psi, \tag{195}$$

где $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0$. Нетрудно убедиться, что если оператор Q удовлетворяет условию инвариантности уравнения Дирака (129), то для тока (195) справедливо уравнение непрерывности (193), откуда в силу теоремы Остроградского–Гаусса вытекает сохранение во времени интеграла

$$I^\theta = \int d^3x\,\bar{\Psi}\gamma_0 Q\Psi = \int d^3x\;\Psi^\dagger Q\Psi. \tag{196}$$

Выбирая в качестве $\{Q\}$ генераторы группы Пуанкаре, получаем отсюда законы сохранения энергии, импульса, углового момента и центра энергии электронно-позитронного поля.

Возникает законный вопрос, какие новые сохраняющиеся величины можно поставить в соответствие базисным элементам негеометрической АИ уравнения Дирака, задаваемым (132). Поскольку на множестве решений уравнений Дирака выполняется (136), достаточно рассмотреть только четыре из восьми операторов (132), например, Σ_{ab} и Σ_0 $(a,b = 1,2,3)$.

Поскольку операторы Σ_{ab} (132) неэрмитовы, рассмотрим сохраняющиеся величины, соответствующие инвариантным операторам:

$$\tilde{\Sigma}_{ab} = M\Sigma_{ab}, \qquad \tilde{\Sigma}_0 = M\Sigma_0, \tag{197}$$

где

$$M = (H + 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})/m, \qquad H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m, \qquad S_a = i\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c/2.$$

Оператор M однозначно (с точностью до множителя, пропорционального единичной матрице) определяется требованиями, чтобы операторы (197) были эрмитовы и удовлетворяли условию инвариантности уравнения Дирака.

Подставляя (197) в (196), получаем

$$\begin{aligned} &C_a = (1/4)\varepsilon_{abc}\tilde{\Sigma}_{bc} = \gamma_0 S_a + (1 - i\gamma_5)p_a/2m, \\ &C_0 = \tilde{\Sigma}_0/2 = (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + H/2)/m, \end{aligned} \tag{198}$$

а соответствующий ток (196):

$$\begin{aligned} j_\mu^a &= \bar{\Psi}\gamma_\mu C_a\Psi = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_0 S_a\Psi - \\ &\quad - i[\bar{\Psi}\gamma_\mu(1 - i\gamma_5)\partial\Psi/\partial x_a - (\partial\bar{\Psi}/\partial x_a)\gamma_\mu(1 - i\gamma_5)\Psi]/4m, \\ j_\mu^0 &= \bar{\Psi}\gamma_\mu C_0\Psi = -i[\bar{\Psi}\gamma_\mu S_a\partial\Psi/\partial x_a - \\ &\quad - (\partial\bar{\Psi}/\partial x_a)\gamma_\mu S_a\Psi + (\partial\bar{\Psi}/\partial t)\gamma_\mu\Psi/2 - \bar{\Psi}\gamma_\mu(\partial\Psi/\partial t)/2]/2m. \end{aligned} \tag{199}$$

В силу уравнения Дирака (129) и ввиду коммутативности C_μ (198) с оператором $i\partial/\partial t - H$ токи j_μ^ν (199) удовлетворяют уравнению непрерывности (193), откуда следует, в частности, сохранение во времени интегральных величин:

$$\begin{aligned} I^a &= \int d^3x\, j_0^a = \int d^3x\, \bar{\Psi}S_a\Psi - \\ &\quad - i\int d^3x\, \left[\Psi^\dagger(1 - i\gamma_5)\partial\Psi/\partial x_a - (\partial\Psi^\dagger/\partial x_a)(1 - i\gamma_5)\Psi\right]/4m. \end{aligned} \tag{200}$$

В отличие от вектора спина дираковского поля, который получается при использовании лагранжева формализма и теоремы Нетер, интегральные комбинации (200) включают производные от биспинора и сохраняются во времени.

Отметим, что операторы (198) можно представить в форме

$$C_\mu = \check{S}_\mu + p_\mu/2,$$

где операторы $\check{S}_\mu$ совпадают с ковариантными операторами спина Фрадкина–Гуда [62].

1. Heaviside O., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423.
2. Larmor I., Collected papers, London, 1928.
3. Rainich G.I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
4. Лоренц Г.А., В кн.: Принцип относительности. Сб. работ классиков релятивизма, М., Атомиздат, 1973, с. 167.
5. Пуанкаре А., Там же, с. 90.
6. Пуанкаре А., Там же, с. 118.
7. Эйнштейн А., Там же, с. 97.

8. Bateman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223.
9. Cuningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
10. Lie S., *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328.
11. Овсянников Л.В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
12. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1968.
13. Ибрагимов Н.Х., *Докл. АН СССР*, 1968, **178**, 566.
14. Ибрагимов Н.Х., *Докл. АН СССР*, 1969, **185**, 1220.
15. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, 3.
16. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo cimento*, 1974, **11**, 508.
17. Фущич В.И., *Докл. АН СССР*, 1976, **230**, 570.
18. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., *ТМФ*, 1976, **29**, 82.
19. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 347.
20. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, 844.
21. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Докл. АН СССР*, 1977, **232**, 800.
22. Фущич В.И., Онуфрийчук С.П., *Докл. АН СССР*, 1977, **235**, 1056.
23. Фущич В.И., Никитин А.Г., *Докл. АН СССР*, 1978, **238**, 46.
24. Фущич В.Н., В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Институт математики АН УССР, 1978, 5.
25. Никитин А.Г., Там же, 81.
26. Никитин А.Г., Там же, 96.
27. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **21**, 541.
28. Фущич В.И., Никитин А.Г., См. [24], с. 45.
29. Фущич В.И., В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний (Посвященная 60-летию акад. АН УССР Ю.А. Митропольского), Киев, Наукова думка, 1977, 75.
30. Фущич В.И., *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, 846.
31. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, **12**, 747.
32. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo cimento*, 1979, **24**, 220.
33. Фущич В.И., *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, 821.
34. Фущич В.И., Владимиров В.А., *Докл. АН СССР*, 1981, **257**, 1105.
35. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Czech. J. Phys. B*, 1982, **32**, 476.
36. Fock V.A., *Fortschr. Phys.*, 1935, **98**, 145.
37. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie-Bäklund transformations in an applications, Philadelphia, SIAM, 1979.
38. Боголюбов Н.Н., Лекции по теории симметрии элементарных частиц, М., Изд-во МГУ, 1966.
39. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М., Наука, 1969.
40. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973.
41. Малкин И.А., Манько В.И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, М., Наука, 1979.
42. Шубин М.А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., Наука, 1978.
43. Mignani R., Rekami E., Baldo M., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 12, 568.
44. Боргардт А.А., *Докл. АН СССР*, 1951, **78**, 1113.
45. Lomont J.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710.

46. Moses H.E., *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **7**, 1.
47. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **4**, 319.
48. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, вып. 3, 501.
49. Федоров Ф.И., *Докл. АН СССР*, 1952, **82**, 37.
50. Corson F.M., Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations, N.Y., Hafner, 1953.
51. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.
52. Боргардт А.А., *ЖЭТФ*, 1956, **30**, 334.
53. Mayor D.H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 884.
54. Чеботарев Н.Г., Теория групп Ли, М., Гостехиздат, 1949.
55. Котельников Г.А., В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.1, М., Наука, 1980.
56. Da Silveira, *Nuovo Cimento A*, 1980, **56**, 385.
57. Kadyshevsky V.G., *Nucl. Phys. B*, 1978, **141**, 477.
58. Кадышевский В.Г., *ЭЧАЯ*, 1980, **11**, 5.
59. Данилов Ю.А., Препринт ИЭА-1136, 1968.
60. Jayaraman P., *Lett. Nuovo cimento*, 1976, **17**, 141.
61. Good R.H., *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1914.
62. Fradkin D.M., Good R.H., *Rev. Mod. Phys.*, 1961, **33**, 343.
63. Бейтман Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, Пер. с англ., М., Физматгиз, 1958.
64. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983.

Интегро-дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп Галилея, Пуанкаре, Шредингера и конформной группы

В.И. ФУЩИЧ, Н.А. СЕЛЕХМАН

An explicit form of integro-differential equations invariant with respect to the $G(1,n)$, $P(1,n)$, $Sch(1,n)$ and $C(1,n)$ groups is obtained.

Симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений почти совершенно не изучены [1]. В работе [2] поставлена задача об описании интегро-дифференциальных уравнений вида

$$(L\varphi)(x) + \lambda \int\limits_{R^{n+1}} K(x,y,\varphi(y))\,dy = 0 \tag{1}$$

инвариантных относительно групп Галилея $G(1,4)$, Пуанкаре $P(1,n)$, Шредингера $Sch(1,n)$ и конформной группы $C(1,n)$, где L — дифференциальный оператор, K — функция класса C^1 по всем переменным.

В настоящем сообщении найдены явные выражения для $K(x,y,\varphi(y))$, при которых уравнение (1) инвариантно относительно перечисленных групп.

Примем следующие обозначения и соглашения: алгебры перечисленных групп обозначаются теми же символами, что и группы; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 0 до n, $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_0,y_1,\ldots,y_n)$, $z=(x-y)$, $dy = dy_0\wedge dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n$, $r^2 = z_\mu z^\mu$, $p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$, $\tilde p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial y_\nu$, $\vec p^{\,2} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_ip_i$ и т.д., $\subset\!\!\!+$ — символ полупрямой суммы алгебр Ли; φ^* — функция, комплексно сопряженная к φ.

Рассмотрим уравнение (1) с дифференциальным оператором Даламбера

$$\left(p_0^2 - \vec p^{\,2}\right)\varphi(x) = \lambda \int\limits_{R^{n+1}} K(x,y,\varphi(y))dy. \tag{2}$$

Теорема 1. *Уравнение (2) инвариантно относительно следующих алгебр:*

1) алгебры $P(1,n)$, если $K=(r^2,\varphi)$.

2) алгебры $\tilde P(1,n) = P(1,n) \subset\!\!\!+\, D$, если

$$K = F_1\left(\varphi|r^\alpha\right) r^s\varphi^\varkappa, \qquad \alpha\varkappa = \alpha - s - n - 3,$$
$$D = D_1 = x_\mu p^\mu + y_\mu\tilde p^\mu + i\alpha\left(\varphi(x)\partial_{\varphi(x)} + \varphi(y)\partial_{\varphi(y)}\right)$$

или

$$K = F_2\left(\exp(\varphi)|r^\alpha\right) r^{-(n+3)}, \qquad D = D_2 = x_\mu p^\mu + y_\mu\tilde p^\mu + i\alpha\left(\partial_{\varphi(x)} + \partial_{\varphi(y)}\right),$$

Доклады АН УССР, 1983, № 5, С. 21–24.

α, s — произвольные действительные числа, F_1, F_2 — произвольные дифференцируемые функции.

3) алгебры $C(1,n)$, если $K = r^{-(n+3)}\varphi(y)$.

Доказательство. Изучение групповых свойств уравнения (1) методом [3] сводится к исследованию следующих дифференциальных форм:

$$
\begin{aligned}
&\Omega = db_0 dx_1 \dots dx_n + db_1 dx_0 dx_2 \dots dx_n + \\
&\qquad + \dots + (-1)^{n+1} db_n dx_0 dx_1 \dots dx_{n-1} + \lambda K dy \wedge dx, \\
&\Omega_1(x) = d\varphi(x) - b_\mu dx_\mu, \qquad \Omega_1(y) = d\varphi(y) - \tilde{b}_\mu dy_\mu, \\
&\Omega_2(x) = d\Omega_1(x), \qquad \Omega_2(y) = d\Omega_1(y).
\end{aligned}
$$

Здесь $db_0 dx_1 \dots dx_n \equiv db_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $\wedge$ — знак внешнего произведения.

Условие инвариантности форм $\{\Omega, \Omega_1(x), \Omega_1(y), \Omega_2(x), \Omega_2(y)\}$ состоит в следующем:

$$
\begin{aligned}
&L_{X_A}\Omega_1(x) = h_1^A \Omega_1(x), \qquad L_{X_A}\Omega_1(y) = \tilde{h}_1^A \Omega_1(y), \\
&L_{X_A}\Omega_2(x) = h_2^A \Omega_2(x) + \Omega_1(x) \wedge \omega^A, \quad L_{X_A}\Omega_2(y) = \tilde{h}_2^A \Omega_2(y) + \Omega_1(y) \wedge \tilde{\omega}^A, \\
&L_{X_A}\Omega = h_A \Omega + \Omega_1(x) \wedge \omega_1^A + \Omega_1(y) \wedge \tilde{\omega}_1^A + \Omega_2(x) \wedge \omega_2^A + \Omega_2(y) \wedge \tilde{\omega}_2^A.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Здесь L_{X_A} — производная Ли вдоль поля X_A; h_A, h_1^A, $\tilde{h}_1^A$, h_2^A, $\tilde{h}_2^A$, ω^A, $\tilde{\omega}^A$, ω_1^A, $\tilde{\omega}_1^A$, ω_2^A, $\tilde{\omega}_2^A$ — неизвестные пока дифференциальные формы соответствующих степеней,

$$
X_A = \xi_A^\mu \partial_{x_\mu} + \tau_A^\mu \partial_{y_\mu} + \eta_A \partial_{\varphi(x)} + \tilde{\eta}_A \partial_{\varphi(y)} + \eta_A^\mu \partial_{b_\mu} + \tilde{\eta}_A^\mu \partial_{\tilde{b}_\mu}. \tag{4}
$$

Индекс A указывает алгебру, к которой принадлежит оператор X_A.

Из условия (3) следует, что функция K должна удовлетворять уравнению

$$
\xi_A^\mu K_{x_\mu} + \tau_A^\mu K_{y_\mu} + \tilde{\eta}_A K_{\varphi(y)} + \partial_{y_\mu}(\tau_A^\mu) K = h_A K,
$$

причем $h_{P(1,n)} = 0$, $h_{D_1} = \beta - 1$, $h_{D_2} = -2$, $h_{\tilde{C}(1,n)} = -(n+3)\alpha_\mu x^\mu$, $\tilde{C}(1,n)$ — алгебра собственно конформных операторов K_μ, $\alpha_\mu \in R^1$, $K_{x_\mu} = \partial_{x_\mu} K$, $K_\varphi = \partial_\varphi K$ и т.д.

Условия на функцию K, при которых уравнение (2) инвариантно относительно $P(1,n)$, $\tilde{P}_1(1,n)$, $\tilde{P}_2(1,n)$, $C(1,n)$ таковы:

$$
\begin{aligned}
&P(1,n) \quad c_{\mu\nu} z_\nu K_{z_\mu} = 0, \quad c_{0a} = c_{a0}, \quad c_{ab} = -c_{ba}, \quad a, b = \overline{1,n}, \\
&\tilde{P}_1(1,n) \quad (d_1 z_\mu + c_{\mu\nu} z_\nu) K_{z_\mu} + d_1 \beta \varphi K_\varphi = d_1(\beta - n - 3) K, \\
&\tilde{P}_2(1,n) \quad (d_2 z_\mu + c_{\mu\nu} z_\nu) K_{z_\mu} + d_2 \alpha K_\varphi = -d_2(n+3) K, \\
&C(1,n) \quad (\alpha, x+y) r \Phi_r + 2\beta(\alpha, y) \Phi_\varphi \cdot \varphi + \\
&\qquad + [s(\alpha, x+y) + 2\beta\varkappa(\alpha, y) + 2(n+1)(\alpha, y) + (n+3)(\alpha, x)]\Phi = 0, \\
&\qquad K = \Phi\left(\varphi | r^\beta\right) r^s \varphi^\varkappa, \qquad \beta = -(n-1).
\end{aligned}
$$

Здесь $(\alpha, x) = a_\mu x^\mu$ и т.д. Легко убедиться, что решением этих уравнений являются функции, указанные в теореме. Теорема доказана.

Следствие 1. Все конформно инвариантные уравнения вида (2) являются линейными уравнениями.

Приведем далее несколько теорем, доказываемых точно так же, как и теорема 1.

Теорема 2. *Максимальной алгеброй инвариантности (в смысле С. Ли) уравнения*

$$\left(p_0^2-\vec{p}^{\,2}\right)\varphi(x)+\lambda_1\varphi^{\frac{n+3}{n-1}}+\lambda_2\int\limits_{R^{n+1}} r^{-(n+3)}\varphi(y)\,dy=0 \tag{5}$$

является алгебра $C(1,n)$. Уравнение (5) единственное $C(1,n)$-инвариантное уравнение в классе уравнений вида

$$\left(p_0^2-\vec{p}^{\,2}\right)\varphi(x)+\lambda_1F\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)+\lambda_2R\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\int\limits_{R^{n+1}}K(x,y,\varphi(y))\,dy=0.$$

Рассмотрим уравнение вида (1) с дифференциальным оператором Шредингера

$$\left(p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2}\right)\Psi(x)=\lambda\int\limits_{R^{n+1}}K\left(x,y,\Psi(y),\Psi^*(y)\right)\,dy. \tag{6}$$

Теорема 3. *Уравнение (6) инвариантно относительно следующих алгебр:*

1) алгебры $G(1,n)$, если $K=\exp\left(\dfrac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)\Phi(z_0,\Psi\Psi^*)\Psi$;

2) алгебры $\tilde{G}(1,n)=G(1,n)\subset\!\!\!\!+\, D$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-(n+4)/2}\Phi_1(\Psi\Psi^*|z_0^\alpha)\Psi,$$

$$D=D_1=2x_0p_0-x_ip_i+2y_0\tilde{p}_0-y_i\tilde{p}_i+i\alpha\left(\Psi(x)\partial_{\Psi(x)}+\Psi(y)\partial_{\Psi(y)}\right),$$

$\alpha\in R^1$; Φ_1, Φ_2 — произвольные дифференцируемые функции;

3) алгебры $Sch(1,n)$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-(n+4)/2}\Psi(y).$$

Теорема 4. *Максимальной алгеброй симметрии (в смысле С. Ли) уравнения*

$$\left(p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2}\right)\Psi(x)+\lambda_1(\Psi\Psi^*)^{2/n}\Psi(x)=\lambda_2\int\limits_{R^{n+1}}\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-(n+4)/2}\Psi(y)\,dy \tag{7}$$

является алгебра $Sch(1,n)$. Любое уравнение вида

$$\left(p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2}\right)\Psi(x)+\lambda_1F(\Psi,\Psi^*,\Psi_{x_\mu})+$$
$$+\lambda_2R(\Psi,\Psi^*,\Psi_{x_\mu})\int\limits_{R^{n+1}}K\left(x,y,\Psi(y),\Psi^*(y)\right)\,dy,$$

допускающее группу $Sch(1,n)$, приводится к (7) неособой локальной заменой переменных.

Следствие 2. Уравнения вида (6), допускающие группу, являются линейными уравнениями.

Замечание. Укажем преобразования, с помощью которых можно непосредственно проверить приведенные выше утверждения. Следующие преобразования образуют группу $C(1,3)$

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + b_\mu, \\ \varphi'(x') = \varphi(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x}\cos\theta - \dfrac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\vec{x})}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \dfrac{\vec{\theta}\times\vec{x}}{\theta}\sin\theta, \\ x'_0 = x_0, \qquad \varphi'(x') = \varphi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x} + \dfrac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda}\vec{x})}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda - 1) + \dfrac{\vec{\lambda}}{\lambda}x_0\operatorname{sh}\lambda, \\ x'_0 = x_0\operatorname{ch}\lambda + \dfrac{(\vec{x}\vec{\lambda})}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_\mu = e^s x_\mu, \\ \varphi'(x') = e^{-s}\varphi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_\mu = (x_\mu - \alpha_\mu(x_\nu x^\nu))/\sigma, \\ \varphi'(x') = \sigma\varphi(x), \qquad \sigma = 1 - 2\alpha_\nu x^\nu + \alpha_\nu\alpha^\nu x_\mu x^\mu. \end{cases}$$

Следующие преобразования образуют группу $Sch(1,n)$

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + b_\mu, \\ \Psi'(x') = \Psi(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x}\cos\theta - \dfrac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\vec{x})}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \dfrac{\vec{\theta}\times\vec{x}}{\theta}\sin\theta, \\ x'_0 = x_0, \qquad \Psi'(x') = \Psi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{V}x_0, \qquad x'_0 = x_0, \\ \Psi'(x') = \exp\left(i(\vec{V}\vec{x}) - i\dfrac{\vec{V}^{\,2}}{2}x_0\right)\Psi(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_0 = e^{2s}x_0, \qquad \vec{x}\,' = e^s\vec{x}, \\ \Psi'(x') = e^{-3s/2}\Psi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_0 = x_0/\omega, \qquad \vec{x}\,' = \vec{x}/\omega, \\ \Psi'(x') = \omega^{1/2}\exp\left(\dfrac{i\vec{x}^{\,2}}{2}\dfrac{a}{\omega}\right)\Psi(x), \qquad \omega = 1 - ax_0. \end{cases}$$

Здесь $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, $\vec{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, $(\vec{x}\vec{\lambda}) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i\lambda_i$, $\theta^2 = \vec{\theta}^{\,2}$, $\lambda^2 = \vec{\lambda}^{\,2}$.

Указанные соотношения следует дополнить такими же преобразованиями для переменной y.

1. Фущич В.И., Об одном способе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 6, 834–838.
2. Фущич В.И., Симметрия в уравнениях математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в мат. физике, Киев, 1981, 134–138.
3. Estabrook F.B., Harrison B.K., Geometric approach to invariance groups, *J. Math. Phys.*, 1971, **12**, № 4, 653–666.

The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations

W.I. FUSHCHYCH, N.I. SEROV

Multiparametrical exact solutions of the many-dimensional nonlinear d'Alembert, Liouville, sine-Gordon and eikonal equations arc obtained. The maximally extensive local invariance groups of the equations are determined and invariants of the extended Poincaré group are found.

1. Introduction

In 1881 Sophus Lie propounded to use the groups of continuous transformations for finding the exact solutions of partial differential equations (PDE). Later on many authors exploited Lie's ideas to study PDE of mechanics and physics (see Ames [2], Bluman and Cole [5], where a vast bibliography is cited and the historical aspects are discussed).

The classical work of Birkhoff [4] is devoted to the construction of the exact solutions of nonlinear hydrodynamics equations with the help of Lie's methods. Birkhoff [4] was the first to formulate the group method to obtain similarity (automodel) solutions of PDE. Many of the exact solutions have been obtained mainly for two-dimensional PDE. Lately Ovsyannikov's book [16] has dealt with the modern development of Lie's theory. Ovsyannikov formulated the method of finding the partly invariant solutions of PDE. To find such solutions one has to enumerate all the non-equivalent subgroups of the PDE invariance group. It is a very complicated problem. For example, the five-dimensional d'Alembert equation invariance group has more than 500 subgroups. Hence it is natural to seek more effective approaches for obtaining the exact solutions of many-dimensional PDE admitting a wide invariance group.

The main ideas we use in our work arc closely connected with those of Birkhoff [4] and Morgan [15]. The aim of our paper is to find the exact solutions of the following nonlinear pde widely used in mathematical and theoretical physics:

$$p_\mu p^\mu u + \lambda \exp u = 0, \tag{1.1}$$

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \tag{1.2}$$

$$p_\mu u p^\mu u = 0, \tag{1.3}$$

where $p_\mu = ig^{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$, $g_{\mu\nu}$ is the metric tensor with the signature $(+1,-1,\dots,-1)$, $p_\mu p^\mu = -\partial^2/\partial x_0^2 + \Delta \equiv -\Box$, $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, λ, k are arbitrary real constants. We use the summation convention for the repeated indices.

Equation (1.2) plays a special role in the quantum field theory when $k = 3$ and $x = (x_0, \dots, x_3)$: its solutions may be used to construct some solutions of the Yang–Mills equation by virtue of the 'tHooft–Corrigan–Wilczek ansatz (see Actor [1]).

J. Phys. A: Math. Gen., 1983, **16**, P. 3645–3656.

For the solutions of (1.1)–(1.3) we adopt the ansatz suggested by Fushchych [6]:

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x) + g(x), \tag{1.4}$$

where $\varphi(\omega)$ is an unknown function of the new variables $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$, the number of which is one less than the number of variables $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. The new variables $\omega(x)$ and the functions $f(x)$, $g(x)$ are determined from the Lagrange equations

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}} = \frac{du}{\eta}, \tag{1.5}$$

where ξ^μ and η are the functions from the infinitesimal invariance transformations

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon \xi^\mu(x,u) + O\left(\varepsilon^2\right), \qquad u' = u + \varepsilon \eta(x,u) + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{1.6}$$

If ξ^μ and η have the form

$$\xi^\mu = \xi^\mu(x), \qquad \eta = a(x)u + b(x), \tag{1.7}$$

it implies (1.4).

Having substituted (1.4) into (1.1)–(1.3) one obtains equations for $\varphi(\omega)$ which are often rather easy to solve.

2. The group properties of (1.1)–(1.3)

It is evident from the above, that to find the new variables $\omega(x)$ and the functions $f(x)$ and $g(x)$ it is necessary to know the functions $\xi^\mu(x)$ and $\eta(x,u)$ explicitly. Hence we shall study the group properties of (1.1)–(1.3).

Theorem 1. *Equation (1.1) is invariant under the Poincaré group $P(1,n-1)$ and under the scale transformation group $D(1)$. The basis elements of the corresponding Lie algebra $\tilde{P}(1,n-1) = \{P(1,n-1), D(1)\}$ have to form*

$$p_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad D = x_\nu p^\nu - 2i\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.1}$$

Theorem 2. *Equation (1.2) is invariant under the extended Poincaré group $\tilde{P}(1,n-1)$, with basis elements of its Lie algebra having the form*

$$p_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad D = x_\nu p^\nu + \frac{2i}{1-k}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.2}$$

Theorem 3. *Equation (1.3) admits the infinite-dimensional invariance group. The infinitesimal operator of this group is as follows (we use Ovsyannikov's [16] notations):*

$$\begin{gathered} X = \xi^\mu(x,u)\partial/\partial x_\mu + \eta(x,u)\partial/\partial u, \\ \xi^\mu = -b_\mu(u)x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu(u)x^\nu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu(u), \qquad \eta = \eta(u), \end{gathered} \tag{2.3}$$

where b_ν, $c_{\mu\nu}$, d_μ, η are arbitrary real functions of u and $c_{0a} = c_{a0}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $c_{00} = c_{11} = \cdots = c_{n-1\,n-1}$, $a, b = \overline{1, n-1}$.

Theorem 4. *The equation*

$$\Box u + F(x,u) = 0 \tag{2.4}$$

is invariant under the extended Poincaré group if and only if

$$F(x,u) = \lambda_1 \exp u, \tag{2.5}$$

or

$$F(x,u) = \lambda_2 u^k. \tag{2.6}$$

where λ_1, λ_2, k are arbitrary constants, $k \neq 1$, the infinitesimal generators are given in (2.1) and (2.2) respectively.

To prove these theorems one can use the Lie algorithm following e.g. Ovsyannikov [16]. One can make sure that (2.4) with nonlinearities (2.5), (2.6) is invariant under the group $\tilde{P}(1,n-1)$ using final invariance transformations.

Note 1. Theorem 4 implies that there is only one equation of the form (2.4) with non-polynomial nonlinearity invariant under $\tilde{P}(1,n-1)$, and it is the Liouville equation.

Note 2. If $n = 2$, equation (1.1) admits the infinite-dimensional Lie group with the generator $X = \xi^0\partial/\partial x_0 + \xi^1\partial/\partial x_1 + \eta\partial/\partial u$, where

$$\begin{aligned} &\xi^0 = f(x_0+x_1) + g(x_0-x_1), \qquad \xi^1 = f(x_0+x_1) - g(x_0-x_1) + c_1, \\ &\eta = c_2 - \partial\xi^0/\partial x_0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

f and g are arbitrary differentiable functions, c_1, c_2 are constants.

Note 3. Equation (1.2) with $n = 2$ and $\lambda = 0$ is invariant under the infinite-dimensional Lie group, as it takes place for the Liouville equation. The two-dimensional equation of gas dynamics has the same properties (see Fushchych and Serova [10]). Apparently this property gives the possibility of finding the general solution of the equations mentioned above.

3. The group $\tilde{P}(1,2)$ invariants

The question of finding of the invariants $\omega(x)$ is connected with the integration of the Lagrange system (1,5). Generally speaking, equations (1.5) have infinitely many solutions according to the various functions ξ^μ. Ovsyannikov [16] has proposed to enumerate all the non-conjugate subgroups of the equations invariance group and to integrate the system (1.5) for each subgroup. This way, as was previously mentioned, is connected with the algebraic difficulties.

In this section we shall show the particular case of the group (1.6) for which the system (1.5) is usually integrated.

Many fundamental equations of mathematical and theoretical physics are invariant under the group $IGL(n,R)$ of inhomogeneous linear transformations of n-dimensional Minkowski space or under its subgroups, e.g. the Lorentz group, the Poincaré group, the Galilei group etc.

It is well known that the functions ξ^μ for this group have the form

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \qquad \mu = \overline{0,n-1}, \tag{3.1}$$

where $c_{\mu\nu}$ and d_μ are arbitrary constants.

Let us introduce the notations

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}} = dt. \tag{3.2}$$

Using (3.1) and (3.2) one can write down the system (1.5) in the form

$$\dot{x}_\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \qquad \mu = \overline{0, n-1}. \tag{3.3}$$

Equation (3.3) is a system of ordinary differential equations with constant coefficients and it is well known how to find its general solution. After doing this one has to eliinate the parameter to obtain the invariants $\omega(x)$.

If (1.1)–(1.3) are invariant under the group $\tilde{P}(1, n-1)$, which is a subgroup of $IGL(n, R)$, we shall consider the determination of $\tilde{P}(1, n-1)$ invariants in detail. For simplicity we put $n = 3$. According to the conditions between the coefficients $c_{\mu\nu}$ and d_μ in (3.1) we have obtained the following independent solutions of the system (1.5).

$$(1) \quad \omega_1 = \alpha_\nu y^\nu (\beta_\nu y^\nu)^a, \qquad \omega_2 = y_\nu y^\nu (\beta_\nu y^\nu)^{-2},$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = b \neq 0$.

$$(2) \quad \omega_1 = \beta_\nu y^\nu (\alpha_\nu y^\nu)^{-1} + \ln \alpha_\nu y^\nu, \qquad \omega_2 = y_\nu y^\nu (\alpha_\nu y^\nu)^{-2},$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = b \neq 0$.

$$(3) \quad \omega_1 = \ln \alpha_\nu y^\nu + b_1 \tan^{-1}[\gamma_\nu\gamma^\nu (\beta_\nu y^\nu)^{-1}], \qquad \omega_2 = y_\nu y^\nu (\alpha_\nu y^\nu)^{-2},$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = b_2 \neq 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = b_3 \neq 0$, $\alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0$, $(\beta_\nu y^\nu)^2 + (\gamma_\nu y^\nu)^2 = b_3(\alpha_\nu x^\nu)^{-2}(1 - b_2\omega_2)$.

$$(4) \quad \omega_1 = \alpha_\nu y^\nu + \ln \beta_\nu y^\nu, \qquad \omega_2 = \gamma_\nu z^\nu (\beta_\nu y^\nu)^{-2},$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = \beta_\nu\gamma_\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = 0$, $\alpha_\nu\gamma^\nu = b_1 \neq 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = b_2 \neq 0$.

$$(5) \quad \omega_1 = (\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu, \qquad \omega_2 = \beta_\nu y^\nu + a \ln \alpha_\nu y^\nu,$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = -1$.

$$(6) \quad \omega_1 = (\beta_\nu y^\nu)^2 - y_\nu y^\nu, \qquad \omega_2 = \beta_\nu y^\nu + a \tan^{-1}[\gamma_\nu y^\nu (\alpha_\nu y^\nu)^{-1}],$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = b \neq 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = 1$, $\alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0$, $(\alpha_\nu y^\nu)^2 + (\gamma_\nu y^\nu)^2 = b\omega_1$.

$$(7) \quad \omega_1 = \frac{1}{2}(\alpha_\nu y^\nu)^2 + a\beta_\nu y^\nu, \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}(\alpha_\nu y^\nu)^3 + a\alpha_\nu y^\nu \beta_\nu y^\nu + a^2\gamma_\nu y^\nu,$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0$, $\alpha_\nu\gamma^\nu = -\beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = b \neq 0$.

$$(8) \quad \omega_1 = \alpha_\nu x^\nu, \qquad \omega_2 = x_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = b \neq 0.$$

$$(9) \quad \omega_1 = (\beta_\nu y^\nu)(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}, \qquad \omega_2 = \gamma_\nu y^\nu (\alpha_\nu y^\nu)^{-1},$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = a_{11}$, $\alpha_\nu\beta^\nu = a_{12}$, ..., $\gamma_\nu\gamma^\nu = a_{33}$.

$$(10) \quad \omega_1 = \alpha_\nu x^\nu, \qquad \omega_2 = \beta_\nu x^\nu,$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = -\beta_\nu\beta^\nu = 1$, $\alpha_\nu\beta^\nu = 0$.

In these formulae $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, $z_\nu = x_\nu + \frac{1}{2}a_\nu$, a_ν, α_ν, β_ν, γ_ν, a, b, b_k, a_{ik} are constants connected with the group parameters $c_{\mu\nu}$ and d_μ.

To find f and g from (1.4) it is sufficient to integrate the equation

$$(du)/\eta = dt. \tag{3.4}$$

(3.4) yields

$$u(x) = \varphi(\omega) + g(x), \tag{3.5}$$

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x), \tag{3.6}$$

$$u(x) = \Phi(\varphi(\omega) + g(x)), \tag{3.7}$$

for (1.1), (1.2), (1.3) respectively. Here Φ is an arbitrary differentiable function.

The formulae (2.1)–(2.3) yield

$$\begin{aligned} g(x) &= -2\ln\psi(x) && \text{for (1.1)},\\ f(x) &= [\psi(x)]^{2/(1-k)} && \text{for (1.2)},\\ g(x) &= \ln\psi(x) && \text{for (1.3)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Below we present the explicit form of $\psi(x)$:

(1) $\psi(x) = \beta_\nu y^\nu$, (2) $\psi(x) = \alpha_\nu y^\nu$, (3) $\psi(x) = \alpha_\nu y^\nu$,
(4) $\psi(x) = \beta_\nu y^\nu$, (9) $\psi(x) = \alpha_\nu y^\nu$.

In the other cases $\psi(x) = 1$.

4. The exact solutions of the Liouville equation

Substituting (3.5) into (1.1) and using (1)–(10) and (3.8) one obtain the following PDE:

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &a^2\omega_1^2\varphi_{11} + 4\omega_1(\omega_2 + a + 1)\varphi_{12} + 4\omega_2(\omega_2 - 1)\varphi_{22} + a(a-1)\omega_1\varphi_1 +\\ &+2(3\omega_2 - 1)\varphi_2 + 2 + \lambda\exp\varphi = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where $\lambda_1 = \lambda/b$, $\varphi_{ik} = \partial^2/\partial\omega_i\partial\omega_k$, $i,k = 1,2$.

$$\text{(2)}\quad b\varphi_{11} + 4\varphi_{12} - 4\omega_2\varphi_{22} - 2\varphi_2 + \lambda\exp\varphi = 0. \tag{4.2}$$

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} &[b_2 - 1/(b_2\omega_2 - 1)]\varphi_{11} - 4(b_2\omega_2 - 1)\varphi_{12} + 4\omega_2(b\omega_2 - 1)\varphi_{22} -\\ &-b_2\varphi_1 + 2(3b_2\omega_2 - 1)\varphi_2 + 2b_2 + \lambda\exp\varphi = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\text{(4)}\quad \varphi_{11} + 2(2\omega_2 + b_1)\varphi_{12} + 4\omega_2^2\varphi_{22} - \varphi_1 + b\omega_2\varphi_2 + 2 + (\lambda/b_2)\exp\varphi = 0. \tag{4.4}$$

$$\text{(5)}\quad 4\omega_1\varphi_{11} - 4a\varphi_{12} - \varphi_{22} + 4\varphi_1 + \lambda\exp\varphi = 0. \tag{4.5}$$

$$\text{(6)}\quad -4\omega_1\varphi_{11} + (a^2\omega_1^{-1} + 1)\varphi_{22} + 4\varphi_1 + \lambda\exp\varphi = 0. \tag{4.6}$$

$$\text{(7)}\quad -\varphi_{11} + 2(\omega_1 + a^2)\varphi_{22} + (\lambda/a^2 b)\exp\varphi = 0. \tag{4.7}$$

$$\text{(8)}\quad b\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + b\varphi_2 + \lambda\exp\varphi = 0. \tag{4.8}$$

$$\text{(9)}\quad \begin{aligned} &(a_{11}\omega_1^2 - 2a_{12}\omega_1 + a_{22})\varphi_{11} + 2(a_{11}\omega_1\omega_2 - a_{13}\omega_1 - a_{12}\omega_2 + a_{23})\varphi_{12} +\\ &+(a_{11}\omega_2^2 - a_{13}\omega_2 + a_{33})\varphi_{22} + 2(a_{11}\omega_1 - a_{12})\varphi_1 +\\ &+2(a_{11}\omega_2 - a_{13})\varphi_2 + 2a_{11} + \lambda\exp\varphi = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$(10) \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} + \lambda \exp\varphi = 0. \tag{4.10}$$

If one obtains at least one particular solution of any of equations (4.1)–(4.10) then (3.5) gives a solution of (1.1). Let us consider, (4.1) and (4.10) as an example. If one supposes that $\partial\varphi/\partial\omega_2 = 0$ then (4.1) is reduced to the ordinary differential equation for the function φ:

$$a^2\omega_1^2\varphi_{11} + a(a-1)\omega_1\varphi_1 + 2 + \lambda_1\exp\varphi = 0, \tag{4.11}$$

the general solution of which has the form

$$\varphi(\omega_1) = \begin{cases} -2\ln\left[\left(-\lambda/2bc_1^2\right)^{1/2}\omega_1^{-1/a}\sinh\left(c_1\omega_1^{1/a} + c_2\right)\right], & \lambda b < 0, \\ -2\ln\left[\left(\lambda/2bc_1^2\right)^{1/2}\omega_1^{-1/a}\cosh\left(c_1\omega_1^{1/a} + c_2\right)\right], & \lambda b > 0, \\ -2\ln\left[\left(-\lambda/2bc_1^2\right)^{1/2}\omega_1^{-1/a}\cos\left(c_1\omega_1^{1/a} + c_2\right)\right], & \lambda b < 0, \\ -2\ln\left[\left(\lambda/2bc_1^2\right)^{1/2}\omega_1^{-1/a}\left(\omega_1^{1/a} + c_2\right)\right], & \lambda b > 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Hence from (3.5) and (4.12) one obtains the solution of (1.1)

$$\begin{aligned} &u = -2\ln[\gamma P(x)\sinh(c_1 Q(x) + c_2)], \quad u = -2\ln[\delta P(x)\cosh(c_1 Q(x) + c_2)], \\ &u = -2\ln[\gamma P(x)\cos(c_1 Q(x) + c_2)], \quad u = -2\ln[\gamma P(x)(Q(x) + c_2)], \end{aligned} \tag{4.13}$$

where $P(x) = (\alpha_\nu y^\nu)^{-1/a}$, $Q(x) = \beta_\nu y^\nu(\alpha_\nu y^\nu)^{1/2}$, $\gamma^2 = -\delta^2 = -\lambda/2bc_1^2$.

Equation (4.10) is the two-dimensional Liouville equation. Its general solution was found by Liouville [14]:

$$\varphi(\omega_1,\omega_2) = \ln\left(-\frac{8}{\lambda}\frac{f_1'(\omega_1+\omega_2)f_2'(\omega_1-\omega_2)}{[f_1(\omega_1+\omega_2)+f_2(\omega_1-\omega_2)]^2}\right), \tag{4.14}$$

where f_1 and f_2 are arbitrary differentiable functions.

Note. The two-dimensional Liouville equation can be solved in other ways, e.g. with the help of the theory of complex variables. But we believe the simplest way is to linearise the Liouville equation. Fushchych and Tychinin [12], using non-local substitutions

$$u = \ln\left[W_\xi W_\eta\left(1 - \tanh^2\frac{c_1 - W}{\sqrt{2}}\right)\right], \qquad \xi = x_0 + x_1, \qquad \eta = x_0 - x_1,$$

or

$$u = \ln\left[2W_\xi W_\eta/(W + c_2)^2\right],$$

or

$$u = \ln\left[W_\xi W_\eta\left(1 + \tan^2\frac{W + c_3}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

reduce the Liouville equation to $\Box W = 0$, the general solution of which was obtained by d'Alembert. Using those formulae we obtain the Liouville solution (4.14).

From (3.5) and (4.14) one obtains a solution of (1.1):

$$u = \ln\left(-\frac{8}{\lambda}\frac{f_1'(\gamma_\nu x^\nu)f_2'(\delta_\nu x^\nu)}{[f_1(\gamma_\nu x^\nu) + f_2(\delta_\nu x^\nu)]^2}\right), \tag{4.15}$$

where $\gamma_\nu\gamma^\nu = \delta_\nu\delta^\nu = 0$, $\gamma_\nu\delta^\nu = 2$.

The other solutions of (1.1) we have obtained have the form (4.13) with

$$
\begin{array}{lll}
(a) & P(x) = F^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), & Q(x) = \beta_\nu y^\nu F(\alpha_\nu y^\nu), \\
(b) & P(x) = F^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), & Q(x) = \beta_\nu y^\nu F(\alpha_\nu y^\nu) - \ln F(\alpha_\nu y^\nu), \\
(c) & P(x) = \alpha_\nu y^\nu, & Q(x) = (y_\nu y^\nu)^{1/2}(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}, \\
(d) & P(x) = \omega_1, & Q(x) = \ln\omega_1, \quad \omega_1 = (\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu, \\
(e) & P(x) = 1, & Q(x) = \beta_\nu y^\nu + a\ln\alpha_\nu y^\nu, \\
(f) & P(x) = 1, & Q(x) = \beta_\nu y^\nu, \\
(g) & P(x) = 1, & Q(x) = \beta_\nu y^\nu + F(\alpha_\nu y^\nu),
\end{array}
$$

where F is an arbitrary differentiable function, $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\mu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = b \neq 0$.

Besides, from (4.8) we have the particular solution of (1.1) in the form

$$u(x) = -\ln\left(\frac{1}{2}\lambda x_\nu x^\nu\right). \tag{4.16}$$

We have obtained the solutions of (1.1) when $n = 3$ and they are easily generalised to more general cases $n \geq 4$. For $n \geq 4$ some solutions of (1.1) may be obtained in an analogous way, integrating (1.5) and determining the invariants $\omega(x)$.

5. The exact solutions of the nonlinear d'Alembert equation

Using (3.6) arid the explicit form of invariants $\omega(x)$ and function $f(x)$ (1)–(10) one obtains the tollowing PDE:

(1) $$\begin{aligned} &a^2\omega_1^2\varphi_{11} - 4a\omega_1(\omega_2 - a)\varphi_{12} + 4\omega_2(\omega_2 - b)\varphi_{22} + \\ &+a[a - 1 + 4/(1-k)]\omega_1\varphi + 2(k-1)^{-1}[(3k+1)\omega_2 - 2b(k+1)]\varphi_2 + \\ &+2(k+1)(k-1)^{-2}\varphi + (\lambda/b)\varphi^k = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

(2) $$b\varphi_{11} + 4\varphi_{12} - 4\omega_2\varphi_{22} + 2(3+k)(1-k)^{-1}\varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0. \tag{5.2}$$

(3) $$\begin{aligned} &[b_2 - 1/(b_2\omega_2 - 1)]\varphi_{11} - 4(b_2\omega_2 - 1)\varphi_{12} + 4\omega_2(b_2\omega_2 - 1)\varphi_{22} + \\ &+b_2(3+k)(1-k)^{-1}\varphi_1 - 4(1-k)^{-1}[\omega_2 b(3-k) - (1+k)]\varphi_2 + \\ &+2b_2(1+k)(1-k)^{-2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

(4) $$\begin{aligned} &\omega_1^2\varphi_{11} + 2\omega_1\omega_2[1 - (b_1/2b_2)\omega_2^2]\varphi_{12} + \omega_2^2\varphi_{22} + 4(1-k)^{-1}(\omega_1\varphi_1 + \\ &+\omega_2\varphi_2) + 2(1+k)(1-k)^{-2}\varphi + (\lambda/b_2)\varphi^k = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

(5) $$4\omega_1\varphi_{11} - 4a\varphi_{12} - \varphi_{22} + 4\varphi_1 + \lambda\varphi^k = 0. \tag{5.5}$$

(6) $$-4\omega_1\varphi_{11} + (1 + a^2\omega_1^{-1})\varphi_{22} + 4\varphi_1 + \lambda\varphi^k = 0. \tag{5.6}$$

(7) $$-\varphi_{11} + (2\omega_1 + a^2)\varphi_{22} + (\lambda_1/a^2)\varphi^k = 0. \tag{5.7}$$

(8) $$b\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + b\varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0. \tag{5.8}$$

(9) $$\begin{aligned} &(a_{11}\omega_1^2 - 2a_{12}\omega_1 + a_{22})\varphi_{11} + 2(a_{11}\omega_1\omega_2 - a_{13}\omega_1 - a_{12}\omega_2 + a_{23})\varphi_{12} + \\ &+(a_{11}\omega_2^2 - 2a_{13}\omega_2 + a_{33})\varphi_{22} + 2(k+1)(k-1)^{-1}[(a_{11}\omega_1 - a_{12})\varphi_1 + \\ &+(a_{11}\omega_2 - a_{13})\varphi_2] + 2a_{11}(k+1)(k-1)^{-2}\varphi + \lambda\varphi^k = 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$(10) \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} + \lambda\varphi^k = 0. \tag{5.10}$$

Equation (5.1) when $\partial\varphi/\partial\omega_2 = 0$ becomes the Emden–Fowler one

$$\xi^2 V_{\xi\xi} + 2\xi V_\xi + (\lambda/b)\xi^{k+1}V^k = 0 \tag{5.11}$$

via the substitution

$$\varphi = \xi^{(k+1)/(k-1)}V(\xi), \qquad \xi = \omega_1^{1/a}. \tag{5.12}$$

We have found some particular solutions of (5.2)–(5.10) and then we have the following solutions of (1.2):

$$u = \left[\beta_\nu y^\nu + \alpha_\nu y^\nu \left(c_2 + \ln a_\nu y^\nu\right)\right]^{2/(1-k)}, \tag{5.13}$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = b = -\frac{1}{2}\lambda(1-k)^2/(1+k)$.

$$u = \left\{\frac{1}{2}\left[(k-1)^2/(k-3)\right] y_\nu y^\nu\right\}^{1/(1-k)}, \tag{5.14}$$

$$u = \left\{-\frac{1}{2}\lambda\left(1-k^2\right)\left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]\right\}^{1/(1-k)}, \tag{5.15}$$

where $\beta_\nu\beta^\nu = -1$.

$$u = \left\{c_2 \pm (1-k(\left[\frac{1}{2}\lambda(1+k)^{-1}\right]^{1/2}(\beta_\nu y^\nu + a\ln\alpha_\nu y^\nu)\right\}^{2/(1-k)}, \tag{5.16}$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = -1$.

$$u = \left[c_2 + (2a)^{-1}(\alpha_\nu y^\nu)^2 + \beta_\nu y^\nu\right]^{2/(1-k)}, \tag{5.17}$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = -\frac{1}{2}\lambda(1-k)^2(1+k)$.

From (5.13)–(5.17) one can see that all the solutions of (1.2) obtained have the form

$$u = [F(y) + G(z)]^\alpha, \tag{5.18}$$

where α takes the values $1/(1-k)$ and $2/(1-k)$, and

$$y = \left(y^1, \dots, y^{n-1}\right), \qquad z = \left(z^1, \dots, z^{n-1}\right),$$
$$y^a = y^a(x), \qquad z^a = z^a(x), \qquad a = \overline{1, n-1}, \qquad x \in R_n.$$

If one searches for the solutions of (1.2) in the form (5.18), then the substitution of (5.18) in (1.2) leads to the equation for the functions F, G, y^a, z^a:

$$\begin{aligned}&(\alpha-1)A_\mu A^\mu + (F+G)\left(F_{ab}y^a_\mu y^{b\mu} + G_{ab}z^a_\mu z^{b\mu} + F_a\Box y^a + G_a\Box z^a\right) + \\ &\quad + (\lambda/\alpha)(F+G)^{\alpha(k-1)+2} = 0,\end{aligned} \tag{5.19}$$

where

$$\begin{aligned}&A_\mu = F_a y^a_\mu + G_a z^a_\mu, \qquad F_a \equiv \partial F/\partial y^a, \qquad F_{ab} = \partial^2 F/\partial y^a\partial y^b, \\ &G_a \equiv \partial G/\partial z^a, \qquad G_{ab} = \partial^2 G/\partial z^a\partial z^b, \qquad y^a_\mu \equiv \partial y^a/\partial x_\mu, \\ &z^a_\mu \equiv \partial z^a/\partial x_\mu, \qquad \mu = \overline{0, n-1}, \qquad a, b = \overline{1, n-1}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Below we list some particular solutions of (5.19):

$$(a)\quad F(y) = \left(y^1 + c\right)^2, \qquad G(z) = z^1 z^2, \qquad y^1 = \alpha_\nu x^\nu, \qquad z^1 = \beta_\nu x^\nu,$$
$$z^2 = \gamma_\nu x^\nu, \qquad \alpha = 1/(1-k), \qquad \alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = 0,$$
$$2\alpha_\nu\alpha^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = \lambda(k-1)^2(k-3)^{-1}, \qquad x = (x_0, \dots, x_{n-1}), \qquad n \geq 3.$$

$$(b)\quad F(y) = y^2\varphi\left(y^1\right), \qquad G(z) = z^2\psi\left(z^1\right), \qquad y^1 = z^1 = \alpha_\nu x^\nu,$$
$$y^2 = \beta_\nu x^\nu, \qquad z^2 = \gamma_\nu x^\nu, \qquad \alpha = 2/(1-k),$$

where φ and ψ are arbitrary differentiable functions, satisfying the condition

$$\begin{aligned} &\varphi^2 + \psi^2 = \frac{1}{2}\lambda(k-1)^2/(k+1), \\ &\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = -1, \qquad n \geq 3. \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$(c)\quad F(y) = F\left(y^1\right) \text{ is an arbitrary differentiable function,}$$
$$G(z) = z^1, \qquad y^1 = \alpha_\nu x^\nu, \qquad z^1 = \beta_\nu x^\nu,$$
$$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta_\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = -\frac{1}{2}(k-1)^2/(k+1).$$

So according to (5.18) we have the following solutions of (1.2)

$$u = \left[(\alpha_\nu x^\nu + c)^2 + \beta_\nu x^\nu \gamma_\nu x^\nu\right]^{1/(k-1)}, \tag{5.22}$$

where $\alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = 0$, $2\alpha_\nu\alpha^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = \lambda(k-1)^2/(k-3)$, $k \neq 3$.

$$u = [\beta_\nu x^\nu \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \gamma_\nu x^\nu \psi(\alpha_\nu x^\nu)]^{2/(1-k)}, \tag{5.23}$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = \alpha_\nu\gamma^\nu = \beta_\nu\gamma^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = \gamma_\nu\gamma^\nu = -1$, $\varphi^2 + \psi^2 = \frac{1}{2}\lambda(k-1)^2/(k+1)$, $k \neq -1$.

$$u = [F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu]^{2/(1-k)}, \tag{5.24}$$

where $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta_\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = -\frac{1}{2}(k-1)^2/(k+1)$, $k \neq -1$. If in (5.23)–(5.24) φ, ψ, F are arbitrary functions we have the wide class of exact solutions of (1.2).

Ibragimov [13] established that if $k = (n+2)/(n-2)$, $n \geq 3$ (1.2) is conformally invariant. It is well known that the conformal transformations have the form (see e.g. Fushchych and Nikitin [8])

$$x'_\mu = \sigma^{-1}(x_\mu + c_\mu x_\nu x^\nu), \qquad u' = \sigma^{(n-2)/2}u, \tag{5.25}$$

where $\sigma = (1 + 2c_\nu x^\nu + c_\lambda c^\lambda x_\nu x^\nu)$, c_μ are constants. Using (5.25) one can produce new solutions of the equation

$$\Box u + \lambda u^{(n+2)/(n-2)} = 0. \tag{5.26}$$

in such a way. Let $u = F(x)$ be a solution of (5.26) for $n \geq 3$, then

$$u = \sigma^{(2-n)/n}F((x + cx_\nu x^\nu)/\sigma), \tag{5.27}$$

where $c = (c_0, \dots, c_{n-1})$, will be another solution of (5.26) and

$$\Box u + \lambda u^{(n+2)/(n-2)} = \sigma^{-(n+2)/2}\left(\Box F + \lambda F^{(n+2)/(n-2)}\right). \tag{5.28}$$

When $n=4$, equation (5.26) has the form

$$\Box u + \lambda u^3 = 0. \tag{5.29}$$

Its particular solutions are given in (5.15)–(5.17), (5.23)–(5.24). These expressions give the solutions of Yang–Mills equations after using the 'tHooft–Corrigan–Wilczek ansatz.

In the conclusion of this section we consider another nonlinear d'Alembert equation

$$\Box u + \lambda \sin u = 0, \qquad \lambda = 1, \tag{5.30}$$

which is known as a sine-Gordon equation. Below we present some exact solutions of this equation

$$u = 4\tan^{-1}\left\{\exp\left[f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu\right]\right\}, \tag{5.31}$$

$$k\int_0^{u/2} \frac{d\psi}{\left(1-k^2\sin^2\psi\right)^{1/2}} = f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu + c_0, \tag{5.32}$$

where f is an arbitary differentiable function, α_ν, β_ν, k are constants, $\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = -1$.

6. The exact solutions of the eikonal equation

The eikonal equation (1.3) is one of the main equations of geometrical optics and it is the characteristic equation for the linear d'Alembert one. In this section we shall find some exact solutions of (1.3) by analogy with that done in the previous sections and show how to generate new solutions using the conformal transformations. Upon substituting (3.7) into (1.3) we obtain some PDE for the function $\varphi(\omega)$ and we have solved some of them.

Below we present the final result:

$$u = \Phi(\alpha_\nu x^\nu), \tag{6.1}$$

$$u = \Phi\left(\beta_\nu y^\nu \pm \left[(\beta_\nu y^\nu)^2 - a y_\nu y^\nu\right]^{1/2}\right), \tag{6.2}$$

$$u = \Phi(y_\nu y^\nu / \alpha_\nu y^\nu), \tag{6.3}$$

where Φ is an arbitrary differentiable function, $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, α_ν, β_ν, a_ν, a are constants, $\alpha_\nu\alpha^\nu = 0$, $\beta_\nu\beta^\nu = a \neq 0$.

One can see from (2.3) that (1.3) is conformally invariant, the conformal transformations being as follows:

$$x'_\mu = \sigma^{-1}(x_\mu + c_\mu x_\nu x^\nu), \qquad u' = u, \tag{6.4}$$

where σ is from (5.25). The new solutions u_{new} have the form

$$u^{(x)}_{\text{new}} = u_{\text{old}}((x + c x_\nu x^\nu)/\sigma). \tag{6.5}$$

In conclusion we formulate the following statement.

Theorem 5. *The equation*

$$p_\mu u p^\mu u = F(u), \qquad \mu = \overline{0, n-1}, \tag{6.6}$$

is reduced to the form

$$p_\mu V p^\mu V = 1, \qquad \mu = \overline{0, n-1} \tag{6.7}$$

by the substitution

$$V = \int \frac{du}{(F(u))^{1/2}}. \tag{6.8}$$

Note. Equation (6.7) upon substituting

$$W(x, V) = 0 \tag{6.9}$$

takes the form

$$p_\nu W p^\nu W = 0, \qquad \nu = \overline{0, n}, \tag{6.10}$$

where $W = W(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n \equiv V)$. Equation (6.10) is the eikonal equation (1.3) in $(n+1)$-dimensional space. With the help of ansatz (1.4), we have obtained multiparametrical exact solutions of many-dimensional nonlinear Schrödinger (Fushchych and Moskaliuk [7], Born–Infeld (Fushchych and Serov [9]) and Dirac equations (Fushchych and Shtelen [11]).

Acknowledgment

We would like to express our gratitude to the referees for their comments and useful suggestions.

Appendix. The reduction of (1.1)–(1.2) to ordinary differential equations

If the function φ from the ansatz (1.4) depends on one variable ω only it means that (1.1)–(1.2) are ordinary differential ones.

The Liouville equation (1.1) is reduced to the equation

$$\omega_\nu \omega^\nu \varphi'' + \Box\omega \varphi' + \Box g + \lambda \exp g \exp \varphi = 0,$$

via the substitution (3.5) if the conditions

$$\omega_\nu \omega^\nu = \psi_1(\omega) \exp g, \qquad \Box\omega = \psi_2(\omega) \exp g, \qquad \Box g = \psi_3(\omega) \exp g,$$

are satisfied.

The equation (1.2) will be reduced to the ordinary differential equation

$$\omega_\nu \omega^\nu f \varphi'' + (\Box\omega f + 2\omega_\nu f^\nu)\varphi' + \Box f \cdot \varphi + \lambda f^k \varphi^k = 0$$

under the conditions

$$\omega_\nu \omega^\nu = \psi_1(\omega) f^{k-1}, \qquad \Box\omega f + 2\omega_\nu f^\nu = \psi_2(\omega) f^k, \qquad \Box f = \psi_3(\omega) f^k.$$

The ansatz (1.4) in this case has the form (3.6).

1. Actor A., Classical solutions of $SU(2)$ Yang–Mills theories, *Rev. Mod. Phys.*, 1979, **51**, № 3, 461–525.
2. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol.1, New York, Academic, 1965.
3. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol.2, New York, Academic, 1972.
4. Birkhoff G., Hydrodynamics: a study in logic fact and similitude, Princeton, University Press, 1950.
5. Bluman G.W., Cole I.D., Similarity Methods for Differential Equations, New York, Springer, 1974.
6. Fushchych W.I., The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–28.
7. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, № 16, 571.
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetry of Maxwell equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983.
9. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1982, **263**, 582–586.
10. Fushchych W.I., Serova M.M., *Dokl. Akad. Nauk. USRR*, 1983, **268**, 1102–1104.
11. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
12. Fushchych W.I., Tychinin W.A., Preprint 82-33, Kiev, Institute of Mathematics, 1982.
13. Ibragimov N.H., Lie groups in some questions of mathematical physics, Novosibirsk, University Press, 1972.
14. Liouville J., *J. Math. Pure Appl.*, 1853, **18**, 77.
15. Morgan A.J.A., *Quart. J. Math. Oxford*, 1952, **3**, № 12, 250–259.
16. Ovsyannikov L.V., The group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978.

Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

При решении многомерной проблемы Минковского А.В. Погорелов пришел к естественному обобщению классического уравнения Монжа–Ампера (МА) для двух переменных на случай n переменных (см. [1])

$$|u_{\mu\nu}| = 0, \tag{1}$$

где $|u_{\mu\nu}|$ — определитель из вторых производных $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Ниже будет показано, что уравнение МА обладает уникальными симметрийными свойствами, которые не присущи линейным дифференциальным уравнениям. Это свойство дает возможность, используя теоретико-алгебраические идеи [2], построить классы точных решений уравнения (1) и получить формулу “размножения” решений.

1. Симметрия уравнения МА. Методом С. Ли [3] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно группы* $\{JGL(n+1, R), C(n+1)\}$*, базисные элементы алгебры Ли которой имеют вид*

$$\begin{gathered} p_A = ig^{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad L_{AB} = x_A p_B, \qquad A, B = 0, 1, \ldots, n, \\ K_A = x_a D, \qquad D = ig^{AB} x_A \frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad x_n \equiv u, \end{gathered} \tag{2}$$

где g^{AB} *— метрический тензор в* $(n+1)$*-мерном пространстве,* $JGL(n+1, R)$ *— группа линейных неоднородных преобразований пространства* R_{n+1}*,* $C(n+1)$ *— конформная группа в* R_{n+1}*.*

Замечание 1. Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с уравнением Ньютона

$$u_{00} = 0, \tag{3}$$

групповые свойства которого полностью изучил еще С. Ли [6]. Алгебра (2) при $n = 1$ совпадает с 8-мерной алгеброй, построенной С. Ли для уравнения (3). Групповые свойства уравнения Монжа–Ампера для двух переменных изучены Овсянниковым [3].

2. Точные решения уравнения (1). Решения уравнения МА, следуя [2] , ищем в виде

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{4}$$

Доклады академии наук СССР, 1983, **273**, № 3, С. 543–546.

где $\varphi(\omega)$ — неизвестная функция, зависящая от $n-1$ инвариантных переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$, а $f(x)$, $g(x)$ — некоторые заданные функции.

В том частном случае, когда $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, $\omega(x) = \omega_1(x)$, уравнение (1) редуцируется к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) для функции φ с переменными коэффициентами

$$M(\omega)\varphi'' + N(\omega)\varphi' = 0, \tag{5}$$

где $N(\omega) = |\omega_{\mu\nu}|$, а $M(\omega)$ строится из $N(\omega)$ и представляет собой сумму следующих детерминантов:

$$\begin{gathered} M(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_0 & \omega_0 & \omega_{01} & \cdots & \omega_{0\,n-1} \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_{11} & \cdots & \omega_{1\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_0 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1\,1} & \cdots & \omega_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \omega_{00} & \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{0\,n-1} \\ \omega_{10} & \omega_1 & \omega_1 & \cdots & \omega_{1\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n-1\,0} & \omega_{n-1} & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \cdots & \omega_0 & \omega_{n-1} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \cdots & \omega_1 & \omega_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n-1\,0} & \omega_{n-1\,1} & \cdots & \omega_{n-1} & \omega_{n-1} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим в качестве инвариантной переменной и линейную комбинацию переменных x_μ, т.е.

$$\omega = \alpha x \equiv a_\mu x^\mu, \tag{7}$$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ — постоянный вектор. В этом случае, как это следует из (5), получаем решение

$$u = \varphi(\omega), \qquad \omega = \alpha x, \tag{8}$$

где φ — произвольная функция из C^2. Обобщая (8), можно построить следующие решения уравнения (1):

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}), \tag{9}$$

где $\omega_k = \alpha_\nu^k x^\nu$, $\alpha^k = (\alpha_0^k, \alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n-1}^k)$ — произвольные постоянные векторы, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Рассмотрим в качестве инвариантной переменной $\omega = x^2 \equiv x_\mu x^\mu$. В этом случае

$$M(\omega) = 2^{n+1}\omega, \qquad N(\omega) = 2^n.$$

Уравнение (5) имеет вид

$$2\omega\varphi'' + \varphi' = 0, \tag{10}$$

общим решением которого является функция

$$\varphi = c_1\sqrt{\omega} + c_2. \tag{11}$$

В неявном виде решения (1) можно записать так:

$$u^2 - x^2 = 0.$$

Приведем еще несколько семейств решений уравнения (1) в явном и неявном виде:

$$u = (\alpha x)^2 - \alpha^2 x^2; \tag{12}$$

$$u = \frac{x^2}{\alpha x}, \tag{13}$$

при этом $M(\omega) \neq 0$, $N(\omega) = 0$;

$$u^2 = x_\nu x^\nu - c(\alpha_\nu x^\nu - \alpha_n u)^2, \tag{14}$$

где $c, \alpha_\nu, \alpha_n = \mathrm{const}$;

$$\alpha_\nu x^\nu - \alpha_n u = \varphi(\beta_\nu x^\nu - \beta_n u), \tag{15}$$

$\varphi \in C^2$, β — произвольная постоянная.

3. Размножение решений. Линейные и нелинейные уравнения, инвариантные относительно нетривиальных групп преобразований $x' = f_1(x, u, a)$, $u' = f_2(x, u, a)$, a — параметры группы, обладают важным свойством: если $u = h(x)$ является решением уравнения (1), то новое решение уравнения (1) находится из функционального уравнения

$$f_2(x, u, a) = h(f_1(x, u, a)). \tag{16}$$

Явные формулы типа (16) для уравнений Гамильтона–Якоби, Дирака приведены в [2, 4].

Воспользовавшись формулой (16) и инвариантностью уравнения (1), например, относительно конформных преобразований

$$\begin{aligned} &x'_\mu = \sigma^{-1}(x, u) x_\mu, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n-1, \\ &u' = \sigma^{-1}(x, u) u, \end{aligned}$$

где

$$\sigma(x, u) = 1 + b_\mu x^\mu - b_n u,$$

получаем

$$\sigma^{-1}(x, u) u = h\left(\sigma^{-1}(x, u) x\right). \tag{17}$$

Если $b_n = 0$, то u можно явно определить:

$$u = \sigma(x) h\left(\sigma^{-1}(x) x\right), \qquad \sigma(x) = 1 + b_\mu x^\mu.$$

Из формулы (17) следует, что функции

$$\begin{aligned} &u = \sigma(x, u) \varphi\left(\sigma^{-1}(x, u)\omega_1, \sigma^{-1}(x, u)\omega_2, \ldots, \sigma^{-1}(x, u)\omega_{n-1}\right), \\ &u = \sigma^{-1}(x, u)\left\{(\alpha x)^2 - \alpha^2 x^2\right\} \end{aligned}$$

будут решениями уравнения (1).

В заключение рассмотрим следующее нелинейное обобщение уравнения (1):

$$|u_{\mu\nu}| = F(x, u), \tag{18}$$

F — произвольная функция x, u. Оказывается, что среди множества уравнений вида (18), уравнение МА инвариантно относительно алгебры (2), т.е. справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (18) было инвариантно относительно алгебры (2), необходимо и достаточно, чтобы* $F(x,u)\equiv 0$.

Если рассмотреть подалгебру алгебры (2)

$$\begin{aligned} &p_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu, \\ &K_\mu = x_\mu D, \qquad D = x_\nu p^\nu, \qquad \mu,\nu = 0,1,\dots,n-1, \end{aligned} \tag{19}$$

то, кроме уравнения МА, инвариантного относительно алгебры (19), существует еще одно уравнение, т.е. имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (18) было инвариантно относительно алгебры (19), необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x,u) = \lambda u^{-(n+2)}, \qquad \lambda = \text{const}.$$

Если же рассмотреть подалгебру алгебры (2)

$$\begin{aligned} &p_A = ig^{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad J_{AB} = x_A p_B - x_B p_A, \\ &D = x_A p_A, \qquad A,B = 0,1,\dots,n, \end{aligned} \tag{20}$$

то имеет место

Теорема 4. *Максимальной алгеброй инвариантности уравнения*

$$\lambda_1\left[\Box u(1-u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right]^{(n+4)/3} + \lambda_2\left[(1-u_\nu u^\nu)|u_{\mu\nu}|\right] = 0 \tag{21}$$

при $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ *является алгебра (20).*

Заметим, что при $\lambda_2 = 0$ (21) является многомерным аналогом уравнения Борна–Инфельда, а при $\lambda_1 = 0$ уравнение (21) распадается на два уравнения эйконала и МА.

Теоремы 2–4 доказываются методом С. Ли [3]. Вопрос о линеаризации уравнений Монжа–Ампера–Борна–Инфельда и некоторых других рассмотрен в [5].

1. Погорелов А.В., Многомерная проблема Минковского, М., 1975.
2. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 5–28.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271; *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498.
5. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982.
6. Lie S., *Math. Ann.*, 1885, **25**, № 1, 71–151.

О точных решениях некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея

В.И. ФУЩИЧ, М.М. СЕРОВА

Описаны все нелинейные уравнения вида $\Box u+F(u,\underset{1}{u})u_0=0$, инвариантные относительно расширенной группы Евклида $\tilde{E}(1,n)$. Найдены точные решения некоторых нелинейных уравнений, инвариантных оносительно группы $\tilde{E}(1,n)$ или группы Галилея.

All equations of the form $\Box u+F(u,\underset{1}{u})u_0=0$ are listed, which are invariant under extended Euclidean group $\tilde{E}(1,n)$. Some exact solutions of the nonlinear equations which are invariant under $\tilde{E}(1,n)$ or Galilei $G(1,n)$ group are found.

Введение

Под расширенной группой Евклида $\tilde{E}(1,n)$ будем понимать группу Евклида $E(1,n)$ в $R_1(x)\otimes R_n(x)$, дополненную однопараметрической группой масштабных преобразований $D(1)$.

В первой части настоящей работы описаны все уравнения вида

$$\Box u+F(u,\underset{1}{u})u_0=0, \tag{0.1}$$

инвариантные относительно группы $\tilde{E}(1,n)$. Для некоторых уравнений вида (0.1) построены многопараметрические семейства частных решений. В (0.1) приняты следующие обозначения:

$$u=u(x),\qquad x=(x_0\equiv t,x_1,\dots,u_n),\qquad \underset{1}{u}=(u_1,\dots,u_n),$$

$$u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu},\qquad \mu=0,1,\dots,n,\qquad \Box=\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\Delta,$$

F — произвольная непрерывная и n раз дифференцируемая функция u и $\underset{1}{u}$.

Во второй части работы (§§ 3–8) построены точные решения некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), инвариантных относительно группы Галилея. Рассмотренные нами системы часто встречается в гидродинамических исследованиях.

Методом Ли доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение (0.1) инвариантно относительны группы $\tilde{E}(1,n)$ только в таких трех случаях:*

$$1)\quad F=u^kf\left(u_au_a/u^{2k+2}\right), \tag{0.2}$$

Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1983, С. 24–54.

$$2)\quad F = \exp u f\left(u_a u_a / \exp 4u\right), \tag{0.3}$$

$$3)\quad F = \sqrt{u_a u_a} f(u), \tag{0.4}$$

где k — произвольная постоянная, f — произвольная дифференцируемая функция. Базисные элементы алгебры $E(1,n)$, заданные на множестве решений уравнения (0.1), имеют стандартный вид

$$p_\mu = i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad \mu,\nu = 0,1,\ldots,n, \quad a,b = 1,\ldots,n, \tag{0.5}$$

а оператор D, соответствующий масштабным преобразованиям, задается формулами

$$D = x_\nu p^\nu + i/k \qquad \text{для случая 1);} \tag{0.6}$$

$$D = x_\nu p^\nu - i\frac{\partial}{\partial u} \qquad \text{для случая 2);} \tag{0.7}$$

$$D = x_\nu p^\nu \qquad \text{для случая 3).} \tag{0.8}$$

Доказательство этой теоремы сводится к применению алгоритма Ли [3] к уравнениям (0.1). Мы его опускаем, поскольку оно слишком громоздко. Из множества уравнений (0.1) с нелинейностями (0.2)–(0.4) рассмотрим только три уравнения, по одному из каждого класса:

$$\Box u + \lambda u u_0 = 0, \tag{0.9}$$

$$\Box u + \lambda u_0 \exp u = 0, \tag{0.10}$$

$$\Box u + \lambda\sqrt{u_a u_a}\, u_0 = 0. \tag{0.11}$$

Уравнение (0.9) часто встречается в теории поля, газовой динамике. Инвариантные классы точных решений (0.9) приведены в [1, 2], поэтому далее построим частные решения уравнений (0.10), (0.11).

Решения уравнений (0.10), (0.11) будем искать с помощью анзатца [1]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{0.12}$$

где φ — некоторая неизвестная функция от новых инвариантных переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)\}$, $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции, $\omega(x)$ — инварианты группы $\tilde{E}(1,n)$.

Для явного построения решений необходимо найти инварианты группы $\tilde{E}(1,n)$, функции $f(x)$ и $g(x)$, а затем решить соответствующее уравнение для функции $\varphi(\omega)$.

§ 1. Инварианты расширенной группы Евклида

В этом параграфе приведем инварианты группы $\tilde{E}(1,3)$. Коэффициенты ξ^μ инфинитезимального оператора

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(u)\frac{\partial}{\partial u}$$

для группы $\tilde{E}(1,3)$ имеет вид

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu,$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ, $\mu=\overline{0,3}$ — произвольные постоянные, причем $c_{00}=c_{11}=c_{22}=c_{33}$, $c_{0a}=0$, $c_{ab}=-c_{ba}$, $a\neq b$, $a,b=\overline{1,3}$.

Не вдаваясь в подробности решения соответствующих уравнений Лагранжа [1], выпишем явный вид инвариантов $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ группы $\tilde{E}(1,3)$:

$$1.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{y_a y_a}{y_0^2},\qquad \omega_3=y_0\exp\left(b_1\operatorname{arctg}\frac{\gamma_a y_a}{\beta_a y_a}\right), \tag{1.1}$$

где параметры α_a, β_a, γ_a удовлетворяют соотношениям $\alpha_a\alpha_a=\alpha^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\alpha_a\gamma_a=0$, $\beta_a\beta_a=\gamma_a\gamma_a\neq 0$, $(\beta_a y_a)^2+(\gamma_a y_a)^2=\frac{b_1^2}{\alpha^2}(\alpha^2\omega_2-\omega_1^2)$.

$$2.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{y_a y_a}{y_0^2},\qquad \omega_3=\frac{\beta_a y_a}{\alpha_a y_a}-b_2\ln\alpha_a y_a, \tag{1.2}$$

где $\alpha_a\alpha_a=\alpha_a\beta_a=0$, $\beta_a\beta_a\neq 0$.

$$3.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{y_a y_a}{y_0^2},\qquad \omega_3=\frac{\beta_a y_a}{y_0^{b_3}}, \tag{1.3}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\beta_a\beta_a=0$.

$$4.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{\sigma_a x_a}{y_0},\qquad \omega_3=\delta_a x_a-b_4\ln y_0, \tag{1.4}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\alpha_a\delta_a=\alpha_a\sigma_a=\sigma_a\sigma_a=\delta_a\delta_a=0$, $\delta_a\sigma_a=a\neq 0$.

$$5.\quad \omega_1=\beta_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2}+y_a y_a,\qquad \omega_3=x_0-b_3\operatorname{arctg}\frac{l_a y_a}{\delta_a y_a}, \tag{1.5}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha^2\neq 0$, $l_a l_a=\delta_a\delta_a\neq 0$, $\alpha_a l_a=\alpha_a\delta_a=l_a\delta_a=\beta_\nu\delta^\nu=0$, $\beta_\nu\beta^\nu\neq 0$, $(l_a y_a)^2+(\delta_a y_a)^2=l^2\omega_2$.

$$6.\quad \omega_1=\beta_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2}+y_a y_a,\qquad \omega_3=x_0+b_6\ln\sigma_a x_a, \tag{1.6}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha^2\neq 0$, $\beta_\nu\beta^\nu\neq 0$, $\alpha_a\sigma_a=\sigma_a\sigma_a=\beta_\nu\sigma^\nu=0$.

$$\begin{gathered}7.\quad \omega_1=\beta_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\frac{(\alpha_a y_a)^2}{2}+b_7 l_a y_a,\\ \omega_3=\frac{(\alpha_a y_a)^3}{3}+b_7\alpha_a y_a l_a y_a-b_7^2\delta_a y_a,\end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\beta_\nu\beta^\nu\neq 0$, $l_a l_a=\alpha_a\delta_a=\delta_a\delta_a=l^2\neq 0$, $\alpha_a\alpha_a=\delta_a l_a=0$.

$$8.\quad \omega_1=\alpha_a x_a,\qquad \omega_2=x_a x_a,\qquad \omega_3=x_0-b_8\operatorname{arctg}\frac{l_a x_a}{\delta_a x_a}, \tag{1.8}$$

где $\alpha_a\alpha_a=\alpha^2\neq 0$, $l_a l_a=\delta_a\delta_a=l\neq 0$, $\alpha_a l_a=\alpha_a\delta_a=l_a\delta_a=0$.

$$9.\quad \omega_a=\frac{y_a}{y_0},\qquad a=\overline{1,3}. \tag{1.9}$$

$$10.\quad \omega_1=\alpha_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\beta_a x_a,\qquad \omega_3=\gamma_a x_a, \tag{1.10}$$

где $\alpha_\nu\alpha^\nu=\alpha^2\neq 0$, $\beta_a\beta_a=\beta^2\neq 0$, $\gamma_a\gamma_a=\gamma^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=b_9$, $\alpha_a\gamma_a=b_{10}$, $\beta_a\gamma_a=b_{11}$.

В формулах (1.1)–(1.10) $y_\nu=x_\nu+a_\nu$, $z_\nu=x_\nu+\frac{1}{2}a_\nu$, a_ν, b_k, δ_a, l_a, σ_a, α_ν, β_ν, γ_ν — постоянные, которые выражаются через параметры группы $c_{\mu\nu}$ и d_μ.

Для того чтобы найти функции $f(x)$ и $g(x)$ в формуле (0.12), нужно проинтегрировать уравнение

$$\frac{du}{\eta}=dt. \tag{1.11}$$

Используя явный вид η, находим из (1.11) функции $f(x)$ и $g(x)$.

§ 2. Решения уравнения (0.10)

Рассмотрим уравнение (0.10) в четырехмерном пространстве $x=(x_0\equiv t,x_1,x_2,x_3)$. Решения уравнения (0.10) ищем по формуле (0.12). Из явного вида η и формулы (1.11) следует, что $f(x)\equiv 1$ для всех десяти случаев, $g(x)=-\ln y_0$ случаев 1–4, а для остальных $g(x)\equiv 0$.

Итак, решения уравнения (7) ищем в виде

$$u=\varphi(\omega)+g(x). \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (0.10), для функции φ получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно новых инвариантных переменных ω_1, ω_2, ω_3:

$$\psi^{ab}(\omega)\varphi_{ab}+\psi^a(\omega)\varphi_a+\psi(\omega)+\lambda\exp\varphi(\psi^{0a}(\omega)\varphi_a+1)=0, \tag{1.13}$$

где

$$\psi^{ab}(\omega)g_0\exp g=\omega_{a\nu}\omega_b^\nu,\qquad \psi^a(\omega)g_0\exp g=\Box\omega_a,$$
$$\psi(\omega)g_0\exp g=\Box g,\qquad \psi^{0a}(\omega)g_0=\omega_{a0}.$$

Для первых 6 случаев инвариантов ω уравнения для функции φ имеют вид:

$$\begin{aligned}1.\quad &(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}-\omega_3^2\left(1-\frac{\alpha^2b_1^2}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\right)\varphi_{33}+\\ &+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}-4\omega_2\omega_3\varphi_{23}+6(\omega_2-1)\varphi_2+2\omega_1\varphi_1-\\ &-\frac{\alpha^2b_1^2\omega_3}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi_3+\lambda(-\omega_1\varphi_1+2\omega_2\varphi_2+\omega_3\varphi_3-1)\exp\varphi+1=0.\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}2.\quad &\omega_1^2\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}+\frac{b_2}{\omega_1^2}\varphi_{33}+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}-4b_2\varphi_{23}+\\ &+2\omega_1\varphi_1+6(\omega_2-1)\varphi_2-\lambda(\omega_1\varphi_1+2\omega_2\varphi_2+1)\exp\varphi+1=0.\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}3.\quad &(\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}+b_3^2\omega_3^2\varphi_{33}+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}+\\ &+2b_3\omega_1\omega_3\varphi_{13}+4\omega_3(b_3\omega_2-1)\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6(\omega_2-1)\varphi_2+\\ &+b_3(b_3+1)\omega_3\varphi_3-\lambda(\omega_1\varphi_1+2\omega_2\varphi_2+b_3\omega_3\varphi_3+1)\exp\varphi+1=0.\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} 4.\quad & (\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2^2\varphi_{22}+b_4^2\varphi_{33}+4\omega_1\omega_2\varphi_{12}+2b_4\omega_1\varphi_{13}+\\ & +4b_4\omega_2\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6\omega_2\varphi_2+b_4\varphi_3-\\ & -\lambda(\omega_1\varphi_1+2\omega_2\varphi_2+b_4\varphi_3+1)\exp\varphi+1=0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} 5.\quad & \beta\varphi_{11}+\omega_2\varphi_{22}+\left(1-\frac{b_5}{\omega_2}\right)\varphi_{33}+\\ & +2\beta_0\varphi_{13}-4\varphi_2+\lambda(\beta_0\varphi_1+\varphi_3)\exp\varphi=0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} 6.\quad & \beta\varphi_{11}+\omega_2\varphi_{22}+2\beta_0\varphi_{13}+\varphi_{33}-\\ & -4b_6\varphi_{23}-4\varphi_2+\lambda(\beta_0\varphi_1+\varphi_3)\exp\varphi=0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Если найти хотя бы частное решение любого из уравнений (1.14)–(1.19), то по формуле (1.12) найдем решение уравнения (0.10).

Рассмотрим уравнение (1.14). Если предположить, что $\partial\varphi/\partial\omega_2=\partial\varphi/\partial\omega_3=0$, то из (1.14) для функции φ получим ОДУ второго порядка

$$(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_1-\lambda(\omega_1\varphi_1+1)\exp\varphi+1=0. \tag{1.20}$$

Интегрируя уравнение (1.20), имеем

$$(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_1-\lambda\omega_1\exp\varphi=-\omega_1+c_1,$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Последнее уравнение подстановкой

$$\varphi=\ln v \tag{1.21}$$

приводится к уравнению Бернулли

$$(\omega_1^2-\alpha^2)v'+(\omega_1-c_1)v-\lambda\omega_1 v^2=0,$$

общее решение которого

$$v=\left[(\omega_1-\alpha)^{\frac{\alpha-c_1}{2\alpha}}(\omega_1+\alpha)^{\frac{\alpha+c_1}{2\alpha}}\int\frac{-\lambda\omega_1 d\omega_1}{(\omega_1-\alpha)^{\frac{3\alpha-c_1}{2\alpha}}(\omega_1+\alpha)^{\frac{3\alpha+c_1}{2\alpha}}}\right]^{-1}. \tag{1.22}$$

В зависимости от значений постоянной c_1 из (1.22) в силу (1.21), имеем следующие решения уравнения (1.12):

$$\begin{aligned} &\varphi=-\ln\left(\frac{\lambda}{4\alpha}(w\pm\alpha)\ln\left|c_2\frac{\omega_1+\alpha}{\omega_1-\alpha}\right|+\frac{\lambda}{2}\right), \qquad c_1=\pm\alpha,\\ &\varphi=-\ln\left(c_2\sqrt{\omega_1^2-\alpha^2}+\lambda\right), \qquad c_1=0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Тогда из (1.23) и (1.12) получим решения уравнения (0.10):

$$\begin{aligned} &u=-\ln\left(\frac{\lambda}{4\alpha}(\alpha_a y_a\pm\alpha y_0)\ln\left|c_2\frac{\alpha_a y_a+\alpha y_0}{\alpha_a y_a-\alpha y_0}\right|+\frac{\lambda}{2}\right),\\ &u=-\ln\left(c_2\sqrt{(\alpha_a y_a)^2-\alpha^2 y_0^2}+\lambda\right). \end{aligned}$$

Если в уравнении (1.15) положить $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} = 0$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$\omega_1^2\varphi_{11} + 2\omega_1\varphi_1 - \lambda(\omega_1\varphi_1 + 1)\exp\varphi + 1 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi = -\ln\left[\frac{\omega_1}{c_1}\left(c_2\exp\frac{c_1}{\omega_1} - \lambda\right)\right], \tag{1.24}$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования. Тогда из (1.24) и (1.12) имеем решение уравнения (0.10)

$$u = -\ln\left[\frac{\alpha_a y_a}{c_1 y_0}\left(c_2\exp\frac{c_1 y_0}{\alpha_a y_a} - \lambda\right)\right].$$

Рассмотрим уравнение (1.16), положив $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} = 0$. Тогда для функции φ получим ОДУ

$$(\omega_1 + \alpha^2)\varphi_{11} + 2\omega_1\varphi_1 - \lambda\exp\varphi(\omega_1\varphi_1 + 1) + 1 = 0,$$

которое интегрированием приводится к уравнению Бернулли

$$(\omega_1^2 + \alpha)v' + (\omega_1 - c_1)v - \lambda\omega_1 v^2 = 0, \qquad \varphi = \ln v. \tag{1.25}$$

Решая (1.25), получаем

$$v = \left\{\sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2}\left[c_2\exp\left(-\frac{c_1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\alpha}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda c_1}{c_1^2 + \alpha^2}\left(\frac{\omega_1}{c_1^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{c_1}\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2}}\right)\right]\right\}^{-1},$$

а

$$\varphi = -\ln\left\{\sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2}\left[c_2\exp\left(-\frac{c_1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\alpha}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda c_1}{c_1^2 + \alpha^2}\left(\frac{\omega_1}{c_1^2 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{c_1}\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2}}\right)\right]\right\}. \tag{1.26}$$

Из (1.26) и (1.12) имеем решение уравнения (0.10):

$$\varphi = -\ln\left\{c_2\sqrt{(\alpha_a y^a)^2 + \alpha^2 y_0^2}\left[\exp\left(-\frac{c_1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\alpha_a y_a}{\alpha y_0}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda c_1}{c_2(c_1^2 + \alpha^2)}\left(\frac{\alpha_a y_a}{y_0(c_1^2 + \alpha^2)} - \frac{\alpha^2}{c_1}\frac{y_0}{\sqrt{(\alpha_a y_a)^2 + \alpha^2 y_0^2}}\right)\right]\right\}.$$

Если в уравнении (1.16) положить $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = 0$, то для функции φ получим следующее ОДУ:

$$b_3\omega_3\varphi_{33} + b_3(b_3 + 1)\omega_3\varphi_3 - \lambda\exp\varphi(b_3\omega_3\varphi_3 + 1) = 0. \tag{1.27}$$

Подстановкой $\omega_3 = t^{b_3}$ уравнение (1.27) приводится к уравнению (1.20), в котором ω_1 нужно заменить на t. Из (1.20) имеем

$$\varphi = -\ln\left[\frac{\omega_3^{1/b_3}}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1}{\omega_3^{1/b_3}} - \lambda\right)\right]. \tag{1.28}$$

Из (1.28) и (1.12) получаем решение уравнения (0.10):

$$u = -\ln\left[\frac{(\beta_a y_a)^{1/b_3}}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1 y_0}{(\beta_a y_a)^{1/b_3}} - \lambda\right)\right].$$

Если в уравнении (1.17) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = 0$, то получим ОДУ

$$b_4^2\varphi_{33} + b_4\varphi_3 - \lambda\exp\varphi(b_4\varphi_3 + 1) + 1 = 0, \tag{1.29}$$

которое заменой

$$\omega_3 = \ln t, \qquad t = \exp\omega_3$$

приводится к уравнению (1.27). Из (1.28) получим решение уравнения (1.29)

$$\varphi = -\ln\left[\frac{\exp a\omega_3}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1}{a\omega_3} - \lambda\right)\right], \qquad a = 1/b_4. \tag{1.30}$$

Тогда, в силу (1.12), из (1.30) имеем решение уравнения (0.10):

$$u = -\ln\left[\frac{\exp a\delta_a x_a}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1 x_0}{\delta_a x_a} - \lambda\right)\right].$$

Для уравнений (1.18) и (1.19) удалось найти частные решения. В результате имеем следующее решение уравнения (0.10):

$$u = -\ln\left[\frac{\mu}{c_1} + c_2\exp(-c_1\beta_\nu x^\nu)\right], \qquad \mu = \frac{\lambda\beta_0}{\beta},$$

$$u = -\ln\left[\frac{\lambda}{c_1} + c_2(\sigma_a x_a)^{-c_1 b_6}\exp(-c_1 x_0)\right].$$

Нетрудно убедиться, что решениями уравнения (0.10) будут функции

$$u = -\ln\left[f(\beta_a y_a)\left(c_2\exp\frac{y_0}{f(\beta_a y_a)} - \lambda\right)\right], \tag{1.31}$$

$$u = -\ln\left[\frac{\lambda}{c_1} + c_2(g(\sigma_a x_a)\exp x_0)^{-c_1}\right], \tag{1.32}$$

где f и g — произвольные дифференцируемые функции, β_a и σ_a — параметры, удовлетворяющие условию $\beta_a\beta_a = \sigma_a\sigma_a = 0$. Формулы (1.31) и (1.32) описывают целые массы решений уравнены (0.10).

Отметим, что полученные решения будут решениями уравнения (0.10) в n-мерном пространстве.

§ 2. Решения уравнения (0.11)

Рассмотрим нелинейное уравнение (0.11) в пространстве переменных (x_0, x_1, x_2, x_3). Аналогично, как и в предыдущем параграфе, используем формулу (1.12), явный вид инвариантов $\omega(x)$ (1.1)–(1.10) и значения функции $g(x) = b\ln y_0$ для случаев 1)–4) и $g(x) = b\beta_0 x_0$ для случаев 5), 6) При этом для функции $\varphi(\omega)$ получим следующие ДУЧП:

$$\begin{aligned}1)\quad & (\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}-\omega_3^2\left[1-\frac{\alpha^2b_1^2}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\right]\varphi_{33}-\\ & -4\omega_1(1-\omega_2)\varphi_{12}-4\omega_2\omega_3\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1-6(\omega_2-1)\varphi_2-\\ & -\frac{\alpha^2b_1^2\omega_3}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi_3+\lambda b\left(\alpha\varphi_1+2\sqrt{\omega_2}\varphi_2+\frac{\alpha b_1\omega_3}{\sqrt{\alpha^2\omega_3-\omega_1^2}}\varphi_3\right)+\\ & +\lambda\left(-\alpha\omega_1\varphi_1^2-4\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi_2^2+\frac{\alpha b_1\omega_3}{\sqrt{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}}\varphi_3^2\right)=b;\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}2)\quad & \omega_1^2\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}-\frac{\beta}{\omega_1^2}\varphi_{33}+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}-4b_2\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+\\ & +6(\omega_2-1)\varphi_2-\lambda b\left(2\omega_2\varphi_2+\sqrt{\frac{\beta}{\omega_1}}\varphi_3\right)+\lambda\left(-4\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi_2^2\right)=0;\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}3)\quad & (\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}+b_3^2\omega_3\varphi_{33}+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}+\\ & +4\omega_3(b_3\omega_2-1)\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6(\omega_2-1)\varphi_2+b_3(b_3+1)\omega_3\varphi_3+\\ & +\lambda b\left(\alpha\varphi_1+2\sqrt{\omega_2}\varphi_2\right)-\lambda\left(\alpha\omega_1\varphi_1^2+4\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi_2^2\right)=b;\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}4)\quad & (\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2^2\varphi_{22}+b_4^2\varphi_{33}+4\omega_1\omega_2\varphi_{12}+2b_4\omega_1\varphi_{13}+\\ & +4b_4\omega_2\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6\omega_2\varphi_2+b_4\varphi_3+\lambda b\alpha\varphi_1-\lambda\omega_1\varphi_1=b;\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}5)\quad & \beta_1\varphi_{11}-4\omega_2\varphi_{22}+\left(1-\frac{\alpha^2}{\omega_2}\right)\varphi_{33}+2\beta_0\varphi_{13}-4\varphi_2+\lambda b\Biggl(-\lambda\beta_0\beta\varphi_1-\\ & -2i\lambda\beta_0\sqrt{\omega_2}\varphi_2+\frac{b_5\alpha}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi\Biggr)+\lambda\left(-\beta_0\beta\varphi_1^2+\frac{\beta_5\alpha}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi_3^2\right)=b;\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}6)\quad & \beta\varphi_{11}-4\omega_{22}\varphi_{22}+2\beta_0\varphi_{13}+\varphi_{33}-4b_6\varphi_{23}-4\varphi_2+\\ & +\lambda b\left(-\lambda\beta_0\beta\varphi_1-2\lambda i\beta_0\sqrt{\omega_2}\varphi_2\right)+\lambda(-\beta_0\beta\varphi_1^2)=b.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Рассмотрим уравнение (2.1). Предположим, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$, для функции φ получим ОДУ

$$(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+[2\omega_1+\lambda b\alpha]\varphi_1-\lambda\alpha\omega_1^2=b,\tag{2.7}$$

которое заменой

$$\varphi_1=z(\omega_1)\tag{2.8}$$

приводим к уравнению Риккати

$$(\omega_1^2-\alpha^2)z'+[2\omega_1-\lambda b\alpha]z-\lambda\alpha\omega_1 z^2=b. \tag{2.9}$$

Так как функция

$$z_0=\frac{b}{\omega_1+d},\qquad d=\frac{\lambda b\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda^2b^2+4},$$

является частным решением уравнения (2.9), то подстановкой $z=y^{-1}(\omega_1)+z_0$ оно приводится к линейному уравнению относительно функции $y(\omega_1)$.

В случае $b=0$ уравнение (2.9) является уравнением Бернулли

$$(\omega_1^2-\alpha^2)z'+2\omega_1 z-\lambda\omega_1 z^2=0,$$

общее решение которого, как известно, имеет вид

$$z=\left[\frac{\lambda\alpha}{2}+\frac{c_1}{\omega_1^2-\alpha^2}\right]^{-1}. \tag{2.10}$$

Тогда, в силу (2.8), из (2.10) получим решение уравнения (2.7) для $b=0$

$$\varphi=\int\frac{d\omega_1}{\omega_1^2-\alpha^2+\frac{\lambda\alpha}{2c_1}}$$

или

$$\varphi=\frac{1}{cc_1}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{c}+c_2,\qquad -\alpha^2+\frac{\lambda\alpha}{2c_1}=c^2, \tag{2.11}$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Из (2.11) и (1.12) имеем решения уравнения (0.11)

$$u=\frac{1}{cc_1}\operatorname{arctg}\frac{\alpha_a y_a}{cy_0}+c_2,$$
$$u=\frac{1}{2cc_1}\ln\left(c_2\frac{\alpha_a y_a-cy_0}{\alpha_a y_a+cy_0}\right).$$

Если в уравнении (2.1) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\neq 0$, а $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$, то для функции φ получим ОДУ

$$4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}+\left[6(\omega_2-1)+2b\lambda\sqrt{\omega_2}\,\right]\varphi_2-4\lambda\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi^2=b, \tag{2.12}$$

которое подстановкой

$$\varphi_2=z(\omega_2) \tag{2.13}$$

приводится к уравнению Риккати

$$4\omega_2(\omega_2-1)z'+\left[6(\omega_2-1)+2b\lambda\sqrt{\omega_2}\,\right]z-4\lambda\omega_2\sqrt{\omega_2}z^2=b. \tag{2.14}$$

Решением уравнения (2.14), в случае $b=0$, будет функция

$$z=\left[\lambda\omega_2^{3/2}\ln\frac{c_1\omega_2}{\omega_2-1}\right]^{-1}. \tag{2.15}$$

Из (2.15) и (2.13) имеем решение уравнения (2.12) для $b = 0$:

$$\varphi = \frac{2}{\lambda}\int \frac{dt}{\ln \frac{1}{c_1}(1-t^2)}, \qquad t = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}, \qquad c_1 = \text{const}. \tag{2.16}$$

Из (2.16) и (1.12) получим решение уравнения (0.11)

$$u = \frac{2}{\lambda}\int \frac{dt}{\ln \frac{1-t^2}{c_1}}, \qquad t = \frac{y_0}{\sqrt{y_a y_a}}.$$

Полагая в (2.2) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} = 0$, для функции φ имеем ОДУ

$$\omega_1^2\varphi_{11} + 2\omega_1\varphi_1 = b,$$

общее решение которого

$$\varphi = b\ln\omega_1 - \frac{c_1}{\omega_1} + c_2, \qquad c_1, c_2 = \text{const},$$

т.е., согласно (1.2),

$$u = b\ln\alpha_a y_a - \frac{c_1 y_0}{\alpha_a y_a} + c_2.$$

Для уравнений (2.3)–(2.6) удалось найти частные решения:

$$u = b\ln(\beta_a y_a)^{1/b_3} + \frac{c_1 y_0}{(\beta_a y_a)^{1/b_3}} + c_2,$$

где $\beta_a\beta_a = 0$;

$$u = c_1 y_0 \exp\left(-\frac{\delta_a x_a}{b_4}\right),$$

где $\delta_a\delta_a = 0$;

$$u = \frac{1}{c}\ln\left[c_1\exp(b_5 - \alpha\beta_0 x_0) + c_2\exp(b_5 - \beta_a x_a)\right],$$

где $c = \frac{\lambda\beta_0\sqrt{\beta_a\beta_a}}{\beta^2}$, $\beta_\nu\beta^\nu = \beta \neq 0$;

$$u = 2c_1\int \frac{\exp t}{t}dt + b\beta_0 x_0, \qquad t = \lambda i b\beta_0\sqrt{\frac{\alpha_a y_a}{-\alpha^2} + y_a y_a},$$

где $\alpha_a\alpha_a = -\alpha^2 \neq 0$;

$$u = c_1 x_0 + c_2\ln\sigma_a z_a,$$

где $\sigma_a\sigma_a = 0$;

$$u = c_1\int \exp\frac{1}{t}dt + b\beta_0 x_0, \qquad t = \left[\lambda b\beta_0\sqrt{x_a x_a}\right]^{-1}.$$

В приведенных выше решениях c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Легко проверить, что решением уравнения (0.11) будет функция

$$u = f_1(\alpha_a x_a)x_0 + f_2(\alpha_a x_a), \qquad \alpha_a\alpha_a = 0,$$

где f_1, f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции.

§ 3. Инварианты расширенной группы Галилея

В данным параграфе построены инварианты $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,3) = \{G(1,3), D(1)\}$, т.е. группы Галилея, дополненной группой масштабных преобразований $D(1)$. Эти инварианты используются в последующих параграфах для построения точных решений уравнений Гамильтона–Якоби и трехмерных уравнений газовой динамики.

Инфинитезимальные преобразования группы $\tilde{G}(1,3)$ имеют следующий вид:

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon\xi^\mu(x) + o\left(\varepsilon^2\right),$$
$$\xi^\mu(x) = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu,$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ, $\mu, \nu = \overline{0,3}$ — постоянные параметр группы $\tilde{G}(1,3)$, причем $c_{0a} = 0$, $c_{00} = 2c_{11} = 2c_{22} = 2c_{33}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $a = \overline{1,3}$.

Процесс интегрирования уравнений Лагранжа для получения явных выражений для $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ мы опускаем. Приведем только окончательный результат.

В зависимости от соотношений между параметрами $c_{\mu\nu}$ и d_μ группы $\tilde{G}(1,3)$ будем иметь несколько случаев:

$$\begin{aligned} 1.\quad &\omega_1 = \frac{\alpha_a y_a + b y_0}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \frac{\beta_a x_a - \beta_a A_a(y_0) + \gamma_a B_a(y_0)}{\sqrt{y_0}},\\ &\omega_3 = \frac{\gamma_a x_a - \gamma_a A_a(y_0) - \beta_a B_a(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $A_a(y_0) = c(\delta_a y_0 - \sigma_a)$, $B_a(y_0) = \alpha(\delta_a y_0 + \sigma_a)$, $\vec{\beta} = (\alpha\alpha_2 \cos z_0 - \alpha_1\alpha_3 \sin z_0; -\alpha\alpha_1 \cos z_0 - \alpha_2\alpha_3 \sin z_0; (\alpha^2 - \alpha_3^2)\sin z_0)$, $\vec{\gamma} = \frac{\alpha\vec{\beta}}{\alpha z_0}$, $z_0 = \frac{\alpha}{2c}\ln y_0$, α_a, δ_a, σ_a, b, c — постоянные, $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $\beta_a\beta_a = \gamma_a\gamma_a = \beta^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \alpha_a\gamma_a = \beta_a\gamma_a = 0$, $a = \overline{1,3}$.

$$\begin{aligned} 2.\quad &\omega_1 = \frac{\alpha_a x_a - \alpha_a A_a^-(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \frac{\beta_a x_a - \beta_a A_a^-(y_0) + a\alpha_a A_a^+(y_0)}{\sqrt{y_0}},\\ &\omega_3 = \frac{\gamma_a x_a - \gamma_a A_a^-(y_0) + 2a\beta_a A_a^+(y_0) - 2a^2\alpha_a A_a^-(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $A_a^\pm(y_0) = \delta_a y_0 \pm \sigma_a$, $\vec{\gamma} = (-2\alpha_1 - 2\alpha_2 z_0 + \alpha_1 z_0^2; -2\alpha_2 + 2\alpha_1 z_0 + \alpha_2 z_0^2; \alpha_3 z_0^2)$, $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\gamma}}{2dz_0}$, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\beta}}{dx_0}$, $z_0 = \frac{a}{2}\ln y_0$, α_a, δ_a, σ_a, a — постоянные, $\beta_a\beta_a = \beta^2 \neq 0$, $\gamma_a\gamma_a = \gamma^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \alpha_a\alpha_a = \gamma_a\beta_a = 0$, $a = \overline{1,3}$.

$$3.\quad \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a + b y_0}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \frac{\beta_a z_a + b_+ y_0}{y_0^{a+}}, \qquad \omega_3 = \frac{\gamma_a z_a - b_- y_0}{y_0^{a-}}, \tag{3.3}$$

где α_a, β_a, b, b_+, b_-, a_+, a_- — постоянные, $\alpha_a\alpha_a = -\alpha^2 \neq 0$, $\beta_a\gamma_a = \beta^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \alpha_a\gamma_a = \gamma_a\gamma_a = \beta_a\beta_a = 0$, $a = \overline{1,3}$.

$$\begin{aligned} 4.\quad &\omega_1 = \frac{\alpha_a y_a + b_1 y_0}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \beta_a x_a + b_2 y_0 + b_3 \ln y_0,\\ &\omega_3 = \frac{\gamma_a y_a}{y_0} + b_4 \ln y_0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где b_i, $i=\overline{1,4}$, α_a, β_a, γ_a — постоянные, $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\gamma_a\beta_a=\beta^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\alpha_a\gamma_a=\gamma_a\gamma_a=\beta_a\beta_a=0$, $a=\overline{1,3}$.

$$
\begin{aligned}
5.\quad &\omega_1=ax_0^2+bcx_0+\alpha_a x_a, \qquad \omega_2=\beta_a y_a+\gamma_a A_a(x_0),\\
&\omega_3=\gamma_a y_a+\beta_a A_a(x_0),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где $A_a(x_0)=\delta_a x_0+d_a$, a, b, c, δ_a, d_a — постоянные, α_a, β_a, γ_a те же, что в формуле (3.1), $z_0=bx_0$, $a=\overline{1,3}$.

$$
\begin{aligned}
6.\quad &\omega_1=ax_0^2+bcx_0+\alpha_a x_a, \qquad \omega_2=(\beta_a y_a-\beta_a A_a(x_0))\exp bx_0,\\
&\omega_3=(\gamma_a y_a+\gamma_a A_a(x_0))\exp(-bx_0),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

где $A_a(x_0)=\delta_a x_0+d_a$, a, b, c, δ_a, d_a, α_a, β_a, γ_a — постоянные, $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\beta_a\gamma_a=\beta^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\alpha_a\gamma_a=\beta_a\beta_a=\gamma_a\gamma_a=0$, $a=\overline{1,3}$.

$$
7.\quad \omega_1=x_0-\alpha_a x_a, \qquad \omega_2=x_0-\beta_a x_a, \qquad \omega_3=x_0-\gamma_a x_a,
\tag{3.7}
$$

где α_a, β_a, γ_a — постоянные, $a=\overline{1,3}$.

$$
8.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2=\frac{\beta_a y_a}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_3=\frac{\gamma_a y_a}{\sqrt{y_0}},
\tag{3.8}
$$

где α_a, β_a, γ_a — постоянные, $a=\overline{1,3}$.

В приведенных формулах $y_\nu=x_\nu+a_\nu$, $z_a=x_a+\frac{a_2}{2}$, a_ν — произвольные постоянные, $a=\overline{1,3}$, $\nu=\overline{0,3}$.

§ 4. Точные решения трехмерных уравнений газовой динамики

Уравнения, описывающие изэнтропические движения газа, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}+\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p=0,\\
&\rho_0+\operatorname{div}(\rho\vec{u})=0, \qquad p=f(\rho),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где $\vec{u}=\vec{u}(x)\equiv\{u^1(x),u^2(x),u^3(x)\}$ — скорость распространения, $\rho(x)$ — плотность, $p(x)$ — давление газа, $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$.

В работе [5] установлено, что если

$$
p=\lambda\rho^{5/3}, \qquad \lambda=\text{const},
\tag{4.2}
$$

то уравнения (4.1) инвариантны относительно 16-мерной алгебры Ли, базис которой задается операторами

$$
\partial_\mu, \quad J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a+u^a\partial_{u^b}-u^b\partial_{u^a}, \quad \mu=\overline{0,3},
\tag{4.3}
$$

$$
G_a=x_0\partial_a+\partial_{u^a},
\tag{4.4}
$$

$$
D_0=2x_0\partial_0+x_a\partial_a-3\rho\partial_\rho-u^a\partial_{u^a},
\tag{4.5}
$$

$$
D_1=x_0\partial_0-3\rho_0\partial_\rho-u^a\partial_{u^a},
\tag{4.6}
$$

$$
A=x_0(x_0\partial_0+x_a\partial_a-3\rho\partial_\rho-u^a\partial_{u^a})+x_a\partial_{u^a}, \quad a\neq b, \quad a=\overline{1,3};
\tag{4.7}
$$

в случае

$$p = \frac{2}{\gamma}\rho^{\gamma} \tag{4.8}$$

уравнения (4.1) инвариантны относительно 15-мерной алгебры Ли, образуемой операторами (4.3), (4.4) и (4.9), (4.10):

$$D_0 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{2}{\gamma-1}\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}, \tag{4.9}$$

$$D_1 = x_0\partial_0 - \frac{2}{\gamma-1}\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}; \tag{4.10}$$

в случае

$$p = f(\rho), \tag{4.11}$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, уравнения (4.1) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли, базисные операторы которой имеют вид (4.3), (4.4). Эта алгебра изоморфна алгебре Галилея $G(1,3)$.

Рассмотрим систему уравнений (4.1) в случае политропного газа, т.е. когда давление p задается формулой (4.8):

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda\rho^{\gamma-2}\vec{\nabla}\rho = 0,\\ &\rho_0(\vec{u}\vec{\nabla})\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Решение системы (4.12) ищем в виде

$$\begin{aligned} &u(x) = A(x)\varphi(\omega) + B(x),\\ &\rho(x) = f(x)\varphi^0(\omega), \end{aligned}$$

где $u(x)$, $\varphi(\omega)$ — вектор-столбцы, $A(x)$, $B(x)$ — известные матрицы размерности (3×3) и (3×4) соответственно, $f(x)$ — известная функция или, в векторной форме

$$\begin{aligned} &\vec{u}(x) = \vec{M}(x_0)\varphi^1(\omega) + \vec{N}(x_0)\varphi^2(\omega) + \vec{L}(x_0)\varphi^3(\omega) + \vec{B}(x_0),\\ &\rho \equiv u^0 = y_o^k\varphi^0(\omega). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Отметим, что функции $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{L}$, $\vec{B}$ и постоянная k принимают различные значения в зависимости от вида инвариантов (§ 3). Приведем их вид для каждого из случаев значений инвариантов $\omega(x)$:

$$1)\quad \vec{M}(x_0) = \frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0) = \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{L}(x_0) = \frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{B}(x_0) = \vec{v},\quad k = \frac{1}{1-\gamma},$$

где $\alpha_a v^a = -b$, $\beta_a v^a = c\beta_a\delta_a - \alpha\gamma_a\delta_a$, $\gamma_a v^a = c\gamma_a\delta_a + \alpha\beta_a\delta_a$;

$$2)\quad \vec{M}(x_0) = \frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0) = \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{L}(x_0) = \frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{B}(x_0) = \vec{v},\quad k = \frac{1}{1-\gamma},$$

где $\alpha_a v^a = \alpha_a\beta_a$, $\beta_a v^a = \beta_a\delta_a - a\alpha_a\delta_a$, $\gamma_a v^a = \gamma_a\delta_a - 2a\beta_a\delta_a + 2a^2\alpha_a\delta_a$;

$$3)\quad \vec{M}(x_0)=\frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0)=\frac{\vec{\beta}}{y_0^{a+}},\quad \vec{L}(x_0)=\frac{\vec{\gamma}}{y_0^{a-}},\quad \vec{B}(x_0)=\vec{v},\quad k=\frac{1}{1-\gamma},$$

где $\alpha_a v^a=-b$, $\beta_a v^a=-b_+$, $\gamma_a v^a=-b_-$;

$$4)\quad \vec{M}(x_0)=\frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0)=\frac{\vec{\gamma}}{y_0},\quad \vec{L}(x_0)=\vec{\beta},$$
$$\vec{B}(x_0)=-\vec{\gamma}\frac{b_2}{\beta^2}-\vec{\beta}\frac{b_4}{\beta^2}\ln y_0,\quad k=\frac{1}{1-\gamma};$$

$$5)\quad \vec{M}(x_0)=\vec{\alpha},\quad \vec{N}(x_0)=\vec{\beta},\quad \vec{L}(x_0)=\vec{\gamma},\quad \vec{B}(x_0)=-\frac{2a}{\alpha^2}x_0\vec{\alpha}+\vec{v},\quad k=0,$$

где $\alpha_a v^a=0$, $\beta_a v^a=\gamma_a\delta_a$, $\gamma_a v^a=-\beta_a\delta_a$;

$$6)\quad \vec{M}(x_0)=\vec{\alpha},\quad \vec{N}(x_0)=\exp(-bx_0)\vec{\gamma},\quad \vec{L}(x_0)=\exp(bx_0)\vec{\beta},$$
$$\vec{B}(x_0)=\frac{2ax_0}{\alpha^2}\vec{\alpha}+\vec{v},\quad k=0,$$

где $\alpha_a v^a=0$, $\beta_a v^a=\beta_a\delta_a$, $\gamma_a v^a=-\gamma_a\delta_a$;

$$7)\quad \vec{M}(x_0)=\vec{e}_1,\quad \vec{N}(x_0)=\vec{e}_2,\quad \vec{L}(x_0)=\vec{e}_3,\quad \vec{B}(x_0)=0,\quad k=0,$$

где $\vec{e}_a$, $a=\overline{1,3}$ — единичные орты;

$$8)\quad \vec{M}(x_0)=\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0)=\frac{\vec{e}_2}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{L}(x_0)=\frac{\vec{e}_3}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{B}(x_0)=0,\quad k=\frac{1}{1-\gamma}.$$

Подставляя (4.13) в (4.12) и используя явный вид $\omega(x)=\{\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x)\}$ (см. (3.1)–(3.8)), значения функций $\vec{M}(x_0)$, $\vec{N}(x_0)$, $\vec{L}(x_0)$, $\vec{B}(x_0)$ и постоянной k, для неизвестных функций $\varphi(\omega)\equiv(\varphi^0(\omega),\vec{\varphi}(\omega))$ получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
1.\quad &(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^1_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^1_2-\\
&\quad-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^1_3-\varphi^1+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^2_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^2_2-\\
&\quad-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^2_3-\varphi^2-\frac{\alpha}{c}\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_2=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^3_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^3_2-\\
&\quad-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^3_3-\varphi^3+\frac{\alpha}{c}\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_3=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^0_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^0_2-\\
&\quad-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^0_3-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2(\alpha^2\varphi^1_1+\beta^2\varphi^2_2+\beta^2\varphi^3_3)\varphi^0=0.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
2.\quad &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi^1_1+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi^1_2+\\
&\quad+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+2\gamma^2\varphi^3)\varphi^1_3-\varphi^1+a\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^2+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi_2^2+\\
&\quad+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+2\gamma^2\varphi^3)\varphi_3^2-\varphi^2+2a\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^3+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi_2^3+\\
&\quad+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+2\gamma^2\varphi^3)\varphi_3^3-\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^0+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi_2^0+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+\\
&\quad+2\gamma^2\varphi^3)\varphi_3^0+2(\alpha^2\varphi_3^1+\alpha^2\varphi_1^3+\beta^2\varphi_2^2+\gamma_3^3\varphi_3^3)\varphi^0-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

3. $$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^1-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^1-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^1+\varphi^1-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^2-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^2-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^2+2a_+\varphi^2-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^3-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^3-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^3+2a_-\varphi^3-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^0-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^0-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^0-\\
&\quad-2(-\alpha^2\varphi_1^1+\beta^2\varphi_3^2+\beta^2\varphi_2^3)\varphi^0+\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

4. $$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^1-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^1-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^1+\varphi^1-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^2-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^2-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^2+2\varphi^2-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^3-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^3-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^3+\frac{2b_4}{\beta^2}-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^0-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^0-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^0+\\
&\quad+\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0-2(-\alpha^2\varphi_1^1+\beta^2\varphi_2^2+\beta_3^3)\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

5. $$
\begin{aligned}
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^1+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^1+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^1-\frac{2a}{\alpha^2}+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^2+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^2-b\varphi^3+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^3+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^3+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^3+b\varphi^2+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^0+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^0+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^0+(\alpha^2\varphi_1^1+\beta^2\varphi_2^2+\beta^2\varphi_3^3)\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

6. $$
\begin{aligned}
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi_2^1+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi_3^1-2\frac{a}{\alpha^2}+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^2_1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi^2_2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi^2_3-b\varphi^2+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_2=0,\\
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^3_1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi^3_2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi^3_3+b\varphi^3+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_3=0,\\
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^0_1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi^0_2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi^0_3+(-\alpha^2\varphi^1_1+\beta^2\varphi^2_2+\beta^2\varphi^3_3)\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

7.
$$
\begin{aligned}
&(1-\vec\alpha\vec\varphi)\vec\varphi_1+(1-\vec\beta\vec\varphi)\vec\varphi_2+(1-\vec\gamma\vec\varphi)\vec\varphi_3+\\
&\quad+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}(\vec\alpha\varphi^0_1+\vec\beta\varphi^0_2+\vec\gamma\varphi^0_3)=0,\\
&(1-\vec\alpha\vec\varphi)\varphi^0_1+(1-\vec\beta\vec\varphi)\varphi^0_2+(1-\vec\gamma\vec\varphi)\varphi^0_3-\varphi^0(\vec\alpha\vec\varphi_1+\vec\beta\vec\varphi_2+\vec\gamma\vec\varphi_3)=0.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

8.
$$
\begin{aligned}
&(\omega_1+\vec\alpha\vec\varphi)\vec\varphi_1+(\omega_2+\vec\beta\vec\varphi)\vec\varphi_2+(\omega_3+\vec\gamma\vec\varphi)\vec\varphi_3+\\
&\quad+\frac12\vec\varphi+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}(\vec\alpha\varphi^0_1+\vec\beta\varphi^0_2+\vec\gamma\varphi^0_3)=0,\\
&(\omega_1+\vec\alpha\vec\varphi)\varphi^0_1+(\omega_2+\vec\beta\vec\varphi)\varphi^0_2+(\omega_3+\vec\gamma\vec\varphi)\varphi^0_3+\\
&\quad+\frac{1}{\gamma-1}\varphi^0+\varphi^0(\vec\alpha\vec\varphi_1+\vec\beta\vec\varphi_2+\vec\gamma\vec\varphi_3)=0.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Отметим, что каждая из систем уравнений (4.14)–(4.21) представляет собой систему уравнений в частных производных для функций $\varphi(\omega)$ относительно переменных ω_1, ω_2, ω_3, причем число переменных $\omega(x)$ на единицу меньше, чем переменных x в уравнении (4.12). Если удается найти какое либо решение систем (4.14)–(4.21), то тем самым по формуле (4.13) имеем решение уравнений (4.12).

Рассмотрим уравнения (4.14) в предположении, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}=0$, т.е. $\varphi=\varphi(\omega_2,\omega_3)$. Для функций φ получим уравнения в пространстве двух независимых переменных $\omega=(\omega_2,\omega_3)$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^1_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^1_3-\varphi_1=0,\\
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^2_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^2_3-\\
&\quad-\varphi^2-\frac{\alpha}{c}\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_2=0,\\
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^3_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^3_3-\\
&\quad-\varphi^3+\frac{\alpha}{c}\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_3=0,\\
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^0_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^0_3-\\
&\quad-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2(\beta^2\varphi^2_2+\beta^2\varphi^3_3)\varphi^0=0.
\end{aligned}
$$

Если же $\varphi=\varphi(\omega_1)$, то получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^1_1-\varphi_1+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^2_1-\varphi_2-\frac{\alpha}{c}\varphi^3=0,
\end{aligned}
$$

$$(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi_1^3-\varphi_3+\frac{\alpha}{c}\varphi^2=0,$$
$$(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi_1^0-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2\alpha^2\varphi_1^1\varphi^0=0,$$

частное решению которой при $\gamma+2$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi^1=\frac{\omega_1}{\alpha^2}, &&\varphi^2=c_1\omega_1\sin\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2\omega_1\right),\\ &\varphi^3=c_1\omega_1\cos\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2\omega_1\right), &&\varphi^0=c_0,\end{aligned}\tag{4.22}$$

где c_0, c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Тогда из (4.13), (4.22) и (3.1) имеем решение системы (4.12) для $\gamma=2$

$$\begin{aligned}&\rho=\frac{c_0}{y_0},\\ &\vec{u}=\frac{M(x)}{\sqrt{y_0}}\left[\frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}+\vec{\beta}c_1\sin\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2M(x)\right)+\vec{\gamma}c_1\cos\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2M(x)\right)\right]+\vec{v},\end{aligned}\tag{4.23}$$

где

$$M(x)=\frac{\alpha_ay_a+by_0}{\sqrt{y_0}}.$$

Из (4.15), предполагая $\varphi=\varphi(\omega_1)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^1-\varphi^1+a\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\ &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^2-\varphi^2+2a\varphi^3=0,\\ &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^3-\varphi^3=0,\\ &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^0+2\alpha^2\varphi_1^3-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0=0.\end{aligned}$$

Частное решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi^0=c_0\omega_1^{2/(\gamma-1)}\exp(-2\omega_1),\\ &\varphi^1=\frac{a\omega_1}{\alpha^2}(\omega_1+c_2)^2+\frac{2\lambda c_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}\omega_1\exp(-2(\gamma-1)\omega_1)+c_1\omega_1,\\ &\varphi^2=-\frac{2a}{\alpha^2}\omega_1(\omega_1+c_2),\\ &\varphi^3=\frac{\omega_1}{\alpha^2},\end{aligned}\tag{4.24}$$

где c_0, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Тогда из (4.13), (4.24) и (3.2) имеем решение уравнений (4.12) для любых значений γ:

$$\begin{aligned}&\rho=y_0^{1/(1-\gamma)}(B(x)^{2/(\gamma-1)}\exp(-2B(x)),\\ &\vec{u}=\frac{B(x)}{\sqrt{y_0}}\left\{\vec{\alpha}\left[\frac{a^2}{\alpha^2}(B(x)+c_2)^2+\frac{2\lambda c_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}\exp(-2(\gamma-1)B(x))+c_1\right]-\right.\\ &\left.\quad-\frac{2a}{\alpha^2}\vec{\beta}(B(x)+c_2)+\frac{\vec{\gamma}}{\alpha^2}\right\}+\vec{v},\qquad B(x)=\frac{\alpha_ax_a-\alpha_aA_a^-(x_0)}{\sqrt{y_0}}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.17). Его удалось решить в случае $\varphi=\varphi(\omega_1)$, т.е. найти частное решение следующей системы:

$$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi^1_1+\varphi^1-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi^2_1+2\varphi^2=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi^3_1+\frac{2b_4}{\beta^2}=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi^0_1+\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2\alpha^2\varphi^1_1\varphi^0=0
\end{aligned}
$$

для $\gamma=2$ и $b_4=0$:

$$
\varphi^0=\frac{\omega_1^2+c_0}{-8\alpha^2\lambda},\qquad \varphi^1=\frac{\omega_1}{2\alpha^2},\qquad \varphi^2=0,\qquad \varphi^3=F(\omega_1), \tag{4.26}
$$

где c_0 — постоянная интегрированння, F — произвольная дифференцируемая функция.

Из (4.13), (4.26) и (3.4) получаем решение уравнений (4.12), содержащее произвольную функцию:

$$
\begin{aligned}
&\rho=\frac{(\alpha_a y_a+b_1y_0)^2}{8\alpha^2\lambda y_0^2},\\
&\vec{u}=\frac{\vec{\alpha}}{2\alpha^2}\frac{\alpha_a y_a-b_1y_0}{y_0}+\vec{\beta}F\left(\frac{\alpha_a y_a+b_1y_0}{\sqrt{y_0}}\right),
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

где $\alpha_a\alpha_a=\alpha^2\neq0$, $\alpha_a\beta_a=\beta_a\beta_a=0$.

Если в уравнениях (4.18) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$, то для определения функций φ получим уравнения

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^1_1-\frac{2a}{\alpha^2}+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^2_1-b\varphi^3=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^3_1+b\varphi^2=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^0_1+\alpha^2\varphi^1_1\varphi^0=0,
\end{aligned}
$$

общее решение которых для $\gamma=-1$ составляют функции

$$
\begin{aligned}
&\varphi^0=\sqrt{\frac{c_0^2-\alpha^2\lambda}{4a(\omega_1+c_1)}}, && \varphi^1=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{c_0}{\varphi^0}-bc\right),\\
&\varphi^2=c_2\sin\left[\frac{2b}{c_0}(\omega_1+c_1)\varphi^0+c_3\right], && \varphi^3=c_2\cos\left[\frac{2b}{c_0}(\omega_1+c_1)\varphi^0+c_3\right],
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Из (4.13), (4.28) и (3.5) имеем решение уравнений (4.12) для $\gamma=-1$:

$$
\begin{aligned}
&\rho=A(x),\\
&\vec{u}=\frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}\left(\frac{c_0}{A(x)}-2ax_0-bc\right)+\vec{\beta}c_2\sin\left[\frac{2b}{c_0}(\alpha_a x_a+ax_0^2+bcx_0+\right.\\
&\qquad\left.+c_1)A(x)+c_3\right]+\vec{\gamma}c_2\cos\left[\frac{2b}{c_0}(\alpha_a x_a+ax_0^2+bcx_0+c_1)A(x)+c_3\right]+\vec{v},
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

где

$$A(x) = \sqrt{\frac{c_0^2 - \alpha^2\lambda}{4a(\alpha_a x_a + a x_0^2 + b c x_0 + c_1)}}.$$

Рассмотрим уравнение (4.21) в предположении, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} = 0$. Для функций φ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$(\omega_1 - \vec{\alpha}\vec{\varphi})\vec{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\vec{\varphi} + \lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\vec{\alpha}\varphi_1^0 = 0,$$
$$(\omega_1 - \vec{\alpha}\vec{\varphi})\varphi_1^0 + \frac{1}{\gamma-1}\varphi^0 + \vec{\alpha}\vec{\varphi}_1\varphi^0 = 0$$

решение которых для $\gamma = 2$ имеет вид

$$\varphi^0 = c_0, \qquad \varphi^a = f^a(\omega_1), \tag{4.30}$$

где c_0 — постоянная интегрирования, f^a — произвольные дифференцируемые функции, причем $\alpha_a f^a = -\omega_1$, $a = \overline{1,3}$. Тогда из (4.13), (4.30) и (3.5) имеем решение уравнений (4.12), содержащее произвольные функции

$$\begin{aligned} &\rho = c_0, \\ &u^a = f^a(x_0 - \alpha_a x_a). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Аналогичным путем можно построить точные решения уравнений (4.1) и в случае $p = f(\rho)$.

§ 5. Генерирование решений уравнений (4.12)

Приведем еще несколько решений уравнений (4.12) в случае $\gamma = 5/3$, которые мы получили, используя инвариантность данных уравнений относительно преобразований

$$\begin{aligned} &x' = \frac{x}{1-\theta x_0}, \\ &\rho' = \rho(1-\theta x_0)^3, \\ &\vec{u}\,' = \vec{u}(1-\theta x_0) + \theta\vec{x}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $x = (x_0, \vec{x})$, θ — параметр, порождаемый оператором (4.7).

Если $\rho = F(x)$, $\vec{u} = \vec{G}(x)$ какое-то решение уравнений (4.12), то решениями будут следующие функции:

$$\rho = \frac{F\left(\frac{x}{1-\theta x_0}\right)}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad \vec{u} = \frac{\vec{G}\left(\frac{x}{1-\theta x_0}\right) - \theta\vec{x}}{1-\theta x_0}. \tag{5.2}$$

Формулы (5.2) позволяют по известным решениям уравнений (4.12) строить новые решения. Даже из очевидного решения

$$\rho = c_0, \qquad \vec{u} = \vec{c},$$

где c_μ, $\mu = \overline{1,3}$ — const, можно получить решение уравнения (4.12) зависящее от всех четырех переменных

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad \vec{u} = \frac{\vec{c} + \theta\vec{x}}{1-\theta x_0}.$$

С использованием формул (5.2) получены следующие решения уравнений (4.12):

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\beta}[c_2\cos cA(x) - c_1\sin cA(x)] + \vec{\gamma}[c_2\sin cA(x) + c_1\cos cA(x)]}{\alpha_a x_a + bx_0} - \frac{\theta\vec{x}+\vec{v}}{1-\theta x_0},$$

где $A(x) = \ln\frac{\alpha_a x_a + bx_0}{\sqrt{x_0(1-\theta x_0)}}$, $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \beta_a\gamma_a = \alpha_a\gamma_a = 0$, $\beta_a\beta_a = \gamma_a\gamma_a = c \neq 0$, c_0, c_1, c_2 — постоянные, $a = \overline{1,3}$;

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad u^a = \frac{f^a\left(\frac{x_0 - \alpha_a x_a}{1-\theta x_0}\right) - \theta x_a}{1-\theta x_0},$$

где f^a — произвольные дифференцируемые функции, причем $\alpha_a f^a = 1$, α_a, c_0 — постоянные, $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $a = \overline{1,3}$;

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha} f\left[\vec{\beta}\left(\frac{\vec{x}+\vec{v}x_0}{1-\theta x_0}\right)\right] - \theta\vec{x} - \vec{v}}{1-\theta x_0},$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, α_a, β_a, v^a — параметры, $\alpha_a\alpha_a \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = 0$.

§ 6. Точные решения уравнений газовой динамики в случае изохорического движения

Рассмотрим уравнение

$$\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = 0, \tag{6.1}$$

где $\vec{u} = \{u^1(x), u^2(x), u^3(x)\}$, $x = (x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Используя алгоритм [3], нами установлена теорема, которую из-за громоздкости реализации лиевского алгоритма приведем без доказательства.

Теорема 1. *Максимальной алгеброй инвариантности уравнений (6.1) является бесконечномерная алгебра Ли, причем координаты инфинитезимального оператора $\xi^\mu(x,\vec{u})$ и $\eta(x,\vec{u})$ удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\begin{aligned} &\eta^a = u^b\xi^a_b - u^a u^b\xi^0_b - u^a\xi^0_0 + \xi^a_0, \\ &\eta^a_0 + u^b\eta^a_b = 0, \qquad a = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где индекс внизу, как и раньше, означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Замечание. Если $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$, то из (6.2), в частности, получим результат [4].

Решения уравнений (6.1), инвариантные относительно расширенной группы Галилея, будем искать по формуле

$$\vec{u}(x) = \vec{M}(x_0)\varphi^1(\omega) + \vec{N}(x_0)\varphi^2(\omega) + \vec{L}(x_0)\varphi^3(\omega) + \vec{B}(x_0), \tag{6.3}$$

которая является частным случаем соотношения (4.13).

Так как все случаи независимых инвариантов ω и значений функций $\vec{M}(x_0)$, $\vec{N}(x_0)$, $\vec{L}(x_0)$ и $\vec{B}(x_0)$ для уравнений (6.1) совпадают со случаями 1)–8) § 3 и

§ 4, то уравнения для функций $\varphi(\omega)$ будут совпадать с (4.14)–(4.21), где нужно положить $\lambda = 0$ и опустить последнее уравнение в каждой из указанных систем.

Приведем полученные нами решения уравнений (6.1):

$$\vec{u}(x) = \frac{M(x)}{2\alpha^2\sqrt{y_0}}\left[\vec{\alpha}a^2(\ln^2 c_2M(x) + c_1) - 2\vec{\beta}a\ln c_2M(x) + \vec{\gamma}\right] + \vec{v}, \tag{6.4}$$

где $M(x) = \frac{\alpha_a x_a}{\sqrt{y_0}} - \sqrt{y_0}\alpha_a A_a^-(x_0) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_a x_a}{\sqrt{y_0}} - \sqrt{y_0}\alpha_a A_a^-(x_0)\right)^2 + c_3}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ удовлетворяют условиям (3.2);

$$\vec{u}(x) = \frac{F(x)}{\sqrt{y_0}}\left(\frac{\vec{\alpha}}{2\alpha^2} + \vec{\beta}c_2\sin\ln(c_3F(x))^{\alpha/c} + \vec{\gamma}c_2\cos\ln(c_3F(x))^{\alpha/c}\right) + \vec{v}, \tag{6.5}$$

где $F(x) = \frac{\alpha_a y_a + by_0 \pm \sqrt{(\alpha_a y_a + by_0)^2 + c_1 y_0}}{\sqrt{y_0}}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.1);

$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}}{2\alpha^2}F(x) + c_2\vec{\beta}\,[F(x)]^{-2a} + c_2\vec{\gamma}\,[F(x)]^{-2a} + \vec{v}, \tag{6.6}$$

где $F(x) = \frac{-\alpha_a y_a - by_0 \pm \sqrt{(\alpha_a y_a + by_0)^2 + c_1 y_0}}{y_0}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.3);

$$\vec{u}(x) = \frac{c_1\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}}(\varphi^3)^{1/2a_-} + c_2\vec{\beta}(\varphi^3)^{a_+/a_-}y_0^{-a_+} + \vec{\gamma}y_0^{-a_-}\varphi^3 + \vec{v}, \tag{6.7}$$

где функция φ^3 определяется из уравнения $\omega_2(\varphi^3)^{a_-} + c_2(\varphi^3)^{-a_+} = \beta^2$, ω_2, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.3);

$$\begin{gathered}\vec{u}(x) = \vec{\alpha}\left(\frac{M(x)}{2\alpha^2\sqrt{y_0}} + \frac{b_1}{\alpha^2}\right) + \vec{\gamma}\left(c_2\frac{(M(x))^2}{y_0} - \frac{b_2}{\beta^2}\right) + \\ +\vec{\beta}\left(\frac{2b_4}{\beta^2}\ln M(x) - \frac{b_4}{\beta^2}\ln y_0\right),\end{gathered} \tag{6.8}$$

где $M(x) = \frac{-(\alpha_a y_a + b_1 y_0) \pm \sqrt{(\alpha_a y_a + by_0)^2 + c_1 y_0}}{\sqrt{y_0}}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ — из (3.4);

$$\vec{u}(x) = \vec{\alpha}\left(\frac{c_1\sqrt{\varphi^2}}{y_0} + \frac{b_1}{\alpha^2}\right) + \vec{\beta}\left(\frac{b_4}{\beta^2}\ln\frac{\varphi^2}{y_0} + c_3\right) + \vec{\gamma}\left(\frac{\varphi^2}{y_0} - \frac{b_2}{\beta^2}\right), \tag{6.9}$$

где функция φ^2 определяется из уравнения $b_3\ln\varphi^2 + \beta^2\varphi^2 = \beta_a x_a + b_2 y_0 + b_3\ln y_0 + c_2$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ (см. (3.3));

$$\begin{gathered}\vec{u}(x) = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}(M(x) - 2ax_0 - bc) + \vec{\beta}c_2\sin\left(\frac{b}{2a}M(x) + c_3\right) + \\ +\vec{\gamma}c_2\cos\left(\frac{b}{2a}M(x) + c_3\right),\end{gathered} \tag{6.10}$$

где $M(x) = \pm\sqrt{4a(ax_0^2 + bcx_0 + \alpha_a x_a) + c_1}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ — из (3.4);

$$\begin{gathered}\vec{u}(x) = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}(M(x) + 2ax_0 - bc) + \vec{\beta}c_2\exp\left(-\frac{b}{\sqrt{a}}M(x) + bx_0\right) + \\ +\vec{\gamma}c_2 b\left(\frac{1}{\sqrt{a}}M(x) - x_0\right) + \vec{v},\end{gathered} \tag{6.11}$$

где $M(x) = \sqrt{ax_0^2 + bcx_0 + \alpha_a x_a + c_1}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.5);

$$u^a(x) = f^a(x_0 - \alpha_b x_b), \tag{6.12}$$

где f^a — произвольные дифференцируемые функции, α_a — производные постоянные, причем $\alpha_a f^a = 1$, $a = \overline{1,3}$;

$$\vec{u}(x) = \vec{c}F(x), \qquad F(x) = \frac{y_0 c_1^2 \pm \sqrt{c_1^2 - 3\left(\frac{\alpha_a y_a}{\sqrt{y_0}}\right)^3}}{a(\alpha_a y_a)^2}. \tag{6.13}$$

Таким образом, мы получили целый класс точных решений уравнений (6.1).

Замечание. Если решения уравнения (6.1) искать в виде

$$\vec{u}(x) = \vec{x}\varphi(\omega), \tag{6.14}$$

где φ — новая неизвестная функция, то для $\omega = \vec{\alpha}\vec{x}\exp(\lambda x_0)$ и $\omega = \sqrt{\vec{x}^{\,2}}\exp(\lambda x_0)$, $\lambda = \mathrm{const}$, оно приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции φ

$$\omega\varphi'(\varphi + \lambda) + \varphi^2 = 0,$$

интегрируя которое, получим алгебраическое уравнение

$$\frac{1}{\varphi}\exp\frac{\lambda}{\varphi} = c_1\omega. \tag{6.15}$$

Таким образом, с помощью подстановки (6.14) уравнение (6.1) приводится к алгебраическому уравнению (6.15).

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть получены частные решения уравнений Эйлера и Гамильтона–Якоби [5].

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования а математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Серова М.М., Точные решения одного нелинейного уравнения второго порядка, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 29–34.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнение, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Rosen G., Ullrich G.W., Invariance group of the equation $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}$, *Siam. J. Appl. Math.*, 1973, **24**, № 3, 286–288.
5. Овсянников Л.В., Лекции по основам газовой динамики, М., Наука, 1981, 367 с.
6. Серова М.М., О некоторых классах точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея, Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Киев, 1983, 16 с.

О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВА

Групповые свойства уравнений газовой динамики детально исследовал Л.В. Овсянников [1, 2], который установил, что максимально широкой локальной группой Ли уравнений газовой динамики

$$
\begin{aligned}
&D\rho + \rho \operatorname{div} u = 0,\\
&Du + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = 0,\\
&Ds = 0, \qquad p = f(p, s),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $D = \partial/\partial x_0 + \boldsymbol{u}\vec{\nabla}$, $\rho = \rho(x)$, $p = p(x)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = \{u^1(x), u^2(x), u^3(x)\}$, $x_0 = t$, для случая политропного газа (с показателем $\gamma = 5/3$), является 14 параметрическая группа.

Наше основное наблюдение, о котором речь пойдет ниже, состоит в том, что уравнения (1) для одномерного движения, и только в этом случае, допускают группу значительно шире, чем группа, установленная в [2]. Оказывается, одномерные уравнения (1) обладают уникальной симметрией — бесконечно параметрической группой C_∞. Именно это свойство уравнений (1) в одномерном случае и дает возможность найти общее решение одномерных уравнений газовой динамики. Риман впервые, не используя в явном виде групповые свойства уравнений (1), нашел его частное решение в виде простых волн.

Следует отметить, что одномерные уравнения Даламбера, Лиувилля также допускают группу C_∞. Этот факт и является причиной их интегрируемости.

Для одномерного течения политропного газа

$$
p = \frac{\lambda^2}{3}\rho^3, \qquad \lambda \ \ — \text{параметр}, \tag{2}
$$

уравнения (1) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&u_0^0 + u^1 u_1^0 + u^0 u_1^1 = 0,\\
&u_0^1 + u^1 u_1^1 + \lambda^2 u^0 u_1^0 = 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где введены следующие обозначения:

$$
u^0 \equiv \rho, \qquad u^1 \equiv u, \qquad u_\nu^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1.
$$

Цель настоящей заметки такова: 1) показать, что одномерные уравнения (3) допускают бесконечно параметрическую группу C_∞; 2) построить общее решение уравнений (3).

Доклады академии наук СССР, 1983, **268**, № 5, С. 1102–1104.

Для установления группы инвариантности системы (3) необходимо, как хорошо известно [1, 3], найти коэффициентные функции инфинитезимального оператора

$$X = \xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\nu}, \qquad u = (u^0, u^1). \tag{4}$$

Можно показать, что эта задача сводится к решению следующих систем:

$$\begin{aligned} &\eta_0^0 + u^1\eta_1^0 + u^0\eta_1^1 = 0,\\ &\eta_0^1 + u^1\eta_1^1 + \lambda^2 u^0\eta_1^0 = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\eta^0 = -u^0(\xi_0^0 - \xi_1^1 + 2u^1\xi_1^0),\\ &\eta^1 = -u^1(\xi_0^0 - \xi_1^1 + u^1\xi_1^0) - (\lambda u^0)^2\xi_1^0 + \xi_0^1; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\eta_{u^0}^0 = \eta_{u^1}^1, \qquad \eta_{u^1}^0 = \eta_{u^0}^1; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\xi_{u^0}^1 = u^1\xi_{u^0}^0 - \lambda^2 u^0\xi_{u^1}^0,\\ &\xi_{u^1}^1 = u^1\xi_{u^1}^0 - u^0\xi_{u^0}^0. \end{aligned} \tag{8}$$

Из условия совместности системы (8) имеем

$$\xi_{u^0u^0}^0 - \lambda^2\xi_{u^1u^1}^0 + \frac{2}{u^0}\xi_{u^0}^0 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для отыскания функций ξ^μ нужно найти общее решение уравнения типа Дарбу (9). Замечательным свойством уравнения (9) является то, что оно допускает группу G_∞, точнее, справедлива

Теорема 1. *Максимальной группой инвариантности (м.г.и.) уравнения (9) является бесконечно параметрическая группа Ли вида*

$$(u^\mu)' = u^\mu + \varepsilon\tau^\mu + o\left(\varepsilon^2\right), \qquad (\xi^0)' = \xi^0 + \varepsilon\sigma + o\left(\varepsilon^2\right). \tag{10}$$

Коэффициенты инфинитезимального оператора

$$X = \tau^\mu(u,\xi^0)\frac{\partial}{\partial u^\mu} + \sigma(u,\xi^0)\frac{\partial}{\partial \xi^0}$$

задаются формулами

$$\begin{aligned} &\tau^0 = f(u^1 + \lambda u^0) + g(u^1 - \lambda u^0),\\ &\tau^1 = f(u^1 + \lambda u^0) - g(u^1 - \lambda u^0) + c_1,\\ &\sigma = \left(c_2 - \frac{\tau^0}{u^0}\right)\xi^0 + b(u), \end{aligned} \tag{11}$$

где f, g — произвольные функции от ρ и u, $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, $b(u)$ — произвольное решение уравнения Дарбу (9).

Эта теорема “подсказывает” (см. формулы (11)) замену

$$W_0 = u^1 + \lambda u^0, \qquad W_1 = u^1 - \lambda u^0, \tag{12}$$

с помощью которой (9) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2[(W_0 - W_1)\xi^0]}{\partial W_0\partial W_1} = 0. \tag{13}$$

Из (13) получаем, что общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\xi^0 = \frac{F(x, u^1 + \lambda u^0) + G(x, u^1 - \lambda u^0)}{2\lambda u^0}, \tag{14}$$

F, G — произвольные функции. Подставив (14) в (8)–(5), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{x_0 F^0 + G^0 + x_0 F^1 + G^1}{2\lambda u^0}, \\ \xi^1 &= \frac{(u^1 - \lambda u^0)(x_0 F^0 + G^0) + (u^1 + \lambda u^0)(x_0 F^1 + G^1)}{2\lambda u^0} + H(x), \\ \eta^0 &= -\frac{1}{2}(F^0 + F^1), \qquad \eta^1 = -\frac{1}{2}(F^0 - F^1), \end{aligned} \tag{15}$$

где $F^0 = F^0(\omega_0)$, $F^1 = F^1(\omega_1)$, $G^0 = G^0(\omega_0)$, $G^1 = G^1(\omega_1)$ — произвольные функции, $H(x) = c_\nu x^\nu + d$, $c_\nu, d = \text{const}$,

$$\omega_0 = x_0(u^1 + \lambda u^0) - x_1, \qquad \omega_1 = x_0(u^1 - \lambda u^0) - x_1. \tag{16}$$

Итак, мы нашли м.г.и. уравнения (3), т.е. доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Максимальной группой инвариантности уравнений (3) является бесконечно параметрическая группа Ли вида*

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon\xi^\mu + o\left(\varepsilon^2\right), \qquad (u^\mu)' = u^\mu + \varepsilon\eta^\mu + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{17}$$

где ξ^μ и η^μ задаются формулами (15).

С учетом локальной замены (см. формулы (16))

$$V^0 = x_0(u^1 + \lambda u^0) - x_1, \qquad V^1 = x_0(u^1 - \lambda u^0) - x_1 \tag{18}$$

система (3) распадается на два незацепленных уравнения

$$x_0 V^0_0 + (V^0 + x_1)V^0_1 = 0, \qquad x_0 V^1_0 + (V^1 + x_1)V^1_1 = 0. \tag{19}$$

Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$\frac{V^0 + x_1}{x_0} = \varphi^0(V^0), \qquad \frac{V^1 + x_1}{x_0} = \varphi^1(V^1). \tag{20}$$

Возвращаясь к функциям u и ρ, получаем общее решение уравнений одномерной газовой динамики

$$u \pm \lambda\rho = \Phi^\pm\left(x_0 - \frac{x_1}{u \pm \lambda\rho}\right), \tag{21}$$

где $\Phi^\pm$ — произвольные дифференцируемые функции.

Этот результат говорит о том, что в одномерном случае скорость u и плотность ρ газа связаны довольно общим функциональным соотношением (21).

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Овсянников Л.В., Лекции по основам газовой динамики, М., Наука, 1981, 350 с.
3. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 6–28.

On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN

Multiparametrical exact solutions of the nonlinear Dirac equation are found within the framework of the group-theoretical approach. A procedure for generating new solutions from known ones is presented. The solutions obtained are analytic in the coupling constant, vanishing at infinity and describe the oscillations with the corresponding solutions of the equation without self-interaction as amplitude.

1. Introduction

In this paper the multiparametrical exact solutions of nonlinear Dirac equations are obtained with the help of the group-theoretical approach. The equations have the form:

$$\left[i\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu - m - \lambda(\bar{\psi}(x)\psi(x))^k\right]\psi(x) = 0, \tag{1}$$

$$\left[i\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu - \lambda(\bar{\psi}(x)\psi(x))^k\right]\psi(x) = 0, \tag{2}$$

where γ are 4×4 Dirac matrices (see, for example, Bjorken and Drell [1]), $\mu,\nu = 0,1,2,3$, $m \neq 0$, k, λ are arbitrary real constants. We use the summation convention for repeated indices.

It is worthwhile to distinguish equations (1) with $m \neq 0$ from (2) because of their considerable different symmetry properties.

In order to find the exact solutions, we exploit the fact that equation (1) is invariant under the Poincaré group $P(1,3)$, equation (2) is invariant under the Weyl group $W(1,3) = \{P(1,3), D\}$ when $k \neq \frac{1}{3}$ and under the conformal group $C(1,3)$ when $k = \frac{1}{3}$. We also show how to draw new families of solutions from known ones.

Fushchych [3] has obtained multiparametrical exact solutions of many-dimensional nonlinear scalar sine-Gordon, Liouville, Hamilton–Jacobi, eikonal, Born–Infeld (Fushchych and Serow [5]), Schrödinger (Fushchych and Moskaliuk [4]) equations by the method recently proposed (Fushchych [3]). Here we slightly generalise this method to fit it for the system of partial differential equations.

2. The method

Let Q be an infinitesimal operator of local transformations admitted by equations (1) or (2). The general form of such an operator is

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x), \tag{3}$$

where $\xi^\mu(x)$ are scalar functions of x, $\eta(x)$ denotes the 4×4 matrix depending on x and $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$.

The operator Q gives the possibility to find exact solutions of equations (1) or (2) in such a manner.

J. Phys. A: Math. Gen., 1983, **16**, № 2, P. 271–277.

For the solutions to be found we adopt the *ansatz* suggested by Fushchych [3]

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{4}$$

where the nonsingular 4×4 matrix $A(x)$ can be defined from the equation

$$QA(x) \equiv (\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x))A(x) = 0, \tag{5}$$

ω are invariants of the differential part of the operator$Q$, i.e. functions satisfying

$$\xi^\mu(\partial\omega/\partial x_\mu) = 0 \tag{6}$$

or the equivalent Lagrange–Euler system

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x)} = \frac{dx_1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \frac{dx_3}{\xi^3(x)} \stackrel{\text{def}}{=} d\tau. \tag{7}$$

$\varphi(\omega)$ is the new unknown four-component spinor field depending on new variables ω, the number of which is one less than the number of variables x.

When $A(x)$ and ω are known, then the substitution of expression $A(x)\varphi(\omega)$ in place of $\psi(x)$ in equations (1) and (2) leads to a system of differential equations for $\varphi(\omega)$ which is often rather easy to solve.

Another procedure for determining the *ansatz* (4) explicitly is to solve, besides equation (7), the following system of ordinary differential equations

$$d\psi/d\tau = -\eta(x(\tau))\psi. \tag{8}$$

If we insert in the general solution of this system, the value τ defined from (7), and consider constants of integration as functions of ω then we shall obtain the *ansatz* (4) possessing the properties (5) and (6). Let us discuss the procedure of generating new solutions from known ones.

The general form of transformations generated by operator Q (3) is

$$x \to x' = f(x,\theta), \qquad \psi(x) \to \psi'(x') = R(x,\theta)\psi(x), \tag{9}$$

where $R(x,\theta)$ is a 4×4 matrix, θ is a parameter of transformations. Formula (9) implies that

$$\psi_{\text{new}}(x) = R^{-1}(x,\theta)\psi_{\text{old}}(x') \tag{10}$$

will be a solution of the equation which admits operator Q as well as ψ_{old} ($R^{-1}(x,\theta)$ denotes the inverse matrix).

Remark. Equation (5) is the consequence of the following obvious condition: the solutions having the form (4) do not produce new solutions by virtue of the procedure stated above when transformations (9) are generated by the same operator Q (3). Indeed, we have according to (4) and (10)

$$R^{-1}(x,\theta)A(x')\varphi(\omega') = A(x)\varphi(\omega). \tag{11}$$

$\omega' = \omega$ because ω are invariants of the operator Q:

$$A(x') = A(x) + \theta\xi^\mu(x)(\partial A(x)/\partial x_\mu) + \cdots, \tag{12}$$

$$R(x,\theta) = I - \theta\eta(x) + \cdots. \tag{13}$$

If we substitute (12) and (13) into (11) and retain terms linear in θ then we obtain (5).

It is clear now that it is the form of transformations (9) that leads to the *ansatz* (4).

3. The solutions

First of all we give an example of a conformally invariant solution to the Dirac equation (2) with Gursey [6] nonlinearity $k = \frac{1}{3}$ which ensures the conformal invariance of the equation. This solution has the form

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \exp[i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega)]\chi \equiv \\ &\equiv \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta}\sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right)\chi,\end{aligned} \tag{14}$$

where $\omega = \beta x/x_\nu x^\nu$, β^ν are arbitrary real constants, $\beta \equiv (\beta_\nu\beta^\nu)^{1/2} > 0$. χ denotes a space-time independent spinor,

$$\bar\chi\chi = a = \text{constant}, \qquad \varkappa = a^{1/3}/\beta^\nu\beta_\nu, \qquad \beta x \equiv \beta^\nu x_\nu, \qquad \text{etc.}$$

The solution (14) was sought for in the form

$$\psi(x) = \left[\gamma x/(x_\nu x^\nu)^2\right]\varphi(\omega), \qquad \omega = \beta x/x_\nu x^\nu \tag{15}$$

obtained with the help of the conformal transformation operator

$$\begin{aligned}&Q_{\text{conf}} = c^\mu k_\mu = 2(cx)x\partial - x^2 c\partial + (\gamma c\gamma x + 2cx),\\ &Q_{\text{conf}}\left[\gamma x/(x_\nu x^\nu)^2\right] \equiv 0, \qquad \left[2(cx)x\partial - x^2 c\partial\right]\omega = 0,\\ &\omega = \beta^x/x_\nu x^\nu, \qquad \beta c = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

where c^μ are arbitrary real constants, $x^2 \equiv x_\nu x^\nu$, $x\partial = x_\nu(\partial/\partial x_\nu)$, $cx = c^\nu x_\nu$. After the substitution of the expression (15) into equation (2) with $k = \frac{1}{3}$ it implies that $\varphi(\omega)$ must satisfy the following system of nonlinear ordinary differential equations

$$d\varphi/d\omega = i(\lambda/\beta_\nu\beta^\nu)(\bar\varphi\varphi)^{1/3}(\gamma\beta)\varphi$$

for which it is easy to obtain the general solution

$$\varphi = \exp[i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega]\chi \equiv [\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i(\gamma\beta/\beta)\sin(\lambda\varkappa\beta\omega)]\chi$$

and then (14).

It will be noted that the solution (14) is analytic in the coupling constant λ, in contrast to the solution obtained by Merwe [8] with the help of the Heisenberg *ansatz* [7]. Besides that

$$\bar\psi(x)\psi(x) = a/(x_\nu x^\nu)^3,$$

i.e. $\bar\psi\psi$ dies off very fast when $x_\nu x^\nu \to \infty$. It is also noteworthy that such a solution is easy to generalise to the case of n spatial variables, the conformally invariant equation being

$$\left[i\gamma\partial - \lambda(\bar\psi(x)\psi(x))^{1/n}\right]\psi(x) = 0,$$

and the solution takes the form

$$\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^{(n+1)/2}} \exp[i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega]\chi, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n$$

(here γ-matrices have appropriate structure (see e.g. Boerner [2]). Using straightforward calculations one can make sure that the functions (18), stated below, satisfies equation (1) as well as equation (2) if $m = 0$. This solution has been obtained by virtue of operator Q_L which is a linear combination of the Lorentz rotation generators

$$\begin{aligned} &Q_L = \theta_a J_{0a}, \qquad a = 1, 2, 3, \\ &J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_a, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\psi = A(x)\varphi(\omega), \\ &A(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\theta_3}{\theta}s_+ & -\dfrac{\theta_-}{\theta}s_- & -\dfrac{\theta_3}{\theta}\dfrac{1}{s_+} & \dfrac{\theta_-}{\theta}\dfrac{1}{s_-} \\ \dfrac{\theta_+}{\theta}s_+ & \dfrac{\theta_3}{\theta}s_- & -\dfrac{\theta_+}{\theta}\dfrac{1}{s_+} & -\dfrac{\theta_3}{\theta}\dfrac{1}{s_-} \\ s_+ & 0 & \dfrac{1}{s_+} & 0 \\ 0 & s_- & 0 & \dfrac{1}{s_-} \end{pmatrix}, \\ &\varphi(\omega) = \begin{pmatrix} \omega^{-1/2}[F_0\cos(\alpha+\alpha_0) + iG_0\sin(\alpha+\alpha_0)] \\ \omega^{-1/2}[F_1\cos(\alpha+\alpha_1) + iG_1\sin(\alpha+\alpha_1)] \\ -[G_0\cos(\alpha+\alpha_0) + iF_0\sin(\alpha+\alpha_0)] \\ -[G_1\cos(\alpha+\alpha_1) + iF_1\sin(\alpha+\alpha_1)] \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{18}$$

where $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, α_0, α_1, F_0, F_1, G_0, G_1, $c = 4(F_0G_0 + F_1G_1) > 0$ are arbitrary real constants:

$$\begin{aligned} &\omega = (\theta x_0)^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})^2, \qquad s_\pm = (\theta x_0 \pm \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})^{1/2}, \\ &\theta_\pm = \theta_1 \pm i\theta_2, \qquad \theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}, \\ &\alpha = \frac{\lambda c^k}{\theta(k-1)}\omega^{(1-k)/2} - \frac{m}{\theta}\sqrt{\omega}, \qquad k \neq 1, \\ &\alpha = -\frac{\lambda c}{2\theta}\ln\omega - \frac{m}{\theta}\sqrt{\omega}, \qquad k = 1. \end{aligned} \tag{19}$$

This solution is also analytic in the coupling constant λ and in the mass term, and

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = \frac{c}{\sqrt{\omega}} = \frac{4(F_0G_0 + F_1G_1)}{[(\theta x_0)^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})^2]^{1/2}}, \tag{20}$$

i.e. $\bar{\psi}\psi$ dies off when $x_\nu x^\nu \to \infty$.

The next solution has been obtained by means of the operator

$$\begin{aligned} &Q_{LD} = Q_L + \varkappa D, \qquad \varkappa = \text{constant}, \\ &D = x^\nu\partial_\nu - 1/2k \end{aligned} \tag{21}$$

which is admitted only by equation (2) and not by equation (1). We found an explicit solution in the case $k = 1$ in such a form

$$\psi(x)=A(x)\varphi(\omega),$$
$$A(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\lambda_- s} & -\dfrac{\theta_-}{\theta}e^{\lambda_- s} & \dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\lambda_+ s} & \dfrac{\theta_-}{\theta}e^{\lambda_+ s} \\ -\dfrac{\theta_+}{\theta}e^{\lambda_- s} & \dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\lambda_- s} & \dfrac{\theta_+}{\theta}e^{\lambda_+ s} & -\dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\lambda_+ s} \\ e^{\lambda_- s} & 0 & e^{\lambda_+ s} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- s} & 0 & e^{\lambda_+ s} \end{pmatrix},$$
$$\varphi(\omega)=\begin{pmatrix} G_0\omega^{i\beta}+F_0\omega^{-i\beta} \\ G_1\omega^{i\beta}+F_1\omega^{-i\beta} \\ \omega^{-1/2}\left(\dfrac{\theta+\varkappa}{\theta-\varkappa}\right)^{1/2}\left(G_0\omega^{i\beta}-F_0\omega^{-i\beta}\right) \\ \omega^{-1/2}\left(\dfrac{\theta+\varkappa}{\theta-\varkappa}\right)^{1/2}\left(G_1\omega^{i\beta}-F_1\omega^{-i\beta}\right) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

where $\boldsymbol{\theta}=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$, $\varkappa$ are arbitrary real constants and F_0, F_1, G_0, G_1 are complex ones:

$$\theta_\pm=\theta_1\pm i\theta_2,\qquad \theta=\left(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^3\right)^{1/2},$$
$$\omega=(\theta x_0-\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})(\theta x_0+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})^{(\theta-\varkappa)/(\theta+\varkappa)},\qquad s=\ln(\theta x_0+\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})/\theta+\varkappa,$$
$$\beta=\frac{\lambda c_1}{2\theta}\left(\frac{\theta+\varkappa}{\theta-\varkappa}\right)^{1/2},\qquad \lambda_\pm=\frac{-\varkappa\pm\theta}{2},\quad \theta>\varkappa, \tag{23}$$
$$c_1=4\left(\frac{\theta+\varkappa}{\theta-\varkappa}\right)^{1/2}(F_0^*F_0+F_1^*F_1-G_0^*G_0-G_1^*G_1).$$

This solution is also analytic in the coupling constant and

$$\bar\psi(x)\psi(x)=c_1/\left[(\theta x_0)^2-(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x})^2\right]^{1/2}, \tag{24}$$

i.e. $\bar\psi\psi$ dies off as was previously the case (see (20)).

When $k\neq 1$ some particular exact solutions of equation (2) analogous to those given in (22) are provided by the *ansatz* (4) with $A(x)$ and $\varphi(\omega)$ having the form:

$$A(x)=\begin{pmatrix} -\dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\mu_- s} & -\dfrac{\theta_-}{\theta}e^{\mu_- s} & \dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\mu_+ s} & \dfrac{\theta_-}{\theta}e^{\mu_+ s} \\ -\dfrac{\theta_+}{\theta}e^{\mu_- s} & \dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\mu_- s} & \dfrac{\theta_+}{\theta}e^{\mu_+ s} & -\dfrac{\theta_3}{\theta}e^{\mu_+ s} \\ e^{\mu_- s} & 0 & e^{\mu_+ s} & 0 \\ 0 & e^{\mu_- s} & 0 & e^{\mu_+ s} \end{pmatrix}, \tag{25}$$
$$\varphi(\omega)=\begin{pmatrix} \varphi_0(\omega) \\ \varphi_1(\omega) \\ \omega^{\mu_+/(\varkappa-\theta)}\varphi_2(\omega) \\ \omega^{\mu_+/(\varkappa-\theta)}\varphi_3(\omega) \end{pmatrix},$$

where φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 are defined from the following system of ordinary differential equations

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0^*\varphi_2 + \varphi_0\varphi_2^* + \varphi_1^*\varphi_3 + \varphi_1\varphi_3^* = -\frac{1}{2}c_2 = \text{constant},\\
&\frac{d\varphi_0}{d\omega} = \frac{i\lambda}{2\theta}c_2^k\omega^{\mu_+(k+1)/(\varkappa-\theta)}\varphi_2(\omega),\\
&\frac{d\varphi_2}{d\omega} = \frac{i\lambda}{2\theta}c_2^k\omega^{[\mu_+(k-1)/(\varkappa-\theta)]-1}\frac{\theta+\varkappa}{\theta-\varkappa}\varphi_0(\omega),\\
&\frac{d\varphi_1}{d\omega} = \frac{i\lambda}{2\theta}c_2^k\omega^{\mu_+(k+1)/(\varkappa-\theta)}\varphi_3(\omega),\\
&\frac{d\varphi_3}{d\omega} = \frac{i\lambda}{2\theta}\frac{\theta+\varkappa}{\theta-\varkappa}c_2^k\omega^{[\mu_+(k-1)/(\varkappa-\theta)]-1}\varphi_1(\omega),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$\mu_\pm = (-\varkappa\pm\theta k)/2k$, c_2 is an arbitrary real constant, and s, ω, $\theta_\pm$ and $\theta_3\theta$ are defined in (23).

Below we present the explicit form of transformations admitted by equations (1) or (2). They can be used to generate new exact solutions of the equations in accordance with the formula (10).

The conformal transformations

$$
\begin{aligned}
&x'_\mu = \left(x_\mu - c_\mu x^2\right)/\sigma(x), \qquad \sigma(x)\equiv 1-2cx+c^2x^2,\\
&\psi'(x') = R_{\text{conf}}\psi(x) = \sigma(x)(1-\gamma c\gamma x)\psi(x), \qquad R^-_{\text{conf}} = \sigma^{-2}(x)(1-\gamma x\gamma c).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

The transformation dilatation

$$
x'_\mu = e^\alpha x_\mu, \qquad \psi'(x') = R_D\psi(x) = e^{-\alpha/2k}\psi(x), \qquad R_D^{-1} = e^{\alpha/2k}. \tag{28}
$$

The transformations of rotations

$$
\begin{aligned}
&x'_0 = x_0, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cos\delta + \frac{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\delta}}{\delta}\sin\delta + \frac{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{x})}{\delta^2}(1-\cos\delta),\\
&\psi'(x') = R_{\text{rot}}\psi(x) = \left(\cos\frac{1}{2}\delta + \frac{i}{\delta}(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\delta})\sin\frac{1}{2}\delta\right)\psi(x),\\
&R_{\text{rot}} = \cos\frac{1}{2}\delta - \frac{i}{\delta}(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\delta})\sin\frac{1}{2}\delta,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

where $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, $\delta = \left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right)^{1/2}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_0\times\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ are Pauli matrices, σ_0 is the identity 2×2 matrix.

The Lorentz transformations

$$
\begin{aligned}
&x'_0 = x_0\cosh\theta_1 - x_1\sinh\theta_1,\\
&x'_1 = x_1\cosh\theta_1 - x_0\sinh\theta_1,\\
&\psi'(x') = R_{L_1}\psi(x) = \left(\cosh\frac{1}{2}\theta_1 + \gamma_0\gamma_1\sinh\frac{1}{2}\theta_1\right)\psi(x),\\
&R_{L_1}^{-1} = \cosh\frac{1}{2}\theta_1 - \gamma_0\gamma_1\sinh\frac{1}{2}\theta_1.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

The rest of the Lorentz transformations are analogous to those given above.

The transformations of displacements

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \qquad \psi'(x') = \psi(x). \tag{31}$$

In formulae (26)–(31) c^μ, α, δ_a, θ_a, a_μ are arbitrary real constants.

In conclusion we would like to give a simple example of the transformation of the well known plane-wave solution of the free massless Dirac equation into the new solution using formulae (10) and (27).

$$\psi_{\rm pw}(x) = \exp(ikx)\chi, \qquad k^2 \equiv k_\mu k^\mu = 0,$$

χ is a space-time independent spinor, $\bar\chi\chi =$ constant:

$$\psi_{\rm pw}(x) \to \psi(x) = \frac{1-\gamma x\gamma c}{\sigma^2(x)} \exp\left\{ik^\mu\left[\left(x_\mu - c_\mu x^2\right)/\sigma(x)\right]\right\}\chi, \qquad k_\mu k^\mu = 0.$$

It is easy to verify that it is a solution of the free massless Dirac equation but it is no longer a plane-wave solution because of the nonlinear character of the conformal transformations. Moreover,

$$\bar\psi(x)\psi(x) = \bar\chi\chi/\sigma^3(x) \equiv \text{constant}/\left(1 - 2cx + c^2x^2\right)^3$$

and dies off very fast when $x^2 \equiv x_\nu x^\nu \to \infty$ while

$$\bar\psi_{\rm pw}(x)\psi_{\rm pw}(x) = \bar\chi\chi = \text{constant}.$$

Acknowledgment

We would like to express our gratitude to the referees for their comments and useful suggestions.

1. Bjorken J.D., Drell S.D., Relattivistic quantum mechanics, New York, McGraw-Hill, 1964.
2. Boerner H., Representations of groups, Amsterdam, North-Holland, 1970, ch. 8, § 3.
3. Fushchych W.I. (ed.), The symmetry of mathematical physics problems, in Algebraic-Theoretic Studies in Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 6–28.
4. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cimento*, 1981, **31**, 571–576.
5. Fushchych W.I., Serow N.I., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1982, **263**, 582–586.
6. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 988.
7. Heisenberg W., *Z. Noturf. A*, 1954, **9**, 292–303.
8. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, № 6, 485–486.

Conformal symmetry and new exact solutions of SU_2 Yang–Mills theory

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN

Conformally invariant and some others exact solutions of the SU_2 Yang–Mills (YM) theory are found. The final conformal transformations for the YM potentials and the formulae of generating new solutions from known ones are presented.

The field equations of the SU_2 invariant YM theory are formidable system of partial differential equations yet possessing a wide symmetry group of local transformations. This group is known to be the 15-parametrical conformal group $C_{1,3}$ and the gauge group SU_2. Recently [1] it was shown that SU_2 YM equations do not allow any other Lie symmetries.

By now the interest in classical YM theory has become so widespread that many workers are involved in the seach for new solutions. A comprehensive review of the known exact solutions of SU_2 YM theory is presented in [2]. These solutions are obtained by introducing various ansätze for the YM potentials. But the very question of finding relevant ansätze is rather obscure, although there can be no doubt that successes achieved are connected with the symmetry properties of YM equations.

In this note we exploit the symmetry of SU_2 YM equations to obtain some new exact solutions. Besides that we present the final conformal transformations for the YM potentials and construct formulae allowing us to generate "new" solutions of the equations, starting from an "old" known one.

The SU_2-invariaut YM equations have the form

$$\partial^\nu G^a_{\mu\nu} = e\varepsilon_{abc} g^{\alpha\nu} G^b_{\mu\alpha} W^c_\nu, \qquad a,b=1,2,3, \quad \mu,\nu=0,1,2,3, \tag{1}$$

where

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\nu + e\varepsilon_{abc} W^b_\mu W^c_\nu, \qquad g_{\alpha\nu} = (1,-1,-1,-1)\delta_{\alpha\nu}$$

or at greater length

$$\begin{aligned}\Box W^a_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu W^a_\mu) + e\varepsilon_{abc}\left[(\partial^\mu W^b_\mu)W^c_\nu - g^{\alpha\mu} W^b_\alpha(\partial_\nu W^c_\mu) + 2W^b_\mu(\partial^\mu W^c_\nu)\right] + \\ + e^2 W^b_\mu g^{\mu\alpha}(W^b_\nu W^a_\alpha - W^b_\alpha W^a_\nu) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

As was previously mentioned these equations are invariant under the conformal group $C_{1,3}$ the special conformal transformations having the form

$$\begin{aligned} & x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \\ & cx \equiv c^\nu x_\nu, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad x^2 \equiv x^\nu x_\nu, \\ & W^{a\prime}_\mu(x') = \left[\sigma(x)\delta^\nu_\mu + 2\left(x_\mu c^\nu - c_\mu c^\nu + 2cx c_\mu x^\nu - c^2 x_\mu x^\nu - x^2 c_\mu c^\nu\right)\right] W^2_\nu(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Lettere al Nuovo Cimento, 1983, **38**, № 2, P. 37–40.

One can directly verify that (3) leaves eq. (2) invariant. Expressions (3) can be obtained by solving Lie equations for the infinitesimal generator of conformal transformations

$$Q_{\rm conf} = 2cxx\partial - x^2 c\partial + 2(cxI_4 + S_{\mu\nu}c^\mu x^\nu) \times I_3, \tag{4}$$

where I_3, I_4 are unit matrices 3×3 and 4×4, respectively, $\partial = \{\partial/\partial x_\nu\}$, c_ν are constants, $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ are (4×4)-matrices realizing the $D\left(\frac12,\frac12\right)$ representation of the $SO_{1,2}$ algebra

$$\begin{gathered}
S_{01} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S_{02} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S_{03} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \\
S_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad S_{23} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad S_{31} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{5}$$

The general form of the operator from the $C_{1,3}$ invariance group of eq. (2) is

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x) \times I_3, \tag{6}$$

where $\xi^\mu(x)$ are scalar functions, $\eta(x)$ denotes a (4×4)-matrix. Following [3, 4] we set for the solutions to be found

$$W^a_\nu(x) = a^\alpha_\nu(x)\varphi^a_\alpha(\omega), \tag{7}$$

where the nonsigular matrix $A(x) = \{a^\alpha_\nu(x)\}$ and new variables $\omega = \omega(x)$ are determined from the conditions

$$QA(x) \equiv [\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x)]\,A(x) = 0, \qquad \xi^\mu(x)\partial_\mu\omega(x) = 0, \tag{8}$$

where Q is an infinitesimal operators of the form (6) admitted by eq. (2). The unknown functions $\varphi^a_\nu(\omega)$ are to be determined from eq. (2).

Let us begin from the conformally invariant solutions. One can make sure that the following functions satisfy eq. (8) with the operator Q (4)

$$a_{\nu\alpha} = \frac{g_{\nu\alpha}}{x^\sigma x_\sigma} - 2\frac{x_\nu x_\alpha}{(x^\sigma x_\sigma)^2}, \qquad \omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}, \qquad \beta c = 0, \tag{9}$$

where β^ν are arbitrary real constants.

So we get the conformally invariant ansatz

$$W^a_\nu(x) = \frac{\varphi^a_\nu(\omega)}{x^\sigma x_\sigma} - 2x_\nu\frac{x^\alpha\varphi^a_\alpha(\omega)}{(x^\sigma x_\sigma)^2}, \qquad \omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}. \tag{10}$$

Using (10), the field equations (2) can ho rewritten as follows:

$$\begin{gathered}
\beta^2\ddot\varphi^a_\nu - \beta_\nu\beta^\mu\ddot\varphi^a_\mu + e\varepsilon_{abc}\left[\beta^\mu\dot\varphi^b_\mu\varphi^c_\nu - \beta_\nu g^{\alpha\mu}\varphi^b_\alpha\dot\varphi^c_\nu + 2\beta^\mu\varphi^b_\mu\dot\varphi^c_\nu\right] + \\
+ e^2\varphi^b_\mu g^{\mu\alpha}\left(\varphi^b_\nu\varphi^a_\alpha - \varphi^b_\alpha\varphi^a_\nu\right) = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

where the dot means $d/d\omega$.

The simplest solutions of eq. (11) are

$$\varphi_\nu^a(\omega) = g^a(\omega)\beta_\nu, \tag{12}$$

where $g^a(\omega)$ are arbitrary differentiable functions.

$$\begin{gathered}\varphi_\nu^a(\omega) = \left(\varkappa\varepsilon_{abc}c_1^b c_2^c\omega^2 + c_2^a\omega + c_1^a\right)\alpha_\nu, \\ 2\varkappa(\beta_\mu\alpha\beta - \alpha_\mu\beta^2) = e(\alpha_\mu\alpha\beta - \beta_\mu\alpha^2),\end{gathered} \tag{13}$$

where c_1^a, c_2^a, α_ν, $\varkappa$ are arbitrary real constants.

Now it is easy to write down the conformally invariant solutions of eq. (2)

$$W_\nu^a(\omega) = g^a(\omega)\partial_\nu\omega, \qquad \omega = \beta x/x^\nu x_\nu, \tag{14}$$

$g^a(\omega)$ are arbitrary differentiable function.

$$\begin{gathered}W_\nu^a(x) = \left(\varkappa\varepsilon_{abc}c_1^b c_2^c\omega^2 + c_2^a\omega + c_1^a\right)\left(\frac{\alpha_\nu}{x^\sigma x_\sigma} - 2x_\nu\frac{\alpha x}{(x^\sigma x_\sigma)^2}\right), \\ 2\varkappa\left(\beta_\mu\alpha\beta - \alpha_\mu\beta^2\right) = e\left(\alpha_\mu\alpha\beta - \beta_\mu\alpha^2\right).\end{gathered} \tag{15}$$

Let us note that

$$W_\nu^a(x) = g^a(f)\partial_\nu f \tag{16}$$

satisfy eq. (2) with the arbitrary differentiable function $f = f(x)$. A solution invariant under the displacements obtained in the same may has the form

$$\begin{gathered}W_\nu^a(x) = \left(\varkappa\varepsilon_{abc}c_1^b c_2^c(kx)^2 + c_2^a(kx) + c_1^a\right)b_\nu, \\ 2\varkappa\left(k_\mu bk - b_\mu k^2\right) = e\left(b_\mu bk - k_\mu b^2\right),\end{gathered} \tag{17}$$

where $\varkappa$, c_1^a, c_2^a, b_ν, k_ν are arbitrary real constants.

In [4, 5] it is shown that if an equation is invariant under transformations of the form

$$x \to x' = f(x,\theta), \qquad \Psi(x) \to \Psi'(x') = R(x,\theta)\Psi(x), \tag{18}$$

where $R(x,\theta)$ is a nonsingular matrix, θ are parameters of transformations, then the formula

$$\psi_{\text{new}}(x) = R^{-1}(x,\theta)\psi_{\text{old}}(x) \tag{19}$$

gives a "new" solution $\psi_{\text{new}}(x)$ of the equation, starting from an "old" one $\psi_{\text{old}}(x)$.

In the case of special conformal transformations (3) the formula of generating new solutions of eq. (2) takes the form

$$\begin{gathered}W_{\mu(\text{new})}^a(x) = \left\{\frac{\delta_\mu^\nu}{\sigma(x)} + \frac{2}{\sigma^2(x)}\left(c_\mu x^\nu - x_\mu c^\nu + 2cxx_\mu c^\nu - \right.\right. \\ \left.\left. -c^2x_\mu x^\nu - x^2c_\mu c^\nu\right)\right\}W_{\nu(\text{old})}^a(x'),\end{gathered} \tag{20}$$

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2,$$

$$cx \equiv c^\nu x_\nu, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad x^2 \equiv x^\nu x_\nu.$$

Upon application of this formula to some known solution of eq. 2, one obtains new family of exact solutions of eq. (2).

Now everybody can easily write down analogous formulae of generating exact solution of eq. (2) for the rest transformations of the invariance group of eq. (2).

In conclusion let us note that we have obtained exact solutions of the nonlinear Dirac equation [4, 6], the relativistic eikonal equation [5], the quantum electrodynamics nonlinear equations [7] by the same method.

1. Schwartz F., *Lett, Math. Phys.*, 1982, **6**, 355.
2. Actor A., *Rev. Mod. Phys.*, 1979, **51**, № 3, 401.
3. Fushchych W.I., in Algebraic-Theoretic Studies in Mathematical Physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–28 (in Russian).
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 271.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **34**, 498.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1983, **269**, № 1, 88 (in Russian).
7. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Phys. Lett. B*, to be published.

Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

В работе с использованием теоретико-группового подхода получены некоторые классы точных решений нелинейного уравнения Дирака

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \lambda(\bar\psi(x)\psi(x))^k\right]\psi(x) = 0, \tag{1}$$

где $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, γ_μ — матрицы Дирака [1], λ, k — произвольные постоянные; указан способ генерирования новых решений по известным решениям; кратко обсуждаются групповые свойства и решения релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби.

1. Хорошо известно, что уравнение (1) при произвольном k инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, дополненной масштабными преобразованиями, а при $k = 1/3$ (нелинейность Гюрши [2]) — относительно 15-параметрической группы конформных преобразований $C(1,3)$.

Общий вид генератора этих преобразований следующий:

$$Q = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x), \tag{2}$$

где $\xi^\mu(x)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, — скалярные функции, зависящие от x, $\eta(x)$ — матрица размерности 4×4, зависящая от x.

Решения уравнения (1), следуя [3], ищем в виде

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{3}$$

где $\omega = \omega(x)$ — инварианты дифференциальной части оператора Q (2), т.е. функции, удовлетворяющие уравнению

$$\xi^\mu(x)\partial_\mu\omega(x) = 0; \tag{4}$$

$\varphi(\omega)$ — 4-компонентная спинорная функция, зависящая от новых переменных ω.

Несингулярную матрицу $A(x)$ размерности 4×4 определим из условия

$$QA(x) \equiv \left(\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x)\right)A(x) = 0. \tag{5}$$

После того как $A(x)$ и ω найдены из (5) и (4), подстановка выражения (3) в (1) приводит к системе дифференциальных уравнений для $\varphi(\omega)$, которая, как правило, значительно проще исходной. Решив систему для $\varphi(\omega)$, мы найдем некоторый класс точных решений уравнения (1).

2. Реализуем приведенный алгоритм для уравнения (1) с нелинейностью Гюрши ($k = 1/3$), инвариантного относительно конформных преобразований, генератор которых имеет вид

$$Q_{\rm conf} = 2(cx)x\partial - x^2c\partial + (\gamma c\gamma x + 2cx), \tag{6}$$

Доклады академии наук СССР, 1983, **269**, № 1, С. 88–92.

где c^μ — произвольные постоянные; $cx \equiv c^\nu x_\nu$, $x^2 \equiv x^\nu x_\nu$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что матрица

$$A(x) = \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \tag{7}$$

удовлетворяет условию (5) с оператором (6), т.е.

$$Q_{\rm conf}\frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2} \equiv 0. \tag{8}$$

Из условия (4), имеющего для оператора (6) вид

$$\left[2(cx)x\partial - x^2 c\partial\right]\omega(x) = 0, \tag{9}$$

находим полный набор инвариантов конформных преобразований:

$$\omega_\mu = \frac{c^2 x_\mu - c_\mu cx}{x_\nu x^\nu}. \tag{10}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\varphi(\omega)$ зависит только от одного инварианта

$$\omega = \frac{\beta x}{x_\nu x^\nu}, \tag{11}$$

где β^ν — произвольные постоянные, $\beta c = 0$, представляющего собой линейную комбинацию инвариантов ω_μ (10).

Подстановка выражения

$$\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\varphi(\omega), \qquad \omega = \frac{\beta x}{x_\nu x^\nu}, \tag{12}$$

в уравнение (1) с $k = 1/3$ приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i\frac{\lambda}{\beta_\nu\beta^\nu}(\bar\varphi\varphi)^{1/3}(\gamma\beta)\varphi, \tag{13}$$

для которой получаем общее решение

$$\varphi(\omega) = \exp[i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega]\chi \equiv \left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta}\sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right)\chi, \tag{14}$$

где $\beta = (\beta_\nu\beta^\nu)^{1/2}$, $\beta_\nu\beta^\nu > 0$, χ — постоянный спинор,

$$\bar\chi\chi = a = \text{const}, \qquad \varkappa = \frac{a^{1/3}}{\beta^\nu\beta_\nu}.$$

Итак, конформно инвариантное решение уравнения (1) с $k = 1/3$ имеет вид

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi \equiv \\ &\equiv \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta}\sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right)\chi.\end{aligned} \tag{15}$$

Решение (15) аналитично по константе связи λ, в то время как недавно полученное с помощью анзатца Гейзенберга [4] решение Мерве [5] не обладает таким свойством. Кроме того, для функций (15)

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = \frac{a}{(x_\nu x^\nu)^3}, \tag{16}$$

т.е быстро убывает при $x_\nu x^\nu \to \infty$.

Стоит также отметить, что в случае n пространственных переменных конформно инвариантное уравнение имеет вид

$$\left[i\gamma^\alpha\partial_\alpha - \lambda(\bar{\psi}(x)\psi(x))^{1/n}\right]\psi(x) = 0, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n, \tag{17}$$

а его конформно инвариантное решение следующее:

$$\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x_\alpha x^\alpha)^{(n+1)/2}} \exp\{i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi. \tag{18}$$

Здесь γ-матрицы имеют надлежащую структуру (см., например, [6]), $\omega = \frac{\beta^\alpha x_\alpha}{x_\nu x^\nu}$, $\varkappa = \frac{a^{1/n}}{\beta_\alpha\beta^\alpha}$, $\bar{\chi}\chi = a$, χ — постоянный спинор, β^α $(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, $\beta^\alpha\beta_\alpha > 0$.

Приведем теперь лоренц-инвариантное решение уравнения (1) с массой m, т.е. уравнения

$$\left[i\gamma\partial - m - \lambda(\bar{\psi}(x)\psi(x))^k\right]\psi(x) = 0, \tag{19}$$

полученное таким же способом, как и предыдущее решение, но с помощью оператора лоренцовских поворотов

$$Q_L = \theta_a J_{0a}, \qquad J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_a, \qquad a = 1, 2, 3, \tag{20}$$

θ_a — произвольные постоянные.

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\theta_3}{\theta}s_+ & -\frac{\theta_-}{\theta}s_- & -\frac{\theta_3}{\theta}\frac{1}{s_+} & \frac{\theta_-}{\theta}\frac{1}{s_-} \\ \frac{\theta_+}{\theta}s_+ & \frac{\theta_3}{\theta}s_- & -\frac{\theta_+}{\theta}\frac{1}{s_+} & -\frac{\theta_3}{\theta}\frac{1}{s_-} \\ s_+ & 0 & \frac{1}{s_+} & 0 \\ 0 & s_- & 0 & \frac{1}{s_-} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega}}[F_0\cos(\alpha+\alpha_0) + iG_0\sin(\alpha+\alpha_0)] \\ \frac{1}{\sqrt{\omega}}[F_1\cos(\alpha+\alpha_1) + iG_1\sin(\alpha+\alpha_1)] \\ -[G_0\cos(\alpha+\alpha_0) + iF_0\sin(\alpha+\alpha_0)] \\ -[G_1\cos(\alpha+\alpha_1) + iF_1\sin(\alpha+\alpha_1)] \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, α_0, α_1, F_0, F_1, G_0, G_1, $C = 4(F_0G_0 + F_1G_1)$ — произвольные постоянные;

$$\begin{aligned}
&\theta_\pm = \theta_1 \pm i\theta_1, \qquad \theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}, \\
&s_\pm = (\theta x_0 \pm \vec{x}\cdot\vec{\theta})^{1/2}, \qquad \omega = (\theta x_0)^2 - (\vec{x}\cdot\vec{\theta})^2, \\
&\alpha = \frac{\lambda c^k}{\theta(k-1)}\omega^{(1-k)/2} - \frac{m}{\theta}\sqrt{\omega}, \qquad k \neq 1, \\
&\alpha = -\frac{\lambda c}{2\theta}\ln\omega - \frac{m}{\theta}\sqrt{\omega}, \qquad k = 1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Это решение также аналитично по константе связи λ и

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = c/\sqrt{\omega}.$$

3. Кратко обсудим вопрос о генерировании новых решений уравнения (1) по известным решениям. Общий вид преобразований, порождаемых оператором Q (2), следующий:

$$x \to x' = f(x,\theta), \qquad \psi(x) \to \psi'(x') = R(x,\theta)\psi(x), \tag{23}$$

где $R(x,\theta)$ — матрица размерности 4×4, θ — параметр преобразований. Из того что множество решений уравнения (1) инвариантно относительно преобразований вида (23), следует:

$$\psi_{II}(x) = R^{-1}(x,\theta)\psi_I(x') \tag{24}$$

будет также решением этого уравнения, если $\psi_I(x)$ является решением.

Конформные преобразования, порождаемые оператором (6), имеют вид

$$\begin{aligned}
&x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \\
&\psi'(x') = R_{\text{conf}}\psi(x) = \sigma(x)(1 - \gamma c\gamma x)\psi(x), \\
&R_{\text{conf}} = \sigma^{-2}(x)(1 - \gamma x\gamma c).
\end{aligned} \tag{25}$$

Решение (21) при $k = 1/3$ и $m = 0$ можно использовать для получения другого решения уравнения (1) с нелинейностью Гюрши согласно формулам (24), (25). Аналогично следует поступать и в других случаях.

4. В заключение приведем пример скалярного нелинейного уравнения, на множестве решений которого реализуется нелинейное представление группы Ли.

Теорема. *Максимальная локальная группа инвариантности релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби*

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 1, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{26}$$

есть 21-параметрическая группа Ли $C(1,4)$ конформных преобразований в 5-мерном пространстве Пуанкаре–Минковского $M(1,4)$.

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью метода Ли [7].

Не выписывая всех преобразований инвариантности уравнения (26), приведем лишь наиболее интересные — чисто конформные:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \frac{x_\mu - c_\mu\left[x^2 - u^2(x)\right]}{1 - 2cx + 2c_4u(x) + (c^2 - c_4^2)\left(x^2 - u^2(x)\right)}, \\ u'(x') &= \frac{u(x) - c_4\left[x^2 - u^2(x)\right]}{1 - 2cx + 2c_4u(x) + (c^2 - c_4^2)\left(x^2 - u^2(x)\right)}, \\ \mu,\nu &= 0,1,2,3, \qquad x^2 \equiv x^\nu x_\nu, \qquad cx \equiv c^\nu x_\nu, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu. \end{aligned} \tag{27}$$

Формулы (27) также можно использовать для построения новых решений уравнения (23) по его известным решениям. Это следует из следующего факта: из того что уравнение (26) инвариантно относительно преобразований вида

$$\begin{aligned} &x_\mu \to x'_\mu = f_\mu(x, u(x), \theta), \\ &u(x) \to u'(x') = g(x, u(x), \theta), \end{aligned} \tag{28}$$

θ — параметры, вытекает, что если $u_I(x)$ — решение этого уравнения, то новое его решение $u_{II}(x)$ находится из функционального уравнения

$$g(x, u_{II}(x), \theta) = u_I(x' = f(x, u_{II}(x), \theta).$$

Приведем некоторые точные решения уравнения (26):

$$1)\ u(x) = f(\alpha^\nu x_\nu) + \beta^\nu x_\nu, \qquad \alpha^\nu\alpha_\nu = \alpha^\nu\beta_\nu = 0, \qquad \beta^\nu\beta_\nu = 1,$$

f — произвольная дифференцируемая функция;

$$2)\ u(x) = \pm\left[(\alpha_\nu x^\nu)^2 + x^\nu x_\nu\right]^{1/2}, \qquad \alpha_\nu a^\nu = -1;$$

$$3)\ u(x) = \pm\left[x_0^2 - (\alpha_a x_a)^2\right]^{1/2}, \qquad \alpha_a\alpha_a = 1, \quad a = 1,2,3;$$

$$4)\ u(x) = \pm\sqrt{x_\nu x^\nu},$$

α_ν, β_ν — произвольные постоянные, удовлетворяющие указанным условиям.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1976.
2. Gürsey P., *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, 988.
3. Фущич В.И., В кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 6–28.
4. Heisenberg W., *Z. Natur-forsch. A*, 1954, **9**, 292.
5. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, № 6, 485.
6. Boerner H., Representations of groups, North-Holland, 1970.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.

О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

Получены линейные и нелинейные системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы Шредингера и описывающие движение нерелятивистской частицы массы m с произвольным спином s.

The Schrödinger-invariant linear and nonlinear systems of differential equations are obtained. They describe the motion of nonrelativistic massive particles with arbitrary spin s.

Введение

Группа Шредингера $Sch(1,3)$ — максимальная локальная 13-параметрическая группа инвариантности уравнения Шредингера [1].

$$\begin{aligned}
&\check{S}\psi_k(t,\boldsymbol{x})=0, \qquad \check{S}\equiv p_0-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m},\\
&p_0=i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{p}=\left\{p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}\right\}, \qquad a=1,2,3, \quad k=1,2,\dots,n.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Группа $Sch(1,3)$ содержит в качестве подгруппы группу Галилея $G(1,3)$ и группу проективных и масштабных преобразований (более подробно об этом см., например, [2, 3] и цитированную там литературу).

На множестве решений уравнения (0.1) реализуется неприводимое представление $D(m,s=0)$ группы $Sch(1,3)$, т.е. представление с массой m и нулевым спином $s=0$.

Требование инвариантности уравнений движения для частиц с ненулевым спином $s\neq 0$ в нерелятивистской квантовой теории относительно группы $Sch(1,3)$ аналогично требованию конформной инвариантности в релятивистской теории. Так, например, система свободных безмассовых векторных полей

$$\begin{aligned}
&\Box\boldsymbol{E}=0, \qquad \boldsymbol{E}=\{E_1,E_2,E_3\},\\
&\Box\boldsymbol{H}=0, \qquad \boldsymbol{H}=\{H_1,H_2,H_3\},
\end{aligned} \tag{0.2}$$

инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$ только тогда, когда $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла [4]. Этот результат можно использовать для вывода релятивистских уравнений движения для безмассовых частиц.

Отметим также, что, как хорошо известно, среди всех скалярных пуанкаре-инвариантных уравнений вида

$$\Box\varphi+F(\varphi)=0 \tag{0.3}$$

Теоретическая и математическая физика, 1983, **56**, № 3, С. 387–394.

существует только одно конформно-инвариантное нелинейное уравнение с кубической нелинейностью $F(\varphi) = \lambda\varphi^3$.

Аналогичный результат имеется и в нерелятивистской теории: среди всех галилеево-инвариантных уравнений вида

$$\check{S}\psi + F(\psi, \psi^*) = 0, \tag{0.4}$$

существует только одно нелинейное уравнение

$$\check{S}\psi + \lambda(\psi^*\psi)^{2/3}\psi = 0, \tag{0.5}$$

инвариантное относительно группы $Sch(1,3)$ [5].

Приведенная аналогия между релятивистскими и нерелятивистскими полями лежит в основе наших дальнейших рассуждений.

В настоящей работе решены следующие две задачи.

1. Найдены уравнения (условия) на вектор-функцию

$$\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}, \qquad \check{S}\psi = 0, \tag{0.6}$$

при которых на множестве решений уравнения (0.6) реализуется представление группы $Sch(1,3)$ с массой m и ненулевым спином s, т.е. из требования инвариантности относительно группы $Sch(1,3)$ и условия (0.6) найдены уравнения движения для нерелятивистской частицы с ненулевым спином. Некоторые из выведенных таким способом уравнений движения известны в литературе: уравнения Леви–Леблонда [6], Хагена–Герлея [7] получены этими авторами из совершенно других предпосылок; некоторые уравнения получены впервые.

2. Описаны нелинейные системы дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\check{S}\psi_k = F_k(\psi_l, \psi_l^*), \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n, \tag{0.7}$$

инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$, т.е. в явном виде построены все функции F_k, при которых уравнение (0.7) инвариантно относительно группы $Sch(1,3)$.

1. Основные определения и постановка задачи

Определение 1. *Система дифференциальных уравнений для вектор-функции* $\psi = \psi(t, \boldsymbol{x})$

$$\check{S}\psi = 0 \tag{1.1}$$

($\check{S}$ — оператор Шредингера (0.1)) инвариантна относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, если

$$\check{S}Q_l\psi = 0, \qquad \text{или} \qquad [\check{S}, Q_l]\psi = 0, \tag{1.2}$$

где Q_l — базисные элементы алгебры Ли группы $Sch(1,3)$, явный вид которых следующий:

$$\begin{gathered} p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a = 1,2,3, \\ J_a = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_a + \hat{S}_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \lambda_a, \\ D = 2tp_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{p} + \lambda_0, \qquad A = tD - t^2 p_0 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{x}^2 - \lambda\boldsymbol{x}, \qquad E = m, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$\hat{S}_a$, λ_a, λ_0 — некоторые матрицы.

Можно проверить, что эти операторы реализуют представление алгебры $Sch(1,3)$, т.е. удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $Sch(1,3)$ [3], если матрицы λ_a, $\hat{S}_a$, λ_0 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}&[\hat{S}_a,\hat{S}_b]=i\varepsilon_{abc}\hat{S}_c, \qquad [\lambda_a,\lambda_b]=0, \qquad [\lambda_0,\lambda_a]=i\lambda_a,\\ &[\lambda_0,\hat{S}_a]=0, \qquad [\lambda_a,\hat{S}_b]=i\varepsilon_{abc}\lambda_c.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Явный вид матриц $\hat{S}_a$, λ_a, удовлетворяющих алгебре (1.4), построен в [3].

2. Уравнения движения, инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$

Теорема 1. *Система уравнений (1.1) инвариантна относительно группы* $Sch(1,3)$*, если и только если удовлетворяются уравнения*

$$L\psi=0, \qquad L\equiv\lambda_0-\frac{3}{2}i-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p}/m, \tag{2.1}$$

$$\Lambda\psi=0, \qquad \Lambda\equiv\lambda_a\lambda_a\equiv\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2. \tag{2.2}$$

Доказательство. *Достаточность.* Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$[\check{S},Q_l]=0 \qquad \text{для} \quad l=1,2,\dots,10,13, \tag{2.3}$$

$$[\check{S},Q_{11}]\equiv[\check{S},D]=2i\check{S}, \tag{2.4}$$

$$[\check{S},Q_{12}]\equiv[\check{S},A]=2it\check{S}+iL. \tag{2.5}$$

Необходимость. Легко проверить, что система уравнений (1.1), (2.1) и (2.2) инвариантна относительно группы Шредингера:

$$\begin{aligned}&[L,Q_l]=0 \qquad \text{для} \quad l=1,2,\dots,11,13,\\ &[L,Q_{12}]\equiv[L,A]=(im)^{-1}\Lambda,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&[\Lambda,Q_l]=0 \qquad \text{для} \quad l=1,2,\dots,10,13,\\ &[\Lambda,D]=-2i\Lambda, \qquad [\Lambda,A]=-2it\Lambda.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, теорема доказана.

Итак, на множестве решений системы (1.1), (2.1) и (2.2), когда матрицы $\hat{S}_a$, λ_0, λ_a реализуют нетривиальное представление алгебры (1.4), реализуется представление группы с массой m и спином s. Величина спина зависит от размерности представления матриц $\hat{S}_a$, реализующих приводимое или неприводимое представление алгебры Ли группы $Sch(1,3)$. Для явного построения уравнений (2.1), (2.2) (дополнительных условий к (1.1)) необходимо иметь явные выражения для матриц $\hat{S}_a$, λ_a. Эти матрицы построены в [3]. В зависимости от того, какое представление для матриц $\hat{S}_a$, λ_a выбирать, мы получим различные галилеево-инвариантные уравнения (1.1), (2.1), (2.2).

Ниже мы приведем несколько примеров уравнений (2.1), (2.2) в явном виде для частиц со спином $1/2$ и произвольным спином s.

Пример 1. Рассмотрим представление $D(s) \oplus D(s)$ для матриц

$$\hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & S_a \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где S_a — матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры Ли группы $SU(2)$, 0 — нулевые матрицы соответствующей размерности. Матрицы λ_0 и λ_a имеют вид

$$\lambda_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_a & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

В развернутой записи система (1.1), (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ &im\varphi_2 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где φ_1 и φ_2 — $(2s+1)$-компонентные функции. В частности, для спина $s = 1/2$ матрицы $S_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ (σ_a — матрицы Паули), и система (2.10) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ &2im\varphi_2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

(φ_1 и φ_2 — двухкомпонентные спиноры), или в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} &p_0\varphi_1 - i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_2 = 0, \\ &2im\varphi_2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Эта система совпадает с уравнениями движения Леви–Леблонда [6] для нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$.

Пример 2. Пусть матрицы $\hat{S}_a$ реализуют представление $D(s) \oplus D(s-1)$ [3]:

$$\hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 \\ 0 & \Sigma_a \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\lambda_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_a & 0 \end{pmatrix},$$

здесь и в дальнейшем S_a, Σ_a — матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ и $D(s-1)$, соответственно, алгебры Ли группы $SU(2)$; K_a — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s-1)$, их свойства детально обсуждаются в приложении.

В этом случае система уравнений (1.1), (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\hat{S}\psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^{2s+1} \end{pmatrix}, \qquad \chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \vdots \\ \chi^{2s-1} \end{pmatrix}, \\ &im\chi - (\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p})\varphi = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

В частности, для частицы со спином $s = 1$ получаем

$$(S_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}, \qquad K_1 = (i00), \qquad K_2 = (0i0), \qquad K_3 = (00i), \tag{2.15}$$

и система (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \qquad \psi = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \chi\}, \\ &m\chi - p_a\varphi^a = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Эти систему, инвариантную относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, можно рассматривать как нерелятивистский аналог релятивистского уравнения Прока [2, 3] для векторных частиц ($s = 1$).

Пример 3. Пусть матрицы $\hat{S}_a$ реализуют представление $D(s) \oplus D(s) \oplus D(s-1)$, тогда [3]

$$\hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 \\ 0 & S_a & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_a \end{pmatrix}, \ \lambda_a = -\frac{i}{2s}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_a & 0 & 0 \\ K_a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda_0 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

(S_a, Σ_a — матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ и $D(s-1)$, соответственно, алгебры $SU(2)$), а система (1.1), (2.1), (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} &\check{S}\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi \end{pmatrix}, \ \varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_k^1 \\ \vdots \\ \varphi_k^{2s+1} \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, \ \chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \vdots \\ \chi^{2s-1} \end{pmatrix}, \\ &2ms\varphi_2 + (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + (\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Используя (П.2), систему (2.18) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} &sp_0\varphi_1 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_2 + K_a^\dagger p_a\chi = 0, \\ &2ms\varphi_2 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Эта система, инвариантная относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, совпадает с уравнениями движения Хагена–Герлея [7] для нерелятивистской частицы с произвольным спином s и массой m. Другие системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$, получаются аналогичным образом при использовании других представлений матриц $\hat{S}_a$, λ_a.

3. Конечные преобразования группы Шредингера

Прежде всего отметим, что встречавшиеся нам в разделе 2 матрицы λ_a нильпотентны 2-го и 3-го порядка. С учетом этого обстоятельства мы и приводим конечные преобразования для $\psi(x)$, хотя обобщение на более сложные случаи вполне очевидно.

Галилеевские преобразования:

$$\begin{aligned} &t' = t, \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \\ &\psi'(x') = \exp\left\{im\left(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}t\right)\right\}\left[I - i(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{(i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})^2}{2!}\right]\psi(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Масштабные преобразования:

$$
\begin{aligned}
&t' = \exp\{2\alpha\}t, \qquad \boldsymbol{x}' = \exp\{\alpha\}\boldsymbol{x},\\
&\psi'(x') = \exp\{i\alpha\lambda_0\}\psi(x)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

(запись $\exp\{i\lambda_0\}$ означает подстановку в показатель степени матричных элементов диагональной матрицы λ_0).

Проективные преобразования:

$$
\begin{aligned}
&t' = \frac{t}{1-\theta t}, \qquad \boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{1-\theta t},\\
&\psi'(x') = (1-\theta t)^{-i\lambda_0}\exp\{if\}\left[I - \frac{i\theta}{1-\theta t}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}) + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\theta}{1-\theta t}\right)^2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})^2\right]\psi(x), \qquad f \equiv \frac{m\boldsymbol{x}^2}{2}\frac{\theta}{1-\theta t}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Доказательство справедливости формул (3.1)–(3.3) проще всего сделать, проверив выполнимость уравнений Ли. Продемонстрируем это на примере проективных преобразований (3.3):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi'(x')}{\partial\theta} &= i\lambda_0 t'\psi'(x') + i\frac{m\boldsymbol{x}'^2}{2}\psi'(x') + (1-\theta t)^{-i\lambda_0}\exp\{if\}\times\\
&\times\left(-i\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}}{1-\theta t}\right)\left[I - \frac{i\theta}{1-\theta t}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\theta}{1-\theta t}\right)^2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})^2\right]\psi(x) =\\
&= i\left(t'\lambda_0 + \frac{m\boldsymbol{x}'^2}{2} - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}'\right)\psi'(x'),
\end{aligned}
$$

т. е. уравнения Ли для оператора A из (1.3) удовлетворяются тождественно.

4. Нелинейные системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы Шредингера

В этом разделе решена вторая задача, т. е. построены нелинейные системы уравнений вида (0.7), инвариантные относительно группы $Sch(1,3)$. Задача сводится к построению явных выражений для функций F_k, зависящих только от компонент волновой функции $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$, при которых уравнение (0.7) инвариантно относительно группы $Sch(1,3)$. Для решения этой задачи используются конечные преобразования группы $Sch(1,3)$, т.е. формулы (3.1)–(3.3). Такой подход к построению нелинейных уравнений, инвариантных относительно заданной группы, значительно проще инфинитезимального метода С. Ли. При этом, конечно, необходимо задавать представление соответствующей группы.

Подробно остановимся лишь на одном типичном примере. В остальных случаях, которые мы приведем без доказательства, все необходимые вычисления аналогичны.

Рассмотрим следующее нелинейное обобщение системы уравнений (2.10):

$$
\begin{aligned}
&\check{S}\varphi_1 = F_1, \qquad \check{S}\varphi_2 = F_2,\\
&im\varphi_2 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = F_3,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где F_1, F_2, F_3 — искомые $(2s+1)$-компонентные функции, зависящие от φ_1, φ_2, $\varphi_1^\dagger$, $\varphi_2^\dagger$.

Теорема 2. *Система уравнений (4.1) инвариантна относительно группы Шредингера $Sch(1,3)$, если*

$$F_1 = \varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_1, \qquad F_2 = \varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_2, \qquad F_3 = 0, \tag{4.2}$$

где $w_1 = (\varphi_1^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}$, $w_2 = (\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}$, F — произвольная скалярная функция указанного аргумента, $\varkappa$ — произвольная постоянная.

Доказательство. Согласно (2.8), (2.9), (3.3) конечные проективные преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\varphi_1'(x') = (1-\theta t)^{3/2}\exp\{if\}\varphi_1(x), \qquad f \equiv \frac{m\boldsymbol{x}^2}{2}\frac{\theta}{1-\theta t},\\
\varphi_2'(x') = (1-\theta t)^{5/2}\exp\{if\}\left[\varphi_2(x) - i\frac{\theta}{1-\theta t}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})\varphi_1(x)\right],\\
p_0' = (1-\theta t)^2 p_0 + \theta(1-\theta t)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad p' = (1-\theta t)\boldsymbol{p}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Под действием этих преобразований система (4.1) принимает вид

$$\begin{gathered}
(1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}\check{S}\varphi_1 = F_1',\\
(1-\theta t)^{9/2}\exp\{if\}\check{S}\varphi_2 - \theta(1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}\frac{1}{m}\times\\
\times\left[im\varphi_2 - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 + im(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})\check{S}\varphi_1\right] = F_2',\\
(1-\theta t)^{5/2}\exp\{if\}(im\varphi_2 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1) = F_3',
\end{gathered} \tag{4.4}$$

откуда в силу (4.1) получаем

$$\begin{gathered}
F_1' = (1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}F_1,\\
F_2' = (1-\theta t)^{9/2}\exp\{if\}\left[F_2 - i\frac{\theta}{1-\theta t}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})F_1\right] -\\
-\theta(1-\theta t)^{7/2}\exp\{if\}\frac{1}{m}F_3,\\
F_3' = (1-\theta t)^{5/2}\exp\{if\}F_3.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Используя (4.3) и тот факт, что из ψ и $\psi^\dagger$ можно построить только два галилеевских инварианта $\varphi_1^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_2^\dagger\varphi_1$ и $\varphi_1^\dagger\varphi_1$, приходим к (4.2). При $\varkappa = 0$ (4.1) совпадает с линейной системой (2.10). Теорема доказана.

Перечисленные ниже нелинейные системы уравнений являются обобщением соответствующих линейных систем, рассмотренных в разделе 2. Все они неэквивалентны в том смысле, что на множестве их решений реализуются различные (неэквивалентные) представления группы $Sch(1,3)$:

$$\begin{gathered}
p_0\varphi_1 - i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_2 = \varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_2 + \mu G\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2^2\varphi_1,\\
2im\varphi_2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_1 = i\varkappa F\left(\frac{w_1}{w_2}\right) w_2\varphi_1,
\end{gathered} \tag{4.6}$$

где $w_1 = (\varphi_1^\dagger \varphi_2^\dagger \varphi_2^\dagger \varphi_1)^{1/2}$, $w_2 = (\varphi_1^\dagger \varphi_1)^{1/3}$. Система (4.6) представляет собой нелинейное обобщение уравнений Леви–Леблонда (2.12). Следующие системы являются аналогичным обобщением уравнений (2.14), (2.18) и (2.19), соответственно:

$$\check{S}\psi = \varkappa(\varphi^\dagger\varphi)^{2/3}\psi, \qquad im\chi - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi = 0, \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}\check{S}\psi = \varkappa F\left\{\frac{(\varphi_1^\dagger\varphi_2 - \varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}}{(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}}\right\}(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}\psi, \\ 2ms\varphi_2 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0,\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}sp_0\varphi_1 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_2 + \boldsymbol{K}^\dagger\cdot\boldsymbol{p}\chi = \varkappa F\left\{\frac{(\varphi_1^\dagger\varphi_2 - \varphi_2^\dagger\varphi_1)^{1/2}}{(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}}\right\}(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^{2/3}\varphi_1, \\ 2ms\varphi_2 + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0, \qquad 2ms\chi + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}\varphi_1 = 0.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Построению точных решений нелинейных систем уравнений аналогичного типа, инвариантных как относительно группы Шредингера, так и относительно группы Пуанкаре, посвящен сборник [8].

Приложение

Здесь мы приводим соотношения между матрицами S_a, Σ_a, K_a, $K_a^\dagger$, которые использовались в разделе 2. Свойства этих матриц детально обсуждались в работах [3, 7]. Определяющие соотношения для K_a имеют вид

$$K_aS_b - \Sigma_bK_a = i\varepsilon_{abc}K_c, \tag{П.1}$$

$$S_aS_b + K_a^\dagger K_b = is\varepsilon_{abc}S_c + s^2\delta_{ab}. \tag{П.2}$$

Напомним, что здесь, как и раньше, S_a и Σ_a — квадратные матрицы, реализующие неприводимое представление $D(s)$ и $D(s-1)$, соответственно, алгебры Ли группы $SU(2)$; K_a — матрицы размерности $(2s+1)\times(2s-1)$. Соотношения (П.1) следуют из (1.4), а именно из соотношения $[\lambda_a, \hat{S}_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c$ и определяют K_a с точностью до множителя, который удобно зафиксировать с помощью (П.2) [7]. Использование остальных условий (1.4) приводит к следующим соотношениям [3]:

$$\begin{gathered}K_aS_b - K_bS_a = i(s+1)\varepsilon_{abc}K_c, \qquad \Sigma_aK_b - \Sigma_bK_a = i(1-s)\varepsilon_{abc}K_c, \\ K_aK_b^\dagger - K_bK_a^\dagger = -i(2s+1)\varepsilon_{abc}\Sigma_c, \qquad K_a^\dagger K_b - K_b^\dagger K_a = i(2s-1)\varepsilon_{abc}S_c.\end{gathered}$$

1. Niederer V., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802–814.
2. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1980, **44**, № 1, 34–46.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1981, **12**, вып. 5, 1157–1219.
4. Bracken A., *Lett. Nuovo Cim.*, 1972, **2**, № 11, 574–576.
5. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, **31**, № 16, 571–576.
6. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, № 4, 286–311.
7. Herley W.J., *Phys. Rev.*, 1971, **3**, № 11, 2339–2347.
8. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Сб. научн. трудов под ред. В.И. Фущича, Киев, Институт математики АН УССР, 1981.

О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Дирака и уравнения эйконала

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

1. Введение

За последние 15 лет достигнут существенный прогресс в изучении двумерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП), широко встречающихся в теоретической и математической физике. Основным методом исследования таких НДУЧП является метод обратной задачи теории рассеяния. Этот метод, несмотря на многочисленные попытки, не обобщен на многомерные НДУЧП.

В настоящем докладе приведены в явном виде некоторые классы точных решений следующих многомерных НДУЧП:

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \qquad u \equiv u(x), \qquad x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}); \tag{1}$$

$$\Box u + \lambda \exp(u), \qquad \Box = -p_\mu p^\mu, \qquad p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = m^2; \tag{3}$$

$$\left[\gamma_\mu p^\mu - m - \lambda(\bar{\psi}\psi)^k\right] \psi = 0, \tag{4}$$

где γ_μ — матрицы Дирака, ψ — спинор, m, k, λ — произвольные действительные постоянные величины.

Фундаментальным свойством уравнений (1)–(4) является то, что все они обладают широкими группами симметрий. Именно симметрийные свойства этих уравнений дали возможность в явном виде построить их решения.

Хорошо известно, что впервые Софус Ли (1881–1885 гг.) использовал теорию непрерывных групп для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Впоследствии Пуанкаре, Лиувилль, Аппель, Леви–Чивита, Уиттекер и многие другие использовали идеи и теорию С. Ли для явного построения решений линейного волнового уравнения. Важные идеи по отысканию инвариантных решений НДУЧП высказал Г. Бейтмен (1914) и Г. Биркгофф [1]. В СССР лиевские идеи и методы получили дальнейшее развитие в работах Л.В. Овсянникова [2].

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 24–26 ноября 1982 г., Москва, Наука, 1983, Т.2, С. 407–413.

2. Метод

Для нахождения явных решений уравнений (1)–(4) мы воспользуемся следующим анзатцем [3]

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x) + g(x), \tag{5}$$

где $\varphi(\omega)$ — некоторая неизвестная функция (или вектор-функция в случае системы дифференциальных уравнений), зависящая от новых инвариантных переменных

$$\omega = \omega(x) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}\},$$

число которых на единицу меньше, чем переменных в уравнении. Новые переменные $\omega(x)$ и явные выражения для функций $f(x)$ и $g(x)$ находятся из системы уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}} = \frac{du}{\eta}, \tag{6}$$

где ξ^μ и η — функции, задающие инфинитезимально группу инвариантности уравнений (1)–(3), т.е.

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \varepsilon \xi^\mu(x, u) + o\left(\varepsilon^2\right), \\ u'(x') &= u(x) + \varepsilon \eta(x, u) + o\left(\varepsilon^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Явный вид функций ξ^μ и η зависит от симметрии уравнений.

Все приведенные ниже теоремы доказываются с помощью метода Ли [2].

3. Решения нелинейного уравнения Даламбера

Для отыскания решений уравнения Даламбера используются следующие симметрийные свойства уравнения (1).

Теорема 1. *Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (1) является расширенная группа Пуанкаре $\tilde{P}(1, n-1)$ — группа вращении, сдвигов и масштабных преобразований. Базисные элементы алгебры Ли группы $\tilde{P}(1, n-1)$ задаются формулами*

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad D = x_\nu p^\nu - 2iu \frac{\partial}{\partial u}.$$

Не вдаваясь в детали, приведем явный вид некоторых относительно простых решений уравнения (1), построенных указанным выше способом. Решение уравнения (1) ищутся в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) f(x). \tag{8}$$

Полученные нами решения имеют такой вид:

$$\begin{gathered} u = \left\{ -\frac{\lambda}{4} (1-k)^2 \left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu \right] \right\}^{1/(1-k)}, \\ \beta_\nu \beta^\nu = -1, \qquad y_\nu = x_\nu + a_\nu, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} u = \left\{ \frac{\lambda}{2} (1-k)^2 \alpha_\nu y^\nu \beta_\sigma y^\sigma \right\}^{1/(1-k)}, \\ \alpha_\nu \alpha^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \alpha_\nu \beta^\nu = -1, \end{gathered} \tag{10}$$

$$u = \{F(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu\}^{2/(1-k)},$$
$$\alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = -\frac{\lambda}{2}(1-k)^2(1+k)^{-1}, \tag{11}$$

где F — произвольная дифференцируемая функция, a_ν, α_ν, β_ν — параметры, удовлетворяющие указанным условиям.

Обратим внимание на следующий факт. Для всех $k > 1$ решения (9), (10) неаналитичны по константе связи λ. Это означает, что с помощью теории возмущений нельзя получить решения, которые бы были близки (в каком-то смысле) к найденным.

Уравнение (1) в случае $k = \frac{n+2}{n-2}$, как показано Ибрагимовым [4], инвариантно относительно конформной группы $C(1, n-1) \supset \tilde{P}(1, n-1)$. В этом случае, если задано какое-то решение $u_1 = F(x)$ конформно-инвариантного уравнения (1), то новое n-параметрическое решение u_2 находится по формуле

$$u_2(x) = \sigma^{(2-n)/2} F\left(\frac{x - cx_\nu x^\nu}{\sigma}\right),$$

где $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ — параметры, $\sigma \equiv 1 - 2c_\nu x^\nu + c_\alpha c^\alpha x_\nu x^\nu$.

4. Решения уравнения Лиувилля

В 1853 г. Лиувилль нашел общее решение двумерного ($x = (x_0, x_1)$) уравнения (2). Метод Лиувилля неприменим к многомерным уравнениям (2).

Теорема 2. *Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (2) (число переменных $n > 2$) является расширенная группа Пуанкаре $\tilde{P}(1, n-1)$. Базисные элементы алгебры Ли этой группы задаются операторами*

$$p_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad D = x_\nu p^\nu - 2i\frac{\partial}{\partial u}. \tag{12}$$

Замечание 1. При $n = 2$ двумерное уравнение (2) допускает бесконечную группу Ли. Коэффициенты инфинитезимального оператора имеют вид

$$\xi^0 = f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1),$$
$$\xi^1 = f(x_0 + x_1) - g(x_0 - x_1) + c_1, \qquad \eta = c_2 - 2\frac{\partial \xi^0}{\partial x_0},$$

где f и g — произвольные дифференцируемые функции, c_1 и c_2 — постоянные величины.

Решения уравнения (2) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) + f(x). \tag{13}$$

Наиболее простые решения уравнения (2) задаются формулами

$$u = -2\ln[\gamma P(x)\,\mathrm{sh}\,Q(x)], \tag{14}$$

$$u = -2\ln[\delta P(x)\,\mathrm{ch}\,Q(x)], \tag{15}$$

$$u = -2\ln[\gamma P(x)\cos Q(x)], \tag{16}$$

$$u = -2\ln[c_1 P(x) R(x)], \qquad R(x) = Q(x)|_{c_1=1}, \tag{17}$$

где

$$P(x) = \alpha_\nu y^\nu, \qquad Q(x) = c_1(\alpha_\nu y^\nu)^{-1}\sqrt{y_\nu y^\nu} + c_2, \qquad \alpha_\nu \alpha^\nu = 0,$$

γ, δ, σ, c_1, c_2 — постоянные величины.

Непосредственной проверкой модно убедиться, что если в формулах (14)–(17) сделать следующую замену:

$$P(x) = F^{-1}(\alpha_\nu y^\nu), \qquad Q(x) = \beta_\nu y^\nu F(\alpha_\nu y^\nu),$$

то такие функции будут также удовлетворять уравнению (2) при произвольных дифференцируемых функциях F и F^{-1}.

5. Решения уравнений эйконала

При отыскании точных решений уравнения (3) ($m = 1$) использовались следующие симметричные свойства этого уравнения.

Теорема 3. *Максимальная локальная группа инвариантности уравнения (3) — 21-параметрическая группа Ли, базисные инфинитезимальные операторы которой имеют вид*

$$\begin{aligned} &p_A = g_{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad A, B = 0, 1, \ldots, 4, \qquad g_{AB} = \{1, -1, -1, -1, -1\}, \\ &J_{AB} = x_A p_B - x_B p_A, \qquad x_A = \{x_0, x_1, x_2, x_3, u(x)\}, \\ &D = x_A p^A, \qquad K_A = 2x_A D - x_B x^B p_A \end{aligned} \tag{18}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли конформной группы $C(1,4)$.

Приведем некоторые решения уравнения (3):

$$u(x) = f(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1 \tag{19}$$

(где f — произвольная дифференцируемая функция),

$$u(x) = \left[(\alpha_\nu x^\nu)^2 + x_\nu x^\nu\right]^{1/2}, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = -1, \tag{20}$$

$$u(x) = \left[x_0^2 - (\vec{\alpha}\vec{x})^2\right]^{1/2}, \qquad \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = 1, \tag{21}$$

$$u(x) = \sqrt{x_\nu x^\nu}, \tag{22}$$

α_ν, β_ν — произвольные постоянные, удовлетворяющие указанным условиям. Для построения новых решений уравнения (3) по заданным воспользуемся теоремой 3, т.е. тем фактом, что эйкональное уравнение (3) инвариантно относительно группы конформных преобразований $C(1,4)$ в 5-мерном пространстве Минковского $R(1,4)$, метрика в котором задается формулой

$$s^2 = x_B x^B = x_\nu x^\nu - u^2(x). \tag{23}$$

Конечные преобразования, порождаемые операторами (18), имеют вид

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu\left(x_\nu x^\nu - u^2(x)\right)}{\sigma(x,u)}, \qquad u'(x') = \frac{u(x) - c_4\left(x_\nu x^\nu - u^2(x)\right)}{\sigma(x,u)}, \tag{24}$$

где c_μ, c_4 — произвольные постоянные,

$$\sigma(x,u) = 1 - 2c_\nu x^\nu + 2c_4 u(x) - \left(c_\nu c^\nu - c_4^2\right)\left(x_\alpha x^\alpha - u^2(x)\right).$$

Если $u(x) = \varphi(x)$ — какое-то решение уравнения (3), то, используя преобразования инвариантности, общий вид которых

$$x' = f(x, u(x), \theta), \qquad u'(x') = g(x, u(x), \theta) \tag{25}$$

(θ — параметры преобразований), новое решение $u_{\text{нов}}(x)$ находится из функционального уравнения

$$g(x, u_{\text{нов}}(x), \theta) = \varphi(x' = f(x, u_{\text{нов}}(x), \theta)). \tag{26}$$

Так, например, с помощью конформных преобразований (24) из очевидного решения уравнения (3)

$$u(x) = \beta_\nu x^\nu, \qquad \beta_\nu \beta^\nu = 1 \tag{27}$$

получаем новое решение:

$$\begin{aligned} &u(x) = (2a)^{-1}\left\{\pm\left[1 + 4(a x_\nu x^\nu + \beta_\nu x^\nu)\right]^{1/2} - 1\right\}, \\ &a = c_4 - \beta_\nu c^\nu \neq 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1. \end{aligned} \tag{28}$$

6. Решение нелинейного уравнения Дирака

Для решения уравнения (4) используем следующий анзатц [3]

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{29}$$

где $A(x)$ — несингулярная матрица 4×4, $\varphi(\omega)$ — неизвестный 4-компонентный спинор, зависящий только от инвариантных переменных. Явный вид матрицы $A(x)$ находим из следующего уравнения:

$$QA(x) \equiv (\xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta(x))A(x) = 0, \tag{30}$$

где Q — инфинитезимальный оператор группы инвариантности уравнения (4). Рассмотрим уравнение (4) с массой $m = 0$ и нелинейностью Гюрши ($k = 1/3$). В этом случае, кал известно [5], уравнение Дирака инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$. Конформно-инвариантное решение уравнения Дирака с нелинейностью Гюрши, зависящее от четырех параметров, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi \equiv \\ &\equiv \frac{\gamma x}{(x_\nu x^\nu)^2}\left(\cos(\lambda\varkappa\beta\omega) + i\frac{\gamma\beta}{\beta}\sin(\lambda\varkappa\beta\omega)\right), \end{aligned} \tag{31}$$

где $\omega = \frac{\beta x}{x_\nu x^\nu}$, $\quad \beta_\nu\beta^\nu > 0$, $\beta = (\beta_\nu\beta^\nu)^{1/2}$, $\gamma x = \gamma_\nu x^\nu$, χ — постоянный спинор, $\bar\chi\chi = a$, $\chi = \frac{a^{1/3}}{\beta_\nu\beta^\nu}$.

Для получения решения (31) использовался оператор Q, представляющий собой линейную комбинацию генераторов конформных преобразований:

$$Q = c_\mu K^\mu = (2cx)x\partial - x^2 c\partial + \gamma c\gamma x + 2cx, \tag{32}$$

где c_μ — произвольные постоянные, $x^2 \equiv x^\nu x_\nu$, $x\partial \equiv x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ и т.д.

Другие решения уравнения (4) приведены в [6]. Следует подчеркнуть, что наши решения нелинейного уравнения Дирака (4) аналитичны по константе связи. Решения уравнения (4) с $m = 0$ и $k = 1/3$, полученные Кортелем [7], Мерве [8] с помощью анзатца Гейзенберга [9], неаналитичны по константе связи λ.

Общий вид конечных преобразований инвариантности уравнения (4) следующий:

$$x' = f(x,\theta), \qquad \psi'(x') = R(x,\theta)\psi(x), \tag{33}$$

где θ — параметры преобразования, $R(x,\theta)$ — матрицы 4×4. Формула для генерирования нового решения $\psi_2(x)$ по известному решению $\psi_1(x)$ имеет вид:

$$\psi_2(x) = R^{-1}(x,\theta)\psi_1(x'),$$

где $R^{-1}(x,\theta)$ — матрица 4×4, обратная к $R(x,\theta)$.

Заключение

1. Если НДУЧП обладает нетривиальной симметрией, то имеется надежда отыскать многопараметрические семейства его точных решений. Получаемые таким способом решения для НДУЧП, содержащих малый параметр ε, могут оказаться неаналитичными по ε; это означает, что с помощью теории возмущений нельзя получить решения, в каком-то смысле близкие к таким решениям. В некоторых случаях решение можно представить через произвольные функции, зависящие от инвариантов группы симметрии уравнения.

2. Для НДУЧП, инвариантных относительно нетривиальных преобразований независимых и зависимых переменных, справедлив симметрийный нелинейный принцип суперпозиции (преобразования) решений.

3. Точные решения НДУЧП могут служить “эталонами” для построения конструктивных приближенных методов решения НДУЧП.

4. С помощью указанного метода найдены классы точных решений многомерных нелинейных уравнений Шредингера [10], Гамильтона–Якоби [3], Борна–Инфельда [11], Дирака [6].

1. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., ИЛ, 1954.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
3. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
4. Ибрагимов Н.Х., Группы Ли в некоторых вопросах математической физика, Новосибирск, 1972.
5. Gursey F., *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, 988.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271.
7. Kortel F., *Nuovo Cim.*, 1956, **4**, № 2, 210.
8. Merwe P.T., *Phys. Lett. B*, 1981, **106**, № 6, 485.
9. Heisenberg W., *Z. Naturf. A*, 1954, **9**, 292.
10. Fushchych W.I., Moskaliuk S.S., *Lett. Nuovo Cim.*, 1981, **31**, 571.
11. Фущич В.И., Серов Н.И., *ДАН СССР*, 1982, **263**, 582.
12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Gim.*, 1982, **34**, № 16, 498.

On the new conservation laws for vector field equations

W.I. FUSHCHYCH, V.A. VLADIMIROV

The new conservation laws corresponding to the non-Lie symmetry of vector field equations are obtained.

1. Introduction

The classical Lie method (see e.g. Ovsyannikov [11]) which is commonly used to investigate the group theoretical properties of differential equations has one essential disadvantage. Based on the infinitesimal approach, it does not permit one to find out the maximal Lie algebra available by a given system of differential equations if among its basic elements there are operators of higher order. A method was proposed (Fushchych [2]), hereafter quoted as the non-Lie method, in which no restriction is imposed on the order of operators available, by the systems of differential equation under consideration.

By means of the non-Lie method additional invariances were established: Dirac (Fushchych [2]); Maxwell (Fushchych [3]); Kemmer–Duffin–Petiau (Fushchych and Nikitin [4]) and many other theoretical and mathematical physics equations.

Recently (Fushchych and Vladimirov [5]) within the framework of the non-Lie (approach, group properties of the equations for the potential of an electromagnetic field have been investigated:

$$\begin{aligned} &p_\mu p^\mu \boldsymbol{A}^\nu(x) = 0, \qquad x \in \boldsymbol{R}^4, \\ &p_\mu \boldsymbol{A}^\mu(x) = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \end{aligned} \tag{1}$$

where $p_\mu = i\partial/\partial x^\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$ and $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ the metric tensor of Minkowski space, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

The maximal invariance algebra of equation (1) generated by first-order differential operators is the eleven-dimensional Weyl algebra which includes the Poincaré algebra $P(1,3)$ and operator $D = x_\mu p^\mu + 2i$. It has been shown recently (Fushchych and Vladimirov [5]) that equations (1) are additionally invariant under the nine-dimensional $GL(3)$ algebra with basic elements being integro-differential operators; defined on the set of solutions by the following formula

$$\begin{aligned} &(D_{ab}\boldsymbol{A})^\mu = p_0/|\boldsymbol{p}|^2(g_0^\mu p_a - g_a^\mu p_0)\boldsymbol{A}_b, \\ &|\boldsymbol{p}|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \qquad a,b = 1,2,3. \end{aligned} \tag{2}$$

The operators (2) are non-local so there is no such point transformation of independent variables (x^μ): $(x'^\mu) = (Tx)^\mu$, which would give rise to a continuous group representation generated by D_{ab} on the set of solutions of (1).

The existence of additional symmetry for systems of differential equations which describe elementary particles is strictly connected with their polarisation properties.

J. Phys. A: Math. Gen., 1983, **16**, № 6, P. 1921–1925.

Thus, there is no additional symmetry in the case of the Klein–Gordon equation which describes a spin-zero relativistic particle, the additional symmetry algebra of the Dirac equation is $GL(2) \oplus GL(2)$, and generally the greater the spin, the greater the dimension of the additional symmetry algebra.

One of the most important consequences of the invariance of the evolution equation is the existence of integral quantities conserved in time. The purpose of this paper is to construct new conserved quantities which correspond to the non-Lie symmetry of vector field equations.

For the equations obtained from variational principles, the correspondence between local transformation groups which preserve the action integral and conservation laws is established by the well known Noether theorem. It is obvious that, because of non-locality of the transformation group generated by the operators (2), the Noether theorem is of no use in our case. However, there is another method of building up conserved quantities. Good [6] succeeded in obtaining all classical conserved quantities for the Maxwell equations without reference to the Noether theorem. Later O'Connell and Tompkins [8, 9, 10] and several other authors extended this result on some other Poincaré-invariant equations. Employing the same techniques as in the above mentioned papers it is possible to construct conserved quantities corresponding to the non-local additional symmetry of the vector field equations.

In § 2 we perform such a construction for the four-vector potential of the electromagnetic field equation. In § 3 analogous conserved quantities are obtained for the Proca equation. In § 4 we discuss the results obtained.

2. The new conserved quantities for the equations (1)

Theorem 1. *Integrals*

$$\boldsymbol{S}_a = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\int\{\boldsymbol{A}_b(t,\boldsymbol{x})p_0\boldsymbol{A}_c(t,\boldsymbol{x}) - [p_0\boldsymbol{A}_b(t,\boldsymbol{x})]\boldsymbol{A}_c(t,\boldsymbol{x})\}\, d^3\boldsymbol{x}, \quad a,b,c=1,2,3, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\Sigma_{jk} = \frac{1}{2}\int\left[\boldsymbol{A}_j(t,\boldsymbol{x})p_0\left(\frac{p_0}{|p_0|}\boldsymbol{A}_k\right)(t,\boldsymbol{x}) - [p_0\boldsymbol{A}_j(t,\boldsymbol{x})]\left(\frac{p_0}{|p_0|}\boldsymbol{A}_k\right)(t,\boldsymbol{x}) + \right.\\ \left. +\boldsymbol{A}_k(t,\boldsymbol{x})p_0\left(\frac{p_0}{|p_0|}\boldsymbol{A}_j\right)(t,\boldsymbol{x}) - [p_0\boldsymbol{A}_k(t,\boldsymbol{x})]\left(\frac{p_0}{|p_0|}\boldsymbol{A}_j\right)(t,\boldsymbol{x})\right] d^3\boldsymbol{x}, \quad j,k=1,2,3,\end{gathered} \tag{4}$$

are conserved in time.

Proof. Let us consider the following operator:

$$W = \exp\left\{(\ln\sqrt{2})\left[1+\left(\varepsilon_{kjl}i\frac{p_k\boldsymbol{S}_{lj}}{2|\boldsymbol{p}|}\right)^2\right] + \frac{\pi}{4}\frac{p_0}{2|\boldsymbol{p}|^2}p_n(\boldsymbol{S}_{0j}\boldsymbol{S}_{jn}+\boldsymbol{S}_{jn}\boldsymbol{S}_{0j})\right\}, \tag{5}$$

where $j,k,l,n=1,2,3$, $\boldsymbol{S}_{\mu\nu}$, $\mu,\nu=0,1,2,3$ are the matrices of the $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ representation of the Lie algebra of the $O(1,3)$ group*. It can be easily shown that matrix elements of symbols of this operator and the inverse one are

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{W}(p)]^\mu_\nu = \left(p_0/|\boldsymbol{p}|^2\right)\left(p_0 g^\mu_\nu - p^\mu g_{\nu 0} - g^\mu_0 p_\nu + 2g^\mu_0 g_{\nu 0}p_0\right),\\ &\left[\boldsymbol{W}^{-1}(p)\right]^\mu_\nu = \left(1/2|\boldsymbol{p}|^2\right)\left[2p_0^2(g^\mu_\nu - g^\mu_0 g_{\nu 0}) + p^\mu p_\nu\right]\end{aligned} \tag{6}$$

*Matrix elements of $S_{\mu\nu}$ have the form

$$(\boldsymbol{S}_{\mu\nu})^\alpha_\beta = i(g^\alpha_\mu g_{\nu\beta} - g^\alpha_\nu g_{\mu\beta}), \qquad \alpha,\beta=0,1,2,3, \quad \mu,\nu=0,1,2,3.$$

(for symbols see e.g. Shubin [12]).

Using the operators (5) we are allowed to transform (1) into the equivalent diagonal form

$$p_\mu p^\mu \tilde{\boldsymbol{A}}^\nu = 0, \qquad p_0 \tilde{\boldsymbol{A}}^0 = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{7}$$

where $\tilde{\boldsymbol{A}}^\nu = (\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A})^\nu$. It is not difficult to show that for every $\tilde{\boldsymbol{A}}'$, $\tilde{\boldsymbol{A}}''$ satisfying (7) the following equation holds

$$p_\mu \left[\tilde{\boldsymbol{A}}'_\nu p^\mu \tilde{\boldsymbol{A}}''^\nu - (p^\mu \tilde{\boldsymbol{A}}'_\nu)\tilde{\boldsymbol{A}}''^\nu\right] = 0. \tag{8}$$

If we restrict ourselves to those solutions $\tilde{\boldsymbol{A}}'$, $\tilde{\boldsymbol{A}}''$ which tend to zero quickly enough with their first derivatives when $|x| \to \infty$, then by the Green–Gauss–Ostrogradsky theorem

$$\int \left[\tilde{\boldsymbol{A}}'_\mu p_0 \tilde{\boldsymbol{A}}''^\mu - (p_0 \tilde{\boldsymbol{A}}'_\mu)\tilde{\boldsymbol{A}}''^\mu\right] d^3\boldsymbol{x} = \text{constant}. \tag{9}$$

In canonical representation (equation (7)) basic elements of the symmetry algebra can be chosen as

$$(\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha)^\mu_\nu = -i\varepsilon_{abc} g^\mu_b g_{\nu c}, \qquad a,b,c = 1,2,3, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{10}$$

$$(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{jk})^\mu_\nu = -(g^\mu_j g_{\nu k} + g^\mu_k g_{\nu j}), \qquad j,k = 1,2,3, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{11}$$

Setting $\tilde{\boldsymbol{A}}' = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}'' = f(p)\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}$ in (9) where $f(p)$ is a scalar function and $\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha$ belongs to the symmetry algebra of equation (7), we can get

$$\int\{(\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A})_\mu p_0[f(p)\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}]^\mu - (p_0\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A})_\mu[f(p)\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}]^\mu\}d^3\boldsymbol{x} = \text{const.} \tag{12}$$

Inserting into the above integral $\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha = \tilde{\boldsymbol{S}}_a$, $a = 1,2,3$, $f(p) = -\frac{1}{2}$ one obtains formula (3). Substitution $f(p) = -p_0/2|p_0|$, $\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{jk}$, $j,k = 1,2,3$ gives us expression (4).

Now we see that besides such well known conserved quantities for the $\tilde{\boldsymbol{A}}_\mu$ as energy, momentum etc, integrals (3) and (4) are also independent of time.

Remark 1. Expression (3) represents three components of spin of the real vector field (see e.g. Bogoliubov and Shirkov [1]). Formula (4) gives us six new conserved quantities for equation (1) corresponding to the non-Lie (additional) symmetry.

3. The new conserved quantities for the Proca equation

In the paper of Fushchych and Vladimirov [5] the non-Lie symmetry of the Proca equation was also investigated

$$\begin{aligned} &\left(p_\mu p^\mu - m^2\right)\psi^\nu(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad p_\mu \psi^\mu(t,\boldsymbol{x}) = 0, \\ &(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^4, \qquad m > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

It was shown that equation (13) is also invariant under the nine-dimensional Lie algebra of the $GL(3)$ group.

Theorem 2. *Integrals*

$$\boldsymbol{S}_a = i\varepsilon_{abc}\int [\psi^*_b p_0 \psi_c - (p_0\psi^*_b)\psi_c]\, d^3\boldsymbol{x}, \qquad a,b,c = 1,2,3, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{jk} = \int\Bigg[&\psi_j^*(t,\boldsymbol{x})p_0\left(\frac{p_0}{|p_0|}\psi_k\right)(t,\boldsymbol{x}) - [p_0\psi_j^*(t,\boldsymbol{x})]\left(\frac{p_0}{|p_0|}\psi_k\right)(t,\boldsymbol{x}) + \\ &+\psi_k^*(t,\boldsymbol{x})p_0\left(\frac{p_0}{|p_0|}\psi_j\right)(t,\boldsymbol{x}) - [p_0\psi_k^*(t,\boldsymbol{x})]\left(\frac{p_0}{|p_0|}\psi_j\right)(t,\boldsymbol{x})\Bigg]d^3\boldsymbol{x}, \quad j,k=1,2,3,\end{aligned} \tag{15}$$

are conserved in time.

The proof of this theorem is not different from that of the previous one. To diagonalise (13) we can use operators U, U^{-1} with symbols

$$\begin{aligned}&[U(p)]^\mu_\nu = (1/p_0)\left(p_0 g^\mu_\nu - g^\mu_0 p_\nu - p^\mu g_{0\nu} + 2g^\mu_0 g_{\nu 0} p_0\right), \\ &\left[U^{-1}(p)\right]^\mu_\nu = \left[1/\left(p_0^2 + |\boldsymbol{p}|^2\right)\right]\left[\left(p_0^2+|\boldsymbol{p}|^2\right)\left(g^\mu_\nu - g^\mu_0 g_{\nu 0}\right) + p^\mu p_\nu\right].\end{aligned} \tag{16}$$

Remark 2. Integrals (14) express spin components of the complex vector field (Bogoliubov and Shirkov [1]).

4. Conclusions

We have obtained the conserved quantities corresponding to non-Lie symmetry of equations (1) and (13) without reference to the Noether theorem. It is worth noting that classical conserved quantities for vector fields such as energy, momentum etc can also be obtained in this way by substitution of generators of Weyl (Poincaré) symmetry algebras into (9).

As has already been mentioned, integrals (3) and (14) are attributed to the spin of the classical vector fields. Conservation of (3) and (14) along with total angular momentum was obtained as a consequence of symmetry of the energy-momentum tensor for vector fields, namely $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ (see e.g. Bogoliubov and Shirkov [1]). Generally this is not true and such conserved quantities connected in fact with non-Lie symmetry could not be obtained using the Noether theorem.

The natural question is what physical interpretation can be proposed for the new conserved quantities. It is well known that by substitution

$$\boldsymbol{E}_k = -\left[\left(\partial\boldsymbol{A}_0/\partial x^k\right) + \left(\partial\boldsymbol{A}_k/\partial x^0\right)\right], \quad \boldsymbol{H}_k = \varepsilon_{kjr}(\partial/\partial x^j)\boldsymbol{A}_r, \quad k,j,r=1,2,3,$$

the energy and momentum integrals for $\boldsymbol{A}^\mu$ can be expressed in terms of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ which satisfy the Maxwell equations. As for the integrals (3) and (4), their explicit dependence on the $\boldsymbol{A}^\mu$ could not be eliminated by similar substitution, therefore any interpretation in terms of measurable classical quantities is hardly possible. Nevertheless the interpretation of (3), (4) and (14) and (15) is possible in terms of quantum field theory.

In conclusion we want to say a few words about the independence of the integrals obtained. There exist several non-equivalent definitions of the independence of conserved quantities. According to Ibragirnov [7] a set of conserved quantities $(F_i)_{i=1}^N$,

$$F_i = \int f_i(t, x_1, \ldots, x_k)\, d^k x$$

is independent if functions f_i are linearly independent. Following this definition it is not difficult to show that classical conserved quantities p_μ, $J_{\mu\nu}(D)$ and new conserved quantities (3), (4), (14) and (15) are independent.

1. Bogoliubov N.N., Shirkov D.V., Introduction to quantum field theory, Moscow, Nauka, 1973, ch. I, § 5.
2. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **7**, № 3.
3. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 508.
4. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 347.
5. Fushchych W.I., Vladimirov V.A., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1981, **257**, 1105.
6. Good R.H.Jr., *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1914.
7. Ibragimov N.H., *Teor. Mat. Fiz.*, 1969, **1**, № 3.
8. O'Connell R.F., Tompkins D.R., *Nuovo Cimento*, 1963, **38**, 1088.
9. O'Connell R.F., Tompkins D.R., *Nuovo Cimento*, 1965, **39**, 391.
10. O'Connell R.F., Tompkins D.R., *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, 952.
11. Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978, ch. I, II.
12. Shubin M.A., Pseudo-differential operators and spectral theory, Moscow, Nauka, 1978, p. 27.

О новых симметриях и законах сохранения для электромагнитного поля

А.Г. НИКИТИН, В.А. ВЛАДИМИРОВ, В.И. ФУЩИЧ

Хорошо известно, что классические законы сохранения энергии, импульса, углового момента и центра энергии электромагнитного поля являются следствием симметрии уравнений Максвелла относительно группы Пуанкаре. Однако симметрия уравнений Максвелла не исчерпывается релятивистской инвариантностью. В связи с этим возникает естественный вопрос, существуют ли другие законы сохранения для электромагнитного поля (помимо перечисленных выше?). Надеяться получить положительный ответ на этот вопрос можно только в том случае, если уравнения Максвелла обладают дополнительной симметрией помимо релятивистской и конформной инвариантности, поскольку симметрия относительно собственно конформных преобразований не приводит к новым законам сохранения [1]. Мы покажем ниже, что уравнения для электромагнитного поля действительно обладают некоторой скрытой симметрией, из которой следует существование новых (неклассических) интегралов движения.

1. Прежде всего изложим коротко известные свойства симметрии уравнений Максвелла

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\vec{H},\qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\operatorname{rot}\vec{E},\qquad\qquad (1)$$
$$\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\vec{H}=0.$$

В 1893 г. Хевисайд [2] обратил внимание на инвариантность уравнений (1) относительно замены

$$\vec{E}\to\vec{H},\qquad \vec{H}\to-\vec{E}.\qquad\qquad (2)$$

Лармор [3] и Райнич [4] обобщили эту симметрию до группы однопараметрических преобразований вида

$$\vec{E}\to\vec{E}\cos\varphi+\vec{H}\sin\varphi,$$
$$\vec{H}\to\vec{H}\cos\varphi-\vec{E}\sin\varphi.\qquad\qquad (3)$$

Лоренц и Пуанкаре установили инвариантность уравнений Максвелла относительно десятипараметрической группы Пуанкаре $P(1,3)$. Затем в 1909 г. Бейтмен [5] и Канингхем [6] доказали, что уравнения (1) инвариантны относительно конформных преобразований. Эти преобразования совместно с преобразованиями Лоренца образуют пятнадцатипараметрическую конформную группу $C(1,3)$. Сравнительно недавно было показано [7], что группа $G=C(1,3)\otimes H$, где H — однопараметрическая подгруппа преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича (ХЛР) (3), является

Труды международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Звенигород, 24–26 ноября 1982 г., Москва, Наука, 1983, Т.2, С. 421–428.

максимальной группой симметрии уравнений (1) в классе точечных преобразований. Иными словами, группой G определяется максимальная симметрия уравнений (1) в смысле С. Ли.

2. В 1970 г. был предложен новый нелиевский подход к исследованию свойств симметрии дифференциальных уравнений [8, 9]. Основное отличие этого подхода от классических методов С. Ли состоит в том, что он позволяет находить не только локальные группы инвариантности, но также скрытую симметрию уравнений относительно интегральных преобразований. В рамках нелиевского подхода были найдены новые алгебры инвариантности многих важных уравнений релятивистской и нерелятивистской физики [10–15]. Применительно к уравнениям для электромагнитного поля удалось получить результаты, изложенные ниже в теоремах 1 и 2.

Запишем уравнения (1) в матричной форме

$$\begin{aligned} &L_1\Psi = 0, \qquad L_1 = i\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2\vec{S}\cdot\vec{p}, \\ &L_2\Psi = 0, \qquad L_2 = p_1 - \vec{S}\cdot\vec{p}S_1, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_a \end{pmatrix}, \sigma_2 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & -I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

I и $\hat{0}$ — единичные и нулевые матрицы размерности 3×3, $\hat{S}_a$ — спиновые матрицы, соответствующие спину $s = 1$, $(\hat{S}_a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}$.

Обозначим через $\{Q_A\}$ множество базисных элементов конечномерной алгебры Ли. Эта алгебра по определению является алгеброй инвариантности (АИ) уравнений Максвелла, если Q_A определены на множестве решений уравнений (4), т.е. удовлетворяют условиям

$$L_1 Q_A\Psi = 0, \qquad L_2 Q_A \Psi = 0, \tag{6}$$

где Ψ — произвольное решение уравнений (4). Хорошо известным примером АИ уравнений (4) является 16-мерная алгебра Ли группы $C(1,3)\otimes H$. Оказывается, уравнения Максвелла обладают еще некоторой дополнительной симметрией, что может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Уравнения Максвелла (4) инвариантны относительно восьмимерной алгебры Ли A_8, базисные элементы которой задаются интегродифференциальными операторами следующего вида:*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sigma_3\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}}D, \qquad Q_2 = i\sigma_2, \qquad Q_3 = \sigma_1\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}}D, \\ &Q_{3+a} = -i\sigma_2\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}}Q_a, \qquad Q_7 = I, \qquad Q_8 = i\sigma_2\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} D = \Bigg\{ &\sum_{a\neq b\neq c}\left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right] - \\ &-pp_1p_2p_3\left[1 - (\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}})^2\right]\Bigg\}\varphi^{-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_1^4\left(p_2^2-p_3^2\right)^2+p_2^4\left(p_1^2-p_3^2\right)^2+p_3^4\left(p_1^2-p_2^2\right)^2\right]^{1/2},$$

σ_a — матрицы Паули, коммутирующие с S_b, $\hat{p}_a = p_a\cdot p^{-1}$, $p=\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2\right)^{1/2}$. Операторы (7) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}&[Q_a,Q_b] = -[Q_{3+a},Q_{3+b}] = -\varepsilon_{abc}Q_c,\\ &[Q_{3+a},Q_b] = \varepsilon_{abc}Q_{3+c}, \qquad [Q_7,Q_A]=[Q_8,Q_A]=0,\end{aligned} \tag{9}$$

которые определяют алгебру, изоморфную алгебре Ли группы $GL(2)\otimes GL(2)$.

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться непосредственной проверкой. Для этого достаточно воспользоваться тождествами

$$\begin{aligned}&D\sigma_a=\sigma_a D, \qquad D\vec{S}\cdot\vec{p}=-\vec{S}\cdot\vec{p}D, \qquad D(\vec{S}\cdot\vec{p})^2=D,\\ &D^2\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}}=\vec{S}\cdot\vec{\hat{p}}, \qquad L_2\vec{S}\cdot\vec{p}=0, \qquad [D,L_2]=\left(D+pp_1p_2p_3\varphi^{-1}\right)L_2,\end{aligned} \tag{10}$$

из которых непосредственно вытекают соотношения (6), (7).

Очевидно, АИ уравнений Максвелла, описываемая теоремой 1, в принципе не может быть найдена в классическом подходе Ли, в котором базисные элементы алгебры инвариантности всегда принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка.

Поскольку Q_A (7) являются интегродифференциальными операторами, приведем конечные преобразования для фурье-компонент E_a и H_a. Из соотношения

$$\tilde{\Psi}\to\tilde{\Psi}'=\exp(\theta_A Q_A)\tilde{\Psi}, \qquad \tilde{\Psi}=(2\pi)^{-3/2}\int d^3x\,\Psi(\vec{x},t)\exp(-i\vec{p}\cdot\vec{x}) \tag{11}$$

получаем

$$\begin{aligned}&E_a\to E'_a=E_a\cos\theta_1+i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bD_{cd}E_d\sin\theta_1,\\ &H_a\to H'_a=H_a\cos\theta_1-i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bD_{cd}H_d\sin\theta_1,\end{aligned} \tag{12а}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a\to\tilde{E}'_a=\tilde{E}_a\cos\theta_2+\tilde{H}_a\sin\theta_2,\\ &\tilde{H}_a\to\tilde{H}'_a=\tilde{H}_a\cos\theta_2-\tilde{E}_a\sin\theta_2,\end{aligned} \tag{12б}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a\to\tilde{E}'_a=\tilde{E}_a\cos\theta_3-i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bD_{cd}\tilde{H}_d\sin\theta_3,\\ &\tilde{H}_a\to\tilde{H}'_a=\tilde{H}_a\cos\theta_3-i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bD_{cd}\tilde{E}_d\sin\theta_3,\end{aligned} \tag{12в}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a\to\tilde{E}'_a=\tilde{E}_a\operatorname{ch}\theta_4-D_{ab}\tilde{H}_b\operatorname{sh}\theta_4,\\ &\tilde{H}_a\to\tilde{H}'_a=\tilde{H}_a\operatorname{ch}\theta_4-D_{ab}\tilde{E}_b\operatorname{sh}\theta_4,\end{aligned} \tag{12г}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a\to\tilde{E}'_a=\tilde{E}_a\operatorname{ch}\theta_5+i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c\operatorname{sh}\theta_5,\\ &\tilde{H}_a\to\tilde{H}'_a=\tilde{H}_a\operatorname{ch}\theta_5+i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c\operatorname{sh}\theta_5,\end{aligned} \tag{12д}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a\to\tilde{E}'_a=\tilde{E}_a\operatorname{ch}\theta_6-D_{ab}\tilde{E}_b\operatorname{sh}\theta_6,\\ &\tilde{H}_a\to\tilde{H}'_a=\tilde{H}_a\operatorname{ch}\theta_6+D_{ab}\tilde{H}_b\operatorname{sh}\theta_6,\end{aligned} \tag{12е}$$

$$\tilde{E}_a\to\tilde{E}'_a=\tilde{E}_a\exp\theta_7, \qquad \tilde{H}_a\to\tilde{H}'_a=\tilde{H}_a\exp\theta_7, \tag{12ж}$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a = \tilde{E}_a \cos\theta_8 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sin\theta_8,\\
&\tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a = \tilde{H}_a \cos\theta_8 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sin\theta_8,
\end{aligned}
\tag{12з}
$$

где θ_A $(A = 1, 2, \ldots, 8)$ — вещественные параметры, $\tilde{E}_a$ и $\tilde{H}_a$ — фурье-образы векторов напряженности электрического и магнитного полей,

$$
\begin{aligned}
&D_{ab} = \left[\delta_{ab}\left(p_a^2p_d^2 + p_a^2p_e^2 - p_d^2p_e^2\right) + p_1p_2p_3p_c\right]\varphi^{-1},\\
&a \neq d, \qquad d \neq e, \qquad e \neq a, \qquad c \neq a, b.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Преобразования для $E_a(t, \vec{x})$ и $H_a(t, \vec{x})$ могут быть получены из (12) с помощью интеграла Фурье

$$
\begin{aligned}
&H'_a(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, \tilde{H}'_a \exp(i\vec{p}\cdot\vec{x}),\\
&E'_a(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, \tilde{E}'_a \exp(i\vec{p}\cdot\vec{x}).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Преобразования (12), (14) образуют представление группы $GL(2) \otimes GL(2)$ и включают однопараметрическую подгруппу преобразований ХЛР (3).

3. Итак, помимо хорошо известной инвариантности относительно группы $C(1,3) \otimes H$ уравнения Максвелла обладают дополнительной нелокальной симметрией относительно преобразований (12), (14). Еще более высокую дополнительную симметрию имеют уравнения для вектор-потенциала электромагнитного поля

$$
\begin{aligned}
&\Box A_\mu = 0,\\
&\partial_\mu A^\mu = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Теорема 2 [16]. *Уравнения (15) инвариантны относительно алгебры Ли группы $GL(3)$. Базисные элементы этой алгебры на множестве решений уравнений (15) имеют вид*

$$
(F_{ab}A)^\mu = \frac{1}{p^2}\left(g_0^\mu p_0p_a - g_a^\mu p_0^2\right)A_b, \qquad a, b = 1, 2, 3,
\tag{16}
$$

где g_μ^ν — матричный тензор, $g_{\nu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, $\frac{1}{p^2}$ — интегральный оператор

$$
\frac{1}{p^2} f(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3x'\, f(t, \vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}.
\tag{17}
$$

Доказательство приведено в [16]. Можно убедиться непосредственной проверкой, что преобразованные функции (16) удовлетворяют уравнениям (15) и что операторы F_{ab} образуют алгебру, изоморфную алгебре Ли группы $GL(3)$

$$
[F_{ab}, F_{cd}] = \delta_{bc}F_{ad} - \delta_{ad}F_{cb}.
\tag{18}
$$

Генераторы (16) принадлежат классу нелокальных (интегродифференциальных) операторов и в силу этого не могут быть найдены в классическом подходе Ли.

4. Какие же законы сохранения соответствуют симметрии, установленной в изложенных выше теоремах? К сожалению, эти законы невозможно получить используя теорему Нетер в общепринятой формулировке, поскольку скрытая симметрия уравнений Максвелла имеет нелокальный характер. Поэтому мы просто воспользуемся тем фактом, что каждому базисному элементу АИ уравнений Максвелла можно поставить в соответствие четырехвектор тока

$$J_A^0 = \Psi^\dagger M Q_A \Psi, \qquad J_A^a = -\Psi^\dagger M \sigma_2 S_a Q_A \Psi, \tag{19}$$

удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$\partial_\mu J_A^\mu = 0. \tag{20}$$

Здесь Ψ — вектор-функция (4), σ_2, S_a — матрицы (5), M — произвольный оператор, удовлетворяющий условию

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \vec{S} \cdot \vec{p}, M \right] \Psi = 0.$$

По теореме Остроградского–Гаусса из (19), (20) заключаем, что интегральные комбинации

$$B_A = \int d^3x\, J_A^0 = \int d^3x\, \Psi^\dagger M Q_A \Psi \tag{21}$$

сохраняются во времени. Таким путем можно получить как классические интегралы движения, так и новые законы сохранения, соответствующие нелиевской симметрии уравнений Максвелла. Оператор M может быть выбран исходя из требования, чтобы интегралы движения (21) допускали четкую физическую интерпретацию. Этому требованию соответствует выбор

$$M = -\frac{\sigma_2 \vec{S} \cdot \vec{p}}{p^2}, \tag{22}$$

где $\frac{1}{p^2}$ — интегральный оператор (17). Действительно, подставив (22) в (21) и выбирая $\{Q_A\} = \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$, где P_μ и $J_{\mu\nu}$ — генераторы группы Пуанкаре, приходим к классическим выражениям для импульса, энергии углового момента и центра энергии электромагнитного поля. Подстановка в (21) операторов (7) приводит к следующим результатам:

$$\langle Q_1 \rangle = \int \frac{d^3p}{\varphi p} \left\{ \sum_a \left[f \tilde{E}_a(t, -\vec{p}) \tilde{H}_a(t, \vec{p}) + p_a^2 \dot{\tilde{E}}_a(t, -\vec{p}) \dot{\tilde{H}}_a(t, \vec{p}) \right] \right\}, \tag{23а}$$
$$f = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2;$$

$$\langle Q_2 \rangle = \int \frac{d^3p}{2p^2} \left\{ \vec{p} \cdot \left[\tilde{\vec{E}}(t, -\vec{p}) \times \tilde{\vec{E}}(t, \vec{p}) + \tilde{\vec{H}}(t, -\vec{p}) \times \tilde{\vec{H}}(t, \vec{p}) \right] \right\}; \tag{23б}$$

$$\begin{aligned} \langle Q_3 \rangle = \int \frac{d^3p}{2\varphi p} \Bigg\{ & f \left[\tilde{\vec{H}}(t, \vec{p}) \tilde{\vec{H}}(t, -\vec{p}) - \tilde{\vec{E}}(t, \vec{p}) \tilde{\vec{E}}(t, -\vec{p}) \right] + \\ & + \sum_a p_a^2 \left[\dot{\tilde{H}}_a(t, \vec{p}) \dot{\tilde{H}}_a(t, -\vec{p}) - \dot{\tilde{E}}_a(t, \vec{p}) \dot{\tilde{E}}_a(t, -\vec{p}) \right] \Bigg\}; \end{aligned} \tag{23в}$$

$$\langle Q_8\rangle = \int \frac{d^3p}{2p}\left[\vec{\tilde{E}}(t,\vec{p})\cdot\vec{\tilde{E}}(t,-\vec{p}) + \vec{\tilde{H}}(t,\vec{p})\cdot\vec{\tilde{H}}(t,-\vec{p})\right]; \tag{23г}$$

$$\langle Q_4\rangle = \langle Q_5\rangle = \langle Q_6\rangle = \langle Q_7\rangle = 0, \qquad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{23д}$$

Таким образом, помимо классических интегралов движения для электромагнитного поля в силу дополнительной симметрии уравнений Максвелла, описываемой теоремой 1, сохраняются во времени интегральные комбинации (23).

Аналогично получаем, что из симметрии уравнений (15) относительно алгебры (16) следует сохранение во времени интегралов

$$S_a = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\int A_b(t,\vec{x})\overleftrightarrow{p}_0 A_c(t,\vec{x})\,d^3x, \qquad p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \tag{24а}$$

$$\Sigma_{ab} = \frac{1}{2}\int\left\{A_a(t,\vec{x})\overleftrightarrow{p}_0\left[\frac{p_0}{p}A_b(t,\vec{x})\right] + A_b(t,\vec{x})\overleftrightarrow{p}_0\left[\frac{p_0}{p}A_a(t,\vec{x})\right]\right\}d^3x, \tag{24б}$$

Формулы (24а) определяют спин векторного поля [15]. Мы видим, что из дополнительной симметрии уравнений для вектор-потенциала, описываемой теоремой 2, следует сохранение во времени еще шести интегральных комбинаций (24б). Особо простой вид интегралы (24) принимают в импульсном пространстве. Полагая

$$A_\mu(x) = \int d^4k\,\delta\left(k_0^2 - k^2\right)\exp(-ikx)A_\mu(k),$$

получаем

$$\begin{aligned} S_a &= i\varepsilon_{abc}\int d^3k\,A_b^+(\vec{k})A_c^-(\vec{k}),\\ \Sigma_{ab} &= 2\int d^3k\left\{A_a^+(k)A_b^-(k) - A_b^+(k)A_a^-(k)\right\}, \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$A_c^\pm(\vec{k}) = \frac{\theta(k_0)}{\sqrt{2k_0}}\,A_c(\pm k).$$

В заключение обсудим физическую интерпретацию интегралов движения (23), (24). Можно показать, что если электромагнитное поле представляет собой плоскую волну, то формулы (23а)–(23в) задают параметры Стокса, описывающие поляризацию этой волны. В общем случае интегралы (23а)–(23в) можно рассматривать как некое обобщение этих параметров на случаи произвольных решений уравнений Максвелла. Что же касается соотношений (24), то в случае монохроматической волны они могут быть сведены к матричным элементам поляризационной матрицы плотности для поля со спином 1.

Таким образом, нелиевская симметрия уравнений движения может использоваться для описания поляризационных свойств электромагнитного поля. То же самое можно сказать и о релятивистских уравнениях для частиц с отличной от нуля массой и произвольным спином, например, нелиевская симметрия уравнения Дирака [12] может быть использована при описании поляризации электрона [18].

1. Plybon D., *Am. J. Phys.*, 1974, **42**, 998.
2. Heaviside O., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423.
3. Larmor I., Collected papers, London, 1928.
4. Rainich G.I., *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
5. Beteman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223.
6. Cunningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
7. Ибрагимов Н.Х., *ДАН СССР*, 1968, **178**, 566.
8. Fushchych W.I., Preprint ITP-70-32E, Kiev, 1970.
9. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, 3.
10. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 506.
11. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., *ТМФ*, 1976, **29**, 82.
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, **12**, 747.
13. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1979, **24**, 220.
14. Фущич В.И., Наконечный В.В., *УМЖ*, 1980, **32**, 267.
15. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Czech. J. Phys. B*, 1982, **32**, 470.
16. Фущич В.И., Владимиров В.А., *ДАН СССР*, 1981, **257**, 1105.
17. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973.
18. Стражев В. И., *Весц. АН БССР*, 1981, **5**, 75.

On one- and two-particle Galilei-invariant wave equations for any spin

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

The problem of the motion of any spin charged particle in Coulomb field is solved by using the Galilei-invariant wave equations, which have been obtained by the authors recently. Galilei-invariant motion equations for a system of two interacting particles of any spin are deduced.

Решается проблема движения заряженной частицы с произвольным спином в Кулоновском поле, используя волновые уравнения, инвариантные относительно преобразований Галилея, которые были получены авторами ранее. Выводятся уравнения движения, инвариантные относительно преобразований Галилея, для системы двух взаимодействующих частиц с произвольным спином.

1. Introduction

The description of motion of the a charged spinning particle in a central field is one of the important problems of quantum mechanics. But the formulation of this problem for particles with spin $s > \frac{1}{2}$ is confronted with principle difficulties because of such fundamental relativistic equations as Kemmer–Duffin, Proca ones and others lead to contradictions when one tries to depict the interaction of the spin-one particle with the Coulomb field. Among them are the particle fall on centrum, the absence of stable solutions, nonrenormalizability and many others [1, 2]. The well-known paradoxes which arise by relativistic description of the interaction of highest-spin particles with an electromagnetic field are connected with the breakdown of causality (see, e.g., [3]).

In the present paper the problem of a the motion of charged particle with any spin in Coulomb field is solved by using Galilei-invariant wave equations (GIWE). The interest for such equations has been awaked by the paper of Levi-Leblond [4], who has obtained the GJWE for a particle of spin $\frac{1}{2}$. The Levi-Leblond equation as well as Dirac one gives the correct description of Pauli interaction of particle spin with a magnetic field. Unfortunately neither Levi-Leblond equation nor its generalization for any spin, obtained by Hagen and Hurley [5, 6], take into account such an important physical effect as spin-orbit coupling.

In papers [7–11] the GIWE for any spin particles are found which describe the spin-orbit interaction. These equations do not have pretensions to give a complete description of charged-particle interaction with an electromagnetic field, but they design adequately the physical situation in the cases in which the particle energy is too small to be enough for the pair creation, — i.e. when the one-particle Dirac equation is applicable. In spite of the absence of relativistic invariance, the equations found in [7–11] describe correctly the spin-orbit, Darwin and quadrupole couplings of any spin particle with an external field. It means specifically that the mentioned couplings are not to be interpreted as a relativistic corrections without fail, but may be described consistently in the frame of the Galilean-invariant approach.

Nuovo Cimento A, 1984, **81**, № 3, P. 644–660.

In this paper the explicit solutions of GIWE [9, 10] are found for the case of interaction of any spin particle with Coulomb field. The analog of Sommerfeld formula for any spin is obtained. It is demonstrated that by the solution of GIWE the difficulties do not arise, which characterize the relativistic equations, but at the same time the fine structure of Galilean particle spectrum contains the contribution from spin-orbit coupling.

Besides the problem of the description of particle interaction with an external field the two-body quantum-mechanical problem is of great interest for physics. In the last years such an interest is additionally stimulated by the successes in meson masses description in the frame of quark models.

In present paper, starting from one-particle equations [7, 9, 10] two-body GIWE are derived for particles of any spin. For the case in which the particle spins are equal to $\frac{1}{2}$ the equation is obtained, which leads to the same fine and hyperfine spectrum structure as the Breit one [12] and is explicitly invariant under the Galilei group, whereas the Breit equation is invariant neitlier under Galilean group nor under the Poincaré one.

2. GIWE of first order

Here we consider the systems of partial differential equations of a from

$$L\Psi \equiv \left(\beta_\mu p^\mu + \beta_5 m\right)\Psi = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{2.1}$$

where $p^0 = i(\partial/\partial t)$, $p^a = i(\partial/\partial x_a)$, β_μ and β_5 are $(n\times n)$-dimensional square matrices, Ψ is n-component function, m is c-number.

A great deal of papers are devoted to the description of relativistic equations of type (2.1), but Galilean-invariant equations of first order remain almost nonstudied ones.

A wide class of GIWE of type (2.1) is obtained in papers [9, 10], the main result of which are used here.

Equation (2.1) is invariant under Galilei transformations

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a}, \qquad t \to t' = t + b \tag{2.2}$$

if a set of $(n\times n)$-dimensional matrices S_a and λ_a $(a = 1,2,3)$ exists, which satisfies the relations [9, 10]

$$[S_a, S_b] = i\varepsilon_{abc}S_c, \qquad [S_a, \lambda_b] = i\varepsilon_{abc}\lambda_c, \qquad [\lambda_a, \lambda_b] = 0; \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_a^\dagger\beta_0 - \beta_0\lambda_a = 0, \qquad \lambda_a^\dagger\beta_5 - \beta_5\lambda_a = i\beta_a, \\ &\lambda_a^\dagger\beta_b - \beta_b\lambda_a = -i\delta_{ab}\beta_0, \qquad [S_a, \beta_5] = [S_a, \beta_0] = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

If eq.(2.1) admits the Lagrangian formulation, eqs.(2.3), (2.4) give necessary and sufficient conditions of its Galilean invariance [9]. The sufficiency of these conditions is rather obvious, as soon as the following relations may be obtained from (2.3), (2.4):

$$[L, P_\mu] = [L, J_a] = 0, \qquad [L, G_a] = \left(\lambda_a^\dagger - \lambda_a\right)L, \tag{2.5}$$

where P_μ, J_a, G_a are the Galilei group generators

$$\begin{aligned} &P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ &J_a = \varepsilon_{abc}x_b p_c + S_a, \qquad G_a = tp_a - mx_a + \lambda_a. \end{aligned} \tag{2.6}$$

One concludes from (2.5) that the Lie algebra of Galilei group is realized on the set of eq.(2.1) solutions.

So, to describe all GIWE in the form (2.1), it is necessary to solve the system of matrix relations (2.3), (2.4). The simplest (i.e. realized by the matrices of minimal dimensions) solutions of these relations are [10]

$$\begin{gathered}\beta_0=\begin{pmatrix} a_{nn}\otimes I & 0\\ 0 & 0_{n-1\,n-1}\otimes\hat{1}\end{pmatrix},\qquad \beta_5=2\begin{pmatrix} b_{nn}\otimes I & 0\\ 0 & c_{n-1\,n-1}\otimes\hat{1}\end{pmatrix},\\ \beta_a=\frac{i}{s}\begin{pmatrix} d_{nn}\otimes\hat{S}_a & e_{n\,n-1}\otimes K_a^{\dagger}\\ (e_{n\,n-1})^{\dagger}\otimes K_a & 0_{n-1\,n-1}\otimes\hat{1}\end{pmatrix},\\ S_a=\begin{pmatrix} I_{nn}\otimes\hat{S}_a & 0\\ 0 & I_{n-1\,n-1}\otimes\hat{S}'_a\end{pmatrix},\\ \lambda_a=\frac{1}{2s}\begin{pmatrix} f_n\otimes\hat{S}_a & g_{n\,n-1}\otimes K_a^{\dagger}\\ h_{n-1\,n}\otimes K_a & 0_{n-1\,n-1}\otimes\hat{1}\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{2.7}$$

where $\hat{S}_a$ and $\hat{S}'_a$ are the matrices, which realize irreducible representations $D(s)$ and $D(s-1)$ of O_3 algebra, K_a are the $(2s-1)\times(2s+1)$-dimensional matrices, determined by the relations

$$K_a\hat{S}_b-\hat{S}'_bK_a=i\varepsilon_{abc}K_c,\qquad S_aS_b+K_a^{\dagger}K_b=is\varepsilon_{abc}S_c+s^2\delta_{ab},\tag{2.8}$$

I and $\hat{1}$ are unit matrices of dimension $(2s+1)\times(2s+1)$ and $(2s-1)\times(2s-1)$. The symbols A_{nl} signify $(n\times l)$-dimensional matrices $(n=2,3)$, whose nonzero matrix elements are

$$\begin{aligned}&(a_{22})_{11}=(b_{22})_{22}=c^2c_{11}=(d_{22})_{12}=-(d_{22})_{21}=c(e_{21})_{11}=\\&\qquad=(f_{22})_{21}=c^{-1}(h_{12})_{11}=(I_{22})_{jj}=1,\qquad j=1,2,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}&(a_{33})_{12}=(a_{33})_{21}=(b_{33})_{23}=a(b_{33})_{13}=a(b_{33})_{22}=a(b_{33})_{31}=\\&\qquad=2a^2(b_{33})_{12}=2a^2(b_{33})_{21}=-a(c_{22})_{11}=-(d_{33})_{31}=(d_{33})_{13}=\\&\qquad=(f_{33})_{21}=(f_{33})_{32}=c^{-1}(h_{23})_{11}=c^{-1}(h_{23})_{22}=-c^{-1}(g_{32})_{31}=1,\\&(c_{22})_{12}=(c_{22})_{21}=c^{-1}(e_{32})_{12}=s-1,\qquad (e_{32})_{21}=cs,\\&(I_{33})_{jj}=1,\qquad j=1,2,3,\end{aligned}\tag{2.10}$$

where $c=2s-1$, a is an arbitrary parameter.

The formulae (2.1), (2,7), (2.9) determine the GIWE, which are equivalent to Hagen–Hurley ones [5, 6]. These equations may be interpreted as Galilean-invariant motion equations of a free particle with spin s [6].

Equations (2.1) (2.7), (2.10) also describe a free Galilean particle of spin s and mass m, but in contrast to (2.1), (2.7), (2.9) these equations after minimal substitution

$$p_\mu\to\pi_\mu=p_\mu-eA_\mu\tag{2.11}$$

describe the spin-orbit coupling of a particle with a field. They are just the equations to be used to solve the problem of any spin particle motion in Coulomb field.

3. Equations in the Schrödinqer form

Consider together with (2.1) GIWE for spin-s particle in the Schrödinger form

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_s(\boldsymbol{p})\Psi, \tag{3.1}$$

where $H_s(\boldsymbol{p})$ is second-order differential operator, Ψ is $2(2s+1)$-component wave function. Such equations will be used as a basis for a construction of two-particle GIWE.

Equation (3.1) is invariant under Galilei transformations (2.2), if the Hamiltonian H_s, satisfy the following commutation relations:

$$[H_s, P_a] = [H_s, J_a] = 0, \qquad [H_s, G_a] = iP_a, \tag{3.2}$$

where P_a, G_a, J_a are the Galilei group generators (2.6). Without loss of generality the matrices S_a and λ_a from (2.6) may be taken in the form

$$S_a = \begin{pmatrix} \hat{S}_a & 0 \\ 0 & \hat{S}_a \end{pmatrix}, \qquad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{S}_a & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

where $\hat{S}_a$ are the generators of irreducible representation $D(s)$ of O_3 group, 0 is the $(2s+1)$-row zero matrix.

The generators (2.6), (3.3) form (together with H_s) the Lie algebra of extended Galilei group, satisfying the following commutation relations:

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = [G_a, G_b] = 0, \qquad [P_a, G_b] = i\delta_{ab}m, \\ &[m, J_a] = [m, P_\mu] = [m, G_a] = 0, \qquad [J_a, \{P_b, G_b, J_b\}] = i\varepsilon_{abc}\{P_c, G_c, J_c\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Algebra $\{P_\mu, J_a, G_a, m\}$ has three invariant (Casimir) operators

$$C_1 = P_0 - \frac{P^2}{2m}, \qquad C_2 = m, \qquad C_3 = \sum_s (mJ_a - \varepsilon_{abc}p_bG_c)^2. \tag{3.5}$$

The eigenvalues of the operators C_1, C_2 and C_3 are associated with internal energy, mass and square of the spin of a particle, described by eq.(3.1).

So the problem of finding GIWE in the form (3.1) reduces to the determination of explicit expressions of operators H_s, satisfying the relations (3.2), (2.6), (3.3). In [7, 9, 10] the Hamiltonians H_s have been obtained in such a form:

$$H_s = \sigma_1 m + 2\sigma_3 S_a p_a + \frac{1}{2m}C_{ab}p_a p_b, \tag{3.6}$$

where

$$C_{ab} = \delta_{ab} - 2(\sigma_1 - i\sigma_2)(S_aS_b + S_bS_a), \tag{3.7}$$

σ_a are $2(2s+1)$-row Pauli matrices, commuting with S_a (3.3). One can make sure directly that the operators (3.6), (2.6), (3.3) satisfy conditions (3.2), and the operators (3.5) eigenvalues are equal to

$$c_1 = \pm m, \qquad c_2 = m, \qquad c_3 = m^2 s(s+1).$$

Therefore, one concludes that eqs.(3.1), (3.6) are Galilean invariant and describe a nonrelativistic particles of mass m and spin s.

The motion equation for a charged particle in an external electromagnetic field can be obtained from (3.1), (3.6) via standard substitution (2.11). As a result one obtains

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(\sigma_1 m + 2\sigma_3 S_a\pi_a + \frac{1}{2m}C_{ab}\pi_a\pi_b + eA_0\right)\Psi. \tag{3.8}$$

Equation (3.8) (as well as the first-order equation (2.1) after substitution (2.11)) will be invariant under Galilei transformations [10] if the vector potential will be similtaneously transformed according to [4]

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = R\boldsymbol{A}, \qquad A_0 \to A_0' = A_0 + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{3.9}$$

It is demonstrated in [7, 9] that eq.(3.8) describes dipole, quadrupole and spin-orbit coupling of a charged particle with an external field. In the case $s = \frac{1}{2}$ such a description is in good accordance with that given by Dirac equation.

4. Energy spectrum of any spin particle in Coulomb field

In this section GIWE are applied to solve the problem of the description of any spin particle movement in Coulombic field.

After minimal substitution (2.11) one comes from (2.1) to the equation

$$L(\pi)\Psi = 0, \qquad L(\pi) = \beta_\mu\pi^\mu + \beta_5 m. \tag{4.1}$$

Here we find the exact solutions of eqs.(4.1), (2.7), (2.10) for the case in which the external field is reduced to Coulomb potential

$$A = 0, \qquad A_0 = -\frac{ze}{x}. \tag{4.2}$$

Simultaneonsly we obtain an approximate solution of Schrödinger type equation (3.8), (4.2).

To simplify eqs.(4.1), (2.7), (2.10), it is convenient to use the transformation

$$\Psi \to \Psi' = U^{-1}\Psi, \qquad L(\pi) \to L'(\pi) = U^\dagger L(\pi) U, \tag{4.3}$$

where $U = \exp[i((\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{p})/m)]$. As a result, using Campbell–Hausdorf formula and taking into account relations (2.4), one obtains the following equivalent equation:

$$L'(\pi)\Psi' \equiv \left[\beta^0\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{e}{m}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{E}\right) + \beta_5 m\right]\Psi' = 0, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{-ez\boldsymbol{x}}{x^3}. \tag{4.4}$$

Let us use the notation

$$\Psi' = \text{column}\,(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \chi_1, \chi_2), \tag{4.5}$$

where Ψ_a are $(2s+1)$-component functions, χ_α are $(2s+1)$-component ones. Substituting (4.5) into (4.4), one obtains using (2.7), (2.8), (2.10)

$$\left(p_0 + \frac{ze^2}{x} - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{ze^2 g}{2sm}\frac{\hat{S}\cdot\boldsymbol{x}}{x^3}\right)\Psi_1, \qquad g = \frac{a}{2}. \tag{4.6}$$

According to (4.4), (2.7), (2.10), $\chi_1 = \chi_2 = 0$ and the functions Ψ_2, Ψ_3 are expressed via Ψ_1:

$$\Psi_2 = -\frac{1}{a}\Psi_1, \qquad \Psi_3 = -\frac{1}{2m}\left(\pi_0 - \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{m}{a^2}\right)\Psi_1. \tag{4.7}$$

So eqs.(4.1), (4.2), (2.7), (2.10) reduce to eq.(4.6) for the $(2s+1)$-component wave function Ψ_1. It is demonstrated in [7, 9] that Schrödinger-type equations (3.8), (4.2) also may be reduced to eq.(4.6) (with $g=\pm s$) by the consequent approximate transformations of Foldy–Wouthuysen [13] type.

The solutions of eq.(4.6), which correspond to states with energy ε, can be written in a form $\Psi_1=\exp[-i\varepsilon t]\Psi(\boldsymbol{x})$. Taking into account the symmetry of eq.(4.6) under group O_3, it is convenient to represent $\Psi(\boldsymbol{x})$ as a linear combination of spherical spinors

$$\begin{gathered}\Psi(\boldsymbol{x})=\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})\Omega^s_{j\,j-\lambda m},\\ \lambda=-s,-s+1,\ldots,-s+2n_{sj},\qquad n_{sj}=\min(s,j),\end{gathered}\tag{4.8}$$

where $\Omega^s_{j\,j-\lambda m}=\Omega^s_{j\,j-\lambda m}(\boldsymbol{x}/x)$ are the eigenfunction of the operators $\boldsymbol{J}^2$, J^3 and $\boldsymbol{L}^2$ ($\boldsymbol{J}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}+\hat{\boldsymbol{S}}\equiv\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$) with eigenvalues $j(j+1)$, m, and $(j-\lambda)(j-\lambda+1)$. Substituting (4.8) into (4.6), one obtains the following equations for radial functions $\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})$:

$$D\varphi_\lambda(\boldsymbol{x})=x^{-2}b_{\lambda\lambda'}\varphi_{\lambda'},\tag{4.9}$$

where

$$\begin{gathered}D=2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)+\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}-\frac{j(j+1)}{x^2},\\ b_{\lambda\lambda'}=\left[\lambda^2-\lambda(2j+1)\right]\delta_{\lambda\lambda'}+\frac{g\alpha}{s}a_{\lambda\lambda'},\qquad \alpha=ze^2,\end{gathered}\tag{4.10}$$

$a_{\lambda\lambda'}$ are the matrix elements of operator $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}/x$ in basis $\{\Omega^s_{j\,j-\lambda m}\}$, determined by the relation

$$\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}}{x}\Omega^s_{i\,j-\lambda m}=a_{\lambda\lambda'}\Omega^s_{j\,j-\lambda' m}.\tag{4.11}$$

The values of $a_{\lambda\lambda'}$ for $s=\frac{1}{2}$ are well known (see, e.g., [14]). These values for spin are calculated in the appendix and are

$$\begin{gathered}a_{\lambda\lambda'}=-\frac{1}{2}(\delta_{\lambda\,\lambda'+1}a_{\lambda+s}+\delta_{\lambda\,\lambda'-1}a_{\lambda+s+1}),\\ a_\mu=\left[\frac{\mu(d_j-\mu)(d_s-\mu)(d_{js}-\mu)}{(d_{sj}-2\mu-1)(d_{sj}-2\mu+1)}\right]^{1/2},\end{gathered}\tag{4.12}$$

where

$$\begin{gathered}d_s=2s+1,\qquad d_j=2j+1,\qquad d_{sj}=d_s+d_j,\\ \mu=s+\lambda=0,1,2,\ldots,2n_{sj},\qquad n_{sj}=\min(s,j).\end{gathered}\tag{4.13}$$

The matrix $\|b_{\lambda\lambda'}\|$ commutes with the operator D (4.10) and is diagonalizable, so the system (4.9) can be reduced to the system of noncoupled equations

$$D\varphi=x^{-2}b^{sj}\varphi,\tag{4.14}$$

where D is operator (4.9), b^{sj} are the matrix $\|b_{\lambda\lambda'}\|$ eigenvalues. Any equation (4.14) in ones turn reduces to the well-known equation [15]

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+\left(\beta-\frac{z}{4}-\frac{k^2}{4z}\right)y=0,\tag{4.15}$$

where

$$y = \sqrt{z}\varphi, \qquad z = 2\sqrt{-2m\varepsilon}x, \qquad \beta = \sqrt{\frac{-m}{2\varepsilon}}\alpha^2, \qquad k^2 = d_j^2 + 4b^{sj}. \tag{4.16}$$

The eq.(4.15) solutions for coupled states $|\varepsilon < 0|$ are expressed via Laguerre polinomials, and parameter β takes the values [15]

$$\beta = \frac{k+1}{2} + n', \qquad n' = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.17}$$

From (4.16), (4.17) one obtains

$$\varepsilon = -\frac{m\alpha^2}{\left(\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + b^{sj}} + n' + \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{4.18}$$

Formula (4.18) gives the energy levels of a nonrelativistic spinning particle in Coulomb field. Parameter b^{sj} in (4.18) takes the values determined as the roots of the matrix (4.10) characteristic equation

$$\det \|b_{\lambda\lambda'} - b^{sj}\delta_{\lambda\lambda'}\| \equiv \det \left\| \left(\lambda^2 - \lambda d_j - b^{sj}\right)\delta_{\lambda\lambda'} + \frac{\alpha g}{s} a_{\lambda\lambda'} \right\| = 0, \tag{4.19}$$

where $a_{\lambda\lambda'}$ are given in (4.12). The eq.(4.18) solutions and the analysis of spectrum (4.18) are given in the next section.

5. Discussion of formula (4.18)

Formula (4.19) determines an algebraic equation of order $2n_{sj} + 1$. This equation can be resolved in radicals only for $s \le \frac{3}{2}$ or $j \le \frac{3}{2}$. To analyse the spectrum (4.18) for arbitrary s and j it is convenient represent the eq.(4.19) solutions in such a form:

$$b^{sj} = \lambda^2 - \lambda d_j + (g\alpha)^2 b^{sj} + o(g\alpha)^4, \tag{5.1}$$

where we suppose that $\alpha \ll 1$. By using (4.12), (4.19), (5.1), it is not difficult to obtain the explicit expressions for

$$b_\lambda^{sj} = \frac{1}{8s^2}\left(\frac{a_{\lambda+s}^2}{j+1-\lambda} - \frac{a_{\lambda+s+1}^2}{j-\lambda}\right), \tag{5.2}$$

where a_μ are the coefficients (4.12).

Using (5.2) and expanding the function (4.18) in powers of α^2, one obtains

$$\begin{gathered} \varepsilon = -\frac{m\alpha^2}{n^2} + \frac{mg^2\alpha^4 b_\lambda^{sj}}{n^2\left(l+\frac{1}{2}\right)} + o\left(\alpha^6\right), \\ n = n' + j - \lambda + 1 = 1, 2, \ldots, \qquad l = j - \lambda = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Formula (5.3) determines the fine structure of the energy spectrum of any spin particle in Coulomb field. The parameters b_λ^{sj} in (5.3) are easily calculated by formulae (5.2), (4.12).

The first member on the r.h.s. of (5.3) gives the well-known Schrödinger energy levels of a nonrelativistic particle in Coulombic field. The second term gives the correction of order α^4 which is connected with the existence of particle spin. As will be shown below, this correction corresponds to spin-orbit and Darwin coupling of a particle with a field.

According to (5.2), (5.3) any energy level, corresponding to possible value of main quantum number n, is splitted to $n-1$ sublevels, corresponding to possible values of l. Besides any level with fixed n and l is additionally splitted into sublevels, the number of which is $2n_{sj}+1$, $n_{sj}=\min(s,j)$. In contrary to the relativistic case the energy levels of a nonrelativistic particle of spin $\frac{1}{2}$ in Coulomb field are nondegenerated.

Consider the spectrum (5.2), (5.3) for $s\le 1$ and $j\le 1$. Using (4.12), one obtains from (5.2)

$$\begin{gathered}
b_\lambda^{0j}=0,\qquad \lambda=0;\qquad b_\lambda^{\frac{1}{2}j}=2\lambda d_j^{-1},\qquad \lambda=\pm\frac{1}{2};\\
b_\lambda^{1j}=\lambda\frac{d_j+\lambda}{2d_j(d_j-\lambda)}-\frac{2(1-\lambda^2)}{d_j^2-1},\qquad \lambda=\begin{cases}-1, & j=0,\\ -1,0,1, & j\neq 0;\end{cases}\\
b_\lambda^{s0}=0,\qquad \lambda=-s;\qquad b_\lambda^{s\frac{1}{2}}=(-1)^{s+\lambda+1}(2sd_s)^{-1},\qquad \lambda=-s,-s+\frac{1}{2};\\
b_\lambda^{s1}=\frac{(s+\lambda-1)(d_s+s+\lambda-1)}{2sd_s(d_s-s-\lambda+1)}+\frac{(s+\lambda-1)^2-1}{2s^2(s+1)},\\
\lambda=-s,-s+1,-s+2.
\end{gathered}\tag{5.4}$$

For $s=0$ formulae (5.3), (5.4) give the well-known energy spectrum of a spinless nonrelativistic particle in Coulomb field. For $s=\frac{1}{2}$ one obtains from (5.3), (5.4)

$$\varepsilon=-\frac{m\alpha^2}{n^2}+\frac{\lambda mg^2\alpha^4}{n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}+\lambda\right)},\qquad \lambda=\pm\frac{1}{2}.\tag{5.5}$$

It is interesting to compare (5.5) with the fine-structure formula for a Dirac electron interacting with Coulomb field. One can make sure itself that for $g^2=-1$ the energy levels (5.5) may be represented as

$$\varepsilon=\varepsilon_D-\left\langle\frac{p^4}{8m^2}\right\rangle,\tag{5.6}$$

where ε_D gives the energy levels of a Dirac electron in Coulombic field, and average is taken in Schrödinger wave functions.

According to (5.6), formula (5.5) takes into account all "relativistic" corrections predicted by Dirac equation, except the relativistic kinetic-energy correction $\langle p^4/8m^2\rangle$. It means that formula (5.5) takes into account the contributions of spin-orbit and Darwin couplings, and so these couplings may be described in frame of Galilei-invariant theory.

Let us give for the completeness the exact solutions of eqs.(4.19) for $s\le 1$ and $j\le 1$

$$\begin{gathered}
b^{0j}=0,\qquad b^{\frac{1}{2}j}=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{d_j^2+4(g\alpha)^2},\\
b^{1\frac{1}{2}}=\frac{c}{3}+2\sqrt{-c}\cos\left[\frac{1}{3}\left(\gamma+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\right],\qquad \lambda=0,\pm1,\quad j\neq 0,\\
b^{s0}=0,\qquad b^{s\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(d_s^2-3)\pm\frac{1}{2}\sqrt{d_s^2+\left(\frac{g\alpha}{s}\right)^2},
\end{gathered}\tag{5.7}$$

$$b^{s1} = s(s+1) - 2 + \frac{d}{3} + 2\sqrt{-d}\cos\left[\frac{1}{3}\left(\xi + \mu\frac{\pi}{2}\right)\right], \quad \mu = 0, \pm 1, \ s \neq 0,$$

where

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{-c^3}}, \qquad b = \frac{2}{3}(g\alpha)^2 + \frac{1}{3}d_j^2 - \frac{1}{27}, \qquad a = -(g\alpha)^2 - \frac{4}{27} - b,$$
$$\cos\xi = \frac{f}{\sqrt{-d_3}}, \qquad f = \frac{2}{3}\left(\frac{g\alpha}{s}\right)^2 + \frac{1}{3}d_s^2 - \frac{1}{27}, \qquad d = -\left(\frac{g\alpha}{s}\right)^2 - \frac{4}{27} - f.$$

Contrary to the approximate formulae (5.3), (5.4) relations (4.18), (5.7) give the exact values of the energy levels predicted by eqs.(4.1), (4.2). Using (4.18), (4.19) it is not difficult to obtain the exact spectrum also for $s = \frac{3}{2}$ and any j, and for $j = \frac{3}{2}$ and any s. We do not give the corresponding cumber-some formulae here.

6. Two-particle equations

The Breit equation [12] is an important and often used one in the quantum-mechanical two-body problem. Besides a lot of incontrovertible merits, this equation has the shortcoming of principle — it is not invariant either under Poincaré or under Galilei group. So the Breit equation does not satisfy any relativity principle accepted in physics.

In this section we find two-particle wave equation, which describes the system of electrically charged spin-$\frac{1}{2}$ particles with the same accuracy as the Breit equation, but is Galilei invariant.

Starting from one-particle Schrödinger-like GIWE (3.1), one may write the equation for a system of two noninteracting particles in such a form:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(t, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right) = \left(H_{s_{(1)}} + H_{s_{(2)}}\right)\Psi\left(t, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right), \tag{6.1}$$

where $\Psi\left(t, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}\right)$ is the $2(2s_{(1)}+1) \times 2(2s_{(2)}+1)$-component wave function, $H_{s_{(1)}}$ and $H_{s_{(2)}}$ are the Hamiltonians of the first and second particle — i.e. differential operators of form (3.6). Here and below we use the indices (1) and (2) to distinquish the quantitics related to the first and second particle.

Equation (6.1) is manifestly invariant under Galilei group. The Galilei group generators on the set of eq.(6.1) solutions are represented as a direct sum of single-particle generators (2.6), (3.3).

It is convenient to arrive at (6.1) from individual variables $\boldsymbol{x}^{(1)}$ and $\boldsymbol{x}^{(2)}$ to c.m. ones. Previously we transform eq.(6.1) to such a representation, in which the internal energy operator

$$C_1 = H_{s_{(1)}} + H_{s_{(2)}} - \frac{\boldsymbol{P}^2}{2(m_{(1)} + m_{(2)})}$$

does not depend on total momentum $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}^{(1)} + \boldsymbol{p}^{(2)}$. Using for this purpose the transformation operator (compare (4.3))

$$U = \exp\left[\frac{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{P}}{M}\right], \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_{(1)} + \boldsymbol{\lambda}_{(2)}, \qquad M = m_{(1)} + m_{(2)}, \tag{6.2}$$

where $\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)} = \left(\sigma_1^{(\alpha)} - i\sigma_2^{(\alpha)}\right)\boldsymbol{S}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, one obtains from (6.1) the following equivalent equation:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \hat{H}\Phi, \qquad \Phi = U\Phi, \qquad \hat{H} = UHU^{-1} = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + E, \tag{6.3}$$

where E is the internal energy operator

$$\begin{gathered} E = \sigma_1^{(1)} m_{(1)} + \sigma_1^{(2)} m_{(2)} + 2\sigma_3^{(1)}\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{p} - 2\sigma_3^{(2)}\boldsymbol{S}^{(2)}\cdot\boldsymbol{p} + \\ + \left[\frac{1}{\mu} - \left(\sigma_1^{(1)} - i\sigma_2^{(1)}\right)\frac{1}{m_{(1)}} - \left(\sigma_1^{(2)} - i\sigma_2^{(2)}\right)\frac{1}{m_{(2)}}\right]\frac{\boldsymbol{p}^2}{2}, \\ \mu = \frac{m_{(1)} m_{(2)}}{M}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m_{(1)}\boldsymbol{p}^{(1)} - m_{(2)}\boldsymbol{p}^{(2)}}{M}. \end{gathered} \tag{6.4}$$

So to describe the system of free nonrelativistic particles of spins $s_{(1)}$ and $s_{(2)}$ one may use the motion equation (6.1) in single particle variables, or eq.(6.3) in c.m. ones. The Galilei group generators on the sets of this equation solutions have the form

$$\begin{gathered} P_0 = H_{s_{(1)}} + H_{s_{(2)}}, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}^{(1)} + \boldsymbol{p}^{(2)}, \\ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{x}^{(1)} \times \boldsymbol{p}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)} \times \boldsymbol{p}^{(2)} + \boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}, \\ \boldsymbol{G} = t\boldsymbol{P} - m_{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} - m_{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda} \end{gathered} \tag{6.5}$$

for eq.(6.1), and

$$\begin{gathered} P_0^1 = \hat{H} + E + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m}, \qquad \boldsymbol{P}' = -i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}, \\ \boldsymbol{J}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}, \\ \boldsymbol{G}' = t\boldsymbol{P} - M\boldsymbol{X}, \qquad \boldsymbol{X} = \left(m_{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} + m_{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}\right)M^1, \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(2)}, \end{gathered} \tag{6.6}$$

for eq.(6.3).

Starting from (6.1) or (6.3) one may look for motion equation for interacting particles in such a form:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = [H_{s_{(1)}} + H_{s_{(2)}} + V]\Psi, \tag{6.7}$$

or

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi = [H + \hat{V}]\Phi, \tag{6.8}$$

where V and $\hat{V}$ are interaction Hamiltonians. The requirement of Galilei invariance reduces to commutation of operators V and $\hat{V}$ with generators (6.5) and (6.6). It means that the operators can depend upon internal variables $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{p}$ only and be scalars under spatial rotations. Besides that V must satisfy the condition

$$[V, \boldsymbol{\lambda}] = 0. \tag{6.9}$$

It follows from (6.3), (6.9) that eq.(6.7) may be reduced to the from (6.8) using the transformation operator (6.2). So formula (6.8) gives a wider class of GIWE, as soon as eq.(6.8) in general is not reducible to the form (6.7).

So the condition of Galilei invariance give a wide choice of interaction Hamiltonians. Consider some examples which are interesting from the physical point of view.

1) Central potential $\hat{V} = If(x)$, where I is the unit matrix. The corresponding equation (6.3) in the c.m. frame takes the form

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\Phi(t,\boldsymbol{x}), \tag{6.10}$$

where $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = E + If(x)$, E is operator (6.4).

To analyse eq.(6.10) we suppose the momentum $\boldsymbol{p}$ to be small enough: $\boldsymbol{p}^2 \ll m^2$. Applying to (6.10) the standard approximate diagonalization procedure of Barker–Glover–Chraplivy (BGC) [16], one comes to Hamiltonian

$$\begin{gathered}H' = \sigma_1^{(1)}m_{(1)} + \sigma_1^{(2)}m_{(2)} + \frac{p^2}{2\mu} + If(x) + \\ +\frac{1}{x}\left[\sigma_1^{(1)}\frac{\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}}{2m_{(1)}} + \sigma_1^{(2)}\frac{\boldsymbol{S}^{(2)}\cdot\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}}{2m_{(2)}}\right]\frac{\partial f}{\partial x}.\end{gathered} \tag{6.11}$$

In spite of the spin independence of $\hat{V}$, the approximate Hamiltonian (6.11) contains terms, which correspond to-spin-orbit coupling.

2) Breit potential

$$V_B = -\frac{e^2}{x} + 2\sigma_3^{(1)}\sigma_3^{(2)}\frac{e^2}{x}\left[\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)} + \frac{\left(\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{S}^{(2)}\cdot\boldsymbol{x}\right)}{x^2}\right]. \tag{6.12}$$

The BGC reduction for Hamiltonian $\hat{H}_B = E + V_B$, where E and $\hat{V}$ are given in (6.4), (6.12), leads to the following result:

$$H \to \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + H^{\text{int}}, \tag{6.13}$$

where

$$\begin{gathered}H^{\text{int}} = \sigma_1^{(1)}m_{(1)} + \sigma_1^{(2)}m_{(2)} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{x} - \frac{e^2\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{2\mu M}\left(\boldsymbol{p}\frac{1}{x}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\frac{1}{x^2}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}\right) + \\ +\frac{e^2}{x^3}\left[\frac{\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{2m_{(1)}m_{(2)}}\left(\boldsymbol{S}^{(1)} + \boldsymbol{S}^{(2)}\right) + \frac{1}{2m_{(1)}^2}\boldsymbol{S}^{(1)} + \frac{1}{2m_{(2)}^2}\boldsymbol{S}^{(2)}\right]\cdot\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} - \\ -\frac{e^2\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{2m_{(1)}m_{(2)}x^3}\left(\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)} - \frac{3\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{x}\boldsymbol{S}^{(2)}\cdot\boldsymbol{x}}{x^2}\right) + \\ +4\pi e^2\left(\frac{2}{3}\frac{\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{m_{(1)}m_{(2)}}\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)} + \frac{1}{8m_{(1)}^2} + \frac{1}{8m_{(2)}^2}\right)\delta(\boldsymbol{x}).\end{gathered}$$

On the set of functions, satisfying $\sigma_1^{(1)}\Psi = \sigma_1^{(2)}\Psi = \Psi$, Hamiltonian (6.14) may be represented as

$$H^{\rm int} = H_B + \frac{\boldsymbol{p}^4}{8}\left(\frac{1}{m_{(1)}^3} + \frac{1}{m_{(2)}^3}\right),$$

where H_B is the approximate Breit Hamiltonian in the c.m. frame [16]. So GIWE (6.8) with potential (6.12) leads in approximation $1/m^2$ to the results, which are analogous to the ones predicted by Breit equation, but do not take into account the relativistic correction to kinetic energy.

3) Let us give the example of potential $\hat{V}'$, which, being substituted into (6.8), leads to the equation, which is Galilei invariant and is equivalent in approximation $1/m^2$ to the Breit one,

$$\hat{V}' = \frac{e_{(1)}e_{(2)}}{x}\left[1 - 2\sigma_3^{(1)}\sigma_3^{(2)}\left(a\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)} + b\frac{\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{x}\boldsymbol{S}^{(2)}\cdot\boldsymbol{x}}{x^2}\right)\right] +$$
$$+i\nu e_{(1)}e_{(2)}\left\{\left(1 - \tilde{\lambda}_{(1)} - \tilde{\lambda}_{(2)}\right)\left[\left(\frac{\tilde{\lambda}_{(1)}}{2m_{(1)}} + \frac{\tilde{\lambda}_{(2)}}{m_{(2)}}\right)\boldsymbol{S}^{(1)} - \left(\frac{\tilde{\lambda}_{(2)}}{2m_{(2)}} +\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\tilde{\lambda}_{(1)}}{m_{(1)}}\right)\boldsymbol{S}^{(2)}\right]\frac{\boldsymbol{x}}{x^3} + 2\pi i\tilde{\lambda}_{(1)}\tilde{\lambda}_{(2)}\left(1 + 2\boldsymbol{S}^{(1)}\cdot\boldsymbol{S}^{(2)}\right)\frac{\delta(\boldsymbol{x})}{m_{(1)}m_{(2)}}\right\},$$

where

$$\tilde{\lambda}_\alpha = \sigma_1^{(\alpha)} - i\sigma_2^{(\alpha)}, \qquad a = 1 + \frac{1}{4}c, \qquad b = 1 + \frac{1}{2}c,$$
$$2\nu = a + b - 2, \qquad c = \left(m_{(1)}^2 + m_{(2)}^2\right)\left[m_{(1)}m_{(2)}\left(m_{(1)} + m_{(2)}\right)\right]^{-1}.$$

Applying the BGC reduction for the Hamiltonian $H = E + \hat{V}'$, one obtains the operator, which coincides for $\Psi' = \frac{1}{4}(1+\sigma_1^{(1)})(1+\sigma_1^{(2)})\Psi$ with the approximate Breit Hamiltonian in the c.m. frame.

One may conclude from the above that two-particle GIWE can be successfully applied for the description of interacting particles. The application of such equations to concrete physical problems will be considered in future publications.

Appendix

Explicit expression for the operator $(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x})/x$ in spherical spinor basis

Spherical spinors $\Omega^s_{j\,j-\lambda m}$ are $(2s+1)$-component functions with the components

$$(\Omega^s_{j\,j-\lambda m})^\mu = C^{jm}_{j-\lambda\,m-\mu s\mu}Y_{j-\lambda\,m-\mu}, \tag{A.1}$$

where $C^{jm}_{j-\lambda\,m-\mu s\mu}$ are Clebah–Gordan coefficients, $Y_{j-\lambda\,m-\mu}$ are spherical harmonics. Substituting (A.1) into (4.11), choosing $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{x}_0 = (0,0,1)$ and taking into account that [17]

$$Y_{j-\lambda\,0}(\hat{x}_0) = \sqrt{\frac{2(j-\lambda)+1}{4\pi}}, \qquad (\boldsymbol{S}\cdot\hat{x}_0)_{\mu\mu'} = (S_2)_{\mu\mu'} = \mu\delta_{\mu\mu'}, \tag{A.2}$$

one comes to the following system of linear algebraic equations for $a_{\lambda\lambda'}$ [18]:

$$\sum_{\lambda'}(a_{\lambda\lambda'} - \mu\delta_{\lambda\lambda'})\sqrt{2(j-\lambda)+1}C^{j\mu}_{j-\lambda'\,0s\mu} = 0, \tag{A.3}$$

where

$$\lambda, \lambda' = -s, -s+1, \ldots, -s+2n_{sj}, \qquad n_{sj} = \min(s,j),$$
$$\mu = -n_{sj}, -n_{sj}+1, \ldots, n_{sj}.$$

The solution of system (A.3) is given by formulae (4.12). For $s \le \frac{3}{2}$ one has specifically

$$s=0, \qquad a_{\lambda\lambda'} = 0, \qquad s = \frac{1}{2}, \qquad a_{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}} = a_{-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}} = -1;$$

$$s=1, \qquad a_{10} = a_{01} = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}}, \qquad a_{0\,-1} = a_{-1\,0} = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}, \qquad j \ne 0;$$

$$s = \frac{3}{2}, \qquad a_{\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}} = a_{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{j+1}{3j}}, \qquad a_{-\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}} = a_{-\frac{1}{2}\,-\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{j}{3(j+1)}};$$

$$a_{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}} = a_{-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(2j+3)(2j-1)}{j(j+1)}}, \qquad j \ne \frac{1}{2};$$

$$a_{-\frac{1}{2}\,-\frac{3}{2}} = a_{-\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}, \qquad j = \frac{1}{2}.$$

The remaining coefficients $a_{\lambda\lambda'}$ for $s \le \frac{3}{2}$ are equal to zero.

1. Tamm I.E., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1942, **29**, 551 (in Russian).
2. Corben H., Schwinger J., *Phys. Rev.*, 1940, **58**, 953.
3. Wightman A.S., Invariant wave equations, LNP, 1980, **73**, 1.
4. Levi-Leblond J.-M., *Commun. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
5. Hagen C.R., Hurley W.J., *Phys. Rev. Lett.*, 1970, **26**, 1381.
6. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 2339.
7. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, 81.
8. Fushchych W.I. and Nikitin A.G., Salogub V.A., *Rep. Math. Phys.*, 1978, **13**, 175.
9. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Teor. Mat. Fiz.*, 1980, **44**, 34 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1981, **44**, 584 (in English).
10. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Fiz. Elem. Chastits At. Jadra*, 1982, **12**, 1157 (in Russian).
11. Nikitin A.G., *Acta Phys. Pol. B*, 1982, **13**, 369.
12. Breit G., *Phys. Rev.*, 1929, **34**, 553.
13. Foldy L.L., Wouthyusen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
14. Achijezer A.I., Beretecky V.B., Quantum electrodynamics, Moscow, Nauka, 1981.
15. Fock V.A., Foundations of quantum mechanics, Moscow, Nauka, 1976.
16. Barker W.A., Glover F.N., *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 317.
17. Edmonds A.R., Angular momentum in quantum mechanics, Princeton, 1957.
18. Nikitin A.G., *Teor. Mat. Fiz.*, 1983, **57**, 257 (in Russian).

Some exact solutions of the many-dimensional sine-Gordon equation

W.I. FUSHCHYCH, Yu.N. SEHEDA

In the present paper we construct the multiparametrical families of exact solutions of the many-dimensional nonlinear d'Alembert equation

$$\Box U = \sinh U, \tag{1}$$

where $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \cdots - \partial^2/\partial x_n^2$. This equation is concerned with some problems of field theory [1]. In the case of $n = 1$ the analysis and the physical interpretation of solutions of this equations are given in [2].

Up to date the inverse-scattering method is applied for solving two-dimensional nonlinear equations (KdV, sine-Gordon, nonlinear Schrödinger and some others) mainly and the attempts to extend this method for solving many-dimensional equations are not so successful.

To construct some classes of exact solutions of the many-dimensional equation (1), we use group-theoretical ideas of Lie which were applied fruitfully by Birkhoff [3], Sedov [4] and Ovsyannikov [5] to nonlinear equations of hydrodynamics.

The maximal local invariance group of eq.(1) is the Poincaré group $P(1,n)$ of rotations and translations of the $(1+n)$-dimensional space $R^{1,n}$.

We look for the solutions to eq.(1) of the form

$$U(x) = \varphi(\omega), \tag{2}$$

where φ is a function of the invariant variable ω only (for more details see [6]). We use the following set of invariants which were presented in [7]. (Below the summation convention is employed. The parameters $\alpha_\nu, \beta_\nu, \ldots$ are arbitrary real constants.)

$$\omega = (x_\nu x^\nu)^{1/2}, \tag{3a}$$

$$\omega = \left[(\beta_\nu y^\nu)^2 + y_\nu y^\nu\right]^{1/2}, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = -1, \tag{3b}$$

$$\omega = \left[(\beta_\nu y^\nu)^2 - y_\nu y^\nu\right]^{1/2}, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = 1, \tag{3c}$$

$$\omega = \alpha_\nu x^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = l = \pm 1,, \tag{3d}$$

$$\omega = \frac{1}{2}(\alpha_\nu y^\nu)^2 + a\beta_\nu y^\nu, \qquad \alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = l = \pm 1, \tag{3e}$$

$$\begin{gathered} \omega = \beta_\nu y^\nu + a \ln \alpha_\nu y^\nu, \qquad a \neq 0, \\ \alpha_\nu\alpha^\nu = \alpha_\nu\beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu\beta^\nu = l = \pm 1, \qquad y^\nu = x^\nu + a^\nu, \end{gathered} \tag{3f}$$

a, a^ν are arbitrary constants.

Lettere al Nuovo Cimento, 1984, **41**, № 14, P. 462–464.

Substituting (2) into the many-dimensional partial differential eq.(1) we reduce it to the ordinary differential equations

$$U' + \frac{N_1}{\omega}U' = \sinh U \tag{4a}$$

(cases (3a), (3b))

$$-U' - \frac{N_2}{\omega}U' = \sinh U, \tag{4b}$$

(case (3c))

$$U' = l \sinh U, \qquad l = \pm 1 \tag{4c}$$

(cases (3d), (3e)).

Here N_1 and N_2 are natural numbers depending on the value of the space dimension n.

When $N_1 \neq 0$ and $N_2 \neq 0$ eqs.(4a) and (4b) cannot be solved in explicit form. Taking $l = 1$ we have from (4c)

$$w = \int \frac{du}{\sqrt{2\cosh U + C}},$$

C is an arbitrary constant. The solutions of eq.(1) are found by in inversion of elliptic integrals [8]:

$$U = 2\,\mathrm{tgh}^{-1}\{\mathrm{sn}\,(z,k)\}, \qquad z = \frac{\sqrt{C+2}}{2}\omega, \quad k^2 = \frac{C-2}{C+2}, \quad C > 2, \tag{5a}$$

$$U = 2\,\mathrm{tgh}^{-1}\{\sin z\}, \qquad z = \sqrt{2}\omega, \quad C = 2. \tag{5b}$$

Writing the integration constant in the form

$$w = \int \frac{du}{\sqrt{2\cosh U - C}}$$

we have analogously

$$U = \cosh^{-1} \frac{2 - C\,\mathrm{sn}^2(\omega,k)}{2\,\mathrm{cn}^2(\omega,k)}, \qquad k^2 = \frac{C+2}{4}, \quad 0 < C < 2, \tag{5c}$$

$$U = \cosh^{-1} \frac{C/2 - \mathrm{sn}^2(z,k)}{\mathrm{cn}^2(z,k)}, \qquad z = \frac{\sqrt{C+2}}{2}\omega, \quad k^2 = \frac{4}{C+2}, \quad C > 2, \tag{5d}$$

$$U = 4\,\mathrm{tgh}^{-1}\exp[\omega], \qquad C = 2, \tag{5e}$$

$$U = \cosh^{-1}\{\mathrm{cn}\,(\omega,k)\}^{-1}, \qquad C = 0, \quad k^2 = \frac{1}{2}. \tag{5f}$$

When $l = -1$ we have the solution

$$\begin{gathered} U = \cosh^{-1}\left\{\frac{C}{2}\,\mathrm{cn}^2(z,k) + \mathrm{sn}^2(z,k)\right\}, \\ z = \frac{\sqrt{C+2}}{2}\omega, \quad k^2 = \frac{C-2}{C+2}, \quad C > 2. \end{gathered} \tag{5g}$$

Here $\mathrm{sn}\,z$ and $\mathrm{cn}\,z$ are Jacobi elliptic functions.

We add that in ref. [6, 7] the same way some solutions of the many-dimensional equation $\Box U = \sin U$ are found. In [9] the solutions of this equation were obtained by symmetry reduction.

1. Newell A., in Solitons, eds. R.K. Bullough and P.J. Caudrey, 1980, p. 177.
2. Pogrebkov A.K., Polivanov M.K., *Part. Nucl.*, 1983, **14**, 1073.
3. Birkhoff G., Hydrodynamics, Princeton, 1950.
4. Sedov L.I., Metody podobiya i razmernosti v mekhanike, Moscov, 1967 (in Russian).
5. Ovsyannikov L.V., Group properties of differential equations, Novosibirsk, 1962 (in Russian).
6. Fushchych W.I., in Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kiev, Institute of Mathematics, 1981, 6–24 (in Russian).
7. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A.*, 1983, **16**, 3645.
8. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M., Tables of integrals, series, products, New York, 1965.
9. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., *Kinam*, 1982, **4**, 333.

О некоторых точных решениях многомерного уравнения Эйлера–Лагранжа

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

В работах [1–3] исследована симметрия и найдены некоторые классы точных решений нелинейного двумерного уравнения Эйлера–Лагранжа

$$u_{00}\left(u_1^2+1\right)-2u_{01}u_0u_1+u_{11}\left(u_0^2-1\right)=0, \tag{1}$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0,x_1)\in R_2$, $u_\mu\equiv\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu=0,1$.

В литературе часто (1) называют уравнением для минимальной поверхности, или уравнением Борна–Инфельда.

Естественное многомерное обобщение уравнения (1) — уравнение

$$L_1(u)=\Box u\left(1-u_\nu u^\nu\right)+u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0. \tag{2}$$

Уравнение вида [4]

$$\lambda_1L_1(u)+\lambda_2L_2(u)=0, \tag{3}$$

$$L_2(u)=\left[\left(1-u_\nu u^\nu\right)|u_{\mu\nu}|\right]^{3/(n+4)} \tag{4}$$

есть обобщение как уравнения Эйлера–Лагранжа, так и многомерного уравнения Монжа–Ампера. При $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq0$ (3) совпадает с уравнением Монжа–Ампера [4].

В (2)–(4) использованы следующие обозначения: $u=u(x)$, $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\in R_n$, $|u_{\mu\nu}|$ — -определитель из вторых производных $\frac{\partial^2u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$, т.е. гессиан; $\mu,\nu=0,1,\ldots,n-1$, $\Box$ — оператор Даламбера.

Настоящая статья посвящена построению некоторых классов точных решений уравнения (2). Кроме того, показано, что среди множества всех дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) первого порядка существует единственное уравнение — релятивистское уравнение Гамильтона, инвариантное относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde P(1,n)$.

Для отыскания некоторого нетривиального множества функций, удовлетворяющего уравнению (2), нужно знать его симметрийные свойства.

Теорема 1. *Максимальной алгеброй инвариантности в смысле С. Ли уравнений (2), (3) является расширенная алгебра Пуанкаре $\tilde P(1,n)$, базисные элементы которой имеют вид*

$$\begin{gathered}p_A=ig_{AB}\frac{\partial}{\partial x_B},\qquad J_{AB}=x_Ap_B-x_Bp_A,\quad A,B=0,1,\ldots,n,\\ D=x_Ap^A,\qquad x_n=u,\qquad p_n=-i\frac{\partial}{\partial u}.\end{gathered} \tag{5}$$

Доклады академии наук СССР, 1984, **278**, № 4, С. 847–851.

Теорема 1 доказывается с помощью метода Ли [5]. Из теоремы вытекает, что уравнение Эйлера–Лагранжа инвариантно относительно вращений в пространстве R_{n+1}, т.е. в пространстве с метрикой

$$s^2 = x_A x^A = x_\mu x^\mu - u^2, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Решение уравнения (2), следуя [6], ищем в виде

$$u = \varphi(\omega) f(x) + g(x) \tag{6}$$

или

$$w_0(x, u) = \Psi(w), \tag{7}$$

где $\varphi(\omega)$ и $\Psi(w)$ — неизвестные функции, зависящие от инвариантов ω, w_0, w группы (или подгруппы) $\tilde{P}(1, n)$; $f(x)$, $g(x)$ — известные функции. Формула (6), если известны инварианты $w_0(x, u)$, $w(x, u)$ и $\Psi(w)$, задает решение (2) в неявном виде.

В зависимости от явного вида инвариантов $\omega(x)$, $w(x, u)$ и функций $f(x)$, $g(x)$ получим различные классы функций, удовлетворяющих уравнению (2). Если

$$\omega = \frac{(a_\nu x^\nu)^a}{\beta_\nu x_\nu}, \qquad f(x) = \beta_\nu x^\nu, \qquad g(x) = 0, \tag{8}$$

где a, α_ν, β_ν — произвольные параметры, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu \beta^\nu \neq 0, \tag{9}$$

то уравнение (2) с помощью подстановки (6) редуцируется к уравнению $\varphi''(\omega) = 0$. Отсюда следует, что семейство функций

$$u = (\alpha_\nu x^\nu)^a + \beta_\nu x^\nu \tag{10}$$

при условии (9) является решением уравнения (2).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции вида

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) \beta_\nu x^\nu, \tag{11}$$

где φ — произвольная дважды дифференцируемая функция инварианта $\omega = \alpha_\nu x^\nu$, a_μ, β_μ удовлетворяют условиям (9).

Используя подстановку (6) и $\omega = \alpha_\nu x^\nu$, $f(x) = 1$, $g(x) = \beta_\nu x^\nu$, непосредственной проверкой убеждаемся, что решением уравнения (2) являются функции

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \tag{12}$$

где параметры удовлетворяют условиям

$$(\alpha_\nu \beta^\nu)^2 + \alpha_\nu \alpha^\nu (1 - \beta_\nu \beta^\nu) = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим случай

$$\omega = x_\nu x^\nu, \qquad f(x) = 1, \qquad g(x) = 0.$$

В этом случае уравнение (2) редуцируется к уравнению Бернулли

$$2\omega\varphi'' + n\varphi' - 4(n-1)\omega\varphi'^3 = 0.$$

Следовательно, решение уравнения задается выражением

$$u = c_1 \int\limits_0^{\sqrt{x_\nu x^\nu}} \frac{dt}{\sqrt{1+c_2 t^{2n-2}}}, \tag{14}$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные. При $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

$$u^2 = x_\nu x^\nu.$$

Воспользуемся теперь инвариантами w_0 и w, зависящими не только от x, но и от независимой функции u. Рассмотрим простейший случай

$$\begin{aligned} &w_0(x,u) = \alpha_A x^A \equiv \alpha_\nu x^\nu - \alpha_n u, \qquad \nu = 0,1,\ldots,n-1,\\ &w(x,u) = \beta_A x^A \equiv \beta_\nu x^\nu - \beta_n u. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя подстановку (7) и инварианты (15), получим решение (2) в неявном виде:

$$\alpha_A x^A = \Psi(\beta_A x^A), \tag{16}$$

$$\alpha_A \alpha^A \beta_A \beta^A - (\alpha_A \beta_A)^2 = 0, \tag{17}$$

где Ψ — произвольная дважды дифференцируемая функция относительно w.

В том случае, когда

$$w_0(x,u) = x_A x^A \equiv x_\nu x^\nu - u^2, \qquad w(x,u) = \beta_A x^A, \tag{18}$$

подстановка (7) редуцирует (2) к нелинейному уравнению

$$2(w^2 - \beta^2\Psi)\Psi'' + n(4\Psi - 4\omega\Psi + \beta^2\Psi'^2) = 0, \tag{19}$$

$\beta^2 \equiv \beta_A\beta^A$, n — число независимых переменных у функции $u(x)$.

Уравнение (19) заменой

$$\beta^2\Psi(w) = \Phi(w) + w^2, \qquad \beta^2 \neq 0,$$

приводится к интегрируемому уравнению

$$2\Phi\Phi'' - n\Phi'^2 - 4(n-1)\Phi = 0. \tag{20}$$

Общее решение уравнения (20) задается формулами

$$\int\limits_0^{\sqrt{\Phi}} \frac{dt}{\sqrt{c_1 t^{2n-2} - 1}} = w + c_2, \qquad \Phi \equiv 0. \tag{21}$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$(\beta_A x^A)^2 - \beta_A\beta^A x_B x^B + \Phi(\beta_A x^A) = 0, \tag{22}$$

где $\beta_A\beta^A \neq 0$, функция Φ задается выражениями (21).

В том случае, когда $\beta_A\beta^A = 0$, подстановка (7) редуцирует уравнение (2) к линейному уравнению Эйлера

$$w^2\Psi'' - 2nw\Psi' + 2n\Psi = 0, \tag{23}$$

решение которого имеет вид

$$\Psi = c_1 w + c_2 w^{2n}. \tag{24}$$

Решение уравнения (2) находится из алгебраического уравнения

$$x_A x^A = c_1 \beta_A x^a + c_2 (\beta_A x^A)^{2n}, \qquad \beta_A \beta^A = 0. \tag{25}$$

Таким образом, формулы (10)–(14), (16), (22), (25) задают класс функций — семейство частных решений нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа.

2. В этом пункте приведем решение следующей задачи: описать все ДУЧП первого и второго порядков

$$u_0 = F(x, u, \underset{1}{u}), \qquad x \in R_n, \quad \underset{1}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \tag{26}$$

$$u_{00} = G(x, u, u_0, u_1, u_{01}, u_{11}), \qquad x \in R_2, \tag{27}$$

инвариантные соответственно относительно алгебры $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{P}(1,2)$. Решение этой задачи дается следующими теоремами.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (26) было инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,n)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F = \pm (u_a u_a + 1)^{1/2}, \qquad a = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{28}$$

Теорема 3. *Уравнение (27) инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,2)$ тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$\lambda_1 \left[\Box u (1 - u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\right] + \lambda_2 \left[(1 - u_\nu u^\nu) |u_{\mu\nu}|\right]^{1/2} = 0,$$

$\mu, \nu = 0, 1,\ u = u(x_0, x_1)$.

Доказательство обеих теорем сводится к решению сильно переопределенных систем ДУЧП на функции F и G, полученных из условия инвариантности (26) и (27) относительно алгебр $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{P}(1,2)$. Общее решение этих систем и дает явный вид функций F и G.

Вопрос о линеаризации двумерных уравнений Эйлера–Лагранжа и Монжа–Ампера, с помощью нелокальных преобразований, рассмотрен в [2]. Применение алгебры $\tilde{P}(1,4)$ к описанию частиц с переменной массой обсужден в [6].

В заключение сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4. *а) Для того чтобы уравнение*

$$|u_{\mu\nu}| = F(x, u, \underset{1}{u}), \tag{29}$$

где $x \in R_n$, было инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $P(1,n)$ (5), необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$|u_{\mu\nu}| = \lambda (1 - u_\nu u^\nu)^{(n+2)/2}, \qquad \lambda = \mathrm{const}. \tag{30}$$

б) Для того чтобы уравнение (29) было инвариантно относительно алгебры Галилея $G(2, n-1)$ с операторами вида

$$\begin{aligned} &p_{t_1} = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_{t_2} = i\frac{\partial}{\partial u}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ &G_{1a} = t_1 p_a - m x_a p_{t_2}, \qquad G_{2a} = t_2 p_a - m x_a p_{t_1}, \qquad t_1 \equiv x_0, \qquad t_2 \equiv u, \end{aligned} \tag{31}$$

необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$|u_{\mu\nu}| = \lambda \left(u_0 + \frac{1}{2m} u_a u_a \right)^{(n+1)/2}, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{32}$$

1. Фущич В.И., Серов Н.И., *ДАН*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
2. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 48 с.
3. Розенгауз К.М., Препринт, Ленинград, Ин-т ядер. физ., 1982, № 815, 22 с.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., *ДАН*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.
6. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 5–28.

Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

В работе исследуются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности подалгебры алгебры Ли $A\tilde{P}(1,n)$ расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$. Найдены максимальные приводимые и максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ ($\mathbb{D}$ —дилатация). Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Доказана теорема о подпространствах пространства трансляций U, инвариантных относительно приводимой подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$. Получен ряд общих результатов о подалгебрах алгебры $U \niplus L$, где L — нормализатор изотропного подпространства пространства U в алгебре $A\tilde{O}(1,n)$. Проведена классификация всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

Введение

Систематическое изучение подалгебр алгебр преобразований квантовой механики начато в работе Патеры–Винтернитца–Цассенхауза [1] , в которой предложен общий метод для описания относительно определенной сопряженности классов подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом и, в частности, с нетривиальным абелевым идеалом. Этим методом проведена классификация подалгебр таких алгебр: $AP(1,3)$ [1], $ASim(1,3)$ [2], $ASim(1,2)$ [3], $AE(3)$ [4], $AO(1,4)$ [5], $AO(2,3)$ [6], $AOpt(1,2)$ [7], $ASch(2)$, $A\tilde{S}ch(2)$ [8], $AP(1,4)$ [9–13], $AE(4)$ [14], $AE(5)$, $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ [15]. Несколько ранее подалгебры алгебры $AP(1,3)$ были описаны другим способом в работах [16–18] , а подалгебры алгебр $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ — в [19].

В силу большой общности метод П.–В.–Ц. требует развития для конкретных классов алгебр. В данной работе мы даем дальнейшее развитие этого метода для расширенных алгебр Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$ ($n \geq 2$), обозначаемых также $ASim(1,n)$. Необходимость в описании подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности вызвана рядом задач теоретической и математической физики. В частности, знание подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ дает возможность исследовать симметрийную редукцию для релятивистски-инвариантного скалярного дифференциального уравнения

$$\Phi\left(\Box u, (\nabla u)^2, u\right) = 0 \qquad [\ 20\text{–}22\ ],$$

где $\Box u = u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \cdots - u_{x_nx_n}$, $(\nabla u)^2 = (u_{x_0})^2 - (u_{x_1})^2 - \cdots - (u_{x_n})^2$, а Φ — достаточно гладкая функция. Описание подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ позволяет решать задачу о редукции представлений алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ на ее подалгебры. В работе [23] проведена редукция неприводимых представлений алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$ на подалгебры $AP(1,n-k)$, а в [24] изучена редукция неприводимых представлений алгебры $AP(1,4)$ на алгебру Галилея $A\tilde{G}(3)$.

Препринт 85.90, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 52 с.

Дадим краткую характеристику работы. Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 найдены в явном виде максимальные приводимые подалгебры и максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$, где $\mathbb{D}$ — дилатация, а также описаны подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n-1) = AO(1,n-1) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$, обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{E}(n-1)$.

В § 2 изучаются вполне приводимые подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$. Выделены те из них, которые обладают только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Установлено, что описание расщепляемых подалгебр $\hat{F}$ алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, проекции которых F на $A\tilde{O}(1,n)$ не имеют инвариантных изотропных подпространств в пространстве трансляций $U = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$, сводится к описанию неприводимых частей алгебр F.

В § 3 доказан ряд утверждений о подалгебрах алгебры $U \supsetplus F$, где F — нормализатор $\langle P_0 + P_n \rangle$ в $A\tilde{O}(1,n)$. Эти утверждения касаются таких вопросов: 1) расщепляемость всех расширений подалгебры $L \subset F$ в $A\tilde{P}(1,n)$ или в некоторых других алгебрах; 2) разложение инвариантных подпространств в прямую сумму своих проекций на определенные подпространства; 3) явное описание некоторых классов сопряженных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$.

В § 4 на основании общих результатов, полученных в § 1 – § 3, проводится полная классификация подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности.

§ 1. Максимальные подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$

Пусть R — поле вещественных чисел; $\langle Y_1, \ldots, Y_s \rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1, \ldots, Y_s$; R^m — m-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U = U_{1,n}$ — $(1+n)$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X,Y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \cdots - x_n y_n; \tag{1.1}$$

$O(1,n)$ — группа линейных преобразований $U_{1,n}$, сохраняющих (X,X) для каждого $X \in U_{1,n}$. Будем предполагать, что $O(1,n)$ реализирована в виде вещественных матриц порядка $n+1$.

Расширенной группой Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda\Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in O(1,n)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, $Y \in R^{n+1}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Используя определение алгебры Ли, легко получить, что $AO(1,n)$ состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \cdots & \alpha_{0,n-1} & \alpha_{0n} \\ \alpha_{01} & 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{02} & -\alpha_{12} & 0 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,n-1} & -\alpha_{1,n-1} & -\alpha_{2,n-1} & \cdots & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{0n} & -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \cdots & -\alpha_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Пусть E_{ik} — матрица порядка $n+2$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-ого столбца и нули на всех остальных местах $(i,k=0,1,\ldots,n+1)$. Легко получить, что базис алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ образуют матрицы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{D}=E_{00}+E_{11}+\cdots+E_{nn}, \qquad J_{0a}=-E_{0a}-E_{a0},\\
&J_{ab}=-E_{ab}+E_{ba}, \qquad P_0=E_{0,n+1}, \qquad P_a=E_{a,n+1}\\
&(a<b,\ a,b=1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[J_{\alpha\beta},J_{\gamma\delta}]=g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\
&[P_\alpha,J_{\beta\gamma}]=g_{\alpha\beta}P_\gamma-g_{\alpha\gamma}P_\beta, \qquad J_{\beta\alpha}=-J_{\alpha\beta},\\
&[P_\alpha,P_\beta]=0, \qquad [\mathbb{D},J_{\alpha\beta}]=0, \qquad [\mathbb{D},P_\alpha]=P_\alpha,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $g_{00}=-g_{11}=\cdots=-g_{nn}=1$, $g_{\alpha\beta}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$ $(\alpha,\beta=0,1,\ldots,n)$.

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, а генераторы трансляций P_α порождают коммутативный идеал N, причем $A\tilde{P}(1,n)=N\subset\!\!\!\!+ (AO(1,n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle)$. Пусть $\tilde{O}(1,n)=\{\lambda E|\lambda\in R,\lambda>0\}\times O(1,n)$, где E — единичная матрица порядка $n+1$. Очевидно, $A\tilde{O}(1,n)=AO(1,n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$. Легко видеть, что $[X,Y]=X\cdot Y$ для любых $X\in A\tilde{O}(1,n)$, $Y\in N$. Отождествим N и $U_{1,n}$, сопоставив P_i $(n+1)$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и с нулями на остальных местах $(i=0,1,\ldots,n)$.

Пусть C — такая матрица порядка $n+2$ над R, что отображение $\varphi_C: X\to CXC^{-1}$ является автоморфизмом алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Если $C\in G$, G — подгруппа $\tilde{P}(1,n)$, то φ_C называется G-автоморфизмом. Подалгебры L и L' алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ называются $\tilde{P}(1,n)$-сопряженными, если $\varphi_C(L)=L'$ для некоторого $\tilde{P}(1,n)$-автоморфизма φ_C алгебры $A\tilde{P}(1,n)$.

Пусть W — невырожденное подпространство пространства U. Это подпространство также считаем псевдоевклидовым относительно скалярного произведения, заданного в U. Пусть $O(W)$ — группа изометрий пространства W, $\tilde{O}(W)=\{\lambda E|\lambda\in R,\lambda>0\}\times O(W)$. Если F — подалгебра $A\tilde{O}(W)$, то тождественное отображение F является представлением F в $A\tilde{O}(W)$. Будем называть его тривиальным представлением F в $A\tilde{O}(W)$. Подалгебра $F\subset A\tilde{O}(W)$ называется неприводимой, если тривиальное представление F является неприводимым. Подалгебра $F\subset A\tilde{O}(W)$ называется вполне приводимой, если ее тривиальное представление вполне приводимо.

Теорема 1.1. *Максимальные приводимые подалгебры алгебры исчерпываются относительно $\tilde{O}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами: 1) $AO(1,n-1)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$; 2) $AO(n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$; 3) $AO(1,k)\oplus AO'(n-k)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$, где $AO'(n-k)=\langle J_{ab}|a,b=k+1,\ldots,n\rangle$ $(k=2,\ldots,n-2)$; 4) $\langle G_1,\ldots,G_{n-1}\rangle\subset\!\!\!\!+ (AO(n-1)\oplus\langle J_{0n},\mathbb{D}\rangle)$, где $G_a=J_{0a}-J_{an}$ $(a=1,\ldots,n-1)$.*

Доказательство. Если L — максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, то $L=AO(1,n)$ или $L=L_1\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$, где L_1 — максимальная подалгебра алгебры $AO(1,n)$. Пусть F — максимальная приводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$, U' — подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U' — вырожденное пространство, то оно содержит одномерное F-инвариантное изотропное подпространство W, сопряженное относительно $O(1,n)$ пространству $\langle P_0 + P_n\rangle$. В этом случае

$$F = \{X \in AO(1,n) | (\forall\, Y \in W)\ (X \cdot Y \in W)\}.$$

Нетрудно получить, что

$$F = \langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}\rangle).$$

Если U' — невырожденное пространство размерности r, то в нем существует ортогональный базис, состоящий из векторов ненулевой длины. Пусть r_-, r_+ — соответственно числа векторов отрицательной и положительной длины в данном базисе пространства U'. Эти числа не зависят от выбора базиса. Согласно теореме Витта два пространства U' и U'_1, для которых $r_- = r^1_-$, $r_+ = r^1_+$, являются сопряженными относительно группы $O(1,n)$. Очевидно, $r_+ \in \{0,1\}$. Так как $U = U' \oplus U'^1$ и U'^1 инвариантно относительно F, то алгебра F $O(1,n)$-сопряжена одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(1,k) \oplus AO'(n-k)$. Теорема доказана.

Пусть $A\tilde{E}(n) = \langle P_1, \ldots, P_n\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n) \oplus \langle \mathbb{D}\rangle)$, $AE'(n-k) = \langle P_{k+1}, \ldots, P_n\rangle \subset\!\!\!\!+ AO'(n-k)$, $A\tilde{G}(n-1)$ — расширенная алгебра Галилея с базисом: $M = P_0 + P_n$, P_0, P_1, $\ldots$, P_{n-1}, G_1, $\ldots$, G_{n-1}, J_{ab} $(a,b = 1,\ldots,n-1)$. Согласно теореме 1.1 описание подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ сводится к описанию относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности неприводимых подалгебр алгебры $AO(1,n)$ и подалгебр таких алгебр: $A\tilde{E}(n)$, $(AP(1,k) \oplus AE'(n-k) \subset\!\!\!\!+ \langle \mathbb{D}\rangle$, $A\tilde{G}(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$, $(k = 2, \ldots, n-1)$.

Пусть π — проектирование алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ на $A\tilde{O}(1,n)$, F — подалгебра $A\tilde{O}(1,n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. Если алгебра $\hat{F}$ $\hat{P}(1,n)$-сопряжена алгебре $W \subset\!\!\!\!+ F$, где W есть F-инвариантное подпространство пространства U, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1,n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Аналогично определяется расщепляемость подалгебр и для других алгебр неоднородных преобразований. Если ничего не оговорено, то исследование подалгебр данной алгебры на сопряженность проводится относительно группы внутренних автоморфизмов.

Предложение 1.1. *Пусть F — вполне приводимая алгебра Ли линейных преобразований векторного пространства V над полем R, W — неприводимый F-подмодуль модуля V. Если $FW \neq 0$, то алгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $W \subset\!\!\!\!+ F$.*

Доказательство. Поскольку F — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}\!\downarrow\!(V)$, то $F = Q \oplus Z(F)$, где Q — фактор Леви, а $Z(F)$ — центр F [25]. Используя тождество Якоби, нетрудно получить, что каждое прямое слагаемое алгебры F аннулирует в W только нулевое подпространство.

Пусть $Q \neq 0$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $W \subset\!\!\!\!+ F$, что ее проекция на F совпадает с F. По лемме Уайтхеда [25] $H^1(Q,W) = 0$, откуда вытекает что с точностью до сопряженности относительно группы автоморфизмов $\exp(\theta Y)$ $(\theta \in R$, $Y \in W)$ алгебра $\hat{F}$ содержит Q. Пусть $J \in Z(F)$, $Y \in W$, $Y \neq 0$ и $J + Y \in \hat{F}$. Так как $[Q,Y] \neq 0$, то существует такой элемент $X \in Q$, что $[X,Y] \neq 0$. Пусть $Y_1 = [X,Y]$, W_1 — F-подмодуль модуля W, порожденный Y_1. Вследствие того, что $W_1 \neq Q$ и W — неприводимый F-модуль, имеем $W_1 = W$. Отсюда вытекает, что $J \in \hat{F}$. Следовательно, если $Q \neq 0$, то $F \subset \hat{F}$, т.е. $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра.

Пусть $Q=0$, $J\in Z(F)$. Поскольку J аннулирует в W только нулевое подпространство, то $[J,W]=W$. Отсюда следует, что для любого $Y\in W$ существует такой элемент $Y'\in W$, что $[J,Y']=Y$. Поэтому можно предполагать, что $J\in\hat{F}$. Если $\hat{F}$ содержит J_1+Y_1, где $Y_1\in W$ и $Y_1\neq 0$, то $[J,Y_1]\in\hat{F}$ и $[J,Y_1]\neq 0$. Как и в случае $Q\neq 0$ получаем, что $Y_1\in\hat{F}$, т.е. $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра. Предложение доказано.

Предложение 1.2. *Пусть $A\tilde{E}(n-1)=\langle G_1,\dots,G_{n-1}\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$, где $G_a=J_{0a}-J_{an}$ $(a=1,\dots,n-1)$. Подалгебра $F\subset AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ обладает только расщепляемыми расширениями в $A\tilde{E}(n-1)$ тогда и только тогда, когда F — полупростая алгебра или F не сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-2)$.*

Доказательство. Пусть $W=\langle G_1,\dots,G_{n-1}\rangle$. Поскольку каждая подалгебра алгебры $AO(n-1)$ является вполне приводимой и $[J_{0n},G_a]=-G_a$, то каждая подалгебра F алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ также является вполне приводимой алгеброй линейных преобразований пространства W.

Пусть $W=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ — разложение W в прямую сумму неприводимых F-модулей. Если проекция F на $\langle J_{0n}\rangle$ не является нулевой, то $[F,W_i]=W_i$ для всех $i=1,\dots,s$. Отсюда в силу предложения 1.1 вытекает, что F обладает только расщепляемыми, расширениями в $A\tilde{E}(n-1)$. Допустим, что проекция F на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0. Если F — полупростая алгебра, то по лемме Уайтхеда [25] $H^1(F,W)=0$, а потому каждое расширение F в $A\tilde{E}(n-1)$ расщепляемо. Пусть F не является полупростой алгеброй. При $\dim W_i\geq 2$ имеем $[F,W_i]\neq 0$, и в силу предложения 1.1 F обладает только расщепляемыми расширениями в $A\tilde{E}(n-1)$. При $\dim W_i=1$ модуль W_i аннулируется алгеброй F и алгебра F сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-2)$. Если $Z(F)$ — центр F и X — ненулевой элемент $Z(F)$, то для любого ненулевого $Y\in W_i$ существует подалгебра $\hat{F}$ алгебры $A\tilde{E}(n-1)$, получаемая из алгебры F в результате замены X на $X+Y$. Очевидно, $\hat{F}$ не расщепляется. Предложение доказано.

Из теоремы 1.1 и свойств разрешимых подалгебр алгебры $AO(n)$ вытекает, что если n — нечетное число, то $AO(1,n)$ обладает относительно $O(1,n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle G_1,\dots,G_{n-1},J_{12},J_{34},\dots,J_{n-2,n-1},J_{0n}\rangle.$$

Если n — четное число, то $AO(1,n)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\langle J_{12},J_{34},\dots,J_{n-1,n}\rangle,\qquad \langle G_1,\dots,G_{n-1},J_{12},J_{34},\dots,J_{n-3,n-2},J_{0n}\rangle.$$

Поскольку расширение абелевой алгебры с помощью разрешимой алгебры является разрешимой алгеброй, то максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(1,n)$ имеют вид $U\mathbin{\supset\!\!\!\!+} F$, где F — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ исчерпываются алгебрами $U\mathbin{\supset\!\!\!\!+}(F\oplus\langle\mathbb{D}\rangle)$.

Предложение 1.3. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ исчерпываются относительно $\tilde{O}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$n=2k+1$$

$$\langle J_{12},J_{34},\dots,J_{n-2,n-1},J_{0n},\mathbb{D}\rangle;\qquad \langle G_1,G_2,\dots,G_{n-1},\mathbb{D}\rangle;$$

$$\langle G_1,G_2,\dots,G_{2a},J_{2a+1,2a+2},J_{34},\dots,J_{n-2,n-1},\mathbb{D}\rangle\quad(a=1,\dots,k-1);$$

$n = 2k$

$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-1,n}, \mathbb{D}\rangle$; $\quad\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$;

$\langle G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, \mathbb{D}\rangle$; $\quad\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, G_{n-1}, \mathbb{D}\rangle$;

$\langle G_1, G_2, \ldots, G_{2a}, G_{n-1}, J_{2a+1,2a+2}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, \mathbb{D}\rangle \quad (a = 1, \ldots, k-2)$.

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

Доказательство. Если F — максимальная абелева подалгебра алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, то в силу предложения 1.2 $F = \Omega \oplus L \oplus \langle\mathbb{D}\rangle$, где L — подалгебра алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ или алгебры $AO(n)$, а Ω — подпространство $\langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ отлична от нуля, то $\Omega = 0$. Пусть проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ является нулевой. Если L — подалгебра Картана алгебры $AO(n)$, то $\Omega = 0$. В остальных случаях при $L \neq 0$ можно предполагать, что $L = \langle J_{2t+1,2t+2} | t = a, \ldots, l-1\rangle$ $(l = [n-1/2]$, $a = 1, \ldots, l-1)$, а $\Omega = \{G_c | [L, G_c] = 0\}$. Предложение доказано.

§ 2. Вполне приводимые подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$

В этом параграфе мы докажем ряд общих результатов о вполне приводимых подалгебрах алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ и покажем, как для этих подалгебр находить инвариантные подпространства пространства U.

Предложение 2.1. *Пусть W — евклидово пространство над полем R, F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W)$. Если $\dim W = 2n+1$, то F — полупростая алгебра. Если $\dim W = 2n$, $n \geq 2$, и F — неполупростая алгебра, то $F = Q \oplus \langle J\rangle$, где Q — фактор Леви, а $J^2 = -E$ (E — единичная матрица порядка $2n$). Каждая простая компонента и центр алгебры F аннулируют в W только нулевое пространство.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W)$. Тогда [25] $F = Z(F) \oplus Q$, где $Z(F)$ — центр, а Q — фактор Леви. Если F — абсолютно неприводимая алгебра, то в силу леммы Шура каждая матрица из $Z(F)$ является скалярной. Поскольку след любой матрицы из $AO(W)$ равен 0, то $Z(F) = 0$.

Допустим, что F не является абсолютно неприводимой. Если $\dim W = k$, то $k \equiv 0 \pmod 2$ и с точностью до $O(k,C)$-сопряженности каждый элемент алгебры F можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \bar{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\bar{\Delta}$ — матрица, сопряженная Δ. Так как Δ, $\bar{\Delta}$ — абсолютно неприводимые представления алгебры F, то в силу леммы Шура элементы $Z(F)$ можно записать в виде $\mathrm{diag}\,[i\lambda E, -i\lambda E]$ $(\lambda \in R)$. Следовательно, $\dim Z(F) \leq 1$, Очевидно, $(\mathrm{diag}\,[iE, -iE])^2 = \mathrm{diag}\,[-E, -E]$.

Пусть L — простая компонента алгебры Q, $F = L \oplus N$, W' — такое подпространство W, что $[L, W'] = 0$. Если $X \in L$, $X_1 \in N$, $Y \in W'$, то на основании тождества Якоби $[X, [Y, X_1]] = 0$, а поэтому W' — F-модуль. В силу неприводимости W получаем, что $W' = 0$. Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Если $n \geq 2$, то неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$ является полупростой и некомпактной.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$, $Z(F)$ — центр F. Если $Z(F) \neq 0$, то как и в доказательстве предложения 2.1

получаем, что $Z(F) = \langle J \rangle$, где $J^2 = -E$. Пусть X — произвольный элемент вида (1.2) алгебры $AO(1,n)$. Если $X^2 = -E$, то $\alpha_{01}^2 + \alpha_{02}^2 + \cdots + \alpha_{0n}^2 = -1$. Полученное противоречие доказывает, что $Z(F) = 0$, Значит, F — полупростая алгебра.

Если F — компактная алгебра, то существует такая симметрическая матрица $C \in GL(n{+}1, R)$, что $C^{-1}FC \subset AO(n{+}1)$ [26]. Так как $\exp(C^{-1}FC) = C^{-1}{\cdot}\exp F{\cdot}$ C, то в $O(n+1)$ существует неприводимая группа, сохраняющая одновременно $x_0^2{+}x_1^2{+}\cdots{+}x_n^2$ и $\lambda_0^2x_0^2{-}\lambda_1^2x_1^2{-}\cdots{-}\lambda_n^2x_n^2$ ($\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые вещественные числа). Полученное противоречие и доказывает вторую часть предложения.

Предложение 2.3. *Приводимая подалгебра алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ является вполне приводимой тогда и только тогда, когда она сопряжена подалгебре алгебры $L \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ или одной из алгебр: $L_1 \oplus L_2$, $L_1 \oplus L_2 \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$, где $L = AO(n)$ или $L = AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, L_1 — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,k)$ $(k > 1)$, а L_2 — подалгебра алгебры $AO'(n-k) = \langle J_{ab} \,|\, a, b = k+1, \ldots, n \rangle$.*

Предложение 2.3 является следствием предложений 1.2, 2.2 и того факта, что G_a действует не вполне приводимо на пространстве $\langle P_0 + P_n, P_a \rangle$.

Предложение 2.4. *Вполне приводимая подалгебра F алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или F не сопряжена подалгебре одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(1,n-1)$.*

Доказательство предложения 2.4 аналогично доказательству предложения 1.2.

Предложение 2.5. *Пусть L — алгебра Ли над полем R, Γ и Γ' — представления алгебры L кососимметрическими матрицами. Для того чтобы Γ и Γ' были эквивалентными над R, необходимо и достаточно, чтобы $C\Gamma C^{-1} = \Gamma'$ для некоторой ортогональной матрицы C.*

Доказательство. Представления Γ и Γ' являются вполне приводимыми:

$$B\Gamma(X)B^{-1} = \operatorname{diag}[\Gamma_1(X), \ldots, \Gamma_m(X)], \quad B'\Gamma'(X)B'^{-1} = \operatorname{diag}[\Gamma'_1(X), \ldots, \Gamma'_{m'}(X)],$$

где $X \in L$, а B, B' — ортогональные матрицы. Если Γ эквивалентно Γ' над R, то $m = m'$ и

$$C_i\Gamma_i(X)C_i^{-1} = \Gamma'_{k_i}(X) \tag{2.1}$$

для вещественной матрицы C_i и произвольного $X \in L$ $(i = 1, \ldots, m)$. Покажем, что в качестве C_i можно взять ортогональную матрицу.

Матрицу C_i, удовлетворяющую соотношению (2.1), можно записать в виде T_iO_i, где T_i — положительно определенная симметрическая матрица, а O_i — ортогональная матрица. Равенство (2.1) запишем в таком виде:

$$T_i(O_i\Gamma_i(X)O_i^{-1})T_i^{-1} = \Gamma'_{k_i}(X).$$

Если в последнем равенстве перейти к транспонированным матрицам, то получим, что

$$T_i^{-1}(O_i\Gamma_i(X)O_i^{-1})T_i = \Gamma'_{k_i}(X).$$

Отсюда и из предыдущего равенства вытекает, что

$$T_i^{-1}\Gamma'_{k_i}(X)T_i = T_i\Gamma'_{k_i}(X)T_i^{-1}$$

или

$$T_i^2\Gamma'_{k_i}(X)T_i^{-2} = \Gamma'_{k_i}(X).$$

Так как T_i — положительная матрица, то $T_i = f(T_i^2)$, где $f(x)$ — многочлен над P. Следовательно,

$$T_i\Gamma'_{k_i}(X)T_i^{-1} = \Gamma'_{k_i}(X),$$

а потому

$$O_i\Gamma_i(X)O_i^{-1} = \Gamma'_{k_i}(X).$$

Пусть $C = \operatorname{diag}[O_1,\ldots,O_m]$. Очевидно, C — ортогональная матрица и с точностью до нумерации подпредставлений $C\Gamma(X)C^{-1} = \Gamma'(X)$ $(X \in L)$. Предложение доказано.

Предложение 2.6. *Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $A\tilde{O}(n)$, $W = \langle P_1,\ldots,P_n\rangle$. Каждый автоморфизм алгебры $W \subset\!\!\!\!+ F$ является $\tilde{E}(n)$-автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $F = L \oplus Q$, где L — центр, а Q — фактор Леви. Если φ — автоморфизм алгебры $W \subset\!\!\!\!+ F$, то $\varphi(W \subset\!\!\!\!+ L) = W \subset\!\!\!\!+ L$ и с точностью до $\tilde{E}(n)$-автоморфизма $\varphi(Q) = Q$. Вследствие неприводимости F имеем $\varphi(W) = W$. Поскольку F не сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-1)$, то на основании предложения 1.1 $\varphi(L) = L$. Так как $[\varphi(X),\varphi)P_i)] = \varphi([X,P_i])$ $(i = 1,\ldots,n)$, то для каждого $X \in F$ матрица оператора $\varphi(X)$ в базисе $\varphi(P_1),\varphi(P_2),\ldots,\varphi(P_n)$ совпадает с матрицей оператора X в базисе $P_1,P_2,\ldots,P_n$. Отсюда вытекает, что если B — матрица перехода от базиса $P_1,P_2,\ldots,P_n$ до базиса $\varphi(P_1),\varphi(P_2),\ldots,\varphi(P_n)$, то $BXB^{-1} = \varphi(X)$. Пусть $B = TO$, где T — положительно определенная симметрическая матрица, а O — ортогональная матрица. Тогда $T\cdot\varphi(X) = \varphi(X)\cdot T$. Пусть λ — собственное значение матрицы T. Так как $(T-\lambda E)\cdot\varphi(X) = \varphi(X)\cdot(T-\lambda E)$, то по лемме Шура $T-\lambda E = 0$, а значит, $B = \lambda O$. Предложение доказано.

Пусть A_i — алгебра Ли над R $(i = 1,2)$, $f : A_1 \to A_2$ — изоморфизм, $B = \{X, F(X) \mid X \in A_i\}$. Полагая

$$[(X_1,f(X_1)),(X_1',f(X_1'))] = ([X_1,X_1'],f([X_1,X_1']))$$

и определяя сложение и умножение на скаляры покомпонентно, превращаем B в алгебру Ли над R. Обозначим ее через (A_1,A_2,f). Очевидно, (A_1,A_2,f) — подпрямая сумма алгебр A_1 и A_2.

Пусть W_i — левый A_i-модуль $(i = 1,2)$. Легко видеть, что W_i является B-модулем, если положить $(X,f(X))\cdot Y_1 = X\cdot Y_1$, $(X,f(X))\cdot Y_2 = f(X)\cdot Y_2$ для любых $X \in A_1$, $Y \in W_i$ $(i = 1,2)$. Пусть W — B-подмодуль модуля $W_1 \oplus W_2$. Если $W = W_1' \oplus W_2'$, где $W_i' \subset W_i$ $(i = 1,2)$, то W называется расслоенным B-модулем. В противном случае модуль W называется нерасслоенным B-модулем.

Лемма 2.1. *Пусть $B = (A_1,A_2,f)$, V_i — левый A_i-модуль $(i = 1,2)$. Для того чтобы в B-модуле $V_1 \oplus V_2$ существовал нерасслоенный B-подмодуль, необходимо и достаточно, чтобы B-модули V_1 и V_2 обладали изоморфными композиционными факторами.*

Доказательство. Пусть W — нерасслоенный B-подмодуль модуля $V_1 \oplus V_2$. Тогда W — подпрямая сумма модулей W_1 и W_2, где $W_i \subset V_i$ $(i = 1,2)$. Пусть $S_i =$

$W \cap V_i$ $(i = 1, 2)$. Очевидно S_i — B-подмодуль модуля W. Модуль $W/(S_1 \oplus S_2)$ является нерасслоенным B-подмодулем модуля $V_1/S_1 \oplus V_2/S_2$. Вследствие этого будем предполагать, что $W \cap V_i = 0$ $(i = 1, 2)$.

Для каждого элемента $Y_1 \in W_1$ существует единственный элемент $Y_2 \in W_2$, такой, что $(Y_1, Y_2) \in W$. Полагаем, что $\varphi(Y_1) = Y_2$. Отображение φ является изоморфизмом B-модулей W_1 и W_2. Но в таком случае модули W_1 и W_2 обладают изоморфными композиционными факторами. Необходимость леммы доказана.

Пусть W_i — левый B-подмодуль модуля V_i $(i = 1, 2)$ и пусть композиционный фактор W_1/N_1 модуля W_1 изоморфен композиционному фактору W_2/N_2 модуля W_2. Через W обозначим векторное пространство над полем R, порожденное парами $(Z_1, 0)$, $(0, Z_2)$, (Y_1, Y_2), где $Z_i \in N_i$, $Y_i \in W_i$ $(i = 1, 2)$ и $\varphi(Y_1 + N_1) = Y_2 + N_2$ для изоморфизма $\varphi : W_1/N_1 \to W_2/N_2$. Легко видеть, что W — нерасслоенный B-модуль. Достаточность леммы доказана.

Пусть Γ — тривиальное представление вполне приводимой алгебры $F \subset A\tilde{O}(1,n)$, не имеющей инвариантных изотропных подпространств в пространстве U. Тогда Γ $O(1,n)$-эквивалентно $\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_m$, где $F_i = \{\mathrm{diag}\,[0, \ldots, \Gamma_i(X), \ldots, 0] \mid X \in F\}$ является неприводимой подалгеброй алгебры $A\tilde{O}(W_1)$. Если $F_i \neq 0$, то алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Если Γ_i и Γ_j суть эквивалентные представления , то в силу предложений 2.2, 2.5 можно предполагать, что для любого $X \in F$ имеет место равенство $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$. Объединив эквивалентные ненулевые неприводимые подпредставления, мы получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, построенные по тому же правилу, что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F.

Теорема 2.1. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части подалгебры F алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, V — подпространство пространства $U = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$, инвариантное относительно F. Тогда $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$, где $V_i = [K_i, V] = [K_i, V_i]$, $[K_j, V_i] = 0$ при $j \neq i$ $(i, j = 1, \ldots, q)$, $\tilde{V} = \{X \in V \mid [F, X] = 0\}$. Если примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$, то относительно $O(1,n)$ сопряженности ненулевые подпространства W пространства U с условием $[K, W] = W$ исчерпываются пространствами: $W_1, W_1 \oplus W_2, \ldots, W_1, \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.*

Доказательство. Из полной приводимости алгебры F вытекает, что $V = V' \oplus \tilde{V}$, где $\tilde{V}$ — максимальное подпространство пространства V, аннулируемое F. Далее будем предполагать, что $V = V'$. На основании предложения 2.2 можно допускать, что $F \subset AO(m)$, $m \leq n$. Пусть K_i — подпрямая сумма неприводимых частей $K_{i1}, \ldots, K_{is_i}$, $V_{ij} = [K_{ij}, V]$, π_{ij} — проектирование V на V_{ij} $(i = 1, \ldots, q;$ $j = 1, \ldots, s_i)$. Допустим, что $\pi_{ab}(V) \neq 0$. На основании леммы 2.1 для каждой пары (c, d), где $1 \leq c \leq q$, $c \neq a$, $1 \leq d \leq s_c$, в пространстве V существует такое F-инвариантное подпространство Ω, что $\pi_{ab}(\Omega) \neq 0$ и $\pi_{cd}(\Omega) = 0$. Отсюда следует, что в V существует максимальное F-инвариантное подпространство U_{ab} со свойством: $\pi_{ab}(U_{ab}) \neq 0$, $\pi_{cd}(U_{ab}) = 0$ для всех $c \neq a$, $d = 1, 2, \ldots, s_c$. Очевидно, $V_a = U_{ab}$.

Пусть примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$. Допустим, что W — ненулевое подпространство пространства $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ и $[K, W] = W$. На основании теоремы Витта существует такая изометрия $B \in O(W)$, что $B(W) =$

$W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ $(1 \leq s \leq r)$ и пространство W_i инвариантно относительно BKB^{-1} $(i = 1, \ldots, s)$. Отсюда получаем, что BKB^{-1} является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$. Поскольку в силу предложения 2.5 неприводимые части алгебры определяются однозначно с точностью до сопряженности, то можно считать, что BKB^{-1}. Теорема доказана.

На основании теоремы 2.1 описание расщепляемых подалгебр $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1, n)$, для которых $\pi(\hat{F})$ — вполне приводимая алгебра и не имеет изотропных инвариантных подпространств в пространстве U, сводится к описанию неприводимых подалгебр алгебр $AO(1, k)$ и $AO(k)$ $(k = 2, 3, \ldots n)$. Остальные случаи сводятся к случаю алгебры $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$.

§ 3. Подалгебры алгебры $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$

Расширенная алгебра Галилея $A\tilde{G}(n-1)$ имеет базис, состоящий из $M = P_0 + P_n$, P_0, P_1, …, P_{n-1}, G_1, …, G_{n-1}, J_{ab}, $(a < b,\ a, b = 1, \ldots, n-1)$, где $G_a = J_{0a} - J_{an}$ $(a = 1, 2, \ldots, n-1;\ n \geq 3)$. Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = g_{ab}P_c - g_{ac}P_b,\\
&[P_a, P_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [P_a, G_b] = \delta_{ab}M,\\
&[P_a, M] = [G_a, M] = [J_{ab}, M] = [P_0, J_{ab}] = [P_0, M] = [P_0, P_a] = 0,\\
&[P_0, G_a] = P_a \qquad (a, b, c, d = 1, 2, \ldots, n-1).
\end{aligned}$$

Целью данного параграфа является изучение подалгебр алгебры $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ относительно $\tilde{P}(1, n)$-сопряженности.

Пусть $V = \langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$ — евклидово пространство с ортонормированным базисом $G_1, \ldots, G_{n-1}$, $V' = [P_0, V]$, $V' = \langle P_1, \ldots, P_{n-1}\rangle$ $(n \geq 3)$. Условимся группу $O(n-1)$ отождествлять с группами изометрий $O(V)$, $O(V')$.

Леммы 3.1. *Пусть $W_1 = \langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle$, $W_2 = \langle Z_1, \ldots, Z_m\rangle$ — евклидовы пространства над полем R, $O(W_i)$ — группа изометрий W_i $(i = 1, 2)$. Подпространства пространства $W_1 \oplus W_2$ исчерпываются относительно $O(W_1) \times O(W_2)$-сопряженности такими пространствами:*

$$\begin{aligned}
&O, \quad \langle Y_1, \ldots, Y_r\rangle, \quad \langle Z_1, \ldots, Z_s\rangle, \quad \langle Y_1, \ldots, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s\rangle \quad (r, s = 1, \ldots, m),\\
&\langle Y_1, \ldots, Y_k, Y_{k+1} + \alpha_1 Z_1, \ldots, Y_{k+t} + \alpha_t Z_t\rangle \oplus \Omega,
\end{aligned}$$

где $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_t$, а Ω совпадает с одним из пространств: O, $\langle Z_{t+1}\rangle$, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}\rangle$, …, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_m\rangle$ $(k = 1, \ldots, m-1;\ t = 1, \ldots, m-k)$, $\langle Y_1 + \alpha_1 Z_1, \ldots, Y_t + \alpha_t Z_t\rangle \oplus \Omega$, где $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_t$, а Ω совпадает с одним из пространств: O, $\langle Z_{t+1}\rangle$, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}\rangle$, …, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_m\rangle$ $(t = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Пусть N — подпространство $W_1 \oplus W_1$ и $N \neq W_1' \oplus W_2'$, где W_i' — подпространство W_i $(i = 1, 2)$. Если $S_i = N \cap W_i$, N_i — проекция N на W_i $(i = 1, 2)$, то $N_1/S_1 \cong N_2/S_2$. Пусть $\dim S_1 = k$. По теореме Витта пространство S_1 сопряжено $\langle Y_1, \ldots, Y_k\rangle$. Если $\dim(N_1/S_1) = t$, то N содержит элементы $Y_{k+j} + \alpha_{1j}Z_1 + \cdots + \alpha_{tj}Z_t$ $(j = 1, \ldots, t)$, причем матрица $A = (\alpha_{ij})$ невырождена. Матрица A однозначно представляется в виде CT, где C — ортогональная матрица, а T — положительно определенная симметрическая матрица. Изометрия $\mathrm{diag}\,[E_m, C^{-1}, E_{m-t}]$ отображает N на пространство, которому соответствует матрица $C^{-1}(CT) = T$. Существует такая ортогональная матрица C_1, что

$C_1TC_1^{-1} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_t]$. Изометрия $\operatorname{diag}[E_k, C_1, E_{m-k-t}, C_1, E_{m-t}]$ отображает N на пространство, которому соответствует матрица $C_1TC_1^{-1}$. Следовательно, N сопряжено пространству $S_1 \oplus \langle Y_{k+1} + \alpha_1 Z_1, \dots, Y_{k+t} + \alpha_t Z_t\rangle \oplus S_2$, где $\alpha_j > 0$ $(j = 1, \dots, t)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $L = \langle G_1, \dots, G_k\rangle$ $(1 \le k \le n-1)$, F *— подпрямая сумма* L *и* $\langle \mathbb{D}\rangle$. *Алгебра* F *обладает только расщепляемыми расширениями в* $A\tilde{P}(1,n)$.

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ — такая подалгебра $A\tilde{P}(1,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. С точностью до $O(n-1)$-сопряженности можно предполагать , что $\hat{F}$ содержит генератор

$$X_1 = G_1 + \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu P_\nu + \gamma\mathbb{D} \qquad (\gamma \ne 0).$$

Очевидно,

$$\exp\left(\sum b_\mu P_\mu\right) \cdot X_1 \cdot \exp\left(-\sum b_\mu P_\mu\right) = G_1 + \gamma\mathbb{D} + (\alpha_0 - \gamma b_0 + b_1)P_0 +$$
$$+(\alpha_1 + b_0 - b_n - \gamma b_1)P_1 + (\alpha_n + b_1 - \gamma b_n)P_n + \sum_2^{n-1} (\alpha_1 - \gamma b_i)P_i.$$

Полагаем

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 - \gamma b_0 + b_1 = 0, & \alpha_1 + b_0 - b_n - \gamma b_1 = 0, \\ \alpha_n + b_1 - \gamma b_n = 0, & \alpha_i - \gamma b_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n-1). \end{array} \tag{3.1}$$

Определитель из коэффициентов при b_0, b_1, b_n равен $-\gamma^3$. Поскольку $\gamma \ne 0$, то система (3.1) имеет решение. Следовательно, можно предполагать, что $X_1 = G_1 + \gamma\mathbb{D}$. Пусть $a \ne 1$, $X_a = G_a + \sum \alpha_\mu P_\mu + \delta\mathbb{D}$ $(\mu = 0, 1, \dots, n)$. Так как

$$[X_1, X_a] = -(\alpha_0 - \alpha_n)P_1 - \alpha_1 M + \gamma \sum \alpha_\mu P_\mu,$$
$$[X_1, X_a] - \gamma X_a = -\gamma G_a - \gamma\delta\mathbb{D} - (\alpha_0 - \alpha_n)P_1 - \alpha_1 M,$$

то будем допускать, что $X_a = G_a + \alpha M + \beta P_1 + \delta\mathbb{D}$. Тогда $[X_1, X_a] = (\gamma\alpha - \beta)M + \gamma\beta P_1$ $(a = 2, \dots, k)$.

Если $\gamma\alpha - \beta \ne 0$, то будем считать, что $\alpha = 0$, $\beta \ne 0$. Поскольку

$$[X_1, [X_1, X_a]] = -2\gamma\beta M + \gamma^2\beta P_1,$$

то $\hat{F}$ содержит $M - \gamma P_1$, $-2m + \gamma P_1$, а потому $M, P_1 \in \hat{F}$. Значит, $G_a + \delta\mathbb{D} \in \hat{F}$.

Пусть $\gamma\alpha - \beta = 0$. Если $\beta \ne 0$, то $P_1 \in \hat{F}$. Поскольку $[X_1, P_1] = [G_1 + \gamma\mathbb{D}, P_1] = -M + \gamma P_1$, то $M \in \hat{F}$, а следовательно $G_a + \delta\mathbb{D} \in \hat{F}$. Если $\beta = 0$, то $\alpha = 0$. Это доказывает, что $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра. Лемма доказана.

Пусть

$$\begin{array}{lll} \Omega_{0n}^0 = \langle M\rangle, & \Omega_{0n}^i = \langle M, P_1, \dots, P_i\rangle, & \Omega_{0n}^k = \langle P_0, P_n, P_1, \dots, P_k\rangle, \\ \Omega_s^t = \langle P_s, \dots, P_t\rangle, & \Lambda_{r+1}^j = \langle P_{r+d} + \lambda_d P_{k+d} \mid d = 1, 2, \dots, j-r\rangle, & \end{array} \tag{3.2}$$

где $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_{j-r}$ $(r + 1 \le j \le k)$.

Предложение 3.1. *Пусть* $L = \langle G_1, \dots, G_k\rangle$. *Подпространства пространства* $U = \langle P_0, P_1, \dots, P_n\rangle$, *инвариантные относительно* L, *исчерпываются относительно* $O(1,n)$*-сопряженности такими пространствами:*

$$0, \quad \Omega_{0n}^i, \quad \Omega_{0n}^k, \quad \Omega_{k+1}^t, \quad \Omega_{0n}^i \oplus \Omega_{k+1}^t, \quad \Omega_{0n}^k \oplus \Omega_{k+1}^t,$$
$$\Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j, \quad \Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j \oplus \Omega_{k+1+j-r}^s,$$

где $i = 0, 1, \ldots, k$; $t = k+1, \ldots, n-1$; $r = 0, 1, \ldots, k-1$; $j = r+1, \ldots, k$, $s = k+1+j-r, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть W — подпространство пространства Ω^k_{0n}, инвариантное относительно L. Поскольку $[P_a, G_a] = M$, то при $W \neq 0$ имеем $M \in W$. Нормализатор алгебры L в $O(n)$ содержит $O(k)$. Отсюда и из теоремы Витта следует, что если $W \neq \langle M \rangle$ и $P_0 \notin W$, то $W = \Omega^i_{0n}$ $(1 \leq i \leq k)$. Если $P_0 \in W$, то $W = \Omega^k_{0n}$.

Для описания подпространств пространства U, инвариантных относительно L, воспользуемся подходом Ли–Гурса. Так как вследствие теоремы Витта ненулевые подпространства пространства Ω^{n-1}_{k+1} исчерпываются относительно $O(n-1)$-сопряженности пространствами Ω^t_{k+1} $(t = k+1, \ldots, n-1)$, то нам необходимо классифицировать подпрямые суммы таких пар пространств:

$$\Omega^k_{0n}, \quad \Omega^t_{k+1}, \quad \Omega^j_{0n}, \quad \Omega^t_{k+1} \quad (j = 0, 1, \ldots, k;\ t = k+1, \ldots, n-1).$$

Пусть N — подпрямая сумма Ω^k_{0n} и Ω^t_{k+1}. Если $P_0 + \lambda P_{k+1} \in N$ $(\lambda \neq 0)$, то N содержит P_1, $P_1 = -[G_1, P_0 + \lambda P_{k+1}]$, а значит, и M. Пусть $N' = \exp(\theta G_{k+1}) \cdot N \cdot \exp(-\theta G_{k+1})$. Пространство N' содержит $P_0 + (\lambda - \theta) P_{k+1} + (\theta^2/2 - \theta\lambda) M$. Так как $M \in N'$, то $P_0 + (\lambda - \theta) P_{k+1} \in N'$. Полагая $\theta = \lambda$, получаем, что $P_0 \in N'$, а потому $\Omega^k_{0n} \subset N'$. Следовательно, $N' = \Omega^k_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1}$.

Пусть N — подпрямая сумма Ω^j_{0n} и Ω^t_{k+1}. Если $j = 0$, $M + \lambda P_{k+1} \in N$ $(\lambda \neq 0)$, то N' содержит $(1 - \theta\lambda) M + \lambda P_{k+1}$. Полагая $1 - \theta\lambda = 0$, получаем, что $N' = \Omega^t_{k+1}$. Если $j \neq 0$, то $M \in N$. Допустим, что $N \neq \Omega^j_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1}$. Тогда $\Omega^j_{0n}/S_1 \cong \Omega^t_{k+1}/S_2$, где $S_1 = N \cap \Omega^j_{0n}$, $S_2 = N \cap \Omega^t_{k+1}$.

Пусть $\dim(\Omega^j_{0n}/S_1) = j - r$. С точностью до сопряженности можно допустить, что $S_1 = \Omega^r_{0n}$, а $S_2 = 0$ или $S_2 = \Omega^s_{k+1+j-r}$, а потому в силу леммы 3.1 N сопряжено одному из пространств:

$$\Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1}, \quad \Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1} \oplus \Omega^s_{k+1+j-r}.$$

Предложение доказано.

На основании леммы 3.2 и предложения 3.1 заключаем , что подалгебры алгебры $\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}, \mathbb{D} \rangle$, обладающие ненулевой проекцией на $\langle \mathbb{D} \rangle$, исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbb{D} \rangle : 0,\ \langle P_0 \rangle,\ \langle M \rangle,\ \langle P_0 - M \rangle,\ \langle P_0, M \rangle,\ \langle M, P_1 \rangle,\ \langle P_0 - M, P_1 \rangle,\ \langle P_0, M, P_1 \rangle,\\
&\langle M, P_1, P_2 \rangle,\ \langle P_0 - M, P_1, P_2 \rangle,\ \langle P_0, M, P_1, P_2 \rangle,\ \langle M, P_1, P_2, P_3 \rangle,\\
&\langle P_0 - M, P_1, P_2, P_3 \rangle,\ \ldots,\ \langle P_0, M, P_1, P_2, \ldots, P_{n-2} \rangle,\ \langle M, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \rangle,\\
&\langle P_0 - M, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \rangle,\ \langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1} \rangle;\\
&\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, \ldots, G_k + \alpha_k \mathbb{D}, \beta \mathbb{D} \rangle : 0,\ \Omega^i_{0n}, \Omega^k_{0n},\ \Omega^t_{k+1},\ \Omega^i_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1},\\
&\Omega^k_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1},\ \Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1},\ \Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1} \oplus \Omega^s_{k+1+j-r},
\end{aligned}$$

где $k = 1, \ldots, n-1$; $i = 0, 1, \ldots, k$; $t = k+1, \ldots, n-1$; $r = 0, 1, \ldots, k-1$; $j = r+1, \ldots, k$; $s = k+1+j-r, \ldots, n-1$.

Запись $F : W_1, \ldots, W_s$ означает, что речь идет о подалгебрах $W_1 \niplus F$, …, $W_s \niplus F$.

Дальнейшее упрощение алгебры $W \niplus \langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, \ldots, G_k + \alpha_k \mathbb{D}, \beta \mathbb{D} \rangle$ производим $O(1,n)$-автоморфизмами, принадлежащими нормализатору W в группе $O(1,n)$-автоморфизмов. Если, например, $\exp(\theta J_{12})$ содержится в нормализаторе, то вместо $\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, G_2 + \alpha_2 \mathbb{D} \rangle$ можно взять $\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, G_2 \rangle$.

Предложение 3.2. *Подалгебры алгебры $\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$, содержащие P_0, исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$\langle P_0\rangle,\ \langle P_0, M\rangle,\ \langle P_0, M, P_1\rangle,\ \ldots,\ \langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}\rangle,$$
$$\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_a, G_1, \ldots, G_a\rangle \oplus L,$$

где L совпадает с одной из алгебр:

$$0,\ \langle P_{a+1}\rangle,\ \langle P_{a+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle\ (a = 1, \ldots, n-1),$$
$$\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_a, G_1 + P_{a+1}, G_2 + \alpha_2 P_{a+2}, \ldots, G_a + \alpha_a P_{2a}\rangle \oplus L,$$

где $0 < \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_a$ при $a \ne 1$, а L совпадает с одной из алгебр:

$$0,\ \langle P_{2a+1}\rangle,\ \ldots,\ \langle P_{2a+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle,\ (a = 1, \ldots, [n-1/2]),$$
$$\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_a, \ldots, P_{a+b}, G_1, \ldots, G_a,$$
$$G_{a+1} + P_{a+b+1}, \ldots, G_{a+b} + \alpha_b P_{a+2b}\rangle \oplus L,$$

где $0 < \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_b$ при $b \ne 1$, а L совпадает с одной из алгебр:

$$0,\ \langle P_{a+2b+1}\rangle,\ \ldots,\ \langle P_{a+2b+1}, \ldots, P_{n-1}\rangle$$
$$(a = 1, \ldots, n-2;\ b = 1, \ldots, [n-1-a/2]).$$

Подалгебры алгебры $\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$, не содержащие P_0, но обладающие ненулевой проекцией на $\langle P_0\rangle$, сопряжены алгебрам, получаемым из подалгебр алгебры $\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-2}\rangle$, содержащих P_0, в результате замены P_0 на $P_0 + \sum \alpha_i G_i$ $(i = 1, \ldots, n-1;\ \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2 \ne 0)$.

Доказательство предложения 3.2 проводим на основании леммы 3.1 методом Ли–Гурса.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $\mathfrak{M} = \langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$; $m = [n-1/2]$; $\xi(n-1) = \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$ — подалгебра Картана алгебры $AO(n-1)$; $\pi_{0,n}$ — проектирование $A\tilde{P}(1,n)$ на $\langle P_0, P_n\rangle$; π_a — проектирование $A\tilde{P}(1,n)$ на $\langle P_a\rangle$; τ — проектирование $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ на $AO(n-1) \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$; $\Gamma(n-1) = \left\{\sum\limits_1^m \gamma_i J_{2i-1,2i} \mid \gamma_i = 0, 1\right\}$.

Если $X_a, X_b \in \Gamma(n-1)$, то $X_a \cap X_b$ — сумма общих слагаемых элементов X_a, X_b; $X_a \cap X_b = 0$, если X_a и X_b не имеют общих слагаемых.

Лемма 3.3. *Пусть $T = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k + \beta J_{0n} + \gamma \mathbb{D} + \delta P_0$, где $X_i \in \Gamma(n-1)$, $\alpha_i \ne 0$, $\alpha_i^2 \ne \alpha_j^2$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \ne j$. Если W — подпространство пространства $\mathfrak{M}$ и $[T, W] \subset W$, то $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus \tilde{W}$, где $W_i = [X_i, W] = [X_i, W_i]$, $[\beta J_{0n} + \gamma \mathbb{D} + \delta P_0, W_i] \subset W_i$, $[X_j, W_i] = 0$ при $j \ne i$, $[X_i, \tilde{W}] = 0$, $[\beta J_{0n} + \gamma \mathbb{D} + \delta P_0, \tilde{W}] \subset \tilde{W}$.*

Доказательство. Пусть $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$, $Z = \beta J_{0n} + \gamma \mathbb{D} + \delta P_0$, $\mathfrak{M}' = [X, \mathfrak{M}]$, $\tilde{\mathfrak{M}} = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [X, Y] = 0\}$, W' — проекция W на $\mathfrak{M}'$, а $\hat{W}$ — проекция W на $\tilde{\mathfrak{M}}$. Очевидно $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \oplus \tilde{\mathfrak{M}}$. Поскольку композиционные факторы $\langle Z\rangle$-модуля $\mathfrak{M}$ одномерны, то композиционные факторы $\langle Z\rangle$-модуля $\hat{W}$ также одномерны. Пусть $\mathfrak{M}(P) = \{P_a \in \mathfrak{M} \mid [X, P_a] \ne 0\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{M}'/\mathfrak{M}(P)$ можно представить в виде прямых сумм двумерных неприводимых $\langle T\rangle$-подмодулей. Отсюда вытекает, что размерности композиционных факторов $\langle T\rangle$-модуля W' также равны 2. Применяя теперь лемму 2.1, заключаем, что $W = W' \oplus \tilde{W}$.

Пусть $\mathfrak{M}_i = [X_i, \mathfrak{M}]$, W_i — проекция W' на $\mathfrak{M}_i$. Очевидно, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_k$. Вначале установим, что $[Z, W_i] \subset W_i$. Так как для произвольного $Y_i \in W_i$ $[J_{0n} - \mathbb{D}, Y_i] = -Y_i$, том можно предполагать, что $\beta = 0$. Очевидно,

$$[T, [T, Y_i]] = -\alpha_i^2 Y_i + 2\alpha_i [X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]] + \gamma[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i].$$

Пусть $Y_i' = 2\alpha_i[X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]] + \gamma[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]$, $Y_i'' = 2\alpha_i[X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i']] + \gamma[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i']$. Пространство W_i содержит Y_i', Y_i''. Нетрудно получить, что $Y_i'' = 4\alpha_i\gamma^2[X_i, [\gamma\mathbb{D}+\delta P_0, Y_i]] + \gamma(\gamma^2 - 4\alpha_i^2)[\gamma\mathbb{D}+\delta P_0, Y_i]$. Определитель из коэффициентов Y_i', Y_i'' при $[X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]]$, $[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]$ равен $-2\alpha_i\gamma(\gamma^2 + 4\alpha_i^2)$. Если $\gamma \neq 0$, то $[Z, Y_i] \in W_i$. Если $\gamma = 0$, то W_i содержит $Y_i' = [X_i, [\delta P_0, Y_i]]$ и $Y_i'' = [T, Y_i'] = -\alpha_i[\delta P_0, Y_i]$.

В композиционных факторах $\langle T\rangle$-модуля $\mathfrak{M}_i$ можно выбрать базисы так, чтобы матрицей операторе T в этих базисах была одна из матриц:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\alpha_i \\ \alpha_i & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha_i \\ \alpha_i & -\beta \end{pmatrix}.$$

Если бы при $i \neq j$ модули $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ обладали изоморфными композиционными факторами, то выполнялось бы одно из условий: $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$; $2\gamma = -2\beta$; $\gamma^2 + \alpha_i^2 = \beta^2 + \alpha_j^2$. Так как это невозможно, то в силу леммы 2.1 заключаем, что $W' = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \beta J_{0n} + \gamma\mathbb{D} + \delta P_0\rangle$, F — подпрямая сумма L_1 и L_2. Если W — подпространство $\mathfrak{M}$ и $[F, W] \subset W$, то $[L_j, W] \subset W$ $(j = 1, 2)$.*

Лемма 3.4. *Пусть L — подалгебра $AO(n)$, F — подпрямая сумма L и $\langle\mathbb{D}\rangle$. Алгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в $U \subset\!\!\!\!+ (AO(n) \oplus \langle\mathbb{D}\rangle)$.*

Лемма 3.4 доказывается на основании предложений 1.1.

Лемма 3.5. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle\mathbb{D}, J_{0n}\rangle$ или $L_2 = \langle\mathbb{D} + \gamma J_{0n}\rangle$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma^2 \neq 1$, $2\gamma + 1 \neq 0$. Если F — подпрямая сумма алгебр L_1 и L_2, то каждая подалгебра $\hat{F}$ алгебры $A\tilde{G}(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ с условием $\tau(\hat{F}) = F$ сопряжена алгебре $(W_1 + W_2) \subset\!\!\!\!+ F$, где $W_1 \subset U$, $W_2 \subset V$.*

Доказательство. Пусть $L_2 = \langle\mathbb{D}, J_{0n}\rangle$. В силу предложения 1.1 и леммы 3.2 алгебра $\hat{F}$ содержит элементы

$$X_1 = J_{0n} = \sum_0^n \alpha_i P_i, \qquad X_2 = \mathbb{D} + \sum_1^{n-1} \beta_j G_j.$$

Так как $[X_1, X_2] = \sum \gamma_i P_i - \sum \beta_j G_j$, то $\mathbb{D} + \sum \gamma_i P_i \in \hat{F}$. Поэтому можно предполагать, что $\mathbb{D} \in \hat{F}$. Отсюда вытекает, что $J_{0n} \in \hat{F}$, а значит, $F \subset \hat{F}$.

Пусть $L_2 = \langle\mathbb{D} + \gamma J_{0n}\rangle$. Поскольку $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, P_a] = P_a$, $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, G_a] = -\gamma G_a$ $(a = 1, \ldots, n-1)$, то в силу леммы 3.4 можно допускать, что $\hat{F}$ содержит подпрямую сумму F и подалгебры алгебры $\langle P_0, P_n\rangle$. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\exp(\theta_0 P_0 + \theta_n P_n)(\mathbb{D} + \gamma J_{0n} + \alpha_0 P_0 + \alpha_n P_n)\exp(-\theta_0 P_0 - \theta_n P_n) = \\ &\qquad = \mathbb{D} + \gamma J_{0n} + (\alpha_0 - \theta_0 + \gamma\theta_n)P_0 + (\alpha_n + \gamma\theta_0 - \theta_n)P_n.\end{aligned}$$

Так как $\gamma^2 \neq 1$, то коэффициенты при P_0, P_n можно обратить в ноль. Из условий $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, \hat{F} \cap \mathfrak{M}] \subset \hat{F} \cap \mathfrak{M}$, $\gamma^2 \neq 1$ нетрудно получить, что $F \subset \hat{F}$.

Пусть $W = \hat{F} \cap \mathfrak{M}$, $Y = \sum \delta_a G_a + \sum \rho_i P_i \in W$. Так как $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] = -\gamma \sum \delta_a G_a - \gamma(\rho_0 P_n + \rho_n P_0) + \sum \rho_i P_i$ и $\gamma^2 \neq 1$, то можно допускать, что $Y = \sum \delta_a G_a + \rho_0 P_0 + \rho_n P_n$. Непосредственными вычислениями находим, что

$$\begin{aligned}
&[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] = -\gamma \sum \delta_a G_a + (\rho_0 - \gamma\rho_n) P_0 + (\rho_n - \gamma\rho_0) P_n,\\
&[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, [\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y]] =\\
&\qquad = \gamma^2 \sum \delta_a G_a + (\gamma^2\rho_0 - 2\gamma\rho_n + \rho_0) P_0 + (\gamma^2\rho_n - 2\gamma\rho_0 + \rho_n) P_n.
\end{aligned}$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при $\sum \delta_a G_a$, P_0, P_n в Y и полученных векторах, равен $\gamma(2\gamma+1)(\rho_n^2 - \rho_0^2)$. Если $\Delta \neq 0$, то $\sum \delta_a G_a, P_0, P_n \in W$. Если $\Delta = 0$, то $\rho_n = \pm\rho_0$. При $\rho_n = \rho_0$ получаем, что $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] - (1-\gamma)Y = -\sum \delta_a G_a$. Если $\rho_n = -\rho_0$, то $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, Y] - (1+\gamma)Y = (-2\gamma - 1)\sum \delta_a G_a$. Лемма доказана.

Предложение 3.3. *Подалгебры алгебры $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$, содержащие J_{0n} или обладающие тем свойством, что их проекция F на $\langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ совпадает с $\langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n}\rangle$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma^2 - 1 \neq 0$, $2\gamma + 1 \neq 0$, исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$\begin{aligned}
&F: 0,\ \langle M\rangle,\ \langle M, P_0\rangle,\ \Omega_1^a,\ \Omega_{0n}^a,\ \Omega_{0,n}^a\ (a = 1,\dots,n-1);\\
&\langle G_1,\dots,G_k\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} F: 0,\ \Omega_{0n}^i,\ \Omega_{0,n}^k,\ \Omega_{k+1}^t,\ \Omega_{0n}^t \oplus \Omega_{k+1}^t,\\
&\Omega_{0,n}^k \oplus \Omega_{k+1}^t,\ \Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j,\ \Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j \oplus \Omega_{k+1+j-r}^s\\
&(i = 0,1,\dots,k;\ t = k+1,\dots,n-1;\ r = 0,1,\dots,k-1;\ j = r+1,\dots,k;\\
&s = k+1+j-r,\dots,n-1;\ k = 1,\dots,n-1)
\end{aligned}$$

(см. обозначения (3.2)).

Доказательство предложения 3.3 опирается на лемму 3.5.

Лемма 3.6. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle 2\mathbb{D} - J_{0n}\rangle$, F — подпрямая сумма L_1 и L_2, $\hat{F}$ — такая подалгебра $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$, что $\tau(\hat{F}) = F$. Алгебра $\hat{F}$ сопряжена алгебре $W \mathbin{\supset\!\!\!\!+} F$, где $W \subset \mathfrak{M}$ и удовлетворяет условию: если $Y \in W$ и проекция Y на $\langle G_1,\dots,G_{n-1}\rangle$ равна $\sum \delta_a G_a$, то W содержит $\sum \delta_a G_a + \rho P_0$, ρM или $\sum \delta_a G_a + \rho(P_0 - P_n)$.*

Лемма 3.7. *Пусть L_1 — подпрямая сумма $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \mathbb{D} + J_{0n} + \gamma M\rangle$ ($\gamma \in \{0,1\}$), F — подпрямая сума L_1 и L_2. Если подпространство W пространства $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно F, то $W = W_1 + W_2$, где $W_1 \subset U$, $W_2 \subset V$.*

Доказательство леммы 3.6 , 3.7 аналогично доказательству леммы 3.5.

Пусть $\theta = (\gamma_0 - \gamma_n)/2$. Так как

$$\exp(\theta P_0) \cdot (\mathbb{D} + J_{0n} + \gamma_0 P_0 + \gamma_n P_n) \cdot \exp(-\theta P_0) = \mathbb{D} + J_{0n} + \frac{\gamma_0 + \gamma_n}{2} M,$$

то в дальнейшем будем предполагать что проекция алгебры $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1,n)$ на $\langle \mathbb{D} + J_{0n}, P_0, P_n\rangle$ содержит $\mathbb{D} + J_{0n} + \alpha M$, где $\alpha \in \{0,1\}$. Лемма 3.7 дает довольно полную информацию о структуре таких алгебр.

Лемма 3.8. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \mathbb{D} - J_{0n}\rangle$, F — подпрямая сумма L_1 и L_2. Если W — подпространство $\mathfrak{M}$ и $[F, W] \subset W$, то W содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n\rangle$ и $[L_i, W] \subset W$ ($i = 1, 2$).*

Отметим, что лемма 3.8 позволяет свести задачу классификации алгебр $W \subset\!\!\!\!+ F$, где F — подпрямая сумма L_1, $L_1 \subset AO(n-1)$, и $\langle \mathbb{D} - J_{0n} \rangle$, к аналогичной задаче для алгебр $W \subset\!\!\!\!+ L_1$.

Лемма 3.9. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \mathbb{D} - J_{0n} + P_0 \rangle$, F — подпрямая сумма алгебр L_1, L_2. Если подпространство W пространства $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно F, то W содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n \rangle$ и $[P_0, W] \subset W$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}} = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [L_1, Y] = 0\}$, $\tilde{W}$ — проекция W на $\tilde{\mathfrak{M}}$. Легко видеть, что матрицей оператора $\mathbb{D} - J_{0n}$ в базисе $P_0 + P_n$, $P_0 - P_n$ пространства $\langle P_0, P_n \rangle$ является матрица $\operatorname{diag}[2, 0]$, а матрицей этого же оператора в базисе пространства $\mathfrak{M}/\langle P_0, P_n \rangle$ является единичная матрица. Отсюда на основании леммы 2.1 заключаем, что $\tilde{W}$ содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n \rangle$. Так как в силу леммы 3.3 $\tilde{W} \subset W$, то W содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n \rangle$. Остается заметить, что для произвольного $Y = \sum \alpha_i P_i + \sum \beta_i G_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ имеем $[\mathbb{D} - J_{0n} + P_0, Y] = Y + [P_0, Y]$. Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Пусть W — подпространство U, инвариантное относительно $\langle G_a \rangle$. Если $\pi_{0,n}(W) \not\subset \langle M \rangle$, то $M, P_a \in W$. Если $\pi_a(W) \neq 0$, то $M \in W$.*

Лемма 3.11. *Пусть F — подалгебра алгебры $AO(1,n)$, порожденная J_{0n} и G_a, где a пробегает подмножество I множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Если $\hat{F}$ — подалгебра $AP(1,n)$ и $\pi(\hat{F}) = F$, то с точностью до сопряженности относительно группы трансляций алгебра $\hat{F}$ содержит элементы G_a $(a \in I)$ и $J_{0n} + \sum \delta_i P_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.*

Лемма 3.12. *Пусть L — подалгебра алгебры $AP(1,n)$, $X = J_{ab} + \delta J_{0n} + \beta P_c$, $Y = G_c + \sum \gamma_i P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, a, b, c — различные числа из $\{1, \ldots, n-1\}$. Если $X, Y \in L$, то L содержит G_c.*

Теорема 3.1. *Пусть $V = \langle G_1, \ldots, G_{n-1} \rangle$, $V' = [P_0, V] = \langle P_1, \ldots, P_{n-1} \rangle$ $(n \geq 3)$, V_{ab} — подпространство V, $V'_{ab} = [P_0, V_{ab}]$; $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части ненулевой подалгебры L_1 алгебры $AO(n-1)$; $\mathfrak{N}$ — максимальная подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$, аннулируемая L_1; L_2 — подалгебра алгебры $\mathfrak{N} \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$. Если F — подпрямая сумма L_1 и L_2, а W — подпространство $\mathfrak{M}$, инвариантное относительно F, то $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_q \oplus \tilde{W}$, где $W_i = [K_i, W] = [K_i, W_i]$, $[L_2, W_i] \subset W_i$, $[K_j, W_i] = 0$ при $j \neq i$, $[K_i, \tilde{W}] = 0$, $[L_2, \tilde{W}] \subset \tilde{W}$.*

Если примарная алгебра K_i является подпрямой суммой неприводимых подалгебр $K_{i1}, \ldots, K_{ir_i}$ соответственно алгебр $AO(V_{i1}), \ldots, AO(V_{ir_i})$, то ненулевые подпространства W_i пространства $\mathfrak{M}$ со свойством $[K_i, W_i] = W_i$ сопряжены $V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia}$, $V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ia}$ $(a = 1, \ldots, r_i)$ или подпрямым суммам таких пространств:

$$V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia},\ V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib}\ (a = 1, \ldots, r_i;\ b = 1, \ldots, a);$$
$$V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia},\ V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}\ (a = 1, \ldots, r_i - 1;\ c = a+1, \ldots, r_i);$$

$$V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia},\ V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib},\ V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}$$
$$(a = 1, \ldots, r_i - 1;\ b = 1, \ldots, a;\ c = a+1, \ldots, r_i).$$

Если N_i — подпрямая сумма неприводимых K_i-модулей N'_i, N''_i, каждый из которых содержится в V или V', и $N_i \neq N'_i \oplus N''_i$, то $N_i = \{Y + \lambda\varphi(Y) \mid Y \in N'_i\}$, *где $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, а φ является K_i-изоморфизмом, сохраняющим скалярное произведение.*

Если $[K_i, W_i] = W_i$ и $[P_0, W_i] \subset W_i$, то W_i сопряжено $V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ia}$ $(1 \leq a \leq r_i)$ или одной из выписанных подпрямых сумм, где $b = a$. Пусть T — одна из алгебр: $\langle \mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{0n} \rangle$, $\langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$, $\langle \mathbb{D}, J_{0n} \rangle$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq -1$. Если $[K_i, W_i] = W_i$ и $[T, W_i] \subset W_i$, то $W = V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ia}$ или $W = V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia} \oplus W'$, где при $W' \neq 0$ имеем $W' = V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib}$ или $W' = V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}$, или W' — подпрямая сумма этих пространств ($b \leq a$; $1 \leq a \leq r_i$; $a + 1 \leq c \leq r_i$).

Доказательство. Пусть $Q = [L_1, W]$, S — проекция W на $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что W — подпрямая сумма Q и S. Так как композиционные факторы L_2-модуля $\mathfrak{N}$ одномерны, а композиционные факторы L_1-модуля $[L_1, \mathfrak{M}]$ имеют размерность не меньше двух, то в силу леммы 2.1 $W = Q \oplus S$. На основании леммы 3.3 $[L_2, Q] \subset Q$, $[L_1, Q] = Q$. Согласно лемме 2.1 $Q = W_1 \oplus \cdots \oplus W_q$, где $W_i = [K_i, Q]$, $W_i = [K_i, W_i]$ $(i = 1, \ldots, q)$.

Пусть Θ, Θ' — проектирование $V \oplus V'$ соответственно на V и V'. Если $\Theta(W_i) \neq 0$, то по теореме 2.1 $\Theta(W_i)$ сопряжено $V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia}$ $(1 \leq a \leq r_i)$. Для дальнейшего преобразования пространства W_i можно применять только те автоморфизмы, которые не изменяют $\Theta(W_i)$. Используя снова теорему 2.1, получаем, что $\Theta'(W_i)$ сопряжено $V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib}$ или $V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}$, или подпрямой сумме этих пространств ($1 \leq b \leq a$; $a + 1 \leq c \leq r_i$).

Следующее утверждение теоремы вытекает из предложения 2.6. Далее применяем рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 3.5. Теорема доказана.

§ 4. Подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$

В этом параграфе на основании результатов предыдущих параграфов мы проведем классификацию всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности.

Если речь идет о подалгебрах $W_1 \niplus F$, …, $W_s \niplus F$, то будем употреблять обозначение $F : W_1, \ldots, W_s$. Пусть $(i_1, \ldots, i_q) = \langle P_{i_1}, \ldots, P_{i_q} \rangle$; $(awb) = \langle P_a + wP_b \rangle$, $w > 0$; $(04) = \langle M \rangle$, $M = P_0 + P_4$.

Лемма 4.1. *Ненулевые подалгебры алгебры $AO(1,4) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ исчерпываются относительно $O(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12} \rangle$, $\langle J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12} + J_{34} \rangle$, $\langle J_{12} + J_{34} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12} + J_{34}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12} + cJ_{34} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{34}, \mathbb{D} \rangle$ $(0 < c < 1,\ \alpha > 0)$;
$\langle J_{04} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{04}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12} + cJ_{04} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{04}, \mathbb{D} \rangle$ $(c > 0,\ \alpha > 0)$;
$\langle G_3 \rangle$, $\langle G_3 + \mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3, \mathbb{D} \rangle$;
$\langle G_3 - J_{12} \rangle$, $\langle G_3 - J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3 - J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12}, J_{34} \rangle$, $\langle J_{12} + \alpha\mathbb{D}, J_{34} + \beta\mathbb{D} \rangle$ $\langle J_{12}, J_{34}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta \geq 0)$;
$\langle J_{04}, J_{12} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha\mathbb{D}, J_{12} + \beta\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{04}, J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$;
$\langle G_3, J_{12} \rangle$, $\langle G_3 + \mathbb{D}, J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3, J_{12} + \beta\mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3, J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0)$;

$\langle G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1+\mathbb{D}, G_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_3, J_{04}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}+\gamma\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$, $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}+\gamma\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(c>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$, $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}+\alpha\mathbb{D}, J_{12}+\beta\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}, J_{12}+\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_3, J_{04}, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\geq 0,\ \gamma>0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(c>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1+\mathbb{D}, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$, $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}+\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}+\alpha\mathbb{D}, J_{04}+\beta\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3+\mathbb{D}, J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+\beta\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \beta>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(c>0,\ \alpha\neq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+\alpha\mathbb{D}, J_{04}+\beta\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \beta\in R,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}, \mathbb{D}, \rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{04}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$,
$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{04}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$.

Лемма 4.1 доказывается на основании результатов [5] о подалгебрах алгебры $AO(1,4)$ и теоремы Ли-Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр.

Теорема 4.1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(1,4)$ исчерпываются относительно $P(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

O, (0), (4), (04), (0,4), (04,1), (1,4), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}\rangle$: O, (0), (4), (04), (1,2), (3,4), (0,4), (04,3), (0,1,2), (04,1,2), (1,2,4), (0,3,4), (0,1,2,4), (04, 1,2,3), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{34}\rangle$ $(0<c<1)$: O, (0), (1,2), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{04}\rangle$: O, (04), (1), (0,4), (04,1), (1,2), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (3), (04), (1,2), (0,4), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (1,2,3), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3-J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (1,2), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12},J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{04},J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (0,4), (04,3), (1,2), (0,3,4), (1,2,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{12}\rangle$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2\rangle$: O, (3), (04), (04,1), (04,3), (04,1w3), (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{04}\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: O, (0), (4), (04), (0,4), (1,2,3), (0,1,2,3), (1,2,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03},J_{04},J_{34}\rangle$: O, (1), (1,2), (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14}\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{04},J_{12}\rangle$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{04}\rangle$: O, (3), (04), (04,1), (04,3), (04,1w3), (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3-J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03},J_{04},J_{34},J_{12}\rangle$: O, (1,2), (0,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14},J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{04},J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{04}\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle$: O, (04), (0,4), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12},J_{04}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: O, (04), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(4)$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$AO(1,3)$: O, (4), (0,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle$: O, (04), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(1,4)$: O, (0,1,2,3,4).

Доказательство. Подалгебры алгебры $AO(1,4)$ описаны в работе [5]. Для каждой из них необходимо найти инвариантные подпространства пространства $U=\langle P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$.

Рассмотрим случай нулевой подалгебры алгебры $AO(1,4)$. Если W — подпространство U и $\dim W=1$, то по теореме Витта W $O(1,4)$-сопряжено с одним из пространств: (0), (04), (4). Если $\dim W>1$, то $W=\langle X_1\rangle\oplus W'$, где $\|X_1\|^2\neq 0$. Если $\dim W'>1$, то $W'=\langle X_2\rangle\oplus W''$, где $\|X_2\|^2\neq 0$. Следовательно, если

$\dim W > 1$, то $W = \langle X_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle X_s\rangle \oplus \langle Y\rangle$, где $s \le 4$, $X_1, \ldots, X_s$ — векторы ненулевой длины. В силу закона инерции для квадратичных форм и теоремы Витта несопряженные относительно группы внутренних автоморфизмов группы $O(1,4)$ подпространства пространства U исчерпываются пространствами с базисами, получаемыми в результате дополнения каждого из векторов P_0, P_4, $P_0 + P_4$ до ортогональной системы частью векторов P_4, P_1, P_2, P_3.

Если W инвариантно относительно $\langle J_{12}\rangle$, то по лемме 3.3 $W = \pi_{1,2}(W) \oplus W'$, где $W' \subset \langle P_0, P_3, P_4\rangle$. Поскольку $\langle J_{12}\rangle$ действует на W' как нулевая алгебра, то получаем предыдущий случай.

Пусть W — подпространство U, инвариантное относительно $\langle J_{04}\rangle$, W' — проекция W на $\langle P_0, P_4\rangle$, W'' — проекция W на $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$. По лемме 3.3 $W = W' \oplus W''$. Пространство W' сопряжено с одним из пространств: O, $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0, P_4\rangle$. Пространство W'' сопряжено с одним из таких пространств: O, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$.

Случай алгебры $\langle J_{12} + cJ_{04}\rangle$ посредством леммы 3.3 сводится к случаям алгебр $\langle J_{12}\rangle$ и $\langle J_{04}\rangle$. Исследование остальных случаев проводится на основании лемм 3.1, 3.3 и предложения 3.1. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\Gamma(\Delta)$ — система представителей классов сопряженных подалгебр алгебры $AO(1,4)$ (соответственно $AO(1,4) \oplus \langle \mathbb{D}\rangle$), найденная в лемме 4.1. Расщепляемые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

1) $W \inplus F$, где $F \in \Gamma$, $W \subset U$ и $[F, W] \subset W$;

2) $W \inplus \hat{F}$, где $\hat{F} \in \Delta$ и проекция $\hat{F}$ на $AO(1,4)$ совпадает с F, $F \in \Gamma$;

3) $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha\mathbb{D}\rangle$: $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$;

4) $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2 + \beta\mathbb{D}\rangle$: $\langle M, P_1\rangle$, $\langle M, P_1 + wP_3\rangle$, $\langle M, P_1, P_3\rangle$, $\langle M, P_1 + wP_3, P_2\rangle$ ($w > 0$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$);

5) $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2 + \beta\mathbb{D}, G_3, M, P_1\rangle$ ($\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$);

6) $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2, G_3 + \beta\mathbb{D}, M, P_1, P_2\rangle$ ($\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$);

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ — подпрямая сумма $F \in \Gamma$ и $\langle \mathbb{D}\rangle$, W — подпространство U, инвариантное относительно $\hat{F}$. Тогда $[F, W] \subset W$, и наоборот, если $[F, W] \subset W$, то $[\hat{F}, W] \subset W$. Поэтому можно воспользоваться теоремой 4.1. Дополнительного исследования требуют только случаи тех алгебр $\hat{F} \in \Delta$, которые упрощались $O(1,4)$-автоморфизмами. Такие алгебры соответствуют алгебре F, совпадающей с $\langle J_{12}, J_{34}\rangle$, $\langle G_1, G_2\rangle$ или $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$. Если $\hat{F} = \langle G_1 + \alpha_1\mathbb{D}, G_2 + \alpha_2\mathbb{D}, G_3 + \alpha_3\mathbb{D}\rangle$, то дальнейшее упрощение осуществляем $O(1,4)$-автоморфизмами, оставляющими неизменными $\langle M, P_1\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$. Теорема доказана.

Пусть $\tilde{F}$ — такая подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, что $\pi(\tilde{F}) = F$. Запись $\tilde{F} + W$ означает, что W — подпространство U, $[F, W] \subset W$ и $\tilde{F} \cap U \subset W$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\tilde{F} + W_1, \ldots, \tilde{F} + W_s$, то будем употреблять обозначение: $\tilde{F}:\ W_1, \ldots, W_s$.

Теорема 4.3. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(1,4)$ исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle J_{12} + P_0\rangle$: O, (04), (4), (04,3), (1,2), (3,4), (04,1,2), (1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4);

$\langle J_{12} + P_3\rangle$: O, (04), (0), (4), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4);

$\langle J_{12} + P_0 + P_3\rangle$: O, (4), (1,2), (1,2,4);

$\langle J_{12} + J_{34} + P_0\rangle$: O, (1,2), (1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{34}+P_0\rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(0<c<1)$;
$\langle J_{04}+P_1\rangle$: O, (04), (0,4);
$\langle J_{04}+P_2\rangle$: (1), (04,1), (0,1,4);
$\langle J_{04}+P_3\rangle$: (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4) $(c>0)$;
$\langle G_3+P_1\rangle$: O, (04), (04,3), (0,3,4);
$\langle G_3+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1w3), (04,1,3), (0,1,3,4);
$\langle G_3+P_0\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);
$\langle G_3-J_{12}+P_0\rangle$: O, (04), (04,3), (1,2), (04,1,2), (04,1,2,3);
$\langle J_{12}+P_0, J_{34}+\delta P_0\rangle$: O, (1,2), (1,2,3,4) $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{34}+P_0, P_1, P_2\rangle$;
$\langle J_{04}+P_3, J_{12}+\delta P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4), $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle J_{12}+M, G_3+\delta P_0\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle J_{12}, G_3+P_0\rangle$; $\langle J_{12}+\delta P_3, G_3+P_0, M\rangle$ $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{12}+P_3, G_3, M\rangle$; $\langle J_{12}+M, G_3+\delta P_0, P_1, P_2\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle J_{12}, G_3+P_0, P_1, P_2\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta P_0, G_3+P_0, M, P_3\rangle$; $\langle J_{12}+P_0, G_3, M, P_3\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta P_3, G_3+P_0, M, P_1, P_2\rangle$; $\langle J_{12}+P_3, G_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta P_0, G_3+P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle J_{12}+P_0, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1+P_3, G_2+\mu P_2+\delta P_3\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2+P_2+\delta P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle G_1, G_2+P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1+P_2+\gamma P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\mu>0,\ \gamma>0\vee\gamma=0,\ \delta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\gamma P_3, G_2-P_1, M\rangle$ $(\gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+\gamma P_3, G_2+P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\gamma>0\vee\gamma=0,\ \delta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, M\rangle$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1+\mu P_2, M, P_3\rangle$ $(\mu\geq 0)$; $\langle G_1, G_2+P_2, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, M, P_1\rangle$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_0, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_3, G_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_3, G_2, M, P_1, P_2\rangle$; $\langle G_1+P_0, G_2+\beta P_3, M, P_1, P_2\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2, G_2, M, P_1, P_3\rangle$; $\langle G_1+P_2, G_2+\alpha P_0, M, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1, G_2+P_0, M, P_1, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2+P_3, M, P_1+wP_3, P_2\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_0, G_2+\alpha P_3, M, P_1+wP_3, P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ w>0)$;
$\langle G_1+P_3, G_2, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$; $\langle G_1+P_0, G_2, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_3, J_{04}+P_1\rangle$: O, (04), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2);
$\langle G_3, J_{04}+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3), (0,1,3,4);
$\langle G_3, J_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1), (04,1,2);
$\langle G_3, J_{04}+P_1+\alpha P_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(\alpha>0,\ w>0)$;
$\langle G_3, J_{04}+P_1+\alpha P_3, M\rangle$ $(\alpha>0)$; $\langle G_3, J_{04}+P_2+\alpha P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(c>0)$;
$\langle G_3, J_{04}+P_3, J_{12}+\delta P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(\delta\geq 0)$; $\langle G_3, J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2);
$\langle G_1, G_2, J_{12}+M\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{12}+P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{12}+M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+P_3, M\rangle$; $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}+\alpha P_3, M\rangle$ $(\alpha\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}, M, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{12}+P_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+P_0, M, P_1, P_2\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{12}+P_3, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;

$\langle G_1, G_2, J_{12} + P_0, M, P_1, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1\rangle$: (04), (04,3), (04,1$w$3), (04,1$w$3,2);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_2\rangle$: (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 + \alpha P_2, M, P_1 + wP_3\rangle$ ($\alpha > 0$, $w > 0$);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 + \alpha P_3, M\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_2 + \alpha P_3, M, P_1\rangle$ ($\alpha > 0$);
$\langle G_1, G_2, J_{12} + cJ_{04} + P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4) ($c > 0$);
$\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_3\rangle$; $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, M\rangle$ ($\beta \geq 0$);
$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, M\rangle$
($\mu > 0$, $\beta > 0 \vee \beta = 0$, $\gamma \geq 0$);
$\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \gamma P_3, M\rangle$; $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 + P_3, G_3 - P_2, M, P_1\rangle$ ($\beta \geq 0$);
$\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2 + P_3, G_3 - P_2 + \mu P_3, M, P_1\rangle$ ($\mu > 0$, $\beta > 0 \vee \beta = 0$, $\gamma \geq 0$);
$\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2, G_3 + P_3, M, P_1\rangle$ ($\beta > 0 \vee \beta = 0$, $\gamma \geq 0$);
$\langle G_1 + P_2, G_2, G_3, M, P_1\rangle$; $\langle G_1 + P_3, G_2, G_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1 + \alpha P_3, G_2, G_3 + P_0, M, P_1, P_2\rangle$ ($\alpha \geq 0$);
$\langle G_1 + P_0, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1 + P_1, G_2 + P_2, J_{12} - G_3\rangle$;
$\langle G_1 + P_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + P_2, J_{12} - G_3, M\rangle$ ($\alpha \geq 0$);
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} - G_3, M\rangle$; $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} - G_3, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} - G_3 + P_0, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ ($s = 0, 1$);
$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{34} + P_0\rangle$: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3, J_{12} + \alpha P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4), ($\alpha \geq 0$);
$\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12}\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3 + \alpha P_3, J_{12} + M\rangle$ ($\alpha \geq 0$);
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \alpha P_3, J_{12} + \delta P_3, M\rangle$ ($\delta = 0, 1$);
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12} + \delta P_3, M\rangle$ ($\delta = 0, 1$); $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_3, M\rangle$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12}, M, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12} + \alpha P_3, M, P_1, P_2\rangle$ ($\alpha = 0, 1$);
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12} + \alpha P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ ($\alpha = 0, 1$);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_1, M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_2, M, P_1\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + cJ_{04} + P_3\rangle$: $\langle M\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$ ($c > 0$);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_3, J_{12} + \alpha P_3\rangle$: $\langle M\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$ ($\alpha \geq 0$);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$: $\langle M\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$.

Доказательство. Пусть L — такая подалгебра $AP(1,4)$, что $\pi(L) = \langle G_1, G_2, G_3\rangle$. Через $\Lambda = (\lambda_{ab})$ обозначим матрицу порядка 3, в j-ом столбце которой записаны коэффициенты базисного элемента $G_j + \lambda_{1j}P_1 + \lambda_{2j}P_2 + \lambda_{3j}P_3 + \mu_j P_0 + \rho_j M$ ($j = 1, 2, 3$). Матрица Λ однозначно представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц. Кососимметрическая матрица порядка 3 ортогональным преобразованием подобия приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 0$, то для упрощения симметрической части можно применять любую матрицу из $O(3)$. Если $\alpha \neq 0$, то для упрощения симметрической матрицы можно использовать только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку симметрическая матрица ортогональным преобразованием подобия приводится к диагональному виду, то для некоторой матрицы $C \in O(3)$ имеет место равенство

$$C\Lambda C^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & \mu_2 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\mu_1 \leq \mu_2$. Если $\mu_1 = \mu_2$, то можно положить $\gamma = 0$. Если $\alpha = 0$, то $\beta = \gamma = 0$.

Допустим, что проекция L на $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ совпадает с $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ и что пересечения L с $\pi(L)$ и $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ суть нулевые. В этом случае алгебра L сопряжена одной из алгебр:

$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, M\rangle$

$(\mu > 0,\ \delta - \beta^2\mu \neq 0,\ \beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;

$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, M\rangle$ $(\beta \geq 0,\ \delta \neq 0)$.

При рассмотрении других случаев на матрицу C необходимо налагать дополнительные ограничения. Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности нерасщепляемыми подалгебрами алгебры $AP(1,4)$ (теорема 4.3) и такими алгебрами:*

$\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: O, (1), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0)\rangle$: O, (04), (3), (04,3), (1,2), (1,2,3), (04,1,2), (04,1,2,3) $(c > 0)$;

$\langle J_{12} \pm \mathbb{D} + P_0, J_{12} + \alpha M\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3), $(\alpha > 0)$;

$\langle J_{04} \pm \mathbb{D}, J_{12} + M\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04} + \mathbb{D} + M, J_{12}\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0, J_{12} + \alpha P_0\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{04} - \mathbb{D}, J_{12} + P_0\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{04} - 2\mathbb{D}, G_3 + P_0\rangle$: (04), (04,1), (04,1$w$3), (04,3), (04,1$w$3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);

$\langle J_{04} - 2\mathbb{D}, G_3 + P_0 - P_4\rangle$: O, (1), (1,2);

$\langle J_{04} - \mathbb{D}, G_3 + P_1\rangle$: O, (04), (04,3), (0,3,4);

$\langle J_{04} - \mathbb{D}, G_3 + P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3), (0,1,3,4);

$\langle G_3 + \alpha P_1, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_3\rangle$, $\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0, G_3 + \alpha P_2, M, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha > 0)$;

$\langle G_3, J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: (04,3), (04,1,3), (04,1,2,3);

$\langle G_3, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$: O, (1), (1,2);

$\langle G_3 + P_0, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D})\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) $(c > 0)$;

$\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D})\rangle$: O, (1,2) $(c > 1)$;

$\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D})\rangle$: O, (1,2) $(0 < c \leq 1)$;

$\langle G_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0)\rangle$: (04,3), (04,1,2,3);

$\langle G_3, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M)\rangle$: O, (1,2);

$\langle G_3 + P_0, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D}\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D}\rangle$: O, (1,2);
$\langle G_3, J_{12} + \alpha P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: (04,3), (04,1,2,3) $(\alpha > 0)$;
$\langle G_3, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$: (04,3), (04,1,2,3);
$\langle G_3, J_{12} + \alpha M, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$: O, (1,2), ($\alpha \geq 0$;
$\langle G_3, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D}\rangle$: O, (1,2);
$\langle G_1, G_2 + P_0, J_{04} - 2\mathbb{D}\rangle$: (04,1), (04,1,2), (04,1,2w3), (04,1,3), (04,1,2,3);
$\langle G_1 + P_3, G_2 + \mu P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$ $(\mu > 0,\ \delta \geq 0)$; $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_1, G_2 + P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$ $(\delta \geq 0)$; $\langle G_1, G_2 + P_2, J_{04} - \mathbb{D}, P_3\rangle$;
$\langle G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$ $(\mu > 0,\ \lambda > 0 \vee \lambda = 0,\ \delta \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2 + \lambda P_3, G_2 - P_1, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$ $(\lambda \geq 0)$; $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$;
$\langle G_1 + \lambda P_3, G_2 + P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$ $(\lambda > 0 \vee \lambda = 0,\ \delta \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1 + \mu P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3\rangle$ $(\mu \geq 0)$; $\langle G_1, G_2 + P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\alpha > 0 \vee \alpha = 0,\ \beta \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$; $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$;
$\langle G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3, G_2 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 + wP_3\rangle$ $(w > 0)$;
$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 + wP_3\rangle$ $(w > 0)$;
$\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 + wP_3\rangle$ $(w > 0)$; $\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1 + P_2, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1 wP_3, P_2\rangle$ $(w > 0)$;
$\langle G_1 + P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D}, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$; $\langle G_1 + \beta P_3, G_2, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} + \mathbb{D} + M, P_3\rangle$; $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D})\rangle$: (04), (04,3) $(c > 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0), M, P_1, P_2, sP - 3\rangle$ $(c > 0,\ s = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M)\rangle$: O, (3), $(c > 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D}\rangle$: O, (3);
$\langle G_1, G_2, J_{12} + \delta P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(\delta \geq 0,\ s = 0, 1)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M, sP_3\rangle$ $(s = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha M, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$: O, (3) $(\alpha \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{04} - 2\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_3, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$; $\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$;
$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$
$(\mu > 0,\ \beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle G_1 + \beta P_2, G_2 + P_3, G_3 - P_2, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2 + P_3, G_3 - P_2 + \mu P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$
$(\mu > 0,\ \beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;
$\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2, G_3 + P_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2, G_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1\rangle$; $\langle G_1 + P_3, G_2, G_3, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D}), M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(c > 0,\ s = 0, 1)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D}), M\rangle$ $(c > 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D}), M, P_3\rangle$ $(c > 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D})\rangle$: O, (04);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0), M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(c > 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M)\rangle$ $(c > 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: O, (04), (1,2,3), (04,1,2,3);
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s = 0, 1)$;

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \delta P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\delta \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$: O, (04);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D}\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \delta M, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$ $(\delta \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$.

Доказательство теоремы 4.4 проводится на основании теоремы 3.1, лемм 3.3–3.9.

1. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
2. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
3. Patera J., Winternitz P., Sharp R.T., Zassenhaus H., Subgroups of the similitude group of three-dimensional Minkowsky space, *Can. J. Phys.*, 1976, **54**, № 9, 950–961.
4. Beckers J., Patera J. Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in de Sitter space, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 5, 717–728.
6. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
7. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
8. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., Sous-algebres de Lie de l'algebre de Schrödinger, *Ann. Sc. Mart. Quebec*, 1978, **2**, № 1, 81–108.
9. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, Препринт 78.18., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 36 с.
10. Федорчук В.М., Разщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре, *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717–722.
11. Федорчук В.М., Фущич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, в кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.1, Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 1979, М., 1980, 61–66.
12. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
13. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuck V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.
14. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, в кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.
15. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.
16. Lassner W., Realizations of the Poincaré group on homogeneous spaces, *Acta Phys. Slov.*, 1973, **23**, № 4, 193–202.
17. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. I, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 2, 145–186.
18. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. II, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 3, 361–392.
19. Sorba P., The Galilei group and its connected subgroups, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 6, 941–953.

20. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
21. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
22. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
23. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И., Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам, *Теор. и мат. физика*, 1976, **26**, № 2, 206–220.
24. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Reduction of the representations of the generalised Poincaré algebra by the Galilei algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, 2319–2330.
25. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964, 355 с.
26. Гото М., Гроссханс Ф., Полупростые алгебры Ли, М., Мир, 1981, 336 с.

W.I. Fushchych, Scientific Works 2000, Vol. 2, 413–438.

Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $AP(2,n)$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ЛАГНО, В.И. ФУЩИЧ

В работе изучаются для произвольного $n \geq 2$ подалгебры алгебры Ли $AP(2,n)$ обобщенной группы Пуанкаре $P(2,n)$ относительно $P(2,n)$-сопряженности. Найдены в явном виде максимальные подалгебры и максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$. Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $AO(2,n)$, обладающие только расщепляемыми расширениями в $AP(2,n)$.
Проведена частичная классификация относительно $P(2,3)$-сопряженности подалгебр алгебры $AP(2,3)$. Полностью описаны относительно $P(2,2)$-сопряженности подалгебры алгебры $AP(2,2)$.

Введение

Обобщенные группы Пуанкаре используются при решении ряда задач теоретической и математической физики. Примером может служить группа $P(2,3)$, которая имеет прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку [1, 3] и к задаче описания частиц с внутренней структурой [4, 5]. В [4, 6] предложено использовать обобщенные группы Пуанкаре для описания физических систем с переменной массой и спином. Для решения многих задач важно знать подгрупповую структуру группы симметрии, допускаемой физической системой.

Описание подгрупповой структуры группы $P(2,n)$ необходимо для исследования инвариантных решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Box u = 0,$$

а также уравнения [7]

$$i\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{l}\Box\varphi(t,x),$$

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \nabla^2$ — оператор Даламбера, $x = (x_2, \ldots, x_{n+2})$ — точка в пространстве Минковского $M(1,n)$, l — постоянная величина.

В данной работе для произвольного $n \geq 2$ изучается подгрупповая структура группы $P(2,n)$ относительно $P(2,n)$-сопряженности. Поскольку классификация непрерывных подгрупп группы $P(2,n)$ сводится к классификации подалгебр алгебры Ли $AP(2,n)$ группы $P(2,n)$, то мы исследуем подалгебры алгебры $AP(2,n)$ относительно $P(2,n)$-сопряженности. Полученные результаты являются дальнейшим развитием на случай алгебры $AP(2,n)$ идей работы [8], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечно мерных алгебр Ли с нетривиальным абелевым идеалом.

Препринт 85.89, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 50 с.

Дадим кратную характеристику работы. В § 1 описаны максимальные подалгебры алгебры $AP(2,n)$, а в § 2 найдены в явном виде максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$. Число этих подалгебр равно 3 при четном n и 4 при нечетном n.

§ 3 посвящен изучению вполне приводимых подалгебр алгебры $AO(2,n)$. На основании полученных результатов проблема классификации подалгебр алгебры $AP(2,n)$ с вполне приводимыми проекциями на $AO(2,n)$ сводится к классификации относительно $O(q,k)$-сопряженности неприводимых подалгебр алгебры $AO(q,k)$ ($q=0,1,2$; $k=2,\ldots,n$).

В § 4 — § 6 проведена частичная классификация подалгебр алгебры $AP(2,3)$. Отметим как законченное исследование классификацию относительно $P(2,2)$-сопряженности подалгебр алгебры $AP(2,2)$, содержащуюся в § 5, § 6.

§ 1. Максимальные подалгебры алгебры $AP(2,n)$

Пусть R — поле вещественных чисел; $\langle Y_1,\ldots,Y_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1,\ldots,Y_s$; R^m — m-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U=U_{2,n}$ — $2+n$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-\cdots-x_{n+2}y_{n+2}; \tag{1.1}$$

$O(2,n)$ — группа линейных преобразований U, сохраняющих (X,X) для каждого $X\in U$. Будем предполагать, что $O(2,n)$ реализована в виде вещественных матриц порядка $2+n$.

Группой Пуанкаре $P(2,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta\in O(2,n)$, $Y\in R^{n+2}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Используя определение алгебры Ли, легко получить, что $AO(2,n)$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix}
0 & \alpha & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\
-\alpha & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\
\beta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1,n-1} & \delta_{1n} \\
\beta_2 & \gamma_2 & -\delta_{12} & 0 & \cdots & \delta_{2,n-1} & \delta_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & -\delta_{1,n-1} & -\delta_{2,n-1} & \cdots & 0 & \delta_{n-1,n} \\
\beta_n & \gamma_n & -\delta_{1n} & -\delta_{2n} & \cdots & -\delta_{n-1,n} & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Пусть E_{ik} — матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах ($i,k=1,2,\ldots,n+3$). Нетрудно получить, что базис алгебры $AP(2,n)$ образуют матрицы: $J_{12}=E_{12}-E_{21}$; $J_{ab}=-E_{ab}+E_{ba}$ ($a<b$; $a,b=3,\ldots,n+2$); $J_{ia}=-E_{ia}-E_{ai}$ ($i=1,2$; $a=3,\ldots,n+2$); $P_j=E_{j,n+3}$ ($j=1,2,\ldots,n+2$). Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[J_{\alpha\beta},J_{\gamma\delta}]=g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\
&[P_\alpha,J_{\beta\gamma}]=g_{\alpha\beta}P_\gamma-g_{\alpha\gamma}P_\beta, \qquad J_{\beta\alpha}=-J_{\alpha\beta}, \qquad [P_\alpha,P_\beta]=0,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \dots = -g_{n+2,n+2} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n+2$).

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру $AO(2,n)$, а генераторы трансляций P_α — коммутативный идеал N, причем $AP(2,n) = N \niplus AO(2,n)$. Легко видеть, что $[X,Y] = X \cdot Y$ для любых $X \in AO(2,n)$, $Y \in N$. Отождествим N и $U_{2,n}$, сопоставив P_i $n+2$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и с нулями на остальных местах ($i = 1, 2, \dots, n+2$).

Пусть C — такая матрица порядка $n+3$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to CXC^{-1}$ является автоморфизмом $AP(2,n)$. Если $C \in G$, где G — подгруппа группы $P(2,n)$, то φ_c называется G-автоморфизмом. Подалгебра L_1 и подалгебра L_2 алгебры $AP(2,n)$ будут называться $P(2,n)$-сопряженными, если $\varphi_C(L_1) = L_2$ для некоторого $P(2,n)$-автоморфизма φ_C алгебры $AP(2,n)$.

Пусть W — невырожденное подпространство пространства U. Если F — подалгебра $AO(W)$, то тождественное отображение F является представлением F в $AO(W)$, ($O(W)$ — группа изометрий пространства W). Это представление будем называть тривиальным. Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется неприводимой, если тривиальное представление F является неприводимым. Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется вполне приводимой, если ее тривиальное представление вполне приводимо.

Определение. *Пусть W — подпространство пространства U. Нормализатором W в $AO(2,n)$ называется множество*

$$\mathrm{Nor}\, W = \{X \in AO(2,n) \mid (\forall\, Y \in W)\ (X \cdot Y \in W)\}.$$

Лемма 1.1. *Нормализатор $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ в $AO(2,n)$ совпадает с алгеброй*

$$A\tilde{P}(1,n-1) = \langle G_2, \dots, G_{n+1}\rangle \niplus (AO(1,n-1) \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle),$$

где $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$ $(a = 2, \dots, n+1)$, $AO(1,n-1) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2, \dots, n+1\rangle$. Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$ связаны такими коммутационными соотношениями:

$$[G_a, J_{1,n+1}] = G_a, \quad [J_{ab}, J_{1,n+2}] = [G_a, G_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b,$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac} \quad (a,b,c,d = 2, \dots, n+1).$$

Доказательство. Необходимо найти все матрицы X вида (1.2), для которых

$$X \cdot (P_1 + P_{n+2}) = \lambda(P_1 + P_{n+2}). \tag{1.4}$$

Непосредственными вычислениями получаем, что $\alpha = \gamma_n$, $\beta_i = -\delta_{in}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Значит, $\mathrm{Nor}\,\langle P_1 + P_{n+2}\rangle = A\tilde{P}(1,n-1)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Если $W = \langle P_1 + P_{n+2}, P_2 + P_{n+1}\rangle$, то* Nor W *совпадает с алгеброй $AOpt(1,n-1) = \langle M, G_3, \dots, G_n, H_3, \dots, H_n\rangle \niplus (AO(n-2) \oplus \langle C, \mathbb{D}, T, J_{1,n+2}\rangle)$, где*

$$G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}, \qquad H_a = J_{2a} - J_{a,n+1} \quad (a = 3, \dots, n),$$
$$M = (J_{21} - J_{1,n+1}) + (J_{2,n+2} - J_{n+2,n+1}),$$
$$AO(n-2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 3, \dots, n\rangle,$$
$$C = -J_{1,n+2} + J_{2,n+1}, \qquad \mathbb{D} = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{n+1,n+2} + J_{1,n+1} + J_{2,n+2}),$$
$$T = \tfrac{1}{2}(J_{1,n+1} + J_{2,n+2} - J_{12} - J_{n+1,n+2}).$$

Базисные элементы связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&[H_a, G_a] = M,\ [H_a, M] = [G_a, M] = [H_a, H_b] = [G_a, G_b] = [M, J_{ab}] = 0,\\
&[M, J_{1,n+2}] = M,\ [G_a, J_{1,n+2}] = G_a,\ [H_a, J_{1,n+2}] = [J_{ab}, J_{1,n+2}] = 0,\\
&[M, C] = [M, \mathbb{D}] = [M, T] = 0,\ [C, G_a] = G_a,\ [C, H_a] = -H_a,\\
&[\mathbb{D}, G_a] = -H_a,\ [\mathbb{D}, H_a] = [T, G_a] = 0,\ [T, H_a] = -G_a,\ [C, \mathbb{D}] = -2\mathbb{D},\\
&[C, T] = 2T,\ [T, \mathbb{D}] = C,\ [C, J_{1,n+2}] = 0,\ [\mathbb{D}, J_{1,n+2}] = -\mathbb{D},\ [T, J_{1,n+2}] = T.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Доказательство. Найдем все такие матрицы X вида (1.2), для которых $[X, W] \subset W$. Пусть $X \cdot (\mu(P_1 + P_{n+2}) + \rho(P_2 + P_{n+1})) \in W$. Тогда

$$\mu \begin{pmatrix} \beta_1 + \delta_{1n} \\ \beta_2 + \delta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{n-2} + \delta_{n-2,n} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \gamma_1 + \delta_{1,n-1} \\ \gamma_2 + \delta_{2,n-1} \\ \vdots \\ \gamma_{n-2} + \delta_{n-2,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha\rho + \beta_{n-1}\rho + \beta_n\mu = \beta_n\mu + \gamma_n\rho - \delta_{n-1,n}\rho,\\
&-\alpha\mu + \gamma_{n-1}\rho + \gamma_n\mu = \beta_{n-1}\mu + \gamma_{n-1}\rho + \delta_{n-1,n}\mu.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Решаем систему уравнений (1.6). Пусть $\mu = 0$, $\rho = 1$. Тогда $\delta_{i,n-1} = -\gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$. Если $\mu = 1$, $\rho = 0$, то $\delta_{in} = -\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$. Отсюда вытекает, что $G_a, H_a \in \operatorname{Nor} W$ $(a = 3, \ldots, n)$. Систему (1.7) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\alpha\rho + \beta_{n-1}\rho = \gamma_n\rho - \delta_{n-1,n}\rho,\\
&-\alpha\mu + \gamma_n\mu = \beta_{n-1}\mu + \delta_{n-1,n}\mu.
\end{aligned}$$

Поскольку μ и ρ могут быть ненулевыми, то

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta_{n-1} = \gamma_n - \delta_{n-1,n},\\
&-\alpha + \gamma_n = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,n}.
\end{aligned}$$

Отсюда находим, что $\delta_{n-1,n} = \gamma_n - \beta_{n-1} - \alpha$. Но тогда $\operatorname{Nor} W$ содержит

$$\begin{aligned}
&\alpha J_{12} - \beta_{n-1} J_{1,n+1} - \gamma_n J_{2,n+2} + (\alpha + \beta_{n-1} - \gamma_n) J_{n+1,n+2} =\\
&\qquad = \alpha(J_{12} + J_{n+1,n+2}) - \beta_{n-1}(J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}) - \gamma_n(J_{2,n+2} - J_{n+2,n+1}),
\end{aligned}$$

для произвольных α, β_{n-1}, γ_n. Это значит, что $\operatorname{Nor} W$ содержит генераторы $Y_1 = J_{12} + J_{n+1,n+2}$, $Y_2 = J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}$, $Y_3 = J_{2,n+2} - J_{n+2,n+1}$. На элементы β_n, γ_{n-1} матрицы X не налагается никаких ограничений. Следовательно, $\operatorname{Nor} W$ содержит также генераторы $Y_4 = J_{1,n+2}$, $Y_5 = J_{2,n+1}$. По той же причине $J_{ab} \in \operatorname{Nor} W$ для $a, b = 3, \ldots, n$. Очевидно, $C = -Y_4 + Y_5$, $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$, $T = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3 - Y_1)$, $M = -Y_1 - Y_2 + Y_3$, $J_{2,n+1} = C + Y_4$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений (1.5). Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2, n)$ исчерпываются относительно $O(2, n)$ сопряженности такими алгебрами:*

1) $A\tilde{P}(1, n-1)$;

2) $AOpt(1, n-1)$;

3) $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$*, где* $AO_1(1,k) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,3,\ldots,k+2\rangle$, $AO_2(1,n-k) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2,k+3,\ldots,n+2\rangle$ $(k = 2,\ldots,[n/2];\ n \geq 4)$*;*

4) $AO_1(1,n)$*;*

5) $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$*, где* $AO_3(n-k) = \langle J_{ab} \mid a,b = k+3,\ldots,n+2\rangle$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$.

Доказательство. Пусть F — подалгебра алгебры $AO(2,n)$, U_1 — ненулевое подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U_1 — вырожденное пространство, то оно содержит F-инвариантное изотропное подпространство, сопряженное $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ или $\langle P_1 + P_{n+2}, P_2 + P_{n+1}\rangle$. На основании лемм 1.1, 1.2 заключаем, что алгебра F $O(2,n)$-сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$ или алгебры $AOpt(1,n-1)$.

Если U_1 — невырожденное пространство, то $U = U_1 \oplus U_1^{\perp}$, а потому в силу теоремы Витта нормализатор U_1 в $AO(2,n)$ сопряжен одной из алгебр: $AO_1(1,n)$; $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$, $k = 2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$ $(n \geq 4)$; $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Теорема доказана.

Отметим, что подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,3)$ классифицированы в [9], подалгебры алгебры $AO(2,3)$ в [10], а подалгебры алгебры $AOpt(1,3)$ в [11]. Содержание работ [9–11] дает почти полное решение задачи об описании относительно $O(2,4)$-сопряженности подалгебр алгебры $AO(2,4)$.

На основании теоремы 1.1 максимальные подалгебры алгебры $AP(2,n)$ исчерпываются относительно $P(2,n)$-сопряженности такими алгебрами:

1) $U \niplus F$, где F — неприводимая максимальная подалгебра алгебры $AO(2,n)$;

2) $A\tilde{G}(1,n-1) \niplus \langle J_{1,n+2}\rangle$, где $A\tilde{G}(1,n-1)$ — расширенная алгебра Галилея с базисом $P_1, P_1 + P_{n+2}, G_2,\ldots,G_{n+1}, J_{ab}$ $(a,b = 2,\ldots,n+1)$;

3) $U \niplus AOpt(1,n-1)$;

4) $AP_1(1,k) \oplus AP_2(1,n-k)$, где $AP_1(1,k) = \langle P_1,P_3,\ldots,P_{k+2}\rangle \niplus AO_1(1,k)$, $AP_2(1,n-k) = \langle P_2,P_{k+3},\ldots,P_{n+2}\rangle \niplus AO_2(1,n-k)$ $(k = 2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right],\ n \geq 4)$;

5) $AP(2,k) \oplus AP_3(n-k)$, где $AP_3(n-k) = \langle P_{k+3},\ldots,P_{n+2}\rangle \niplus AO_3(n-k)$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$.

§ 2. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$

Пусть B — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$. Так как неприводимые комплексные представления алгебры B одномерны, то степени неприводимых вещественных представлений алгебры B не превышают 2. Алгебра B — это алгебра некоторых линейных преобразований пространства $U = \langle P_1,P_2,\ldots, P_{n+1},P_{n+2}\rangle$. Если все неприводимые 6-инвариантные подпространства пространства U невырождены, то

$$B = \langle J_{12}, J_{34},\ldots,J_{2k-1,2k}\rangle, \tag{2.1}$$

где $k = \left[\frac{n+2}{2}\right]$. Если существует изотропное B-инвариантное подпространство пространства U, то B сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$ или алгебры $AOpt(1,n-1)$.

Пусть B — подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$. Если $n-1$ — нечетное число, то $AO(1,n-1)$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle J_{2,n+1}, J_{34}, J_{56},\ldots,J_{n-1,n}\rangle.$$

Следовательно, если n — четное число, то B сопряжена алгебре

$$\langle G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}, J_{1,n+2}, J_{2,n+1}\rangle, \tag{2.2}$$

где $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$ $(a = 2, 3, \ldots, n+1)$.

Если $n-1$ — четное число, то $AO(1, n-1)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\langle J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n,n+1}\rangle, \quad \langle H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, J_{2,n+1}\rangle,$$

где $H_a = J_{2a} - J_{a,n+1}$ $(a = 3, \ldots, n)$. Следовательно, если n — нечетное число, то B сопряжена одной из алгебр:

$$\begin{aligned}&\langle G_2, \ldots, G_{n+1}, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, J_{2,n+1}, J_{1,n+2}\rangle,\\ &\langle G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n,n+1}, J_{1,n+2}\rangle.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Теперь рассмотрим случай, когда B — подалгебра алгебры $AOpt(1, n-1) = \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n\rangle \mathbin{+\!\!\!\!\supset} (AO(n-2) \oplus \langle C, \mathbb{D}, T, J_{1,n+2}\rangle)$, где $AO(n-2) = \langle J_{ab} \mid a, b = 3, \ldots, n\rangle$. Алгебра $AO(n-2)$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle, \quad m = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Алгебра $\langle C, \mathbb{D}, T\rangle$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами: $\langle C, \mathbb{D}\rangle$, $\langle \mathbb{D} - T\rangle$. Отсюда вытекает, что $AOpt(1, n-1)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\begin{aligned}&\langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{2m-1,2m}, C, \mathbb{D}, J_{1,n+2}\rangle,\\ &\langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{2m-1,2m}, \mathbb{D} - T, J_{1,n+2}\rangle.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Если n — четное число, то алгебра $AO(2, n)$ обладает относительно $O(2, n)$-сопряженности тремя максимальными разрешимыми подалгебрами:*

$$\begin{aligned}&\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n+1,n+2}\rangle;\\ &\langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}, C, \mathbb{D}, J_{1,n+2}\rangle;\\ &\langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}, \mathbb{D} - T, J_{1,n+2}\rangle.\end{aligned}$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+2}{2}$, $\frac{5n-2}{2}$, $\frac{5n-4}{2}$.

Если n — нечетное число, то алгебра $AO(2, n)$ обладает относительно $O(2, n)$-сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\begin{aligned}&\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n,n+1}\rangle; \quad \langle G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n,n+1}, J_{1,n+2}\rangle;\\ &\langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, C, \mathbb{D}, J_{1,n+2}\rangle;\\ &\langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, \mathbb{D} - T, J_{1,n+2}\rangle.\end{aligned}$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+1}{2}$, $\frac{3n+1}{2}$, $\frac{5n-3}{2}$, $\frac{5n-5}{2}$.

Доказательство. Пусть n — четное число. В результате проведенных ранее рассуждений, мы получили четыре разрешимые подалгебры (2.1), (2.2), (2.4) алгебры $AO(2, n)$, среди которых находятся все максимальные разрешимые подалгебры. Первая из полученных алгебр не сохраняет изотропное пространство, две последние являются подалгебрами оптической алгебры $AOpt(1,n-1)$, а потому эти алгебры попарно не сопряжены. Так как $[G_2, P_2+P_{n+1}] = P_1+P_{n+2}$, $[G_{n+1}, P_2+P_{n+1}] = -(P_1+P_{n+2})$, то алгебра (2.2) принадлежит $AOpt(1,n-1)$, и, следовательно, не является максимальной разрешимой подалгеброй.

Аналогично рассуждаем и в случае нечетного n. Теорема доказана.

Отметим, что в [12] предложен алгоритм, сводящий проблему классификации максимальных разрешимых подалгебр алгебры $AO(p,q)$ к аналогичной проблеме для алгебр $AO(p-1,q-1)$, $AO(p-2,q-2)$. Используемая в [12] матричная реализация алгебры $AO(p,q)$ отличается от реализации, принятой в нашей работе.

На основании свойств разрешимых алгебр получаем, что максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$ исчерпываются относительно $P(2,n)$-сопряженности алгебрами $U \subset\!\!\!\!+ \ B$, где B — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$.

§ 3. Вполне приводимые подалгебры алгебры $AO(2,n)$

Пусть F — ненулевая вполне приводимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$, обладающая тем свойством, что из $GL(2+n,R)$-эквивалентности неприводимых подпредставлений тривиального представления F вытекает их $O(2,n)$-эквивалентность. Будем также предполагать, что если существуют F-инвариантные изотропные подпространства пространства U, то они необходимо аннулируются алгеброй F.

Пусть Γ — тривиальное представление алгебры F. Тогда

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_m,$$

где Γ_i — неприводимое представление F в $AO(W_i)$ $(i=1,\ldots,m)$. Положим $F_i = \{\Gamma_i(X) \mid X \in F\}$.

Тогда F_i — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W_i)$. Если $F_i \neq 0$, то алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Очевидно, алгебра F является подпрямой суммой своих неприводимых частей. Объединив эквивалентные ненулевые неприводимые подпредставления представления Γ, мы получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры F, построенные по тому же правилу, что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F. Если F совпадает со своей примарной частью, то F называется примарной алгеброй.

Отметим , что все подалгебры алгебры $AO(n)$ являются вполне приводимыми и удовлетворяют сформулированным выше ограничениям. Введенные понятия можно распространить и на алгебры $AO(p,q)$ для произвольных p, q.

Теорема 3.1. *Если $p+q \geq 3$ и одно из чисел p, q является нечетным, то неприводимая подалгебра алгебры $AO(p,q)$ является полупростой и некомпактной.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(p,q)$. Тогда $F = Z(F) \oplus Q$, где $Z(F)$ — центр, а Q — фактор Леви [13]. Если F — абсолютно неприводимая алгебра, то по лемме Шура существует такая невырожденная матрица B порядка $p+q$ комплексными коэффициентами, что для каждого $X \in Z(F)$ имеет место равенство $B^{-1}XB = \lambda E$ $(\lambda \in C)$. Так как след матрицы X равен 0, то $\lambda = 0$. Значит, $Z(F) = 0$.

Предположим, что F не является абсолютно неприводимой алгеброй. Существует такая матрица B с комплексными коэффициентами, что для каждого F

$$B^{-1}XB = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \bar{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\bar{\Delta}$ — матрица, комплексно-сопряженная к матрице Δ. Поскольку Δ, $\bar{\Delta}$ — неприводимые комплексные представления алгебры F, то силу леммы Шура и условия $\operatorname{tr} X = 0$ имеем

$$B^{-1}Z(F)B \subset \left\{ \begin{pmatrix} i\lambda E & 0 \\ 0 & -i\lambda E \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in R \right\}.$$

Отсюда вытекает, что $\dim Z(F) \leq 1$ и что квадрат ненулевой матрицы из $Z(F)$ совпадает с матрицей $-\lambda^2 E$, где $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$.

Если $X \in AO(p,q)$ и $X^2 = -E$, то X сопряжена матрице $\operatorname{diag}(J, J, \ldots, J)$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что характеристический многочлен матрицы X совпадает с $(x^2 + 1)^k$. С другой стороны, поскольку одно из чисел p, q является нечетным, то $\operatorname{ad} X$ обладает в $U_{p,q}$ одномерным инвариантным изотропным подпространством (каждое инвариантное пространство типа $(+,-)$ содержит изотропное инвариантное подпространство). Но тогда характеристический многочлен матрицы X делится на $x - \lambda$ $(\lambda \in R)$. Противоречие. Следовательно, $Z(F) = 0$, т.е. F — полупростая алгебра.

Допустим, что F — компактная алгебра. Тогда существует такая симметрическая матрица $C \in GL(p+q, R)$, что $C^{-1}FC \subset AO(p+q)$. Так как $\exp(C^{-1}FC) = C^{-1}\exp F \cdot C$, то в $O(p+q)$ существует неприводимая группа, сохраняющая одновременно $x_1^2 + \cdots + x_{p+q}^2$ и $\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \lambda_p^2 x_p^2 - \lambda_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_{p+q}^2 x_{p+q}^2$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_{p+q}$ — ненулевые вещественные числа).

Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Замечание 3.1. При доказательстве теоремы 3.1 мы установили, что если неприводимая подалгебра F алгебры $AO(p,q)$, $p, q \geq 1$, $p+q \geq 3$, является полупростая, то F — некомпактная алгебра.

Предложение 3.1. *Если $m \geq 3$, то фактор Лови неприводимой подалгебры F алгебры $AO(2,m)$ является некомпактной алгеброй и аннулирует в пространстве $U_{2,m}$ только нулевое подпространство.*

Доказательство. На основании замечания 3.1 можно предполагать, что F не является полупростой алгеброй. Пусть $F = Q \oplus Z(F)$, где Q — фактор Леви, а $Z(F)$ — центр. Если $X \in Q$, $J \in Z(F)$, $Y \in U_{2,m}$, то в силу тождества Якоби $[X,[J,Y]] + [J,[Y,X]] + [Y,[X,J]] = 0$. При $[X,Y] = 0$ получаем, что $[X,[J,Y]] = 0$. Поэтому пространство $W = \{Y \in U_{2,m} \mid [Q,Y] = 0\}$ инвариантно относительно $Z(F)$, а значит, и относительно F. В силу неприводимости алгебры F заключаем, что $W = 0$. Это значит, что Q аннулирует в $U_{2,m}$ только нулевое подпространство.

На основании замечания 3.1 будем предполагать, что Q — приводимая алгебра. Тогда некоторая ее неприводимая часть Q_1 является полупростой неприводимой подалгеброй алгебры $AO(p,q)$, где $1 \leq p \leq 2$, $q \geq 1$ и $q > 1$ при $p = 1$. В силу замечания 3.1 Q_1 — некомпактная алгебра. Поскольку подалгебра компактной алгебры является компактной, то Q — некомпактная алгебра. Предложение доказано.

Теорема 3.2. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части подалгебры F алгебры $AO(2,n)$, V — подпространство пространства $U_{2,n}$, инвариантное относительно F. Тогда $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$, где $V_i = [K_i, V_i] = [K_i, V]$, $[K_j, V_i] = 0$ при $j \neq i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, q)$, $\tilde{V} = \{X \in V \mid [F, X] = 0\}$. Если примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых некоммутативных подалгебр $S_1, S_2, \ldots, S_r$ соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$, то относительно $O(2,n)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства $U_{2,n}$ с условием $[K, W] = W$ исчерпываются пространствами: W_1, $W_1 \oplus W_2$, …, $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.*

Если $K = \langle J_{12} + J_{34} + \cdots + J_{2s-1,2s} \rangle$, то относительно $O(2,n)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства $U_{2,n}$ с условием $[K, W] = W$ исчерпываются пространствами: W_1^2, W_3^4, W_1^4, W_3^6, …, W_1^{2s-2}, W_3^{2s}, W_1^{2s}, $W_1^4(\lambda)$, $W_1^4(\lambda) \oplus W_5^6$, …, $W_1^4(\lambda) \oplus W_5^{2s}(\lambda)$, где $W_a^l = \langle P_a, \ldots, P_l \rangle$, $W_1^4(\lambda) = \langle P_1 + \lambda P_3, P_2 + \lambda P_4 \rangle$ $(\lambda > 0)$.

Доказательство. Разложение $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$ является следствием теоремы 3.1, предложения 3.1 и теоремы Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр Ли.

Пусть $[K, W] = W$, где K — некоммутативная примарная подалгебра алгебры $AO(2,n)$, W — подпространство пространства $U_{2,n}$. В силу полной приводимости алгебры K пространство W является прямой суммой неприводимых K-подпространств $W_1', \ldots, W_r'$, каждое из которых невырождено. Так как разложение тривиального представления алгебры K в сумму неприводимых представлений однозначно с точностью до $O(2,n)$-эквивалентности, то на основании теоремы Витта можно предполагать, что $W_1' = W_1$, …, $W_r' = W_r$. Теорема доказана.

Пусть π — проектирование алгебры $AP(2,n)$ на $AO(2,n)$, F — подалгебра $AO(2,n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $AP(2,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. Если алгебра $\hat{F}$ $P(2,n)$-сопряжена алгебре $W \niplus F$, где W есть F-инвариантное подпространство пространства $U_{2,n}$, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $AP(2,n)$. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset AP(2,n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AP(2,n)$.

Предложение 3.2. *Вполне приводимая подалгебра F алгебры $AO(2,n)$, не имеющая в $U_{2,n}$ изотропных инвариантных подпространств, обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AP(2,n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или не сопряжена подалгебре одной из алгебр: $AO(1,n)$, $AO(2,n-1)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Вследствие полной приводимости алгебры F можно предполагать, что F — неприводимая неполупростая подалгебра алгебры $AO(W)$, где W — невырожденное подпространство пространства $U_{2,n}$.

Пусть $F = Q \oplus T$, где Q — фактор Леви, а T — центр. Согласно теореме Витта $AO(W)$ — сопряжена $AO(2,2k)$ или $AO(2k)$, а потому можно считать, что $T = \langle J \rangle$, где $J = J_{12} + J_{34} + \cdots + J_{2k+1,2k+2}$ или $J = J_{34} + \cdots + J_{2k+1,2k+2}$. Если $\hat{F}$ содержит $J + Y$, где $Y \in W$, $Y \neq 0$, то $\hat{F}$ содержит $[Q, Y]$. В силу предложения 3.1

$W \subset \hat{F}$, т.е. $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра. Предложение доказано.

§ 4. Подалгебры алгебры $AP(2,3)$

На основании теоремы 1.1 максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2,3)$ исчерпываются относительно $O(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:

$AO(1,3) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4,5\rangle$;

$AO(2) \oplus AO(3) = \langle J_{12}\rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a,b = 3,4,5\rangle$;

$AO(2,2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,2,3,4\rangle$;

$AO(2,1) \oplus AO(2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,2,3\rangle \oplus \langle J_{45}\rangle$;

$ASim(1,2) = \langle H_2, H_3, H_4\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4\rangle \oplus \langle J_{15}\rangle)$, где $H_a = J_{1a} - J_{a5}$ $(a = 2,3,4)$;

$AOpt(1,2) = \langle M, G_3, H_3\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle C, \mathbb{D}, T, J_{15}\rangle$, где $G_3 = J_{13} - J_{35}$, $H_3 = J_{23} - J_{34}$, $M = J_{21} - J_{14} + J_{25} - J_{54}$, $C = -J_{15} + J_{24}$, $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{25} + J_{14} + J_{45})$, $T = -\frac{1}{2}(J_{12} - J_{25}) + \frac{1}{2}(J_{14} - J_{45})$.

Пусть $K_1 = J_{25} + J_{14} + \sqrt{3}J_{13}$, $K_2 = -J_{15} + J_{24} - \sqrt{3}J_{23}$, $K_3 = -2J_{45} + J_{12}$. Тогда $[K_1, K_2] = -K_3$, $[K_1, K_3] = -K_2$, $[K_2, K_3] = K_1$. Следовательно $\langle K_1, K_2, K_3\rangle = AO(1,2)$. Как показано в [10], неприводимые подалгебры алгебры $AO(2,3)$ исчерпываются $\langle K_1, K_2, K_3\rangle$ и $AO(2,3)$.

Таким образом, описание подалгебр алгебр $AP(2,3)$ сводится к описанию относительно $P(2,3)$-сопряженности подалгебр таких алгебр:

1) $AP(1,3) \oplus \langle P_1\rangle$, где $AP(1,3) = \langle P_2, P_3, P_4, P_5\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4,5\rangle$;

2) $AE(2) \oplus AE(3)$;

3) $AP(2,2) \oplus \langle P_5\rangle$;

4) $AP(2,1) \oplus AE(2)$, где $AP(2,1) = \langle P_1, P_2, P_3\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle J_{ab} \mid a,b = 1,2,3\rangle$, а $AE(2) = \langle P_4, P_5\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle J_{45}\rangle$;

5) $A\tilde{G}(1,2) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{15}\rangle$, где $A\tilde{G}(1,2) = \langle M, P_1, P_2, P_3, P_4, H_2, H_3, H_4\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4\rangle \oplus \langle J_{15}\rangle)$, $M = P_1 + P_5$;

6) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle \subset\!\!\!\!+ AOpt(1,2)$, где $AOpt(1,2) = \langle M, G_3, H_3, C, \mathbb{D}, T, J_{15}\rangle$.

Подалгебры алгебры $AP(1,3)$ классифицированы в [8, 14–16], подалгебры $AE(3)$ — в [17]. В этом параграфе мы описываем подалгебры алгебр $AE(2) \oplus AE(3)$, $AP(2,1) \oplus AE(2)$, $AP(1,3) \oplus \langle P_1\rangle$, $A\tilde{G}(1,2) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{15}\rangle$. Подалгебры алгебры $AP(2,2)$ будут классифицированы в § 5, § 6. Описание подалгебр алгебры $AP(2,3)$ опирается на результаты § 3. Поскольку $AO(2,2) = AO(2,1) \oplus AO(1,2)$, то в случае алгебры $AP(2,2)$ кроме результатов § 3 будут использованы дополнительные вспомогательные утверждения, упрощающие процедуру нахождения инвариантных подпространств.

В дальнейшем пространство, порожденное $P_{a_1}, \ldots, P_{a_s}$ будем обозначать $(a_1, \ldots, a_s)$. Если среди базисных векторов имеется вектор $P_a + wP_b$, то вместо него будем употреблять символ awb $(w \neq 0)$; при $w = 1$ будем писать ab, а при $w = -1$ — $\overline{ab}$. Если речь идет об алгебрах $W_1 \subset\!\!\!\!+ F$, …, $W_s \subset\!\!\!\!+ F$, то будем употреблять обозначение $F : W_1, \ldots, W_s$. Наличие m в символе $F(m)$ указывает, что алгебра F имеет размерность m. Нижние индексы служат для нумерации факторалгебр и инвариантных пространств.

Предложение 4.1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AE(2) \oplus AE(3)$ исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

O, (15), (1), (5), (1,2), (1,5), (3,5), (15,2), (15,3), (15,24), (1,2,5), (1,3,5), (15,2,3), (15,3,4), (15,24,3), (3,4,5), (15,2,3,4), (1,2,3,5), (1,3,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}\rangle$: O, (3), (1,2), (3,4), (3,4,5), (1,2,3), (1,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{45}\rangle$: O, (1), (3), (13), (1,2), (1,3), (13,2), (4,5), (1,2,3), (1,4,5), (3,4,5), (13,4,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}+\alpha J_{45}\rangle$: O, (3), (1,2), (4,5), (1,2,3), (3,4,5), (1,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($\alpha>0$, $\alpha\neq 1$);

$\langle J_{12}+J_{45}\rangle$: O, (3), (1,2), (4,5), ($1\alpha4,2\alpha5$), (1,2,3), (3,4,5), ($3,1\alpha4,2\alpha5$), (1,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($\alpha>0$);

$\langle J_{12},J_{45}\rangle$: O, (3), (1,2), (4,5), (1,2,3), (3,4,5), (1,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{34},J_{35},J_{45}\rangle$: O, (1), (1,2), (3,4,5), (1,3,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12},J_{34},J_{35},J_{45}\rangle$: O, (1,2), (3,4,5), (1,2,3,4,5).

Предложение 4.2. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AE(2)\oplus AE(3)$ исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12}+aP_5\rangle$: O, (3), (1,2), (3,4), (1,2,3), (1,2,3,4) ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_3\rangle$: O, (1), (1,2), (4,5), (1,4,5) (1,2,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{45}+P_3\rangle$: (13), (13,2), (13,4,5), (13,2,4,5);

$\langle J_{45}+aP_1\rangle$: O, (3), (4,5), (3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{45}+P_2+P_3\rangle$: O, (1), (4,5), (1,4,5);

$\langle J_{45}+aP_2+P_3\rangle$: (13), (13,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_2\rangle$: (1), (13), (1,3), (1,4,5), (13,4,5), (1,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}+J_{45}+aP_3\rangle$: O, (1,2), (4,5), ($1\alpha4,2\alpha5$), (1,2,4,5) ($a>0$, $\alpha\neq 0$);

$\langle J_{12}+\alpha J_{45}+aP_3\rangle$: O, (1,2), (4,5), (1,2,4,5) ($\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, $a>0$);

$\langle J_{12}+aP_3, J_{45}+bP_3\rangle$: O, (1,2), (4,5), (1,2,4,5) ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2+b^2\neq 0$).

Предложение 4.3. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,1)\oplus AE(2)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $AE(2)\oplus AE(3)$, исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{13}\rangle$: O, (13), (2), (4), (24), (2,4), (1,3), (4,5), (24,5), (13,2), (13,4), (13,24), (13,2,4), (13,4,5), (13,24,5), (2,4,5), (1,2,3), (1,3,4), (24,1,3), (1,2,3,4), (1,3,4,5), (1,24,3,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}-J_{23}\rangle$: O, (13), (4), (13,2), (13,4), ($13,2w4$), (4,5), (1,2,3), ($13,2w4,5$), (13,2,4), (13,4,5), (1,2,3,4), (13,2,4,5), (1.2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle J_{13}+aJ_{45}\rangle$: O, (2), (13), (1,3), (4,5), (13,2), (1,2,3), (2,4,5), (13,4,5), (1,3,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+J_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{13}\rangle$: O, (13), (4), (13,2), (13,4), ($13,2w4$), (4,5), (1,2,3), ($13,2w4,5$), (13,2,4), (13,4,5), (1,2,3,4), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{13}+aJ_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{13},J_{45}\rangle$: O, (13), (2), (1,3), (13,2), (4,5), (1,2,3), (2,4,5), (13,4,5), (1,3,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: O, (4), (4,5), (1,2,3), (1,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{13},J_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{45}\rangle$: O, (4,5), (1,2,3), (1,2.3,4,5).

Предложение 4.4. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,1)\oplus AE(2)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $AE(2)\oplus AE(3)$, исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle J_{13}+aP_2\rangle$: O, (13), (4), (4,5), (13,4), (1,3), (13,4,5), (1,3,4), (1,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{13}+P_2\rangle$: (24), (24,5), (13,24), (13,24,5), (1,24,3), (1,24,3,5);

$\langle J_{13}+aP_4\rangle$: O, (13), (2), (13,2), (1,3), (1,2,3) ($a>0$);

$\langle J_{13}+aP_5\rangle$: (4), (24), (2,4), (13,4), (13,24), (13,2,4), (1,3,4), (1,24,3), (1,2,3,4) ($a>0$);

$\langle J_{13}+P_2+P_4\rangle$: O, (13), (1,3);

$\langle J_{13}+P_2+aP_5\rangle$: (24), (13,24), (1,24,3) ($a>0$);

$\langle J_{13}+P_2+P_5\rangle$: (4), (13,4), (1,3,4);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_3\rangle$: O, (13), (4), (13,4), (4,5), (13,2), (13,2w4), (13,2w4,5), (13,2,4), (13,4,5), (13,2,4,5) ($w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_4\rangle$: O, (13), (13,2), (1,2,3);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_5\rangle$: (4), (13,4), (13,2$w$4), (13,2,4), (1,2,3,4) ($w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_3+aP_4\rangle$: O, (13), (13,2) ($a>0$, $w\neq 0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_3+aP_5\rangle$: (4), (13,4), (13,2$w$4), (13,2,4) ($a>0$, $w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2\rangle$: (13), (13,4), (13,2$w$4), (13,2$w$4,5), (13,4,5) ($a>0$, $w>0$, $w\neq 1$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_4\rangle$: O, (13), (13,2), (1,2,3) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_5\rangle$: (4), (13,4), (13,2$w$4), (13,2,4), (1,2,3,4) ($a>0$, $w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2+bP_4, P_1+P_3\rangle$ ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2+bP_5, P_1+P_3, P_4\rangle$ ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2+bP_5, P_1+P_3, P_2+wP_4\rangle$: ($a,b>0$, $w>0$);

$\langle J_{13}+aJ_{45}+bP_2\rangle$: O, (13), (1,3), (4,5), (13,4,5), (1,3,4,5) ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+J_{45}+aP_3\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (13,4,5), (13,2,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aJ_{45}+bP_2\rangle$: (13), (13,4,5) ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{13}+aP_2, J_{45}+bP_2\rangle$: O, (13), (1,3), (4,5), (13,4,5), (1,3,4,5) ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2+b^2\neq 0$);

$\langle J_{45}+P_1+P_3, J_{12}-J_{23}+aP_3\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}, J_{12}-J_{23}+P_3\rangle$;

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3\rangle$ ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_3, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3, P_2\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+P_3, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3, P_2\rangle$;

$\langle J_{45}+P_1+P_3, J_{12}-J_{23}+aP_3, P_4, P_5\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}, J_{12}-J_{23}+P_3, P_4, P_5\rangle$;

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3, P_4, P_5\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3, P_4, P_5\rangle$ ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_3, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3, P_2, P_4, P_5\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+P_3, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3, P_2, P_4, P_5\rangle$;

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2, J_{45}+bP_2\rangle$: (13), (13,4,5) ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2+b^2\neq 0$).

Предложение 4.5. *Пусть* $G_a=J_{2a}-J_{a5}$ ($a=3,4$). *Расщепляемые подалгебры алгебры* $\langle P_1\rangle\oplus AP(1,3)$*, не сопряженные подалгебрам алгебр* $AE(2)\oplus AE(3)$*,* $AP(2,1)\oplus AE(2)$*, исчерпываются относительно* $P(2,3)$*-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle G_3\rangle$: O, (25), (1), (4), (14), (25,1), (25,4), (1,4), (25,14), (25,3), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,1w3,4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,3), (25,3,4), (25,1,4), (25,3,14), (25,1,3,4), (1,2,3,5), (2,3,4,5), (14,2,3,5), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle G_3, G_4\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3), (25,1w3), (25,3,4), (25,1,3), (25,1w3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle G_3, J_{25}\rangle$: O, (25), (1), (4), (14), (25,1), (25,4), (1,4), (25,3), (25,14), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,1w3,4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,3), (25,3,4), (25,1,4), (25,3,14), (25,1,3,4), (1,2,3,5), (2,3,4,5), (2,3,14,5), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3), (25,1w3), (25,3,4), (25,1,3), (25,1w3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle G_3, G_4, J_{25}+\lambda J_{34}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5) ($\lambda>0$);

$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$: O, (1), (5), (15), (1,5), (2,3,4), (1,2,3,4), (2,3,4,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle G_3, G_4, J_{25}, J_{34}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$: O, (1), (2,3,4,5), (1,2,3,4,5).

Предложение 4.6. *Пусть $G_a = J_{2a} - J_{a5}$ $(a=3,4)$. Нерасщепляемые подалгебры алгебры $\langle P_1\rangle \oplus AP(1,3)$, не сопряженные подалгебрам алгебр $AE(2)\oplus AE(3)$, $AP(2,1)\oplus AE(2)$, исчерпываются такими алгебрами:*

$\langle G_3+P_1\rangle$: O, (25), (4), (14), (25,4), (25,14), (25,3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,3,4), (25,3,14), (2,3,4,5), (14,2,3,5) ($w>0$);

$\langle G_3+P_4\rangle$: O, (25), (1), (25,1), (25,3), (25,1w3), (2,3,5), (25,1,3), (1,2,3,5) ($w>0$);

$\langle G_3+P_5\rangle$: O, (25), (1), (4), (14), (25,1), (25,4), (1,4), (25,14), (25,3), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (25,1w3,4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,3), (25,3,4), (25,1,4), (25,3,14), (25,1,3,4) ($w>0$);

$\langle G_3+P_1+P_4\rangle$: O, (25), (25,3), (2,3,5);

$\langle G_3+P_1, G_4+\mu P_4+\rho P_1\rangle$ $(\mu\geq 0,\ \rho\geq 0)$;

$\langle G_3, G_4+P_4\rangle$; $\langle G_3, G_4+P_4, P_1\rangle$;

$\langle G_3+P_4+\gamma P_1, G_4-P_3+\mu P_4+\delta P_1, P_2+P_5\rangle$ $(\mu\geq 0,\ \gamma>0 \vee \gamma=0,\ \delta\geq 0)$;

$\langle G_3+\gamma P_1, G_4+P_4+\delta P_1, P_2+P_5\rangle$ $(\gamma>0\vee\gamma=0,\ \delta\geq 0)$;

$\langle G_3+P_1, G_4, P_2+P_5\rangle$;

$\langle G_3+P_4, G_4-P_3+\mu P_4, P_2+P_5, P_1\rangle$ $(\mu\geq 0)$;

$\langle G_3, G_4+P_4, P_2+P_5, P_1\rangle$;

$\langle G_3+\alpha P_4+\beta P_1, G_4+P_1, P_2+P_5, P_3\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;

$\langle G_3+\alpha P_4+\beta P_1, G_4+P_2, P_2+P_5, P_3\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;

$\langle G_3+P_4+\beta P_1, G_4, P_2+P_5, P_3\rangle$ $(\beta\geq 0)$;

$\langle G_3+P_1, G_4, P_2+P_5, P_3\rangle$;

$\langle G_3+\alpha P_4+\beta P_1, G_4+P_1, P_2+P_5, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_3+P_4+\beta P_1, G_4, P_2+P_5, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_3+P_1, G_4, P_2+P_5, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_3+P_1, G_4, P_2+P_5, P_3, P_4\rangle$;

$\langle G_3+P_2, G_4+\beta P_1, P_2+P_5, P_3, P_4\rangle$ $(\beta\geq 0)$;

$\langle G_3+P_4, G_4, P_2+P_5, P_1, P_3\rangle$;

$\langle G_3+P_4, G_4+\alpha P_2, P_2+P_5, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle G_3, G_4+P_2, P_2+P_5, P_1, P_3\rangle$;

$\langle G_3, G_4+P_1, P_2+P_5, P_1+wP_3, P_4\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_3+P_2, G_4+\alpha P_1, P_2+P_5, P_1+wP_3, P_4\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ w>0)$;

$\langle G_3+P_1, G_4, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$; $\langle G_3+P_2, G_4, P_2+P_5, P_1, P_3, P_4\rangle$;

$\langle G_3, J_{25} + \alpha P_1\rangle$: O, (25), (4), (25,4), (25,3), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,1w3,4), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, J_{25} + P_1\rangle$: (14), (25,14), (25,3,14), (2,3,5,14);

$\langle G_3, J_{25} + \alpha P_3\rangle$: (25), (25,1), (25,4), (25,14), (25,314), (25,3w4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,4) ($\alpha > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, J_{25} + \gamma P_4\rangle$: O, (25), (1), (25,1), (25,3), (25,1w3), (2,3,5), (25,1,3), (1,2,3,5) ($\gamma > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, J_{25} + \alpha P_1 + \beta P_3\rangle$: (25), (25,4), (25,3$w$4), (25,314) ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, J_{25} + \alpha P_1 + \beta P_3, P_2 + P_5, P_1 + P_3 + P_4\rangle$ ($\alpha > 0$, $\beta \neq 0$);

$\langle G_3, J_{25} + P_1 + P_4\rangle$: O, (25), (25,3), (2,3,5);

$\langle G_3, J_{25} + \beta P_3 + \gamma P_4\rangle$: (25), (25,1), (25,1$w$3) ($\beta, \gamma, w > 0$);

$\langle G_3, J_{25} + P_1 + \beta P_3, P_1 + P_4, P_2 + P_5\rangle$ ($\beta > 0$);

$\langle G_3, J_{25} + P_1 + P_4 + \beta P_3, P_2 + P_5\rangle$ ($\beta > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25} + \alpha P_1\rangle$: O, (25), (25,3), (25,1w3), (25,3,4), (25,1w3,4), (2,3,4,5) ($\alpha > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25} + \gamma P_4\rangle$: (25), (1,25), (25,3), (25,1w3), (25,1,3) ($\gamma > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25} + \alpha P_1 + \gamma P_4\rangle$: (25), (25,3), (25,1$w$3) ($\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $w > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34} + P_2 + P_5\rangle$: O, (1);

$\langle G_3, G_4, J_{34} + \alpha P_1\rangle$: O, (25), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34} + \alpha P_1 + P_2, P_3, P_4, P_2 + P_5\rangle$ ($\alpha > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34} + P_2\rangle$: (25,3,4), (1,25,3,4);

$\langle G_3, G_4, J_{34} + \alpha J_{25} + \gamma P_1\rangle$: O, (25), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha > 0$, $\gamma > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25} + \alpha P_1, J_{34} + \beta P_1\rangle$: O, (25), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

Предложение 4.7. *Пусть $H_a = J_{1a} - J_{a5}$ ($a = 2, 3, 4$), $ASim(1, 2) = \langle H_2, H_3, H_4, J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{15}\rangle$, π — проектирование $AP(2, 3)$ на $AO(2, 3)$. Расщепляемые подалгебры $\hat{F}$ алгебры $AP(2, 3)$, для которых $\pi(\hat{F}) \subset ASim(1, 2)$ и $\pi(\hat{F})$ не сопряжена подалгебре ни одной из алгебр $AO(2) \oplus AO(3)$, $AO(1, 3)$, $AO(2, 1) \oplus AO(2)$, $AO(2, 2)$, исчерпываются относительно $O(2, 3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{34} + H_2\rangle$: O, (15), (15,2), (3,4), (15,3,4), (1,2,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23} - J_{34} + H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24} + H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (2,4), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (1,3,5), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23} - J_{34} + H_4, H_2 + H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23} - J_{34} + H_2 - H_4, J_{24} + 2J_{15}\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} + \alpha J_{34}, H_2\rangle$: O, (15), (15,2), (3,4), (15,3,4), (1,2,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($\alpha > 0$);

$\langle H_2 + H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2), (15,3), (15,4), (15,2,3), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} - J_{24} + H_2 + H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} + J_{24}, H_3\rangle$: $\langle (P_1 + P_5) + (P_2 + P_4), P_2 - P_4\rangle$, $\langle (P_1 - P_5) + (P_2 - P_4), P_1 + P_5, P_3\rangle$, $\langle (P_1 - P_5) + (P_2 - P_4), P_1 + P_5, P_2 + P_4, P_3\rangle$;

$\langle J_{15} + \alpha J_{24}, H_3\rangle$: O, (15), (24), (2,4), (15,3), (15,24), (1,3,5), (15,24,3), (15,2,4), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5) ($\alpha > 0$);

$\langle J_{24}, H_3\rangle$: O, (15), (24), (2,4), (15,24), (15,3), (15,2,4), (1,3,5), (15,24,3), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}+H_3, H_2+H_4\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{34}+H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+cJ_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,3), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5) ($c\neq 0,\pm 1,-2$);

$\langle 2J_{15}+J_{24}, J_{23}-J_{34}+H_4, H_2+H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}+H_2+H_4, H_2-H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,3), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-2J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2), (15,3), (15,4), (15,2,3), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}+H_3, H_2, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}+H_4, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, H_3\rangle$: O, (15), (24), (2,4), (15,24), (15,3), (15,2,4), (1,3,5), (15,24,3), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,4), (15,24), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+bJ_{24}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5) ($0<|b|<1$);

$\langle J_{15}+J_{24}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+\frac{1}{2}J_{24}, J_{23}-J_{34}+H_2, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{24}+H_2, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+bJ_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($b>0$);

$\langle J_{15}+bJ_{24}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($b>0$);

$\langle J_{15}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,4), (15,24), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{23}-J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, H_2 + H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$: O, (15), (1,5), (2,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2 + H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} + aJ_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) $(a \neq 0, \pm 1)$;

$\langle J_{15} + J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} - J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5).

§ 5 Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$

Так как известны классификация подалгебр алгебры $AO(2,2)$ [10], то изучение расщепляемых подалгебр алгебры $AP(2,2)$ сводится к нахождению подпространств пространства трансляций, инвариантных относительно подалгебр алгебры $AO(2,2)$.

Пусть

$$\begin{aligned}
&B_1 = -\tfrac{1}{2}(J_{14} + J_{23}), \qquad B_2 = \tfrac{1}{2}(J_{24} - J_{13}), \qquad B_3 = \tfrac{1}{2}(J_{12} - J_{34}),\\
&C_1 = \tfrac{1}{2}(J_{14} - J_{23}), \qquad C_2 = -\tfrac{1}{2}(J_{13} + J_{24}), \qquad C_3 = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{34}).
\end{aligned}$$

Легко получить, что имеют место такие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}
&[B_2, B_1] = B_3, \quad [B_3, B_1] = B_2, \quad [B_2, B_3] = B_1,\\
&[C_2, C_1] = C_3, \quad [C_3, C_1] = C_2, \quad [C_2, C_3] = C_1,\\
&[B_i, C_k] = 0 \quad (i, k = \overline{1,3}),\\
&[B_1, P_1] = \tfrac{1}{2}P_4, \quad [B_1, P_2] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [B_1, P_3] = \tfrac{1}{2}P_2, \quad [B_1, P_4] = \tfrac{1}{2}P_1,\\
&[B_2, P_1] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [B_2, P_2] = -\tfrac{1}{2}P_4, \quad [B_2, P_3] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [B_2, P_4] = -\tfrac{1}{2}P_2,\\
&[B_3, P_1] = -\tfrac{1}{2}P_2, \quad [B_3, P_2] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [B_3, P_3] = -\tfrac{1}{2}P_4, \quad [B_3, P_4] = \tfrac{1}{2}P_3,\\
&[C_1, P_1] = -\tfrac{1}{2}P_4, \quad [C_1, P_2] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [C_1, P_3] = \tfrac{1}{2}P_2, \quad [C_1, P_4] = -\tfrac{1}{2}P_1,\\
&[C_2, P_1] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [C_2, P_2] = \tfrac{1}{2}P_4, \quad [C_2, P_3] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [C_2, P_4] = \tfrac{1}{2}P_2,\\
&[C_3, P_1] = -\tfrac{1}{2}P_2, \quad [C_3, P_2] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [C_3, P_3] = \tfrac{1}{2}P_4, \quad [C_3, P_4] = -\tfrac{1}{2}P_3.
\end{aligned}$$

В дальнейшем через V будем обозначать векторное пространство $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, а через W — его подпространство.

Лемма 5.1. *Пусть* Γ *— линейный оператор конечномерного векторного пространства* U *над* R *и* $\Gamma^2 = \alpha \cdot 1_U$, *где* $\alpha^2 = 1$, 1_U *— тождественный оператор* U. *Если* $\alpha = -1$ $(\alpha = 1)$, *то* U *разлагается в прямую сумму двумерных* (*одномерных*) *инвариантных относительно* Γ *подпространств.*

Доказательство. Пусть Q — вещественная линейная алгебра, порожденная Г. Q можно рассматривать как скрещенную групповую алгебру группы порядка 2 и поля R. Поскольку Q — полупростая алгебра, то по теореме Веддерберна каждый левый Q-модуль вполне приводим. При $\alpha = 1$ неприводимые Q-модули одномерны, а при $\alpha = -1$ — двумерны. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Подпространства пространства V, инвариантные относительно $F = \langle B_1 - B_3\rangle$, исчерпываются относительно $O(2,2)$-сопряженности пространствами:* O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, $(1,2,3,4)$.

Доказательство. Так как $[B_1 - B_3, P_1 + P_3] = P_2 + P_4$, $[B_1 - B_3, P_2 + P_4] = 0$, $[B_1 - B_3, P_2 - P_4] = -(P_1 - P_3)$, $[B_1 - B_3, P_1 - P_3] = 0$, то V есть прямая сумма инвариантных относительно $B_1 - B_3$ подпространств $\langle P_1 + P_3, P_2 + P_4\rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 - P_4\rangle$. Если $[F, W] \subset W$, $W \subset V$ и $\dim W = 1$, то $W = \langle \alpha(P_2 + P_4) + \beta(P_1 - P_3)\rangle$. Применяя автоморфизм $\exp(tC_3)$, отображаем W на $\langle P_1 - P_3\rangle$. Если $\dim W \geq 2$, то W содержит $P_1 - P_3$, $\alpha(P_1 + P_3) + \beta(P_2 + P_4) + \gamma(P_2 - P_4)$, $\alpha(P_2 + P_4)$. При $\alpha \neq 0$ получаем, что W содержит $P_1 - P_3$, $P_2 + P_4$, $P_1 + P_3 + \delta(P_2 - P_4)$. Так как $\exp(2tC_3)(P_1 + P_3 + \delta(P_2 - P_4)) = (\cos t + \delta \sin t)(P_1 + P_3) + (\delta \cos t - \sin t)(P_2 - P_4)$, то, полагая $\cos t + \delta \sin t = 0$, находим, что W сопряжено с $\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4, P_2 - P_4\rangle = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$.

Если $\alpha = 0$, то $\exp(2tC_2)(W)$ содержит векторы $P_1 - P_3$, $\beta e^{2t}(P_2 + P_4) + \gamma(P_2 - P_4)$. При $\beta\gamma \neq 0$ полагаем $e^{2t}|\beta| = |\gamma|$. Получаем вектор $P_2 + P_4 \pm (P_2 - P_4)$, равный $2P_2$ или $2P_4$. Если $\dim W = 2$, то $W = (\overline{13}, 2)$ или $(\overline{13},4)$. Если $\dim W = 3$, то W совпадает с $(\overline{13},2,4)$. При $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ и $\dim W = 2$ имеем $W = (\overline{13}, \overline{24})$. При $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$ и $\dim W = 2$ имеем $W = (\overline{13}, 24)$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Если $W \neq 0$, $W \neq V$ и $[B_2, W] \subset W$, то W сопряжено с одним из пространств:* (13), (1,3), $(13,\overline{24})$, (13,24), (13,2,4).

Доказательство. Так как $(2B_2)^2 = \operatorname{diag}\{1,1,1,1\}$, то по лемме 5.1 W является прямой суммой инвариантных одномерных подпространств. На основании (5.1), $V_1 = \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4\rangle$ — линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению 1, а $V_2 = \langle P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$ — линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению -1. С точностью до автоморфизма $\exp(tC_3)$ одномерные инвариантные подпространства оператора B_2 исчерпываются $\langle P_1 \pm P_3\rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{1,1,-1,-1\}$, отображает $\langle B_2\rangle$ на $\langle B_2\rangle$, а $\langle P_1 - P_3\rangle$ на $\langle P_1 + P_3\rangle$.

Пусть $V = \langle Y, Z\rangle$, где $Y \in V_1$, $Z \in V_2$. Применяя $\exp(tC_3)$, а затем $\exp(tC_2)$, получаем, что W сопряжено с одним из пространств: (1,3), (13,24), $\langle P_1 + P_3, P_1 - P_3 + P_2 + P_4\rangle$.

Пусть

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Lambda \in O(2,2)$, $\Lambda^{-1}B_2\Lambda = -B_2$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_2 - P_3 + P_4) = P_1 + P_3$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_3) = -(P_1 - P_3)$. Значит, $\langle P_1 + P_3, P_1 - P_3 + P_2 + P_4\rangle$ сопряжено с $\langle P_1, P_3\rangle$.

Если $\dim W = 3$, то $V_1 \subset W$ или $V_2 \subset W$, а потому $W = \langle P_1 + P_3, P_2, P_4\rangle$ или $W = \langle P_1, P_3, P_2 + P_4\rangle$. Автоморфизм $AP(2,2)$, соответствующей матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

не изменяет $\langle B_2\rangle$ и отображает $\langle P_1, P_2 + P_4, P_3\rangle$ на $\langle P_1 + P_3, P_2, P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть* $F^a = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3)\rangle$ $(a = 1, 2)$. *Если* $[F^a, W] \subset W$, $W \neq 0$, $W \neq V$, *то* W *сопряжено с одним из пространств:* ($2a$), ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,$2w4$), (1,6–$2a$,3), ($\overline{13}$,2,4) $(w > 0)$.

Доказательство. Ограничимся случаем $a = 2$. Пусть $\Gamma = B_1 - B_3 + C_1 - C_3$, $X = \alpha(P_1 - P_3) + \beta(P_1 + P_3) + \gamma P_2 + \delta P_4 \in W$. Из (5.1) получаем, что $[\Gamma, X] = 2\beta P_2 - \gamma(P_1 - P_3)$, $[\Gamma, [\Gamma, X]] = -2\beta(P_1 - P_3)$. Если $\beta \neq 0$, то $P_1 - P_3, P_2, P_1 + P_3 + \rho P_4 \in W$. Если $\rho = 0$, то $W = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$. Допустим, что $\rho \neq 0$. Тогда $P_3 + \alpha P_4 \in W$, $\alpha \neq 0$. Легко получить, что $\exp(2t(B_1 - B_3)(P_3 + \alpha P_4)) = P_3 + \alpha P_4 + t(P_2 + P_4 + \alpha(P_1 - P_3))$. Отсюда вытекает, что $P_3 + (\alpha + t)P_4 \in W$. Полагая $t = -\alpha$, получаем, что $W = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$.

Пусть $\beta = 0$ для всех $X \in W$. Если $\gamma = 0$, то W совпадает с одним из пространств: $\langle P_1 - P_3\rangle$, $\langle P_4\rangle$, $\langle P_1 - P_3 + \alpha P_4\rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_4\rangle$. Так как $\exp(2t(B_1 - B_3)(P_1 - P_3 + \alpha P_4) = (1 + \alpha t)(P_1 - P_3) + \alpha P_4$, то, полагая $1 + \alpha t = 0$, находим, что пространство $\langle P_1 - P_3 + \alpha P_4\rangle$ сопряжено с $\langle P_4\rangle$. Если $\gamma \neq 0$, то $P_1 - P_3, P_2 + wP_4 \in W$. При $\dim W = 3$ имеем $W = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$.

Остается показать, что алгебры $L_1 = \langle P_1 - P_3, P_2\rangle \subset\!\!\!\!+\; F^2$, $L_2 = \langle P_1 - P_3, P_4\rangle \subset\!\!\!\!+\; F^2$, $L_3 = \langle P_1 - P_3, P_2 + wP_4\rangle \subset\!\!\!\!+\; F^2$ попарно не сопряжены.

Так как при изоморфизме псевдоевклидовых пространств сохраняются длины векторов, то алгебры L_1 и L_2 несопряжены.

Допустим, что автоморфизм φ алгебры $AP(2,2)$, соответствующий матрице $\lambda = (\gamma_{ij}) \in O(2,2)$, отображает L_1 на L_3. Пусть $\varphi(\Gamma) = \mu\Gamma$, $\varphi(P_1 - P_3) = \alpha_1(P_1 - P_3) + \alpha_2(P_2 + wP_4)$, $\varphi(P_2) = \beta(P_1 - P_3) + \beta_2(P_2 + wP_4)$. Поскольку $[\varphi(\Gamma), \varphi(P_1 - P_3)] = [\Gamma, P_1 - P_3] = 0$, то $\alpha_2 = 0$ Из равенства $\lambda\Gamma = \mu\Gamma\lambda$ вытекает, что $\gamma_{42} = 0$, вследствие чего $\beta_2 = 0$. Мы получили, что $\varphi(\langle P_1 - P_3, P_2\rangle) = \langle P_1 - P_3\rangle$. Противоречие. Значит, алгебра L_1 не сопряжена с алгеброй L_3.

Аналогично доказываем несопряженность алгебр L_2 и L_3. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если нетривиальное подпространство* $W \subset V$ *инвариантно относительно* $F = \langle -B_1 + B_3 + C_2\rangle$, *то* W *сопряжено с одним из пространств:* ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,24), (13,24), ($\overline{13}$,2,4).

Доказательство. Пусть $X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 \in W$, $\Gamma = 2(-B_1 + B_3 + C_2)$ Из (5.1) получаем, что

$$[\Gamma, X] = (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)P_1 + (-\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4)P_2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4)P_3 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)P_4,$$
$$[\Gamma, [\Gamma, X]] = X + 2(\alpha_4 - \alpha_2)(P_1 - P_3) - 2(\alpha_1 + \alpha_3)(P_2 + P_4).$$

Если $\alpha_4 - \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$, то $P_1 - P_3$, $P_2 + P_4 \in W$. При $\dim W = 2$ имеем $W = \langle P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$, а при $\dim W = 3$ получаем одно из пространств: $\langle P_1, P_2 + P_4, P_3\rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$.

Пусть $\alpha_4-\alpha_2=0$, $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_1+\alpha_3\neq 0$. Если $\alpha_1-\alpha_3\neq 0$, то $W=\langle P_1, P_2+P_4, P_3\rangle$. Если $\alpha_1-\alpha_3=0$, то $W=\langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$.

Пусть $\alpha_4-\alpha_2=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$, $\alpha_1\neq 0$. Такими же рассуждениями как и в предыдущем случае получаем, что W совпадает с одним из пространств: $\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$.

Если $\alpha_4-\alpha_2=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$ для всех $X\in W$, то W совпадает с одним из пространств; $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$.

Автоморфизм $AO(2,2)$, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

не изменяет F и отображает $\langle P_2+P_4\rangle$ на $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$ на $\langle P_1-P_3, P_2-P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2+P_4, P_3\rangle$ на $\langle P_1-P_3, P_2, P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если $F=\langle -B_1+B_3\pm C_3\rangle$, $[F,W]\subset W$, $W\neq 0$, $W\neq V$, то $W=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $F=\langle -B_1+B_3+C_3\rangle$. Пусть $\Gamma=2(-B_1+B_3+C_3)$, $X=\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3+\alpha_4P_4$. Тогда

$[\Gamma,X]=(2\alpha_2-\alpha_4)P_1+(-2\alpha_1-\alpha_3)P_2-\alpha_2P_3-\alpha_1P_4$,

$[\Gamma,[\Gamma,X]]=-X-2(\alpha_1+\alpha_3)(P_1-P_3)+2(\alpha_4-\alpha_2)(P_2+P_4)$.

Отсюда вытекает, что W содержит векторы

$Y=(\alpha_1+\alpha_3)(P_1-P_3)+(\alpha_2-\alpha_4)(P_2+P_4)$,

$[\Gamma,Y]=(\alpha_2-\alpha_4)(P_1-P_3)-(\alpha_1+\alpha_3)(P_2+P_4)$.

Определитель Δ из коэффициентов при P_1-P_3, P_2+P_4 равен $-(\alpha_1+\alpha_3)^2-(\alpha_2-\alpha_4)^2$. Если $\Delta\neq 0$, то $P_1-P_3, P_2+P_4\in W$. Предположив, что W содержит ненулевой вектор $\beta P_3+\gamma P_4$, получаем, что $W=V$. Значит, $W=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$.

Если $\Delta=0$, то $\alpha_3=-\alpha_1$, $\alpha_4=\alpha_2$. Отсюда следует, что $X=\alpha_1(P_1-P_3)+\alpha_2(P_2+P_4)$, а значит, $W=\langle P_1-P_3, P_2+P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Если $F=\langle B_2-eC_3\rangle$ $(e>0)$, $[F,W]\subset W$ и $W\neq 0$, $W\neq V$, то $W=\langle P_1+P_3, P_2-P_4\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma=2(B_2-eC_3)$, $X=\sum\alpha_iP_i$. Тогда

$[\Gamma,X]=(-e\alpha_2+\alpha_3)P_1+(e\alpha_1-\alpha_4)P_2+(\alpha_1+e\alpha_4)P_3-(\alpha_2+e\alpha_3)P_4$,

$[\Gamma,[\Gamma,X]]=(1-e^2)X+2e(\alpha_4P_1+\alpha_3P_2-\alpha_2P_3-\alpha_1P_4)$.

Легко получить, что

$$\exp(2tC_3)(X)=(\alpha_1\cos t+\alpha_2\sin t)P_1+(-\alpha_1\sin t+\alpha_2\cos t)P_2+ \\ +(\alpha_3\cos t-\alpha_4\sin t)P_3+(\alpha_3\sin t+\alpha_4\cos t)P_4.$$

Полагаем $\alpha_3\sin t+\alpha_4\cos t=0$. Если $\alpha_1=\alpha_2=0$, то $P_3\in W$. Отсюда, используя инвариантность W, находим последовательно, что $[\Gamma,P_3]=P_1-eP_4\in W$, $[\Gamma,P_1-eP_4]=2eP_2+(1-e^2)P_3\in W$, $P_2\in W$, $-eP_1-P_4\in W$. Значит, $W=V$. Противоречие. Поэтому можно предположить, что $X=P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3$. Пусть

$X_1=[\Gamma,X]=(-e\alpha_2+\alpha_3)P_1+eP_2+P_3-(\alpha_2+e\alpha_3)P_4$,

$X_2=\alpha_3P_2-\alpha_2P_3-P_4$, $\quad X_3=(-e\alpha_3-\alpha_2)P_1+P_2-eP_3-(\alpha_3-e\alpha_2)P_4$.

Пусть Δ — определитель, составленный из коэффициентов векторов X, X_1, X_2, X_3 при P_1, P_2, P_3, P_4. Находим, что

$$-\Delta = (e(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1) - 2\alpha_2\alpha_3)^2 + (\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1 + 2e\alpha_2\alpha_3)^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то X, X_1, X_2, X_3 суть линейно независимы, а потому $W = V$.

Пусть $\Delta = 0$. Тогда $e(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1) - 2\alpha_2\alpha_3 = 0$, $(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1) + e(2\alpha_2\alpha_3) = 0$. Так как $\begin{vmatrix} e & -1 \\ 1 & e \end{vmatrix} = e^2 + 1$, $e^2 + 1 \neq 0$, то $\alpha_2 - \alpha_3^2 + 1 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$. Отсюда заключаем, что $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \pm 1$.

Автоморфизм, соответствующий $\operatorname{diag}\{1, -1, -1, 1\}$, отображает $B_2 - eC_3$ в $-(B_2 - eC_3)$, $P_1 - P_3$ в $P_1 + P_3$. Поэтому можно предполагать, что $X = P_1 + P_3$, $W = \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle$. Лемма доказана.

Пусть $F_i(m)$ — подалгебра размерности m алгебры $AO(2,2)$. Если речь идет о расщепляемых подалгебрах $W_1 \mathbin{\supset\!\!\!\!+} F_i(m)$, …, $W_s \mathbin{\supset\!\!\!\!+} F_i(m)$, то будем употреблять обозначение $F_{ij}(m) : W_1, \ldots, W_s$ $(j = \overline{1, s})$.

Теорема 5.1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$ исчерпываются алгебрами:*

$F_{1j}(0)$: O, (1), (3), (13), (1,2), (1,3), (1,24), (3,4), (24,3), (13,24), (1,2,3), (1,3,4), (1,24,3), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 14})$;

$F_{2j}(1) = \langle B_1 - B_3 \rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 8})$;

$F_{3j}(1) = \langle B_2 \rangle$: O, (13), (1,3), (13,24), $(13,\overline{24})$, (13,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 7})$;

$F_{4j}(1) = \langle B_3 \rangle$: O, (1,2), (3,4), (13,24), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 5})$;

$F_{5j}(1) = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 \rangle$: O, (4), $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},2w4)$, (1,2,3), $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(w > 0,\ j = \overline{1, 9})$;

$F_{6j}(1) = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 \rangle$: O, (2), $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, (1,3,4), $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(w > 0,\ j = \overline{1, 9})$;

$F_{7j}(1) = \langle -B_1 + B_3 + C_2 \rangle$: O, $(\overline{13})$, (13,24), $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 6})$;

$F_{8j}(1) = \langle -B_1 + B_3 + C_3 \rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 3})$;

$F_{9j}(1) = \langle -B_1 + B_3 - C_3 \rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 3})$;

$F_{10j}(1) = \langle B_2 + eC_2 \rangle$: O, (13), (24), (1,3), (2,4), (13,24), $(13,\overline{24})$, (1,24,3), (13,2,4), (1,2,3,4) $(0 < e < 1,\ j = \overline{1, 10})$;

$F_{11j}(1) = \langle B_2 + C_2 \rangle$: O, (2), (4), (13) ,(24), (1,3), (2,4), (13,2), (13,4), (13,24), (13,2,4), (1,24,3), (1,2,3), (1,3,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 15})$;

$F_{12j}(1) = \langle B_2 - eC_3 \rangle$: O, $(13,\overline{24})$, (1,2,3,4) $(e > 1,\ j = \overline{1, 3})$;

$F_{13j}(1) = \langle B_3 + eC_3 \rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(0 < |e| < 1,\ j = \overline{1, 4})$;

$F_{14j}(1) = \langle B_3 - C_3 \rangle$: O, (1), (1,2), (3,4), (1,3,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 6})$;

$F_{15j}(1) = \langle B_3 + C_3 \rangle$: O, (3), (1,2), (3,4), (1,2,3), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 6})$;

$F_{16j}(2) = \langle B_1 - B_3, B_2 \rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 6})$;

$F_{17j}(2) = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 \rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 7})$;

$F_{18j}(2) = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, (13,24), $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 6})$;

$F_{19j}(2) = \langle B_1 - B_3, C_3 \rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 3})$;

$F_{20j}(2) = \langle B_2, C_2 \rangle$: O, (13), (1,3), (13,24), (13,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 6})$;

$F_{21j}(2) = \langle B_2, C_3 \rangle$: O, $(13,\overline{24})$, (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 3})$;

$F_{22j}(2) = \langle B_3, C_3 \rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1, 4})$;

$F_{23j}(2) = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3 + C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (4), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3), (1,2,3,4) ($w > 0$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{24j}(2) = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3 - C_1 + C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (2), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,3,4), (1,2,3,4) ($w > 0$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{25j}(2) = \langle B_2+C_2, B_1-B_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, (13,24), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,24,3), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,11}$);

$F_{26j}(2) = \langle B_2 + \alpha C_2, B_1 - B_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, (13,24), (1,24,3), $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{27j}(2) = \langle B_2 - \alpha C_3, B_1 - B_3\rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) ($\alpha > 0$, $j = \overline{1,3}$);

$F_{28j}(2) = \langle B_1 - B_3 - C_2, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,6}$);

$F_{29j}(3) = \langle B_1, B_2, B_3\rangle$: O, (13,24), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{30j}(3) = \langle B_1 - B_3, B_2, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,6}$);

$F_{31j}(3) = \langle B_1-B_3, B_2, C_2\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,6}$);

$F_{32j}(3) = \langle B_1 - B_3, C_3, B_2\rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{33j}(3) = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,7}$);

$F_{34j}(3) = \langle B_1-B_3, B_2-C_2, C_1-C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,5}$);

$F_{35j}(3) = \langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2, C_1-C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($0 < |\alpha| < 1$, $j = \overline{1,6}$);

$F_{36j}(3) = \langle B_1 - C_1, B_2 + C_2, B_3 - C_3\rangle$: O, (2), (1,3,4), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,4}$);

$F_{37j}(3) = \langle B_1 + C_1, B_2 + C_2, B_3 + C_3\rangle$: O, (4), (1,2,3), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,4}$);

$F_{38j}(4) = \langle B_1, B_2, B_3, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13},\overline{24})$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{39j}(4) = \langle B_1, B_2, B_3, C_2\rangle$: O, (13,24), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{40j}(4) = \langle B_1, B_2, B_3, C_3\rangle$: O, (1,2,3,4) ($j = 1, 2$);

$F_{41j}(4) = \langle B_1-B_3, B_2, C_1-C_3, C_2\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,5}$);

$F_{42j}(5) = \langle B_1, B_2, B_3, C_1 - C_3, C_2\rangle$: O, $(\overline{13},\overline{24})$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{43j}(6) = \langle B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\rangle$: O, (1,2,3,4) ($j = 1, 2$).

Доказательство. Для каждой из подалгебр алгебры $AO(2,2)$ необходимо найти инвариантные подпространства пространства $V = \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ и классифицировать их относительно $O(2,2)$-сопряженности.

Первым рассмотрим случай нулевой алгебры $F_1(0)$. Превратим V в псевдоевклидово пространство, положив $(X, Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4$ для $X = \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum \beta_i P_i$ $(i = \overline{1,4})$. Пусть W — подпространство V. Если $\dim W = 1$, то по теореме Витта пространство W $O(2,2)$-сопряжено с одним из пространств: (1), (13), (3).

Пусть $\dim W > 1$. Если W содержит вектор X ненулевой длины, то W сопряжено с $\langle X\rangle \oplus W'$, где $X = P_1$, $W' \subset \langle P_2, P_3, P_4\rangle$ или $X = P_3$, $W' \subset \langle P_1, P_2, P_4\rangle$. Подпространства пространства $\langle P_2, P_3, P_4\rangle$ исчерпываются пространствами: O, (2), (24), (3), (2,3), (3,4), (24,3), (2,3,4). Подпространства пространства (1,2,4) исчерпываются пространствами: O, (1), (24), (4), (1,2), (1,24), (1,4), (1,2,4). Если W не содержит вектора ненулевой длины, то в силу теоремы о существовании ортогонального базиса и теоремы Витта заключаем, что $W = \langle P_1 + P_3\rangle$ или $W = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4\rangle$.

Большинство случаев одномерных подалгебр алгебры $AO(2,2)$ рассмотрены в леммах 5.2–5.7, остальные случаи исследуются аналогично.

Рассмотрим случай алгебры $F_{16}(2) = \langle B_1 - B_3, B_2\rangle$. При описании инвариантных относительно $F_2 = \langle B_1 - B_3\rangle$ подпространств пространства V, мы использовали только автоморфизмы $\exp(tC_i)$ $(i = 2, 3)$. Поскольку эти автоморфизмы алгебру F_{16} отображают в себя, то среди инвариантных пространств F_2 следует отобрать те, которые выдерживают действие B_2, а затем полученные пространства исследовать на сопряженность. Непосредственной проверкой убеждаемся, что инвариантные подпространства для F_{16} исчерпываются пространствами: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, $(1,2,3,4)$.

Пусть W — подпространство V, инвариантное относительно $F_{25} = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3\rangle$. Легко получить, что $W = W_1 \oplus W_2$, где $W_1 \subset \langle P_2, P_4\rangle$, а W_2 совпадает с одним из пространств: O, (13), $(\overline{13})$, $(1,3)$. Автоморфизм $\exp(tC_2)$ отображает $\langle P_2 + \gamma P_4\rangle$ $(\gamma \neq 0)$ на одно из пространств: (2), (4), (24), $(\overline{24})$. Используя коммутационные соотношения, находим, что W является одним из пространств: O, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(13,24)$, $(\overline{13},2,4)$, $(1,24,3)$,$(1,2,3,4)$.

Аналогично исследуются случаи остальных подалгебр алгебры $AO(2,2)$. Теорема доказана.

§ 6 Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$

Пусть $\widetilde{F}_i$ — такая подалгебра алгебры $AP(2,2)$, что $\pi(\widetilde{F}_i) = F_i = F_i(m)$. Запись $\widetilde{F}_i + W$ означает, что $[F_i, W] \subset W$ и $\widetilde{F}_i \cap V \subset W$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\widetilde{F}_i + W_1, \ldots, \widetilde{F}_i + W_s$, то будем употреблять обозначение $\widetilde{F}_{ij} : W_1, \ldots, W_s$ $(j = \overline{1,s})$.

Лемма 6.1 *Нерасщепляемые подалгебры $\widetilde{F}$ алгебры $AP(2,2)$ с условием $\pi(\widetilde{F}) = \langle B_1 - B_3\rangle$ исчерпываются алгебрами:*

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_2\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$ $(j = \overline{8,10})$.

Доказательство. Пусть $X = B_1 - B_3 + \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum t_i P_i$. Тогда $\exp(2Y)(X) = B_1 - B_3(\alpha_1 + t_2 - t_4)P_1 + (\alpha_2 - t_1 - t_3)P_2 + (\alpha_3 - t_2 + t_4)P_3 + (\alpha_4 - t_1 - t_3)P_4$, Полагая $\alpha_3 - t_2 + t_4 = 0$, $\alpha_4 - t_1 - t_3 = 0$, можно предположить, что алгебра $\widetilde{F}$ содержит $X = B_1 - B_3 + \alpha P_1 + \beta P_2$. Если $\widetilde{F} \cap V = 0$, то, применяя автоморфизм $\exp(2tC_3)$, получаем, что $\widetilde{F}$ сопряжена с алгеброй $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1\rangle$. Автоморфизм $AO(2,2)$, соответствующий матрице $\mathrm{diag}\,\{1, -1, -1, 1\}$, отображает $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1\rangle$ на $\langle B_1 - B_3 - \alpha P_1\rangle$. Поэтому будем предполагать, что $\alpha > 0$. Так как $\exp(t(B_2 - C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1) = e^{-t}(B_1 - B_3 + \alpha e^t P_1)$, то можно считать, что $\alpha = 1$. В итоге получаем алгебру $\widetilde{F}_{21} = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$.

Пусть $W = \langle P_1 - P_3, P_2\rangle$ или $W = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$. Тогда $\beta = 0$. Автоморфизм $\exp(t(B_2 + C_2))$ не изменяет W. Так как $\exp(t(B_2 + C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1) = e^{-t}(B_1 - B_3) + \alpha(\operatorname{ch} tP_1 + \operatorname{sh} tP_3)$ и $\alpha(\operatorname{ch} tP_1 + \operatorname{sh} tP_3) + \alpha \operatorname{sh} t(P_1 - P_3) = \alpha e^t P_1$, то, полагая $|\alpha| e^{2t} = 1$, можно допускать, что $\alpha = 1$.

Аналогично исследуются остальные случаи. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Если $\widetilde{F}$ — нерасщепляемая подалгебра $AP(2,2)$ и $\pi(\widetilde{F}) = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3)\rangle$ $(a = 1, 2)$, то $\widetilde{F}$ сопряжена одной из алгебр:*

$\langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3) + P_{2a-1}\rangle$: O, $(2a)$, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$;

$\langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3) + P_{2a}\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},6 - 2a)$, $(1,3,6 - 2a)$.

Доказательство. Так как случаи $a = 1$ и $a = 2$ аналогичны, то ограничимся рассмотрением случая $a = 2$. Пусть $X = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum t_i P_i$.

Тогда $\exp(2Y)(X) = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + (\alpha_1 + 2t_2)P_1 + (\alpha_2 - 2t_1 - 2t_3)P_2 + (\alpha_3 - 2t_2)P_3 + \alpha_4 P_4$. Полагаем $\alpha_1 + 2t_2 = 0$, $\alpha_2 - 2t_1 - 2t_2 = 0$. Отсюда вытекает, что с точностью до внутренних автоморфизмов $X = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha P_3 + \beta P_4$.

Пусть $W = \widetilde{F} \cap V$ и пусть $W \neq \langle P_4 \rangle$, $W \neq \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$. В этом случае автоморфизм $\exp(t(B_1 - B_3 - C_1 + C_3))$ не изменяет W и отображает X в $B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha P_3 + (\beta + t\alpha)P_4 + (t\beta + \frac{t^2}{2})(P_1 - P_3)$, Так как $\exp(\lambda P_2)(B_1 - B_3 + C_1 - C_3) = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \lambda(P_1 - P_3)$, то можно допустить, что при $\alpha \neq 0$ $\widetilde{F}$ содержит $X_1 = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha P_3$. Автоморфизм, соответствующий $\operatorname{diag}\{1, -1, 1, 1\}$, позволяет считать $\alpha > 0$. Поскольку

$$\exp(t(B_2 + C_2))(X_1) = e^{-t}(B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha e^t(\operatorname{ch} tP_3 + \operatorname{sh} tP_1)) = e^{-t}X_2,$$
$$\exp(-\alpha e^t \operatorname{sh} tP_2)X_2 = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha e^{2t}P_3,$$

то, полагая $\alpha e^{2t} = 1$, находим, что допустимо предполагать $\alpha = 1$.

Если $\alpha = 0$, то при помощи автоморфизмов $\operatorname{diag}\{1, 1, 1, -1\}$, $\exp(t(B_2 + C_2))$ получаем алгебру $\widetilde{F}$, содержащую $B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_4$.

Аналогично рассматриваются и случаи, когда $W = \langle P_4 \rangle$, $W = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Все подалгебры $\widetilde{F}_i$ алгебры $AP(2,2)$ с условием $\pi(\widetilde{F}_i) = F_i$ ($i = 3, 4, \overline{7,13}, \overline{18,22}, \overline{27,32}, \overline{36,43}$) являются расщепляемыми.*

Доказательство. Алгебры F_i ($i = 29, 36, 37, 43$) являются полупростыми. В силу теоремы Уайтхеда [13] для них не существует нерасщепляемых расширений. Отсюда вытекает, что расщепляемыми будут также алгебры $\widetilde{F}_{38}$, $\widetilde{F}_{39}$, $\widetilde{F}_{40}$.

Пусть $X_1 = -B_1 + B_3 + C_2 + \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum t_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). Непосредственно находим, что

$$\begin{aligned}\exp(2Y)(X) = -B_1 + B_3 + C_2 + (\alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4)P_1 +\\ +(\alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4)P_2 + (\alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4)P_3 + (\alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3)P_4.\end{aligned}$$

Полагаем

$$\begin{aligned}\alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4 = 0,\\ \alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4 = 0,\\ \alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4 = 0,\\ \alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3 = 0.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Так как определитель, составленный из коэффициентов при t_1, t_2, t_3, t_4 равен 1, то система (6.1) имеет решение. Следовательно, все алгебры $\widetilde{F}_7$ суть расщепляемые.

Рассмотрим случай алгебры $F_{18})2) = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle$. Алгебра $\widetilde{F}_{18}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 + \sum \alpha_i P_i$, $X_2 = C_2$. Так как $[X_2, [X_2, X_1]] = -\frac{1}{4}\sum \alpha_i P_i$, то $\widetilde{F}_{18}$ — расщепляемая алгебра.

Алгебра F_{28} содержит F_7. Следовательно, с точностью до внутренних автоморфизмов алгебра $\widetilde{F}_{28}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 - C_2$, $X_2 = C_1 - C_3 + \sum \alpha_i P_i$. На основании коммутационных соотношений,

$$\begin{aligned}X_2 - [X_1, X_2] = -\left(\tfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}\right)(P_2 + P_4) + \left(\tfrac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}\right)(P_1 - P_3) + \left(\alpha_1 + \tfrac{\alpha_3}{2}\right)P_1 +\\ + \left(\alpha_2 + \tfrac{\alpha_4}{2}\right)P_2 + \left(\alpha_3 + \tfrac{\alpha_1}{2}\right)P_3 + \left(\alpha_4 + \tfrac{\alpha_2}{2}\right)P_4.\end{aligned}$$

Перебирая инвариантные пространства F_{28}, находим, что для каждого из них $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, т.е. алгебра $\widetilde{F}_{28}$ расщепляемая. Лемма доказана.

Лемма 6.4. *Если $\widetilde{F}$ — нерасщепляемая подалгебра $AP(2,2)$ и $\pi(\widetilde{F}) = F_{35}$, то $\widetilde{F}$ сопряжена одной из алгебр:*

$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4\rangle$: O, $(\overline{13})$ $(j = 1,2)$;

$\widetilde{F}_{35,3} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2 - P_4\rangle$;

$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 - \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_3\rangle$: $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = 4,5)$.

Доказательство. На основании рассуждений, проведенных для $\widetilde{F}_{26}$, получаем, что $\widetilde{F}$ содержит элементы $X_1 = B_2 + \alpha C_2$, $X_2 = B_1 - B_3$, $X_3 = C_1 - C_3 + \sum\gamma_i P_i$. Из коммутационных соотношений находим, что

$$\begin{aligned}
&\alpha X_3 + [X_1, X_3] = \left(\alpha\gamma_1 + \tfrac{1+\alpha}{2}\gamma_3\right) P_1 + \left(\alpha\gamma_2 + \tfrac{\alpha-1}{2}\gamma_4\right) P_2 + \\
&\qquad + \left(\alpha\gamma_3 + \tfrac{1+\alpha}{2}\gamma_1\right) P_3 + \left(\alpha\gamma_4 + \tfrac{\alpha-1}{2}\gamma_2\right) P_4, \\
&[X_2, X_3] = \left(\tfrac{\gamma_1+\gamma_3}{2}\right)(P_2 + P_4) + \left(\tfrac{\gamma_4-\gamma_2}{2}\right)(P_1 - P_3).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Допустим, что $\widetilde{F} \cap V = \langle P_1 - P_3\rangle$. Тогда на основании (6.2) получаем, что $\gamma_3 + \gamma_1 = 0$. Можно предположить, что $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$. Получаем также условие

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma_2 + \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)\gamma_4 = 0, \\
&\alpha\gamma_4 + \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)\gamma_2 = 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Определитель Δ этой системы равен $\frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{2}{4}\alpha - \frac{1}{4}$. Если $\Delta = 0$, то $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$. Так как $0 < |\alpha| < 1$, то система (6.3) имеет ненулевое решение только при $\alpha = \frac{1}{3}$. В этом случае $\gamma_4 = \gamma_2$. Автоморфизм, соответствующий $\operatorname{diag}\{-1, 1, -1, 1\}$, позволяет допускать, что $\gamma_2 > 0$. Так как

$$\exp(t(B_2 - C_2))(C_1 - C_3 + \gamma_2(P_2 + P_4)) = e^t(C_1 - C_3 + \gamma_2 e^{-2t}(P_2 + P_4)),$$

то считаем, что $\gamma_2 = 1$. Следовательно, алгебра $\widetilde{F}$ сопряжена с алгеброй $\langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4, P_1 - P_3\rangle$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. Лемма доказана.

Теорема 6.1. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$ исчерпываются алгебрами:*

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_2\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(j = \overline{8,10})$;

$\widetilde{F}_{5j} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_3\rangle$: O, (4), $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$ $(w > 0,\ j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{5j} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_4\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(1,2,3)$ $(j = \overline{8,11})$;

$\widetilde{F}_{6j} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_1\rangle$: O, (2), $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{6j} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_2\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(1,3,4)$ $(j = \overline{8,11})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$: O, (4), (13), $(1,3)$, $(13,4)$, $(1,3,4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,6})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$: O, (2), (13), $(1,3)$, $(13,2)$, $(1,2,3)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{7,12})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2 + P_4\rangle$: O, (13), $(1,3)$ $(j = \overline{13,15})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2\rangle$: (24), $(13,24)$, $(1,24,3)$ $(j = \overline{16,18})$;

$\widetilde{F}_{14j} = \langle B_3 - C_3 + \alpha P_2\rangle$: O, (1), $(3,4)$, $(1,3,4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,4})$;

$\widetilde{F}_{15j} = \langle B_3 + C_3 + \alpha P_4\rangle$: O, (3), $(1,2)$, $(1,2,3)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,4})$;

$\widetilde{F}_{17.1} = \langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, C_1 - C_3\rangle$; $\widetilde{F}_{17.2} = \langle B_1 - B_3 + P_4, C_1 - C_3 - P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.3} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 - P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.4} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3\rangle$ $(\beta, \gamma \in R)$;
$\widetilde{F}_{17.5} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.6} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\widetilde{F}_{17.7} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.8} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + P_1 + \beta P_2, P_1 - P_3, P_4\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\widetilde{F}_{17.9} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.10} = \langle B_1 - B_3 + \alpha P_2, C_1 - C_3 + P_1, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\widetilde{F}_{17.11} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.12} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + \beta P_3, P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$ $(\beta \in R)$;
$\widetilde{F}_{23j} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$: O, ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,2w4), (1,2,3) $(\alpha > 0$, $w > 0$, $j = \overline{1,4})$;
$\widetilde{F}_{23.5} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_4, P_1 - P_3\rangle$ $(\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$;
$\widetilde{F}_{23.6} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2, P_1 - P_3, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\widetilde{F}_{24j} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$: O, ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,2w4), (1,3,4) $(\alpha > 0$, $w > 0$, $j = \overline{1,4})$;
$\widetilde{F}_{24.5} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_4, P_1 - P_3\rangle$ $(\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$;
$\widetilde{F}_{24.6} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\widetilde{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$: ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,4) $(\alpha > 0$, $j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$: ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2) $(\alpha > 0$, $j = 3, 4)$;
$\widetilde{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_4\rangle$: ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,$\overline{24}$), (1,24,3) $(j = \overline{5,7})$;
$\widetilde{F}_{25.8} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{25.9} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 \pm P_4, P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_2 - P_4\rangle$: O, ($\overline{13}$) $(j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_4\rangle$: (24), ($\overline{13}$,24), (13,24), (1,24,3) $(j = \overline{3,6})$;
$\widetilde{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2, C_1 - C_3\rangle$: ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,4) $(\alpha > 0$, $j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4, C_1 - C_3\rangle$: ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2) $(\alpha > 0$, $j = 3, 4)$;
$\widetilde{F}_{33.5} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_4, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{33.6} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4, C_1 - C_3, P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{34.1} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, B_2 - C_2 + P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{34.2} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, B_2 - C_2 + P_3, P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4\rangle$: O, ($\overline{13}$) $(j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{35.3} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2 - P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 - \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2\rangle$: ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,2,4) $(j = 4, 5)$.

Основные этапы доказательства проведены в леммах 6.1–6.4. Остальные этапы аналогичны.

1. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Extension of the S-matrix of the mass shell and momentum space of constant curwature, Preprint E2–6992, Dubna, Joint Institute for Nuclear Research, 1974, 36 p.
2. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Translation invariant quantum field with de-Sitter momentum space of the mass shell, Preprint E2–7936, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 1974, 22 p.
3. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Extension of the S-matrix of mass shell and momentum space of constant curvature, В кн.: Труды Математического института им. В.А. Стеклова, Т. CXXXYI, Тр. Междунар. конф. по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистике, ч. II, Поля, частицы, математические вопросы квантовой статистики, М., Наука, 1975, 85–129.
4. Fushchych W.I., On a motion equations for two particles in relativistics quantum mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **10**, № 4, 163–168.
5. Aghassi J.J., Roman P., Sentilli R.M., Relation of the inhomogeneous de Sitter group to the quantum mechanics of elementary particles, *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, № 8, 2297–2301.
6. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I, *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
7. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики, *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, 844–849.
8. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
9. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
10. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuos subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
11. Burdel G., Patera J., Perrin M. and Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
12. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., The maximal solvable subgroups of $SO(p,q)$ groups, *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, № 11, 1932–1938.
13. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964, 355 с.
14. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. I, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 2, 145–186.
15. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. II, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 4, 193–202.
16. Lassnar W., Realizations of the Poincaré group on homogeneous spaces, *Acte Phys. Slov.*, 1973, **23**, № 4, 193–202.
17. Beckers J., Patera J., Perroud M. and Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.

О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения

В.И. ФУЩИЧ

Предложен способ построения пуанкаре- и галилеево-инвариантных нелинейных уравнений. Некоторые из полученных уравнений обладают более широкой симметрией, чем линейные волновые уравнения. Построены нелинейные уравнения для релятивистской жидкости и электромагнитного поля. Рассмотрена новая модель взаимодействия спинорного и скалярного полей. Обсуждаются приемы для отыскания семейств частных решений нелинейных уравнений. Приведены примеры неразмножаемых решений для нелинейного спинорного уравнений.

Введение

При нелинейном обобщении волнового уравнения для скалярного поля $u(x)$ рассматривают уравнение [1]

$$p_\mu p^\mu u(x) + F_1(u, u^*)u(x) = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

$F_1(u, u^*)$ — некоторая нелинейная дифференцируемая функция от $u(x)$ и комплексно-сопряженной функции u^*,

$$p_\mu = ig^{\mu\nu}\partial_\nu, \qquad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Уравнение Дирака обобщают таким же путем, т.е. добавляют нелинейный член к свободному оператору Дирака

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi(x) + F_2(\bar{\Psi}, \Psi)\Psi(x) = 0, \tag{2}$$

$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0$, $F_2(\bar{\Psi}, \Psi)$ — произвольная дифференцируемая функция от $\bar{\Psi}\Psi$. Уравнения (1), (2) инвариантны относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. В том случае, когда $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, уравнения (1), (2) инвариантны относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3) \supset O(1,3)$. Требование инвариантности относительно группы $C(1,3)$ дает возможность конкретизировать нелинейности в (1) и (2) [2].

При таком способе обобщения волновых уравнений симметрия его, по сравнению с линейным уравнением, не расширяется. В этой работе указан простой способ построения нелинейных волновых уравнений, симметрия которых может быть значительно шире, чем симметрия исходного линейного уравнения.

§ 1. О нелинейном обобщении уравнений Дирака и Даламбера

1. Рассмотрим линейную систему Дирака для Ψ и $\bar{\Psi}$

$$(i\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi(x) = 0, \tag{1.1}$$

Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, С. 4–19.

$$(i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + m\Psi) = 0. \tag{1.2}$$

Нелинейные уравнения типа (2) можно получить с помощью следующей замены:

$$m \to M = F_2(\bar{\Psi}\Psi) + F_3(\bar{\Psi}S_{45}\Psi) + F_4(V_\mu V^\mu) + F_5(V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}), \tag{1.3}$$

$$V_\mu = \bar{\Psi}S_{\mu 5}\Psi, \qquad V_{\mu\nu} = \bar{\Psi}S_{\mu\nu}\Psi, \tag{1.4}$$

$$S_{\mu 5} = \frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad S_{5\mu} = -\frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad S_{45} = \frac{i}{2}\gamma_4, \qquad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{1.5}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \qquad S_{\mu 4} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_4 - \gamma_4\gamma_\mu). \tag{1.6}$$

Очевидно, что в формулах (1.3), не нарушая пуанкаре-инвариантности, можно добавить члены типа $\widetilde{F}_4(\widetilde{V}_\mu\widetilde{V}^\mu)$, $\widetilde{F}_5(\widetilde{V}_{\mu\nu}\widetilde{V}^{\mu\nu})$,

$$\widetilde{V}_\mu = \bar{\Psi}\gamma_4 S_{\mu 5}\Psi, \qquad \widetilde{V}_{\mu\nu} = \bar{\Psi}\gamma_4 S_{\mu\nu}\Psi. \tag{1.7}$$

Для нелинейных обобщений линейных уравнений, описывающих свободные поля произвольного спина, полезно заметить, что матрицы (1.5), (1.6) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $O(1,5)$ [1]. Поэтому замена (1.3) может быть использована не только для обобщения уравнения Дирака.

Замена (1.3) не расширяет группу симметрии безмассового ($m = 0$) уравнения Дирака (1.1). Рассмотрим теперь следующие обобщения уравнения Дирака. Заменим в уравнении (1.1) оператор-вектор ∂_μ, вектор-матрицу γ_μ, спинор Ψ таким путем

$$\partial_\mu \to D_\mu \equiv A_1\partial_\mu + A_2 V_\mu + A_3 V_{\mu\nu}V^\nu, \tag{1.8}$$

$$\gamma_\mu \to \Gamma_\mu \equiv B_1\gamma_\mu + B_2 V_{\mu\nu}\gamma^\nu + B_3 V_\mu, \tag{1.9}$$

$$\Psi \to \Phi \equiv C_1\Psi + C_2 V_\mu\gamma^\mu\Psi + C_3 V_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\Psi, \tag{1.10}$$

где A_i, B_i, C_i — произвольные дифференцируемые функции от $\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}S_{\mu\nu}\Psi\bar{\Psi}S^{\mu\nu}\Psi$, $\bar{\Psi}V_\mu\Psi\bar{\Psi}V^\mu\Psi$.

Уравнение (1.1) после замен (1.8)–(1.10) принимает вид

$$i\Gamma^\mu D_\mu\Phi - M\Phi = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение для сопряженного спинора $\bar{\Phi}$ записывается очевидным образом. В формулах (1.8)–(1.10) можно добавить соответствующие члены с $\widetilde{V}_\mu$ и $\widetilde{V}_{\mu\nu}$.

В уравнении (1.11) операторы Γ_μ и D_μ не коммутируют, поэтому более симметричное нелинейное обобщиние уравнения Дирака выглядит как

$$\frac{i}{2}(\Gamma^\mu D_\mu + D_\mu\Gamma^\mu)\Phi - M\Phi = 0. \tag{1.12}$$

Из приведенного ясно, что с помощью указанных замен можно получить широкие классы пуанкаре-инвариантных нелинейных уравнений, которые не изучались ранее. Важно подчеркнуть, что при специальном выборе функций A_i, B_i, C_i, F_i получаем уравнения, которые обладают значительно более богатыми симметрийными свойствами, чем исходное безмассовое уравнение Дирака ($m = 0$) (1.1). Так, например, с помощью замены (1.8), (1.9), когда $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 1$, $F_i = 0$, получаем уравнение [2]

$$V_\mu \partial^\mu \Psi = \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} = 0. \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры конформную алгебру $AC(1,3)$ и алгебру Пуанкаре $AP(1,3)$. Это обстоятельство весьма существенное, поскольку чем выше симметрия нелинейного уравнения, тем больше надежд построить его решения. В некоторых случаях нелинейные уравнения, инвариантные относительно бесконечномерных алгебр, допускают линеаризацию с помощью локальных и нелокальных замен [3].

Замечание 1. Среди множества уравнений (1.12) имеются уравнения

$$\gamma_\mu (p^\mu + A_1 \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)\Psi = m\Psi,$$
$$p^\mu (\gamma_\mu + A_1 \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)\Psi = m\Psi,$$
$$(\gamma_\mu p^\mu + S_{\mu\nu}\gamma_\mu \gamma_\nu \Psi)\Psi = m\Psi,$$

которые можно трактовать как уравнения движения для спинорной частицы массы m, движущейся в собственном векторном $\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi$ и тензорном $\bar{\Psi}\gamma_\mu \gamma_\nu \Psi$ полях. Точные решения этих уравнений могут быть построены с помощью анзатца [1, 2].

2. Обобщим линейное уравнение Даламбера

$$\partial_\mu \partial^\mu u = 0 \tag{1.14}$$

для комплексной скалярной функции u.

Если в (1.14) произвести замену

$$\partial_\mu \to D_\mu = A_1 \partial_\mu + A_2 u^* \partial_\mu u + A_3 u \partial_\mu u^*, \tag{1.15}$$

$$u \to \widetilde{u} = F(uu^*)u, \tag{1.16}$$

то получим уравнение

$$D_\mu D^\mu \widetilde{u} = 0. \tag{1.17}$$

В этот класс уравнений входит, в частности, уравнение

$$\partial_\mu \partial^\mu u + (\partial_\nu u)(\partial^\nu u)u = 0, \tag{1.18}$$

которое можно представить через матрицы Дирака

$$i\gamma^\mu \partial_\mu i\gamma_\nu \partial^\nu \Psi(x) = 0. \tag{1.19}$$

Замены (1.3), (1.8)–(1.10) в уравнениях (1.18) и (1.19) дают нам две неэквивалентные системы нелинейных уравнений

$$D_\mu D^\mu \Phi = M^2 \Phi, \tag{1.20}$$

$$\Gamma_\mu D^\mu \Gamma_\alpha D^\alpha \Phi = M^2 \Phi. \tag{1.21}$$

Среди множества уравнений (1.20) имеется, в частности уравнение вида [5]

$$(\partial_\mu + \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)(\partial^\mu + \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi)\Psi + \lambda_2 S_{\mu\nu} V^{\mu\nu}\Psi = m^2\Psi,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные параметры, которое можно интерпретировать как уравнение движения для частицы со спином 1/2, движущейся в собственном спинорном поле.

Аналогично обобщается уравнение Монжа–Ампера

$$\det \|\partial_\mu \partial_\nu u\| = 0. \tag{1.22}$$

После замены (1.15), (1.16) получим

$$\det \|D_\mu D^\nu \widetilde{u}\| = 0. \tag{1.23}$$

§ 2. О нелинейных уравнениях для релятивистской жидкости и электромагнитного поля

В этом параграфе, исходя из линейных уравнений, построим нелинейные уравнения движения для релятивистской жидкости и электромагнитного поля.

1. Рассмотрим линейное пуанкаре-инвариантное уравнение для вектора-скорости v_μ

$$\lambda_1 \partial_\alpha \partial^\alpha v_\mu - \lambda_2 \partial_\mu (\partial_\nu v^\nu) = m^2 v_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

где λ_1, λ_2, λ_3, m — произвольные параметры. В том случае, когда $\lambda_2 = 0$ или $\partial_\nu v^\nu = 0$ (условие неразрывности), уравнение (2.1) распадается на четыре независимые волновые уравнения

$$\lambda_1 \partial_\alpha \partial^\alpha v_\mu = m^2 v_\mu. \tag{2.2}$$

В случае $\lambda_1 = 0$ имеем зацепленную систему

$$\lambda_2 \partial_\mu (\partial_\nu v^\mu) = m^2 v_\mu. \tag{2.3}$$

Сделав в уравнениях (2.1)–(2.3) замены

$$\partial_\mu \to D_\mu = A_1 \partial_\mu + A_2 v_\mu + A_3 v_\nu \partial_\nu v_\mu, \tag{2.4}$$

$$v_\mu \to \widetilde{v}_\mu = C_1 v_\mu + c_2 v_\nu \partial_\nu v_\mu, \tag{2.5}$$

где A_1, A_2, A_3, C_1, C_2 — функции от $v_\alpha v^\alpha$, получим уравнения

$$\lambda_1 D_\alpha D^\alpha \widetilde{v}_\mu - \lambda_2 D_\mu (D_\nu \widetilde{v}^\nu) = m^2 \widetilde{v}_\mu, \tag{2.6}$$

$$\lambda_1 D_\alpha D^\alpha \widetilde{v}_\mu = m^2 \widetilde{v}_\mu, \tag{2.7}$$

$$\lambda_3 D_\mu (D_\nu \widetilde{v}^\nu) = m^2 \widetilde{v}_\mu. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.6)–(2.8), при определенных выборах функций A_i, C_1, C_2, инвариантны относительно более широких групп, чем исходные линейные уравнения (2.1)–(2.3). Так, например, в класс уравнений (2.6) входит релятивистский аналог уравнения Эйлера

$$v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{2.9}$$

которое инвариантно относительно бесконечномерной алгебры. Исходное линейное уравнение (2.1) не инвариантно относительно бесконечномерной алгебры. Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (2.1) является группа $P(1,3)$.

Аналогичным путем можно получить уравнение типа Навье–Стокса. Для этого нужно исходить из линейного уравнения теплопроводности

$$(\partial_0 + \lambda_1 \partial_k \partial_k) v_a = \lambda_2 v_a, \qquad a = 1, 2, 3, \tag{2.10}$$

v_a — компоненты вектора скорости $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Сделав в (2.10) замену

$$\partial_0 \to D_0 = A_1(v^2)\partial_0 + A_2(v^2), \tag{2.11}$$

$$\partial_k \to D_k = A_{kl}(v^2)\partial_l + B_{kl}(v^2) v_l, \qquad k, l = 1, 2, 3, \tag{2.12}$$

получим

$$D_0 v_a + \lambda_1 D_k D_k v_a = \lambda_2 v_a. \tag{2.13}$$

В (2.11), (2.12) A_1, A_2, A_{kl}, B_{kl} — произвольные дифференцируемые функции от скаляра $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

Среди множества уравнений (2.13) содержится уравнение типа Навье–Стокса

$$D_0 v_a + v_k \frac{\partial v_a}{\partial x_k} + \lambda_1 \partial_k \partial_k v_a = 0. \tag{2.14}$$

На множестве уравнений (2.14) реализуется нелинейное представление группы Галилея $G(1,3)$ [2].

Замечание 2. Если предполагать, что скорость жидкости меньше скорости в вакууме, то, видимо, члены типа $m^2 v_\mu$ должны присутствовать в уравнениях движения для релятивистской жидкости.

Замечание 3. Указанным способом получается нелинейное уравнение теплопроводности

$$D_0 u + D_k D_k u = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{2.15}$$

где

$$D_0 = A_0(x, u)\partial_0 + A_1(x, u), \tag{2.16}$$

$$D_k = A_{kl}(x, u)\partial_l + B_{kl}(x, u)\partial_l u, \tag{2.17}$$

A_0, A_1, A_{kl}, B_{kl} — произвольные дифференцируемые функции u, x, которое имеет более симметричную форму, чем общепринятое нелинейное уравнение теплопроводности

$$\partial_0 u + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{ c(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} = 0.$$

Если в (2.15) u — комплексная функция и в формулах (2.15), (2.16) сделать замену $\partial_0 \to p_0 = i\partial_0$, $\partial_k \to p_k = -i\partial_k$, то получим уравнение

$$\mathcal{P} u + \mathcal{P}_k \mathcal{P}_k u = 0, \tag{2.18}$$

где $\mathcal{P}_0 = D_0$ $(\partial_0 \to p_0)$, $\mathcal{P}_k = D_k$ $(\partial_k \to p_k)$, которое является обобщением линейного уравнения Шредингера.

2. Перейдем к построению уравнений движения для релятивистской жидкости и электромагнитного поля через спиноры. Предположим, что макроскопическая жидкость представляет собой некоторое образование (структуру) из взаимодействующих спинорных частиц (полей). Тогда один из простейших путей получения уравнения движения для спинорной жидкости состоит в следующем. Построим вектор скорости жидкости из спиноров по формуле

$$v_\mu = A_1(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi + A_2(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi. \tag{2.19}$$

Взяв, например, в качестве макроскопического уравнения движения релятивистской жидкости уравнение (2.9) (или какое-либо другое пуанкаре-инвариантное уравнение), получим

$$(A_1\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi + A_2\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\nu\Psi)\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A_1\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi + A_2\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi) = 0. \tag{2.20}$$

С помощью аналогичного приема строятся уравнения движения для электромагнитного поля из спиноров. Предположим, что макроскопическое электромагнитное поле — образование (структура) элементарных спинорных полей. Кроме того, предположим, что тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и вектор тока строятся из спиноров согласно формулам

$$F_{\mu\nu} = N_1(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}S_{\mu\nu}\Psi + N_2(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_4S_{\mu\nu}\Psi, \tag{2.21}$$

$$j_\mu = K_1(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}S_{\mu 5}\Psi + K_2(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_4S_{\mu 5}\Psi. \tag{2.22}$$

Подставляя (2.21), (2.22) в уравнение Максвелла

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu, \qquad \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0, \tag{2.23}$$

получаем уравнение движения для электромагнитного поля, построенного из спиноров.

Укажем еще на один способ построения тензор-матрицы $F_{\mu\nu}$ и вектор-матрицы A_μ через спинор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \lambda(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu), \tag{2.24}$$

$$A_\mu = \widetilde{K}_1(\bar{\Psi}\Psi)\gamma_\nu\bar{\Psi}S_{\mu\nu}\Psi + K_2(\bar{\Psi}\Psi)\gamma_\nu\bar{\Psi}\gamma_4S_{\mu\nu}\Psi. \tag{2.25}$$

Для определения спинора Ψ можно взять, например, уравнение вида

$$\partial_\alpha p^\alpha A_\mu - \partial_\mu(\partial_\alpha A^\alpha) = 0 \tag{2.26}$$

или уравнение (2.9),полученное из соответствующего лагранжиана.

Замечание 4. Если в (2.23) сделать замены

$$\partial_\mu \to D_\mu = A_1\partial_\mu + A_2F_{\mu\nu}\partial_\nu + A_3\partial_\nu F_{\mu\nu},$$
$$j_\mu \to A_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta},$$

где A_1, A_2, A_3, $A_{\mu\alpha\beta}$ — произвольные функции от инвариантов электромагнитного поля

$$W_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad W_2 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta},$$

то получим нелинейное обобщение уравнений Максвелла.

В заключение приведем нелинейное уравнение для скалярного поля $u(x)$, построенного из спиноров

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu u(x) = \widetilde{M}^2 u(x), \qquad u = \bar\Psi\Psi,\\
&\mathcal{P}_\mu = A_0(\bar\Psi\Psi)p_\mu + A_1(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_\mu\Psi + A_2\bar\Psi\gamma_4\gamma_\mu\Psi,\\
&\widetilde{M}^2 = m^2 + \lambda_1(\bar\Psi\Psi)^{n_1} + \lambda_2\left(\bar\Psi\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar\Psi}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\Psi\right)^{n_2},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где λ_1, λ_2, n_1, n_2 — произвольные постоянные.

Замечание 5. Все сказанное выше переносится и на уравнение высокого порядка. При этом в качестве исходных линейных уравнений можно выбрать уравнения

$$\begin{aligned}
&\Box u + \lambda_2\Box^2 u + \cdots + \lambda_n\Box^n u = 0,\\
&(p_0 + \lambda p_a p_a)u + \lambda_2(p_0 + \lambda p_a p_a)^2 u + \cdots + \lambda_n(p_0 + \lambda p_a p_a)^n u = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Последнее уравнение [2] является естественным обобщением основного уровня движения квантовой механики.

Детальному анализу НДУЧП, полученных в этом параграфе, будут посвящены отдельные публикации.

§ 3. О новой модели взаимодействия спинорного и скалярного полей

Общепринято считать, что взаимодействие скалярного и спинорного полей описывается с помощью добавления нелинейных слагаемых в свободные уравнения Клейна–Гордона–Фока (КПФ) и Дирака. При этом получаем зацепленную нелинейную систему уравнений второго порядка. Здесь мы предложим систему пяти уравнений первого порядка для описания взаимодействия скалярного и спинорного полей.

Для описания скалярного поля будем использовать не уравнение КГФ, а нелинейное релятивистское уравнение Гамильтона

$$\partial_\mu u\partial^\mu u = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = -m^2, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

которое получается из релятивистского соотношения для энергии и импульса $E^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2$ заменой

$$E \to i\frac{\partial u}{\partial x_0}, \qquad p_a \to -i\frac{\partial u}{\partial x_a}.$$

Уравнение (3.1) инвариантно относительно вращений и сдвигов в пятимерном псевдоевклидовом пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3, u) [2].

Одна из простых возможностей описания взаимодействия скалярного поля u со спинорным полем Ψ состоит в рассмотрении системы

$$\partial_\mu u\partial^\mu u = -M^2, \tag{3.2}$$

$$\gamma_\mu p^\mu\Psi - m_1\Psi + \lambda_3 u(\bar\Psi\Psi) + \lambda_4\frac{\partial u}{\partial x^\nu}\gamma^\nu\Psi = 0, \tag{3.3}$$

где

$$M^2 = m^2 + \lambda_1(\bar\Psi\Psi)^{n_1} + \lambda_2(\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\bar\Psi\gamma^\mu\Psi)^{n_2}. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.2) легко обобщается с помощью замены типа (1.8): $\partial_\mu \to D_\mu$. В уравнении (3.2) “масса” M скалярного поля порождается спинорным полем.

По-видимому, представляет интерес и такая пуанкаре-инвариантная система уравнений

$$p_0 u = \left\{p_a u p_a u + M^2\right\}^{1/2}, \tag{3.5}$$

$$\gamma_\mu p^\mu\Psi - m\Psi + \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3}\Psi = 0. \tag{3.6}$$

Замечание 5. Системы уравнения (3.2)–(3.6) совершенно не изучены; даже простейшее линейное уравнение КГФ с нелинейной связью

$$p_\mu p^\mu u = m_1^2 u, \tag{3.7}$$

$$p_0 u = \left\{p_a u p_a u + m_2^2\right\}^{1/2}. \tag{3.8}$$

Уравнение типа (3.8) [1] может быть использовано для выделения из множества решений (3.7) только таких, которые бы имели, например, положительную энергию. Положив в основу уравнения (3.1) или (3.8), можно исследовать задачу о движении скалярной частицы во внешнем электромагнитном поле (замена $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$) и “внешнем” спинорном поле (замена $p_\mu \to p_\mu + \lambda\bar\Psi\gamma_\mu\Psi$).

§ 4. О неразмножаемых семействах решений нелинейных уравнений

Нелинейные дифференциальные уравнения, инвариантные относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, конформной группы $C(1,3)$, группы Галилея $G(1,3)$ или более общих групп, обладают тем важнейшим свойством, что если известно хотя бы одно частное решение (иногда даже тривиальное), то с помощью групповых преобразований можно построить целое семейство точных решений [2, 3].

Обозначим через G — максимальную локальную группу инвариантности НДУЧП. Пусть M — некоторое множество решений НДУЧП.

Определение 1. *Множество решений M — назовем неразмножаемым относительно G, если оно инвариантно относительно G.*

Определение 2. *Множество M решений НДУЧП назовем размножаемым, если оно инвариантно относительно подгруппы $G_1 \subset G$.*

В этом параграфе приведем в явном виде несколько семейств неразмножаемых решений линейного и нелинейного уравнения Дирака. Широкий класс неразмножаемых решений получен в [4].

1. *Неразмножаемые решения уравнения Дирака.* Рассмотрим уравнение

$$\gamma_\mu p^\mu\Psi + \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3}\Psi = 0. \tag{4.1}$$

Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (4.1) является группа $G = C(1,3)$ — 15-параметрическая группа Ли.

В линейном случае ($\lambda = 0$) простейшие множества M задаются формулами:

$$\Psi = \frac{\gamma x + \gamma a}{s^2}\chi, \tag{4.2}$$

χ — постоянный спинор, $s^2 = x^2 + 2ax + a^2 \neq 0$, $x^2 = x_\mu x^\mu$, $ax = a_\mu x^\mu$, $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ — параметры, $\gamma x = \gamma_\mu x^\mu$, $\gamma a = \gamma_\mu a^\mu$;

$$\Psi = (\gamma x + \gamma a)s^{-2}(\gamma b)\chi(\omega_1), \tag{4.3}$$

$\omega_1 = \frac{bx+ba}{s^2}$, $b^2 = b_\mu b^\mu = 0$, χ — произвольный спинор, зависящий только от одной переменной ω_1;

$$\Psi = \frac{\gamma x + \gamma a}{s^2}\left\{(\gamma b + \gamma d)\chi_1(\omega_2) + (\gamma b - \gamma c)\chi_2(\omega_3)\right\}, \tag{4.4}$$

$\omega_2 = \frac{(bx+dx)+(b+d)a}{s^2}$, $\omega_3 = \frac{(b-d)x+(b-d)a}{s^2}$, $ab = a_\nu b^\nu = 0$, $a^2 = b^2 = 1$, χ_1, χ_2 — произвольные спиноры, зависящие только от инвариантных переменных.

В нелинейном случае ($\lambda \neq 0$) простейшие неразмножаемые множества решений задаются формулами

$$\Psi = \frac{\gamma x + \gamma a}{s^2}\exp\left\{-i\lambda\frac{\gamma b}{b^2}(\bar\chi\chi)^{1/3}\frac{bx+ba}{s^2}\right\}\chi, \tag{4.5}$$

$$\Psi = A(s^2)^{-3/4}\left\{\frac{\gamma x + \gamma a}{(s^2)}^{1/2} \pm i\gamma_0^2\right\}, \tag{4.6}$$

$A = \frac{1}{4}\left\{\pm 3\lambda(\bar\chi\chi)^{1/3}\right\}^{-3/2}$, χ — постоянный спинор.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при любом преобразовании из группы $C(1,3)$ многопараметрические семейства (4.2)–(4.6) являются неразмножаемыми.

§ 5. О некоторых способах решения нелинейных пуанкаре-инвариантных уравнений

В этом параграфе укажем простые приемы, которые позволяют строить семейства частных решений нелинейных волновых уравнений.

1. Ради конкретности рассмотрим нелинейное уравнение Даламбера ($F(u) = u^3$)

$$p_\mu p^\mu u + \lambda F(u) = \partial_0^2 u - \partial_1^2 u - \partial_2^2 u - \partial_3^2 u + \lambda F(u) = 0, \tag{5.1}$$

НДУЧП (1) поставим в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\partial_0^2 u + \lambda F(u) = 0, \qquad F(u) = u^3, \tag{5.2}$$

которое получается из (5.1) вычеркиванием членов $\partial_1^2 u$, $\partial_2^2 u$, $\partial_3^2 u$. Уравнение (5.2) имеет, помимо хорошо известных решений в классе эллиптических функций, простое частное решение

$$u_1(x) = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}x_0^{-1}, \qquad \lambda \neq 0. \tag{5.3}$$

Воспользовавшись преобразованиями из группы Лоренца $x'_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu$, размножаем решение (5.3) до решений, зависящих от всех переменных (x_0, x_1, x_2, x_3)

$$u_2 = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}(ax)^{-1}, \qquad a_\mu a^\mu = 1. \tag{5.4}$$

Используя конформные преобразования

$$x'_\mu = \sigma^{-1}(x_\mu + c_\mu x^2), \qquad \sigma = 1 + 2c_\nu x^\nu + c^2x^2, \tag{5.5}$$

размножаем решения (5.4) до семипараметрического семейства решений

$$u_3 = \sigma^{-1/2}u_2(x_0 \to x'_0, x_1 \to x'_1, x_2 \to x'_2, x_3 \to x'_3). \tag{5.6}$$

Очевидно, что уравнению (5.1) можно сопоставить обыкновенное уравнение вида

$$-\partial_1^2 u + \lambda u^3 = 0. \tag{5.7}$$

В этом случае получим такие семейства уравнения (5.1):

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}(a_\alpha x^\alpha)^{-1}, \qquad a_\mu a^\mu = -1, \\ &\widetilde{u}_3 = \sigma^{-1/2}\widetilde{u}_2(x_\mu \to x'_\mu). \end{aligned} \tag{5.8}$$

2. С помощью указанного приема построим решения нелинейной системы Дирака (2) с нелинейностью $F_2(\bar\Psi\Psi) = \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3}$. Расмотрим систему нелинейных обыкновенных уравнений вида

$$i\gamma_0\partial_0\Psi + \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3}\Psi = 0. \tag{5.9}$$

Общее решение (5.9) задается формулой

$$\Psi_1 = \exp\{-i\lambda\gamma_0x_0\}\chi, \qquad \chi \text{ — постоянный спинор.} \tag{5.10}$$

Размножая решения с помощью преобразований Лоренца и конформных преобразований (5.5), получаем следующее неразмножаемое семейство решений:

$$\Psi_2 = \frac{1-(\gamma x)(\gamma c)}{\sigma^2}\exp\left\{i\lambda(\gamma a)\frac{ax-(ac)x^2}{\sigma}\right\}\chi. \tag{5.11}$$

Следует отметить, что размножать решения НДУЧП можно не только с помощью преобразований, образующих группу Ли. Так, например, уравнения

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu + \lambda_1(x_\alpha x^\alpha)^{-1/2}\right\}\Psi = 0, \tag{5.12}$$

$$\Box u + \lambda_1(x_\alpha x^\alpha)^{-1}u = 0 \tag{5.13}$$

не инвариантны относительно конформных преобразований (5.5), но инвариантны относительно инверсии

$$x_\mu \to x'_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}, \qquad x^2 \neq 0. \tag{5.14}$$

Преобразования (5.14) не образуют группу Ли. Если Ψ_1 и u_1 — решения уравнений (5.12), (5.13), то новые решения Ψ_2 и u_2 строятся по формулам

$$\Psi_2 = \frac{\gamma x}{(x^2)^2}\Psi_1\left(x_0 \to \frac{x_0}{x^2}, x_1 \to \frac{x_1}{x^2}, x_2 \to \frac{x_2}{x^2}, x_3 \to \frac{x_3}{x^2}\right), \tag{5.15}$$

$$u_2 = \frac{1}{x^2}u_1\left(x_0 \to -\frac{x_0}{x^2}, x_1 \to -\frac{x_1}{x^2}, x_2 \to -\frac{x_2}{x^2}, x_3 \to -\frac{x_3}{x^2}\right). \tag{5.16}$$

Формулы (5.15), (5.16) можно рассматривать как обобщение известной теоремы Кельвина для уравнения Лапласа на линейные и нелинейные волновые уравнения. Описанный выше прием пригоден и для отыскания частных решений галилеево-инвариантных уравнений типа (2.18).

Другой способ построения частных решений НДУЧП состоит в замене многомерного уравнения (5.1) системой двумерных уравнений вида

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u + F(u) = 0, \tag{5.17}$$

$$\partial_2^2 u + \partial_3^2 u = 0. \tag{5.18}$$

Двумерную систему (5.17), (5.18) легче решить, чем исходное многомерное уравнение (5.1). Построив частные решения системы (5.17), (5.18), размножаем их до неразмножаемых решений уравнения (5.1). В том случае, когда $F(u) = \lambda \exp u$, уравнение (5.17) имеет общее решение, зависящее от двух произвольных функций. Подставив эти решения в (5.18), получим уравнение для определения двух произвольных функций. Если $F(u) = \sin u$, уравнение (5.17), как известно, имеет солитонные решения.

Третий способ отыскания частных решений уравнения (5.1) состоит в его “линеаризации”. Уравнение (5.1) заменяем на линейное уравнение с “потенциалом”

$$\Box u + \lambda V(x)u = 0 \tag{5.19}$$

или

$$\Box u = \lambda V(x). \tag{5.20}$$

“Потенциал” $V(x)$ можно конкретизировать либо из требования, инвариантности (5.19) относительно, например, конформных преобразований, либо из физических соображений. Если в уравнении (5.1) $F(u) = u^3$, то естественно требовать, чтобы и уравнение (5.19) было инвариантно относительно конформных преобразований (5.5). Это приводит к тому, что $V(x) = (x_\alpha x^\alpha)^{-1} = u^2$. Построив решения уравнения (5.19), получим решения исходного нелинейного уравнения (5.1).

Для отыскания решений мы, обычно, используем анзатц [1–5]

$$\Psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{5.21}$$

где $A(x)$ — матрица 4×4, $\varphi(\omega)$ — вектор-столбец $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, каждая компонента которого зависит только от одной или двух инвариантных переменных $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Более общий анзатц для уравнения Дирака имеет вид

$$b_{\mu\nu}(x, \Psi, \Psi^*)\Psi_\nu = a_{\mu\nu}(x, \varphi^*, \varphi)\varphi_\nu(\omega), \qquad \mu, \nu = \overline{0, 3}, \tag{5.22}$$

функции $b_{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu}$ определяются из условия “разделения” переменных. С помощью анзатца (5.18) могут быть получены решения, которые определяют спинор Ψ неявным образом, т.е. решения задаются в виде системы четырех (или восьми для Ψ и Ψ^*) уравнений

$$N_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Примером неявного анзатца может быть такое соотношение:

$$\left\{ f_1(x)\gamma_\alpha x^\alpha + f_2(x)(\bar\Psi\Psi) + f_3(x)x^\alpha\bar\Psi\gamma_\alpha\Psi + f_4(x)\gamma^\alpha\bar\Psi\gamma_\alpha\Psi \right\}\Psi =$$
$$= f_5(x)\gamma^\alpha x_\alpha\varphi(\omega) + f_6(x)\gamma^\alpha(\bar\varphi\gamma_\alpha\varphi)\varphi(\omega),$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_6$ — произвольные гладкие функции.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouvil, D’alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
4. Фущич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей, в кн.: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 20–30.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions, *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, № 2–3, 189–191.

Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК

В работе изучаются подалгебры обобщенной алгебры Евклида $\mathcal{L}E(n)$ и обобщенной алгебры Галилея $\mathcal{L}G(n)$ для произвольного $n \geq 2$. Показано, что полное описание подалгебр алгебры $\mathcal{L}E(n)$ сводится к задаче классификации относительно $O(n)$-сопряженности подалгебр ортогональной алгебры $\mathcal{L}O(n)$. Выделены все подалгебры $\mathcal{L}O(n)$, обладающие только расщепимыми расширениями в $\mathcal{L}E(n)$ и в изохронной алгебре Галилея $\mathcal{L}\bar{G}(n)$. Доказывается теорема о строении подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$.

Изложен алгоритм классификации относительно $G(n)$-сопряженности расщепимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$. Полностью описаны относительно $G(n)$-сопряженности максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ и расширенной алгебры Галилея $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$.

Полностью проведена классификация всех подалгебр алгебр Евклида $\mathcal{L}E(5)$ и $\mathcal{L}E(6)$, а также подалгебр алгебр $\mathcal{L}G(3)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$.

Введение

Пусть $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Группа Галилея $G(n)$ определяется как множество всех преобразований вида

$$\vec{x}\,' = W\vec{x} + t\vec{v} + \vec{u},$$
$$t' = t + b,$$

где t — время, W — ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Групповое умножение двух произвольных элементов $(W, b, \vec{v}, \vec{u})$, $(W', b', \vec{v}\,', \vec{u}\,')$ группы $G(n)$ определяется формулой

$$(W, b, \vec{v}, \vec{u}) \cdot (W', b', \vec{v}\,', \vec{u}\,') = (WW', b + b', W\vec{v}\,' + \vec{v}, W\vec{u}\,' + \vec{u} + b'\vec{v}).$$

Групповое умножение может быть записано как матричное произведение, если представить $g = (W, b, \vec{v}, \vec{u})$ в виде матрицы порядка $n + 2$:

$$g = \begin{pmatrix} W & \vec{v} & \vec{u} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что алгебра Ли $\mathcal{L}G(n)$ группы $G(n)$ допускает изоморфное представление матрицами

$$\begin{pmatrix} S & \vec{v}_1 & \vec{u}_1 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где S — кососимметрическая матрица порядка n, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_1$ — произвольные n-мерные векторы, b_1 — вещественное число. Обозначим через J_{ab} $(a < b)$, P_a, G_a

Препринт 85.19, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 46 с.

$(a, b = \overline{1,n})$ соответственно генераторы поворотов, пространственных трансляций, чистых преобразований Галилея, а через P_0 — генератор временной трансляции. Эти генераторы образуют базис алгебры $\mathcal{L}G(n)$ и связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \qquad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b,$$
$$[P_a, P_b] = 0, \qquad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b, \qquad [G_a, G_b] = 0, \qquad [P_a, G_b] = 0,$$
$$[P_0, J_{ab}] = [P_0, P_a] = 0, \qquad [G_a, P_0] = P_a \quad (a, b, c = \overline{1,n}).$$

Расширенная группа Галилея $\widetilde{G}(n)$ определяется как центральное расширение мультипликативной группы комплексных чисел, равных по модулю единице, с помощью группы $G(n)$. Алгебра $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$, называемая расширенной алгеброй Галилея, получается из алгебры $\mathcal{L}G(n)$, если для генератора центра M положить $[G_a, P_a] = M$, а все остальные коммутационные соотношения оставить без изменения. В дальнейшем генераторы алгебр $\mathcal{L}G(n)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ будем обозначать одними и теми же символами.

Описание подгрупповой структуры группы Ли используется при решении ряда задач математической и теоретической физики: разделение переменных в линейных дифференциальных уравнениях в частных производных [1], построение точных частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [2–4], редукция представлений группы на подгруппы [5–7] .

Алгебра $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$ является одной из важных подалгебр алгебры Пуанкаре $\mathcal{L}P(1,4)$, которую в работах [8–11] было предложено использовать для описания движения частиц переменной массы и переменного спина. В [12] связные подгруппы группы $G(3)$ были применены в качестве групп инвариантности электромагнитных полей. Группа Галилея является подгруппой группы симметрии свободного уравнения Шредингера [13, 14], и поэтому может быть использована для классификации потенциалов и граничных условий. В работе [15] подгруппы евклидовой группы $E(3)$ являющейся подгруппой $G(3)$, были использованы для изучения нарушений симметрии в нерелятивистской квантовой механике скалярной и спинорной частиц.

В [16] проведено исследование относительно $G(3)$-сопряженности подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(3)$. Анализ списка подалгебр, полученных в этой работе, показывает, что некоторые из них являются сопряженными относительно $G(3)$.

В данной работе исследуется для произвольного $n \geq 2$ структура алгебры $\mathcal{L}G(n)$ относительно $G(n)$-сопряженности. При описании представителей классов $G(n)$-сопряженных подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$ мы используем предложенный в [17] общий метод нахождения классов сопряженных подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным абелевым идеалом. Дадим краткую характеристику работы.

В § 1 изучены разрешимые подалгебры обобщенной алгебры Евклида $\mathcal{L}E(n)$. Показано, что полное описание таких подалгебр относительно $E(n)$-сопряженности сводится к классификации относительно $O(n)$-сопряженности подалгебр подалгебры Картана алгебры $\mathcal{L}O(n)$.

В § 2 выделены подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(n)$, обладающие только расщепимыми расширениями в $\mathcal{L}E(n)$ и в изохронной алгебре Галилея $\mathcal{L}\bar{G}(n)$. В этом же параграфе доказывается теорема о строении подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$.

В § 3, являющимся логическим продолжением предыдущих параграфов, изложен алгоритм классификации относительно $G(n)$-сопряженности расщепимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$. Полностью описаны относительно $G(n)$-сопряженности максимальные абелевы подалгебры алгебр $\mathcal{L}G(n)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$.

§ 4 посвящен классификации всех подалгебр алгебр Евклида $\mathcal{L}E(5)$ и $\mathcal{L}E(6)$, а в § 5 мы находим представители классов $G(3)$-сопряженных подалгебр алгебр $\mathcal{L}G(3)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$.

Отметим, что в следующей статье будет изложена классификация всех подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(4)$ и подалгебр с некоторыми ограничениями алгебры $\mathcal{L}G(5)$.

§ 1 Разрешимые подалгебры обобщенной алгебры Евклида

Пусть $\langle X_1, X_2, \ldots, X_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли с образующими $X_1, X_2, \ldots, X_s$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел; $\mathfrak{N} = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$; $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{J}(n) = \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$ — подалгебра Картана алгебры $\mathcal{L}O(n)$ группы $O(n)$ ортогональных преобразований n-мерного евклидова пространства, $m = [n/2]$;

$$\Gamma(n) = \left\{ \sum_{1}^{m} \gamma_i J_{2i-1,2i} \mid \gamma_i = 0, \pm 1 \right\}; \qquad \left| \sum_{1}^{m} \gamma_i J_{2i-1,2i} \right| = \sum_{1}^{m} |\gamma_i| J_{2i-1,2i}.$$

Если $X_a, X_b \in \Gamma(n)$, то $|X_a| \cap |X_b|$ — сумма общих слагаемых элементов $|X_a|$, $|X_b|$; $X_a \cap X_b = 0$, если $|X_a|$ и $|X_b|$ не имеют общих слагаемых.

Алгебра Евклида $\mathcal{L}E(n)$ n-мерного пространства определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad} J_{bc} + \delta_{bc} J_{ad} - \delta_{ac} J_{bd} - \delta_{bd} J_{ac},$$
$$[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b, \qquad [P_a, P_b] = 0, \qquad J_{ba} = -J_{ba} \quad (a, b, c = \overline{1, n}).$$

Предложение 1.1. *Алгебра $J\mathfrak{J}(n) = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{J}(n)$ является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $\mathcal{L}E(n)$. Каждая максимальная разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$ сопряжена с $J\mathfrak{J}(n)$.*

Доказательство. Хорошо известно, что $\mathcal{L}O(n)$ обладает относительно $O(n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с подалгеброй Картана $\mathfrak{J}(n)$. Так как $\mathfrak{N}$ — радикал $\mathcal{L}E(n)$, то каждая максимальная разрешимая подалгебра содержит $\mathfrak{N}$, а потому сопряжена с $J\mathfrak{J}(n)$. Предложение доказано.

Лемма 1.1. *Одномерные подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(n)$ исчерпываются относительно $O(n)$-сопряженности алгебрами*

$$\langle J_{12} + \alpha_1 J_{34} + \cdots + \alpha_{m-1} J_{2m-1,2m}\rangle,$$

где $m = [n/2]$, $0 \le \alpha_{m-1} \le \cdots \le \alpha_1 \le 1$. Две такие алгебры $O(n)$-сопряжены тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых базисных векторах $J_{2l-1,2l}$ $(l = \overline{2, m})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$ и $\dim \mathfrak{A} = 1$, то $\mathfrak{A}$ сопряжена с алгеброй $\langle \beta_1 J_{12} + \beta_2 J_{34} + \cdots + \beta_m J_{2m-1,2m}\rangle$. Пусть C — матрица, получаемая из единичной в результате выполнения над столбцами такой подстановки

$$\begin{pmatrix} 2s-1 & 2s & 2t-1 & 2t \\ 2t & 2t-1 & 2s & 2s-1 \end{pmatrix} \quad (s < t).$$

Автоморфизм $\mathcal{L}O(n)$, соответствующий матрице C, оставляет без изменений генераторы $J_{2a-1,2a}$ ($a \neq s$, $a \neq t$) и отображает $J_{2s-1,2s}$ в $-J_{2t-1,2t}$, а $J_{2t-1,2t}$ — в $-J_{2s-1,2s}$. Вследствие этого можно предполагать, что $\beta_1 \neq 0$ и если $\beta_c = 0$ для $1 < c < m$, то $\beta_i = 0$ для всех $i > c$. Умножив генератор алгебры $\mathfrak{A}$ на β_1^{-1}, получим, что $\mathfrak{A} = \langle J_{12}+\alpha_1 J_{34}+\cdots+\alpha_{m-1}J_{2m-1,2m}\rangle$, где все коэффициенты, следующие за нулевым коэффициентом, суть нулевые. Автоморфизм $\mathcal{L}O(n)$, соответствующий матрице

$$\operatorname{diag}\{\underbrace{1,\ldots,-1}_{2s+1},\ldots,1\},$$

изменяет знак α_s и оставляет без изменений остальные коэффициенты. Следовательно, можно предполагать, что $\alpha_i \geq 0$ для $i = \overline{1, m-1}$.

Если $\alpha_1 > 1$, то, переставив J_{12} и J_{34}, подучим алгебру

$$\langle \alpha_1 J_{12} + J_{34} + \alpha_2 J_{56} + \cdots + \alpha_{m-1}J_{2m-1,2m}\rangle = \\ = \langle J_{12} + \alpha_1^{-1}J_{34} + \alpha_1^{-1}\alpha_2 J_{56} + \cdots + \alpha_1^{-1}\alpha_{m-1}J_{2m-1,2m}\rangle.$$

На основании этого можно всегда допускать, что $1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{m-1} \geq 0$.

Так как характеристический многочлен матрицы

$$\lambda(J_{12} + \alpha_1 J_{34} + \cdots + \alpha_{m-1}J_{2m-1,2m})$$

равен

$$(x^2+\lambda^2)(x^2+\alpha_1^2\lambda^2)\cdots(x^2+\alpha_{m-1}^2\lambda^2),$$

то из сопряженности алгебр

$$\langle J_{12} + \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i J_{2i+1,2i+2}\rangle, \qquad \langle J_{12} + \sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i J_{2i+1,2i+2}\rangle$$

вытекает, что $1 = \lambda^2\alpha_j^2$, $\gamma_i^2 = \lambda^2\alpha_{n_i}^2$ ($i = \overline{1, m-1}$, $j \neq i$). Отсюда получаем, что $\lambda^2 = 1$ и $\alpha_i = \gamma_i$ для всех $i = \overline{1, m-1}$. Лемма доказана.

Предложение 1.2. *Ненулевая абелева подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(n)$ сопряжена с алгеброй $\mathfrak{A}(p,0;0) = \langle J_{2i-1,2i} \mid i = \overline{1,p}\ \rangle$ или с алгеброй $\mathfrak{A}(p,q;\alpha)$, обладающей базисом*

$$\left\{ J_{2i-1,2i} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\alpha_{ij}J_{2j-1,2j} \mid i = \overline{1,p} \right\}, \tag{1.1}$$

где коэффициенты α_{ij} удовлетворяют таким условиям:

1) $1 \geq \alpha_{1,p+1} \geq \alpha_{1,p+2} \geq \alpha_{1l_1} > 0, \quad \alpha_{1,l_1+1} = \cdots = \alpha_{1m} = 0;$
$1 \geq \alpha_{2,l_1+1} \geq \alpha_{2,l_1+2} \geq \alpha_{2l_2} > 0, \quad \alpha_{2,l_2+1} = \cdots = \alpha_{2m} = 0;$
$1 \geq \alpha_{s,l_{s-1}+1} \geq \alpha_{s,l_{s-1}+2} \geq \cdots \geq \alpha_{sl_s} > 0, \quad \alpha_{s,l_s+1} = \cdots = \alpha_{sm} = 0,$
$\alpha_{ij} = 0$ *при* $i > s$, $j > q+p = l_s$;

2) *если в i-ой строке подряд записано несколько равных коэффициентов ($i = \overline{1,t}$), то в $t{+}1$-ой строке коэффициенты с теми же номерами расположены в порядке убывания;*

3) *число ненулевых элементов i-ой строки не меньше числа ненулевых элементов $i+1$-ой строки* ($i=\overline{1,p-1}$).

Доказательство. Согласно лемме 1.1 ненулевая подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры Картана $\mathfrak{J}(n)$ обладает генератором $J_{12}+\alpha_2 J_{34}+\cdots+\alpha_m J_{2m-1,2m}$ ($m=[n/2]$). Если $\dim\mathfrak{A}>1$, то по лемме 1.1 в $\mathfrak{A}$ существует генератор $J_{34}+\beta_3 J_{56}+\cdots+\beta_m J_{2m-1,2m}$. Продолжая эти рассуждения, приходам к выводу о существовании в $\mathfrak{A}$ базиса

$$\left\{J_{2i-1,2i}+\sum_{j=p+1}^{m}\alpha_{ij}J_{2j-1,2j}\mid i=\overline{1,p}\right\},$$

где $p=\dim\mathfrak{A}$. Используя рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 1.1, получаем, что построенный базис сопряжен с базисом (1.1). Предложение доказано.

Лемма 1.2. *Пусть $X=\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_sX_s$, где $X_1,\ldots,X_s\in\Gamma(n)$, $X_i\cap X_j=0$ при $i\neq j$, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ — такие ненулевые вещественные числа, что $\alpha_i^2\neq\alpha_j^2$ при $i\neq j$. Если $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$ и $[X,\mathfrak{M}]\subset\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}=[X_1,\mathfrak{M}]\oplus\cdots\oplus[X_s,\mathfrak{M}]\oplus\widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X_i,\widetilde{\mathfrak{M}}]=0$ для $i=\overline{1,s}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по s. Пусть $X_1=\sum_{1}^{b}\pm J_{2i_j-1,2i_j}$. Так как $[X_1,\mathfrak{M}]$ — проекция $\mathfrak{M}$ на $\langle P_{2i_1-1},P_{2i_1},\ldots,P_{2i_b-1},P_{2i_b}\rangle$, то $\mathfrak{M}=[X_1,\mathfrak{M}]\oplus\widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X_1,\widetilde{\mathfrak{M}}]=0$.

Пусть $s>1$. Если $Y\in\mathfrak{M}$, то $Y=Y_1+\cdots+Y_s+\widetilde{Y}$, где $Y_j=-[X_j,[X_j,Y]]$, $[X_j,\widetilde{Y}]=0$ ($j=\overline{1,s}$). Так как

$$-[X,[X,Y]]=\alpha_1^2Y_1+\alpha_2^2Y_2+\cdots+\alpha_s^2Y_s,$$

то

$$-[X,[X,Y]]-\alpha_1^2Y=(\alpha_2^2-\alpha_1^2)Y_2+\cdots+(\alpha_s^2-\alpha_1^2)-\alpha_1^2\widetilde{Y}.$$

Пусть $\mathfrak{M}'=\{Y\in\mathfrak{M}\mid[X_1,Y]=0\}$. Очевидно, $\mathfrak{M}'$ инвариантно относительно $\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_sX_s$, а потому к нему применимо индуктивное предположение. Поскольку $[X,[X,Y]]+\alpha_1^2Y\in\mathfrak{M}'$, то $Y_2,\ldots,Y_s$, $\widetilde{Y}\in\mathfrak{M}'$. Отсюда вытекает, что $Y_1,Y_2,\ldots,Y_s,\widetilde{Y}\in\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $X=X_1+X_2$, $X'=X_3+X_4$, где $X_i\in\Gamma(n)$ ($i=\overline{1,4}$), $|X_1|=|X_3|$, $X_i\cap X_j=0$ при $i<j$, $(i,j)\neq(1,3)$. Если $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно $\operatorname{ad}X$, $\operatorname{ad}X'$, то $\mathfrak{M}=[X_1,\mathfrak{M}]\oplus[X_2,\mathfrak{M}]\oplus[X_4,\mathfrak{M}]\oplus\widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X,\widetilde{\mathfrak{M}}]=0$, $[X',\mathfrak{M}']=0$.*

Доказательство. По лемме 1.2 $\mathfrak{M}=[X,\mathfrak{M}]\oplus\mathfrak{M}'$, где $[X,\mathfrak{M}']=0$. Так как $X_i\cap X_j=0$ при $i<j$, $(i,j)\neq(1,3)$, то $[X',[X,\mathfrak{M}]]=[X_3,[X_1,\mathfrak{M}]]=[X_1,\mathfrak{M}]$. Но тогда $[X,\mathfrak{M}]=[X_1,\mathfrak{M}]\oplus[X_2,\mathfrak{M}]$. Поскольку $[X,\mathfrak{M}']=0$, то $[X',\mathfrak{M}']=[X_4,\mathfrak{M}']$, а потому $\mathfrak{M}'=[X_4,\mathfrak{M}]\oplus\widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X,\widetilde{\mathfrak{M}}]=0$, $[X',\widetilde{\mathfrak{M}}]=0$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть $X,X'\in\Gamma(n)$, $|X|=|X'|$ и $[X,\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$, $[X',\mathfrak{M}]=\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}=[X+X',\mathfrak{M}]\oplus[X-X',\mathfrak{M}]$.*

Доказательство. Очевидно, $2^{-1}(X+X')$ — это сумма генераторов $J_{2a-1,2a}$, входящих в запись X, X' с одинаковыми знаками, а $2^{-1}(X-X')$ — это сумма генераторов $J_{2a-1,2a}$, входящих в запись X, X' с различными знаками. По лемме 1.2 $\mathfrak{M} = [X + X', \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X + X', \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$. Так как $\mathfrak{M} = [X, \mathfrak{M}]$, то $\widetilde{\mathfrak{M}} = [X - X', \mathfrak{M}]$. Следовательно, $\mathfrak{M} = [X + X', \mathfrak{M}] \oplus [X - X', \mathfrak{M}]$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ненулевая подалгебра $\mathfrak{J}(n)$. Будем писать $\mathfrak{A} = \langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, если $\mathfrak{A} \subset \langle H_1, H_2, \ldots, H_s\rangle$, где $H_1, H_2, \ldots, H_a \in \Gamma(n)$, $|H_i| = H_i$, $H_i \cap H_j = 0$ при $i \neq j$ и выполняются условия:

1) для каждого $i = \overline{1, a}$ проекция $\mathfrak{A}$ на $\langle H_i\rangle$ отлична от нуля;

2) для любых H_i, H_j $(i \neq j)$ алгебра $\mathfrak{A}$ содержит $\cdots + \alpha_i H_i + \cdots + \alpha_j H_j + \cdots$ с неравными α_i, α_j;

3) если все ненулевые коэффициенты при H_i в базисных векторах $\mathfrak{A}$ имеют одинаковый знак, то эти коэффициенты суть положительные числа.

Теорема 1.1. *Каждая нулевая подалгебра $\mathfrak{A}$ вида (1.1) алгебры $\mathfrak{J}(n)$ может быть записана в виде $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, где $H_1, H_2, \ldots, H_a \in \Gamma(n)$. Элементы $H_1, H_2, \ldots, H_a$ определяются алгеброй $\mathfrak{A}$ однозначно с точностью до нумерации. Подпространства пространства $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, исчерпываются относительно $O(n)$-сопряженности пространствами $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_a \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}_j = [H_j, \mathfrak{M}_j]$, $[H_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ для $j = \overline{1, a}$.*

Если $H_j = \sum \alpha_{jb} J_{2b-1,2b}$, где $\alpha_{jb_1} = \cdots = \alpha_{jb_{s_j}} = 1$, $\alpha_{jb} = 0$ при $b \notin \{b_1, \ldots, b_{s_j}\}$, то относительно $O(n)$-сопряженности подпространства $\mathfrak{M}_j$ исчерпываются пространствами

$$O,\ \langle P_{2b_1-1}, P_{2b_1}\rangle,\ \ldots,\ \langle P_{2b_1-1}, P_{2b_1}, P_{2b_2-1}, P_{2b_2}, \ldots, P_{2b_{s_j}-1}, P_{2b_{s_j}}\rangle. \tag{1.2}$$

Если $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ = \mathfrak{A}(p, q; \alpha)$, то пространство $\widetilde{\mathfrak{M}}$ совпадает относительно $O(n)$-сопряженности с одним из пространств:

$$O,\ \langle P_{2(p+q)+1}\rangle,\ \langle P_{2(p+q)+1}, P_{2(p+q)+2}\rangle,\ \ldots,\ \langle P_{2(p+q)+1}, P_{2(p+q)+2}, \ldots, P_n\rangle. \tag{1.3}$$

Доказательство. В каждом базисном элементе алгебры $\mathfrak{A}$ соберем слагаемые с коэффициентами, равными по абсолютной величине, вынесем за скобки абсолютную величину коэффициентов, а затем в полученных выражениях выделим суммы, содержащие максимально возможное число слагаемых с одним и тем же знаком. Пусть $S = \{X_1, \ldots, X_k\}$ — множество абсолютных значений всех таких сумм. Если $X_i \cap X_j \neq 0$, то из множества S исключаем X_i, X_j и вводим $X_i \cap X_j$, $X_i - X_i \cap X_j$, $X_j - X_i \cap X_j$. В полученном множестве снова находим ненулевые пересечения его элементов и производим дальнейшее преобразование множества S. На конечном шаге мы получим множество $\{H_1, H_2, \ldots, H_a\}$, обладающее тем свойством, что $H_i \cap H_j = 0$ при $1 \leq i < j \leq a$. Легко убедиться, что $\mathfrak{A} = \langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$.

Докажем единственность такого представления алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ = \langle H'_1, H'_2, \ldots, H'_{a'}\rangle$. Очевидно, H'_j является линейной комбинацией $H_1, H_2, \ldots, H_a$. Так как $|H'_j| = H'_j$, то H'_j совпадает с суммой некоторых $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_r}$. Но тогда $\sum \alpha_i H_i$, где $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2}$, не принадлежит $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, что противоречит условию 2) определения $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$. Значит, $H'_j = H_{i_j}$ для всех $j = \overline{1, a'}$. Отсюда вытекает, что $a \geq a'$. Аналогично получаем, что $a' \geq a$, а потому $a = a'$ и $\{H_1, H_2, \ldots, H_a\} = \{H'_1, H'_2, \ldots, H'_{a'}\}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно $\mathfrak{A}$. На основании лемм 1.2–1.4 получаем, что $\mathfrak{M} = [H_1, \mathfrak{M}] \oplus \cdots \oplus [H_a, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[H_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ для $j = \overline{1, a}$.

Пусть $H = J_{12} + J_{34} + \cdots + J_{2l-1,2l}$, $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$ с условием $[H, \mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$. Проведем классификацию всех таких $\mathfrak{M}$ относительно $O(2l)$-сопряженности.

Пусть $l = 2$ и $\dim \mathfrak{M} = 2$. Тогда $\mathfrak{M}$ обладает базисом $P_1 + \gamma P_3$, $P_2 + \gamma P_4$, $\gamma \geq 0$. Пусть

$$C(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что $C \in O(4)$ и что $C^{-1}(J_{12} + J_{34})C = J_{12} + J_{34}$. Так как

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

то автоморфизм $\mathcal{L}E(4)$, соответствующий матрице C^{-1}, отображает $\langle P_1 + \gamma P_3, P_2 + \gamma P_4 \rangle$ на $\langle P_1, P_2 \rangle$.

Пусть $l = 2$. Тогда $\mathfrak{M}$ сопряжено пространству, содержащему элементы $P_1 + \gamma_2 P_3 + \cdots + \gamma_l P_{2l-1}$, $P_2 + \gamma_2 P_4 + \cdots + \gamma_l P_{2l}$. Автоморфизм $\mathcal{L}E(2l)$, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{C(\gamma_2), 1, \ldots, 1\}$, не изменяет $\mathfrak{A}$, $\langle H \rangle$ и отображает $\mathfrak{M}$ на пространство $\mathfrak{M}'$, содержащее $P_1 + \gamma_3 P_5 + \cdots + \gamma_l P_{2l-1}$, $P_2 + \gamma_3 P_6 + \cdots + \gamma_l P_{2l}$. Если к пространству $\mathfrak{M}'$ применять автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{\widetilde{C}(\gamma_3), 1, \ldots, 1\}$, где

$$\widetilde{C}(\gamma) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = (1+\gamma^2)^{-1/2}),$$

то получим пространство, содержащее $P_1 + \gamma_4 P_7 + \cdots + \gamma_l P_{2l-1}$, $P_2 + \gamma_4 P_8 + \cdots + \gamma_l P_{2l}$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ сопряжено с пространством $\langle P_1, P_2 \rangle \oplus \mathfrak{V}$, где $\mathfrak{V} \subset \langle P_3, P_4, \ldots, P_{2l} \rangle$. Отсюда заключаем , что $\mathfrak{M}$ сопряжено одному из пространств: $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, …, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{2l-1}, P_{2l} \rangle$.

Справедливость последнего утверждения теоремы вытекает из теоремы Витта. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — такая подалгебра $\mathcal{L}E(n)$, что ее проекция на $\mathcal{L}O(n)$ совпадает с $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(p, q; \alpha)$. Если $X_1, \ldots, X_k$ — базис $\mathfrak{A}$ вида (1.1), $Y_1, \ldots, Y_l$ — базис $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$ вида (1.2)–(1.3), то $\mathfrak{A}$ сопряжена с алгеброй, обладающей базисом*

$$Y_1, \ldots, Y_l, X_1 + \sum \lambda_{1j} P_j, \ldots, X_k + \sum \lambda_{kj} P_j \quad (j = 2(p+q)+1, \ldots, n),$$

где коэффициенты суть нулевые или удовлетворяют условию:

$$\lambda_{i_1 t} \neq 0, \quad \lambda_{i_2, t+1} \neq 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{i_r, t+r-1} \neq 0 \quad (t = 2(p+q)+1);$$
$$\lambda_{ab} = 0 \quad \text{при } a < i_1; \quad i_s < a < i_s + 1 \quad \text{и} \quad b > t+s-1 \ (s = \overline{1, r-1});$$
$$a > i_r \quad \text{и} \quad b > t+r-1.$$

Доказательство. Если применить автоморфизм $\exp(\sum \beta_i P_i)$ $(i = \overline{1,n})$, то можно допускать, что алгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ содержит генератор $X_1 + \sum \gamma_{1i} P_i$, где γ_{1i} может биьть отлично от нуля только для таких значений i, для которых $[X_1, P_i] = 0$. Если $X_2 + \sum \gamma_{2i} P_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\gamma_{2i_0} \neq 0$ для такого i_0, что $[X_1, P_{i_0}] = 0$, то

$$[X_1 + \sum \gamma_{1i} P_i, X_2 + \sum \gamma_{2i} P_i] = \sum \rho_i P_i,$$

где $\rho_{i_0} \neq 0$. Отсюда в силу теоремы 1.1 вытекает, что $P_{i_0} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Значит, ни в одном из генераторов $X_b + \sum \gamma_{bi} P_i$ $(b = \overline{1,k})$ не содержится такое P_i, что $[X_1, P_i] \neq 0$, $P_i \notin \widetilde{\mathfrak{A}}$. Такими же рассуждениями получаем, что $[X_b, \sum \gamma_{1i} P_i] = 0$ для $b = \overline{2,k}$. Аналогично исследуем остальные базисные элементы. Дальнейшее упрощение генераторов $\widetilde{\mathfrak{A}}$ производим на основании теоремы Витта. Теорема доказана.

Теоремы 1.1, 1.2 сводят в силу предложения 1.1 описание разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}E(n)$ описанию подалгебр алгебры $\mathfrak{J}(n)$.

Следствие 1. *Каждая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$ сопряжена с $\mathfrak{M} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ — абелева подалгебра $\mathcal{L}E(n)$.*

Следствие 2. *Каждая нильпотентная подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$ является абелевой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — нильпотентная подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$, $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{N}$. Если $[\widetilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{M}] \neq 0$, то по теореме 1.2 алгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ содержит такие ненулевые элементы X, Y_1, Y_2, что $\langle X, Y_1, Y_2 \rangle = \mathcal{L}E(2)$. Так как $\mathcal{L}E(2)$ не является нильпотентной алгеброй, то мы приходим к противоречию. Значит, $[\widetilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{M}] = 0$. Отсюда и из следствия 1 заключаем, что $\mathfrak{A}$ — абелева алгебра. Следствие доказано.

Предложение 1.3. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(n)$ исчерпываются относительно $E(n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m$;
$\langle P_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m+1$;
$\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$;
$\langle P_1, P_2, \ldots, P_{2r}, J_{2r+1,2r+2}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m$;
$\langle P_1, P_2, \ldots, P_{2r}, P_n, J_{2r+1,2r+2}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m+1$, *где* $r = \overline{1, m-1}$.
Число максимальных абелевых подалгебр алгебры $\mathcal{L}E(n)$ равно $[n/2]+1$.

Предложение 1.3 вытекает из теоремы 1.2.

§ 2 Общие замечания о структуре алгебры Галилея n-мерного пространтсва

Пусть π, π_0, π_1, π_2 — проектирование $\mathcal{L}G(n)$ соответственно на $\mathcal{L}O(n)$, $\langle P_0 \rangle$, $\langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $\langle P_1, \ldots, P_n \rangle$, $\mathcal{R}(n) = \langle G_1, \ldots, G_n, P_1, \ldots, P_n \rangle$, $\mathfrak{N} = \pi_2(\mathcal{R}(n))$, $\mathfrak{V} = (\pi_1 + \pi_2)(\mathcal{R}(n))$.

Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $\widetilde{f}$ — такая подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n) = \mathfrak{N} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} \mathcal{L}O(n)$, что $\pi(\widetilde{f}) = f$. Если алгебра $\widetilde{f}$ $E(n)$-сопряжена алгебре $\mathfrak{M} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} f$, где $\mathfrak{M}$ —

f-инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{N}$, то $\widetilde{f}$ будем называть расщепимой в алгебре $\mathcal{L}E(n)$. Если любая подалгебра $\widetilde{f} \subset \mathcal{L}E(n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\widetilde{f}) = f$, является расщепимой, то будем говорить, что подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ обладает только расщепимыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}E(n)$. Примерами таких подалгебр является все полупростые подалгебры.

Для определения структуры произвольной подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ (и, в частности, алгебры $\mathcal{L}E(n)$) важно решить вопрос о тех подалгебрах алгебры $\mathcal{L}O(n)$, которые обладают только расщепимыми расширениями в $\mathcal{L}E(n)$. Поэтому в данном параграфе мы определяем вначале подалгебры такого рода.

Алгебру $\mathcal{L}O(n)$ мы рассматриваем как алгебру кососимметрических операторов в пространстве $\mathfrak{N}$ и потому для нее справедлив следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $\mathfrak{M}$ — f-инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{M}'$ — произвольное f-инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ разложимо в прямую сумму двух ортогональных f-инвариантных подпространств $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}'^{\perp}$.*

Пусть $f \subset \mathcal{L}O(n)$ и X — произвольный элемент $\mathfrak{N}$. Пересечение всех f-инвариантных подпространств пространства $\mathfrak{N}$, содержащих X, будем называть f-подпространством, порожденным X.

Лемма 2.2. *Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно f. Тогда $\mathfrak{M}$ разложимо в ортогональную сумму неприводимых f-подпространств. Это разложение единственно с точностью до эквивалентности.*

Лемма 2.2 вытекает из леммы 2.1 и теоремы Жордано–Гельдера.

Теорема 2.1. *Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ обладает только расщепимыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}E(n)$ в том и только том случае, когда f полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 утверждение теоремы справедливо для коммутативных подалгебр. Поэтому будем предполагать, что f — некоммутативная алгебра. Необходимость теоремы вытекает из теоремы 1.2. Докажем достаточность.

Пусть подалгебра f не является полупростой. Так как f — компактная алгебра, то она разложима в прямую сумму $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{Y}$ своего центра $\mathcal{P}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{Y}$. Поскольку f не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$, то из условия $[f, X] = 0$, $X \in \mathfrak{N}$, вытекает, что $X = 0$. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная подалгебра $\mathcal{L}E(n)$ с условием $\pi(\mathfrak{K}) = f$. Докажем, что $\mathfrak{K}$ — расщепимая подалгебра. Рассмотрим два случая.

1) Пусть из условия $[\mathfrak{Y}, X] =$, где $X \in \mathfrak{N}$, вытекает, что $X = 0$. Так как $\mathfrak{Y}$ — полупростая алгебра, то можно предполагать, что $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{K}$. Допустим, что $\mathfrak{K}$ содержит элемент вида $J + X$, где $J \in \mathcal{P}$, $X \in \mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{Y}$-подпространство пространства $\mathfrak{N}$, порожденное X. По лемме 2.2 $\mathfrak{M}$ разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{Y}$-подпространств: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_s$. Докажем индукцией по числу s, что $J \in \mathfrak{K}$.

Пусть $s = 1$. Если $[\mathfrak{Y}, X] = 0$, то $X = 0$ и наше утверждение справедливо. Предположим, что $[\mathfrak{Y}, X] \neq 0$. Тогда существует такой элемент $J' \in \mathfrak{Y}$, что $[J', X] = X'$, $X' \neq 0$. $\mathfrak{Y}$-подпространство $\mathfrak{M}'_1$, порожденное X', содержится в $\mathfrak{M}_1$, и в силу неприводимости последнего $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1$. Поскольку $X' \in \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{M}'_1 \subset \mathfrak{K}$ и потому $X \in \mathfrak{K}$.

Пусть $s > 1$, $X = X_1 + \cdots + X_s$, где $X_i \in \mathfrak{M}_i$ $(i = \overline{1, s})$. Если $[\mathfrak{Y}, X] = 0$, то $X = 0$, Поэтому будем предполагать, что $[\mathfrak{Y}, X] \neq 0$. Пусть $J' \in \mathfrak{Y}$ — такой элемент, что $[J', X] = X'$, $X' \neq 0$, и пусть $X' = X'_1 + \cdots + X'_s$, где $X'_i \in \mathfrak{M}_i$ $(i = \overline{1, s})$. Будем считать, что $X'_1 \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}'$ $\mathfrak{Y}$-подпространство $\mathfrak{M}$, порожденное X'. Очевидно, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{K}$. Проекция $\mathfrak{M}'_1$ пространства $\mathfrak{M}'$ на подпространство $\mathfrak{M}_1$ является $\mathfrak{Y}$-подпространством. Отсюда в силу неприводимости $\mathfrak{M}_1$ заключаем, что $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1$. Следовательно, $\mathfrak{M}'$, а значит, и $\mathfrak{K}$ содержит элемент вида $X_1 + \bar{X}_2 + \cdots + \bar{X}_s$, где $\bar{X}_i \in \mathfrak{M}_i$ $(i = \overline{2, s})$. Но тогда $J + (X_2 - \bar{X}_2) + \cdots + (X_s - \bar{X}_s) \in \mathfrak{K}$. В силу индуктивного предположения отсюда вытекает, что $J \in \mathfrak{K}$.

2) Допустим, что для некоторого ненулевого элемента $X \in \mathfrak{N}$ имеет место равенство $[\mathfrak{Y}, X] = 0$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ максимальное подпространство пространства $\mathfrak{N}$, обладающее тем свойством, что $[\mathfrak{Y}, \mathfrak{U}] = 0$. Если $\dim \mathfrak{U} = n - k$ $(0 < k < n)$, то можно предполагать, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}_{n-k} = \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$. Но тогда $\mathfrak{Y} \subset \mathcal{L}O(k) = \langle J_{12}, J_{13}, \ldots, J_{k-1,k} \rangle$ и $\mathfrak{Y}$ действует на подпространстве $\mathfrak{Q}_k = \langle P_1, \ldots, P_k \rangle$. Если $J_1 \in \mathcal{P}$, $J_2 \in \mathfrak{Y}$, $X \in \mathfrak{Q}_{n-k}$, то $[J_1, J_2] = 0$, $[J_2, X] = 0$. Отсюда и из тождества Якоби $[J_1, [J_2, X]] + [J_2, [X, J_1]] + [X, [J_1, J_2]] = 0$ получаем, что $[J_2, [X, J_1]] = 0$. Следовательно, $[X, J_1] \in \mathfrak{Q}_{n-k}$. Это значит, что $[\mathcal{P}, \mathfrak{Q}_{n-k}] \subset \mathfrak{Q}_{n-k}$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{P}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{L}O(k) \oplus \mathcal{L}O(n-k)$, где $\mathcal{L}O(n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{k+1, n} \rangle$. Так как для любого $Y \in \mathfrak{Q}_{n-k}$ имеем $[\mathfrak{Y}, Y] = 0$, то из условия $[\mathcal{P}, Y] = 0$ следует, что $Y = 0$.

Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — проекции $\mathcal{P}$ соответственно на $\mathcal{L}O(k)$ и $\mathcal{L}O(n-k)$, $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ — проекции $\mathfrak{K}$ соответственно на $\mathcal{L}E(k)$ и $\mathcal{L}E(n-k)$. Так как проекция f на $\mathcal{L}O(k)$ совпадает с $f_1 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathfrak{Y}$ и из условия $[\mathfrak{Y}, X] = 0$, $X \in \mathfrak{Q}_k$, вытекает, что $X = 0$, то в силу предыдущего случая 1) существует внутренний автоморфизм $\mathcal{L}E(k)$, отображающий $\mathfrak{K}_1$ на $\mathfrak{L}_1 \mathbin{+\!\!\!\!\supset} (\mathcal{P}_1 \oplus \mathfrak{Y})$. Аналогично убеждаемся, что существует внутренний автоморфизм $\mathcal{L}E(n-k)$, отображающий $\mathfrak{K}_2$ на $\mathfrak{K}_2 \oplus \mathcal{P}_2$. Таким образом, можно предполагать, что $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{L} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} (\mathcal{P}_1 \oplus \mathfrak{Y})$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_2 \oplus \mathcal{P}_2$. Поскольку $\mathfrak{Y}$ — полупростая алгебра, то $[\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}] = \mathfrak{Y}$ и поэтому $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{K}$. Предположим, что $\mathfrak{K}$ содержит элемент вида $J_2 + X_1$, где $J_2 \in \mathfrak{K}_2$, $X_1 \in \mathfrak{Q}_k$. Мы находимся в условиях случая 1), и, значит, $J_2 \in \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{K}$ содержит элемент $J_1 + X_2$, где $J_1 \in \mathcal{P}$, $X_2 \in \mathfrak{Q}_{n-k}$. В силу рассуждений, проведенных для случая 1), получаем, что $J_1 \in \mathfrak{K}$. Это доказывает, что $f \subset \mathfrak{K}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{Y}$ — разложение подалгебры $f \subset \mathcal{L}O(n)$ в прямую сумму центра $\mathcal{P}$ и фактора Леви $\mathfrak{Y}$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ максимальное подпространство $\mathfrak{N}$, обладающее тем свойством, что $[f, \mathfrak{U}] = 0$. Если $\dim \mathfrak{U} = n - k$ $(0 \leq k < n)$, то можно предполагать, что $\mathfrak{U} = \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$. Но тогда $f \subset \mathcal{L}O(k)$. Отсюда в силу теоремы 2.1 заключаем, что алгебра $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}E(n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\mathfrak{K}) = f$, допускает разложение $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} (\mathcal{P}' \oplus \mathfrak{Y})$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно f, $\mathcal{P}'$ — подалгебра прямой суммы $\mathcal{P} \oplus \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{K}$ — подалгебра $\mathcal{L}G(n)$, f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, не сопряженная подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$ или являющаяся полупростой. Если $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \oplus \langle P_0 \rangle$, то $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} f) \mathbin{+\!\!\!\!\supset} \langle P_0 + X_0 \rangle$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{V}$, инвариантное относительно f, $X_0 \in \mathfrak{V}$ и $[f, X_0] = 0$. Если $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \mathbin{+\!\!\!\!\supset} \langle P_0 + \delta J \rangle$, $J \in \mathcal{L}O(n)$, $\delta \in \mathbb{R}$, то $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \mathbin{+\!\!\!\!\supset} f) \mathbin{+\!\!\!\!\supset} \langle P_0 + \delta J + X_0 \rangle$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{V}$, $X_0 \in \mathfrak{V}$ и $[f, X_0] = 0$.*

Доказательство. Если $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \oplus \langle P_0 \rangle$, то алгебра $\mathfrak{K}$ обладает базисом $J_1 + X_1, \ldots, J_s + X_s, P_0 + Y_0, Z_1, \ldots, Z_t$, где $J_1, \ldots, J_s$ — базис алгебры f, $X_1, \ldots, X_s, Y_0, Z_1, \ldots, Z_t \in \mathfrak{V}$. Подалгебра $\mathfrak{L} = \langle J_1 + X_1, \ldots, J_s + X_s, Z_1, \ldots, Z_t \rangle$ является идеалом алгебры $\mathfrak{K}$ и потому $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} \niplus \langle P_0 + Y_0 \rangle$. Так как f полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$, то в силу теоремы 2.1 существует внутренний автоморфизм алгебры $\mathcal{L}G(n)$, отображающий $\mathfrak{L}$ на алгебру $\mathfrak{M} \niplus f$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{V}$, инвариантное относительно f. Отсюда вытекает, что с точностью до сопряженности относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}G(n)$ имеет место равенство $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \niplus f) \niplus \langle P_0 + Z_0 \rangle$, $Z_0 \in \mathfrak{V}$. Так как $[J_k, P_0 + Z_0] = [J_k, Z_0]$, то $[J_k, Z_0] \in \mathfrak{M}$. Следовательно, подпространство $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \oplus \langle Z_0 \rangle$ инвариантно относительно алгебры f. Пусть $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$ — разложение $\mathfrak{M}'$ в ортогональную сумму. Поскольку $[f, \mathfrak{M}'] \subset \mathfrak{M}$, $[f, \mathfrak{M}^{\perp}] \subset \mathfrak{M}^{\perp}$, то $[f, \mathfrak{M}^{\perp}] = 0$. Обозначим образующий элемент подпространства $\mathfrak{M}^{\perp}$ через T_0. Тогда $Z_0 = \alpha T_0 + T_0'$, где $T_0' \in \mathfrak{M}$, α — вещественное число. Следовательно, $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \niplus f) \niplus \langle P_0 + X_0 \rangle$, где $X_0 = \alpha T_0$.

Случай, когда $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \niplus \langle P_0 + \delta J \rangle$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{L}\overline{G}(n) = \mathfrak{V} \niplus \mathcal{L}O(n)$. Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ обладает только расщепимыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}G(n)$ тогда и только тогда, когда f полупроста или f не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}$ — такая подалгебра $\mathcal{L}\overline{G}(n)$, что $\pi(\widetilde{f}) = f$. Обозначим через $\widetilde{f}_1$ проекцию $\widetilde{f}$ на алгебру $\pi_1(\mathcal{R}(n)) \niplus \mathcal{L}O(n)$. Согласно теореме 2.1 алгебра $\widetilde{f}_1$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M}_1 \niplus f$, где $\mathfrak{M}_1$ — подпространство $\pi_1(\mathcal{R}(n))$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{f}$ сопряжена с алгеброй $\mathfrak{V}' \niplus \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{V}'$ — подпространство $\mathfrak{V}$, а $\mathfrak{K}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{N} \niplus f$. Снова применяя теорему 2.1, заключаем, что $\mathfrak{K}$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{N}' \niplus f$, где $\mathfrak{N}'$ — подпространство $\mathfrak{N}$. Следовательно, $\widetilde{f}$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M} \niplus f$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{V}$. Теорема доказана.

Пусть $f = \mathcal{P} \oplus \mathfrak{Y}$ — произвольная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(n)$, где $\mathcal{P}$ — коммутативная алгебра, $\mathfrak{Y}$ — полупростая или нулевая алгебра. Обозначим через $\mathfrak{M}$ максимальное подпространство пространства $\mathfrak{V}$, обладающее тем свойством, что $[f, \mathfrak{M}] = 0$. Если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{V}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}_{n-k} = \langle G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle \oplus \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$ $(0 < k < n)$. В этом случае f сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(k) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1, k} \,\rangle$.

Отсюда ввиду теоремы 2.2 получаем, что подалгебра $\widetilde{f}$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$ с условием $\pi(\widetilde{f}) = f$ относится к одному из следующих типов:

1) если $(\pi + \pi_0)(\widetilde{f}) = f \oplus \langle P_0 \rangle$, то $\widetilde{f} = (\mathfrak{V}' \niplus (\mathcal{P}' \oplus \mathfrak{Y})) \niplus \langle P_0 + X_0 \rangle$, где $\mathcal{P}'$ — подалгебра $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{V}_{n-k}$, $X_0 \in \mathfrak{V}_{n-k}$;

2) если $(\pi + \pi_0)(\widetilde{f}) = f \niplus \langle P_0 + \delta J \rangle$, где $J \in \mathcal{L}O(k)$, δ — ненулевое вещественное число, то $\widetilde{f} = (\mathfrak{V}' \niplus (\mathcal{P}' \oplus \mathfrak{Y})) \niplus \langle P_0 + \delta J + X_0 \rangle$, где $X_0 \in \mathfrak{V}_{n-k}$, $\mathcal{P}'$ — подалгебра $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{V}_{n-k}$.

§ 3 Класификация разрешимых подалгебр обобщенной алгебры Галилея

В этом параграфе используются обозначения предыдущих параграфов.

Предложение 3.1. *Любая максимальная разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}G(n)$ сопряжена с алгеброй $\mathfrak{Y}(n) = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ $(m = [n/2])$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathcal{R}(n) = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n \rangle$ является радикалом $\mathcal{L}G(n)$. Если $\mathfrak{L}$ — разрешимая подалгебра $\mathcal{L}G(n)$, то $\mathcal{R}(n) + \mathfrak{L}$ также является разрешимой подалгеброй $\mathcal{L}G(n)$. Так как $\mathcal{R}(n) + \mathfrak{L}/\mathcal{R}(n)$ — разрешимая подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, а всякая разрешимая подалгебра $\mathcal{L}O(n)$ сопряжена подалгебре алгебры Картана $\mathfrak{J}(n)$, то $\mathcal{R}(n) + \mathfrak{L}$ сопряжена с подалгеброй алгебры $\mathfrak{Y}(n)$. Алгебра $\mathfrak{Y}(n)$ является разрешимой как расширение абелевой алгебры с помощью абелевой алгебры. Предложение доказано.

Лемма 3.1. *Пусть* $X = \overline{X} + \gamma P_0 = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_s X_s + \gamma P_0$, *где* $X_1, \ldots, X_s \in \Gamma(n)$, $X_i \cap X_j = 0$ *при* $i \neq j$, *а* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *такие ненулевые вещественные числа, что* $\alpha_i^2 \neq \alpha_j^2$ *при* $i \neq j$ $(i, j = \overline{1, s})$. *Если* $\mathfrak{M}$ — *подпространство* $\mathfrak{Y}$, *инвариантное относительно* X, *то* $\mathfrak{M} = [X_1, \mathfrak{M}] \oplus \cdots \oplus [X_s, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, *где* $[X_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$, $\gamma[P_0, [X_j, \mathfrak{M}]] \subset [X_j, \mathfrak{M}]$ $(j = \overline{1, s})$.

Доказательство. Пусть $Y = \overline{Y} + \delta P_0 = Y_1 + \cdots + Y_{s-1} + \delta P_0$ — элемент $\mathfrak{M}$, где $Y_i = -[X_i, [X_i, Y]]$, $[X_i, Y_{s+1}] = 0$ для $i = \overline{1, s}$. Легко видеть, что $[X, Y] = [\overline{X}, \overline{Y}] + \gamma[P_0, \overline{Y}]$, $[X, [X, Y]] = [\overline{X}, [\overline{X}, \overline{Y}]] + 2\gamma[\overline{X}, [P_0, \overline{Y}]]$. Пусть $2\gamma[\overline{X}, [P_0, Y_j]] = Z_j$ $(j = \overline{1, s})$. Очевидно, $[P_0, Z_j] = 0$, $[X_i, [X_i, Z_i]] = -Z_i$, $[X_i, Z_j] = 0$ при $i \neq j$.

Применим индукцию по s. Пусть $s = 1$. Тогда

$$[X, [X, Y]] = -\alpha_1^2 + Z_1, \qquad [X, [X, -\alpha_1^2 Y_1 + Z_1]] = -\alpha_1^2(-\alpha_1^2 Y_1 + Z_1) - \alpha_1^2 Z_1.$$

Из этих равенств вытекает, что $Z_1 \in \mathfrak{M}$, а потому и $Y_1 \in \mathfrak{M}$.

Пусть s — произвольное натуральное число с условием $s \leq m$. Так как

$$[\overline{X}, [\overline{X}, \overline{Y}]] = -\alpha_1^2 Y_1 - \alpha_2^2 Y_2 - \cdots - \alpha_s^2 Y_s,$$

то

$$\begin{aligned}[X, [X, Y]] + \alpha_1^2 Y = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Y_2 + \cdots + (\alpha_1^2 - \alpha_s^2) Y_s + \\ + \alpha_1^2 (Y_{s+1} + \delta P_0) + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_s.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Если на элемент (3.1) подействовать генератором X, а затем $-X$, то получим элемент

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 Z_1 + \alpha_2^2((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Y_2 + Z_2) + \cdots + \alpha_s^2((\alpha_2^2 - \alpha_s^2) Y_s + Z_s) - \\ -(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Z_2 - \cdots - (\alpha_1^2 - \alpha_s^2) Z_s.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Прибавив к элементу (3.2) элемент (3.1), умноженный на $(-\alpha_1^2)$, получим элемент

$$\begin{aligned}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Y_2 + Z_2) + \cdots + (\alpha_s^2 - \alpha_1^2)((\alpha_1^2 - \alpha_s^2) Y_s + Z_s) - \\ -\alpha_1^4 (Y_{s+1} + \delta P_0).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $\mathfrak{M}' = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [X_1, Y] = 0\}$. Очевидно, подпространство $\mathfrak{M}'$ инвариантно относительно $\alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_s X_s + \gamma P_0$, поэтому к нему применимо индуктивное предложение. Поскольку элемент (3.3) принадлежит $\mathfrak{M}'$, то $(\alpha_1^2 - \alpha_j^2) Y_j + Z_j \in \mathfrak{M}$, а значит, $Y_j, Z_j \in \mathfrak{M}$ $(j = \overline{2, s})$. Так как $Y_1 + Y_{s+1} + \delta P_0$ — элемент $\mathfrak{M}$ и на этот элемент X действует как $\alpha_1 X_1 + \gamma P_0$, то $Y_1, Z_1 \in \mathfrak{M}$, $Y_{s+1} + \delta P_0 \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Предложение 3.2. *Пусть* $\mathfrak{A} = \langle H_1, H_2, \ldots, H_a \rangle^\circ$. *Подпространства* $\mathcal{R}(n)$, *инвариантные относительно* $\mathfrak{A}$, *исчерпываются пространствами* $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus$

$\cdots \oplus \mathfrak{M}_a \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, *где* $\mathfrak{M}_j = [H_j, \mathfrak{M}_j]$, $[H_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ *для* $j = \overline{1, a}$. *Подпространства* $\mathcal{R}(n)$, *инвариантные относительное* $\mathfrak{A}$ *и* P_0, *исчерпываются пространствами* $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_a \oplus \widetilde{\mathfrak{N}}$, *где* $\mathfrak{N}_j = [H_j, \mathfrak{N}_j]$, $[P_0, \mathfrak{N}_j] \subset \mathfrak{N}_j$, $[H_j, \widetilde{\mathfrak{N}}] = 0$, $[P_0, \widetilde{\mathfrak{N}}] \subset \widetilde{\mathfrak{N}}$.

Предложение вытекает непосредственно из леммы 3.1 и лемм 1.3, 1.4.

На основании предложения 3.2 описание расщепимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$ сводится к нахождению подпространства пространства

$$\mathfrak{K}(h_1, h_2, \ldots, h_a) = \sum_1^a \oplus \langle P_{2h_i-1}, G_{2h_i-1}, P_{2h_i}, G_{2h_i} \rangle,$$

инвариантных относительно

$$J(h_1, h_2, \ldots, h_a) = J_{2h_1-1,2h_1} + J_{2h_2-1,2h_2} + \cdots + J_{2h_a-1,2h_a},$$
$$J(h_1, h_2, \ldots, h_a) \quad \text{и} \quad P_0,$$

и к классификации относительно $O(n)$-сопряженности подалгебр радикала $\mathcal{R}(n)$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — ненулевое подпространство $\mathfrak{K}(h_1, \ldots, h_a)$, инвариантное относительно $J(h_1, \ldots, h_a)$. Если $\pi_1(\mathfrak{M}) = 0$, то согласно теореме 1.1 $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из пространств:

$$\langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1} \rangle, \ \ldots, \ \langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a} \rangle.$$

Если $\pi_2(\mathfrak{M}) = 0$, то $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из пространств:

$$\langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1} \rangle, \ \ldots, \ \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a} \rangle.$$

Теперь допустим, что $\pi_1(\mathfrak{M}) \neq 0$, $\pi_2(\mathfrak{M}) \neq 0$. Тогда $\mathfrak{M}$ сопряжено подпространству пространства $\mathfrak{K}(h_1, \ldots, h_{a-1})$, инвариантному относительно $J(h_1, \ldots, h_{a-1})$, или пространству, удовлетворяющему одному из условий:

1) $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_b-1}, G_{2h_b} \rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_{2h_{b+1}-1}, P_{2h_{b+1}}, \ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a} \rangle$;

2) $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a} \rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_b-1}, P_{2h_b} \rangle$ $(b \leq a)$;

3) $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_b-1}, G_{2h_b} \rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M})$ — подпрямая сумма пространств $\langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_c-1}, P_{2h_c} \rangle$, $\langle P_{2h_{b+1}-1}, P_{2h_{b+1}}, \ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a} \rangle$ $(c \leq b)$.

В первом случае группа автоморфизмов, относительно которой классифицируются расщепимые алгебры $\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_a)$, разлагается в прямое произведение $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ двух ортогональных групп, заданных соответственно на евклидовых пространствах $\pi_1(\mathfrak{M})$ и $\pi_2(\mathfrak{M})$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_a)$ является подалгеброй прямой суммы алгебр $\pi_1(\mathfrak{M}) \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_b)$ и $\pi_2(\mathfrak{M}) \subset\!\!\!+ J(h_{b+1}, \ldots, h_a)$. Такие подалгебры классифицируются относительно $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$-сопряженности при помощи алгоритма Ли–Гурса [17].

Во втором случае при $b < a$ допустимо рассматривать только автоморфизмы, соответствующие группе $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, где $\mathcal{O}_1$ — группа ортогональных преобразований евклидова пространства $\langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_b-1}, P_{2h_b} \rangle$, а $\mathcal{O}_2$ — группа ортогональных преобразований евклидова пространства $\langle G_{2h_{b+1}-1}, G_{2h_{b+1}}, \ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a} \rangle$. Следовательно, при $b < a$ алгебра $\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_a)$ является подалгеброй прямой суммы алгебр $\mathfrak{M}' \dotplus J(h_1,\ldots,h_b)$ и $\mathfrak{M}'' \dotplus J(h_{b+1},\ldots,h_a)$, где $\pi_1(\mathfrak{M}') = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1},\ldots, G_{2h_b-1}, G_{2h_b}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}') = \langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1},\ldots, P_{2h_b-1}, P_{2h_b}\rangle$, а $\mathfrak{M}'' = \langle G_{2h_{b+1}-1}, G_{2h_{b+1}},\ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a}\rangle$. И в этом случае применима конструкция Ли–Гурса.

В третьем случае классификация алгебр $\mathfrak{M} \dotplus J(h_1,\ldots,h_a)$ сводится к классификации подалгебр прямой суммы алгебр $\mathfrak{M}' \dotplus J(h_1,\ldots,h_c)$, $\mathfrak{M}'' \dotplus J(h_{c+1},\ldots,h_b)$, $\mathfrak{M}''' \dotplus J(h_{b+1},\ldots,h_a)$, где $\pi_1(\mathfrak{M}') = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1},\ldots, G_{2h_c-1}, G_{2h_c}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}') = \langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1},\ldots, P_{2h_c-1}, P_{2h_c}\rangle$, $\pi_1(\mathfrak{M}'') = \langle G_{2h_{c+1}-1}, G_{2h_{c+1}},\ldots, G_{2h_b-1}, G_{2h_b}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}'') = 0$, $\pi_1(\mathfrak{M}''') = 0$, $\pi_2(\mathfrak{M}''') = \langle P_{2h_{b+1}-1}, P_{2h_{b+1}},\ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a}\rangle$.

Если $\mathfrak{M}$ — ненулевое подпространство $\mathfrak{K}(h_1,\ldots,h_a)$, инвариантное относительно $J(h_1,\ldots,h_a)$ и P_0, то $\mathfrak{M}$ сопряжено подпространству пространства $\mathfrak{K}(h_1,\ldots,h_{a-1})$, инвариантному относительно $J(h_1,\ldots,h_{a-1})$, или удовлетворяет одному из условий:

1) $\mathfrak{M} = \sum\limits_1^a \oplus\langle G_{2h_i-1}, G_{2h_i}, P_{2h_i-1}, P_{2h_i}\rangle$;

2) $\mathfrak{M} = \sum\limits_1^b \oplus\langle P_{2h_i-1}, P_{2h_i}\rangle \oplus \mathfrak{M}'$, где $\pi_1(\mathfrak{M}') = \sum\limits_1^b \oplus\langle G_{2h_i-1}, G_{2h_i}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}') = \sum\limits_{b+1}^a \oplus\langle P_{2h_i-1}, P_{2h_i}\rangle$.

Пространства $\mathfrak{M}'$ классифицируем при помощи метода Ли–Гурса, примененного к прямой сумме алгебр $\pi_1(\mathfrak{M}') \dotplus J(h_1,\ldots,h_b)$, $\pi_2(\mathfrak{M}') \dotplus J(h_{b+1},\ldots,h_a)$.

Подобным образом описываем подпространства пространства $\mathfrak{V} = \sum\oplus\langle G_i, P_i\rangle$ $(i=\overline{1,n})$.

Предложение 3.3. *Пусть $m=[n/2]$, $\delta=0$ при $n=2m$, $\delta=1$ при $n=2m+1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ исчерпываются относительно $G(n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle P_0, P_1,\ldots,P_n\rangle$; $\langle G_1+\alpha P_0, P_1, P_2,\ldots,P_n\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1,\ldots,G_n,P_1,\ldots,P_n\rangle$; $\langle P_0, \delta P_n, J_{12}, J_{34},\ldots,J_{2m-1,2m}\rangle$;
$\langle G_n, P_n, J_{12}, J_{34},\ldots,J_{2m-1,2m}\rangle$ $(n=2m+1)$;
$\langle J_{12}, J_{34},\ldots,J_{2a-1,2a}, P_0, P_{2a+1},\ldots,P_n\rangle$ $(a=\overline{1,m-1})$;
$\langle J_{12}, J_{34},\ldots,J_{2a-1,2a}, P_{2a+1},\ldots,P_n, G_{2a+1},\ldots,G_n\rangle$ $(a=\overline{1,m-1})$;
$\langle J_{12}, J_{34},\ldots,J_{2a-1,2a}, G_{2a+1}+\alpha P_0, P_{2a+1},\ldots,P_n\rangle$ $(\alpha>0,\ a=\overline{1,m-1})$.

Доказательство. Каждая абелева подалгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$ сопряжена с подалгеброй алгебры $\mathfrak{Y}(n)$, являющейся максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $\mathcal{L}G(n)$. Если $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) \ne 0$, то в силу $[G_a, P_0] = P_a$ заключаем, что $P_0 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\pi_1(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$ или $(\pi_0+\pi_1)(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \langle G_{2s+1}+\alpha P_0\rangle$. При $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$ получаем, что $\widetilde{\mathfrak{A}} = \langle P_0, P_1,\ldots,P_n\rangle$ или $\widetilde{\mathfrak{A}} = \langle G_1+\alpha P_0, P_1,\ldots,P_n\rangle$. Пусть $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}}) \ne 0$. Если $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{A}} \cap \mathcal{R}(n)$, то $[\widetilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{M}] = 0$. Отсюда на основании теорем 1.1, 1.2 вытекает, что проекция $\widetilde{\mathfrak{A}}$ на $\langle J_{2d-1,2d}, P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d}\rangle$ совпадает с $\langle J_{2d-1,2d}\rangle$ или с подалгеброй алгебры $\langle P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d}\rangle$. Значит, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ сопряжена с одной из алгебр:

$\langle P_0, J_{12},\ldots,J_{2a-1,2a}, P_{2a+1},\ldots,P_n\rangle$;
$\langle J_{12},\ldots,J_{2a-1,2a}, G_{2a+1}+\alpha P_0, P_{2a+1}, P_{2a+2},\ldots,P_n\rangle$ $(a=\overline{1,m-1})$.

Аналогично исследуем случай, когда $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$. Предложение доказано.

Предложение 3.4. *Пусть $m=[n/2]$, $\delta=0$ при $n=2m$, $\delta=1$ при $n=2m+$*

1. *Максимальные нильпотентные подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ исчерпываются относительно $G(n)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n \rangle$;
$\langle P_0, \delta P_n, \delta G_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$;
$\langle P_0, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n, G_{2a+1}, \ldots, G_n \rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$.

Доказательство. Так как $\mathcal{L}E(n)$ не является нильпотентной алгеброй, то в силу теорем 1.1, 1.2 для любой нильпотентной подалгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$ ее проекция на $\langle J_{2d-1,2d}, P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d} \rangle$ является коммутативной алгеброй.

Предложение 3.5. *Максимальные нильпотентные подалгебры расширенной алгебры Галилея $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(n)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n, M \rangle$;
$\langle P_0, \delta P_n, \delta G_n, M, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$;
$\langle P_0, M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n, G_{2a+1}, \ldots, G_n \rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$.

Так как M порождает центр $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)/\langle M \rangle \cong \mathcal{L}G(n)$, то справедливость предложения 3.5 непосредственно вытекает из предложения 3.4.

Предложение 3.6. *Пусть $m = [n/2]$, $\delta = 0$ при $n = 2m$, $\delta = 1$ при $n = 2m+1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(n)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, M \rangle$; $\langle G_1, \ldots, G_n, M \rangle$;
$\langle G_1, \ldots, G_a, P_{a+1}, \ldots, P_n, M \rangle$;
$\langle P_0, \delta P_n, M, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$;
$\langle G_n, M, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ $(n = 2m+1)$;
$\langle P_0, M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n \rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1}, \ldots, G_n \rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_b, G_{b+1}, \ldots, G_n \rangle$ $(a = \overline{1, m-1},\ b < n)$;
$\langle G_1 + \alpha P_0, P_2, \ldots, P_n, M \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1} + \alpha P_0, P_{2a+2}, \ldots, P_n \rangle$ $(\alpha > 0,\ a = \overline{1, m-1})$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2m-1,2m}, G_n + \alpha P_0 \rangle$ $(\alpha > 0,\ n = 2m+1)$;
$\langle G_i + \alpha_{i-1,i} P_{i-1} + \alpha_{ii} P_i + \alpha_{i,i+1} P_{i+1} \mid i = \overline{1, n} \rangle \oplus \langle M \rangle$, где $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{n,n+1} = 0$;
$\langle G_i + \alpha_{i-1,i} P_{i-1} + \alpha_{ii} P_i + \alpha_{i,i+1} P_{i+1} \mid i = \overline{1, r} \rangle \oplus \langle P_{r+1}, \ldots, P_n, M \rangle$, где $r = \overline{1, m-1}$, $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{r,r+1} = 0$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a} \rangle \oplus \langle G_i + \alpha_{i-1,i} P_{i-1} + \alpha_{ii} P_i + \alpha_{i,i+1} P_{i+1} \mid i = \overline{2a+1, r} \rangle \oplus \langle P_{r+1}, \ldots, P_n \rangle$, где $a = \overline{1, m-1}$, $r \le n-1$, $\alpha_{2a,2a+1} = 0$, $\alpha_{2a+1,2a+1} = 0$, $\alpha_{r,r+1} = 0$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a} \rangle \oplus \langle G_i + \alpha_{i-1,i} P_{i-1} + \alpha_{ii} P_i + \alpha_{i,i+1} P_{i+1} \mid i = \overline{2a+1, n} \rangle$, где $a = \overline{1, m-1}$, $\alpha_{2a,2a+1} = 0$, $\alpha_{2a+1,2a+1} = 0$, $\alpha_{n,n+1} = 0$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — максимальная абелева подалгебра $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$. Если $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) \neq 0$, то можно допускать, что $\pi_1(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$ или $(\pi_0 + \pi_1)(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \langle G_{2s+1} + \alpha P_0 \rangle$. В первом случае $\widetilde{\mathfrak{A}}$ сопряжена с $\langle P_0, P_1, \ldots, M \rangle$ или с $\langle P_0, M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n \rangle$ $(a = \overline{1, m})$. Во втором случае $\widetilde{\mathfrak{A}}$ сопряжена с одной из таких алгебр:

$\langle G_1 + \alpha P_0, P_2, \ldots, P_n, M \rangle$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2m-1,2m}, G_n + \alpha P_0 \rangle$ $(n = 2m+1)$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1} + \alpha P_0, P_{2a+2}, \ldots, P_n \rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$.

Пусть $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$. Если $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$, то $\widetilde{\mathfrak{A}}$ совпадает с одной из алгебр:

$\langle G_1, \dots, G_n, M\rangle$;

$\langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{1,n}\ \rangle \oplus \langle M\rangle$, где $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{n,n+1} = 0$;

$\langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{1,r}\ \rangle \oplus \langle P_{r+1}, \dots, P_n, M\rangle$, где $r = \overline{1,n-1}$, $\alpha_{01} = \alpha_{11} = \alpha_{r,r+1} = 0$.

Допустим, что $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}}) \neq 0$. Если $\pi_1(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$ или $\pi_2(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$, то применимо предложение 1.3. Остальные случаи сводятся к предыдущему. Предложение доказано.

В качестве иллюстрации предложения 3.6 выпишем в явном виде максимальные абелевы подалгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(4)$:

$\langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, M\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, G_4, M\rangle$; $\langle G_1, P_2, P_3, P_4, M\rangle$;

$\langle G_1, G_2, P_3, P_4, M\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, P_4, M\rangle$; $\langle P_0, M, J_{12}, J_{34}\rangle$;

$\langle P_0, M, J_{12}, P_3, P_4\rangle$; $\langle M, J_{12}, G_3, G_4\rangle$; $\langle M, J_{12}, G_3, P_4\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha P_0, P_2, P_3, P_4, M\rangle$ $(\alpha > 0)$; $\langle M, J_{12}, G_3 + \alpha P_0, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$;

$\langle G_1 + \alpha_{12}P_2, G_2 + \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 + \alpha_{23}P_3, G_3 + \alpha_{23}P_2 + \alpha_{33}P_3 + \alpha_{34}P_4, G_4 + \alpha_{34}P_3 + \alpha_{44}P_4, M\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha_{12}P_2, G_2 + \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2, P_3, P_4, M\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha_{12}P_2, G_2 + \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 + \alpha_{23}P_3, G_3 + \alpha_{23}P_2 + \alpha_{33}P_3, P_4, M\rangle$, где по крайней мере один из коэффициентов не равен нулю;

$\langle M, J_{12}, G_3 + \alpha P_4, G_4 + \alpha P_3 + \beta P_4\rangle$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

§ 4. Подалгебры алгебр $\mathcal{L}E(5)$ и $\mathcal{L}E(6)$

Сделаем несколько замечаний относительно подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(m)$. Все такие подалгебры мы разбиваем на два класса: приводимые подалгебры и неприводимые подалгебры. Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(m)$ называется приводимой, если в пространстве $\overline{\mathfrak{N}} = \langle P_1, \dots, P_m\rangle$ существует собственное подпространство, инвариантное относительно f. Все подалгебры прямой суммы алгебр $\langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,k}\ \rangle$, $\langle J_{ab} \mid a, b = \overline{k+1,m}\ \rangle$ $(2 \leq k \leq m-2)$ и только они являются приводимыми подалгебрами алгебры $\mathcal{L}O(m)$. Эти подалгебры можно классифицировать относительно $O(m)$-сопряженности с помощью алгоритма Ли–Гурса [17] . Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(m)$ называется неприводимой, если $\overline{\mathfrak{N}}$ не обладает нетривиальным f-инвариантным подпространством. Более подробно о приводимых и неприводимых подалгебрах см. в работе [18] .

Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_s$, $\mathfrak{N}_1 = \langle P_1, \dots, P_{n_1}\rangle$, $\mathfrak{N}_2 = \langle P_{n_1+1}, \dots, P_{n_2}\rangle$, …, $\mathfrak{N}_s = \langle P_{n_{s-1}+1}, \dots, P_{n_s}\rangle$. Если каждое подпространство $\mathfrak{N}_i$ f-инвариантно и f-неприводимо, то f можно представить в виде подпрямой суммы $f = \sum_c \oplus f_i$ $(i = \overline{1,s})$, где каждая подалгебра f_i действует неприводимо на $\mathfrak{N}_i$ и $[f_i, \mathfrak{N}_j] = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,s})$. В этом случае мы будем говорить, что f разложима в подпрямую сумму неприводимых подалгебр $f_1, \dots, f_s$. Очевидно, любая алгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ сопряжена алгебре $f' \subset \mathcal{L}O(n)$, которая разлагается в подпрямую сумму неприводимых подалгебр.

Теорема 4.1. *Пусть $f = \sum_c \oplus f_i$ $(i = \overline{1,s})$. Подпространство пространства $\mathfrak{N} = \langle P_1, \dots, P_n\rangle$, инвариантные относительно f, исчерпываются относительно $E(n)$-сопряженности пространствами $\mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_s \oplus \mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}_i = 0$ или $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_i$ $(i = \overline{1,s})$, а $\mathfrak{M}'$ — такое пространство $\mathfrak{N}$, что $[f, \mathfrak{M}'] = 0$.*

Лемма 4.1. *Относительно $O(5)$-сопряженности алгебра $\mathcal{L}O(5)$ обладает только одной неприводимой подалгеброй*

$$f = \langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35}\rangle.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(5)$. Поскольку 5 — простое число, то естественное представление алгебры $\mathfrak{L}$ кососимметрическими матрицами порядка 5 над $\mathbb{R}$ является абсолютно неприводимым. Так как $\dim \mathfrak{L} < 10$, то отсюда вытекает, что $\mathfrak{L}$ — простая абсолютно неприводимая линейная алгебра Ли степени 5 над $\mathbb{R}$. Следовательно, $C \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}$ — простая алгебра Ли степени 5, размерность которой меньше 10 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Поэтому эта алгебра относится к типу A_1, и, значит, $\mathfrak{L} \cong \mathcal{L}O(3)$ или $\mathfrak{L} \cong \mathcal{L}O(1,2)$. Но ввиду компактности $\mathcal{L}O(5)$ последний случай невозможен. В силу теоремы Картана о связи между неприводимыми представлениями $\mathcal{L}O(3)$ над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и того факта, что $\mathcal{L}O(3)$ обладает над $\mathbb{C}$ только одним неприводимым унитарным представлением степени 5, получаем, что относительно $O(5)$-сопряженности в $\mathcal{L}O(5)$ существует только одна неприводимая подалгебра.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что алгебра f изоморфна $\mathcal{L}O(3)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — ненулевое подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно f. На основании леммы 1.2, примененной к генератору $2J_{12} + J_{34}$, получаем, что $\mathfrak{M} = s\langle P_1, P_2\rangle \oplus t\langle P_3, P_4\rangle \oplus r\langle P_5\rangle$, где $s, t, r \in \{0, 1\}$. Легко убедиться, что при любом предположении относительно s, t, r мы получаем равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Значит, f — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(5)$. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Относительно $O(5)$-сопряженности подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(5)$ исчерпываются такими алгебрами:*

$f_1 = \langle O\rangle$;
$f_2 = \langle J_{12}\rangle$;
$f_3 = \langle J_{12} + \alpha J_{34}\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;
$f_4 = \langle J_{12} + J_{34}\rangle$;
$f_5 = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$;
$f_6 = \mathcal{L}O(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
$f_7 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle$;
$f_8 = \langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35}\rangle$;
$f_9 = f_7 \oplus \langle J_{12} - J_{34}\rangle = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34}\rangle$;
$f_{10} = f_6 \oplus \langle J_{45}\rangle = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}\rangle$;
$f_{11} = \mathcal{L}O(4) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,4}\,\rangle$;
$f_{12} = \mathcal{L}O(5) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,5}\,\rangle$.

Доказательство. Неприводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(5)$ описаны в лемме 4.1. Приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(5)$ исчерпываются алгеброй $\mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}\rangle$ и подалгебрами $\mathcal{L}O(4)$ Последние описаны в работе [19]. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Расщепимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(5)$ исчерпываются относительно $E(5)$-сопряженности такими алгебрами:*

f_1: O, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_2: O, $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_3: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_4: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_5: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_6: O, $\langle P_4\rangle$, $\langle P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_7: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_8: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_9: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_{10}: O, $\langle P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_{11}: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_{12}: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$.

Теорема 4.3 вытекает из теоремы 4.2 и теоремы 1.1.

Теорема 4.4. *Нерасщепимые подалгебры $\mathcal{L}E(5)$ исчерпываются относительно $E(5)$-сопряженности такими алгебрам:*

$\langle J_{12} + aP_5\rangle$: O, $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$;

$\langle J_{12} + \alpha J_{34} + aP_5\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(0 < \alpha < 1$, $a > 0)$;

$\langle J_{12} + J_{34} + aP_5\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$;

$\langle J_{12} + aP_5, J_{34} + bP_5\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$;

$\langle J_{12} - J_{34} + aP_5, J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$.

Теорема 4.4 непосредственно следует из теоремы 1.2 и теоремы 4.3.

Лемма 4.2. *Двумерные подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(6)$ исчерпываются относительно $O(6)$-сопряженности алгебрами $\langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56}\rangle$, где $0 \le \beta \le \alpha \le 1$.*

Доказательство. Каждая двумерная алгебра $\mathfrak{L}$ является разрешимой. Поскольку $\mathcal{L}O(6)$ — компактная алгебра, то в случае $\mathfrak{L} \subset \mathcal{L}O(6)$ можно предполагать, что $\mathfrak{L}$ — абелева алгебра, а потому $\mathfrak{L}$ порождается элементами $J_{12} + \rho J_{56}$, $J_{34} + \sigma J_{56}$, где $|\rho| \ge |\sigma|$.

Допустим, что $|\rho| > 1$. Обозначим через φ $O(6)$-автоморфизм алгебры $\mathcal{L}O(6)$, при котором $J_{12} \to J_{56}$, $J_{56} \to J_{12}$, $J_{34} \to J_{34}$. Тогда $\varphi(\mathfrak{L}) = \langle J_{12} + \rho^{-1}J_{56}, J_{34} - \sigma\rho^{-1}J_{56}\rangle$. Вследствие этого можно предполагать, что $|\sigma| \le |\rho| \le 1$.

Если $\rho < 0$, то переходим к алгебре $C\mathfrak{L}C^{-1}$, где $C = \operatorname{diag}\{-1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. Если $\sigma < 0$, то используем автоморфизм, соответствующий матрице $C = \operatorname{diag}\{1, 1, -1, 1, 1, 1\}$. Следовательно, всегда можно допускать, что $\mathfrak{L} = \langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56}\rangle$, где $0 \le \beta \le \alpha \le 1$.

Пусть $\mathfrak{L}' = \langle J_{12} + \alpha' J_{56}, J_{34} + \beta' J_{56}\rangle$ и пусть $\varphi(\mathfrak{L}) = C\mathfrak{L}C^{-1} = \mathfrak{L}'$ для некоторой матрицы $C \in O(6)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\varphi(J_{12} + \alpha J_{56}) = \gamma(J_{12} + \alpha' J_{56}) + \delta(J_{34} + \beta' J_{56}),\\
&\varphi(J_{12} + \beta J_{56}) = \lambda(J_{12} + \alpha' J_{56}) + \mu(J_{34} + \beta' J_{56}).
\end{aligned}
$$

Будем предполагать, что $0 \le \beta' \le \alpha' \le \alpha \le 1$.

Если $\gamma = 0$, то в силу леммы 1.1 имеем $\delta = \pm 1$, $\alpha = \beta'$, а значит, $\alpha = \alpha' = \beta'$. Пусть $\lambda\alpha' + \mu\beta' = 0$. Если $\alpha \ne 0$, то $\lambda + \mu = 0$. Отсюда по лемме 1.1 заключаем, что $\beta = 1$. Мы получили, что $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 1$.

Предположим, что $\gamma \ne 0$, $\delta = 0$. В этом случае $\gamma = \pm 1$, $\alpha = \alpha'$. Если $\lambda \ne 0$, $\mu = 0$, то $\mathfrak{L}' = \langle J_{12} + \alpha J_{56}\rangle$. Противоречие. Если $\lambda = 0$, $\mu \ne 0$, то $\beta = \beta'$. Теперь допустим, что $\lambda \ne 0$, $\mu \ne 0$. Тогда необходимо $\lambda\alpha' + \mu\beta' = 0$.

Отображение φ можно рассматривать как автоморфизм алгебры $\mathcal{L}E(6)$. Из условия сохранения коммутационных соотношений находим, что

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Легко получить, что $C(J_{12}+\alpha J_{56})C^{-1} = \pm\alpha J_{12}+J_{56}$, откуда вытекает, что $\alpha = 1$, а значит, $\lambda = -\mu\beta'$. По лемме 1.1 $\beta = \beta'$.

Остается рассмотреть случай, когда $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$. Очевидно, $\gamma\alpha' + \delta\beta' = 0$. Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $\lambda\alpha' + \mu\beta' = 0$. Из условия сохранения коммутационных соотношений легко получить, что $\varphi(P_1) = \varphi(P_2) = 0$. Противоречие. Следовательно, $\lambda = 0$ или $\mu = 0$.

Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$C(J_{12}+\alpha J_{56})C^{-1} = \pm\alpha J_{34} \pm J_{56} = \gamma J_{12} + \delta J_{34}$. Противоречие.

Если $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, то

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ 0 & A_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$C(J_{34}+\beta J_{56})C^{-1} = \pm\beta J_{34} \pm J_{56} = \pm(J_{34}+\beta' J_{56})$. Отсюда следует, что $\beta = \beta' = 1$. Значит, $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 1$. Лемма доказана.

Теорема 4.5. *Расщепимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(6)$ исчерпываются относительно $E(6)$-сопряженности расщепимыми подалгебрами алгебры $\mathcal{L}E(5)$ и такими подалгебрами:*

$f_1 = \langle O\rangle$: $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_2 = \langle J_{12}\rangle$: $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_3 = \langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;

$f_4 = \langle J_{12}+J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_5 = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_6 = \langle J_{12}, J_{13}J_{23}\rangle$: $\langle P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_7 = \langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_8 = \langle 2J_{12}+J_{34}, J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45}, J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}\rangle$: $\langle P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_9 = \langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}, J_{12}-J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{10} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}\rangle$: $\langle P_6\rangle$, $\langle P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{11} = \mathcal{L}O(4) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,4}\,\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{12} = \mathcal{L}O(5) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,5}\,\rangle$: $\langle P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{13} = \langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \beta < \alpha < 1)$;

$f_{14} = \langle J_{12}+\alpha(J_{34}+J_{56})\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;

$f_{15} = \langle J_{12}+J_{34}+\beta J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \beta < 1)$;

$f_{16} = \langle J_{12}+J_{34}+J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{17} = \langle J_{12}+\alpha J_{56}, J_{34}+\beta J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 \le \beta < \alpha \le 1)$;

$f_{18} = \langle J_{12}+\alpha J_{56}, J_{34}+\alpha J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;

$f_{19} = \langle J_{12}+J_{56}, J_{34}+J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
$f_{20} = \langle J_{12}, J_{34}, J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
$f_{21} = f_7 \oplus \langle J_{56}\rangle$: O, $\langle P_5,P_6\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
$f_{22} = f_7 \oplus \langle J_{12}-J_{34}\rangle \oplus \langle J_{56}\rangle$: O, $\langle P_5,P_6\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
$f_{23} = f_7 \oplus \langle J_{12}-J_{34}+aJ_{56}\rangle$: O, $\langle P_5,P_6\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$ $(a>0)$;
$f_{24} = \mathcal{L}O(4) \oplus \langle J_{56}\rangle$: O, $\langle P_5,P_6\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
$f_{25} = \mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$: O,$\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
$f_{26} = \langle J_{12}+J_{45}, J_{13}+J_{46}, J_{23}+J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$;
f_{27}: O, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$, где f_{27} — неприводимая подалгебра $\mathcal{L}O(6)$.

Доказательство. Приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(6)$ являются подалгебрами алгебр $\mathcal{L}O(5)$, $\mathcal{L}O(4)\oplus\langle J_{56}\rangle$, $\mathcal{L}O(3)\oplus\langle J_{45},J_{46},J_{56}\rangle$. Подалгебры прямой суммы находим, используя алгоритм Ли–Гурса. Если подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(6)$ является абелевой, то она сопряжена подалгебре алгебры Картана $\langle J_{12},J_{34},J_{56}\rangle$. На основании лемм 1.1, 4.2 абелевы подалгебры исчерпываются абелевыми подалгебрами $\mathcal{L}O(5)$ и такими алгебрами:

$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{56}\rangle$, $1\geq\alpha\geq\beta>0$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{56}, J_{34}+\beta J_{56}\rangle$, $1\geq\alpha\geq\beta\geq 0$, $\alpha\neq 0$;
$\langle J_{12},J_{34},J_{56}\rangle$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — такая подалгебра $\mathcal{L}O(4)\oplus\langle J_{56}\rangle$, что ее проекция $\mathfrak{A}_1$ на $\mathcal{L}O(4)$ является неабелевой алгеброй. Если $\mathfrak{A}_1=\mathcal{L}O(3)$, то вследствие того, что $\mathcal{L}O(3)$ — простая алгебра, заключаем, что $\mathfrak{A}=\mathcal{L}O(3)\oplus\langle J_{56}\rangle$, а значит, $\mathfrak{A}$ сопряжена $\mathcal{L}O(3)\oplus\langle J_{45}\rangle$. Если $\mathfrak{A}_1=\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle\oplus\delta\langle J_{12}-J_{34}\rangle$, где $\delta\in\{0,1\}$, то $\mathfrak{A}$ совпадает с одной из алгебр:

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle\oplus\langle J_{12}-J_{34}+aJ_{56}\rangle$ $(\delta=1,\ a>0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle\oplus\langle J_{12}-J_{34}, J_{56}\rangle$ $(\delta=1)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle\oplus\langle J_{56}\rangle$, $(\delta=0)$.

Неабелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(3)\oplus\langle J_{45},J_{46},J_{56}\rangle$, несопряженные подалгебрам алгебры $\mathcal{L}O(5)$, исчерпываются алгебрами:

$\mathcal{L}O(3)\oplus\langle J_{45},J_{46},J_{56}\rangle$; $\langle J_{12}+J_{45}, J_{13}+J_{46}, J_{23}+J_{56}\rangle$.

Используя теорему 1.1 и лемму 1.2, находим подпространства пространства $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\rangle$, инвариантные относительно подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(6)$. Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Нерасщепимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(6)$ исчерпываются относительно $E(6)$-сопряженности нерасщепимыми подалгебрами $\mathcal{L}E(5)$ и следующими подалгебрами:*

$\langle J_{12}+aP_6\rangle$: $\langle P_3,P_4,P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle$ $(a>0)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+aP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_5\rangle$, $\langle P_3,P_4,P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle$ $(0<\alpha<1,\ a>0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}+aP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle$ $(a>0)$;
$\langle J_{12}+aP_6, J_{34}+bP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_5\rangle$, $\langle P_3,P_4,P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle$ $(a\geq b\geq 0)$;
$\langle J_{12}+aP_5, J_{34}+bP_5+cP_6\rangle$: O, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$ $(a>0,\ c>0,\ b\geq 0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}, J_{12}-J_{34}+aP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle$ $(a>0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}+aP_6\rangle$: O, $\langle P_4,P_5\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\rangle$ $(a>0)$.

Теорема 4.6 вытекает из теоремы 1.2.

Замечание 4.1. Подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(3)$ описаны в [15], подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(4)$ — в [19].

§ 5. Подалгебры алгебры Галилея $\mathcal{L}G(3)$

Через f_C будем обозначать автоморфизм алгебры $\mathcal{L}G(2)$, индуцируемой внутренним автоморфизмом $A \to CAC^{-1}$ группы $O(2)$ $(A, C \in O(2))$.

Лемма 5.1. *Пусть* $\Lambda = \{\exp tG_a \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Подалгебры алгебры* $\langle P_0, P_a, G_a\rangle$ *исчерпываются относительно* Λ*-сопряженности алгебрами:*

O, $\langle P_0\rangle$, $\langle P_a\rangle$, $\langle G_a\rangle$, $\langle G_a + \gamma P_a\rangle$, $\langle G_a + \alpha P_0\rangle$, $\langle P_0, P_a\rangle$, $\langle G_a, P_a\rangle$, $\langle G_a + \alpha P_0, P_a\rangle$, $\langle P_0, P_a, G_a\rangle$ $(\alpha > 0,\ \gamma \neq 0)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — ненулевая подалгебра алгебры $\langle P_0, P_a, G_a\rangle$. Если $\pi_0(\mathfrak{L}) \neq 0$, то $\mathfrak{L}$ содержит P_0 или $G_a + \alpha P_0$, где $\alpha > 0$. В этом случае двумерные подалгебры исчерпываются такими подалгебрами: $\langle P_0, P_a\rangle$, $\langle G_a + \alpha P_0, P_a\rangle$. Если $\pi_0(\mathfrak{L}) = 0$, то $\mathfrak{L}$ сопряжена одной из алгебр: O, $\langle P_a\rangle$, $\langle G_a\rangle$, $\langle G_a + \gamma P_a\rangle$, $\langle G_a, P_a\rangle$ $(\gamma \neq 0)$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Трехмерные подалгебры алгебры* $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ *исчерпываются относительно* $G(2)$*-сопряженности алгебрами:*

$\langle G_1 + \alpha P_2, G_2, P_1\rangle$ $(\alpha \geq 0)$; $\langle G_2, P_1, P_2\rangle$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle G_1 + \gamma_1 P_2, G_2 + \gamma_2 P_2, P_1 + \gamma_3 P_2\rangle$. Применяя автоморфизм $\exp tJ_{12}$, отображаем $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}' = \langle G_1 + \gamma_1 P_2, G_2 + \gamma_2 P_2, P_1\rangle$. Автоморфизм $\exp tP_0$ обращает γ_2 в 0. Остается установить, что алгебры $\langle G_1 + \gamma P_2, G_2, P_1\rangle$, $\langle G_1 + \delta P_2, P_1\rangle$ $O(2)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $|\gamma| = |\delta|$. Допустим, что для автоморфизма f_C алгебры $\mathcal{L}G(2)$, соответствующего матрице $C \in O(2)$, справедливо равенство $f_C\langle G_1 + \gamma P_2, G_2, P_1\rangle = \langle G_1 + \delta P_2, G_2, P_1\rangle$. Тогда $f_C(G_2) = G_2$, $f_C(P_1) = P_1$. Отсюда вытекает, что $C = \operatorname{diag}\{\pm 1, \pm 1\}$. Значит, $|\gamma| = |\delta|$.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle G_1 + \gamma_1 P_1, G_2 + \gamma_2 P_1, P_2\rangle$. За счет автоморфизма $\exp tP_0$, можно предполагать, что $\gamma_1 = 0$. Применяя автоморфизм $\exp \frac{\pi}{2} J_{12}$, отображаем $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{M}$.

Очевидно, алгебра $\langle G_1 + \gamma G_2, P_1, P_2\rangle$ сопряжена с алгеброй $\langle G_2, P_1, P_2\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Трехмерные подалгебры алгебры* $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ *исчерпываются относительно* $O(2)$*-сопряженности алгебрами:*

$\langle G_1 + \gamma_1 P_2, G_2 + \gamma_2 P_2, P_1\rangle$, $\langle G_2, P_1, P_2\rangle$ $(\gamma_1 \geq 0)$.

Лемма 5.4. *Пусть* $\mathfrak{M} = \langle G_1 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, G_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2\rangle$, $\overline{\mathfrak{M}} = \langle G_1 + \overline{\alpha}_1 P_1 + \overline{\alpha}_2 P_2, G_2 + \overline{\beta}_1 P_1 + \overline{\beta}_2 P_2\rangle$, *где* $\alpha_2 > 0$, $\overline{\alpha}_2 > 0$. *Алгебры* $\mathfrak{M}$ *и* $\overline{\mathfrak{M}}$ $O(2)$*-сопряжены тогда и только тогда, когда* $\overline{\alpha}_1 = \beta_2$, $\overline{\alpha}_2 = \pm\beta_1$, $\overline{\beta}_1 = \pm\alpha_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_1$ *или имеет решение одна из таких систем уравнений:*

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha_2 + \overline{\beta}_1)x = \beta_2 - \overline{\beta}_2,\\ &(\alpha_1 - \overline{\beta}_2)x = \beta_1 - \overline{\beta}_1,\\ &(\overline{\alpha}_1 - \beta_2)x = \alpha_2 - \overline{\alpha}_2,\\ &(\beta_1 + \overline{\alpha}_2)x = \overline{\alpha}_1 - \alpha_1, \end{aligned}\right. \qquad (5.1) \qquad \left\{\begin{aligned} &(\alpha_2 - \overline{\beta}_1)x = \beta_2 - \overline{\beta}_2,\\ &(\alpha_1 - \overline{\beta}_2)x = \beta_1 + \overline{\beta}_1,\\ &(\overline{\alpha}_1 - \beta_2)x = \alpha_2 + \overline{\alpha}_2,\\ &(\beta_1 - \overline{\alpha}_2)x = \overline{\alpha}_1 - \alpha_1. \end{aligned}\right. \qquad (5.2)$$

Доказательство. Если алгебры $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ сопряжены относительно $O(2)$, то $f_C(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$, где C — одна из матриц:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_1 &= \frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \lambda\beta_1 + \lambda^2\beta_2}{1+\lambda^2}, \qquad & \overline{\alpha}_2 &= \frac{-\lambda\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda^2\beta_1 + \lambda\beta_2}{1+\lambda^2}, \\ \overline{\beta}_1 &= \frac{\beta_1 + \lambda\beta_2 - \lambda\alpha_1 - \lambda^2\alpha_2}{1+\lambda^2}, \qquad & \overline{\beta}_2 &= \frac{-\lambda\beta_1 + \beta_2 + \lambda^2\alpha_1 - \lambda\alpha_2}{1+\lambda^2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Из равенств (5.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\lambda\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = \alpha_2 + \lambda\beta_2, \\ &\overline{\alpha}_1 - \lambda\overline{\alpha}_2 = \alpha_1 + \lambda\beta_1, \\ &\lambda\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 = \beta_2 - \lambda\alpha_2, \\ &\overline{\beta}_1 - \lambda\overline{\beta}_2 = \beta_1 - \lambda\alpha_1. \end{aligned}$$

Следовательно, λ является решением системы (5.1).

Если $f_C(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$ для

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $\overline{\alpha}_1 = \beta_2$, $\overline{\alpha}_2 = -\beta_1$, $\overline{\beta}_1 = -\alpha_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_1$.

Если $f_C(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$ для

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} &\lambda(\alpha_2 - \overline{\beta}_1) = \beta_2 - \overline{\beta}_2, \\ &\lambda(\alpha_1 - \overline{\beta}_2) = \beta_1 + \overline{\beta}_1, \\ &\lambda(\overline{\alpha}_1 - \beta_2) = \alpha_2 + \overline{\alpha}_2, \\ &\lambda(\beta_1 - \overline{\alpha}_2) = \overline{\alpha}_1 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Значит, λ — решение системы (5.2).

При

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем, что $\overline{\alpha}_1 = \beta_2$, $\overline{\alpha}_2 = \beta_1$, $\overline{\beta}_1 = \alpha_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_1$. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если $\mathfrak{M}$ — двумерная подалгебра алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ и $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_1, G_2\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_1, P_2\rangle$, то $\mathfrak{M}$ $O(2)$-сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha,\beta) = \langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \beta P_2\rangle$, где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Алгебры $\mathfrak{M}(\alpha,\beta)$ и $\mathfrak{M}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ сопряжены относительно $G(2)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = \overline{\beta}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle G_1 + \alpha_2 P_2, G_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2\rangle$, $\overline{\mathfrak{M}} = \langle G_1 + \overline{\alpha}_2 P_2, G_2 + \overline{\beta}_1 P_1 + \overline{\beta}_2 P_2\rangle$. Будем предполагать, что $\alpha_2 \geq |\beta_1|$, $\alpha_2 > 0$. Пусть

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенств (5.3) вытекает, что $(\exp tP_0 \cdot f_C)(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}_2 - \overline{\beta}_1 = \alpha_2 - \beta_1, \\
&\overline{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2 - \lambda^2\beta_1 + \lambda\beta_2}{1+\lambda^2}, \\
&\overline{\beta}_2 = \frac{-2\lambda\alpha_2 - 2\lambda\beta_1 + \beta_2 - \lambda^2\beta_2}{1+\lambda^2}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Пусть

$$\overline{\alpha}_2 = -\overline{\beta}_1 = \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2}.$$

Отсюда и из второго равенства системы (5.4) находим, что $(\alpha_2 + \beta_1)\lambda^2 - 2\beta_2\lambda + (-\alpha_2 - \beta_1) = 0$. Так как это уравнение всегда имеет вещественное решение, то $\mathfrak{M}$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha, \beta) = \langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \beta P_2\rangle$, где $\alpha > 0$.

Если

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $f_{C_1}(\mathfrak{M}) = \langle -G_2 + \alpha P_1, G_1 + \alpha P_2 + \beta P_1\rangle$. Автоморфизм $\exp \beta P_0$ отображает $f_{C_1}(\mathfrak{M})$ на алгебру $\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 - \beta P_2\rangle$. Поэтому можно считать, что $\beta \geq 0$.

Допустим, что для некоторого $G(2)$-автоморфизма φ алгебры $\mathcal{L}G(2)$ имеет место равенство $\varphi(\mathfrak{M}(\alpha, \beta)) = \mathfrak{M}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Если $\varphi = f_C \cdot \exp tP_0$, то в силу равенств (5.4) получаем, что $\overline{\alpha} = \alpha$, $\lambda\beta = 0$, $\overline{\beta}(1 + \lambda^2) = \beta(1 - \lambda^2)$. Если $\beta = 0$, то $\overline{\beta} = 0$. Если $\lambda = 0$, то $\overline{\beta} = \beta$. Пусть $\varphi = f_{C_2} \cdot f_C \cdot \exp tP_0$, где $C_2 = \operatorname{diag}\{1, -1\}$. Тогда $\overline{\alpha} = -\alpha$, откуда вытекает, что $\overline{\alpha} = \alpha = 0$. Противоречие.

Так как в процессе рассуждений мы не использовали условие $\beta \geq 0$, то случаи автоморфизмов $\varphi = f_{C_1} \cdot f_C \cdot \exp tP_0$, $\varphi = f_{C_2} \cdot f_{C_1} \cdot f_C \exp tP_0$, сводятся к рассмотренным. Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если $\mathfrak{M}$ — двумерная подалгебра, алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ и $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_1, G_2\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_1, P_2\rangle$, то $\mathfrak{M}$ $O(2)$-сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle G_1 + \gamma P_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + (\gamma + \beta)P_2\rangle$, где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Алгебры $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathfrak{M}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ $O(2)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = \overline{\beta}$, $\gamma = \overline{\gamma}$.*

Доказательство. Поскольку $f_C \cdot \exp tP_0 = \exp tP_0 \cdot f_C$ для любой матрицы $C \in O(2)$, то в силу леммы 5.5 алгебра $\mathfrak{M}$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma)$. Если $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ сопряжена $\mathfrak{M}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$, то на основании леммы 5.4 $\alpha \pm (-\overline{\alpha}) = 0$, $\overline{\gamma} + \overline{\beta} - \gamma = 0$, $\gamma + \beta - \overline{\gamma} = 0$, $-\alpha \pm \overline{\alpha} = 0$ или одна из систем (5.1), (5.2) имеет решение. В первом случае $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\beta} = \beta = 0$, $\overline{\gamma} = \gamma$. Пусть μ — ненулевое решение системы (5.1). Тогда

$$\begin{aligned}
&\mu(\alpha - \overline{\alpha}) = \gamma + \beta - (\overline{\gamma} + \overline{\beta}), \\
&\mu(\gamma - \overline{\gamma} - \overline{\beta}) = -\alpha + \overline{\alpha}, \\
&\mu(\overline{\gamma} - \gamma - \beta) = \alpha - \overline{\alpha}, \\
&\mu(-\alpha + \overline{\alpha}) = \overline{\gamma} - \gamma.
\end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает, что $\overline{\beta} = \beta = 0$, $\mu(\alpha - \overline{\alpha}) = \gamma - \overline{\gamma}$, $\mu(\gamma - \overline{\gamma}) = -\alpha + \overline{\alpha}$. Но тогда $(\mu^2 + 1)(\alpha - \overline{\alpha}) = 0$, а значит, $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\gamma} = \gamma$.

Пусть λ — решение системы (5.2). Тогда

$$\lambda(\alpha+\overline{\alpha})=\gamma+\beta-(\overline{\gamma}+\overline{\beta}),$$
$$\lambda(\gamma-(\overline{\gamma}+\overline{\beta}))=-\alpha-\overline{\alpha},$$
$$\lambda(\overline{\gamma}-\gamma-\beta)=\alpha+\overline{\alpha},$$
$$\lambda(-\alpha-\overline{\alpha})=\overline{\gamma}-\gamma.$$

Отсюда следует, что $\lambda(\beta+\overline{\beta})=0$, а потому при $\lambda\neq 0$ имеем $\beta=\overline{\beta}=0$. Так как $\lambda(\alpha+\overline{\alpha})=\gamma-\overline{\gamma}$, $\lambda(\gamma-\overline{\gamma})=-(\alpha+\overline{\alpha})$, то $\gamma-\overline{\gamma}=0$, $\alpha+\overline{\alpha}=0$ или $\overline{\gamma}=\gamma$, $\alpha=\overline{\alpha}=0$. Если $\lambda=0$, то $\alpha=\overline{\alpha}=0$, $\gamma=\overline{\gamma}$, $\beta=\overline{\beta}$. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathbb{R}_+=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid\lambda>0\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq 0$. Относительно $G(2)$-сопряженности подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(2)$ исчерпываются алгебрами*:*

$\sim O$, $\sim\langle P_0\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$, $\sim\langle G_1\rangle$, $\sim\langle G_1+\alpha P_2\rangle$, $\sim\langle G_1+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle J_{12}\rangle$, $\sim\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,P_1\rangle$, $\sim\langle G_1+\alpha P_0,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,P_1+\beta P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,P_1\rangle$, $\sim\langle G_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,P_1\rangle$, $\langle G_1,P_1+\alpha P_2\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2\rangle$, $\langle G_1,G_2+\alpha P_1\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1,G_2+\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1+\beta P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12},P_0\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,G_1,P_1\rangle$, $\langle P_0,G_1+\alpha P_2,P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,G_2+\beta P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,G_2,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1\rangle$, $\langle G_2,G_1+\alpha P_2,P_1\rangle$, $\sim\langle J_{12},P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12}+\alpha P_0,P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12},G_1,G_2\rangle$, $\langle J_{12},G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12},P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12},G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha P_0,G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12},G_1,G_2,P_0,P_1,P_2\rangle$.

Записанные алгебры не сопряжены относительно группы $G(2)$.

Доказательство. Если $\mathfrak{L}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{L}G(2)$ и $\pi(\mathfrak{L})\neq 0$, то $\mathfrak{L}$ содержит элемент $J_{12}+wP_0$. Допустим, что $(\pi_1+\pi_2)(\mathfrak{L})\neq 0$ и $w\neq 0$. Тогда $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{12}+wP_0\rangle$ или $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{12},P_0\rangle$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, инвариантное относительно J_{12}, P_0. Если $\pi_0(\mathfrak{L})=0$, то $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{12}\rangle$, где $\mathfrak{M}\subset\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$. В первых двух случаях $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из пространств: $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$. В третьем случае $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из таких пространств: $\langle G_1,G_2\rangle$, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1\rangle$ $(\alpha>0)$.

Классификацию подалгебр $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathcal{L}G(2)$ с условием $\pi(\mathfrak{L})=0$ проводим по схеме, изложенной в § 3 с использованием лемм 5.2–5.6.

Теорема 5.2. *Подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(2)$-сопряженности алгебрами, отмеченными в теореме 5.1 знаком $\sim$, полными пробразами подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(2)$ при гомоморфизме $\mathcal{L}G(2)$ на $\mathcal{L}G(2)$ с ядром $\langle M\rangle$ и такими алгебрами:*

$\langle P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha P_0+\gamma M\rangle$;

$\langle P_0+\gamma M,P_1\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_0\rangle$, $\langle J_{12},P_0+\gamma M\rangle$;

$\langle P_0+\gamma M,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,G_1,G_2\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha M,P_0+\gamma M,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12},P_0+\gamma M,P_1,P_2\rangle$ $(\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\gamma\neq 0)$.

Доказательство. Достаточно исследовать на сопряженность те подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$, которые не содержат M. Если $\mathfrak{L}$ — такая подалгебра и $\pi(\mathfrak{L})\neq 0$, то $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ f$, где $\mathfrak{M}\subset\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, а f — подалгебра алгебры $\langle J_{12},P_0,M\rangle$. Относительно $\widetilde{G}(2)$-сопряженности алгебра f совпадает с одной из алгебр: $\langle J_{12}+$

*$\sim$ стоит перед алгебрами, являющимися также подалгебрами $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$.

$\alpha M, P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M, P_0\rangle$, $\langle J_{12}, P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha P_0+\gamma M\rangle$ ($\alpha>0$, $\gamma\neq 0$).

Допустим, что $\pi(\mathfrak{L})=0$. Если $\pi_1(\mathfrak{L})=0$, то в силу равенства $\exp(tG_a)(P_a+tM)=P_a$ алгебра $\mathfrak{L}$ сопряжена одной из алгебр: $\langle P_0+\gamma M\rangle$, $\langle P_0+\gamma M, P_1\rangle$, $\langle P_0+\gamma M, P_1, P_2\rangle$. Пусть $\pi_1(\mathfrak{L})\neq 0$. Если $G_1+\alpha P_0+\lambda M\in\mathfrak{L}$, то $\exp(\lambda P_1)(\mathfrak{L})$ содержит $G_1+\alpha P_0$. Значит, проекция $\mathfrak{L}$ на $\langle M\rangle$ равна нулю и мы получаем одну из алгебр, отмеченных в теореме 5.1 знаком $\sim$. Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Пусть $\alpha,\beta,w\in\mathbb{R}_+$, $\gamma\neq 0$. Подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(3)$ исчерпываются относительно $G(3)$-сопряженности подалгебрами алгебры $\mathcal{L}G(2)$ и такими алгебрами*:*

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$: $\sim O$, $\sim\langle P_0\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2,G_3\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$;

$\langle J_{12}\rangle$: $\sim\langle P_3\rangle$, $\sim\langle G_3\rangle$, $\sim\langle G_3+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle P_0,P_3\rangle$, $\langle G_3,P_3\rangle$, $\langle G_3+\alpha P_0,P_3\rangle$, $\langle G_3,P_0,P_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,G_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,G_3+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2,P_3\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2,G_3\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2,G_3+\gamma P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1,P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1,G_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1,G_3+\gamma P_3\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,G_3\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,G_3+\alpha P_0\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3+\alpha P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,G_1,G_2,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3+\alpha P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$: $\sim\langle P_3\rangle$, $\langle G_3,P_3\rangle$, $\langle G_3+\beta P_0,P_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_3,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_3+\beta P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3+\beta P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha P_0+\beta G_3\rangle$: $\sim O$, $\sim\langle P_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha G_3\rangle$: $\sim O$, $\sim\langle P_3\rangle$, $\sim\langle P_0,P_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2\rangle$, $\langle G_1+\beta P_2,G_2-\beta P_1\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3+\gamma P_3\rangle$, $\langle G_1+\beta P_2,G_2-\beta P_1,P_3\rangle$, $\langle G_1+\beta P_2,G_2-\beta P_1,G_3+\gamma P_3\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,P_3P_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_0,P_1,P_2,P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha P_3\rangle$: $\sim O$, $\sim\langle P_0\rangle$, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_3+\beta P_0\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2\rangle$, $\langle G_1+\beta P_2,G_2-\beta P_1\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_1,P_2,G_3\rangle$, $\langle G_3+\beta P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3\rangle$, $\langle G_1+\beta P_2,G_2-\beta P_1,G_3\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3+\beta P_0,\ P_1,P_2\rangle$;

$\langle O\rangle$: $\sim\langle G_1+\alpha P_2,P_3\rangle$, $\sim\langle G_2,G_1+\alpha P_3\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2+\alpha P_3\rangle$, $\sim\langle G_2,G_1+\gamma P_1+\beta P_3\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1+\beta G_2,G_2+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_1,P_1+\alpha G_2+\beta P_3\rangle$, $\langle P_1+\alpha G_2,G_1+\beta P_3\rangle$, $\langle P_1+\alpha G_2+\gamma G_1,G_1+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1,P_1+\alpha G_2+\beta P_3\rangle$, $\langle P_1+\alpha G_2,G_1+\gamma P_1+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1+\sigma P_3,P_1+\alpha G_2+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha G_2,P_1+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2+\gamma P_1+\rho P_2+\beta P_3\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2,P_3\rangle$, $\sim\langle G_1,P_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,P_1+\alpha P_2,P_3\rangle$, $\langle P_1,G_1+\alpha P_2,P_3\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2,G_3\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2,P_3\rangle$, $\langle G_1,P_1+\alpha G_2,P_3\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1,P_1+\alpha G_2,P_3\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1,G_2+\delta P_1,P_1+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_2,P_1,G_1+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1,P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1+\beta P_2,P_3\rangle$, $\langle G_2+\lambda P_1,G_1+\alpha P_2+\mu P_1,P_1+\beta P_3\rangle$, $\langle G_2+\rho P_3,P_1,G_1+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,P_1,G_2+\beta P_3\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2,G_3\rangle$, $\langle G_1,P_1+\alpha G_2,G_3\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1,P_1+\alpha G_2,G_3\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2,G_3\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1+(\lambda+\beta)P_2,G_3\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2+(\gamma+\beta)P_2,G_3\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2+\gamma P_2,G_3\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1+\lambda P_2,G_3\rangle$, $\langle G_2+\lambda P_2,G_1+\gamma P_1+\mu P_2,P_2+\alpha G_3\rangle$, $\langle G_2+\lambda P_1,G_1+\alpha P_2+\mu P_1,P_1+\beta G_3\rangle$, $\langle P_1+\gamma P_2+\lambda G_2,G_1+\alpha P_2+\mu G_2,G_2+$

*$\sim$ стоит перед алгебрами, являющимися также подалгебрами алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$.

$\beta G_3\rangle$, $\langle P_1+\gamma P_2+\lambda G_3, G_2, G_1+\alpha P_2+\beta G_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, P_1+\gamma P_2+\beta G_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2+\sum\limits_1^3\beta_i P_i, G_3+\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2+\gamma P_1\rangle$ $(\beta_3>0)$, $\sim\langle G_1+\alpha P_0, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, P_1+\beta P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_1+wP_3, P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_2, G_1+\alpha P_2, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, P_1, P_2+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_3, G_2, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2, G_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, G_3, P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, G_3, P_1+\gamma P_2\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_1, G_2, P_2, P_1+\alpha G_3\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_1, G_2+\beta P_1, P_2, P_1+\alpha G_3\rangle$, $\langle G_3, G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1+\beta P_2, P_3\rangle$, $\langle G_3, G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1, P_3\rangle$, $\langle G_3, G_1+\lambda P_1+\alpha P_2, G_2+\mu G_1+\gamma P_1, P_3+\beta P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma_1 P_1, G_2+\beta G_1+\gamma_2 P_2, G_3, P_3+\alpha P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma_1 P_1, G_2+\beta G_1+\gamma_2 P_2, G_3, P_3+\alpha P_2\rangle$ $(\gamma_1\neq 0$, $\gamma_2\neq 0)$, $\langle G_1+\lambda P_1+\alpha P_3, G_2+\mu G_1+\beta P_1, G_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2+\lambda G_1+\alpha P_3, G_3, P_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_0, G_1+\alpha P_2, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, P_2, P_1+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+wP_3, P_1+\beta P_3, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2, G_3, P_1+\beta P_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, G_3, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_3, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, G_3, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_1, G_3, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{L}O(3)$ — простая алгебра, то всякая подалгебра $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathcal{L}G(3)$ с условием $\pi(\mathfrak{L})=\mathcal{L}O(3)$ является расщепимой. Пусть $\mathcal{R}(3)$ — радикал $\mathcal{L}G(3)$ и $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}\cap\mathcal{R}(3)$. Если $\pi_1(\mathfrak{M})=0$, то в силу леммы 1.2 и того, что $\mathcal{L}O(3)$ действует неприводимо на $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, заключаем, что $\mathfrak{M}$ совпадает с одним из пространств: O, $\langle P_0\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$. Если $\pi_2(\mathfrak{M})=0$, то $\mathfrak{M}$ сопряжено одному из пространств: O, $\langle P_0\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$.

Допустим, что $\pi_1(\mathfrak{M})\neq 0$, $\pi_2(\mathfrak{M})\neq 0$. На основании леммы 3.1 $\mathfrak{M}$ содержит $G_1+\mu P_1$. Так как $\exp(\mu P_0)(G_1+\mu P_1)=G_1$, то можно предполагать, что $G_1\in\mathfrak{M}$. Но в таком случае $\mathfrak{M}$ совпадает с $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle\oplus s\langle P_0\rangle$, где $s\in\{0,1\}$.

Если $\mathfrak{L}$ — подалгебра $\mathcal{L}G(3)$ и $\pi(\mathfrak{L})=\langle J_{12}\rangle$, то в силу леммы 3.1 $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ f$, где f — подалгебра $\langle J_{12}, P_0\rangle$, а $\mathfrak{M}$ — подалгебра $\mathcal{R}(3)$ и $\mathfrak{M}=[J_{12},\mathfrak{M}]\oplus\mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}'\subset\langle G_3, P_0, P_3\rangle$. Алгебра $\mathfrak{M}'$ сопряжена с одной из алгебр, выписанных в лемме 5.1. При $[P_0,[J_{12},\mathfrak{M}]]=0$ следует считать, что $\mathfrak{M}'\neq\langle G_3+\gamma P_3\rangle$ $(\gamma\neq 0)$. Алгебра $[J_{12},\mathfrak{M}]$ сопряжена с одной из алгебр: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha>0)$.

Случаи, когда $\pi(\mathfrak{L})=0$, исследуются методом Ли–Гурса с использованием лемм 5.2–5.6. Проиллюстрируем это на примерах двух случаев.

Пусть $\pi_0(\mathfrak{L})=0$, $\pi_1(\mathfrak{L})=\langle G_1\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{L})=\langle P_2, P_3\rangle$. В этом случае мы проводим классификацию алгебр $\mathfrak{L}$ относительно группы матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix},$$

где $A\in O(2)$. Так как каждый одномерный идеал алгебры $\langle P_2, P_3\rangle$ сопряжен с $\langle P_3\rangle$, то $\mathfrak{L}$ сопряжена с $\langle G_1, P_2, P_3\rangle$ или с $\langle G_1+\alpha P_2, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$.

Пусть $\pi_0(\mathfrak{L})=0$, $\pi_1(\mathfrak{L})=\langle G_1, G_2\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{L})=\langle P_1, P_2, P_3\rangle$. Будем предполагать, что $\mathfrak{L}$ не сопряжена алгебре $\mathfrak{L}'$ с проекциями $\pi_1(\mathfrak{L}')$, $\pi_2(\mathfrak{L}')$, отличными от $\pi_1(\mathfrak{L})$, $\pi_2(\mathfrak{L})$. Согласно теореме 5.1 подалгебры алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ исчерпываются относительно $G(2)$-сопряженности алгебрами:

$\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1+\mu P_2\rangle$ $(\alpha>0,\ \mu\geq 0)$;

$\langle G_2, G_1+\alpha P_2, P_1\rangle$ $(\alpha>0)$; (5.5)
$\langle G_1, G_2, P_1, P_0\rangle$.

Для каждой алгебры $\mathfrak{M}$ вида (5.5) классифицируем подалгебры алгебры $\mathfrak{M}\oplus\langle P_3\rangle$. С этой целью в $\mathfrak{M}$ находим идеалы $\mathfrak{U}$, для которых $\dim\mathfrak{M}|\mathfrak{U}=1$, а затем классифицируем эти идеалы относительно нормализатора $\mathfrak{M}$ в $G(2)$. Подалгебры алгебры $\mathfrak{M}\oplus\langle P_3\rangle$, отличные от $\mathfrak{M}\oplus\langle P_3\rangle$, сопряжены алгебрам $\mathfrak{U}\oplus\langle X+\lambda P_3\rangle$, где $X\in\mathfrak{M}$, $X\notin\mathfrak{U}$. Применяя автоморфизм алгебры $\mathcal{L}G(3)$, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{1,1,-1\}$, получаем, что $\lambda>0$. Следовательно, $\mathfrak{L}$ сопряжена одной из алгебр:

$\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1+\mu P_2, P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \mu\geq 0)$;
$\langle G_1+\alpha P_2, G_2+\delta P_1+\mu P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \delta\neq 0)$;
$\langle G_2, G_1+\alpha P_2, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_2+\lambda P_1, G_1+\alpha P_2+\mu P_1, P_1+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R})$;
$\langle G_2+\lambda P_3, P_1, G_1+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda\in\mathbb{R})$;
$\langle G_1+\alpha P_2, P_1, G_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$;
$\langle G_1+\lambda P_2, G_2, P_1, P_2+\alpha P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \lambda\geq 0)$;
$\langle G_2, P_1, P_2, G_1+\alpha P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$.

Теорема доказана.

Теорема 5.4. *Подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(3)$-сопряженности подалгебрами алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$, алгебрами, отмеченными в теореме 5.3 знаком $\sim$, полными прообразами подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(3)$ при гомоморфизме $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$ на $\mathcal{L}G(3)$ с ядром $\langle M\rangle$ и такими алгебрами:*

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_0+\gamma M\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_0+\gamma M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}+\beta M\rangle$: O, $\langle P_3\rangle$, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_3+\alpha P_0\rangle$, $\langle P_0, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_3+\alpha P_0\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3+\gamma P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}+\alpha M, P_0+\gamma M, P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \gamma\neq 0)$; $\langle J_{12}, P_0+\gamma M, P_3\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}, P_0+\gamma M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle J_{12}+\alpha M, P_0+\gamma M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}+\alpha P_0+\gamma M\rangle$: $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}+\alpha P_3+\beta M\rangle$: $\langle P_0+\lambda M\rangle$, $\langle P_0+\lambda M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda\in\mathbb{R})$;
$\langle G_1+\alpha P_2, G_2+\alpha P_1+\lambda P_2+\beta P_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda\in\mathbb{R})$;
$\langle G_1+\alpha P_2, G_2+\alpha P_1+\mu P_2+(\alpha\lambda+\alpha^{-1}\gamma\mu)P_3, G_3+\lambda G_1+\alpha^{-1}\gamma G_2+\gamma P_1\rangle$ $(\alpha>0,\ \gamma\neq 0,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \lambda\neq-\alpha^{-2}\gamma\mu)$.

Доказательство теоремы 5.4 аналогично доказательству теоремы 5.2.

1. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981, 342 с.
2. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
3. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
5. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И., Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам, *Теор. мат. физ.*, 1976, **26**, № 2, 206–220.

6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Reduction of the representations of the generalised Poincaré algebra by the Galilei algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, № 7, 2319–2330.

7. Баранник Л.Ф., Об унитарных проективных представлениях группы Галилея, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 108–118.

8. Fushchych W.I., Krivsky I.Ju., On a possible approach to the variable mass problem, *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, № 1, 79–82.

9. Fushchych W.I., Krivsky I.Ju., On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space, *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, № 4, 573–585.

10. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I, *Теор. мат. физ.*, 1970, **4**, № 3, 360–382.

11. Fushchych W.I., On a motion equations for two particles in relativistic quantum mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **10**, № 4, 163–168.

12. Le Bellac M., Vary-Leblond J.M., Galilean electromagnetism, *Nuovo Cimento B*, 1973, **14**, № 1, 217–235.

13. Burdet G., Perrin M., Sorba P., *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, 1436; 2253.

14. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 808–810.

15. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.

16. Sorba P., The Galilei group and its connected subgroups, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 6, 941–953.

17. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.

18. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 2, 2259–2288.

19. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.

Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$

W.I. FUSHCHYCH, A.F. BARANNIK, L.F. BARANNIK, V.M. FEDORCHUK

An exhaustive description of the non-splitting subalgebras of the $LP(1,4)$ algebra with respect to $P(1,4)$ conjugation is presented.

1. Introduction

The generalised Poincaré group $P(1,4)$ is the group of inhomogeneous pseudoorthogonal transformations of the five-dimensional pseudo-Euclidean space with the scalar product $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$. The $P(1,4)$ group is the simplest one which contains the Poincaré group $P(1,3)$ as a subgroup. Fushchych and Krivsky [11, 12] and Fushchych [10] have used the $P(1,4)$ group and its unitary representations to describe particles with variable mass and spin. An arbitrary partial differential equation which is invariant under the $P(1,4)$ group is also invariant under the $P(1,3)$ group as well as under the extended Galilei group $\widetilde{G}(1,3)$ since $\widetilde{G}(1,3) \subset P(1,4)$ (Fushchych and Nikitin [13]). The papers of Aghassi et al [1, 2] deal with irreducible representations of $P(1,4)$ and $C(1,4)$, using the latter in the theory of elementary particles. Kadyshevsky [16] proposed using the $P(1,4)$ group in field theory with the fundamental length. The $P(1,4)$ group is the invariance group of the relativistic Hamilton–Jacobi equation (Fushchych and Serov [14]) and the Monge–Ampere equation (Fushchych and Serov [15]). These nonlinear equations are invariant under transformations of the $P(1,4)$ group with the fifth coordinate as $x_4 \equiv u$, where $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$. So it is important to investigate the subgroup structure of the $P(1,4)$ group. In particular, these results can be used in the separation of variables of many important partial differential equations.

The splitting subalgebras of $LP(1,4)$ were described by Fedorchuk [6, 7]. Some high-dimension non-splitting subalgebras of $LP(1,4)$ were listed by Fedorchuk and Fushchych [9] and Fedorchuk [8]. In this paper we list all the non-splitting subalgebras of the $LP(1,4)$ algebra with respect to $P(1,4)$ conjugation. In the papers of Lassner [17], Bacry et al [3, 4, 5] and Patera et al [18] all the subalgebras of $LP(1,3)$ are classified with respect to $P(1,3)$ conjugation, so we consider such subalgebras of $LP(1,4)$ which are non-conjugate to the subalgebras of $LP(1,3)$. In our paper we use the method due to Patera et al [16].

2. Some auxiliary remarks

The $LP(1,4)$ algebra is defined by the following computation relations:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},$$
$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \qquad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \qquad [P_\alpha, P_\beta] = 0,$$

where $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ if $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)$.

J. Phys. A: Math. Gen., 1985, **18**, P. 2893–2899.

Below we shall use the following notation: $K_a = J_{0a} - J_{a4}$ $(a = 1, 2, 3)$; $W = \langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ is a space or Lie algebra over the real number field R with the generating elements $X_1, \ldots, X_s$; $V = \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$; π is a projection $LP(1,4)$ on $LO(1,4)$; $\pi_{a,\ldots,q}$ is a projection $LP(1,4)$ on $\langle P_a, \ldots, P_q\rangle$.

Lemma 1. *Let W be a subspace of V invariant under* $\mathrm{Ad}\, J_{ab}$ $(1 \le a < b \le 4)$. *If $\pi_{a,b}(W) \ne 0$ then $P_a, P_b \in W$.*

Proof. Let $X = \sum x_\alpha P_\alpha \in W$ and $\pi_{ab}(X) \ne 0$. Obviously,

$$[J_{ab}, X] = x_a P_b - x_b P_a, \qquad [J_{ab}, [J_{ab}, X]] = -x_a P_a - x_b P_b.$$

Since the vectors obtained are linearly independent, so $P_a, P_b \in W$ and this proves the lemma.

Lemma 2. *If $W \subset V$ and $[J_{0a}, W] \subset W$ and if $\pi_{0,a}(W) \ne 0$, then the subspace W contains $P_0 + P_a$ or $P_0 - P_a$.*

Corollary. *Let $W \subset V$ and $[J_{0a}, W] \subset W$. If $\pi_{0,a}(W) \ne 0$, then within the conjugation corresponding to the element*

$$diag\,(\underbrace{1, \ldots, -1}_{a+1}, \ldots, 1)$$

from $O(1,4)$ group W contains $P_0 + P_a$.

Lemma 3. *Let W be a subspace of V invariant under* $\mathrm{Ad}\,(J_{0a} + \gamma J_{cd})$, *where $\gamma \in R$, $\gamma \ne 0$, $0, a, c, d$ are mutually different. Then $W = \pi_{0,a}(W) \oplus s\langle P_b\rangle$, where $s \in \{0, 1\}$, $b \notin \{0, a, c, d\}$.*

Proof. If

$$X = \sum_{0}^{4} \alpha_j P_j \in W$$

then W contains the elements

$$\begin{aligned}
X_1 &= [J_{0a} + \gamma J_{cd}, X] = -\alpha_0 P_a - \alpha_a P_0 + \gamma(\alpha_c P_d - \alpha_d P_c),\\
X_2 &= [J_{0a} + \gamma J_{cd}, X_1] = \alpha_0 P_a + \alpha_a P_0 + \gamma^2(-\alpha_c P_c - \alpha_d P_d),\\
X_3 &= [J_{0a} + \gamma J_{cd}, X_2] = -\alpha_0 P_a - \alpha_a P_0 + \gamma^3(-\alpha_c P_d + \alpha_d P_c).
\end{aligned}$$

Since $X_1 - X_3 = (\gamma + \gamma^3)(\alpha_c P_d - \alpha_d P_c)$ and $\gamma \ne 0$, then $\alpha_c P_d - \alpha_d P_c \in W$ whence $\pi_{c,d}(X), \pi_{0,a}(X) \in W$. Thus, this lemma is proved.

Lemma 4. *Let W be a subspace of V invariant under* $\mathrm{Ad}\, K_a$. *If $\pi_{0,4}(W) \not\subset \langle P_0 + P_4\rangle$ then $P_0 + P_4, P_a \in W$. If $\pi_a(W) \ne 0$ then $P_0 + P_4 \in W$.*

Proof. Let W contains the vector $X = \sum \alpha_j P_j$, then W also contains $X_1 = [X, K_a] = \alpha_a(P_0 + P_4) + (\alpha_0 - \alpha_4)P_a$, $X_2 = [X_1, K_a] = (\alpha_0 - \alpha_4)(P_0 + P_4)$. If $\alpha_0 - \alpha_4 \ne 0$ then $P_0 + P_4, P_a \in W$. If $\alpha_0 - \alpha_4 = 0$, $\alpha_a \ne 0$ then $P_0 + P_4 \in W$. Thus this lemma is proved.

Lemma 5. *Let W be a subspace of V invariant under* $\mathrm{Ad}\,(K_a - J_{bc})$, *where $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$. Then W is invariant under* $\mathrm{Ad}\, K_a$ *and* $\mathrm{Ad}\, J_{bc}$.

Proof. Let $X = K_a - J_{bc}$, $Y \in W$. Since $[X, [X, [X, Y]]] = [J_{bc}, Y]$, then $[J_{bc}, W] \subset W$, $[K_a, W] \subset W$. Thus, the lemma is proved.

Lemma 6. *Let F be a subalgebra of $LO(1,4)$ with the generators J_{04} and K_a, where a covers a subset I of the set $\{1,2,3\}$. If A is a subalgebra of $LP(1,4)$ and $\pi(A)=F$, then within the conjugation with respect to the group of translations A contains elements K_a $(a\in I)$ and $J_{04}+\delta_1P_1+\delta_2P_2+\delta_3P_3$.*

Proof. Let $X_a=K_a+\sum\alpha_iP_i$, $Y=J_{04}+\sum\delta_iP_i$ $(i=0,1,2,3,4)$. By the automorphism $\exp(t_1P_0+t_2P_4)$ the coefficients δ_0, δ_4 can be made zero. Since $[Y,X_a]=-K_a+\delta_a(P_0+P_4)-\alpha_0P_4-\alpha_4P_0$, one can therefore consider $X_a=K_a+\gamma P_0$ within the automorphism $\exp(tP_a)$. Evidently $[Y,X_a]+X_a=(\delta_a+\gamma)P_0+(\delta_a-\gamma)P_4$. If $\gamma\neq 0$ then $P_0+P_4\in A$ by lemma 4. Therefore we have $P_0,P_4\in A$ and hence $\gamma=0$ within the conjugation. Thus, this lemma is proved.

Lemma 7. *Let A be a subalgebra of $LP(1,4)$, $X=J_{12}+cJ_{04}+\beta P_3$, $Y=K_3+\sum\gamma_iP_i$ $(i=1,2,3,4;\ c>0)$. If $X,Y\in A$, then A contains K_3.*

Proof. It is easy to obtain

$$cY-[X,Y]=(\beta-c\gamma_4)P_0+(c\gamma_1-\gamma_2)P_1+(c\gamma_2+\gamma_1)P_2+c\gamma_3P_3+(c\gamma_4+\beta)P_4.$$

According to lemma 3 $(\beta-c\gamma_4)P_0+(c\gamma_4+\beta)P_4,(c\gamma_1-\gamma_2)P_1+(c\gamma_2+\gamma_1)P_2\in A$. If $\gamma_4\neq 0$ then lemma 4 yields $P_0,P_4\in A$. If $c\gamma_1-\gamma_2=0$, $c\gamma_2+\gamma_1=0$ then $\gamma_1=\gamma_2=0$. Thereafter using lemma 1 we can put $\gamma_1=\gamma_2=0$. Since $c\gamma_3P_3\in A$ one can admit that $\gamma_3=0$. Thus the lemma is proved.

Lemma 8. *Let A be a subalgebra of $LP(1,4)$, $\varphi=\exp(-\omega K_b)$ $(\omega\in R,\ \omega\neq 0)$. If $P_0+P_4,P_b+\omega^{-1}P_4\in A$ $(1\le b\le 3)$ then the algebra $\varphi(A)$ contains P_0 and P_4.*

Proof. According to the Campbell–Hausdorff formula we have

$$\varphi(P_0+P_4)=P_0+P_4,\qquad \varphi(P_0+\omega^{-1}P_4)=\omega^{-1}P_4+\frac{1}{2}\omega(P_0+P_4).$$

This gives that $P_0+P_4,P_4\in\varphi(A)$, therefore $P_0,P_4\in\varphi(A)$. Thus this lemma is proved.

3. The non-splitting subalgebras of the $LP(1,4)$ algebra

Let $\widetilde{F}$ be an subalgebra of $LP(1,4)$ such that $\pi(\widetilde{F})=F$. An expression $\widetilde{F}+W$ means that $[F,W]\subset W$ and $\widetilde{F}\cap V\subset W$. As concerns the non-splitting algebras $\widetilde{F}+W_1,\dots,\widetilde{F}+W_s$ we will use the notation $\widetilde{F}:W_1,\dots,W_s$.

Theorem. *Let $\alpha,\beta,\delta,\mu,\omega\in R$, $\alpha>0$, $\omega>0$, $\mu\ge 0$ and this takes place for all labelling variables. The non-splitting subalgebras of the $LP(1,4)$ algebra are exhausted by the non-splitting subalgebras of the $LP(1,3)$ algebra and the following subalgebras:*

$\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$: $\langle P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$;
$\langle J_{12}+P_0+P_3\rangle$: $\langle P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_4\rangle$;
$\langle J_{12}+\alpha P_3\rangle$: $\langle P_4\rangle$, $\langle P_0+P_4\rangle$, $\langle P_0,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_4\rangle$, $\langle P_0+P_4,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,P_4\rangle$;
$\langle J_{12}+P_0\rangle$: $\langle P_0+P_4,P_3\rangle$, $\langle P_0+P_4,P_1,P_2,P_3\rangle$;
$\langle J_{12}+J_{34}+\alpha P_0\rangle$: 0, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$;
$\langle J_{12}+cJ_{34}+\alpha P_0\rangle$: 0, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$ $(0<c<1)$;
$\langle J_{04}+\alpha P_3\rangle$: $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0+P_4,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,P_4\rangle$;
$\langle J_{12}+cJ_{04}+\alpha P_3\rangle$: 0, $\langle P_0+P_2\rangle$, $\langle P_0,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0+P_4,P_1,P_4\rangle$, $\langle P_0,P_1,P_2,P_4\rangle$ $(c>0)$;

$\langle K_3+P_2\rangle$: $\langle P_1\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1+\omega P_3\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_3, P_4\rangle$;

$\langle K_3+P_4\rangle$: $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1+\omega P_3, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle K_3 - J_{12} + \alpha P_4\rangle$: 0, $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha P_0, J_{34} + \mu P_0\rangle$: 0, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$; $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha P_0, P_1, P_2\rangle$;

$\langle J_{04} + \alpha P_3, J_{12} + \mu P_3\rangle$: 0, $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;

$\langle J_{04}, J_{12}+\alpha P_3\rangle$: 0, $\langle P_0+P_4\rangle$, $\langle P_0, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;

$\langle J_{12} + P_0 + P_4, K_3 + \mu P_4\rangle$; $\langle J_{12}, K_3 + P_4\rangle$;

$\langle J_{12} + \mu P_3, K_3 + P_4, P_0 + P_4\rangle$; $\langle J_{12} + \alpha P_3, K_3, P_0 + P_4\rangle$;

$\langle J_{12} + P_0 + P_4, K_3 + \mu P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle J_{12}, K_3 + P_4, P_1, P_2\rangle$;

$\langle J_{12} + \mu P_4, K_3 + P_4, P_0 + P_4, P_3\rangle$; $\langle J_{12} + P_4, K_3, P_0 + P_4, P_3\rangle$;

$\langle J_{12} + \mu P_3, K_3 + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle J_{12} + \alpha P_3, K_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$;

$\langle J_{12} + \mu P_4, K_3 + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle J_{12} + P_4, K_3, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle K_1 + \mu P_2 + P_3, K_2 + \mu P_1 + \beta P_2\rangle$; $\langle K_1, K_1 \pm P_2, P_3\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 + P_1 + \beta P_2, P_3\rangle$; $\langle K_1 + \alpha P_2 + P_3, K_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2, P_0 + P_4\rangle$;

$\langle K_1 + P_3, K_2 + \mu P_1 + \beta P_2, P_0 + P_4\rangle$; $\langle K_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3, K_2 + P_4, P_0 + P_4, P_1\rangle$;

$\langle K_1 + P_2 + \alpha P_3, K_2 + \beta P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$; $\langle K_1 + P_2, K_2 + \alpha P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$;

$\langle K_1 + P_3, K_2 + \mu P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$; $\langle K_1, K_2 + P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2, P_0 + P_4, P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2 \pm P_2, P_0 + P_4, P_3\rangle$;

$\langle K_1 + P_2 + \beta P_3, K_2 + \delta P_3, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$;

$\langle K_1 + P_3, K_2 + \mu P_3, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2 + P_3, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$;

$\langle K_1 + P_3, K_2, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle K_1 + P_4, K_2 + \alpha P_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2, P_0 + P_4, P_1, P_3\rangle$; $\langle K_1 + P_2, K_2 + \alpha P_4, P_0 + P_4, P_1, P_3\rangle$;

$\langle K_1, K_2 + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2 + P_3, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3, P_2\rangle$;

$\langle K_1 + P_4, K_2 + \mu P_3, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3, P_2\rangle$; $\langle K_1 + P_3, K_2, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;

$\langle K_1 + P_4, K_2, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle K_3, J_{04} + \alpha P_1, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3, P_2\rangle$;

$\langle K_3, J_{04}+\alpha P_2\rangle$: $\langle P_1\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1+\omega P_3\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_3, P_4\rangle$;

$\langle K_3, J_{04} + \alpha P_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle K_3, J_{04} + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$;

$\langle K_3, J_{04} + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$;

$\langle K_3, J_{12} + cJ_{04} + \alpha P_3\rangle$: $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$ $(c > 0)$;

$\langle K_3, J_{04} + \mu_1 P_3, J_{12} + \mu_2 P_3\rangle$: $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$ $(\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0)$;

$\langle K_1, K_2, J_{12} + \alpha P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2, J_{12} + P_0 + P_4, P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2, J_{12} + \alpha P_3, P_0 + P_4\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 - P_1, J_{12} + \alpha P_3, P_0 + P_4\rangle$; $\langle K_1 + P_2, K_2 - P_1, J_{12}, P_0 + P_4, P_3\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{12} + \alpha P_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle K_1, K_2, J_{12} + \alpha P_3, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{12} + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{04} + \alpha P_1\rangle$: $\langle P_0 + P_4, P_3\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3, P_2\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{04} + \alpha P_2\rangle$: $\langle P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_3\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{04}+\alpha P_3\rangle$: 0, $\langle P_0+P_4\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{04} + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, P_0 + P_4, P_1 + \omega P_3\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{04} + \alpha_1 P_1 + \alpha_3 P_3, P_0 + P_4\rangle$; $\langle K_1, K_2, J_{04} + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$;

$\langle K_1, K_2, J_{12}+cJ_{04}+\alpha P_3\rangle$: 0, $\langle P_0+P_4\rangle$, $\langle P_0+P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$ $(c > 0)$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 + P_1 + \beta P_2 + \mu P_3, K_3 + \mu P_2 + \delta P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2 \pm P_2, K_3 + \beta P_3\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \alpha P_3, K_3 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \delta_3 P_3, P_0 + P_4\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2, K_3 + \alpha P_1 + \delta_2 P_2 + \delta_3 P_3, P_0 + P_4\rangle$;

$\langle K_1 + P_2, K_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2, K_2 + \mu P_2 + \delta P_2, P_0 + P_4\rangle$;

$\langle K_1, K_2 \pm P_2, K_3+\beta P_3, P_0+P_4\rangle$; $\langle K_1+P_2, K_2+\alpha P_3, K_3+\beta P_2+\delta P_3, P_0+P_4, P_1\rangle$;
$\langle K_1 + P_2, K_2, K_3 + \mu P_2 + \beta P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$;
$\langle K_1, K_2 + P_3, K_3 + \beta P_2 + \delta P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3 \pm P_3, P_0 + P_4, P_1\rangle$;
$\langle K_1 + P_3, K_2, K_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3 + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$;
$\langle K_1 + \alpha P_3, K_2, K_3 + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$; $\langle K_1 + P_4, K_2, K_3, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle K_1 \pm \alpha P_1, K_2 \pm \alpha P_2, J_{12} - K_3\rangle$;
$\langle K_1 + \beta P_1 + \mu P_2, K_2 - \mu P_1 + \beta P_2, J_{12} - K_3, P_0 + P_4\rangle$ $(\beta^2 + \mu^2 > 0)$;
$\langle K_1 + \alpha P_2, K_2 - \alpha P_1, J_{12} - K_3, P_0 + P_4, P_3\rangle$;
$\langle K_1, K_2, J_{12} - K_3 + \alpha P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s = 0, 1)$;
$\langle J_{12} + J_{34}, J_{12} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{34} + \alpha P_0\rangle$: 0, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$;
$\langle K_1, K_2, J_{04} + \alpha P_3, J_{12} + \mu P_3\rangle$: 0, $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;
$\langle K_1, K_2, J_{04}, J_{12} + \alpha P_3\rangle$: 0, $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3 \pm P_3, J_{12}\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3 + \beta P_3, J_{12} + P_0 + P_4\rangle$;
$\langle K_1 + P_2, K_2 - P_1, K_3 + \beta P_3, J_{12} + \mu P_3, P_0 + P_4\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3 \pm P_3, J_{12} + \mu P_3, P_0 + P_4\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3, J_{12} + \alpha P_3, P_0 + P_4\rangle$;
$\langle K_1+P_2, K_2-P_1, K_3, J_{12}, P_0+P_4, P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3+P_4, J_{12}+\mu P_3, P_0+P_4, P_1, P_2\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3, J_{12} + \alpha P_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3 + P_4, J_{12} + \mu P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3, J_{12} + P_4, P_0 + P_4, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3, J_{04} + \alpha P_1, P_0 + P_4\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3, J_{04} + \alpha P_2, P_0 + P_4, P_1\rangle$; $\langle K_1, K_2, K_3, J_{04} + \alpha P_3, P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$;
$\langle K_1, K_2, K_3, J_{12} + cJ_{01} + \alpha P_3\rangle$: $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$ $(c > 0)$;
$\langle K_1, K_2, K_3, J_{04} + \mu_1 P_3, J_{12} + \mu_2 P_3\rangle$: $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0 + P_4, P_1, P_2\rangle$ $(\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0)$.

Proof. The subalgebras of $LO(1,4)$ are classified by Patera et at [19]. For every algebra Fedorchuk [6, 7] has found invariant subspaces of the space V. Using these results together with lemmas 1–8, we will find the non-splitting subalgebras of the $LP(1,4)$ algebra. Below we consider some examples in detail.

Let A be a subalgebra $LP(1,4)$, $W = A \cap V$.

Suppose that $\pi(A) = \langle J_{12}\rangle$. Within the automorphism $\exp(t_1P_1+t_2P_2)$ the algebra A contains the element $X = J_{12} + \lambda P_0 + \rho P_3 + \sigma P_4$ $(\lambda, \rho, \sigma \in R)$. Since

$$\exp(tJ_{04})(\lambda P_0 \sigma P_4) = (\lambda \cosh t - \sigma \sinh t)P_0 + (\sigma \cosh t - \lambda \sinh t)P_4$$

then if $P_0+P_4 \in W$ one can write $X = J_{12}+e^t(\lambda-\sigma)P_0+\rho P_3$. Since $\exp(\pi J_{13})(X) = -J_{12} + e^t(\lambda - \sigma)P_0 - \rho P_3$, we consider $\lambda - \sigma \geq 0$. If $\lambda - \sigma > 0$ then putting $t = -\ln(\lambda-\sigma)$, we obtain the algebra $W \subset\!\!\!\!\!+ \ \langle J_{12}+P_0+\rho P_3\rangle$. Applying the automorphism $\exp(tK_3)$, one can put $\rho = 0$. If $\lambda - \sigma = 0$ then $A = W \subset\!\!\!\!\!+ \ \langle J_{12} + \rho P_3\rangle$, $\rho \neq 0$.

Let $P_0 + P_4 \notin W$. If $P_3, P_4 \in W$ then $\lambda > 0$, $\rho = \sigma = 0$. If $W = \langle P_4\rangle$ or $W = \langle P_1, P_2, P_4\rangle$ then $\sigma = 0$. Applying the automorphism $\exp(tJ_{03})$ we reduce this case to the following ones $\lambda = \rho = 1$ or $\lambda = 0$, $\rho > 0$.

Suppose that $\pi(A) = \langle K_1, K_2, J_{12} + cJ_{04}\rangle$ $(c > 0)$ one can suppose that A contains the elements

$$X_1 = K_1 + \sum_0^4 \lambda_i P_i, \qquad X_2 = K_2 + \sum_0^4 \rho_i P_i, \qquad X_3 = J_{12} + cJ_{04} + \sigma P_3.$$

Obviously, $[X_1, X_2] = (\lambda_2 - \rho_1)(P_0 + P_4) + (\lambda_0 - \lambda_4)P_2 - (\rho_0 - \rho_4)P_1$. If $\lambda_0 - \lambda_4 \neq 0$ or $\rho_0 - \rho_4 \neq 0$ then using lemma 1, we obtain $P_1, P_2, \in A$. Therefore $P_0 + P_4 \in A$ and one can put $\lambda_i = \rho_i = 0$ for $i = 0, 1, 2$. Later, $[X_3, X_1] = K_2 - cK_1 - c\lambda_4 P_0$,

$[X_3, X_2] = -K_1 - cK_2 - c\rho_4 P_0$. Therefore $\lambda_3 = \rho_3 = 0$, $\lambda_4 P_4 + c\rho_4(P_4 - P_0), -\rho_4 P_4 + c\lambda_4(P_4 - P_0) \in A$. The determinant constructed by the coefficients of P_4, $P_4 - P_0$ is equal to $c(\lambda_4^2 + \rho_4^2)$. If $\lambda_4^2 + \rho_4^2 \neq 0$ then $P_4, P_4 - P_0 \in A$. So we have the algebra $\langle K_1, K_2, J_{12} + cJ_{04} + \sigma P_3, P_0 + P_4, P_1, P_2, sP_0\rangle$ $(s = 0, 1)$.

Let $\lambda_0 - \lambda_4 = 0$, $\rho_0 - \rho_4 = 0$, $\lambda_3 = \rho_3 = 0$. Obviously,

$$[X_3, X_1] = K_2 - cK_1 + \lambda_1 P_2 + \lambda_2 P_1 - c\lambda_0(P_0 + P_4),$$
$$[X_3, X_2] = -K_1 - cK_2 + \rho_1 P_2 - \rho_2 P_1 - c\rho_0(P_0 + P_4),$$
$$[X_3, X_1] + cX_1 - X_2 = (c\lambda_1 - \lambda_2 - \rho_1)P_1 + (c\lambda_2 + \lambda_1 - \rho_2)P_2 - \rho_0(P_0 + P_4),$$
$$[X_3, X_2] + X_1 + cX_2 = (\lambda_1 + c\rho_1 - \rho_2)P_1 + (\lambda_2 + c\rho_2 + \rho_1)P_2 + \lambda_0(P_0 + P_4).$$

If on the right-hand side of one of the last two equalities some coefficients of P_1, P_2 are non-zero, so by lemmas 1 and 3 $P_1, P_2, P_0 + P_4 \in A$. Let $c\lambda_1 - \lambda_2 - \rho_1 = 0$, $c\lambda_2 + \lambda_1 - \rho_2 = 0$, $\lambda_1 + c\rho_1 - \rho_2 = 0$, $\lambda_2 + c\rho_2 + \rho_1 = 0$. The determinant formed by the coefficients of λ_1, λ_2, ρ_1, ρ_2 is equal $c^2(4 + c^2)$. We obtain $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$, $\lambda_0(P_0 + P_4), \rho_0(P_0 + P_4) \in A$ and therefore

$$A = W + \langle K_1, K_2, J_{12} + cJ_{04} + \sigma P_3\rangle, \qquad W \subset V.$$

Let $\pi(A) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$. Because of the simplicity of the algebra $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$ one can assume that A contains the elements J_{12}, J_{13}, J_{23}, $X = J_{04} + \sum \gamma_i P_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Applying lemma 1 to $[J_{12}, X]$, $[J_{13}, X]$, we conclude that $\sum \gamma_i P_i \in A$, i.e. A is a splitting algebra.

When the algebra $\pi(A)$ coincides with one of the following algebras: $\langle K_3, J_{04}\rangle$, $\langle K_1, K_2, J_{04}\rangle$, $\langle K_1, K_2, K_3, J_{04}\rangle$, one has to apply lemma 6. If $\pi(A)$ contains $J_{12}+cJ_{04}$, K_a, where $a \in I \subset \{1, 2, 3\}$, then we apply lemma 7. Thus, this theorem is proved.

1. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., *Phys. Rev. D*, 1970, **1**, 2753–2765.
2. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, 2297–2301.
3. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group, I and II, Preprints, Marseille, 1972.
4. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Rep. Math. Phys.*, 1974, **5**, 145–186.
5. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., *Rep. Math. Phys.*, 1974, **5**, 361–392.
6. Fedorchuk V.M., Preprint 78-18, Mathematical Institute, Kyiv, 1978.
7. Fedorchuk V.M., *Ukrainian Math. J.*, 1979, **31**, 717–722.
8. Fedorchuk V.M., *Ukrainian Math. J.*, 1981, **33**, 696–700.
9. Fedorchuk V.M., Fushchych W.I., in Group-Theoretical Methods in Physics, Proc. Int. Seminar, Svenigorod, 1979, Moscow, Nauka, 1980, 61–66.
10. Fushchych W.I., *Teor. Math. Fiz.*, 1970, **4**, 360–367.
11. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79–87.
12. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 537–544.
13. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, 2319–2330.
14. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3656.
15. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1983, **273**, 543–546.
16. Kadyshevsky V.G., *Fiz. Elem. Chastiz At. Yad.*, 1980, **11**, 5–36.
17. Lassner W., Die Zussamenhangenden Untergruppen der Poincare Gruppe, Preprint, Leipzig, 1970.
18. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597–1614.
19. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 717–728.

The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equation

W.I. FUSHCHYCH, R.M. CHERNIHA

The second-order partial differential equations invariant under transformations of Galilei, rotation, scale and projection are described.

1. Introduction

From the mathematical point of view the Galilean relativistic principle (in a restricted sense) is nothing other than the requirement of the equations of motion to be invariant under the linear transformations

$$t \to t' = t, \qquad x_a \to x'_a = x_a + v_a t, \quad a = 1, 2, 3,$$

v_a being transformation parameters (the inertial reference system velocity $\boldsymbol{v}$ component). These transformations form a three-parameter Lie group. In order to construct linear and nonlinear partial differential equations (PDE)

$$\mathcal{L}U(t, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

(where $\mathcal{L}$ is a linear or nonlinear operator, which is invariant under the Galilean transformations) it is also necessary to give the law of transformation for the dependent variable of $U(t, \boldsymbol{x})$. Under different transformation laws of the function $U(t, \boldsymbol{x})$ we obtain different classes of PDE.

As is well known, the linear heat equation in the $(n+1)$-dimensional space

$$\begin{aligned} &\Delta U = \lambda U_0, \qquad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2, \qquad U = U(t, \boldsymbol{x}), \\ &U_0 = U_t = \partial U/\partial t, \qquad \lambda = \text{const} \end{aligned} \tag{1.1}$$

is invariant under the following transformations:

$$t \to t' = t, \qquad x_a \to x'_a = x_a + v_a t, \quad a = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

$$U \to U' = \exp\left[-\frac{1}{2} v_a \left(x_a + \frac{1}{2} v_a t\right)\right], \tag{1.3}$$

v_a being the transformation parameters.

(1.3) defines the transformation law for the dependent function $U(t, \boldsymbol{x})$ under the Galilean transformations (1.2).

The $\frac{1}{2}(n^2 + 3n + 6)$-dimensional algebra with basic elements

$$G_a = t\partial_a - \frac{1}{2}\lambda x_a U \partial_U, \qquad \partial_a = \partial/\partial x_a, \qquad \partial_U = \partial/\partial U, \qquad a = \overline{1, n}, \tag{1.4a}$$

$$J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \qquad a \neq b, \qquad a, b \neq \overline{1, n}, \tag{1.4b}$$

J. Phys. A: Math. Gen., 1985, **18**, P. 3491–3503.

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \left(\frac{1}{4}\lambda|x|^2 + \frac{1}{2}nt\right)U\partial_U, \qquad |x|^2 = x_ax_a, \tag{1.4c}$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + kU\partial_U, \qquad k = \text{constant}, \tag{1.4d}$$

$$P_0 = \partial_t, \qquad P_a = \partial_a \tag{1.4e}$$

(where the repeated indices imply summation) is maximal in the Lie restriction invariance algebra (IA) of (1.1).

The set of operators (1.4) forms a Lie algebra, which will be noted by the symbol $SLi(1,n)$, i.e. the special Lie algebra. This name is natural because in the previous century Lie [10] (see also Ovsyannikov [13]) was the first to calculate the maximal IA of the two-dimensional $U(t,x_a)$ heat equation. The maximal IA of the $(3+1)$-dimensional Schrödinger equation, which coincides with (1.1) (differing only by constant coefficients), was calculated by Niederer [11]. For some more details on this, see, for example, Fushchych and Nikitin [6, 7].

From the group-theoretical point of view (1.3) defines the projective representation of the group (1.2). Apart from the projective representation (1.3) the group (1.2) has another representation, the infinitesimal operator of which

$$\widetilde{G}_a = t\partial_a, \qquad a = \overline{1,n} \tag{1.5}$$

being different from the G_a operators (1.4a).

The operators (1.5) generate the following transformations:

$$t \to t' = t, \qquad x_a \to x'_a = x_a + v_at, \qquad U \to U' = U. \tag{1.6}$$

We call (1.2) and (1.3) the projective Galilean transformations (PGT) and (1.6) the Galilean transformations (GT).

Equation (1.1) admits operators (1.4a) but does not admit operators (1.5).

In § 2 we describe the nonlinear second-order PDE

$$F(t,x,U,U_0,\underset{I}{U},\underset{II}{U}) \equiv -\Delta U + A(t,x,U)U_t + B(t,x,U,\underset{I}{U}) = 0, \tag{1.7}$$

where

$$\underset{I}{U} = (U_1,\dots,U_n), \qquad \underset{II}{U} = (U_{11},U_{12},\dots,U_{nn}),$$
$$U_a = \partial U/\partial x_a, \qquad U_{ab} = \partial^2U/\partial x_a\partial x_b, \qquad a,b = \overline{1,n},$$

F, A, B being arbitrary differentiable functions, invariant under the PGT (1.2) and (1.3) as well as projective and scale transformations generated by operators (1.4c) and (1.4d).

In § 3 we construct the most general nonlinear PDE of the form

$$F(t,x,U,U_0,\underset{I}{U},U_{00},U_{01},\dots,U_{0n},\underset{II}{U}) = 0, \qquad \partial^2U/\partial t\partial x_a = U_{0a} \tag{1.8}$$

which are invariant under the GT (1.6) and the translation group generated by the operators (1.4e). In particular, it is established that a set of equations of the form (1.8) does not contain linear equations (except, obviously $U_0 = 0$, $U_{00} = 0$) invariant under the GT (1.6) and the group of time and space translations.

In the final part of § 3 we give several examples of Galilei invariant equations in independent variables (t, x_1) space, for which general solutions are constructed.

It is to be noted that equations of the class (1.7) are widely used to describe nonlinear diffusion, heat and other processes. In particular, this class includes diffusion equation of the form

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_a}\left(C(U)\frac{\partial U}{\partial x_a}\right) \tag{1.9}$$

as well as nonlinear Schödinger equations (if U is a complex function) and Hamilton–Jacobi equations. The group classification of (1.9) for the one-dimensional case was carried out by Ovsyannikov [12] and for the three-dimensional case by Dorodnitsyn et al [3] and Fushchych [4].

2. Equation invariant under the projective Galilean transformations

First of all in this section we are going to find the conditions to be imposed on the functions A and B under which (1.7) is invariant under the PGT (1.2) and (1.3). The complete solution of this problem is given by the following theorem.

Theorem 1. *Equation (1.7) is invariant under the PGT if and only if*

$$A(t, x, U) = f(t, w), \tag{2.1}$$

$$B(t, x, U, \underset{I}{U}) = Ug(t, w, w_1, \ldots, w_n) + (f(t, w) - \lambda)\left(\frac{x_a U_a}{t} + \frac{\lambda |x|^2}{4t^2}U\right), \tag{2.2}$$

where

$$w = U \exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right), \qquad |x|^2 = x_a x_a, \tag{2.3}$$

$$w_a = \left(U_a + \frac{1}{2}\lambda\frac{x_a}{t}U\right)\exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right), \qquad a = \overline{1, n}, \tag{2.4}$$

and f, g are arbitrary differentiable functions.

Proof. To prove the theorem let us use the Lie method (for a modern account, see Bluman and Cole [1] and Ibragimov [13]). According to Lie's approach, (1.7) is considered as a manifold in the space of the following variables: t, x, U, $\underset{I}{U}$, $\underset{II}{U}$. (1.7) is invariant under the transformations generated by an infinitesimal operator

$$X = \xi^\mu(t, x, U)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(t, x, U)\frac{\partial}{\partial U}, \qquad \mu = \overline{0, n}$$

when the following invariance condition is fulfilled:

$$\overset{2}{X}F = \overset{2}{X}(-\Delta U + AU_t + B)|_{F=0} = 0, \tag{2.5}$$

where $\overset{2}{X}$ is the second prolongation of the infinitesimal operator X, i.e.

$$\overset{2}{X} = X + \rho^\mu(t, x, U)\frac{\partial}{\partial U_\mu} + \sigma^{\mu\nu}(t, x, U)\frac{\partial}{\partial U_{\mu\nu}}, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}, \tag{2.6}$$

$$\rho^\mu = \eta_\mu + U_\mu\eta_U - U_i(\xi^i_\mu + U_\mu\xi^i_U), \qquad i=\overline{0,n},$$

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu} = {} & \eta_{\mu\nu} + U_\nu\eta_{\mu U} + U_\mu\eta_{\nu U} + U_\mu U_\nu\eta_{UU} + U_{\mu\nu}\eta_U - U_i(\xi^i_{\mu\nu} + U_\nu\xi^i_{\mu U}) - \\ & - U_\mu U_i(\xi^i_{\nu U} + U_\nu\xi^i_{UU}) - U_{\mu i}(\xi^i_\nu + U_\nu\xi^i_U) - \\ & - U_{i\nu}(\xi^i_\mu + U_\mu\xi^i_U) - U_{\mu\nu}U_i\xi^i_U, \qquad i=\overline{0,n}.\end{aligned}$$

Substituting (2.6) into (2.5), we obtain

$$\begin{aligned}&\left[-(\sigma^{11}+\dots+\sigma^{nn}) + \xi^\mu\left(\frac{\partial A}{\partial x_\mu}U_0 + \frac{\partial B}{\partial x_\mu}\right) + \eta\left(\frac{\partial A}{\partial U}U_0 + \frac{\partial B}{\partial U}\right) + \right.\\ &\qquad \left.\left. + \rho^0 A + \rho^a\frac{\partial B}{\partial x_a}\right]\right|_{F=0} = 0, \qquad a=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

After explicit expressions for ρ^μ, $\sigma^{\mu\nu}$ have been substituted into (2.7) and the obtained relation being split into separate parts for coefficients at U_{0a} and U_{ab}, $a\neq b$, the conditions for ξ^μ are found:

$$\begin{aligned}&\xi^0_a \equiv \partial\xi^0/\partial x_a = 0, \qquad \xi^\mu_U \equiv \partial\xi^\mu/\partial U = 0, \qquad \xi^a_b + \xi^b_a = 0,\\ &a\neq b, \qquad a,b=\overline{1,n}, \qquad \mu=\overline{0,n}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

After taking into account (2.8) the invariance condition, written in its complete form, is given by

$$\begin{aligned}&\left[\xi^\mu\left(\frac{\partial A}{\partial x_\mu}U_0 + \frac{\partial B}{\partial x_\mu}\right) + \eta\left(\frac{\partial A}{\partial U}U_0 + \frac{\partial B}{\partial U}\right) + (\eta_0 + \eta_U U_0 - U_\mu\xi^\mu_0)A + \right.\\ &\qquad + (\eta_a + \eta_U U_a - U_b\xi^b_a)\frac{\partial U}{\partial U_a} - \Delta\eta - U_aU_a\eta_{UU} - \\ &\qquad \left.\left. - 2U_a\eta_{aU} - \eta_u\Delta U + 2U_{aa}\xi^a_a + U_a\Delta\xi^\mu\right]\right|_{F=0} = 0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

In our case, taking into consideration the explicit form of the operators (1.4a) the coefficient functions ξ^μ, η of the operator X are written in the form

$$\xi^0 = 0, \qquad \xi^a = g_a t, \qquad \eta = -\frac{1}{2}\lambda g_a x_a U,$$

where g_a, $a=\overline{1,n}$ are arbitrary parameters.

Having used the explicit form of ξ^μ and η as well as the arbitrary nature and independence of the parameters g_a (2.9) is reduced to the following linear differential equation system, which enables one to find the functions $A(t,x,U)$ and $B(t,x,U,\underset{I}{U})$:

$$t\frac{\partial A}{\partial x_a} - \frac{1}{2}\lambda x_a U\frac{\partial A}{\partial U} = 0, \qquad a=\overline{1,n}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\lambda}t\frac{\partial B}{\partial x_a} - x_aU\frac{\partial B}{\partial U} - U\frac{\partial B}{\partial U_a} - x_aU_1\frac{\partial B}{\partial U_1} - \dots - x_aU_n\frac{\partial B}{\partial U_n} + \\ &\qquad + x_aB - \frac{2}{\lambda}U_a(A-\lambda) = 0, \qquad a=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Thus, the proof of the theorem is reduced to the construction of the general solution of the strongly overdetermined system (2.10) and (2.11) consisting of $2n$ equations for the functions A and B.

Now let us proceed in using the standard method to find the solutions of the first-order PDE (see, e.g., Courant and Hilbert [2]).

Let us write the system of characteristic ordinary differential equations (ODE) corresponding to the system (2.10)

$$\frac{dx_a}{t} = \frac{dU}{-\frac{1}{2}\lambda x_a U}, \qquad a = \overline{1,n}. \tag{2.12}$$

From (2.12) we obtain two invariants necessary for the construction of the general solution of the system (2.10):

$$w = U \exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right), \qquad w_0 = t. \tag{2.13}$$

Consequently, the general solution of (2.10) is determined by invariants (2.13) and has the form

$$A(t, x, U) = f(w, w_0), \tag{2.14}$$

where f is an arbitrary differentiable function.

Now let us write the characteristic system of ODE (2.11):

$$\begin{gathered}
-\frac{dx_a}{(2/\lambda)t} = \frac{dU}{x_a U} = \frac{dU_a}{U + x_a U_a} = \frac{dU_1}{x_a U_1} = \cdots = \frac{dU_{a-1}}{x_a U_{a-1}} = \\
= \frac{dU_{a+1}}{x_a U_{a+1}} = \cdots = \frac{dU_n}{x_a U_n} = \frac{dB}{x_a B + (2/\lambda)(\lambda - f(w, w_0))}, \qquad a = \overline{1,n}.
\end{gathered} \tag{2.15}$$

In (2.15), contrary to all the previous ones, the repeated indices do not mean summation.

Having solved the system (2.15) we obtain the following system of invariants necessary for the determination of the function B:

$$\begin{gathered}
w = U \exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right), \qquad w_0 = t, \\
w_a = \left(U_a + \frac{\lambda x_a}{2t} U\right) \exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right), \qquad a = \overline{1,n}, \\
I = \left[B + (\lambda - f(w, w_0))\left(\frac{x_a U_a}{t} + \frac{\lambda |x|^2}{4t^2} U\right)\right] \exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

The function B is, consequently, determined from the functional equation

$$\phi(w, w_0, w_1, \ldots, w_n, I) = 0 \tag{2.17}$$

which gives us the general solution of (2.11):

$$B = U g(w, w_0, w_1, \ldots, w_n) + (f(w, w_0) - \lambda)\left(\frac{x_a U_a}{t} + \frac{\lambda |x|^2}{4t^2} U\right), \tag{2.18}$$

where g is an arbitrary differentiable function.

Thus, we are able to construct all the equations of the form (1.7), which are invariant under pot, completing by this the proof of the theorem.

Consequence 1. If one supposes the coefficient B in (1.7) to be independent of the derivatives $\underset{I}{U}$, then

$$\Delta U = \lambda U_0 + Ug(w,t) \tag{2.19}$$

is the most general equation, invariant under the PGT, g being here an arbitrary differentiable function.

A class of equations (1.7) with coefficients (2.1) and (2.2) contains as a subclass a set of equations which are invariant under the operators (1.4b) of the rotation group. The complete description of (1.7) which admits both operators (1.4a) and (1.4b) is given by the following theorem.

Theorem 2. *Equations from the class (1.7) are invariant under the operators (1.4a) and (1.4b) if and only if they have the form*

$$\Delta U = f(w,t)U_t + Ug(w, w_a w_a, t) + (f(w,t) - \lambda)\left(\frac{x_a U_a}{t} + \frac{\lambda |x|^2}{4t^2}U\right), \tag{2.20}$$

where

$$w_a w_a = \left[U_a U_a + \lambda x_a U_a \frac{U}{t} + \left(\frac{\lambda |x| U}{2t}\right)^2\right] \exp\left(\frac{\lambda |x|^2}{2t}\right).$$

This theorem is proved in the same way as the first one. The only difference is that one should substitute into the invariance condition (2.9) the coefficients A and B from (2.1) and (2.2) and the values of ξ^μ, η from (1.4b).

It should be noted that equations of the form (2.19) are obtained as a particular case of (2.20), i.e. when the function B in (1.7) is independent on the derivatives $\underset{I}{U}$. Invariance under PGT automatically implies invariance under the rotation group.

The further restriction of the class of equations (2.19) is achieved by the requirement for the equations to be invariant under the projective operator Π (1.4c) and the operator of scale transformations D (1.4d). The two following theorems are proved in quite a similar way to the ones above.

Theorem 3. *Among equations (2.19) only equations*

$$\Delta U = \lambda U_t + \frac{U}{t^2} g\left(t^{n/2} w\right), \tag{2.21}$$

where g is an arbitrary differentiable function, admit the operator Π (1.4c).

Theorem 4. *Among equations (2.19) only equations*

$$\begin{gathered} \Delta U = \lambda U_1 + \lambda_1 \frac{U}{t^2}\left(\frac{U}{\varepsilon(t,x)}\right)^\beta, \qquad t^{n/2} w = \frac{U}{\varepsilon} \times \text{constant}, \\ \lambda_1 = \text{constant}, \qquad \beta = \text{constant}, \end{gathered} \tag{2.22}$$

where

$$\varepsilon(t,x) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi t}\right)^{1/2}\right]^n \exp\left(-\frac{\lambda |x|^2}{4t}\right) \tag{2.23}$$

is a fundamental solution of (1.1), admit the operator Π *(1.4c) and the operator*

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_{x_a} + (2/\beta - n)U\partial_U. \tag{2.24}$$

Note 1. If one implies $\beta = 0$ in (2.22), the obtained equation has the form

$$\Delta U = \lambda U_t + \lambda_1 U/t^2 \tag{2.25}$$

which may be reduced to (1.1) by means of the local substitution

$$U = W(t,x)\exp(\lambda_1/\lambda t) \qquad \lambda \neq 0.$$

Note 2. The coefficients of all classes of equations constructed above contain (explicitly or implicitly) the fundamental solution $\varepsilon(t,x)$ of (1.1). This is apparently due to the fact that $\varepsilon(t,x)$ (with an approximation to an arbitrary constant) is the complete solution of the system

$$\begin{aligned} &\Delta = \lambda U_0, \\ &G_a(U) \equiv tU_a + \tfrac{1}{2}\lambda x_a U = 0, \qquad a = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Note 3. The above theorems may be generalised for the systems of equations of the form

$$\begin{aligned} \Delta U^{(k)} = A^{(k)}&\left(t,x,U^{(1)},\dots,U^{(m)}\right) + \\ &+B^{(k)}\left(t,x,U^{(1)},\dots,U^{(m)}\right), \qquad k = 1,2,\dots,m. \end{aligned} \tag{2.27}$$

In particular, amongst the equations (2.27) only equations

$$\Delta U^{(k)} = \lambda U_0^{(k)} + U^{(k)} g^{(k)}\left(t, w^{(1)},\dots,w^{(m)}\right), \qquad k = 1,2,\dots,m,$$

where $w^{(k)} = U^{(k)}\exp\left(\lambda|x|^2/4t\right)$, $g^{(k)}$ are arbitrary differentiable functions, are invariant under the Galilean transformations with the infinitesimal operators

$$G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} - \frac{1}{2}\lambda x_a\left(U^{(1)}\frac{\partial}{\partial U^{(1)}} + \dots + U^{(m)}\frac{\partial}{\partial U^{(m)}}\right), \qquad a = \overline{1,n}.$$

3. The second-order equations, invariant under the Galilean transformations

In this section we shall construct all the equations of the form

$$U_t = C(t,x,U)\Delta U + K(t,x,U,\underset{I}{U}), \tag{3.1}$$

where $C(t,x,U)$, $K(t,x,U,\underset{I}{U})$ are arbitrary differentiable functions, invariant under the operators $\widetilde{G}_a$ (1.5), generating the GT (1.6). Also we shall distinguish all the second-order equations of the form (1.8) which admit the following operators:

$$\widetilde{G}_a = tP_a, \qquad P_a = \partial_a, \qquad P_0 = \partial_t, \qquad a = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

These operators satisfy the commutational relations

$$[\widetilde{G}_a, P_b] = 0, \qquad [P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [\widetilde{G}_a, P_0] = -P_a. \tag{3.3}$$

It turns out that the class of such equations is rather broad. In particular, it contains the many-dimensional Monge–Ampère equation (see Fushchych and Serov [8]) and the non-relativistic analogue of the latter. All these equations are considerably nonlinear, and as a rule they cannot be reduced to the form containing a linear plus a nonlinear term.

The following statement gives the solution of the first problem, which was posed at the beginning of this section.

Theorem 5. *(3.1) is invariant under the GT (1.6) if and only if*

$$C(t,x,U) = f(t,U), \tag{3.4}$$

$$K(t,x,U,\underset{I}{U}) = g(t,U,\underset{I}{U}) - x_a U_a/t, \tag{3.5}$$

where f, g are arbitrary differentiable functions.

To prove this theorem one should repeat the same procedures used in proving theorem 1, with the only obvious difference that the coefficient functions of the $\widetilde{G}_a$ operator, i.e.

$$\xi^0 = 0, \qquad \xi^a = g_a t, \qquad a = \overline{1,n}, \qquad \eta = 0$$

should be substituted into (2.9).

Now let us formulate several more statements, giving the complete description of the equations of class (3.1), invariant under $\widetilde{G}_a$, J_{ab} and the operators

$$\widetilde{\Pi} = t^2\partial_t + t x_a \partial_{x_a}, \tag{3.6}$$

$$\widetilde{D} = 2t\partial_t + x_a\partial_{x_a}. \tag{3.7}$$

Theorem 6. *Among the set of equations (3.1) only the equations given by*

$$\begin{gathered} U_t = f(t,U)\Delta U + g(t,U,w_{n+1}) - x_a U_a/t, \\ w_{n+1} = U_a U_a, \qquad U_a = \partial U/\partial x_a \end{gathered} \tag{3.8}$$

are invariant under the operators $\widetilde{G}_a$ and J_{ab}, $a,b = \overline{1,n}$.

Theorem 7. *(3.8) is invariant under the projective transformations generated by the operator (3.6) if and only if*

$$f(t,U) = \widetilde{f}(U), \qquad g(t,U,w_{n+1}) = t^{-2}\widetilde{g}(U, t^2 w_{n+1}), \tag{3.9}$$

where $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ are arbitrary differentiable functions.

Theorem 8. *Amongst equations of the form (3.8) only equations*

$$U_t = \widetilde{f}(U)\Delta U + U_a U_a \widetilde{g}(U) - x_a U_a/t \tag{3.10}$$

are invariant under the projective and scale transformations generated by the operators (3.6) and (3.7).

Theorem 9. *The maximal IA of the simplest linear equation from the class (3.10):*

$$U_t = \lambda\Delta U - x_a U_a/t, \qquad \lambda = \text{constant} \tag{3.11}$$

is an algebra $SLi(1,n)$ with basic operators:

$$\widetilde{G}_a = t\partial_a, \qquad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \qquad \widetilde{\Pi} = t^2\partial_t + tx_a\partial_{x_a}, \qquad I = U\partial_U,$$
$$\widetilde{D} = 2t\partial_t + x_a\partial_{x_a}, \qquad \widetilde{P}_a = \partial_{x_a} + \frac{x_a}{2\lambda t}I, \qquad \widetilde{P}_t = \partial_t + \left(\frac{n}{2t} - \frac{|x|^2}{4\lambda t^2}\right)I.$$

Note 4. (3.11), by means of the local substitution

$$U = W(t,x)t^{n/2}\exp\left(\frac{\lambda|x|^2}{4t}\right)$$

or, in the equivalent notation,

$$U = \frac{W(t,x)}{\varepsilon(t,x)}, \qquad \varepsilon(t,x) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi t}\right)^{1/2}\right]^n \exp\left(-\frac{\lambda|x|^2}{4t}\right)$$

may be reduced to (1.1) for the function $W(t,x)$.

Note 5. The classes of equations given in theorems 5 and 6 can be obtained from the equations given in theorems 1 and 2. For this purpose it would be enough to apply the above substitution from note 4.

Note 6. Equations invariant under GT (1.6) (see theorem 5) can be transformed by means of the substitution of the independent variables

$$t = \theta(t'),$$
$$x_a = \theta(t')x_a + \theta^{(a)}(t'), \qquad a = \overline{1,n},$$

where $\theta(t') \neq$ constant, $\theta^{(a)}$, $a = \overline{1,n}$ being arbitrary differentiable functions, to the equations given by

$$U'_{t'} = f'(t',U')\Delta U' + g'(t',U',\underset{I}{U'}),$$

where

$$U'(t',x') = U(t,x),$$
$$f'(t',U') = \frac{d\theta}{dt'}(\theta(t'))^{-2}f(\theta(t'),U'),$$
$$g'(t,,U',\underset{I}{U'}) = \frac{d\theta}{dt'}g(\theta(t'),U',\underset{I}{U'}(\theta(t'))^{-1})+$$
$$+\left(\frac{d\theta^{(a)}(t')}{dt'}(\theta(t'))^{-1} - \frac{d\theta}{dt'}\theta^{(a)}(t')(\theta(t'))^{-2}\right)U'_a.$$

In particular if

$$\theta(t') = t', \qquad \theta^{(a)}(t') = 0, \qquad a = \overline{1,n}$$

one obtains the equations

$$U'_{t'} = t'^{-2}f(t',U')\Delta U' + g(t',U',\underset{I}{U'}t^{-1}).$$

Consequence 2. It follows from the theorems given in §§ 2 and 3 that the nonlinear diffusion equation (1.9) is invariant neither under PGT (1.2) and (1.3), nor under GT (1.6). It means that the Galilean principle of invariance is not satisfied by (1.9). Nonlinear equations, invariant under PGT and x and t translations, are obtained by Fushchych [5].

Now let us proceed in solving the second problem: to describe all the second-order equations

$$F(x_0, x_1, U, U_0, U_1, U_{00}, U_{01}, U_{11}) = 0 \tag{3.12}$$

in the two-dimensional space (x_0, x_1), which are invariant under GT and translations generated by operators (3.2).

Theorem 10. *Amongst the set of equations (3.12) only the equations given by*

$$F_1(w^{(I)}, w^{(II)}, U, U_1, U_{11}) = 0 \tag{3.13}$$

are invariant under ot (1.6) and translations.

(3.13) contains the following notation:

$$w^{(I)} = \det\begin{pmatrix} U_0 & U_1 \\ U_{01} & U_{11} \end{pmatrix}, \qquad w^{(II)} = \det\begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

of the determinant of matrices, the elements of which are the first- and second-order derivatives of the function U. Here F_1 is an arbitrary differentiable function.

Proof. The invariance of (3.12) under translations, i.e. operators P_0, P_1, is equivalent to the requirement

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0. \tag{3.15}$$

Taking into account (3.15) we obtain the following expression for the action of the twice prolonged operator $\overset{2}{X}$ on the manifold (3.12) (see (2.6))

$$\left.\left(\eta\frac{\partial F}{\partial U} + \rho^\mu\frac{\partial F}{\partial U_\mu} + \sigma^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial U_{\mu\nu}}\right)\right|_{F=0} = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1. \tag{3.16}$$

The coefficient functions of operators $\{G_a\}$ are given by

$$\xi^0 = \eta = 0, \qquad \xi^1 = t. \tag{3.17}$$

The coefficient functions $\{\rho^\mu\} = \{\rho^0, \rho^1\}$, $\{\sigma^{\mu\nu}\} = \{\sigma^{00}, \sigma^{01}, \sigma^{10}, \sigma^{11}\}$ are determined from the formulae given in § 2. Taking into account (3.17) we obtain

$$\begin{gathered} \rho^0 = -U_1, \qquad \rho^1 = 0, \\ \sigma^{00} = -2U_{01}, \qquad \sigma^{01} = \sigma^{10} = -U_{11}, \qquad \sigma^{11} = 0. \end{gathered} \tag{3.18}$$

With the help of formulae (3.17) and (3.18) the invariance condition (3.16) can easily be reduced to the following linear pde for the function F:

$$U_1\frac{\partial F}{\partial U_0} + 2U_{01}\frac{\partial F}{\partial U_{00}} + U_{11}\frac{\partial F}{\partial U_{01}} = 0 \tag{3.19}$$

which can be readily solved. The general solution of (3.19) is an arbitrary differentiable function

$$F = F_1(w^{(I)}, w^{(II)}, U, U_1, U_{11})$$

which depends on five variables. The theorem is proved.

Theorem 10, without any substantial complications, is generalised for the case of $(n+1)$-dimensional space

$$\begin{aligned} &F(x_0, x_1, \ldots, x_n, U, U_0, \underset{I}{U}, U_{00}, U_{01}, \ldots, U_{0n}, \underset{II}{U}) = 0, \\ &\underset{I}{U} = (U_1, \ldots, U_n), \qquad \underset{II}{U} = (U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{nn}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

i.e. we have the following theorem.

Theorem 11. *Amongst equations of the class (3.20) only equations given by*

$$F_1(w^{(I)}, w^{(II)}, U, \underset{I}{U}, \underset{II}{U}) = 0 \tag{3.21}$$

are invariant under GT (1.6) and $x_0, x_1, \ldots, x_n$ coordinate translations, where

$$\begin{aligned} w^{(I)} &= \det \begin{pmatrix} U_0 & U_1 & \cdots & U_n \\ U_{10} & U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n0} & U_{n1} & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix}, \\ w^{(II)} &= \det \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} & \cdots & U_{0n} \\ U_{10} & U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n0} & U_{n1} & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Note 7. In the specific case when

$$F_1 \equiv w^{(II)} = \det(U_{\mu\nu}) = 0, \qquad U_{\mu\nu} = \partial^2 U/\partial x_\mu \partial x_\nu$$

a many-dimensional Monge–Ampère equation is obtained, the group properties of which have been studied by Fushchych and Serov [8].

Note 8. In the case

$$F_1 = w^{(I)} - \lambda = 0, \qquad \lambda = \text{constant} \tag{3.23}$$

the maximal IA of this equation is generated by an operator

$$\begin{aligned} &X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta \frac{\partial}{\partial U}, \\ &\xi^0 = C_{00} t + d_0, \qquad \xi^a = C_{ab} x_b + f_a(t), \qquad a, b = \overline{1, n}, \\ &\eta = CU + d, \qquad C = \frac{C_{00} + 2(C_{11} + \cdots + C_{nn})}{n+1}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

where C_{00}, C_{ab}, d_0, d are arbitrary constants, and $f_a(t)$, $a = \overline{1, n}$ are arbitrary differentiable functions.

It means that the maximal IA of (3.23) is infinitely dimensional. In particular, this algebra contains operators of the form

$$\partial_{x_0},\ \partial_{x_a},\ \partial_U,\ x_b\partial_{x_a}, \quad a\neq b, \quad a,b=\overline{1,n}, \tag{3.25a}$$

$$\begin{gathered} D_0 = x_0\partial_{x_0} + \frac{U}{n+1}\partial_U, \\ D_1 = x_1\partial_{x_1} + \frac{2U}{n+1}\partial_U, \quad \ldots, \quad D_n = x_n\partial_{x_n} + \frac{2U}{n+1}\partial_U, \end{gathered} \tag{3.25b}$$

$$X_1 = f_1(t)\partial_{x_1}, \quad \ldots, \quad X_n = f_n(t)\partial_{x_n}. \tag{3.25c}$$

Note 9. It is possible to construct a general solution for the two-dimensional equation

$$w^{(I)} = \det\begin{pmatrix} U_0 & U_1 \\ U_{01} & U_{11} \end{pmatrix} = 0. \tag{3.26}$$

To prove this, we represent (3.26) as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U_1}{U_0}\right) = 0, \qquad U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad U_0 = \frac{\partial U}{\partial x_0}$$

and then we obtain the general solution

$$U = F(x_1 + G(x_0)),$$

where F and G are arbitrary differentiable functions. Direct verification shows that

$$U = F(\mathcal{L}_a x_a + G(x_0)), \qquad a=\overline{1,n}, \qquad \mathcal{L}_a = \text{constant}$$

is a particular solution of $(n+1)$-dimensional equation (3.23) under $\lambda = 0$.

Note 10. Equations

$$w^{(I)} = \begin{vmatrix} U_0 & \cdots & U_n \\ U_{10} & \cdots & U_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n0} & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix} = F(U), \tag{3.27}$$

where $F(U)$ is an arbitrary twice differentiable function, can be reduced to (3.23) at $\lambda = 1$ for the function $W(x_0,\ldots,x_n)$ by the substitution

$$W = \int [F(U)]^{-1/(n+1)} dU.$$

Note 11. Maximal IA of the equation

$$w^{(I)} = F(U_aU_a), \qquad U_aU_a = U_1^2 + \cdots + U_n^2 \tag{3.28}$$

is generated by the basis operators (3.25c) and

$$\begin{gathered} \partial_{x_0},\ \partial_{x_a}, \partial_U,\ x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \quad a\neq b, \quad a,b=\overline{1,n}, \\ D = (1-n)\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a} + U\partial_U. \end{gathered}$$

In particular, in the case of $n=1$ for equations of the class (3.28)

$$\begin{vmatrix} U_0 & U_1 \\ U_{10} & U_{11} \end{vmatrix} = U_1^2, \tag{3.29}$$

$$\begin{vmatrix} U_0 & U_1 \\ U_{10} & U_{11} \end{vmatrix} = U_1^3 \tag{3.30}$$

one can obtain the general solutions, namely $U = F(x_1 e^{-x_0} + G(x_0))$ is the general solution of (3.29) and $\phi(U, x_0 U + G(x_0) - x_1) = 0$ is the general solution of (3.30) written in an implicit form, F, G, ϕ being arbitrary differentiable functions.

In conclusion, we note that among the Galilei invariant equations (3.21) one can distinguish a class of equations

$$U_0 = \lambda(U, \underset{I}{U})\Delta U + Q(U, \underset{I}{U}) - w^{(III)}/w^{(II)}, \tag{3.31}$$

$$w^{(III)} = \begin{vmatrix} 0 & U_1 & \cdots & U_n \\ U_{10} & U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n0} & U_{n1} & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix}, \quad w^{(II)} = \begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ U_{21} & \cdots & U_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n1} & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix},$$

λ, Q being arbitrary functions.

As to the structure, equations of the form (3.31) are diffusive type nonlinear equations with a strongly nonlinear addition. The properties of (3.31) will be studied by us in a further paper.

1. Bluman A., Cole B., Similarily methods for differential equations, Berlin, Springer, 1974.
2. Courant R., Hilbert D., The methods of mathematical physics, Moscow, Nauka, 1951.
3. Dorodnitsyn V.A., Knyazeva I.V., Svirshchevsky S.R., *Diff. Uravn.* (*Differential equations*), 1983, **19**, 1215–1223.
4. Fushchych W.I., On symmetry and particular solutions of some multi-dimensional equations of mathematical physics, in Algebraic-Theoretical Methods in Mathematical Physics Problems, Kiev, Mathematical Institute, 1983, 4–23.
5. Fushchych W.I., The symmetry and exact solutions of many dimensional parabolic and hyperbolic nonlinear differential equations, Kiev, Mathematical Institute, 1984.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Fiz. elem. chastits i atom. yadra* (*Physics of elementary particles and atomic nucleus*), 1981, **12**, 1157–1219.
7. Fushchych W.I., Nikitin A.G., The symmetry of Maxwell equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983.
8. Fushchych W.I., Serov N.I., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1983, **273**, 543–546.
9. Ibragimov N.H., The group of transformations in mathematical physics, Moscow, Nauka, 1983.
10. Lie S., Über die integration durch bestimente Integrate von einer Klasse lineare partiellen Differential-gleichungen,1881, **6**, 328–368.
11. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 808–816.
12. Ovsyannikov L.V., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1959, **125**, 492–495.
13. Ovsyannikov L.V., The group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978.

Реализация на ЭВМ алгоритма вычисления нелокальных симметрий для уравнений типа Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.В. КОРНЯК

Нелиевский алгоритм вычисления алгебр инвариантности систем дифференциальных уравнений в частных производных реализован в виде программ для ЭВМ. Программа написана на языке символьных вычислений PL/I–FORMAC. На ЭВМ вычислена новая восьмимерная алгебра инвариантности для системы уравнений Дирака.

The non-Lie algorithm of calculation of invariance algebras of systems of partial differential equations is realized on computer. The program is written in the symbol language PL/I–FORMAC and the new 8-dimensional invariance algebra of Dirac equation is computed.

В [1–3] предложен новый метод исследования теоретико-алгебраических свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, позволяющий устанавливать симметрии, которые не могут быть в принципе вычислены с помощью классического метода С. Ли. Этот метод дал возможность обнаружить неизвестные ранее нелокальные симметрии основных уравнений релятивистской квантовой теории [1–4]: Максвелла, Дирака, Кеммера–Деффина, Рариты–Швингера и т.д.

Применение нелиевского алгоритма [1–3] к конкретным системам уравнений требует, как известно, проведения большого объема аналитических вычислений, для выполнения которых целесообразно использовать ЭВМ. Эта статья посвящена реализации алгоритма [1–3] в виде программ для ЭВМ. Программа написана на языке символьных вычислений PL/I–POKMAC [5].

1. Описание алгоритмов

Ключевая идея нелиевского алгоритма [1–3] для вычисления алгебры инвариантности систем дифференциальных уравнений (ДУ) состоит в приведении их, с помощью невырожденного преобразования, к максимально расщепленным независимым подсистемам. После такого расщепления обычно бывает нетрудно найти алгебру инвариантности преобразований Фурье, задачу можно свести к проблеме приведения символьной матрицы к каноническому жорданову виду.

Приведение матрицы к жорданову виду, включает в себя в виде подзадачи проблему собственных значений, является одной из наиболее технически трудных задач линейной алгебры. Для численных матриц только в недавнее время были разработаны так называемые QR-алгоритмы [6], признанные удовлетворительными. Эти алгоритмы являются итерационными и поэтому совершенно непригодны для символьных матриц, для которых отсутствует понятие сходимости. Поэтому мы использовали более прямые методы. Алгоритм состоит из двух основных частей и реализован в виде двух отдельных программ на языке FORMAC. Первая часть

Препринт 85.20, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 18 с.

алгоритма служит для получения характеристических полиномов матрицы и в тех случаях, когда степень полинома не превышает четырех — вычисляются корни. Мы воспользовались здесь методом Данилевского [7] приведения матрицы к канонической форме Фробениуса:

$$F = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы Фробениуса равен

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n,$$

а любая матрица приводится к форме Фробениуса (точнее к блочно-треугольной форме с фробениусовыми матрицами на диагонали) с помощью элементарных преобразований, не требующих знаний собственных значений.

Пусть имеется матрица

$$A = A^0 = \begin{pmatrix} a^0_{11} & a^0_{12} & \cdots & a^0_{1,n-1} & a^0_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a^0_{n,1} & a^0_{n,2} & \cdots & a^0_{n,n-1} & a^0_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже верхний индекс нумерует последовательность матриц, возникающих в процессе вычислений.

Алгоритм приведения включает следующие действия:

1) Начинаем с предпоследнего элемента нижней строки $a^0_{n,n-1}$. Если этот элемент не равен нулю — делим на него все элементы столбца, а из остальных столбцов вычитаем $(n-1)$-й столбец, умноженный на такие величины, чтобы в нижней строке получались нули. В результате получаем матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не подобна матрице A^0. Чтобы восстановить подобие, нужно еще выполнить некоторое, также элементарное, преобразование, эквивалентное умножению слева на матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a^0_{n,1} & a^0_{n,2} & \cdots & a^0_{n,n-1} & a^0_{n,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование изменяет лишь $(n-1)$-ю строку матрицы B. Возникшая матрица

$$A^1 = MB = \begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \cdots & a^1_{1,n-1} & a^1_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

уже будет подобна матрице A^0. После этого переходим к $(n-1)$-й строке и повторяем операцию с элементом, расположенным в позиции $(n-1, n-2)$.

2) Если очередной элемент в позиции $(n-k, n-k-1)$ оказался равным нулю — ищем слева от него в $(n-k)$-й строке ненулевой элемент. Допустим, что он расположен в l-м столбце, — переставляем $(n-k-1)$-й и l-й столбец и одновременно, для сохранения подобия, $(n-k-1)$-ю и l-ю строки.

3) Если ненулевой элемент в $(n-k)$-й строке не найден, то матрица A^k приобретает блочно-треугольный вид

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline 0 & F \end{array}\right),$$

где

$$F = \begin{pmatrix} a^k_{n-k,n-k} & \cdots & a^k_{n-k,n-1} & a^k_{n-k,n} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & \cdots & . & . \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. F имеет фробениусову форму.

Поскольку

$$\det(A-\lambda E) = \det(A_k - \lambda E) = \det(C-\lambda E)\det(F-\lambda E),$$

сразу можно выделить $\det(F-\lambda E)$ как сомножитель характеристического полинома и далее применить алгоритм к матрице C.

В соответствии с этим алгоритмом была написана программа NLP. Эта программа вычисляет и корни полиномов, если их степень оказывается меньше пяти. Для более экономного представления разреженных матриц в памяти ЭВМ мы применяем представление строк матрицы в виде сумм, слагаемыми которых является произведения элементов матрицы на координаты "пробного" вектора. Ниже будет приведен поясняющий пример.

После определения собственных чисел матрицы A и их алгебраических кратностей необходимо найти жорданову форму J и матрицу преобразования W, такую, что

$$WAW^{-1} = J.$$

Для этих целей была написана программа NLJW. Алгоритм работает следующим образом:

Выполняется цикл последовательного перебора корней. Выбрав определенный корень, мы должны установить структуру жорданова блока, соответствующего этому корню. Жордановым блоком мы здесь будем называть совокупность всех жордановых клеток с данным корнем λ. Жордановой клеткой порядка p называют матрицу размера $p \times p$ вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В частности, диагональному случаю соответствуют жордановы клетки порядка 1. Существует общая формула, позволяющая найти число n_p жордановых клеток порядка p в блоке с собственным числом λ, именно

$$n_p = \operatorname{rank}(A-\lambda E)^{p-1} - 2\operatorname{rank}(A-\lambda E)^{p} + \operatorname{rank}(A-\lambda E)^{p+1}.$$

По определению полагается $\operatorname{rank}(A-\lambda E)^0 = N$, где N — размер матрицы A. Непосредственное использование этой формулы может привести к излишним вычислениям. Во многих случаях (на практике — в большинстве) для определения числа n_p нет необходимости вычислять $\operatorname{rank}(A-\lambda E)^{p+1}$. Вычисление высоких степеней матрицы $A-\lambda E$ является самым узким местом алгоритма. Например, если $A-\lambda E$ — разреженная матрица, то уже $(A-\lambda E)^2$ как правило не будет разреженной. Поэтому важно минимизировать количество вычислений степеней матриц. Мы получим некоторые соотношения, позволяющие достичь этого.

Поскольку все рассматриваемые ниже величины не зависят от выбора системы координат, рассмотрим матрицу $A-\lambda E$ в жордановом базисе. Она будет иметь вид

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \boxed{0} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{0} \end{matrix}\right\} n_1 & & & \\ & \left.\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{matrix}\right\} n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B} \end{pmatrix},$$

здесь B — матрица полного ранга $\operatorname{rank} B = N - k_{\mathrm{alg}}$, $k_{\mathrm{alg}} = n_1 + 2n_2 + \dots + mn_m$ — алгебраическая кратность корня λ. Последовательно возведение в степень нильпотентной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

приводит к сдвигам на 1 позицию вправо диагонали из единиц и уменьшению ранга на 1. Исхода из этого, рассматривая последовательно ранги степеней матрицы $A-\lambda E$ можно получить необходимые нам величины. Допустим, что уже найдены числа $n_1, n_2, \dots, n_{p-1}$ и вычислен $\operatorname{rank}(A-\lambda E)^p$, тогда нам известны величины

$$a = pn_p + (p+1)n_{p+1} + \dots + mn_m = k_{\mathrm{alg}} - [n_1 + 2n_2 + \dots + (p-1)n_{p-1}],$$
$$b = n_{p+1} + 2n_{p+2} + \dots + (m-p)n_m = k_{\mathrm{alg}} - N + \operatorname{rank}(A-\lambda E)^p.$$

Поскольку a, b, n_l — неотрицательные числа, то в случаях когда $b=0$ или $b=1$ величины $n_p, n_{p+1}, \dots$ определяются однозначно. Именно, если $b=0$, то

$n_p = a/p$, $n_{p+1} = 0$, …; если $b = 1$, то $n_p = (a - p - 1)/p$, $n_{p+1} = 0$, … (Можно объединить формулу вычисления n_p для обоих случаев $b = 0$ и $b = 1$: $n_p = [a - b(p + 1)]/p$). При $p = 1$, например, случай $b = 0$ соответствует равенству геометрической кратности алгебраической, что приводит к диагонализации блока, а равенство $b = 1$ означает, что геометрическая кратность на единицу меньше алгебраической, что указывает на наличие в жордановом блоке диагональной части длины $k_{\mathrm{alg}} - 2$ и одной жордановой клетки вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в подобных случаях для определения n_p достаточно знать только $\operatorname{rank}(A - \lambda E)^p$. Отдельно необходимо выделить случай алгебраической кратности равной единице — этот случай вообще не требует вычисления рангов.

В процессе определения жордановой структуры матрицы можно по частям решать матричное уравнение $WA - JW = 0$ для матрицы преобразования W. Именно, можно показать, что каждой жордановой метке соответствует автономная система линейных уравнений, содержащая только те элементы матрицы W, которые входят в строки W, расположенные против соответствующих строк жордановой клетки. Более того, если в блоке имеется несколько жордановых клеток одного размера, то им соответствуют системы уравнений одинаковой структуры. Поэтому достаточно решать систему уравнений один раз и, заменив переменные, получить для всех клеток данного размера решения. Проиллюстрируем это примером для матриц размера 2×2. Пусть матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

тогда уравнение $WA - JW = 0$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Для верхней строки матрицы W получаем систему уравнений:

$$w_{11}(a_{11} - \lambda) + w_{12}a_{21} = 0,$$
$$w_{11}a_{12} + w_{12}(a_{22} - \lambda) = 0,$$

для нижней — систему

$$w_{21}(a_{11} - \lambda) + w_{22}a_{21} = 0,$$
$$w_{21}a_{12} + w_{22}(a_{22} - \lambda) = 0.$$

Мы видим, что эти системы одинаковы с точностью до замены неизвестных. Аналогичная ситуация и в случае жордановых клеток общего вида.

Таким образом алгоритм производит следующие действия:

1) Выполняется цикл по различным корням.

2) После выбора корня выполняется цикл по размерам жордановых клеток. Для каждого размера определяется количество клеток, и, если оно не равно нулю — методом Гаусса решается уравнение для определения соответствующих элементов матрицы свободными параметрами, а остальные выражаются через них.

3) Последовательно выводятся на печать по клеткам строки матриц J и W. Производится подсчет числа произвольных параметров.

Такая последовательная организация вычислений может оказаться полезной в случае, если известны не все корни. В таком случае мы получим частичное приведение матрицы к жорданову виду, что может дать некоторую информацию о симметриях системы уравнений.

В конце работы программа печатает число параметров матрицы преобразования. Параметры должны удовлетворять условиям невырожденности матрицы. Невырожденность матрицы соответствует случаю общего положения, т.е. из любой вырожденной матрицы малым изменением параметров можно получить невырожденную.

Мы не вычисляем здесь обратную матрицу W^{-1} по следующим причинам:

1) Элементы обратной матрицы будут слишком громоздкими, т.к. они представляют собой сложные нелинейные функции параметров.

2) Даже в численной математике непосредственное вычисление любого объекта, получаемого с помощью обратных матриц требует в 3 раза меньше времени и в 2 раза меньше памяти, чем обращение матрицы. Поэтому с вычислительной точки зрения обратные матрицы бесполезны.

Для получения выражений, содержащих обратные матрицы целесообразней написать программу, вычисляющую эти выражения непосредственно, например, методом Гаусса.

2. Примеры применения программ

Приведем примеры, иллюстрирующие работу программ NLP и NLJW. Все вычисления проводились на ЭВМ ЕС–1022 с доступной оперативной памятью 390 килобайтов.

Рассмотрим вначале систему уравнений с минимальным нетривиальным размером матрицы:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\
&-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}=0.
\end{aligned}
$$

Эта система получается в результате факторизации волнового уравнения

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.
$$

У этой системы нет нетривиальных нелокальных симметрий рассматриваемого нами типа. Мы выбрали ее только из-за краткости ввода и вывода. Символ оператора системы имеет вид

$$
\begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ p_1 & p_0 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad p_0=i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_1=-i\frac{\partial}{\partial x}.
$$

Ниже слева приведена информация в том виде, в котором она представлена на вводе и выводе — справа — эквивалент в обычных математических обозначениях или пояснение.

Для работы программы NLP необходимо ввести следующую информацию:

```
СИСТЕМА UT - VX =0, -UX - VT=0
                    — пояснительная информация.
'P0*#1+P1*#2'       — в таком виде вводится матрица. Здесь
                    “пробный” вектор с координатами #1, #2
'P1*#1+P0*#2'       служит для представления строк матрицы
                    в виде сумм.
```

На выходе будет напечатано:

```
ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ
СИСТЕМА UT - VX =0, -UX - VT=0
МАТРИЦА
   P0*#1+P1*#2
   P1*#1+P0*#2
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ
CHP(1)=-2L#P0+L#^2+P0^2-P1^2,   L# — обозначение для
                                собственного числа.
КОРНИ
   L#=P0+P1
   L#=P0-P1
```

Для работы программы NLJW нужно ввести следующую информацию:

```
СИСТЕМА UT - VX =0, -UX - VT=0
2                   — число различных корней
'P0+P1'   1         — корни и их алгебраические
'P0-P1'   1         кратности
'P0*#1+P1*#2'       – исходная матрица
'P1*#1+P0*#2'
```

На выходе будет напечатано:

```
ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ
СИСТЕМА UT - VX =0, -UX - VT=0
ЧИСЛО РАЗЛИЧНЫХ КОРНЕЙ 2
СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ИХ КРАТНОСТЬ
   P0+P1   1
   P0-P1   1
СТРОКИ ИСХОДНОЙ МАТРИЦЫ
   P0*#1+P1*#2
   P1*#1+P0*#2
ПЕЧАТЬ СТРОК МАТРИЦЫ ПО ЖОРДАНОВЫМ КЛЕТКАМ
КОРЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРАТНОСТИ 1
   L#(1)=P0+P1
ЖОРДАНОВА КЛЕТКА ПОРЯДКА 1
   J#(1)=#1(P0+P1)       — первая строка (p0 + p1, 0)
                         жордановой матрицы J.
СОТВЕТСТВУЯЩАЯ ЧАСТЬ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
   W#(1)=T#1#1+T#1#2     — первая строка (t1, t1)
                         матрицы W. Здесь T#1 —
                         обозначение для произвольного
                         параметра t1.
КОРЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРАТНОСТИ 1
   L#(1)=P0-P1
```

```
ЖОРДАНОВА КЛЕТКА ПОРЯДКА 1
   J#(2)=#2(P0-P1)
```
— вторая строка $(0, p_0 - p_1)$ матрицы J.

```
СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЧАСТЬ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
   W#(2)=-T#2#1+T#2#2
```
— вторая строка $(-t_2, t_2)$ матрицы W.

```
МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 2-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ
```

Приведем результаты применения программ к уравнению Дирака и уравнению Кеммера–Дефина–Петье в 4-мерном пространстве–времени для 10-компонентной волновой функции.

Символ оператора Дирака имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & p_0 - m & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -p_0 - m & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -p_0 - m \end{pmatrix}.$$

С помощью программы NLP получаем 2 корня

$$\lambda_{1,2} = -m \pm \mathcal{P}, \qquad \mathcal{P} = \sqrt{p_\mu p^\mu}.$$

Каждый из этих корней имеет алгебраическую кратность равную двум.

В результате работы программы NLJW получаем диагональную жорданову матрицу

$$J = \begin{pmatrix} -m + \mathcal{P} & & & \\ & -m + \mathcal{P} & & \\ & & -m + \mathcal{P} & \\ & & & -m + \mathcal{P} \end{pmatrix}$$

и 8-параметрическую матрицу преобразования

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{-t_1 p_3 - t_2(p_1 + ip_2)}{p_0 - \mathcal{P}} & \dfrac{-t_1(p_1 - ip_2) + t_2 p_3}{p_0 - \mathcal{P}} & t_1 & t_2 \\ \dfrac{-t_3 p_3 - t_4(p_1 + ip_2)}{p_0 - \mathcal{P}} & \dfrac{-t_3(p_1 - ip_2) + t_4 p_3}{p_0 - \mathcal{P}} & t_3 & t_4 \\ \dfrac{-t_5 p_3 - t_6(p_1 + ip_2)}{p_0 + \mathcal{P}} & \dfrac{-t_5(p_1 - ip_2) + t_6 p_3}{p_0 + \mathcal{P}} & t_5 & t_6 \\ \dfrac{-t_7 p_3 - t_8(p_1 + ip_2)}{p_0 + \mathcal{P}} & \dfrac{-t_7(p_1 - ip_2) + t_8 p_3}{p_0 + \mathcal{P}} & t_7 & t_8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Теперь видно, что символ оператора Дирака инвариантен по отношению к линейным преобразованиям из 8-мерой группы $GL(2) \otimes GL(2)$. При переходе с помощью преобразования Фурье от символов к операторам, матрицы групп инвариантности станут интегродифференциальными операторами.

Непосредственное обращение матрицы W можно выполнить с помощью ЭВМ, но это приводит к громоздким и плохо отражающим структуру выражениям. Поэтому лучше воспользоваться факторизованным представлением матрицыW, предложенным в [3]

$$W = GW_0. \tag{2}$$

Здесь W_0 — значение матрицы (1) при каком-нибудь фиксированном наборе параметров t_1—t_8, G — произвольная матрица из $GL(2)\otimes GL(2)$. При таком представлении обратная матрица выражается формулой

$$W^{-1}=W_0^{-1}G^{-1}.$$

При выборе конкретных значений параметров t_1—t_8 потребуем, чтобы матрица W_0 не вырождалась при обращении в нуль пространственных компонент p_1, p_2, p_3 4-вектора импульса. Легко найти набор параметров, удовлетворяющих этому требованию. Например, можно выбрать:

$$t_1=-\frac{p_3}{p_0+\mathcal{P}},\qquad t_2=-\frac{p_1-ip_2}{p_0+\mathcal{P}},\qquad t_3=-\frac{p_1+ip_2}{p_0+\mathcal{P}},$$
$$t_4=\frac{p_3}{p_0+\mathcal{P}},\qquad t_5=t_8=1,\qquad t_6=t_7=0.$$

При этих значениях параметров матрица (1) примет вид

$$W_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{p_3}{p_0+\mathcal{P}} & -\dfrac{p_1-ip_2}{p_0+\mathcal{P}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{p_1+ip_2}{p_0+\mathcal{P}} & \dfrac{p_3}{p_0+\mathcal{P}} \\ -\dfrac{p_3}{p_0+\mathcal{P}} & -\dfrac{p_1-ip_2}{p_0+\mathcal{P}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{p_1+ip_2}{p_0+\mathcal{P}} & \dfrac{p_3}{p_0+\mathcal{P}} & 0 & 1 \end{pmatrix}=1-\frac{\gamma_0\gamma_ip_i}{p_0+\mathcal{P}}.$$

Матрицу, обратную к W_0, естественно искать в виде

$$W_0^{-1}=a\left(1+\frac{\gamma_0\gamma_ip_i}{p_0+\mathcal{P}}\right).$$

Коэффициент a находится из соотношения

$$W_0W_0^{-1}=a\left\{1-\frac{\gamma_0\gamma_ip_i\gamma_0\gamma_jp_j}{(p_0+\mathcal{P})^2}\right\}=a\left\{1-\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{(p_0+\mathcal{P})^2}\right\}=1.$$

Таким образом

$$a=1+\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{(p_0+\mathcal{P})^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2}.$$

Если матрица G имеет следующую параметризацию

$$G=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то обратная к ней матрица примет вид

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix} & \\ & \dfrac{1}{\Delta_2}\begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11}\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij}, b_{ij} —произвольные параметры, удовлетворяющие условиям

$$\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0,$$
$$\Delta_2 = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь символ оператора Гамильтона для уравнения Дирака

$$\gamma_0\gamma_i p_i + \gamma_0 m = \begin{pmatrix} m & 0 & p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & m & p_1 + ip_2 & -p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -m & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -m \end{pmatrix}.$$

В результате применения вычислительных программ получаем жорданову форму

$$J = \begin{pmatrix} E & & 0 & \\ & E & & \\ & & -E & \\ & 0 & & -E \end{pmatrix}$$

и 8-параметрискую матрицу преобразования

$$W = \begin{pmatrix} (m+E)[t_1p_3 + t_2(p_1+ip_2) & (m+E)[t_1(p_1-ip_2) - t_2p_3] & t_1(p_1^2+p_2^2+p_3^2) & t_2(p_1^2+p_2^2+p_3^2) \\ (m+E)[t_3p_3 + t_4(p_1+ip_2) & (m+E)[t_3(p_1-ip_2) - t_4p_3] & t_3(p_1^2+p_2^2+p_3^2) & t_4(p_1^2+p_2^2+p_3^2) \\ (m-E)[t_5p_3 + t_6(p_1+ip_2) & (m-E)[t_5(p_1-ip_2) - t_6p_3] & t_5(p_1^2+p_2^2+p_3^2) & t_6(p_1^2+p_2^2+p_3^2) \\ (m-E)[t_7p_3 + t_8(p_1+ip_2) & (m-E)[t_7(p_1-ip_2) - t_8p_3] & t_7(p_1^2+p_2^2+p_3^2) & t_8(p_1^2+p_2^2+p_3^2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m}$.

Выбирая для матрицы (3) набор параметров аналогично предыдущему случаю

$$t_1 = \frac{p_3}{p_0 + E}, \qquad t_2 = \frac{p_1 - ip_2}{p_0 + E}, \qquad t_3 = \frac{p_1 + ip_2}{p_0 + E},$$
$$t_4 = -\frac{p_3}{p_0 + E}, \qquad t_5 = t_8 = 1, \qquad t_6 = t_7 = 0$$

получим матрицу

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{p_3}{m+E} & \dfrac{p_1 - ip_2}{m+E} \\ 0 & 1 & \dfrac{p_1 + ip_2}{m+E} & -\dfrac{p_3}{m+E} \\ -\dfrac{p_3}{m+E} & -\dfrac{p_1 - ip_2}{m+E} & 1 & 0 \\ -\dfrac{p_1 + ip_2}{m+E} & \dfrac{p_3}{m+E} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная к W_0, имеет вид

$$W_0^{-1} = \left\{1 - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{(m+E)^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\right\} \left(1 - \frac{\gamma_i p_i}{m+E}\right).$$

Используя формулу (2) получим общий вид обратной матрицы к матрице преобразования (3).

Рассмотрим теперь уравнение Кеммера–Деффина–Петье

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi = 0, \qquad \mu = \overline{0,3}.$$

Матрицы β_μ удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\nu\lambda}\beta_\mu,$$

$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ — метрический тензор.

Матрицы β_μ можно реализовать в виде

$$\beta_0 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & -\hat{1} & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \lambda_a \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_a & 0 \\ \hat{0} & \hat{S}_a & \hat{0} & 0 \\ -\lambda_a^+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a = \overline{1,3}.$$

Здесь

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},$$

$\hat{0}$ и $\hat{1}$ — нулевые и единичные матрицы размера 3×3, 0 — 3-х компонентные нулевые столбцы или строки.

Применение программы NLP к символу оператора КДП дает следующие корни и алгебраические кратности:

$\lambda_1 = -m$ — кратность $=4$,

$\lambda_2 = -m + \mathcal{P}$ — кратность $=3$,

$\lambda_3 = -m - \mathcal{P}$ — кратность $=3$.

С помощью программы NLJW символ оператора КДП приводится к диагональному виду, т.е. алгебраические кратности совпадают с геометрическими. При этом вычисляется 34-параметрическая матрица преобразования W, которую мы для экономии места не приводим. Таким образом уравнение Кеммера–Деффина–Петье инвариантно относительно 34-параметрической группы $GL(4)\otimes GL(3)\otimes GL(3)$.

1. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
2. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *ДАН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
3. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.
4. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983, 200 с.
5. Tobey R., Baker J., Crews R. et al., PL/I–FORMAC symbolic mathematics interpreter, IBM, Proj. No 360-03.3.004, Contributing Program Library, IBM, 1969.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А., Матрицы и вычисления, М., Наука, 1984, 320 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики, М., Наука, 1970, 404 с.

Relativistic particle of arbitrary spin in the Coulomb and magnetic-monopole field

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN, W.M. SUSLOPAROW

Exact solutions of relativistic wave equations for any spin charged particle in the Coulomb and magnetic-monopole fields are found.

1. Introduction

The description of interaction of charged spinning particle with external field is important problem of quantum mechanics. The interest in such problems is stimulated by the research of quark models with effective potential (see, e.q., [1]).

The experimental discovery of the relatively stable resonances with spins $s > \frac{1}{2}$ and searches of the exotic atoms, in which these resonances play the role of an orbital particles [2, 3] lead to the necessity of description of high-spin particle motion in an external field. At the same time relativistic wave equations for such particles lead to contradictions of principle — such as the absence of stable solutions in Coulomb field [4], the causality violation [5], etc. (see, e.q., [6]).

In papers [7, 8] Poincaré-invariant wave equations for particles of arbitrary spin are proposed which allow us to avoid many of these difficulties. By using these equations the solutions of many problems connected with any spin particle motion in an external field have been found for homogeneous magnetic field, Coulomb one and also for Redmond field — i.e. the combination of plane wave and homogeneous magnetic, field [9, 10]. In [11] the alternative possibility, of describing the spinning particle in the Coulomb field is considered, one that makes use of Galilei-invariant wave equations.

In present paper the problem of interaction of any spin relativistic particle with magnetic-monopole field is solved, using the equations proposed in [7, 8]. Such a problem for spinless particle was first considered by Dirac [12] and Tamm [13]. Harish-Chandra [14] obtained the exact solution of Dirac equation for electron interacting with magnetic-monopole field. A number of publications, devoted to the description of the motion of a charge in monopole field has appeared last time (see, e.g., [15–18]), but the case of a particle of any spin was not yet considered.

Besides we obtain the exact solutions of Poincaré-invariant equations for particles with arbitrary spin, interacting with the combination of the Coulomb and magnetic-pole fields.

2. Poincaré-invariant equations for particles of arbitrary spin

We will start from the following equations, describing the relativistic particle of spin s in an external electromagnetic field [7, 8]:

$$\begin{gathered}\left[\Gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}(1-i\Gamma_4)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right)F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0,\\ (\Gamma_\mu\pi^\mu + m)(1-i\Gamma_4)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2s(s-1)]\Psi = 16ms\Psi,\end{gathered} \tag{2.1}$$

Nuovo Cimento A, 1985, **87**, № 4, P. 415–424.

where $\Psi = \Psi(x)$ is the $8s$-component wave function, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\pi_\mu = -i(\partial/\partial x^\mu) - eA_\mu$, A_μ is the vector potential, $F^{\mu\nu}$ is the electromagnetic-field tensor, Γ_μ are $(8s \times 8s)$-dimensional matrices satisfying the Clifford algebra

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

$\Gamma_4 = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, $S_{\mu\nu}$ are the generators of the representation $\left[D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \otimes D\left(s - \frac{1}{2}, 0\right)$ of Lorentz group.

In the case $s = \frac{1}{2}$ the system (2.1) is reduced to Dirac equation for electron. If s is arbitrary integer or half-integer, this system describes the causal motion of the charged particle of spin s in an external electromagnetic field [7, 8].

To solve the above-mentioned problems it is convenient to pass from eqs.(2.1) to the system of second-order equations. Multiplying eqs.(2.1) from the left by $\frac{1}{2}(1 \pm i\Gamma_4)$ and expressing $\Psi_+ = \frac{1}{2}(1 + i\Gamma_4)\Psi$ via $\Psi_- = \frac{1}{2}(1 - i\Gamma_4)\Psi$ we obtain

$$\left(\pi_\mu\pi^\mu - m^2 - \frac{e}{2s}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\Psi_- = 0, \tag{2.3a}$$

$$[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s+1)]\Psi_- = 0, \tag{2.3b}$$

$$\Psi_+ = \frac{1}{m}\Gamma_\mu\pi^\mu\Psi_-. \tag{2.3c}$$

According to (2.3), solving of eqs.(2.1) is reduced to finding of the function Ψ_-, satisfying (2.3a), (2.3b) inasmuch as general solution of eqs.(2.1) may be presented as $\Psi \equiv \Psi_+ + \Psi_-$, and Ψ_- is expressed via Ψ_+ in accordance with (2.3c).

It follows from (2.3b) that the function Ψ_- has only $2s + 1$ nonzero components and is spinor from the space of $D(s, 0)$ representation of the Lorentz group. On the set of such functions the matrices $S_{\mu\nu}$ are reduced to $(2s+1) \times (2s+1)$-dimensional generators of the irreducible representation $D(s)$ of O_3 group (indicated below as $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$), and eq.(2.3a) comes to the following form:

$$\left[\pi_\mu\pi^\mu - m^2 - \frac{e}{m}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{H} - i\boldsymbol{E})\right]\Phi_s = 0, \tag{2.4}$$

where Φ_s is $(2s + 1)$-component function (including nonzero components of Ψ_-), $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ are the vectors of electric and magnetic fields, respectively. For $s = \frac{1}{2}$ eq.(2.4) coincides with well-known Zaiteev–Feynman–Gell-Mann equation [19, 20].

3. Arbitrary-spin particle in the magnetic-monopole field

In the spherical co-ordinates the vector potential and the corresponding vectors of the electric and magnetic-field strength created by the magnetic monopole are [14]

$$\begin{aligned} &A_0 = A_r = A_\theta = 0, \qquad A_\varphi = \frac{n}{2c}(1 - \cos\theta), \\ &\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{n}{2e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where n is integer, $\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

Writing eqs.(2.4), (3.1) in the spherical co-ordinates one obtains

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\Delta^*\Phi + (\varepsilon^2 - m^2)\Phi = \frac{n}{2s}\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\Phi, \tag{3.2}$$

where ε is the stationary-state energy,

$$\Delta^* = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{in}{1+\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{n^2}{4}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

Equation (3.2) may be solved by separation of variables for any value of spin s. With the help of the unitary transformation $\Psi \to \Omega = V\Psi$, where

$$V = \exp[-iL_3\varphi]\exp[i(S_2\cos\varphi - S_1\sin\varphi)\theta], \qquad L_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{3.3}$$

eq.(3.2) comet to such a form, in which the matrix $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}/r^3$ on the r.h.s. is diagonal and equal to S_3/r^2:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\Omega + \frac{1}{r^2}\Delta'^*\Omega + (\varepsilon^2 - m^2)\Omega = \frac{n}{2s}\frac{1}{r^2}S_3\Omega. \tag{3.4}$$

Here

$$\begin{gathered}\Delta'^* = K^2 - \boldsymbol{S}^2 - 2S_3^2 + nS_2 + \frac{n^2}{4} + 2iS_2(1-w^2)^{1/2}\frac{d}{dw} - \\ -2S_1\frac{1}{(1-w^2)^{1/2}}\left[L_3 + \left(\frac{n}{2}+S_3\right) - \left(\frac{n}{2}+S_3\right)w\right],\end{gathered} \tag{3.5}$$

where

$$\begin{gathered}K^2 = (1-w^2)\frac{d^2}{dw^2} - 2w\frac{d}{dw} - \\ -\frac{[L_3 + (n/2+S_3) - (n/2+S_3)w]^2}{1-w^2} - \left(\frac{n}{2}+S_3\right)^2, \\ w = \cos\theta.\end{gathered} \tag{3.6}$$

The solutions of eq.(3.4) can be represented as an expansion in Jacobi polinomials [14] and eigenfunctions of the operator L_3

$$\Omega = \sum_\sigma F_\sigma(r)P^k_{n/2+j,n/2+\sigma}(w)\exp[-i(j-\sigma)\varphi], \tag{3.7}$$

where $P^k_{n/2+j,n/2+\sigma}$ is the complete set of the normalized eigenfunctions of the commuting operators $J_3 = L_3 + S_3$, S_3 and K^2 (3.6) which correspond to the eigenvalues j, σ and $-k(k+1)$, respectively, moreover

$$\begin{gathered}k \geq \left|\tfrac{n}{2}+\sigma\right|, \qquad \left|\tfrac{n}{2}+j\right| \quad \text{and} \quad k - \left(\tfrac{n}{2}+\sigma\right) \quad \text{are integers,} \\ \sigma = -n_{sk}, -n_{sk}+1, \ldots, n_{sk}, \qquad n_{sk} = \min(s,k).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Using recurrent relations [14]

$$\begin{gathered}\left\{(1-w^2)^{1/2}\frac{d}{dw} + \frac{\nu' - \mu' w}{(1-w^2)^{1/2}}\right\}P^k_{\nu'\mu'}(w) = \\ = [(k+\mu')(k-\mu'+1)]^{1/2}P^k_{\nu'\mu'-1}(w),\end{gathered} \tag{3.9a}$$

$$\left\{(1-w^2)^{1/2}\frac{d}{dw}-\frac{\nu'-\mu'w}{(1-w^2)^{1/2}}\right\}P^k_{\nu'\mu'}(w)=$$
$$=-[(k-\mu')(k+\mu'+1)]^{1/2}P^k_{\nu'\mu'+1}(w), \tag{3.9b}$$

and formulae for the matrices S_1 and S_2 in Gel'fand–Zeytlin basis [21], we come to the following equations for radial function $F_\sigma(w)$:

$$DF_\sigma(r)=r^{-2}A_{\sigma\sigma'}F_{\sigma'}(r), \tag{3.10}$$

where

$$D=(\varepsilon^2-m^2)+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k(k+1)-n^2/4}{r^2}, \tag{3.11}$$

$$A_{\sigma\sigma'}=\left[s(s+1)-2\sigma^2+\frac{1-2s}{2s}n\sigma\right]\delta_{\sigma\sigma'}-\Lambda_{\sigma\sigma'},$$
$$\Lambda_{\sigma\sigma'}=0,\qquad \sigma'\neq\sigma\pm1, \tag{3.12}$$
$$\Lambda_{\sigma\sigma-1}=\Lambda_{\sigma-1\sigma}=-\left[(s+\sigma)(s-\sigma+1)\left(k+\frac{n}{2}+\sigma\right)\left(k-\frac{n}{2}-\sigma+1\right)\right]^{1/2}.$$

Since the matrix $A_{\sigma\sigma'}$ is diagonalizable, system (3.10) can be reduced to the system of noncoupled equations

$$D\hat{F}_\sigma(r)=r^{-2}B^{sk}_\sigma\hat{F}_\sigma(r),\qquad \hat{F}_\sigma=u_{\sigma\sigma'}F_{\sigma'}, \tag{3.13}$$

where B^{sk}_σ are the matrix $A_{\sigma\sigma'}$ eigenvalues, which coincide with the roots of the characteristic equation

$$\det\|A_{\sigma\sigma'}-B^{sk}_\sigma\delta_{\sigma\sigma'}\|=0, \tag{3.14}$$

$u_{\sigma\sigma'}$ is the operator diagonalizing the matrix $A_{\sigma\sigma'}$.

Each of eqs.(3.13) by the replacement of the variable $\rho=(\varepsilon^2-m^2)^{1/2}r$ reduces to the wen-known one [14]

$$\frac{d^2\hat{F}}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\hat{F}}{d\rho}+\left[1-\frac{k(k+1)-n^2/4+B^{sk}_\sigma}{\rho^2}\right]\hat{F}=0, \tag{3.15}$$

the solution of which (limited at the point $\rho=0$) is expressed via Bessel's function

$$\hat{F}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}J_{\sqrt{(k+n/2+1/2)(k-n/2+1/2)+B^{sk}_\sigma}}(\rho), \tag{3.16}$$

where k satisfies of the conditions (3.8).

One can make sure by the direct verification that at least for $s<\frac{3}{2}$, $(k+n/2+1/2)(k-n/2+1/2)+B^{sk}_\sigma>0$. This means that $\varepsilon>m$, and so particle with spin $s<\frac{3}{2}$ in magnetic-pole field has continuous energy spectrum and has not coupled states. In the cases $s=0$ and $s=\frac{1}{2}$ the absence of coupled states was demonstrated by Dirac [12] and Harish-Chandra [14].

According to the above the explicit solution of the wave eq.(2.4) for the case in which the external field source is a magnetic monopole has the form

$$\Phi_s(t,\boldsymbol{r}) = \frac{N}{\sqrt{(\varepsilon^2-m^2)^{1/2}r}}\exp[-i\varepsilon t]\exp[i(S_2\cos\varphi - S_1\sin\varphi)\theta]\times$$
$$\times\exp[-i(j-\sigma)\varphi]u^{-1}_{\sigma\sigma}P^k_{n/2+j,n/2+\sigma'}(\theta)J_{\sqrt{(k+n/2+1/2)(k-n/2+1/2)+B^{sk}_{\sigma'}}}(\sqrt{\varepsilon^2-m^2}\cdot r), \tag{3.17}$$

where N is the normalization constant. Solutions of the starting system (2.1) may be expressed through the function (3.17) with the help of the relations (2.3c).

Let us give the explicit expressions for B^{sk}_{σ} and $u^{sk}_{\sigma\sigma'}$, if $s\le 1$:

$$B^{\frac{1}{2}k}_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\pm\left[\left(k+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2},$$

$$B^{1k}_{\sigma} = 2\sqrt{-p/3}\cos[(\gamma+\sigma\pi)/3],$$

$$\cos\gamma = \frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^2}},\qquad p=-(2k+1)^2+\frac{3}{4}n^2-\frac{1}{3},$$

$$q=-\frac{8}{3}k(k+1)-\frac{16}{27},\qquad \sigma=0,\pm1;$$

$$u^{\frac{1}{2}k}_{\sigma\sigma'} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_1\\ c_2 & c_2\end{pmatrix},\qquad \sigma,\sigma'=\pm\frac{1}{2};$$

$$u^{1k}_{\sigma\sigma'} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1}{n/2+B^{1k}_1}\beta_1 & \beta_1 & \dfrac{p_2}{B^{1k}_1-n/2}\beta_1\\ \dfrac{p_1}{n/2+B^{1k}_0}\beta_2 & \beta_2 & \dfrac{p_2}{B^{1k}_0-n/2}\beta_2\\ \dfrac{p_1}{n/2+B^{1k}_{-1}}\beta_3 & \beta_3 & \dfrac{p_2}{B^{1k}_{-1}-n/2}\beta_3 \end{pmatrix},\qquad \sigma,\sigma'=0,\pm1;$$

$$p_1=-\left[2\left(k-\frac{n}{2}\right)\left(k+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2},\quad p_2=-\left[2\left(k+\frac{n}{2}\right)\left(k-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}.$$

Here c_1, c_2, β_1, β_2, β_3 are arbitrary nonzero constants.

4. Arbitrary spin particle in the Coulomb field

In the case of Coulomb potential $A_0=Ze/r$, $\boldsymbol{A}=0$, eq.(2.4) in spherical coordinates takes the following form:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\Phi+\frac{1}{r^2}\Delta\Phi+\left[\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2\right]\Phi=-\frac{i\alpha}{sr^3}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r})\Phi, \tag{4.1}$$

where $\alpha=Ze^2$, Δ is an angular part of Laplace operator.

Equation (4.1), as eq.(3.2), has exact solutions in separated variables. In [9] eq.(4.1) is solved by using of the spherical spinor basis. Here we shall obtain the expressions of eq.(4.1) solutions through Jacobi polinomials which are more convenient basis in more general case of combination of the Coulomb and magnetic-pole potentials.

In such a way, as was done in previous section, we shall pass to the representation, in which the matrix $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}/r^3$ is diagonal. Using for this purpose the transformation operator (3.3), we obtain

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\Omega+\frac{1}{r^2}\Delta'^{*}_{n=0}\Omega+\left[\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2\right]\Omega=-\frac{i\alpha}{sr^2}S_3\Omega, \tag{4.2}$$

where $\Delta'^{*}_{n=0}$ is the operator (3.5) with $n=0$.

Representing the solutions of eq.(4.2) in the form (3.7) one comes to eq.(3.10) for the radial wave function, where

$$D=\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k(k+1)}{r^2}, \tag{4.3}$$

$$A^{*}_{\sigma\sigma'}=\left[s(s+1)-2\sigma^2-\frac{i\alpha}{s}\sigma\right]\delta_{\sigma\sigma'}-\Lambda^{*}_{\sigma\sigma'}, \tag{4.4}$$

$\Lambda^{*}_{\sigma\sigma'}$ is the matrix (3.12) corresponding to $n=0$.

The matrix $A^{*}_{\sigma\sigma'}$ is diagonalizable, so the system of equations (3.10), (4.3), (4.4) is equivalent to noncoupled eqs.(3.13), (4.3), where B^{sk}_{σ} are the roots of the matrix (4.4) characteristic equation (for explicit expressions for the coefficients B^{sk}_{σ} see [9]). Each of these equations in its turn is reduced to the well-known equation of the for [22]

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}+\left(\delta-\frac{z}{4}-\frac{l^2}{4z}\right)y=0, \tag{4.5}$$

where

$$\begin{gathered}z=2(m^2-\varepsilon^2)^{1/2}r,\qquad y=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{m^2-\varepsilon^2}\right)^{1/2}\hat{F},\\ \delta=\frac{\varepsilon\alpha}{(m^2-\varepsilon^2)^{1/2}},\qquad l^2=(2k+1)^2+4(B^{sk}_{\sigma})^2-4\alpha^2.\end{gathered} \tag{4.6}$$

In the case $\varepsilon^2-m^2<0$ (boundary states) the allowed values of δ are

$$\delta=(l+1)/2+n',\qquad n'=0,1,2,\ldots,$$

hence

$$\varepsilon=m\left[1+\frac{\alpha^2}{\left(n'+\frac{1}{2}+\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2+B^{sk}_{\sigma}\right]^{1/2}\right)^2}\right]^{-1/2} \tag{4.7}$$

and the solutions of eq.(4.5) are

$$y=\exp[-z/2]z^{l/2}Q^{l}_{n'}(z), \tag{4.8}$$

where $Q^{l}_{n'}$ are Laguerre polynomials [22].

For the continuous spectrum $\varepsilon^2-m^2>0$ the solution of eq.(4.5) limited at the point $z=0$ has the form

$$y=\exp[-i\tau/2]\tau^{l/2}F\left(\frac{l+1}{2}+i\gamma,l+1,i\tau\right), \tag{4.9}$$

where F is a degenerated hypergeometric function, $\tau=-iz$, $\gamma=i\delta$.

So we have obtained the solution of Kepler problem for quantum-mechanical particle of any spin. The energy spectrum of such a particle is determined by formula (4.7) (for coupled states), and radial wave function in representation, where matrix $A^{*}_{\sigma\sigma'}$ is diagonal, has the form (4.8) or (4.9). The discussion of the spectrum (4.7) is given in [9].

5. Arbitrary spin particle in the combined field

Now we shall consider the motion of a charged particle in central field which is the combination of Coulomb and magnetic monopole ones, when

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{ze}{r}, \qquad \boldsymbol{A} = -\frac{n}{2e}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}}{r(r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}, \\ \boldsymbol{E} &= -\frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{n}{2e}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Writing down the corresponding eq.(2.4) in spherical co-ordinates and representing the solution in the form (3.7), one comes to the radial equation in the form (3.10), where

$$\begin{aligned} D &= \left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{k(k+1)-n^2/4}{r^2}, \\ A_{\sigma\sigma'} &= \left[s(s+1) - 2\sigma^2 + \frac{1-2s}{2s} - \frac{i\alpha}{s}\sigma\right]\delta_{\sigma\sigma'} - \Lambda_{\sigma\sigma'}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

and the matrix elements $\Lambda_{\sigma\sigma'}$ are defined by eq.(3.12).

The system (3.10), (5.2) in its turn is reduced to the set of noncoupled eqs.(3.13), where B^{sk}_{σ} are the matrix (5.2) eigenvalues. So the energy values, corresponding to the coupled states, are

$$\varepsilon = m\left\{1+\frac{\alpha^2}{\left(n'+\frac{1}{2}+\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+n^2/4-\alpha^2+B^{sk}_{\sigma}\right]^{1/2}\right)^2}\right\}^{-1/2}, \tag{5.3}$$

where $n' = 0,1,2,\ldots$, $n = 0,1,2,\ldots$, and possible values of k are given in (3.8).

Formula (5.3) generalizes the relation, obtained in [15] for $s=\frac{1}{2}$, for the case of any spin values. For $n=0$ the spectrum (5.3) is reduced to the one for a particle of any spin in Coulomb field (see (4.7)). We see that an arbitrary-spin particle as well as a spin-$\frac{1}{2}$ one has the coupled states in the considered combined field.

So we have obtained exact solutions of relativistic wave equations, describing the motion of any spin particle in some central external fields. Such solutions may be useful, e.q. in investigations connected with scarches of coupled states of exited atomic nucleus in magnetic-pole field and so on.

1. Bykov A.A., Dremin I.M., Leonidov A.V., *Usp. Fiz. Nauk*, 1984, **143**, 3 (in Russian).
2. Kirillov-Ugryumov V.G., Nikitin Yu.P., Sergeev F.M., Atoms and mesons, Moscow, 1980 (in Russian).
3. Betty C.G, *Fiz. Elem. Chastits At. Jadra*, 1982, **13**, 164.
4. Tamm I.E., *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1940, **9**, 551 (in Russian).

5. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, 1337.
6. Wightman A.S., in Invariant wave equations, in Lect. Notes Phys., 1980, **73**, 1.
7. Nikitin A.G., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1978, **34**, 319 (English translation: *Theor. Math. Phys.*, 1978, **34**, 203).
8. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Fiz. Elem. Chastits At. Jadra*, 1978, **9**, 501 (in Russian).
9. Nikitin A.G., *Teor. Mat. Fiz.*, 1983, **57**, 257.
10. Susloparow V.M., in Algebraic-Theoretical Methods in Mathematical Physic Problems, Kiev, 1983, 104.
11. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Nuovo Cimento A*, 1984, **81**, 644.
12. Dirac P.A.M., *Proc. R. Soc. London*, 1931, **133**, 60.
13. Tamm I.E., *Z. Phys.*, 1931, **71**, 141; see also Tamm I.E., Collected papers, Moscow, 1975 (in Russian).
14. Harish-Chandra, *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 883.
15. Houtot A., *J. Math. Phys.*, 1972, **13**, 710.
16. Nair V.P., *Phys. Rev. D*, 1983, **28**, 2673.
17. Barut A.O., Xu Bo-Wei, *Phys. Rev. D*, 1983, **28**, 2666.
18. Balachandran A.P., Roy S.M., *Phys. Rev. D*, 1983, **28**, 2669.
19. Zaitcev G.A., *Z. Eksp. Teor. Fiz.*, 1955, **28**, 530 (in Russian).
20. Feynman R.P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.
21. Gel'fand I.M., Minlos P.A., Shapiro Z.Ya., Representations of the rotation and Lorentz groups and their application, Pergamon Press, Oxford, 1963.
22. Fock V.A., Foundations of quantum mechanics, Nauka, Moscow, 1976.

Конформная симметрия и точные решения нелинейных полевых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

Conformally and translationally invariant solutions are obtained for the systems of partially differential equations describing interaction of scalar, spinor and vector fields. Formulas of generating new solutions from the known ones are presented.

1. Построение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП) является важной и, как правило, трудной задачей. Особый интерес представляют многомерные уравнения, поскольку реальные физические процессы происходят в трех- или четырехмерном пространстве–времени. Известный метод обратной задачи теории рассеяния эффективно применяется только к двумерным уравнениям, а его обобщение на многомерные случаи связано с принципиальными трудностями, которые до настоящего времени не преодолены.

В данной работе для получения точных решений используются симметрийные свойства многомерных систем НДУЧП, аналогично [1–6].

2. Рассмотрим следующие системы НДУЧП:

$$\left[i\gamma\partial - \lambda_1(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3} - \lambda_2\varphi\right]\Psi = 0, \qquad \Box\varphi = \lambda_3\varphi^3 - \lambda_2\bar{\Psi}\Psi, \tag{1}$$

$$\left\{i\gamma\partial - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3} - \mu\left[\overline{(\gamma\partial\Psi)}(\gamma\partial\Psi)\right]^{1/5}\right\}\Psi = 0, \tag{2}$$

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \lambda A_\mu A^\nu A_\nu, \tag{3}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ — скалярное поле, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\Psi = \Psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0$, $A_\mu = A_\mu(x)$ — векторное поле, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, γ_μ — матрицы Дирака [7], $\gamma\partial \equiv \gamma^\nu\partial_\nu$, $\partial_\nu = \partial/\partial x_\nu$.

Для системы уравнений (1) в [8, 9] с помощью анзатца Гейзенберга [10] получены некоторые точные решения. Отметим, что решение, приведенное в [9], получается из решения, указанного в [8], с помощью процедуры группового размножения [2, 3] с использованием инвариантности системы (1) относительно трансляций и масштабных преобразований.

Уравнение (2) представляет собой конформно инвариантное обобщение уравнения Дирака с нелинейностью Гюрши, а система (3) — обобщение уравнений Максвелла для вектора-потенциала A_μ.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что системы (1)–(3) инвариантны относительно пятнадцатипараметрической конформной группы $C(1,3)$.

Украинский физический журнал, 1985, **30**, № 5, С. 787–789.

Чисто конформные преобразования имеют вид

$$
\begin{aligned}
&x'_\mu = (x_\mu - c_\mu x^2)/\sigma(x), \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \qquad cx \equiv c^\nu x_\nu,\\
&c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad \varphi'(x') = \sigma(x)\varphi(x), \qquad \Psi'(x') = \sigma(x)(1 - \gamma c\gamma x)\Psi(x),\\
&A'_\mu(x') = \left[\sigma(x)g_{\mu\nu} + 2(x_\mu c_\nu - x_\nu c_\mu + 2cxc_\mu x_\nu - x^2c_\mu c_\nu - c^2x_\mu x_\nu)\right]A^\nu(x),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где c_μ — произвольные постоянные, $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\{1,-1,-1,-1\}$.

Решения систем (1)–(3) ищем в виде [1]

$$
\varphi(x) = f(x)u(\omega), \qquad \Psi(x) = M(x)\Phi(\omega), \qquad A_\mu(x) = a_{\mu\nu}(x)b^\nu(\omega). \tag{5}
$$

Скалярную функцию $f(x)$, матрицы 4×4 $M(x)$, $\hat{a}(x) = \{a_{\mu\nu}(x)\}$ и новые переменные $\omega = \omega(x)$ определим из условий [2, 3]

$$
Q_{\text{conf}}\begin{pmatrix} f\\ M\\ \hat{a}\end{pmatrix} = 0, \tag{6}
$$

где

$$
Q_{\text{conf}} = 2(cx)x\partial - x^2c\partial + \begin{pmatrix} 2cx & 0 & 0\\ 0 & 2cx + \gamma c\gamma x & 0\\ 0 & 0 & 2(cx + S_{\mu\nu}c^\mu x^\nu)\end{pmatrix}, \tag{7}
$$

$S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ — матрицы 4×4, реализующие неприводимое представление $D(1/2,1/2)$ алгебры Ли группы $SO(1,3)$ [6].

Можно убедиться, что условия (6) удовлетворяются следующими функциями:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \frac{1}{x^\nu x_\nu}, \qquad M(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2}, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{x^\alpha x_\alpha} - 2\frac{x_\mu x_\nu}{(x^\alpha x_\alpha)^2},\\
&\omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}, \qquad \beta^\nu = \text{const}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Подстановка конформно инвариантных анзатцов (5), (8) в системы (1)–(3) приводит к следующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно:

$$
\dot{\Phi} = i\left[\lambda_1(\bar{\Phi}\Phi)^{1/3} + \lambda_2 u\right](\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\gamma\beta\Phi, \qquad \ddot{u} = (\beta_\nu\beta^\nu)^{-1}\left(\lambda_3u^3 - \lambda_2\bar{\Phi}\Phi\right), \tag{9}
$$

$$
\dot{\Phi} = i(\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}(\gamma\beta)\left[\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/3} + \mu(\dot{\bar{\Phi}}\dot{\Phi}\beta_\nu\beta^\nu)^{1/5}\right]\Phi, \tag{10}
$$

$$
\beta^\nu\beta_\nu\ddot{b}_\mu - \beta_\mu(\beta_\nu\ddot{b}_\nu) = \lambda b_\mu b^\nu b_\nu, \tag{11}
$$

где дифференцирование произведено по ω.

Простейшими решениями этих систем будут соответственно функции

$$
\begin{aligned}
&u = c = \text{const}, \qquad \Phi = \exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi,\\
&\varkappa = (\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\left[\lambda_1(\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \lambda_2 c\right], \qquad \lambda_3c^3 = \lambda_2\bar{\chi}\chi,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\Phi = \exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi, \qquad \varkappa = (\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\left[\lambda[\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \mu(\varkappa^2(\beta^\nu\beta_\nu)^2\bar{\chi}\chi)^{1/5}\right], \tag{13}
$$

$$b_\mu = \alpha_\mu g(\omega), \qquad \alpha_\mu = \mathrm{const}, \qquad \ddot{g} = \varkappa g^3, \qquad \alpha\beta = 0 \tag{14}$$

($\varkappa$ — постоянная, χ — постоянный спинор).

Таким образом, получаем конформно инвариантные решения систем (1)–(3):

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2}\exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi, \qquad \omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}, \qquad \varphi(x) = \frac{c}{x^\nu x_\nu},\\ \varkappa = (\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\left[\lambda_1(\bar\chi\chi)^{1/3} + \lambda_2 c\right], \qquad \lambda_3 c^3 = \lambda_2\bar\chi\chi,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2}\exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi,\\ \varkappa = (\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\left[\lambda[\bar\chi\chi)^{1/3} + \mu(\varkappa^2(\beta^\nu\beta_\nu)^2\bar\chi\chi)^{1/5}\right],\end{gathered} \tag{16}$$

$$A_\mu(x) = \left(\frac{\alpha_\mu}{x^\nu x_\nu} - 2x_\mu\frac{\alpha x}{(x^\nu x_\nu)^2}\right)g(\omega), \qquad \alpha\beta = 0, \qquad \ddot{g} = \varkappa g^3, \tag{17}$$

$g(\omega)$ — эллиптические функции.

Аналогичным образом, получаются трансляционно инвариантные решения систем (1)–(3). Они имеют вид соответственно

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma k)(kx)\}\chi, \qquad \varphi(x) = c,\\ \varkappa = (k^\nu k_\nu)^{-1}\left[\lambda_1(\bar\chi\chi)^{1/3} + \lambda_2 c\right], \qquad \lambda_3 c^3 = \lambda_2\bar\chi\chi,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma k)(kx)\}\chi,\\ \varkappa = (k^\nu k_\nu)^{-1}\left\{\lambda[\bar\chi\chi)^{1/3} + \mu\left[\varkappa^2(k^\nu k_\nu)^2(\bar\chi\chi)^{1/5}\right]\right\},\end{gathered} \tag{19}$$

$$A_\mu(x) = \alpha_\mu g(kx), \qquad \alpha k = 0, \qquad \ddot{g} = \varkappa g^3. \tag{20}$$

Решения (18)–(20) можно использовать для получения других семейств решений систем (1)–(3) по формулам [2, 3].

Для конформных преобразований (4) формулы генерирования новых решений имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi_{\text{н}}(x) = \frac{\varphi_{\text{c}}(x')}{\sigma(x)}, \qquad x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2,\\ \Psi_{\text{н}}(x) = \frac{1-\gamma x\gamma c}{\sigma(x)}\Psi_{\text{c}}(x'), \qquad A^{\text{н}}_\mu(x) = \{g_{\mu\nu}/\sigma(x) + 2/\sigma^2(x)[c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu +\\ +2cxx_\mu c_\nu - c^2x_\mu x_\nu - x^2c_\mu c_\nu)\}\, A^\mu_{\text{c}}(x').\end{gathered} \tag{21}$$

В заключение отметим, что с помощью использованного здесь метода найдены многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака [2, 3], эйконала [4], Янга–Миллса [5], уравнений квантовой электродинамики с самодействием электромагнитного поля [6].

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
3. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271–278.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 15, 498–502.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Conformal symmetry and new exact solutions of $SU(2)$ Yang–Mills theory, *Lett. Nuovo Cim.*, 1983, **38**, № 2, 37–40.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, № 3/4, 215–217.
7. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Квантовые поля, М., Наука, 1980, 320 с.
8. Barut A.O., Bo-Wei Xu, Derivation and uniqueness of vacuum solutions of conformally invariant coupled nonlinear field equations, *Phys. Lett. B*, 1981, **102**, № 1, 37–39.
9. Barut A.O., Bo-Wei Xu, New exact solution of coupled nonlinear field equations, *Physica D*, 1982, **6**, № 2, 137–139.
10. Гейзенберг В., Нелинейное спинорное уравнение, В кн.: Нелинейная квантовая теория поля, М., Изд-во иностр. лит., 1959, 63–75.

On nonlocal transformations

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN

A procedure of finding finite transformations generated by a linear arbitrary-order differential operators is presented. Dirac equation is shown to be Galilei invariant with the nonlocal law of transformation of the Ψ-function.

At the present time special interest in the study of the invariance properties of partial differential equations (PDE) excite nonlocal symmetries such as contact, Lie–Bäcklund [1] non-Lie [2, 3]. Recently it was shown [3] that many fundamental equations of theoretic physics possess an additional (non-Lie) invariance. The basis elements of such invariance algebras are arbitrary order differential operators even pseudo-differential, while the Lie symmetry is generated by first-order differential operators only. It will be noted that for systems of linear PDE non-Lie symmetry generated by finite-order differential operators can be obtained by the Lie–Bäcklund approach [1], but with more formidable calculations. In other words, the non-Lie method [2, 3] applicable to systems of linear PDE gives the same results as Lie–Bäcklund approach does, but more reliable and easy.

In this note we solve the problem of finding finite transformations generated by non-Lie operators, and show that any such operator leads to a one-parametrical group of transformations.

Formulae of finite transformations discussed here can be used for generating new solutions of equations in question by analogy with that done in the local case [4–8].

Any linear arbitrary-order differential operator Q acting in the space of r-component ψ-function ($\psi=\psi(x)$, $x=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$) can be written down in the form

$$Q(x,\partial)=\xi^\mu\partial_\mu+\eta(x,\partial), \qquad (1)$$

where $\xi^\mu(x)$ are scalar functions, $\mu=0,1,\dots,n$; $\partial=\{\partial_\nu=\partial/\partial x_\nu\}$, $\eta(x,\partial)$ is a matrix $(r\times r)$, the differential operator does not contain terms like $\xi^\mu(x)\partial_\mu$.

Definition. *A linear system of PDE*

$$L(x,\partial)\psi(x)=0 \qquad (2)$$

is invariant under the transformations

$$x\to x'=f(x,\theta), \qquad \psi(x)\to\psi'(x')=R(x,\partial,\theta)\psi(x), \qquad (3)$$

if

$$L(x',\partial')\psi'(x')=0. \qquad (4)$$

Theorem. *Operator Q (1) will be an operator of symmetry of eq.(2), if on the manifold of solutions of eq.(1) the following condition holds true:*

$$LQ\psi=0 \quad \textit{or} \quad [L,Q]\psi\equiv(LQ-QL)\psi=0, \qquad (5)$$

Lettere al Nuovo Cimento, 1985, **44**, № 1, P. 40–42.

the transformations generated by Q having the form

$$x'_\nu = \exp[\theta\xi\cdot\partial]x_\nu\exp[-\theta\xi\partial], \qquad \psi'(x') = \exp[\theta\xi\cdot\partial]\exp[-\theta Q]\psi(x). \tag{6}$$

Proof. As a result of transformations (6) operator $L(x,\partial)$ of eq.(2) will be rewritten in such a manner

$$L(x,\partial)\to L(x',\partial') = \exp[\theta\xi\cdot\partial]L(x,\partial)\exp[-\theta\xi\cdot\partial]. \tag{7}$$

Hence, we have

$$L(x',\partial')\psi'(x') = \exp[\theta\xi\cdot\partial]L(x',\partial)\exp[-\theta\xi\cdot\partial]\exp[\theta\xi\partial]\exp[-\theta Q]\psi(x) =$$
$$= \exp[\theta\xi\partial]L(x,\partial)\exp[-\theta Q]\psi(x) = 0,$$

since eq.(5) takes place. According to (4) it proves our theorem.

Remark 1. If Q is a first-order differential operator (case of Lie symmetry), that is $\eta(x,\partial) = \eta(x)$, then formulae (6) give the same result as does integration of corresponding Lie equations.

Remark 2. Transformations (6) form a one-dimensional group. Indeed,

$$x''_\nu = \exp[\beta\xi\cdot\partial]x'_\nu\exp[-\beta\xi\cdot\partial] = \exp[\beta\xi\cdot\partial]\exp[\theta\xi\cdot\partial]x_\nu\times$$
$$\times\exp[-\theta\xi\partial]\exp[-\beta\xi\cdot\partial] = \exp[(\theta+\beta)\xi\cdot\partial]x_\nu\exp[-(\theta+\beta)\xi\cdot\partial].$$

As far as the transformation of $\psi(x)$ is concerned, let us rewrite it in this way

$$\psi'(x') = \exp[\theta\xi\cdot\partial]\exp[-\theta Q]\psi(x) = \exp[\theta R]\psi(x).$$

To do it, we have used the Campbell–Baker–Hausdorff formula. $R = R(x,\partial)$ is an operator constructed from $\xi\cdot\partial$ and Q and their various commutators. So we have

$$\psi''(x'') = \exp[\beta R]\psi'(x') = \exp[\beta R]\exp[\theta R]\psi(x) = \exp[(\theta+\beta)R]\psi(x).$$

This proves our statement.

In ref. [2, 3] it is shown that Dirac equation is the sense of condition (5), under the set operators satisfying the commutation relations of the Poincaré algebra

$$P_0 = i\partial_0, \qquad P_a = -i\partial_a, \qquad a = 1,2,3,$$
$$J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a - \frac{i}{2}\gamma_a\gamma_b,$$
$$J_{0a} = tP_a - \frac{1}{2}(Hx_a + x_aH), \qquad H = \gamma_0\gamma_aP_a + \gamma_0 m.$$

But now operator J_{0a} does not generate Lorentz transformations. In accordance with formulae (6) we get

$$x'_0 = x_0, \qquad x'_a = x_a + v_ax_0,$$

which are the well-known Galilei transformations;

$$\psi'(x') = \exp[ix_0v_ap_a]\exp\left[-ix_0v_ap_a + \frac{i}{2}(Hx_a + x_aH)\right]\psi(x)$$

and it is a nonlocal law of transformation.

1. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie–Bäcklund transformations in applications, Philadelphia, Pa., l979, p. 150.
2. Fushchych W.I., in Group-Theoretic Methds in Mathematical Physics, Kiev, Mathematical Institute, 1978, 5–44 (in Russian).
3. Fushchych W.I., Nikitin A.G., The symmetry of Maxwell equations, Kiev, Naukova dumka, 1983 (in Russian).
4. Fushchych W.I., Shtelen W.I., *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1983, **269**, № 1, 88 (in Russian).
5. Fushchych W.I., Shtelen W.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **34**, № 16, 498.
7. Fushchych W.I., Shtelen W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1983, **38**, № 2, 37.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.I., *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, № 3/4, 215.

On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions

W.I. FUSHCHYCH, W.M. SHTELEN, R.Z. ZHDANOV

The Poincaré and conformally invariant nonlinear generalizations of the Dirac equation are discussed and, in particular, the conformally invariant version of the Dirac–Heisenberg equation is obtained. For the latter equation some exact solutions are found and among them there is a family which is invariant under the full 15-parameter conformal group.

Consider the following Poincaré invariant nonlinear generalization of the Dirac equation

$$\begin{gathered}\gamma^\mu[i\partial_\mu + F_1\bar\psi\gamma_\mu\psi + F_2\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi + F_3(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\gamma_4 + F_4(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)\gamma_4]\psi+\\ +F_5(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\sigma^{\mu\nu}\psi + F_6(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\gamma_4\sigma^{\mu\nu}\psi = (F_7+F_8\gamma_4)\psi,\end{gathered} \tag{1}$$

where $F_1,\ldots,F_8$ are arbitrary functions of $\bar\psi\psi$ and $\bar\psi\gamma_4\psi$,

$$\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \qquad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).$$

The well-known Dirac–Heisenberg [1] and Dirac–Gürsey [2] equations belong to this class.

We shall choose from (1) such equations which are invariant under the scale transformation

$$x'_\mu = e^\theta x_\mu, \qquad \psi'(x') = e^{k\theta}\psi(x), \qquad k,\theta = \text{const}. \tag{2}$$

and under the conformal ones (see e.g. ref. [3])

$$\begin{gathered}x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \psi'(x') = \sigma(x)(1-\gamma c\gamma x)\psi(x),\\ \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \qquad cx \equiv c^\nu x_\nu, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad \nu = 0,1,2,3.\end{gathered} \tag{3}$$

Theorem 1. *Eq.(1) is invariant under the scale transformation (2) if and only if*

$$\begin{aligned}
&F_1 = \phi_1\left[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k}, && F_2 = \phi_2\left[(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k},\\
&F_3 = \phi_3\left[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k}, && F_4 = \phi_4\left[(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi\right]^{-(1+2k)/4k},\\
&F_5 = \phi_5\left[(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi\right]^{-(1+2k)/4k}, && F_6 = \phi_6\left[(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi\right]^{-(1+2k)/4k},\\
&F_7 = \phi_7(\bar\psi\psi)^{-1/2k}, && F_8 = \phi_8(\bar\psi\psi)^{-1/2k},
\end{aligned} \tag{4}$$

where $\phi_1,\ldots,\phi_8$ are arbitrary functions of $\bar\psi\psi/\bar\psi\gamma_4\psi$.

Physics Letters B, 1985, **159**, № 2/3, P. 189–191.

Proof. It is easy to see that transformations (2) leave eq.(1) invariant if

$$\begin{aligned} &e^{\theta(2k+1)}F_B\left(\bar\psi\psi e^{2k\theta},\bar\psi\gamma_4\psi e^{2k\theta}\right)=F_B\left(\bar\psi\psi,\bar\psi\gamma_4\psi\right), \qquad B=1,2,\ldots,6,\\ &e^{\theta(k+1)}F_C\left(\bar\psi\psi e^{2k\theta},\bar\psi\gamma_4\psi e^{2k\theta}\right)=F_C\left(\bar\psi\psi,\bar\psi\gamma_4\psi\right), \qquad C=7,8. \end{aligned} \tag{5}$$

Taking into account the well-known identities [4]

$$\begin{aligned} &(\bar\psi\psi)^2+(\bar\psi\gamma_4\psi)^2-(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi=0,\\ &(\bar\psi\psi)^2-(\bar\psi\gamma_4\psi)^2-(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi=0,\\ &(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\bar\psi\gamma^\mu\psi-(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi=0, \end{aligned} \tag{6}$$

the general solution of (5) can be written as (4). One can directly verify that eq.(1) with functions (4) is invariant under transformations (2).

Theorem 2. *Eq.(1) is invariant under the conformal group $C(1,3)$ if and only if functions $F_1,\ldots,F_8$ have the form (4) with $k=-3/2$.*

Proof. Since the conformal group $C(1,3)$ contains the extended Poincaré group $\widetilde{P}(1,3)=\{P(1,3),D\}$, we can use the result of theorem 1. Then one can make sure that transformations (3) leave eq.(1) with functions (4) invariant when $k=-3/2$ and this proves the theorem.

Corollary. If $F_7=\lambda(\bar\psi\psi)^{1/3}$ and $F_A=0$, $A=1,\ldots,6,8$ then eq.(1) coincides with the Dirac–Gürsey (2) one:

$$\left[i\gamma\partial-\lambda(\bar\psi\psi)^{1/3}\right]\psi=0, \qquad \lambda=\text{const}. \tag{7}$$

In another case when $F_4=\lambda[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\bar\psi\gamma^\mu\psi]^{-1/3}$, $F_B=0$, $B=1,2,3,5,\ldots,8$, we obtain a conformally invariant version of the Dirac–Heisenberg equation

$$\left\{i\gamma\partial+\lambda(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu/[(\bar\psi\gamma_\nu\psi)\bar\psi\gamma^\nu\psi]^{1/3}\right\}\psi=0. \tag{8}$$

As is well known the original Dirac–Heisenberger equation (1) is not invariant under the conformal transformations.

Now we use the symmetry properties of eq.(8) to construct its exact solutions. Following refs. [5, 3] we take the anzatze

$$\psi=\varphi(\beta x), \qquad \beta x\equiv\beta^\nu x_\nu, \qquad \beta^\nu=\text{const}, \tag{9}$$

$$\psi=\left[\gamma x/(x^\nu x_\nu)^2\right]\phi(\beta x/x^\nu x_\nu), \tag{10}$$

which are translationally and conformally invariant respectively. The substitution of (9), (10) into (8) gives rise to the following system of ordinary differential equations

$$i\gamma\beta du/d\omega+\nu(\bar u\gamma_\mu u)\gamma^\mu u/[(\bar u\gamma_\nu u)\bar u\gamma^\nu u]^{1/3}=0, \tag{11}$$

where $u=\{\varphi(\omega),\omega=\beta x \text{ or } \phi(\omega)=\beta x/x^\nu x_\nu\}$, $\nu=\lambda$ for φ and $\nu=-\lambda$ for ϕ. Depending on ν, there are three different cases (χ is a constant spinor, $\beta_\mu=\bar\chi\gamma_\mu\chi/[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)\bar\chi\gamma^\nu\chi]^{1/3}$)

$$(a) \quad \operatorname{Im} v=0, \quad u=e^{iv\omega}\chi,$$

$$(b) \quad \operatorname{Re} v=0, \quad u=\left(c+\tfrac{2}{3}z\omega\right)^{-3/2}\chi, \quad z=\operatorname{Im} v,$$

$$(c)\quad \operatorname{Im} v \operatorname{Re} v \neq 0, \quad u = (f_1 + i f_2)\chi, \quad v = v_1 + i v_2,$$
$$f_1 = \pm\left[(w-2v)^{1/2} + (w+2v)^{1/2}\right],$$
$$f_2 = \mp\left[(w-2v)^{1/2} - (w+2v)^{1/2}\right], \tag{12}$$
$$\int \frac{dv}{\left[c_1 - 2(v_2/v_1)v^2\right]^{2/3}} = 2v_1\omega + c_2, \quad w = \left[c_1 - 2(v_2/v_1)v^2\right]^{1/2}.$$

Remark. Let us show that the conformally invariant ansatz (10) can be obtained from (9) by applying the procedure of generation of solutions if one uses the conformal transformations (3). As is shown in ref. [3] the formula of generating solutions in this case has the form

$$\psi_{\text{new}}(x) = \left[(1-\gamma x\gamma c)/\sigma^2(x)\right]\psi_{\text{old}}(x'),$$
$$x'_\mu = (x_\mu - c_\mu x^2)/\sigma(x), \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2. \tag{13}$$

Applying (13) with $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ to (9) and then changing x_0 in $x_0 + 1$ at the expense of translation invariance we obtain the ansatz (10).

Now let us use the procedure of generating solutions to the conformally invariant one (10), for the case (12a),

$$\psi(x) = \left[\gamma x/(x^\nu x_\nu)^2\right]\exp(-i\lambda\beta x/x^\nu x_\nu)\chi,$$
$$\beta_\mu = \bar\chi\gamma_\mu\chi/[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)\bar\chi\gamma^\nu\chi]^{1/3}. \tag{14}$$

Having done transformations of translations we obtain from (14) another family of solutions of eq.(8)

$$\psi(x) = \left[(\gamma x + \gamma a)/\left(x^2 + 2ax + a^2\right)\right]\exp\left[-i\lambda(\beta x + \beta a)/\left(x^2 + 2ax + a^2\right)\right],$$
$$\beta_\mu = \bar\chi\gamma_\mu\chi/[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)\bar\chi\gamma^\nu\chi]^{1/3}. \tag{15}$$

It is a remarkable family of solutions, because it is invariant within the transformations of the parameters under the full 15-parameter conformal group. Indeed, it is obvious that (15) is invariant under displacements. Let us also show that it cannot be generated by the procedure (13). Applying (13) to the solution (15) we obtain

$$\psi(x) = \frac{1-\gamma x\gamma c}{\sigma^2(x)}\frac{\left(\gamma x - \gamma c x^2\right)/\sigma(x) + \gamma a}{\left[a^2 + 2\left(ax - acx^2 + x^2\right)/\sigma(x)\right]^2}\times$$
$$\times\exp\left[-i\lambda\frac{\left(\beta x - \beta c x^2\right)/\sigma(x) + \beta a}{a^2 + 2\left(ax - acx^2 + x^2\right)/\sigma(x)}\right]\chi. \tag{16}$$

One can make sure that (16) can be rewritten in the form (15) only with the new parameters

$$a_\mu \to \tilde a_\mu = -\left(a_\mu - c_\mu a^2\right)/\sigma(a,c), \qquad \chi \to \tilde\chi = (1-\gamma c\gamma a)/\sigma^2(a,c),$$
$$\beta_\mu \to \tilde\beta_\mu = \bar{\tilde\chi}\gamma_\mu\tilde\chi\Big/[(\bar{\tilde\chi}\gamma_\nu\tilde\chi)(\bar{\tilde\chi}\gamma^\nu\tilde\chi)]^{1/3}. \tag{17}$$

It is also clear that (15) cannot be generated by the remaining transformations of the conformal group.

In conclusion let us note that we have used symmetry to obtain exact solutions of nonlinear Dirac equation [3], nonlinear equations of quantum electrodynamics [6], Yang–Mills equations [7] and some scalar nonlinear equations [8, 9].

1. Heisenberg W., Introduction to the unified field theory of elementary particles, London, Interscience, 1966.
2. Gürsey F., *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 988.
3. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 271.
4. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 5.
5. Fushchych W.I., in: Algebraic-theoretical studies in mathematical physics, Kiev, Mathematical Institute, 1981, 6.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215.
7. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cimento*, 1983, **38**, 37.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cimento*, 1982, **34**, 498.
9. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645.

О симметрии нелинейных уравнений электродинамики

В.И. ФУЩИЧ, И.М. ЦИФРА

Выведены конформно-инвариантные и пуанкаре-инвариантные нелинейные уравнения электродинамики. Построены нелинейные конформно-инвариантные уравнения для векторного и спинорного полей.

Conformal-invariant and Poincaré-invariant nonlinear electrodynamics equations are derived. Nonlinear conformal-invariant equations for vector and spinor fields are also constructed.

Введение

Известно, что одних уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \\ L_2 &= \frac{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \tilde{H}_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \end{aligned} \tag{0.1}$$

недостаточно, чтобы определить электромагнитное поле в различных средах. Уравнения (0.1) записаны в общепринятых обозначениях, т.е. $\tilde{H}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\alpha\beta}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (H^{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Система (0.1) в терминах напряженностей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и индукции $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Для описания электромагнитного поля в конкретных средах к уравнениям (0.1) добавляют дополнительные соотношения (условия), которые называются материальными уравнениями или уравнениями связи (см., например, [1]). Эти дополнительные условия чаще всего являются линейными или нелинейными соотношениями на $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Явный вид этих соотношений зависит от свойств среды и, как правило, слишком произвольный. Как будет показано ниже, явный вид материальных уравнений может быть существенно ограничен, если использовать

Теоретическая и математическая физика, 1985, **64**, № 1, С. 41–50.

принцип симметрии в качестве правила отбора этих дополнительных соотношений. Так, например, требование конформной инвариантности сильно сужает класс допустимых материальных уравнений.

Симметрийные свойства уравнений Максвелла в вакууме подробно исследованы Лоренцем, Пуанкаре, Эйнштейном, Канингхемом и Бейтменом.

Максимальной в смысле Ли [2] локальной группой инвариантности линейных уравнений для электромагнитного поля в вакууме при отсутствии зарядов является 16-параметрическая группа, содержащая в качестве подгруппы 15-параметрическую конформную группу $C(1,3)$ (современное изложение этого вопроса см., например, в [3]).

Симметрийные свойства уравнений (0.1) совместно с нелинейными материальными уравнениями совершенно не изучены [4]. Этой задаче посвящена настоящая работа. В частности, описаны нелинейные дополнительные условия на $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{H}$, при которых система (0.1) совместно с материальными уравнениями инвариантна относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ и конформной группы $C(1,3)$. Предложены нелинейные конформно-инвариантные уравнения для векторного и спинорного полей. Получено новое нелинейное конформно-инвариантное дополнительное условие типа Лоренца на вектор-потенциал.

1. Симметрия уравнений (0.1)

Существенным отличием (0.1) от уравнений Максвелла в вакууме является то, что (0.1) — сильно недоопределенная система уравнений первого порядка для четырех векторов $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. По этой причине следует ожидать, что система (0.1) будет иметь более широкую симметрию, чем уравнения Максвелла в вакууме. Для сравнения напомним, что уравнения Максвелла в вакууме представляют собой переопределенную систему восьми уравнений из двух векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Симметрийные свойства уравнений (0.1) устанавливаются следующим утверждением.

Теорема 1. *Алгеброй инвариантности системы (0.1) является бесконечномерная алгебра, любой элемент которой задается операторами (или их линейными комбинациями)*

$$X_1 = \xi^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_{F_{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} + \eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} X_2 = F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} \equiv F_{01}\frac{\partial}{\partial F_{01}} + F_{02}\frac{\partial}{\partial F_{02}} + F_{03}\frac{\partial}{\partial F_{03}} + \\ + F_{12}\frac{\partial}{\partial F_{12}} + F_{13}\frac{\partial}{\partial F_{13}} + F_{23}\frac{\partial}{\partial F_{23}}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} X_3 = \tilde{H}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}} \equiv \tilde{H}_{01}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{01}} + \tilde{H}_{02}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{02}} + \tilde{H}_{03}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{03}} + \\ + \tilde{H}_{12}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{12}} + \tilde{H}_{13}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{13}} + \tilde{H}_{23}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{23}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$X_4 = F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}} \equiv F_{01}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{01}} + F_{02}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{02}} + F_{03}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{03}} + \\ + F_{12}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{12}} + F_{13}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{13}} + F_{23}\frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{23}}, \tag{1.4}$$

$$X_5 = \tilde{H}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} \equiv \tilde{H}_{01}\frac{\partial}{\partial F_{01}} + \tilde{H}_{02}\frac{\partial}{\partial F_{02}} + \tilde{H}_{03}\frac{\partial}{\partial F_{03}} + \\ + \tilde{H}_{12}\frac{\partial}{\partial F_{12}} + \tilde{H}_{13}\frac{\partial}{\partial F_{13}} + \tilde{H}_{23}\frac{\partial}{\partial F_{23}}, \tag{1.5}$$

где $\xi^\mu(x)$ — произвольные дифференцируемые функции, $x = (x_0 = t, x_1, x_2, x_3)$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$;

$$\eta_{F_{\mu\nu}} = -F_{\mu\alpha}\xi^\alpha_\nu - F_{\alpha\nu}\xi^\alpha_\mu + u_{\mu\nu}, \tag{1.6}$$

$$\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}} = -\tilde{H}_{\mu\alpha}\xi^\alpha_\nu - \tilde{H}_{\alpha\nu}\xi^\alpha_\mu + \tilde{v}_{\mu\nu}, \tag{1.7}$$

$\xi^\alpha_\mu \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu}$, $\tilde{v}_{\mu\nu}$ — произвольные решения системы (0.1).

Доказательство. Следуя подходу Ли, векторы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, а значит, и компоненты тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\mu\nu}$ рассматриваем как независимые величины. Доказательство теоремы сводится к применению алгоритма Ли к системе (0.1). Алгоритм Ли подробно описан, например в [2], и состоит в построении всех дифференциальных операторов первого порядка

$$\tilde{X} = X + \sigma_i^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial r_i^{\mu\nu}} + \tilde{\sigma}_i^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_i^{\mu\nu}},$$
$$\sigma_i^{\mu\nu} = D_i(\eta_{F_{\mu\nu}}) - r_j^{\mu\nu} D_i(\xi^j),$$
$$\tilde{\sigma}_i^{\mu\nu} = D_i(\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}) - \tilde{r}_j^{\mu\nu} D_i(\xi^j),$$

где D_i — оператор полного дифференцирования [2],

$$r_\nu^{\lambda\mu} \equiv \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}, \qquad \tilde{r}_\nu^{\lambda\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{H}_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\tilde{X}\left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\Bigg|_{\substack{L_1 = 0 \\ L_2 = 0}} = 0, \\ \tilde{X}\left(\frac{\partial \tilde{H}_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \tilde{H}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\Bigg|_{\substack{L_1 = 0 \\ L_2 = 0}} = 0. \tag{1.8}$$

Соотношения (1.8) являются, как известно, необходимым и достаточным условием инвариантности системы (0.1).

Из (1.8) получаем для координат $\xi^\mu(x, F_{\alpha\beta}, \tilde{H}_{\alpha\beta})$, $\eta(x, F_{\alpha\beta}, \tilde{H}_{\alpha\beta})$ инфинитезимального оператора X систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\xi^\mu}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial \tilde{H}_{ik}} = 0, \\
\frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_{F_{\nu\alpha}}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\eta_{F_{\alpha\mu}}}{\partial x^\nu} = 0, \\
\frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\nu\alpha}}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\alpha\mu}}}{\partial x^\nu} = 0, \\
\frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial F_{ik}} = \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial \tilde{H}_{ik}} = \xi^i_\nu\delta_{\mu k} - \xi^k_\nu\delta_{\mu i} + \xi^k_\mu\delta_{\nu i} - \xi^i_\mu\delta_{\nu k}, \\
\frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}} = C_1, \qquad \frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial F_{\mu\nu}} = C_2, \qquad \frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}} = C_3, \qquad \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial F_{\mu\nu}} = C_4,
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что произвольные функции $\xi^\mu(x)$, не зависящие от $F_{\alpha\beta}$, $\tilde{H}_{\alpha\beta}$ и $\eta_{F_{\mu\nu}}$ и $\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}$ вида (1.6), (1.7), удовлетворяют уравнениям (1.9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 получаем важное для дальнейшего следствие.

Теорема 2. *Система (0.1) инвариантна относительно 20-мерной алгебры Ли группы $IGL(4,R)$, содержащей в качестве подалгебры алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ и алгебры Галилея $G(1,3)$.*

Доказательство. Поскольку в теореме 1 $\xi^\mu(x)$ может быть произвольной функцией от x, достаточно положить в формуле (1.1) $\xi^\mu(x) = c^{\mu\nu}x_\nu + a^\mu$, $u_{\mu\nu} = \tilde{v}_{\mu\nu} = 0$, где $c_{\mu\nu}$, a_μ — произвольные константы. Если $c_{\mu\nu} = -c_{\mu\nu}$, то из операторов (1.1) получаем базисные элементы алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ в виде

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + (S_{\mu\nu}\Psi)_n\frac{\partial}{\partial\Psi_n}, \tag{1.10}$$

где по n подразумевается суммирование от 1 до 12, т.е. $n = \overline{1,12}$, Ψ — столбец $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$, матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют вид

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{0a} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ -\hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\hat{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

0 — нулевые 3×3-матрицы.

Если положить $c_{0\mu} = 0$, $c_{ab} = -c_{ba}$, то из (1.1) получим базисные элементы алгебры Ли группы Галилея:

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a = 1, 2, 3,$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab}\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}, \tag{1.12}$$

$$G_a = tP_a + (M\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n},$$

где

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом доказывается, что среди множества операторов вида (1.1) содержится алгебра Ли конформной группы $C(1,3)$ и алгебры Ли группы Шредингера $Sch(1,3)$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что совокупность генераторов (1.10) и операторов

$$\begin{aligned} &D = x_\nu P^\nu + 2i\Psi_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}, \\ &K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu) P_\mu + 2(x^\nu S_{\mu\nu}\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n} \end{aligned} \tag{1.13}$$

образует базис конформной алгебры $C(1,3)$.

Операторы (1.12) вместе с операторами

$$\begin{aligned} &D = 2x_0 P_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{P} + (\lambda_0\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}, \\ &A = x_0^2 P_0 + x_0(\lambda_0\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{G}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\lambda_0 = i\begin{pmatrix} 3\hat{I} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & 2\hat{I} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & 2\hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 3\hat{I} \end{pmatrix},$$

$\hat{I}$ — единичная 3×3-матрица, образуют базис алгебры $Sch(1,3)$.

Таким образом, мы установили, что для *системы (0.1) без материальных уравнений выполняется как принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна, так и принцип относительности Галилея.*

Аналогичным свойством, как это отмечено в [5], обладает нелинейная система уравнений Эйлера для идеальной жидкости.

Замечание. Векторы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ при преобразованиях Галилея $x_0' = x_0$, $x_a' = x_a + x_a x_0$, преобразуются следующим образом:

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}, \qquad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + [\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}], \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - [\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]. \tag{1.15}$$

Преобразования (1.15) задают правила пересчета величин $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ для наблюдателя, движущегося в инерциальной системе отсчета со скоростью $\boldsymbol{v}$.

2. Пуанкаре-инвариантные и конформно-инвариантные нелинейные материальные уравнения

1. Рассмотрим материальные уравнения в следующем виде:

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}(F_{01}, F_{02}, F_{03}, \ldots, F_{23}) \equiv \Phi_{\mu\nu}(F), \tag{2.1}$$

где $\Phi_{\mu\nu}$ — произвольные гладкие функции компонент тензора $F_{\mu\nu}$, удовлетворяющие условию $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$, $\Phi_{\mu\mu} = 0$.

Теорема 3. *Система уравнений (0.1), (0.2) инвариантна относительно группы Пуанкаре тогда и только тогда, когда*

$$H_{\mu\nu} = MF_{\mu\nu} + N\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

где $M = M(C_1, C_2)$, $N = N(C_1, C_2)$ — произвольные дифференцируемые функции от инвариантов электромагнитного поля

$$C_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2, \qquad C_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}.$$

Доказательство. Поскольку в систему (0.1) входят только производные от $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\alpha\beta}$, а в материальные уравнения (2.1) не входят производные от полей, то для доказательства теоремы достаточно найти условия на $\Phi_{\mu\nu}$, при которых (2.1) инвариантно относительно базисных элементов алгебры $P(1,3)$ (1.10).

Уравнение (2.1) будет пуанкаре-инвариантным, если

$$P_\mu\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}(F)\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}(F)} = 0, \tag{2.3}$$

$$J_{\mu\nu}\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}(F)\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}(F)} = 0. \tag{2.4}$$

Используя формулы (1.10), условия инвариантности (2.3), (2.4) запишем, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка для функции $\Phi_{\mu\nu}$

$$(S_{\mu\nu}\Psi)_n \frac{\partial}{\partial\Psi_n}\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}} = 0. \tag{2.5}$$

В развернутой записи система (2.5) для $\mu = 1$, $\nu = 2$ выглядит так:

$$F_{01}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{13}} = -\Phi_{02},$$

$$F_{01}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{13}} = -\Phi_{01},$$

$$F_{01}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{13}} = 0,$$

$$F_{01}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{13}} = -\Phi_{31},$$

$$F_{01}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{13}} = \Phi_{23},$$

$$F_{01}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{13}} = 0.$$

Аналогичную структуру имеет система (2.5) для других μ и ν. Ради экономии места мы не приводим здесь подробную запись системы (2.5). Детальный анализ системы (2.5) дает возможность найти ее общее решение, которое задается формулой (2.2). Теорема доказана.

В терминах $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ формула (2.2) имеет вид

$$\boldsymbol{D} = M\boldsymbol{E} + N\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{H} = M\boldsymbol{B} - N\boldsymbol{E}. \tag{2.6}$$

Если в (2.6) $M = \varepsilon = \mathrm{const}$, $N = \mu = \mathrm{const}$, то (2.6) совместно с (0.1) совпадает с линейными уравнениями Максвелла.

Если в (2.6) положить $M = 1/L$, $N = \boldsymbol{BE}/L$,

$$L = \sqrt{1 + \left(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2\right) - (\boldsymbol{BE})^2}, \tag{2.7}$$

то система (0.1) совместно с (2.6) совпадает с нелинейными уравнениями для электромагнитного поля, предложенными Борном [6] и известными в литературе как уравнения Борна–Инфельда.

Приведем еще один конкретный пример материальных уравнений. Если положить в (2.6) $M = \varepsilon$, $N = -\mu\boldsymbol{BE}$, $\varepsilon, \mu = \mathrm{const}$, то явная структура нелинейных материальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\left\{1 + \frac{\mu^2(\boldsymbol{EH})^2}{\varepsilon^2\left(\varepsilon + \mu\boldsymbol{E}^2\right)}\right\}\boldsymbol{E} - \frac{\mu(\boldsymbol{EH})}{\varepsilon\left(\varepsilon + \mu\boldsymbol{E}^2\right)}\boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{H}}{\varepsilon} - \mu\frac{\boldsymbol{EH}}{\varepsilon\left(\varepsilon + \mu\boldsymbol{E}^2\right)}\boldsymbol{E}.$$

Рассмотрим материальные уравнения такого частного вида:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})\boldsymbol{H}. \tag{2.8}$$

Структура материальных уравнений вида (2.8) широко используется для описания распространения электромагнитного поля в реальных средах. Из теоремы 3 вытекает такое утверждение (используется система единиц, в которой скорость света в вакууме $c = 1$).

Следствие 1. *Система уравнений (0.1), (2.8) будет пуанкаре-инвариантна только тогда, когда*

$$\varepsilon(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) \cdot \mu(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = 1. \tag{2.9}$$

Следствие 2. *Если $\boldsymbol{B} = \varphi(\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$, то в силу теоремы 3 $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ могут быть только линейными функциями $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$, т.е.*

$$\boldsymbol{D} = \mu\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{H} \qquad (\mu = \mathrm{const}). \tag{2.10}$$

2. Выясним теперь вопрос о том, какие ограничения накладывает на материальные уравнения (2.2) требование конформной инвариантности. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4. *Система уравнений (0.1), (2.2) инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$, если*

$$M = M(C_1/C_2), \qquad N = N(C_1/C_2), \tag{2.11}$$

где M, N — произвольные дифференцируемые функции, зависящие только от отношения инвариантов C_1 и C_2.

Доказательство. Требование инвариантности материальных уравнений (2.2) относительно масштабных преобразований, порождаемых оператором D (1.13), приводит к тому, что функции M и N в (2.2) могут зависеть только от отношения $C_1/C_2 = k$. Таким образом, материальные уравнения

$$H_{\mu\nu} = M(k)F_{\mu\nu} + N(k)\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

инвариантны относительно масштабных преобразований. Воспользовавшись явным видом (1.13) операторов K_μ, легко убедиться, что условие

$$K_\mu\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}(F)\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}(F)} = 0,$$

выполняется, если имеет место (2.12). Теорема доказана.

Приведем явный вид конформно-инвариантных материальных уравнений. Положим в (2.12) $M = \mu\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right)/\boldsymbol{BE}$, $N = 0$, тогда конформно-инвариантные материальные уравнения запишутся в виде

$$\boldsymbol{D} = \sqrt{\frac{\mu\boldsymbol{H}^2}{\mu\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{EH}}}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \sqrt{\frac{\mu\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{EH}}{\mu\boldsymbol{H}^2}}\boldsymbol{H}.$$

Следствие 3. *Нелинейные уравнения Борна–Инфельда не инвариантны относительно конформной группы $C(1,3)$.*

3. Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для векторного и спиноорного полей

Хорошо известно, что линейные уравнения для векторного и спинорного полей

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0, \tag{3.1}$$

$$\gamma_\mu P^\mu \Psi = 0, \tag{3.2}$$

где γ_μ — матрицы Дирака, Ψ — четырехкомпонентный спинор, инвариантны относительно конформной группы $C(1,3)$.

Уравнение (3.1) инвариантно еще и относительно градиентных преобразований

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \tag{3.3}$$

Если на поле A_μ наложить условие Лоренца

$$P_\mu A_\mu = 0, \tag{3.4}$$

то система (3.1), (3.2) не будет инвариантна относительно конформных преобразований. Поэтому представляет интерес описать дополнительные условия (типа

Лоренца), нелинейные добавки к уравнениям (3.1), (3.2), при которых уравнения для полей A_μ и Ψ инвариантны относительно группы $C(1,3)$.

Базисные элементы конформной алгебры инвариантности уравнения (3.1) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu},\\
&D = x_\nu P^\nu - A_\nu P^{A_\nu}, \qquad P_{A_\mu} = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A^\nu},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2x^\nu(A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu}). \tag{3.6}
$$

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$
\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = F(A_\nu A^\nu)A_\mu, \tag{3.7}
$$

где $F(A_\nu A^\nu)$ — произвольная дифференцируемая функция от свертки $A_\nu A^\nu$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Система (3.7) инвариантна относительно конформной алгебры (3.5), (3.6) только тогда, когда*

$$
F = \lambda A_\nu A^\nu, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{3.8}
$$

Доказательство. Релятивистская инвариантность уравнения (3.7) очевидна. Рассмотрим вопрос, при каких F уравнение (3.7) конформно-инвариантно. Сделаем бесконечно малые конформные преобразования x_μ, A_ν:

$$
x'_\mu = [g_{\mu\nu}(1 - 2\boldsymbol{Cx}) - x_\nu C_\mu]x^\nu, \tag{3.9}
$$

$$
A'_\mu = [g_{\mu\nu}(1 - 2\boldsymbol{Cx}) + 2(x_\mu C_\nu - x_\nu C_\mu)]A^\nu. \tag{3.10}
$$

Тогда уравнение (3.7) переходит в

$$
\begin{aligned}
&\{g_{\mu\nu}(1 - 6\boldsymbol{Cx}) + 2(x_\mu C_\nu - x_\nu C_\mu)\}\{\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_k A^k)\} +\\
&\quad + F\left[g_{\mu\nu}\left(1 - \left(2\boldsymbol{Cx} + \frac{\partial F}{\partial u}4\boldsymbol{Cx}\right)\right) + 2(x_\mu C_\nu - x_\nu C_\mu)\right]A^\nu = 0.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Из (3.11) получаем, что для инвариантности уравнения (3.7) должно выполняться следующее уравнение: $(\partial F/\partial u)u = F$, $u = A_\nu A^\nu$, т.е. $F = \lambda u = \lambda A_\nu A^\nu$.

С помощью алгоритма Ли [2] нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 6. *Система уравнений*

$$
\begin{aligned}
&\pi_\mu A^\mu = (P_\mu - eA_\mu)A^\mu = 0,\\
&\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

инвариантна относительно конформной алгебры с базисными элементами, задаваемыми формулами (3.5), и операторами

$$
K'_\mu = K_\mu - \frac{2i}{e}P_{A_\mu}, \tag{3.13}
$$

где e — заряд частицы.

Теорема 7. *Нелинейное уравнение Дирака*

$$\gamma_\mu \pi^\mu \Psi + F_1(\bar{\Psi}, \Psi)\Psi = 0 \tag{3.14}$$

инвариантно относительно конформной группы, если

$$F_1 = \lambda_1(\bar{\Psi}\cdot\Psi)^{1/(3+\varkappa)}, \qquad \varkappa = \mathrm{const} \neq -3, \qquad \lambda_1 = \mathrm{const},$$

причем генераторы группы $C(1,3)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu} + S_{\mu\nu}, \\ &D = x_\nu P^\nu - A_\nu P^{A_\nu} + \frac{3+\varkappa}{2} i, \\ &K'_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2x^\nu(A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu}) + 2x^\nu S_{\mu\nu} - \frac{2i}{e}P_{A_\mu}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Уравнения (3.7) сами по себе и с системой (3.1) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\Psi' = e^{ia\varphi(x)}\Psi, \qquad A'_\mu = A_\mu - \frac{ia}{e}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \tag{3.16}$$

Замечание. Нелинейная калибровка (3.12) не инвариантна относительно хорошо известного представления конформной алгебры, задаваемого формулами (3.5), (3.6). Она инвариантна относительно представления конформной алгебры, задаваемого формулами (3.15). Такие представления для конформной алгебры до сих пор не были обнаружены. Видимо, по этой причине в литературе рассматривались более сложные нелинейные калибровки [7]

$$P_\mu(A^\mu A_\nu A^\nu) = 0. \tag{3.17}$$

Калибровка Флато–Баена (3.17) не инвариантна относительно конформных операторов K'_μ (3.13). Она инвариантна относительно конформных операторов K_μ, но не инвариантна относительно градиентных преобразований (3.3). Линейное конформно-инвариантное и калибровочно-инвариантное дополнительное условие к уравнениям (3.1) имеет вид

$$P_\mu(P^\mu P_\nu A^\nu) = 0.$$

Вопрос о построении нелинейных уравнений, инвариантных относительно конформных и градиентных преобразований, будет обсужден в другой работе.

1. Федоров Ф.И., Теория гиротропии, Минск, Наука и техника, 1976, 455 с.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983, 197 с.
4. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Институт математики АН УССР, 1981, 6–28.
5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1983, 4–23.
6. Born M., Infeld L., *Proc. Roy. Soc. A*, 1934, **144**, № 852, 4225–4251.
7. Bayen F., Flato M., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 7, 1112–1114.

Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа-Ампера, Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ТЫЧИНИН, Р.З. ЖДАНОВ

Методом нелокальных преобразований линеаризованы уравнения типа Монжа–Ампера и Дирака–Гейзенберга–Тирринга. Построены в явном виде семейства точных решений таких уравнений. Получено общее решение двумерной нелинейной системы четырех уравнений Дирака–Гейзенберга–Тирринга. Построено общее решение двумерно нелинейной системы Дирака–Максвелла.

Методом нелокальных преобразований [1–3] проведена линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Монжа–Ампера, Борна–Инфельда и Дирака–Гейзенберга–Тирринга. Исследована локальная и нелокальная симметрии двумерной нелинейной системы четырех уравнений типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга, построено общее решение этого уравнения. Для двумерных уравнений квантовой электродинамики найдено общее решение.

§ 1. Введение

Уравнения Монжа–Ампера, Борна–Инфельда, Дирака–Гейзенберга–Тирринга, Максвелла–Дирака играют важную роль в геометрии, математической и теоретической физике. Простейшее двумерное уравнение Монжа–Ампера вида

$$|u_{ij}| \equiv u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \phi(x, y, u, \underset{1}{u}), \qquad (i, j = x, y)$$

широко используется при изучении свойств выпуклых поверхностей [4, 5], при решении многомерной проблемы Минковского [6], в вариационных задачах, в квантовой теории.

С уравнениями Монжа–Ампера часто встречаются при решении прикладных задач, в частности, при интегрировании уравнений течения политропного газа [2] приходится рассматривать уравнение вида

$$|\xi_{ij}| \equiv \xi_{\psi\psi}\xi_{pp} - \xi_{\psi p}^2 = -\Gamma^2(\psi)P^2(p), \qquad (i, j = \psi, p). \tag{1}$$

Уравнения Монжа–Ампера оказываются полезными при решении задач, связанных с уравнениями минимальных поверхностей (Эйлера–Лагранжа), Борна–Инфельда и другими. Уравнения вида

$$|u_{ij}| \equiv u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y)\phi(u_x, u_y), \qquad (i, j = x, y) \tag{2}$$

представляют самостоятельный интерес [4, 5], т.к. известные свойства решений (2) позволяют судить о свойствах сильно эллиптических уравнений Монжа–Ампера

$$|z_{ij}| = A(x, y, z, \underset{1}{z})z_{xx} + 2B(x, y, z, \underset{1}{z})z_{xy} + C(x, y, z, \underset{1}{z})z_{yy} + D(x, y, z, \underset{1}{z}). \tag{3}$$

Препринт № 85.88, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 28 с.

Несмотря на обширную область приложений уравнений Монжа–Ампера, точные решения для них найдены лишь в некоторых частных случаях. Наиболее известным методом получения общих интегралов уравнений Монжа–Ампера является метод промежуточного интеграла в форме Монжа (Monge) или Булла (Boole) [1].

В последние года находит распространение использование групповых свойств уравнений для построения их точных решений [7]. Этим методом в работе [8] получены новые точные решения уравнения

$$|u_{\mu\nu}| = 0, \qquad (\mu,\nu = \overline{1,n}) \tag{4}$$

с n независимыми переменными – обобщением уравнения развертывающихся поверхностей

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0, \qquad (n=2). \tag{5}$$

В работе [8] установлено также, что уравнение

$$|u_{\mu\nu}| = \lambda u^{-(n+2)}, \qquad (\lambda = \text{const}) \tag{6}$$

обладает нетривиальной группой симметрии и, следовательно, решение может представлять определений интерес для прикладных исследований.

Систематическое использование метода нелокальных преобразований [3] позволило получить некоторые интегрируемые уравнения Монжа–Ампера и в ряде случаев построить их точные решения. Настоящая работа посвящена изложению полученных результатов.

§ 2. Нелокальная линеаризация уравнений с двумя независимыми переменными

Метод промежуточного интеграла для уравнений Монжа–Ампера опирается на предположение, что существует произвольная функция f, связывающая между собой дифференциальные выражения $u(x,y,z,\underset{1}{z})$ и $v(x,y,z,\underset{1}{z})$. С одной стороны, u и v должны допускаться данным уравнением Монжа–Ампера, с другой — u и v должны быть решениями некоторых дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Методу может быть дана интерпретация в терминах нелокальных преобразований.

Рассмотрим функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению

$$F(x,y,u,\underset{1}{u}) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) назовем исходным. Выполним нелокальное преобразование первого порядка зависимой переменной [3]

$$\begin{aligned}
&\tau: \quad u = f(v) = f[v(x,y,z,\underset{1}{z})],\\
&\tau F(u) = F[f(v(x,y,z,\underset{1}{z}))] = \Omega(x,y,z,\underset{1}{z},\underset{2}{z}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Если в результате преобразования (8) уравнения (7) приходим к заданному уравнению Монжа–Ампера Ω, то имеет место сведение уравнения Ω к (7) нелокальным преобразованием (8), т.е.

$$\tau(7)\Big|_{\Omega} \equiv 0. \tag{9}$$

Указанный подход позволяет обобщить метод промежуточного интеграла, рассматривая нелокальные преобразования независимых и зависимой переменных.

Выполним преобразование переменных

$$\tau: \quad \begin{aligned} x' &= \varepsilon^x(x, y, u, \underset{1}{u}), \\ y' &= \varepsilon^y(x, y, u, \underset{1}{u}), \\ u' &= \varepsilon^0(x, y, u, \underset{1}{u}) \end{aligned} \tag{10}$$

уравнения

$$\beta^\mu(x', y', u')u'_\mu + \beta^0(x', y', u') = 0, \qquad (\mu = x, y). \tag{11}$$

Полученное уравнение имеет вид

$$a|u_{ij}| + bu_{xx} + du_{xy} + cu_{yy} + f = 0, \qquad (i, j = x, y). \tag{12}$$

Коэффициенты уравнения (12) определяются подстановкой (10) и могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned}
&a = -\beta^x[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial q, \partial p} + \beta^y[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial q, \partial p} - \beta^0[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial q, \partial p};\\
&b = \beta^x[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial p, D_y^1} + \beta^y[\varepsilon^x, \varepsilon^0]_{\partial p, D_y^1} + \beta^0[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial p, D_y^1};\\
&c = \beta^x[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D_x^1, \partial q} - \beta^y[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{D_x^1, \partial q} + \beta^0[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x^1, \partial q};\\
&d = \beta^x\left\{[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D_y^1, \partial q} - [\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial p, D_x^1}\right\} - \beta^y\left\{[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial q, D_y^1} - [\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial p, D_x^1}\right\} +\\
&\qquad +\beta^0\left\{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial q, D_y^1} - [\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial p, D_x^1}\right\};\\
&f = \beta^x\left\{[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial y, D_x^1} - u_y[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial u, \partial x}\right\} - \beta^y\left\{[\varepsilon^x, \varepsilon^0]_{\partial y, D_x^1} - u_y[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial u, \partial x}]\right\} +\\
&\qquad +\beta^0\left\{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x^1, \partial y} - u_y[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial u, \partial x}\right\};\\
&[\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta]_{\partial\mu, \partial\nu} \equiv \varepsilon^\alpha_\mu \varepsilon^\beta_\nu - \varepsilon^\alpha_\nu \varepsilon^\beta_\mu; \qquad D_\mu^1 \equiv \partial_\mu + u_\mu \partial u;\\
&[\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta]_{\partial\mu, D_\nu^1} \equiv \varepsilon^\alpha_\mu D_\nu^1 \varepsilon^\beta - D_\nu^1 \varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^\beta_\mu; \qquad q \equiv u_y, \qquad p \equiv u_x.
\end{aligned} \tag{13}$$

Найдем нелокальное преобразование переменных первого порядка линейное по всем переменным

$$\begin{aligned} &\tau: \ x^{i\prime} = \varepsilon(x, y, u, \underset{1}{u}) = \alpha^{i\mu}u_\mu + \beta^i_j x^j, \quad i, j = 0, 1, 2;\\ &x^0 \equiv u, \quad \mu = 1, 2, \quad \alpha^{i\mu}, \beta^i_j = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{14}$$

которое осуществляет приведение уравнения

$$u'_{x'} + u'_{y'} = 0 \tag{15}$$

к уравнению Монжа–Ампера (5). Определитель преобразования (14) имеет вид

$$\delta = \begin{vmatrix} D_x\varepsilon^x & D_x\varepsilon^y \\ D_y\varepsilon^x & D_y\varepsilon^y \end{vmatrix} = [\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x, D_y} \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \delta = {}&(u_{x\mu}\alpha^{1\mu} + \beta^1_0 u_x + \beta^1_x)(u_{y\mu}\alpha^{2\mu} + \beta^2_0 u_y + \beta^2_y) -\\ &-(u_{x\mu}\alpha^{2\mu} + \beta^2_0 u_x + \beta^2_x)(u_{y\mu}\alpha^{1\mu} + \beta^1_0 u_y + \beta^1_y), \end{aligned}$$

а производные $\underset{1}{u'}$ вычисляем по формулам

$$u'_{x'} = \frac{[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D_x,D_y}}{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x,D_y}}, \qquad u'_{y'} = \frac{[\varepsilon^x, \varepsilon^0]_{D_x,D_y}}{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x,D_y}}.$$

Уравнение (15) в новых обозначениях может быть записано следующим образом:

$$\begin{vmatrix} D_x\varepsilon^0 & D_x\varepsilon^y \\ D_y\varepsilon^0 & D_y\varepsilon^y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_x\varepsilon^x & D_x\varepsilon^0 \\ D_y\varepsilon^x & D_y\varepsilon^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Условия для коэффициентов преобразования τ найдем, потребовав, чтобы в результате получалось уравнение (5), т.е. решая определяющее соотношение

$$\tau(15)\Big|_{(5)} = (16)\Big|_{(5)} \equiv 0. \tag{17}$$

Запишем уравнение (16) иначе

$$[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D_x,D_y} - [\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{D_x,D_y} = [\varepsilon^0, \varepsilon^y - \varepsilon^x]_{D_x,D_y} = 0.$$

Теперь уравнение (17) принимает вид

$$[\varepsilon^0, \varepsilon^y - \varepsilon^x]_{D_x,D_y}\Big|_{u_{xx}u_{yy}=u_{xy}^2} \equiv 0. \tag{18}$$

Расщепляя (18) по степеням производных второго порядка, получаем недоопределенную систему уравнений для пятнадцати коэффициентов

$$\begin{aligned}
&\alpha^{0x}(\beta_0^y - \beta_0^x) = \beta_0^0(\alpha^{yx} - \alpha^{xx}),\\
&\alpha^{0x}(\beta_y^y - \beta_y^x) = \beta_y^0(\alpha^{yx} - \alpha^{xx}),\\
&\beta_x^0(\alpha^{yx} - \alpha^{xx}) + \alpha^{0y}(\beta_y^y - \beta_y^x) = \beta_y^0(\alpha^{yy} - \alpha^{xy}) + \alpha^{0x}(\beta_x^y - \beta_x^x),\\
&\alpha^{0y}(\beta_0^y - \beta_0^x) = \beta_0^0(\alpha^{yy} - \alpha^{xy}),\\
&\beta_x^0(\beta_0^y - \beta_0^x) = \beta_0^0(\beta_x^y - \beta_x^x),\\
&\beta_x^0(\beta_y^y - \beta_y^x) = \beta_0^y(\beta_x^y - \beta_x^x).
\end{aligned} \tag{A}$$

Полагая $k = \alpha^{yx} - \alpha^{xx}$, $\alpha^{0x} \neq 0$, $\alpha^{0y} \neq 0$, $\beta_0^0, \beta_y^0 \neq 0$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
&\beta_y^0 - \beta_0^x = k\beta_0^0(\alpha^{0x})^{-1}, \qquad \beta_y^y - \beta_y^x = k\beta_y^0(\alpha^{0x})^{-1},\\
&\alpha^{yy} - \alpha^{xy} = k\alpha^{0y}(\alpha^{0x})^{-1}, \qquad \beta_x^y - \beta_x^x = k\beta_x^0(\alpha^{0x})^{-1}.
\end{aligned}$$

Решению исходного уравнения (15) $u' = \phi(x' - y')$, (ϕ — произвольная функция), отвечает уравнение

$$\begin{aligned}
&\alpha^{0x}u_x + \alpha^{0y}u_y + \beta_0^0 u + \beta_x^0 x + \beta_y^0 y = \phi\left[(\alpha^{xx} - \alpha^{xy})u_x + \right.\\
&\qquad \left. + (\alpha^{xy} - \alpha^{yy})u_y + (\beta_0^x - \beta_0^y)u + (\beta_x^x - \beta_x^y)x + (\beta_y^x - \beta_y^x)y\right].
\end{aligned}$$

Таким образом всякое решение последнего уравнения, коэффициенты которого удовлетворяют системе (A), является в то же время решением уравнения Монжа–Ампера (5).

Если в исходном уравнении (15) оставить одно слагаемое, т.е. положить

$$u'_{y'} = 0,$$

то соответствующую систему уравнений для коэффициентов преобразования τ, обеспечивающих получение уравнения (5), найдем из (А) при $\varepsilon^y = 0$, ($\alpha^{y\mu} = 0$, $\beta^y_j = 0$)

$$\begin{aligned}
&\alpha^{0x}\beta^x_0 = \beta^0_0\alpha^{xx}, \qquad \alpha^{0x}\beta^x_y = \beta^0_y\alpha^{xx},\\
&\beta^0_x\alpha^{xx} + \alpha^{0y}\beta^x_y = \beta^0_y\alpha^{xy} + \alpha^{0x}\beta^x_x,\\
&\alpha^{0y}\beta^x_0 = \beta^0_0\alpha^{xy}, \qquad \beta^0_x\beta^x_0 = \beta^0_0\beta^x_x, \qquad \beta^0_x\beta^x_y = \beta^0_y\beta^x_x.
\end{aligned} \tag{Б}$$

При $\alpha^{0x} = 1$, $\beta^y_x = 1$, $\alpha^{yx} = 1$ и остальных нулевых значениях коэффициентов получаем подстановку, удовлетворяющую системе (Б). К найденной только что подстановке вернемся несколько позднее.

Замечание. Некоторые решения уравнения (5) можем найти методом разделения переменных, полагая $u = \phi(x)\psi(y)$. При этом получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения, определяющих ϕ и ψ:

$$\frac{\phi''\phi}{(\phi')^2} = \frac{(\psi')^2}{\psi''\psi} = \nu^2.$$

В случае $\nu = \pm 1$ находим решение

$$u = c_3c_4\exp[c_1x + c_2y], \qquad (c_i = \mathrm{const},\ i = \overline{1,4}).$$

При $\nu \neq \pm 1$ решение имеет вид

$$u = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}[c_3y + c_4]\left\{-\nu^{-2}\frac{c_3y + c_4}{c_1x + c_2}\right\}^{1/(\nu^2-1)}.$$

Рассмотрим уравнение

$$u'_{y'} = \phi(x', y', u', u'_{x'}). \tag{19}$$

Это соответствует уравнению (11) с $\beta^y = 1$, $\beta^x = \phi_p = 0$, $\beta^0 = \phi$. Полученное на стр. 9 нелокальное преобразование переменных

$$\tau: \quad x' = u_y, \quad y' = x, \quad u' = u_x \tag{20}$$

выполним в уравнении (19). Это дает следующее уравнение Монжа–Ампера:

$$|u_{ij}| = u_{yy}\phi(u_y, x, u_x, u_{xy}\cdot u^{-1}_{yy}) \quad (i, j = x, y). \tag{21}$$

Рассмотрим несколько частных случаев уравнения (21).

1) Полагая в (19) $\phi \equiv 0$, приходим к уравнению развертывающихся поверхностей (5)

$$|u_{ij}| = 0, \qquad (i, j = x, y). \tag{5}$$

Уравнение (19) $u'_{y'} = 0$ имеет решением произвольную функцию переменной x': $u' = f(x')$. Соответствующее решение уравнения (5) находим, заменяя в последнем переменные в соответствии с (20). Это дает уравнение первого порядка

$$u_x = f(u_y),$$

в котором f — произвольная функция.

Таким образом всякое ДУЧП первого порядка, не содержащею явно независимых переменных, имеет решения, удовлетворяющие (5).

Приведем несколько примеров таких решений.

Известно [10], что одним из решений уравнения

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

является функция

$$u = \phi\left(\alpha \cdot x + \sqrt{1-\alpha^2} \cdot y + \beta\right), \qquad (\alpha, \beta = \mathrm{const}),$$

где ϕ — произвольная функция. Проверка показывает, что эта функция u удовлетворяет уравнению (5).

Решение $u = 2\sqrt{xy}$ уравнения

$$u_x u_y = 1 \tag{22}$$

также удовлетворяет (5).

Уравнение

$$u_x = \left[a^{-1}\left(c - bu_y^2\right)\right]^{1/2}$$

имеет решением функцию [9]

$$u = c^{1/2}\left[a^{-1}(x-A)^2 + b^{-1}(y-B)^2\right]^{1/2}.$$

A, B, a, b, c — произвольные постоянные. Эта функция также удовлетворяет уравнению (5). Можно привести много других примеров подобного рода.

2) Значению $\phi = 1$ соответствует уравнение

$$|u_{ij}| = u_{yy}, \qquad (i, j = x, y) \tag{23}$$

(оно получается из $u'_{y'} = 1$ подстановкой (20)). Решение исходного уравнения известно

$$u' = y' + f(x').$$

Здесь f — произвольная функция. Таким образом всякое решение уравнения

$$u_x = x + f(u_y)$$

в то же время является решением уравнения (23).

3) При $\phi = u'_{x'}$ в (19) получаем уравнение $u'_{y'} - u'_{x'} = 0$. Его решением является функция $u' = f(x' - y')$. Решения уравнения

$$|u_{ij}| = u_{xy}, \qquad (i, j = x, y) \tag{24}$$

находим, интегрируя уравнение первого порядка

$$u_x = f(u_y - x).$$

4) Полагая $\phi = (u'_{x'})^{-1}$, получаем уравнение

$$|u_{ij}| = u_{yy}^2 u_{xy}^{-1}, \qquad (u_{xy} \neq 0,\ u_{yy} \neq 0), \tag{25}$$

что соответствует исходному уравнению

$$u'_{x'} \cdot u'_{y'} = 1. \tag{22}$$

Решения последнего могут быть получены методом, описанным в [10], и определяются соотношениями

$$x' = \frac{1}{2}\mu^2\nu^2, \qquad y' = \frac{1}{2}\mu^2 + \psi'(\nu),$$
$$u' = \mu^2\nu + \nu\psi'(\nu) - \psi(\nu).$$

Заменяя в последних переменные x', y', u' на u_y, x, u_x, соответственно, и исключая параметры μ и ν, приходим к решениям уравнения (25).

5) Отметим, что исходное уравнение $u'_{y'} = \phi(x', u')$ подстановка (20) приводит к виду

$$|u_{ij}| = u_{yy}\phi(u_x, u_y). \tag{26}$$

Перечень примеров можно продолжить.

Преобразование (20), как следует из (19) и (21), меняет порядок производных. Вместе с тем, по виду оно напоминает известное преобразование Эйлера [9]:

$$\tau: \begin{array}{l} x' = \omega_\xi, \\ y' = y, \quad (\omega_{\xi\xi} \neq 0), \\ u' = \xi\omega_\xi - \omega, \end{array} \tag{27}$$

относящееся к контактным преобразованиям. При преобразовании (27) производные изменяются по закону

$$\begin{array}{l} u'_{x'} = \xi, \qquad u'_{y'} = -\omega_y, \qquad u'_{x'x'} = \omega_{\xi\xi}^{-1}, \\ u'_{x'y'} = -\omega_{\xi y}\omega^{-1}\xi\xi, \qquad u'_{y'y'} = -|\omega_{\mu\nu}|\omega_{\xi\xi}^{-1}, \qquad (\mu\nu = \xi, y). \end{array} \tag{28}$$

Это позволяет установить соответствие для некоторых уравнений второго порядка и их решений.

1) Для исходного волнового уравнения $u'_{x'x'} - u_{y'y'} = 0$ получаем уравнение Монжа–Ампера

$$|\omega_{\mu\nu}| = -1, \qquad (\mu, \nu = \xi, y). \tag{29}$$

Решению исходного $u' = \phi(x' + y') + \psi(x' - y')$ при этом отвечает решение, определяемое системой

$$y = y, \qquad \xi = \phi'(x + y) + \psi'(x - y),$$
$$\omega = x\left[\phi'(x + y) + \psi'(x - y)\right] - \phi(x + y) - \psi(x - y),$$

в которой функции ϕ и ψ произвольны. Решение уравнения (29) получаем исключив из уравнений системы x.

2) Исходя из уравнений

$$u_{yy} = f(y, u_x)u_{xx}, \tag{30$^{\text{а}}$}$$

$$u_{yy} = f(y, u_y)u_{xx}, \tag{30$^{\text{б}}$}$$

получаем соответственно уравнения

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(y,\xi), \qquad (\mu,\nu=\xi,y), \tag{31$^{\text{а}}$}$$

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega_\xi,-\omega_y). \tag{31$^{\text{б}}$}$$

Преобразованием Лежандра [10]

$$\tau: \quad \begin{aligned} &\xi = z_\mu, \qquad y = z_\nu, \\ &\omega = \mu z_\mu + \nu z_\nu - z, \end{aligned}$$

$$\omega_\xi = \mu, \qquad \omega_y = \nu, \qquad \delta \equiv |z_{kl}| \neq 0, \qquad (l,k=\mu,\nu),$$
$$\omega_{\xi\xi} = \delta^{-1} z_{\nu\nu}, \qquad \omega_{\xi y} = -\delta^{-1} z_{\mu\nu}, \qquad \omega_{yy} = \delta^{-1} z_{\mu\mu}.$$

уравнений (31$^{\text{а}}$), (31$^{\text{б}}$) получаем соответственно

$$-|z_{kl}| = f^{-1}(z_\mu, z_\nu), \tag{32$^{\text{а}}$}$$

$$-|z_{kl}| = f^{-1}(\mu,-\nu). \tag{32$^{\text{б}}$}$$

3) Преобразование Эйлера уравнения

$$u_{yy} = f(x,u,u_x)u_{xx}$$

дает уравнение

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega_\xi, \xi\omega_\xi - \omega, \xi), \qquad (\mu,\nu=\xi,y).$$

В частности, из уравнения

$$u_{yy} = f(xu_x - u)u_{xx}$$

получаем следующее уравнение Монжа–Ампера:

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega).$$

Если же исходить из линейного уравнения

$$u_{yy} = f(x,y)u_{xx} + \alpha\phi(x,y),$$

находим

$$|\omega_{\mu\nu}| = \alpha.$$

Замечание. К числу уравнений (30$^{\text{а}}$), (30$^{\text{б}}$) относятся многие широко известные уравнения: Чаплыгина [11], [12]

$$u_{yy} = -K(y)u_{xx},$$

уравнение колебаний нелинейной струны [2]

$$u_{yy} = F^2(u_x)u_{xx}.$$

Преобразование Лежандра преобразует последнее в линейное, а преобразование Эйлера связывает с уравнением Монжа–Ампера

$$-|\omega_{\mu\nu}| = F^2(\xi).$$

Уравнение

$$u_{yy} = -yu_{xx}$$

подробно исследовано в книге [12].

Известные решения перечисленных уравнений позволяют с помощью преобразования Лежандра построить решения соответствующих уравнений Монжа–Ампера (см. табл. 1).

Значительный интерес для приложений представляет уравнение

$$\omega_{\xi\xi}\omega_{yy} - \omega_{\xi y}^2 = \left(1 + \omega_\xi^2 + \omega_y^2\right)^2. \tag{33}$$

Особенно часто оно встречается в теории выпуклых поверхностей. Преобразование Эйлера связывает (33) с исходным уравнением

$$-u_{yy} = \left(1 + x^2 + u_y^2\right)^2 u_{xx}. \tag{34}$$

Алгебру Ли инвариантности уравнения (34) определяем обычным методом С. Ли [11]. Полный набор операторов алгебры симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} &X_1 = \left(1 + x^2\right)\partial_x + xu\partial_u, \\ &X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = x\partial_u, \qquad X_4 = \partial_u. \end{aligned} \tag{35}$$

Инвариант преобразования, соответствующий оператору X_1,

$$J = \left(1 + x^2\right)^{1/2} u^{-1},$$

позволяет указать, например, решение (34)

$$u = iy\left(1 + x^2\right)^{1/2} + \phi(x), \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{36}$$

где ϕ — произвольная функция. Кроме того, очевидно, решением (34) является функция

$$u = Axy + Bx + Cy + D, \tag{37}$$

A, B, C, D — произвольные постоянные. Преобразование Эйлера этих решений дает следующие промежуточные интегралы уранения (33)

$$\xi\omega_\xi - \omega = iy\sqrt{1 + \omega_\xi^2} + \phi(\omega_\xi), \tag{38}$$

$$\xi\omega_\xi - \omega = Ay\omega_\xi + B\omega_\xi + Cy + D \tag{39}$$

и позволяет найти некоторые решения уравнения (33).

Положим, в частности, в (38) $\phi \equiv 0$. Тогда при $\omega_\xi = 0$ находим решение $\omega = -iy$, при $\omega_\xi = 1$ решение имеет вид

$$\omega = \xi + i\sqrt{2}y.$$

При $\omega_\xi = y$ функция

$$\omega = \xi y - iy\sqrt{1 + y^2}$$

также удовлетворяет уравнению (33).

Таблица 1

№ п/п	Исходное уравнение	Уравнение, полученное преобразованием Эйлера	Уравнение, полученное преобразованием Лежандра
1.	$u_{yy} = F(x, y)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = F(\omega_\xi, y),\ \ (\mu, \nu = \xi, y)$	$\omega_{\xi\xi} = F(\omega_\xi, \omega_\eta)\omega_{\eta\eta}$
2.	$u_{yy} = f(u_x)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = f(\xi)$	$\omega_{\xi\xi} = f(\xi)\omega_{\eta\eta}$
3.	$u_{yy} = f(u_x/u_y)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = f(-\xi\omega_y^{-1})$	$\omega_{\xi\xi} = f(\xi/\eta)\omega_{\eta\eta}$
4.	$u_{yy} = f(y)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = f(y)$	$\omega_{\xi\xi} = f(\omega_\eta)\omega_{\eta\eta}$
5.	$u_{xx} = u_y u_{yy}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = -\omega_y^{-1}$	$\omega_{\eta\eta} = \eta\omega_{\xi\xi}$
6.	$u_{xy} + \dfrac{n}{x+y}(u_x + u_y) = 0$	$\omega_{\xi y} = \dfrac{n}{\omega_\xi - y}(\xi - \omega_y)\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\xi\eta} = \dfrac{n(\xi+\eta)}{\omega_\xi + \omega_\eta}\lvert\omega_{ij}\rvert$
7.	$u_{xy} = f(xu_x - u)$	$\omega_{\xi\eta} = -f(\omega)\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\xi\eta} = -f(\omega - \eta\omega_\eta)\lvert\omega_{ij}\rvert$
8.	$u_{xy} = f(xu_x + yu_y - u)$	$\omega_{\xi y} = -f(\omega - y\omega_y)\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\xi\eta} = -f(\omega)\lvert\omega_{ij}\rvert$
9.	$u_{xx}u_{yy} = 1$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = \omega_{\xi\xi}^2$	$\lvert\omega_{ij}\rvert^2 = \omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta}$
10.	$u_{xx} - u_{yy} = \dfrac{-4u_x}{x+y}$	$\lvert\omega_{\mu\nu} = 1 + 4\xi(\omega_\xi + y)^{-1}\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi} = \dfrac{-4\xi}{\omega_\xi + \omega_\eta}\lvert\omega_{ij}\rvert$
11.	$u_{xx} + u_{yy} = -u_x x^{-1}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = -(\xi\omega_\xi^{-1}\omega_{\xi\xi} + 1)$	$\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} = -\xi\omega_\xi^{-1}\lvert\omega_{ij}\rvert$
12.	$u_{xy}^2 = 4\lambda(x, y)u_x u_y$	$\omega_{\xi y}^2 = -4\lambda(\omega_\xi, y)\xi\omega_y\omega_{\xi\xi}^2$	$\omega_{\xi\eta}^2 = 4\lambda(\omega_\xi, \omega_\eta)\xi\eta\lvert\omega_{ij}\rvert^2$

С другой стороны, для уравнения (33) известно решение [1]

$$\omega = \left[1-(\xi-a)^2-(y-b)^2\right]^{1/2}+c.$$

Так как преобразование Эйлера связывает уравнения (33) и (34), то решение последнего может быть найдено из соотношений

$$x=(\xi-a)\left\{\left[1-(\xi-a)^2-(y-b)^2\right]^{1/2}+c\right\}^{-1},$$
$$y=y, \qquad u=\xi x.$$

После исключения ξ находим следующее решение, заданное в неявной форме:

$$\left(x^2-1\right)^{-1}(xu-a)-a = x\left\{\left[1-\left(\frac{xu-a}{x^2-1}-a\right)^2-(y-b)^2\right]^{1/2}+c\right\}.$$

4) Преобразованием Эйлера уравнения

$$u_{yy}=f(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} \tag{40}$$

получаем уравнение Монжа–Ампера

$$-|\omega_{\mu\nu}|=f(\omega_\xi,y,\xi\omega_\xi-\omega,\xi,-\omega_y). \tag{41}$$

Таким образом, для построения точных решений уравнений типа (41) следует найти точные решения соответствующих уравнений (40) и обратно.

5) Выполняя преобразование Эйлера уравнения

$$u'_{y'y'}=\phi(x',y',u',u'_{x'},u'_{y'})$$

получаем

$$-|\omega_{\mu\nu}|=\omega_{\xi\xi}\phi(\omega_\xi,y,\xi\omega_\xi-\omega,\xi,-\omega_y).$$

6) Уравнение

$$u'_{y'y'}=\phi(x',y',u',u'_{x'},u'_{y'})u_{x'y'}$$

это же преобразование ставит в соответствие уравнение

$$|\omega_{\mu\nu}|=\omega_{\xi y}\phi.$$

7) Исходя из уравнения

$$u_{yy}=\phi(x,y,u,\underset{1}{u})u_{xx}+\alpha\psi(x,y,u,\underset{1}{u}),$$

где α — произвольный параметр, находим уравнение

$$-|\omega_{\mu\nu}|=\alpha\omega_{\xi\xi}\psi+\phi.$$

8) Выполним преобразование Эйлера (27) уравнения Борна–Инфельда [3], [10]

$$\left(1-u_y^2\right)u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}-\left(1+u_x^2\right)u_{yy}=0. \tag{Б–И}$$

Ему отвечает такое уравнение Монжа–Ампера:

$$\left(1+\xi^2\right)|\omega_{\mu\nu}| = 2\xi\omega_y\omega_{\xi y} - \omega_y^2 + 1. \tag{42}$$

Некоторые решения уравнения Борна–Инфельда известны, известно также, что преобразование Лежандра сводит (Б–И) к линейному [10]. Из сказанного ясен метод получения решений уравнения (42) по соответствующим решениям уравнения (Б–И).

Нелокальную линеаризацию можно осуществлять исходя из исследуемого нелинейного уравнения [3].

Пусть дано уравнение [3]

$$z_{xy} - |z_{ij}| = 0, \qquad (i,j = x,y). \tag{24}$$

Найдем нелокальную подстановку τ, сводящую (24) к волновому

$$u_{\xi\eta} = 0, \tag{43}$$

$$\tau(24)\Big|_{(43)} \equiv 0, \tag{44}$$

т.е. многообразие задано уравнением (43) и его дифференциальными следствиями.

Искомую подстановку разыскиваем среди преобразований, линейных по u и $\underset{1}{u}$:

$$\begin{aligned} \tau:\quad & x^{i'} = \varepsilon^i(\xi,\eta,u,\underset{1}{u}) = \alpha^{i\mu}u_\mu + \beta^i u + \gamma^i, \\ & (x^0\equiv u,\ x^1\equiv x,\ x^2\equiv y,\ \mu=\xi,\eta,\ i=0,1,2). \end{aligned} \tag{45}$$

Решение поставленной задачи нелокальной линеаризации [3] обеспечивает подстановка

$$\tau:\quad \begin{aligned} & z = \xi\eta + \xi u_\xi + \eta u_\eta - u + c_1, \\ & x = u_\xi + \eta + c_2, \qquad (c_i = \mathrm{const}), \\ & y = u_\eta + \xi + c_3, \qquad (i = \overline{1,3}). \end{aligned} \tag{45$^\text{а}$}$$

При этом значения производных на многообразии вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} & z_x = \xi, \qquad z_y = \eta, \qquad \delta \equiv u_{\xi\xi}u_{\eta\eta} - 1 \neq 0, \\ & z_{xx} = \delta^{-1}u_{\eta\eta}, \qquad z_{xy} = \delta^{-1}, \qquad z_{yy} = \delta^{-1}u_{\xi\xi}. \end{aligned} \tag{45$^\text{б}$}$$

Решение волнового уравнения $u = \phi(\xi)+\psi(\eta)$ позволяет указать соответствующее решение уравнения (24), которое находим, исключая ξ и η из соотношений

$$\begin{aligned} & z = \xi\eta + \xi\phi' + \eta\psi' - \phi - \psi + c_1, \\ & x = \phi' + \eta + c_2, \\ & y = \psi' + \xi + c_3. \end{aligned}$$

Уравнение

$$|z_{ij}| + y^{-1}z_y z_{xx} + z_{yy} + y^{-1}(z_x + x)z_{xy} + y^{-1}z_y = 0 \tag{46}$$

также может быть приведено к линейному [3]

$$w_{yy} + \xi y^{-1}w_{\xi y} + y^{-1}w_y = 0. \tag{47}$$

Преобразование τ получаем, решая определяющее соотношение

$$\tau(46)\Big|_{(47)} \equiv 0. \tag{48}$$

Линеаризующая подстановка оказывается следующей [3]:

$$\tau: \quad \begin{aligned} & z = -\xi w_\xi - \frac{1}{2} w_\xi^2 + w + c_1, \\ & x = -w_\xi, \qquad y = y. \end{aligned} \tag{49}$$

В отличие от преобразований Эйлера и Лежандра рассмотренные преобразования ($45^а$) и (49) повышают порядок производных. Уравнение (47) точечной заменой переменных

$$\eta = \xi y^{-1}, \qquad \xi = \xi, \qquad u = w \tag{50}$$

преобразуем к волновому уравнению (43)

$$u_{\xi\eta} = 0, \tag{51}$$

решение которого известно

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta). \tag{52}$$

Теперь решение уравнения (46) получаем из (49)–(51), исключая ξ из соотношений

$$\begin{aligned} & z = -\xi x - \frac{1}{2} x^2 + \phi - \psi(\xi y^{-1}) + c_1, \\ & x = -\phi' + y^{-1}\psi'. \end{aligned} \tag{53}$$

§ 3. Некоторые уравнения Монжа–Ампера с тремя независимыми переменными

Успешное применение преобразований Эйлера, Лежандра и других при линеаризации некоторых уравнений Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными позволяет надеяться на положительный эффект в случае большего числа независимых переменных.

Рассмотрим преобразование, полученное из (20) введением дополнительной независимой переменной z' следующим образом:

$$\tau: \quad \begin{aligned} & x' = \varepsilon^x = u_y, \qquad y' = \varepsilon^y = x, \\ & z' = \varepsilon^z = u_z, \qquad u' = \varepsilon^0 = u_x. \end{aligned} \tag{54}$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в работе [3], находим

$$\begin{aligned} & d = -(u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2) = -\delta, \\ & d^y = -|u_{ij}|, \qquad u'_{y'} = \delta^{-1}|u_{ij}|, \qquad (i, j = x, y, z), \\ & u'_{x'} = \delta^{-1}(u_{zz}u_{xy} - u_{xz}u_{zy}), \\ & u'_{z'} = \delta^{-1}(u_{yy}u_{xz} - u_{yz}u_{xy}). \end{aligned} \tag{55}$$

1) Преобразование (54), (55) позволяет линейному уравнению

$$u'_{y'} = 0, \qquad (u' = f(x', z')) \tag{56}$$

поставить в соответствие уравнение

$$|u_{ij}| = 0, \qquad (i, j = x, y, z). \tag{57}$$

Следовательно, решением последнего является всякое решение уравнения

$$u_x = f(u_y, u_z),$$

в котором f — произвольная функция.

2) Уравнению

$$u'_{y'} = \phi(x', y', z', u', u'_{x'}, u'_{z'}) \tag{58}$$

при подстановке (54) отвечает уравнение

$$\begin{aligned} |u_{ij}| = \left(u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2\right) \times \\ \times\phi\left(u_y, x, u_z, u_x, \frac{u_{zz}u_{xy} - u_{xz}u_{zy}}{u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2}, \frac{u_{yy}u_{xz} - u_{yz}u_{xy}}{u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2}\right). \end{aligned} \tag{58$^{\text{a}}$}$$

Можно построить несколько в равной степени полезных вариантов обобщения преобразования Эйлера (27) на три независимые переменные x, y, z. Основными требованиями к преобразованиям являются при этом неизменность порядка производных и относительная неизменность формы записи преобразования в сравнении с (27). Рассмотрим два возможных случая.

Пусть преобразование имеет вид

$$\tau_1: \quad \begin{aligned} x' = \varepsilon^x = \omega_\xi, \qquad y' = \varepsilon^y = y, \\ z' = \varepsilon^z = z, \qquad u' = \varepsilon^0 = \xi\omega_\xi - \omega. \end{aligned} \tag{59}$$

Определитель этого преобразования $\delta = \omega_{\xi\xi} \neq 0$ совпадает с определителем преобразования (27). По формулам, данным в [3], находим закон преобразования производных для (59)

$$\begin{aligned} &u'_{x'} = \xi, \qquad u'_{y'} = -\omega_y, \qquad u'_{z'} = -\omega_z, \\ &u'_{x'x'} = \omega_{\xi\xi}^{-1}, \qquad u'_{y'y'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}(\omega_{\xi\xi}\omega_{yy} - \omega_{\xi y}^2), \\ &u'_{x'y'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}\omega_{\xi y}, \qquad u'_{z'z'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}(\omega_{zz}\omega_{\xi\xi} - \omega_{z\xi}^2), \\ &u'_{x'z'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}\omega_{\xi z}, \qquad u'_{y'z'} = \omega_{\xi\xi}^{-1}(\omega_{\xi z}\omega_{\xi y} - \omega_{\xi\xi}\omega_{yz}). \end{aligned} \tag{60}$$

Из (60) ясно, что преобразование (59) — есть контактное преобразование.

Выполним преобразование (59) уравнения

$$\alpha u_{xx} + \beta u_{yy} + \gamma u_{zz} = \phi(x, y, z, u, \underset{1}{u}), \tag{61}$$

α, β, γ — произвольные постоянные. Приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \alpha - \beta(\omega_{\xi\xi}\omega_{yy} - \omega_{\xi y}^2) - \gamma(\omega_{zz}\omega_{\xi\xi} - \omega_{z\xi}^2) = \\ = \omega_{\xi\xi}\phi(\omega_\xi, y, z, \xi\omega_\xi - \omega, \xi, -\omega_y, -\omega_z). \end{aligned} \tag{62}$$

§ 4. О линеаризации и общем решении системы типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга

В этом параграфе с помощью нелокальной линеаризации найдено общее решение нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга

$$i\gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} = \lambda(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi, \qquad \mu = 0, 1, \tag{63}$$

где $\psi = \psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя обычным образом вместо $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ двухкомпонентные спиноры φ, χ, перепишем систему (63) в следующем виде

$$\begin{gathered} i\left(i\sigma_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \sigma_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \\ = \lambda\left\{i\left(|\varphi|^2 + |\chi|^2\right)\sigma_2 - i\left(\varphi^+\sigma_2\sigma_3\varphi + \chi^+\sigma_2\sigma_3\chi\right)\sigma_3\right\}\varphi, \\ i\left(i\sigma_2\frac{\partial\chi}{\partial x_0} + \sigma_3\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right) = \\ = \lambda\left\{i\left(|\varphi|^2 + |\chi|^2\right)\sigma_2 - i\left(\varphi^+\sigma_2\sigma_3\varphi + \chi^+\sigma_2\sigma_3\chi\right)\sigma_3\right\}\chi. \end{gathered} \tag{64}$$

В конусных переменных

$$\xi = x_0 - x_1, \qquad \eta = x_0 + x_1$$

система (64) запишется в виде

$$\begin{aligned} i\varphi^0_\xi &= -\lambda\left(|\chi^1|^2 + |\varphi^1|^2\right)\varphi^0, \\ i\varphi^1_\eta &= \lambda\left(|\chi^0|^2 + |\varphi^0|^2\right)\varphi^1, \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} i\chi^0_\xi &= -\lambda\left(|\chi^1|^2 + |\varphi^1|^2\right)\chi^0, \\ i\chi^1_\eta &= \lambda\left(|\chi^0|^2 + |\varphi^0|^2\right)\chi^1. \end{aligned} \tag{66}$$

Система уравнений (65), (66) с помощью нелокальной обратимой замены

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= v^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2 + |v^1|^2\right)d\xi\right\}, \\ \varphi^1 &= v^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2 + |v^0|^2\right)d\eta\right\}, \\ \chi^0 &= u^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2 + |v^1|^2\right)d\xi\right\}, \\ \chi^1 &= u^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2 + |v^0|^2\right)d\eta\right\} \end{aligned} \tag{67}$$

приводится к линейной системе дифференциальных уравнений

$$v^0_\xi = 0, \qquad u^0_\xi = 0, \qquad v^1_\eta = 0, \qquad u^1_\eta = 0. \tag{68}$$

Подставляя (67) в (65), (66), убеждаемся, что u^0, u^1, v^0, v^1 удовлетворяют уравнениям (68).

Таким образом, проблема нахождения общего решения исходного уравнения сведена к задаче интегрирования незацепленной системы уравнений (68). Интегрируя последние, получаем

$$u^0 = F^0(\eta), \qquad u^1 = F^1(\xi), \qquad v^0 = G^0(\eta), \qquad v^1 = G^1(\xi). \tag{69}$$

Подставляя (69) в формулы, находим общее решение системы (66)

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= F^0(x_0 + x_1)\exp\left\{ i\lambda \int^{x_0 - x_1} \left(|F^1|^2 + |G^1|^2\right) d\xi \right\},\\
\varphi^1 &= F^1(x_0 - x_1)\exp\left\{ -i\lambda \int^{x_0 + x_1} \left(|F^0|^2 + |G^0|^2\right) d\eta \right\},\\
\chi^0 &= G^0(x_0 + x_1)\exp\left\{ i\lambda \int^{x_0 - x_1} \left(|F^1|^2 + |G^1|^2\right) d\xi \right\},\\
\chi^1 &= G^1(x_0 - x_1)\exp\left\{ -i\lambda \int^{x_0 + x_1} \left(|F^0|^2 + |G^0|^2\right) d\eta \right\},
\end{aligned} \tag{70}$$

где F^0, F^1, G^0, G^1 — произвольные комплексные дифференцируемые функции своих аргументов.

Замечание. Возможность линеаризации двумерной системы типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга связана с бесконечномерной локальной симметрией, допускаемой этой системой. Более того, общее решение (70) может быть получено из чисто теоретико-групповых соображений. Для этого необходимо найти частное решение и применить к нему операцию размножения решений с помощью преобразований из группы симметрии уравнения. Отметим также тот замечательный факт, что нелинейная система (64) допускает нелокальную группу преобразований

$$\begin{aligned}
\chi^{0'} &= a\chi^0 \exp\left\{ i\lambda \int \left[\left(|b|^2 - 1\right)|\chi^1|^2 + \left(|d|^2 - 1\right)|\varphi^1|^2\right] d\xi \right\},\\
\chi^{1'} &= b\chi^1 \exp\left\{ -i\lambda \int \left[\left(|a|^2 - 1\right)|\chi^0|^2 + \left(|c|^2 - 1\right)|\varphi^0|^2\right] d\eta \right\},\\
\varphi^{0'} &= c\varphi^0 \exp\left\{ i\lambda \int \left[\left(|b|^2 - 1\right)|\chi^1|^2 + \left(|d|^2 - 1\right)|\varphi^1|^2\right] d\xi \right\},\\
\varphi^{1'} &= d\varphi^1 \exp\left\{ -i\lambda \int \left[\left(|a|^2 - 1\right)|\chi^0|^2 + \left(|c|^2 - 1\right)|\varphi^0|^2\right] d\eta \right\},
\end{aligned}$$

где a, b, c, d — произвольные комплексные числа.

В заключение отметим, что максимальной локальной группой инвариантности уравнений (64) является

$$G = O(4) \times O(4) \times A_\infty,$$

где A_∞ — бесконечномерная группа Ли преобразований вида

$$x_0' = \frac{1}{2}\left[\int^{x_0-x_1} f_1^{-2}(\xi)d\xi + \int^{x_0+x_1} f_0^{-2}(\eta)d\eta\right],$$

$$x_1' = \frac{1}{2}\left[\int^{x_0+x_1} f_0^{-2}(\eta)d\eta - \int^{x_0-x_1} f_1^{-2}(\xi)d\xi\right],$$

f_0, f_1 — произвольные действительные функции,

$$\varphi^{0'} = f_0(x_0+x_1)\varphi^0, \qquad \varphi^{1'} = f_1(x_0-x_1)\varphi^1,$$
$$\chi^{0'} = f_0(x_0+x_1)\chi^0, \qquad \chi^{1'} = f_1(x_0-x_1)\chi^1.$$

§ 5. О линеаризации и общем решении нелинейных двумерных уравнений электродинамики

Метод нелокальных преобразований оказывается эффективным и для нахождения общего решения двумерных уравнений квантовой электродинамики, получающихся из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma_\mu\psi_\mu - \bar\psi_\mu\gamma_\mu\psi) + e\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu + \\ +\frac{1}{2}(A^\mu_\nu A^\mu_\nu - A^\mu_\nu A^\nu_\mu) + \frac{1}{2}\lambda(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi), \qquad \mu,\nu = 0,1,$$

где e, λ — постоянные величины, A_μ — векторный потенциал электромагнитного поля.

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &[i\gamma_\mu\partial_\mu + e\gamma_\mu A^\mu + \lambda\bar\psi\gamma_\mu\psi\gamma^\mu]\psi = 0,\\ &\Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = -e\bar\psi\gamma_\mu\psi, \qquad \mu = 0,1. \end{aligned} \tag{71}$$

Расписывая систему (71) покомпонентно и переходя к конусным переменным

$$\xi = x_0 - x_1, \qquad \eta = x_0 + x_1,$$

получаем

$$\begin{aligned} i\psi^0_\xi &= -\left[\frac{1}{2}e(A_1 - A_0) + \lambda(|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2)\right]\psi^0,\\ i\psi^1_\eta &= \left[\frac{1}{2}e(A_1 + A_0) + \lambda(|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2)\right]\psi^1,\\ i\psi^2_\xi &= -\left[\frac{1}{2}e(A_1 - A_0) + \lambda(|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2)\right]\psi^2,\\ i\psi^3_\eta &= \left[\frac{1}{2}e(A_1 + A_0) + \lambda(|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2)\right]\psi^3, \end{aligned} \tag{72}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta+A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(|\psi^0|^2+|\psi^1|^2+|\psi^2|^2+|\psi^3|^2\right),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta-A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(-|\psi^0|^2+|\psi^1|^2-|\psi^2|^2+|\psi^3|^2\right).$$

Система уравнений (72) линеаризуется с помощью следующей нелокальной обратимой замены переменных

$$\begin{aligned}
\psi^0&=u^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi+\frac{i}{2}e\int(A^1-A^0)d\xi\right\},\\
\psi^1&=u^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta-\frac{i}{2}e\int(A^1+A^0)d\eta\right\},\\
\psi^2&=u^2(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi+\frac{i}{2}e\int(A^1-A^0)d\xi\right\},\\
\psi^3&=u^3(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta-\frac{i}{2}e\int(A^1+A^0)d\eta\right\}.
\end{aligned}\tag{73}$$

Подставляя (73) в (72), получаем систему для нахождения функций u^0, …, u^3, A^0, A^1:

$$\begin{aligned}
&u^0_\xi=0,\qquad u^1_\eta=0,\qquad u^2_\xi=0,\qquad u^3_\eta=0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta+A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(|u^0|^2+|u^1|^2+|u^2|^2+|u^3|^2\right),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta-A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(-|u^0|^2+|u^1|^2-|u^2|^2+|u^3|^2\right).
\end{aligned}\tag{74}$$

Интегрируя уравнений (74) и подставляя полученный результат в формулы (73), находим общее решение исходной системы (71)

$$\begin{aligned}
A^0&=e\int^{x_0+x_1}\int^{z}\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta dz+\frac{\partial f}{\partial x_0},\\
A^1&=-e\int^{x_0-x_1}\int^{z}\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi dz-\frac{\partial f}{\partial x_1},\\
\psi^0&=u^0(x_0+x_1)\exp\left\{i\int^{x_0-x_1}\left[\lambda\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1-A^0)\right]d\xi\right\},\\
\psi^1&=u^1(x_0-x_1)\exp\left\{-i\int^{x_0+x_1}\left[\lambda\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1+A^0)\right]d\eta\right\},\\
\psi^2&=u^2(x_0+x_1)\exp\left\{i\int^{x_0-x_1}\left[\lambda\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1-A^0)\right]d\xi\right\},\\
\psi^3&=u^3(x_0-x_1)\exp\left\{-i\int^{x_0+x_1}\left[\lambda\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1+A^0)\right]d\eta\right\},
\end{aligned}$$

где $u^0, \ldots, u^3$ — произвольные комплексные функции, а $f = f(x_0, x_1)$ — произвольная действительная функция.

1. Forsyth A.R., Theory of differential equations. Vol. 5, 6, N.Y., Dover Publication, 1959, 478 p., 596 p.
2. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. 1, 2, N.Y., Academic press, 1965, 511 p., 1972, 301 p.
3. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 48 с.
4. Александров А.Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М., Гостехиздат, 1948, 622 с.
5. Погорелов А.В., Об уравнениях Монжа–Ампера эллиптического типа, Харьков, госуниверситет, 1960, 110 с.
6. Погорелов А.В., Многомерная проблема Минковского, М., Наука, 1975, 79 с.
7. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 6–27.
8. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *ДАН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
9. Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, М., Наука, 1966, 260 с.
10. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, М–Л., Гостехиздат, 1951, 514 с.
11. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 399 с.
12. Бицадзе А.В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., Наука, 1981, 448 с.

Точные решения нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного поля

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

Построены новые многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака и уравнений для взаимодействующих спинорного и векторного полей.

Введение.

В настоящей работе построены широкие классы точных решений нелинейной системы уравнений Дирака

$$\left[\gamma^\mu p_\mu + \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}\right]\psi(x) = 0, \qquad k \neq 0, \tag{1}$$

γ_μ — 4×4 матрицы Дирака, $p_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, ψ — четырехкомпонентный спинор, k, λ — параметры и системы восьми нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} &[\gamma^\mu p_\mu + \lambda_1\gamma^\mu A_\mu + m_1]\psi(x) = 0, \\ &p^\nu p_\nu A^\mu - p^\mu p_\nu A^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m_2 A^m + \lambda_2 A^\mu A_\nu A^\nu, \end{aligned} \tag{2}$$

A^μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, λ_1, λ_2, m_1, m_2, e — константы. Если в системе (2) положить $m_2 = \lambda_2 = 0$, то она совпадает с уранениями классической электродинамики, описывающими взаимодействие электромагнитного и спинорного полей.

Для построения многопараметрических семейств точных решений (1), (2) существенно используются симметрийные свойства уравнений и анзатц

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega) + B(x), \tag{3}$$

предложенный в [1, 2] и эффективно реализованный в [3–6] для ряда нелинейных волновых уравнений. $A(x)$ — 4×4-матрица, $B(x)$ — четырехкомпонентный спинор, алгоритм построения которых приводится ниже; $\varphi(\omega)$ — вектор-столбец, компоненты которого в общем случае зависят от трех инвариантных переменных $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (более подробно об этом см. [1, 2]).

Далее рассматривается анзатц (3) при $B(x) = 0$.

Используя конечные преобразования, устанавливаем, что уравнение (1) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, т.е. группы Пуанкаре $P(1,3)$, дополненной группой масштабных преобразований. Базисные элементы алгебры Ли $A\tilde{P}(1,3)$ группы $\tilde{P}(1,3)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \\ &D = x_\mu p^\mu - ik, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \end{aligned} \tag{4}$$

Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, С. 20–30.

Общая схема построения решений уравнения (1) (аналогично строятся решения системы (2)) такова. Ищем решения уравнения (1), инвариантные относительно подгруппы группы $\tilde{P}(1,3)$, порождаемой линейной комбинацией всех базисных элелентов $A\tilde{P}(1,3)$,

$$Q = C^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + C^{00} D + C^{\mu} P_{\mu}, \tag{5}$$

где $C^{\mu\nu}$, C^{00}, C^{μ} — константы, $C^{\mu\nu} = -C^{\nu\mu}$, $0 \le \mu, \nu \le 3$. Матрица $A(x)$ ищется из условия

$$QA(x) = 0. \tag{6}$$

Инвариантные переменные являются первыми интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Эйлера–Лагранжа

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x)} = \frac{dx_a}{\xi^a(x)}, \qquad a = \overline{1,3}, \tag{7}$$

где $\xi^{\mu} = C^{\mu\nu} x_{\nu} + C^{00} x^{\mu} + C^{\mu}$.

Если построить явный вид матриц $A(x)$, удовлетворяющих уравнению (7), то для спинора $\varphi(\omega)$ получим уравнение, зависящее только от трех инвариантных переменных $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, т.е. анзатц (3) с матрицами $A(x)$, удовлетворяющими условию (7), приведет к “разделению” переменных в уравнении (1). Решения соответствующего уравнения для $\varphi(\omega)$, будучи подставленными в (3), дают решения исходного уравнения (1).

Для реализации этой схемы прежде всего нужно построить в явном виде матрицы $A(x)$, удовлетворяющие уравнению (7), т.е. найти частное решение линейной системы 16 дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) первого порядка с переменными коэффициентами. Решить эту систему ДУЧП стандартными методами непросто. Поэтому решаем ее таким образом. Оператор Q преобразуем с помощью обратимого оператора

$$W(x,p) = \exp\{\theta\Sigma\}, \qquad W^{-1}(x,p) = \exp\{-\theta\Sigma\} \tag{8}$$

к виду

$$Q' = WQW^{-1}, \tag{9}$$

где

$$\Sigma = \theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^{00} D + \theta^{\mu} P_{\mu}. \tag{10}$$

Преобразование W выбирается таким, чтобы оператор Q' имел максимально простой вид. Этого всегда можно достичь, поскольку уравнение (1) инвариантно относительно преобразований Лоренца. На физическом языке это означает, что нелинейная система уравнений Дирака решается в фиксированной системе отсчета, а затем с помощью процедуры группового размножения строятся решения, которые не зависят от использованной системы отсчета.

§ 1. Точные решения нелинейного уравнения Дирака (1)

Приводим многопараметрические, неразмножаемые семейства решений уравнения (1). Неразмножаемость означает, что рассматриваемые семейства инварианты по отношению к операции размножения размножения решений с помощью конечных преобразований из группы инвариантности уравнения (1). Указываются только те решения, которые являются существенно новыми.

1. $k \in R^1$, $k \neq 0$,

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) b \cdot z\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot a) 2a \cdot z + \theta (b \cdot z)^2\right\} \chi, \tag{1.1}$$

$$\gamma \cdot a \equiv \gamma^\mu a_\mu, \qquad a \cdot z \equiv a^\mu z_\mu, \qquad z_\mu = x_\mu + \theta_\mu,$$

χ — произвольный постоянный спинор, θ, θ_μ, a_μ, b_μ — произвольные константы, удовлетворяющие условиям:

$$a_\mu a^\mu = -1, \qquad b_\mu b^\mu = 0, \qquad a_\nu b^\nu = 0. \tag{1.2}$$

Неразмножаемость семейства (1.1) с помощью преобразований из группы сдвигов и группы масштабных преобразований вполне очевидна. Докажем, что это свойство выполнено, и для группы преобразований, порождаемой оператором J_{01}, имеет вид:

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1\alpha\right\}\psi_1(x'),$$

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch}\alpha + x_1 \operatorname{sh}\alpha, \quad x'_1 = x_1 \operatorname{ch}\alpha - x_0 \operatorname{sh}\alpha, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

Применяя эту формулу, взяв в качестве $\psi_1(x)$ решение (1.1), после несложных преобразований получаем новое решение

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{\theta'}{2}(\gamma \cdot a')(\gamma \cdot b') b' \cdot z\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}'\chi')^{1/2k}(\gamma \cdot a')\left[2a' \cdot z + \theta'(b' \cdot z)^2\right]\right\}\chi',$$

где

$$a'_0 = a_0 \operatorname{ch}\alpha + a_1 \operatorname{sh}\alpha, \quad a'_1 = a_1 \operatorname{ch}\alpha - a_0 \operatorname{sh}\alpha, \quad a'_2 = a_2, \quad a'_3 = a_3,$$
$$b'_0 = b_0 \operatorname{ch}\alpha + b_1 \operatorname{sh}\alpha, \quad b'_1 = b_1 \operatorname{ch}\alpha - b_0 \operatorname{sh}\alpha, \quad b'_2 = b_2, \quad b'_3 = b_3,$$
$$\theta' = \theta, \quad \chi' = \exp\left\{\frac{\alpha}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\chi.$$

Нетрудно убедиться, что параметры a'_μ, b'_μ, θ' удовлетворяют условиям (1.2), т.е. решение $\psi_2(x)$ вновь принадлежит семейству (1.1), что и требовалось доказать. Инвариантность семейства (1.1) относительно остальных преобразований из группы $O(1,3)$ проверяется совершенно аналогично.

2. $k \in R^1$, $k \neq 1/2$,

$$\psi(x) = \left[(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2\right]^{(k-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \operatorname{arctg}\frac{a \cdot z}{b \cdot z}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-i(\gamma \cdot b)\frac{2k\lambda}{1-2k}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\left[(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2\right]^{(1-2k)/(4k)}\right\}\chi, \tag{1.3}$$

причем

$$a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1, \qquad a_\nu b^\nu = 0, \tag{1.4}$$

$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, θ_μ — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор.

3. $k = 1/2$

$$\begin{gathered}\psi(x) = \left[(a\cdot z)^2 + (b\cdot z)^2\right]^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot z}{b\cdot z}\right\}\times \\ \times\exp\left\{-i\lambda\frac{\bar\chi\chi}{2(1+\theta^2)}(\gamma\cdot b+\theta\gamma\cdot a)\Big[\ln\left[(a\cdot z)^2+(b\cdot z)^2\right]+2\theta\operatorname{arctg}\frac{a\cdot z}{b\cdot z}\Big]\right\}\chi,\end{gathered} \tag{1.5}$$

$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$; a_μ, b_μ, θ, θ_μ — произвольные константы, удовлетворяющие условию (1.4).

$$\begin{gathered}\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot b)b\cdot z\right\}\Big[(\gamma\cdot a+\beta\gamma\cdot b)(a\cdot z+\beta b\cdot z)+ \\ +\frac{1}{4}\gamma\cdot c\left(c\cdot z+(b\cdot z)^2\right)\Big]\omega^{-1}\exp\left\{-i\frac{\lambda\bar\chi\chi}{\beta_1^2+\beta_2^2}(\beta_1(\gamma\cdot a+\beta\gamma\cdot b)+\right. \\ \left.+\frac{1}{2}\beta_2\gamma\cdot c)\left[\beta_1(a\cdot z+\beta b\cdot z)+\frac{1}{2}\beta_2\left(c\cdot z+(b\cdot z)^2\right)\right]\omega^{-1}\right\}\chi, \\ \omega = (a\cdot z+\beta b\cdot z)^2+\frac{1}{4}\left(c\cdot z+(b\cdot z)^2\right)^2, \qquad z_\mu = x_\mu+\theta_\mu,\end{gathered} \tag{1.6}$$

θ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, β, β_i — произвольные константы, удовлетворяющие условиям:

$$a^\mu b_\mu = b^\mu c_\mu = c^\mu a_\mu = b^\nu b_\nu = 0, \quad a_\mu a^\mu = -1, \quad c_\mu c^\mu = -4. \tag{1.7}$$

4. $k < 0$

$$\begin{gathered}\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot b)b\cdot z\right\}\times \\ \times\left\{\left[(\gamma\cdot a+\beta\gamma\cdot b)(a\cdot z+\beta b\cdot z)+\frac{1}{4}(\gamma\cdot c)(c\cdot z+(b\cdot z)^2)\right]+ig(\omega)\right\}\chi, \\ g(\omega) = \mp\sqrt{\frac{1+|k|}{|k|}}\omega^{1/2}f(\omega) = \mp\sqrt{\frac{1+|k|}{|k|}}\left\{\mp\frac{\sqrt{k^2+|k|}}{2\lambda(\bar\chi\chi)^k}\right\}^{2k}\omega^{-k/2}, \\ \omega = (a\cdot z+\beta b\cdot z)^2+\frac{1}{4}(c\cdot z+(b\cdot z)^2)^2, \qquad z_\mu = x_\mu+\theta_\mu,\end{gathered} \tag{1.8}$$

причем параметры a_μ, b_μ, c_μ, θ, β удовлетворяют условию (1.6), χ — произвольный постоянный спинор.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай $k = 1/3$. Уравнение (1) в этом случае инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$ (см. [7]) и поэтому, используя операцию размножения с помощью группы специальных конформных преобразораний, можно получить более широкое семейство решений уравнения (1) при $k = 3/2$. Соответствующие формулы имеют вид ([4]):

$$\psi_2(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\psi_1(x')$$
$$x'_\mu = \frac{x_\mu - \theta_\mu x^2}{\sigma(x)}, \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta\cdot x + \theta^2 x^2, \quad \theta^2 = \theta^\nu\theta_\nu, \quad x^2 = x^\nu x_\nu. \tag{1.9}$$

Используя в качестве $\psi_1(x)$ решения (1.1), (1.3) при $k = 3/2$, получаем решения конформно-инвариантного уравнения Дирака

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\exp = \left\{\frac{\tilde\theta}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\frac{b\cdot x - b\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-i\frac{\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/3}(\gamma\cdot a)\frac{2(a\cdot x - a\cdot\theta x^2)\sigma(x) + \tilde\theta(b\cdot x - b\cdot\theta x^2)^2}{\sigma^2(x)}\right\}\chi, \tag{1.10}$$

$a_\mu a^\mu = -1$, $b_\mu b^\mu = 0$, $a_\mu b^\mu = 0$; θ_μ, $\tilde\theta$ — произвольные константы, χ — произвольный постоянный спинор.

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^{3/2}(x)}\left[((a\cdot x) - a\cdot\theta x^2)^2 + (b\cdot x - b\cdot\theta x^2)\right]^{1/4}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{b\cdot x - b\cdot\theta x^2}\right)\right\}\times \tag{1.11}$$
$$\times\exp\left\{-i\gamma\cdot b\frac{3\lambda}{2}\left[\frac{(a\cdot x - a\cdot\theta x^2)^2 + (b\cdot x - b\cdot\theta x^2)^2}{\sigma^2(x)}\right]^{-1/3}(\bar\chi\chi)^{1/3}\right\}\chi,$$

$a_\mu a^\mu = b_\nu b^\nu = -1$, $a_\nu b^\nu = 0$, θ_μ — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор.

§ 2. Точные решения системы управления (2)

Будем искать решения системы (2) при $m_1 = m_2 = 0$. Нам удалосъ получить три класса точных решений:

1. $\lambda > 0$, $c_1 \neq 0$

$$\psi(x) = \gamma\cdot b\cdot\exp\left\{-i\lambda_1\lambda_2^{-1/2}\mathrm{arctg}\left[\frac{\lambda_2^{1/2}}{k}(c_1 a\cdot x + c_2)\right]\right\}\chi,$$
$$A_\mu(x) = \pm b_\mu c_1^{-1/2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2} - a_\mu\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}. \tag{2.1}$$

2. $\lambda_2 < 0$, $c_1 \neq 0$

$$\psi(x) = \gamma\cdot b\exp\left\{i\frac{\lambda_1}{2|\lambda_2|^{1/2}}\ln\left|\frac{|\lambda_2|^{1/2}(c_1 a\cdot x + c_2) - k}{|\lambda_2|^{1/2}(c_1 a\cdot x + c_2) + k}\right|\right\}\chi,$$
$$A_\mu(x) = \pm b_\mu c_1^{-1/2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2} - a_\mu\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}. \tag{2.2}$$

3. $\lambda_2 < 0$

$$\begin{gathered}\psi(x)=\gamma\cdot b\exp\left\{-i\lambda_1|\lambda_2|^{-1/2}\ln\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}a\cdot x+c_3\right)\right\}\chi,\\ A_\mu(x)=\pm b_\mu\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}a\cdot x+c_3\right)^{1/2}-a_\mu\frac{k}{|\lambda_2|}\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}a\cdot x+c_3\right)^{-1}.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Здесь: $k=eb^\mu\bar\chi\gamma_\mu\chi/(a^\nu b_\nu)$, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор

$$b_\mu b^\mu=a_\mu a^\nu=0,\qquad b_\mu a^\mu\neq 0.\tag{2.4}$$

Отметим, что полученные решения зависят от параметров λ_1, e аналитически, в то время как параметр λ_2 входит в решение сингулярно. Это означает, что решения (2.1)–(2.3) не могут быть получены в рамках теории возмущений путем разложения в ряд по малому параметру λ_2.

Вводя обычным образом тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A^\nu-\partial_\nu A^\mu$, для найденных решений получаем:

$$F_{\mu\nu}=\pm(b_\mu a_\nu-b_\nu a_\mu)c_1^{1/2}(c_1a\cdot x+c_2)\left[c_1a\cdot x+c_2)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1/2},\tag{2.5}$$

$$F_{\mu\nu}=\pm(b_\mu a_\nu-b_\nu a_\mu)c_1^{1/2}(c_1a\cdot x+c_2)\left[c_1a\cdot x+c_2)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1/2},\tag{2.6}$$

$$F_{\mu\nu}=\pm(b_\mu a_\nu-b_\nu a_\mu)k\lambda_2^{-1}(2k\lambda_2a\cdot x+c_2)^{-1/2}.\tag{2.7}$$

Для получения новых семейств решений системы уравнений (2) воспользуемся тем фактом, что она инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$ (см. [6]). Легко убедиться, что решения (2.1)–(2.3) неразмножимы с помощью преобразований из расширенной группы Пуанкаре $\tilde P(1,3)\subset C(1,3)$. Поэтому для получения неразмножимых относительно группы $C(1,3)$ решений системы (2) достаточно размножить полученные решения с помощью группы специальных конформных преобразований. Как было показано в [8], формула размножения решений в этом случае имеет вид

$$\psi_2(x)=\frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot c)}{\sigma^2(x)}\psi_1(x').$$

$$\begin{gathered}4.\ \ A_\mu^{(2)}(x)=\sigma^{-2}(x)\{g_{\mu\nu}\sigma(x)+2(\theta_\mu x_\nu-\theta_\nu x_\mu+2\theta xx_\mu\theta_\nu-\\ -x^2\theta_\mu\theta_\nu-\theta^2x_\mu x_\nu)\}A^\nu_{(1)}(x'),\\ x'_\mu=\frac{x_\mu-\theta_\mu x^2}{\sigma(x)},\qquad \sigma(x)=1-2\theta\cdot x+\theta^2x^2.\end{gathered}\tag{2.8}$$

Подставляя в формулу (2.8) вместо ψ, $A^\mu_{(1)}$ решения (2.1)–(2.3), получаем следующие семейства решений:

5. $\lambda_2 > 0,\ c_1 \neq 0$

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot c)}{\sigma^2(x)}\gamma\cdot b\times$$

$$\times\exp\left\{-i\lambda_1\lambda_2^{-1/2}\mathrm{arctg}\left[\frac{\lambda_2^{1/2}}{k}\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)\right]\right\}\chi,$$

$$A_\mu(x) = \pm c_1^{-1/2}\left[\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2}\sigma^{-2}(x)\times \tag{2.9}$$

$$\times\left\{b_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu b\cdot x-x_\mu b\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot b-\theta_\mu x^2\theta\cdot b-x_\mu\theta^2 b\cdot x\right]\right\}-$$

$$-\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}\sigma^{-2}(x)\times$$

$$\times\left\{a_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu a\cdot x-x_\mu a\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\cdot\theta\cdot a-\theta_\mu x^2\theta\cdot a-x_\mu\theta^2 a\cdot x\right]\right\}.$$

6. $\lambda_2 < 0,\ c_1 \neq 0$

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\gamma\cdot b\times$$

$$\times\exp\left\{i\frac{\lambda_1}{2|\lambda_2|^{1/2}}\ln\left|\frac{|\lambda_2|^{1/2}\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)-k}{|\lambda_2|^{1/2}\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)+k}\right|\right\}\chi,$$

$$A_\mu(x) = \pm c_1^{-1/2}\left[\left(\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2}\sigma^{-2}(x)\times \tag{2.10}$$

$$\times\left\{b_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu b\cdot x-x_\mu b\cdot\theta+2\theta x\cdot bx_\mu-\theta_\mu x^2\theta\cdot b-x_\mu\theta^2 b\cdot x\right]\right\}-$$

$$-\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}\sigma^{-2}(x)\times$$

$$\times\left\{a_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu a\cdot x-x_\mu a\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot a-\theta_\mu x^2\theta\cdot a-x_\mu\theta^2 a\cdot x\right]\right\}.$$

7. $\lambda_2 < 0$

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\gamma\cdot b\times$$

$$\times\exp\left\{-i\lambda_1|\lambda_2|^{-1/2}\ln\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_3\right)\right\}\chi,$$

$$A_\mu(x) = \pm\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_3\right)^{1/2}\sigma^{-2}(x)\times \tag{2.11}$$

$$\times\left\{b_\mu\sigma(x)+2\left(\theta_\mu b\cdot x-x_\mu b\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot b-\theta_\mu x^2\theta\cdot b-x_\mu\theta^2 b\cdot x\right)\right\}-$$

$$-k|\lambda_2|^{-1}\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_3\right)^{-1}\sigma^{-2}(x)\times$$

$$\times\left\{a_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu a\cdot x-x_\mu a\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot a-\theta_\mu x^2\theta\cdot a-x_\mu\theta^2 a\cdot x\right]\right\}.$$

Выражения для тензора $F_{\mu\nu}$, соответствующие решениям (2.9)–(2.11), очень громоздки и их опускаем. По этой же причине не приводим доказательство неразмножаемости этих решений с помощью преобразований из группы $C(1,3)$.

§ 3. Точные решения уравнений для спинорного и скалярного полей

Подход, изложенный во введении, может быть применен к системе нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu p^\mu \psi = \left[\lambda_1 u + \lambda_2 (\bar\psi\psi)^{1/3}\right]\psi,\\ &p_\mu p^\mu u = \left[\mu_1 u + \mu_2 (\bar\psi\psi)^{1/3}\right] u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u = u_1(x) + iu_2(x)$ — комплекснозначная скалярная функция, λ_i, μ_i — действительные константы.

Для нахождения точных решений системы (3.1) используем анзатц

$$\begin{aligned} &\psi(x) = \left(\gamma^\mu \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} f(\omega) + ig(\omega)\right)\chi,\\ &u(x) = \phi_1(\omega) + i\phi_2(\omega), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\omega = \omega(x)$ — неизвестная дифференцируемая функция, χ — произвольный постоянный спинор, f, g, ϕ_i — функции, подлежащие определению. Подставляя (3.2) в (3.1), получаем редуцированную систему уравнений

$$\begin{aligned} &p_\mu p^\mu \omega + A(\omega) = 0, \qquad (p_\mu\omega)(p^\mu\omega) + B(\omega) = 0,\\ &A(\omega)\dot\phi_i + B(\omega)\ddot\phi_i + \left[\mu_1|\phi| + \mu_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\left(g^2 + B(\omega)f^2\right)^{1/3}\right]\phi_i = 0, \quad i = 1,2,\\ &\dot g - \left[\lambda_1|\phi| + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\left(g^2 + B(\omega)f^2\right)^{1/3}\right] f = 0,\\ &A(\omega)f + B(\omega)\dot f - \left[\lambda_1|\phi| + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\left(g^2 + B(\omega)f^2\right)^{1/3}\right] g = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по ω.

Подробный анализ уравнений (3.3) будет проведет позже. Здесь приведем некоторые классы точных решений системы (3.1), полученные из (3.3):

$$\begin{aligned} 1.\quad &\psi(x) = \pm\sqrt{c_1}\frac{1 - (\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\times\\ &\times\left\{\gamma\cdot a \sin\left[\left(\lambda_1 c + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}c_1^{1/3}\right)\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)} + c_2\right] + \right.\\ &\left.+ i\cos\left[\left(\lambda_1 c + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}c_1^{1/3}\right)\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)} + c_3\right]\right\}\chi,\\ &u(x) = \pm\frac{c}{\sigma(x)}\exp\left\{\pm i\left(\mu_1 c + \mu_2 c^{1/3}(\bar\chi\chi)^{1/3}\right)\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)} + iC_3\right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

θ_μ, a_μ, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

$$\begin{aligned} 2.\quad &\psi(x) = q_1\left(x^2 + 2\theta\cdot x + \theta^2\right)^{-3/4}\left(\frac{\gamma\cdot x + \gamma\cdot\theta}{\sqrt{x^2 + 2\theta\cdot x + \theta^2}} \pm i\right)\chi,\\ &u(x) = q_2\left(\lambda_1 q_2 + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\right)^{-1}\left(x^2 + 2\theta\cdot x + \theta^2\right)^{-1}\exp\{ic\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $q_1 = \left[\pm 3 \cdot 2^{-4/3} \left(\lambda_1 q_2 + \lambda_2 (\bar{\chi}\chi)^{1/3}\right)\right]^{3/2}$, C— постоянная, χ — произвольный постоянный спинор и выполнено условие

$$\left[\frac{\mu_1 q_2 + \mu_2 (\bar{\chi}\chi)^{1/3}}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 (\bar{\chi}\chi)^{1/3}}\right]^2 = \frac{4}{9}.$$

Можно доказать, что семейства решений (3.4), (3.5) являются неразмножаемыми относительно конформной группы $C(1,3)$, которая является максимальной локальной группой инвариантности уравнения (3.1), но из-за большой громоздкости выкладок мы опускаем доказательство.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
6. Фущич В.И., Цифра И.М., О симметрии нелинейных уравнений электродинамики, *Теор. и мат. физика*, 1985, **64**, № 1, 41–50.
7. Gürsey F., On conformal-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cim.*, 1956, **111**, № 5, 980–997.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, № 3–4, 215–217.

О симметрии, интеграле движения и некоторых частных решениях пространственной задачи трех тел

Ю.А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, И.В. РЕВЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

Еще Лагранжу были известны 10 интегралов движения пространственной задачи трех тел

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}, \qquad i = 1,2,3, \tag{1}$$

где

$$U = -m_1m_2F\left(r_{12}^2\right) - m_2m_3F\left(r_{23}^2\right) - m_3m_1F\left(r_{31}^2\right), \qquad m_i = 1, \quad i = 1,2,3,$$

(x_k, y_k, z_k) — координаты k-го тела, $k = 1,2,3$, $F(r^2)$ — произвольная достаточная гладкая функция, $r_{ij} = \left[(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2 + (z_i-z_j)^2\right]^{1/2}$.

С теоретико-групповой точки зрения это значит, что лагранжиан и соответствующие уравнения движения инвариантны относительно 10-параметрической группы Галилея $G(1,3)$. Базисные элементы алгебры Ли этой группы имеют вид

$$\begin{gathered}
X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{y_3}, \\
X_3 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3}, \qquad X_4 = t\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \\
X_5 = t\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{y_3}\right), \qquad X_6 = t\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3}\right), \\
X_7 = y_k\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k\frac{\partial}{\partial y_k}, \qquad X_8 = z_k\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial z_k}, \\
X_p = x_k\frac{\partial}{\partial y_k} - y_k\frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{gathered} \tag{2}$$

В данной работе проведена теоретико-групповая классификация потенциалов в уравнении (1), в результате которой установлено, что при некоторых специальных видах U, например

$$U(r^2) = \lambda_1 r^4 + \lambda_2 r^2, \tag{3}$$

уравнение (1) обладает более широкой группой инвариантности, чем группа Галилея $G(1,3)$. Для уравнения (1) с потенциалом (3) найден интеграл движения и построены частные решения.

1. Полную информацию о локальных симметрийных свойствах уравнения (1) дает

Доклады академии наук СССР, 1985, **280**, № 4, С. 799–804.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет дополнительную локальную группу симметрии только в таких случаях:*

$$F\left(r^2\right) = \lambda_1 r^4 + \lambda_2 r^2, \tag{4.1}$$

$$F\left(r^2\right) = \lambda_3 r^2, \tag{4.2}$$

$$F\left(r^2\right) = \lambda r^{-2}, \tag{4.3}$$

$$F\left(r^2\right) = \lambda_5 \left(r^2\right)^\beta, \qquad \beta = \mathrm{const}, \qquad F\left(r^2\right) = \lambda_5 \ln\left(r^2\right), \tag{4.4}$$

где $\lambda_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Теорема 2. *Уравнения (1) с потенциалами (4.1)–(4.2) допускают следующие алгебры инвариантности*

а) $F\left(r^2\right) = \lambda_1 r^4 + \lambda_2 r^2$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_9, X_{10}\}, \tag{5}$$

где

$$X_{10} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left\{(x_a - x_b)\frac{\partial}{\partial x_c} + (y_a - y_b)\frac{\partial}{\partial y_c} + (z_a - z_b)\frac{\partial}{\partial z_c}\right\}; \tag{6}$$

б) $F\left(r^2\right) = \lambda_3 r^2$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_6, Y_k^{ij}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6, \quad j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
&Y_1^{ij} = v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j3}}, \quad Y_2^{ij} = v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j3}},\\
&Y_3^{ij} = v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j3}}, \quad Y_4^{ij} = v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j3}},\\
&Y_5^{ij} = v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j3}}, \quad Y_6^{ij} = v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j3}},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$v^{1j} = x_j, \qquad v^{2j} = y_j, \qquad v^{3j} = z_j, \qquad j = 1, 2, 3;$$

в) $F\left(r^2\right) = \lambda_4 r^{-2}$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_9, A, D_1\}, \tag{9}$$

где

$$A = t^2\frac{\partial}{\partial t} + t x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + t y_k\frac{\partial}{\partial y_k} + t z_k\frac{\partial}{\partial z_k}, \tag{10}$$

$$D_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial}{\partial y_k} + z_k\frac{\partial}{\partial z_k}; \tag{11}$$

г) $F\left(r^2\right) = \lambda_5\left(r^2\right)^\beta$, $F\left(r^2\right) = \lambda_5 \ln\left(r^2\right)$, $\beta = 0$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_9, D_2\}, \tag{12}$$

где

$$D_2 = (1-\beta)t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial}{\partial y_k} + z_k\frac{\partial}{\partial z_k}. \tag{13}$$

Следствие. Оператор (6) порождает следующие преобразования координат:

$$\begin{aligned}
x'_k &= \left(x_k - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\cos\sqrt{3}a + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{kmn}(x_m - x_n)\sin\sqrt{3}a + \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\\
y'_k &= \left(y_k - \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\cos\sqrt{3}a + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{kmn}(y_m - y_n)\sin\sqrt{3}a + \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\\
z'_k &= \left(z_k - \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)\cos\sqrt{3}a + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{kmn}(z_m - z_n)\sin\sqrt{3}a + \frac{z_1+z_2+z_3}{3}, \qquad k=1,2,3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства воспользуемся методом С. Ли, современное изложение которого приведено в [3]. Условие инвариантности уравнения (1) относительно преобразований, порождаемых инфинитезимальным оператором

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \eta^{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i} + \eta^{z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}, \tag{15}$$

где ξ, η^{x_i}, η^{y_i}, η^{z_i} — функция от t, x_j, y_j, z_j, $j=1,2,3$, имеет вид

$$\overset{\approx}{X}\Phi|_{\Phi=0} = 0, \tag{16}$$

где $\overset{\approx}{X}$ — второе продолжение оператора (15), Φ — многообразие, определяемое уравнением (1).

Решая уравнение (16), получаем условия на ξ, η^{x_i}, η^{y_i}, η^{z_i}:

$$\begin{aligned}
&U_{x_k}\eta^{x_i}_{x_k} + U_{y_k}\eta^{x_i}_{y_k} + U_{z_k}\eta^{x_i}_{z_k} - 2U_{x_i}\xi_t = (\eta^{x_i} - \eta^{x_j})\dot{F}_{ij} + \\
&\quad + (\eta^{x_i} - \eta^{x_k})\dot{F}_{ik} + (x_i - x_j)\ddot{F}_{ij}X(r_{ij}^2) + (x_i - x_k)\ddot{F}_{ik}X(r_{ik}^2),\\
&U_{x_k}\eta^{y_i}_{x_k} + U_{y_k}\eta^{y_i}_{y_k} + U_{z_k}\eta^{y_i}_{z_k} - 2U_{y_i}\xi_t = (\eta^{y_i} - \eta^{y_j})\dot{F}_{ij} + \\
&\quad + (\eta^{y_i} - \eta^{y_k})\dot{F}_{ik} + (y_i - y_j)\ddot{F}_{ij}X(r_{ij}^2) + (y_i - y_k)\ddot{F}_{ik}X(r_{ik}^2),\\
&U_{x_k}\eta^{z_i}_{x_k} + U_{y_k}\eta^{z_i}_{y_k} + U_{z_k}\eta^{z_i}_{z_k} - 2U_{z_i}\xi_t = (\eta^{z_i} - \eta^{z_j})\dot{F}_{ij} + \\
&\quad + (\eta^{z_i} - \eta^{z_k})\dot{F}_{ik} + (z_i - z_j)\ddot{F}_{ij}X(r_{ij}^2) + (z_i - z_k)\ddot{F}_{ik}X(r_{ik}^2),
\end{aligned} \tag{17.1}$$

$$\begin{aligned}
&\xi = b_0t^2 + \gamma t + d,\\
&\eta^{x_i} = b_0x_it + a^{ix_j}x_j + a^{iy_j}y_j + a^{iz_j}z_j + a^{i0}t + d^{x_i},\\
&\eta^{y_i} = b_0y_it + c^{ix_j}x_j + c^{iy_j}y_j + c^{iz_j}z_j + c^{i0}t + d^{y_i},\\
&\eta^{z_i} = b_0z_it + e^{ix_j}x_j + e^{iy_j}y_j + e^{iz_j}z_j + e^{i0}t + d^{z_i},
\end{aligned} \tag{17.2}$$

где

$$\dot{F}_{ik} = \frac{dF\left(r_{ik}^2\right)}{d(r_{ik})^2}, \qquad i \neq j \neq k, \qquad i, j, k = 1, 2, 3;$$

b_0, γ, d, a^{ix_j}, a^{iy_j}, a^{iz_j}, a^{i0}, d^{x_i}, c^{ix_j}, c^{iy_j}, c^{iz_j}, c^{i0}, d^{y_i}, e^{ix_j}, e^{iy_j}, e^{iz_j}, e^{i0}, d^{z_i} — групповые постоянные;

$$X\left(r_{ij}^2\right) = 2(x_i - x_j)(\eta^{x_i} - \eta^{x_j}) + 2(y_i - y_j)(\eta^{y_i} - \eta^{y_j}) + 2(z_i - z_j)(\eta^{z_i} - \eta^{z_j}). \quad (18)$$

Изучение уравнений (17.1), (17.2) распадается на несколько случаев.

а) Пусть уравнение (1) инвариантно относительно оператора (10) . Расщепляя уравнения (17.1) по x_j, y_j, z_j, получаем

$$-2\dot{F}\left(r^2\right) = \ddot{F}\left(r^2\right) r^2. \quad (19)$$

Решением уравнения (19) является функция (4.3).

б) Пусть в уравнении (17.1) $X\left(r_{ik}^2\right) = 0$. Тогда уравнение (1) инвариантно относительно 10-мерной алгебры (3) для любой достаточно гладкой функции F.

в) Если $\ddot{F}_{ij} = 0$, то $F\left(r^2\right) = \lambda_3 r^2 + \delta$. Применяя алгоритм С. Ли [3] к уравнению (1) с потенциалом (4.2), устанавливаем максимальную алгебру инвариантности (7).

г) $X\left(r_{ik}^2\right) = f\left(r_{12}^2, r_{23}^2, r_{31}^2\right)$. Так как η^{x_i}, η^{y_i}, η^{z_i} линейны по x_j, y_j, z_j, то

$$X\left(r_{ik}^2\right) = 2\dot{h}_{ik}\left(r_{ik}^2\right) + 2h_j\left(r_{ij}^2 - r_{kj}^2\right), \qquad h_{ik}, h_j = \text{const}. \quad (20)$$

Если $h_j = 0$, то $\xi = (1-\beta)t$, $\eta^{x_i} = x_i$, $\eta^{y_i} = y_i$, $\eta^{z_i} = z_i$, т.е. уравнение (1) инвариантно относительно оператора (13).

Уравнение для функции $F\left(r^2\right)$ имеет вид

$$\ddot{F}\left(r^2\right) r^2 = \dot{F}\left(r^2\right)(\beta - 1). \quad (21)$$

Решением уравнения (21) является функция (4.4).

Если $h_{ik} = 0$, то $\eta^{v^{jk}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}(v^{jm} - v^{jn})$, т.е. уравнение (1) инвариантно относительно оператора (6). В таком случае функция $F\left(r^2\right)$ должна удовлетворять уравнению

$$\ddot{F}\left(r^2\right) = \lambda_1, \quad (22)$$

решением которого является функция (4.1).

Доказательство теоремы 2 проводится непосредственным применением алгоритма С. Ли [3] к уравнению (1) с потенциалами (4.1)–(4.4).

2. **Интегралы движения.** Для уравнения (1) с потенциалом (4.1) возникает интеграл движения

$$J = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}[(x_a - x_b)\dot{x}_c + (y_a - y_b)\dot{y}_c + (z_a - z_b)\dot{z}_c]. \quad (23)$$

Его существование обусловлено инвариантностью соответствующего лагранжиана относительно оператора (6). Отметим, что в случае $y_a = z_a = 0$, $a = 1, 2, 3$ из формулы (23) получаем первый интеграл для одномерной задачи трех тел, впервые обнаруженный Ю.Д. Соколовым [1], а при $z_a = 0$ — интеграл движения для плоской задачи трех тел, найденный в [2]. Интеграл (23) без использования симметрийных свойств найден в [4].

3. **Частные решения.** Для построения решений уравнения (1) совместим центр тяжести системы трех тел с полюсами системы координат и сделаем следующую замену переменных:

$$
\begin{aligned}
3x_k &= S_1\cos\left(\alpha_1+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_2\cos\left(\alpha_2-\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+\\
&\quad +S_3\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_4\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right),\\
3y_k &= S_1\cos\left(\alpha_1+\frac{2\pi k}{3}\right)+S_2\cos\left(\alpha_2-\frac{2\pi(k+1)}{3}\right)+\\
&\quad +S_3\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_4\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right),\\
3z_k &= S_1\cos\left(\alpha_1+\frac{2\pi(k+1)}{3}\right)+S_2\cos\left(\alpha_2-\frac{2\pi k}{3}\right)+\\
&\quad +S_3\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_4\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

В новых переменных $\{S_1,S_2,S_3,S_4,\alpha_1,\alpha_2\}$ выражение для кинетической энергии принимает вид

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)=\frac{1}{4}\Bigg[\dot{S}_1^2+\dot{S}_2^2+\dot{S}_3^2+\dot{S}_4^2+(S_1\dot{\alpha}_1)^2+(S_2\dot{\alpha}_2)^2+\\
&\quad +\left(S_3^2+S_4^2\right)\left(\frac{\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2}{2}\right)^2+(\dot{S}_3S_4-S_3\dot{S}_4)(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Потенциал взаимодействия (3) зависит только от S_i, $i=1,2,3,4$:

$$
\begin{aligned}
U &= \lambda_1\left[r_{12}^4+r_{23}^4+r_{31}^4\right]+\lambda_2\left[r_{12}^2+r_{23}^2+r_{31}^2\right]=\frac{3}{2}\lambda_2\left[S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right]+\\
&+\lambda_1\left[\frac{3}{4}\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)^2+\frac{3}{8}\left(S_4^2-S_3^2-2S_1S_2\right)^2+\frac{3}{2}(S_3S_4)^2\right].
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ddot{S}_1-\frac{1}{2}S_1\dot{\alpha}_1^2=-\frac{\partial U}{\partial S_1},\qquad \frac{1}{2}\ddot{S}_2-\frac{1}{2}S_2\dot{\alpha}_2^2=-\frac{\partial U}{\partial S_2},\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{S}_3+\frac{1}{4}S_4(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)\right]-\frac{1}{2}S_3\left(\frac{\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\dot{S}_4(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)=-\frac{\partial U}{\partial S_3},\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{S}_4+\frac{1}{4}S_3(\dot{\alpha}_2-\dot{\alpha}_1)\right]-\frac{1}{2}S_4\left(\frac{\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\dot{S}_3(\dot{\alpha}_2-\dot{\alpha}_1)=-\frac{\partial U}{\partial S_4},\\
&\frac{d}{dt}\left[S_1^2\dot{\alpha}_1+\frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\dot{S}_3S_4-S_3\dot{S}_4)\right]=0,\\
&\frac{d}{dt}\left[S_2^2\dot{\alpha}_1+\frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot{\alpha}_2-\dot{\alpha}_1)+\frac{1}{2}(S_3\dot{S}_4-\dot{S}_3S_4)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Отметим, что если положить в уравнениях (27) $S_3 = S_4 = 0$, то приходим к уравнениям, полученным в [2] для плоской задачи трех тел.

Если предположить, что S_1, S_2, S_3, S_4, $\dot\alpha_1$, $\dot\alpha_2$ постоянны, то в этом случае система дифференциальных уравнений (27) сводится к системе алгебраических уравнений

$$
\begin{gathered}
S_1\dot\alpha_1^2 = \lambda_1\left[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_1+\frac{3}{2}\left(2S_1S_2+S_3^2-S_4^2\right)S_2\right]+3\lambda_2S_1,\\
S_2\dot\alpha_2^2 = \lambda_1\left[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_2+\frac{3}{2}\left(2S_1S_2+S_3^2-S_4^2\right)S_1\right]+3\lambda_2S_2,\\
S_3(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)^2 = 8\lambda_1\Big[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_3+\\
+\frac{3}{2}\left(2S_1S_2+S_3^2-S_4^2\right)S_3+3S_3S_4^2\Big]+24\lambda_2S_3,\\
S_4(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)^2 = 8\lambda_1\Big[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_4+\\
+\frac{3}{2}\left(S_4^2-S_3^2-2S_1S_2\right)S_4+3S_3^2S_4\Big]+24\lambda_2S_4,\\
S_1^2\dot\alpha_1+\frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)=C_1,\qquad S_2^2\dot\alpha_2+\frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot\alpha_2-\dot\alpha_1)=C_2,
\end{gathered}
\tag{28}
$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Разрешая систему (28), получаем частные решения уравнения (32), а значит, и пространственной задачи трех тел (1).

1. Соколов Ю.Д., *ДАН*, 1945, **46**, № 3, 99–102.
2. Егервари Е., *ДАН*, 1947, **55**, № 9, 805–807.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978, 400 с.
4. Газархи Л.А., *Укр. мат. журн.*, 1956, **8**, № 1, 5–11.

New symmetries and conservation laws for electromagnetic fields

A.G. NIKITIN, W.I. FUSHCHYCH, V.A. VLADIMIROV

It is well known that classical conservation laws of energy, momentum, angular momentum and center-of-energy movement of the electromagnetic field are the consequences of the Maxwell equations invariance with respect to Poincare transformations. However, the relativistic invariance does not exhaust all symmetry properties of these equations. A natural question arises whether there exist any other conservation laws for electromagnetic fields different from those above. One could expect a positive answer to this question to be obtained provided that Maxwell equations possess an additional symmetry different from the relativistic and conformal invariances, because the symmetry under the proper conformal transformations does not lead to any new conserved quantities [1]. We will show in this paper that electromagnetic field equations do possess an additional (nongeometric) symmetry with respect to the $GL(2)\otimes GL(2)$ group, which gives rise to new conservation laws.

1. It is well known [2] that the maximal symmetry group of Maxwell equations

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\qquad \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\operatorname{rot}\boldsymbol{E},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0 \tag{1}$$

in the class of local transformations is the $C(1,3)\otimes\mathcal{H}$ Lie group where $C(1,3)$ is a 15-parameter conformal group [3, 4] and $\mathcal{H}$ is one-parameter Larmore–Heaviside–Rainich transformation group [5–7]:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}\cos\varphi+\boldsymbol{H}\sin\varphi,\\ &\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}\cos\varphi-\boldsymbol{E}\sin\varphi.\end{aligned}\tag{2}$$

In 1970 a method was proposed (hereafter cited as the non-Lie method) in which no restrictions are imposed on the order of operators available by systems of differential equations under consideration [8, 9]. By means of this method the existence of additional invariances was established for many important equations of relativistic and nonrelativistic physics [10–16]. As for the electromagnetic field equations, the results of the investigations of their symmetry properties obtained within the framework of the non-Lie method are formulated below in Theorems 1 and 2.

Let us rewrite Eqs.(1) in matrix form:

$$\begin{aligned}&L_1\psi=0,\qquad L_1=i\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p},\\ &L_2=0,\qquad L_2=p_1-\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1,\qquad \psi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3}$$

where

$$S_a=\begin{pmatrix}\hat{S}_a & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{S}_a\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=i\begin{pmatrix}\hat{0} & -\hat{1}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix},\qquad a=1,2,3,\tag{4}$$

in Group-Theoretical Methods in Physics, Harwood, Harwood Academic Publishers, 1985, P. 497–505.

$\hat{1}$ and $\hat{0}$ are three-dimensional units and zero matrices, respectively, S_a are spin matrices which correspond to spin $s = 1$, $(\hat{S}_a)_{bc} = i\varepsilon_{abc}$. Let us denote the set of basic elements of a finite-dimensional Lie algebra by $\{Q_A\}$, $A = 1, 2, \ldots, j$. The $\{Q_A\}$ form the invariance algebra (IA) of Maxwell equations if for every $A = 1, \ldots, j$ operator Q_A is defined on the set of solutions of Eq.(3) and transforms this set into itself, i.e., the following equations hold:

$$L_1 Q_A \Psi = 0, \qquad L_2 Q_A \Psi = 0, \tag{5}$$

where Ψ is any solution of system (3). As an example of symmetry algebra of Eq.(3) we have the well-known 16-dimensional Lie algebra of the $C(1,3) \otimes \mathcal{H}$ group. Yet the Maxwell equations possess certain additional symmetry stated by the following theorem.

Theorem 1. *The Maxwell equations are invariant under the nine-dimensional Lie algebra A_8, basic elements of which have the form*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sigma_3 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} D, \qquad Q_2 = i\sigma_2, \qquad Q_3 = \sigma_1 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} D, \\ &Q_{3+a} = i\sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} Q_a, \qquad Q_7 = 1, \qquad Q_8 = i\sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad a = 1,2,3, \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$D = \sum_{a\neq b\neq c} \left[\left(p_a^2 p_b^2 + p_a^2 p_c^2 - p_b^2 p_c^2\right)(1 - S_a) + p_1 p_2 p_3 S_a S_b p_c\right]\varphi^{-1}, \tag{7}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_1^4\left(p_2^2 - p_3^2\right) + p_2^4\left(p_1^2 - p_3^2\right) + p_3^4\left(p_1^2 - p_2^2\right)\right]^{1/2}, \tag{8}$$

and σ_a are the Pauli matrices commuting with $\hat{S}_a$, $\hat{p}_a = p_a/p$, $p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2}$. Operators (6) satisfy the following relations:

$$\begin{aligned} &[Q_a, Q_b] = -[Q_{3+a}, Q_{3+b}] = -\varepsilon_{abc} Q_c, \qquad a,b,c = 1,2,3, \\ &[Q_{3+a}, Q_b] = \varepsilon_{abc} Q_{3+c}, \qquad [Q_7, Q_A] = [Q_8, Q_A] = 0, \qquad A = 1,2,\ldots,8 \end{aligned} \tag{9}$$

forming an algebra isomorphic to Lie algebra of the $GL(2) \otimes GL(2)$ group.

Proof. One can convince oneself that the statements of Theorem 1 are true by straightforward calculation making use of the following relations:

$$\begin{aligned} &D\sigma_a = \sigma_a D, \qquad D\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} D, \\ &D(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2 = D - f(p_1 + ip_2 S_3 - ip_3 S_2) S_2, \qquad f = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_3^2 p_2^2, \\ &D^2 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad L_2 \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = 0, \qquad [D, L_2] = -p_2^2 p_3^2 L_2. \end{aligned} \tag{10}$$

It is obvious that the additional symmetry algebra of Eq.(3) could not be obtained within the framework of the classical Lie method, which is based on the infinitesimal approach.

Since Q_A in (6) are integro-differential operators, we give the corresponding finite transformations for the Fourier components of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$. From the relation

$$\tilde{\psi} \to \tilde{\psi}' = \exp(\theta_A Q_A)\tilde{\psi}, \qquad \tilde{\psi} = (2\pi)^{-3/2}\int \psi(x)\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})d^3x \tag{11}$$

we have

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cos\theta_1 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_1,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cos\theta_1 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_1,\end{aligned} \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cos\theta_2 + \tilde{H}_a \sin\theta_2,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cos\theta_2 - \tilde{E}_a \sin\theta_2,\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_3,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_3,\end{aligned} \tag{12c}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cosh\theta_4 - D_{ab}\tilde{H}_b \sinh\theta_4,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cosh\theta_4 - D_{ab}\tilde{E}_b \sinh\theta_4,\end{aligned} \tag{12d}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cosh\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sinh\theta_5,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cosh\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sinh\theta_5,\end{aligned} \tag{12e}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cosh\theta_6 - D_{ab}\tilde{E}_b \sinh\theta_6,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cosh\theta_6 + D_{ab}\tilde{H}_b \sinh\theta_6,\end{aligned} \tag{12f}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \exp\theta_7,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \exp\theta_7,\end{aligned} \tag{12g}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_a \to \tilde{E}'_a &= \tilde{E}_a \cos\theta_8 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sin\theta_8,\\ \tilde{H}_a \to \tilde{H}'_a &= \tilde{H}_a \cos\theta_8 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sin\theta_8,\end{aligned} \tag{12h}$$

where θ_A $(A = 1, 2, \ldots, 8)$ are real parameters,

$$\begin{aligned}&D_{ab} = \left[\delta_{ab}\left(p_a^2 p_d^2 + p_a^2 p_e^2 - p_d^2 p_e^2\right) + p_1 p_2 p_3 p_c\right]\varphi^{-1},\\ &c \neq d \neq e, \qquad c \neq e, \qquad c \neq a, b.\end{aligned} \tag{13}$$

Using the inverse Fourier transformation one can obtain the finite transformations generated by (6) in the basic representation:

$$\begin{aligned}H'_a(t,\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\int \tilde{H}'_a \exp(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})d^3p,\\ E'_a(t,\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\int \tilde{E}'_a \exp(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})d^3p.\end{aligned} \tag{14}$$

Transformations (12a)–(12h) form the representation of the $GL(2) \otimes GL(2)$ group which includes the one-parameter HLR group (2).

2. Recently [16] within the framework of the non-Lie approach, group properties of the equations for vector-potential of the electromagnetic field,

$$\begin{aligned}&\Box A_\mu = 0,\\ &\partial_\mu A^\mu = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,\end{aligned} \tag{15}$$

were investigated. The additional symmetry of Eqs.(15) proved to be even higher than that of the Maxwell equations.

Theorem 2. *Equations (15) are invariant under the Lie algebra of the* $GL(3)$ *group. Basic elements of this symmetry algebra on the set of solutions of Eqs.(15) have the form*

$$(F_{ab}A)^{\mu} = \frac{1}{p^2}\left(g_0^{\mu} p_0 p_a - g_a^{\mu} p_0^2\right) A_b, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{16}$$

where g_{ν}^{μ} *is the metric tensor of the Minowski space and* $g_{\nu\nu} = (1, -1, -1, -1)$*;* $1/p^2$ *is the integral operator defined as*

$$\frac{1}{p^2} f(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{f(t, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 x'. \tag{17}$$

The proof of this theorem is given in Ref. [16]. Obviously, the additional symmetry algebra of Eqs.(15) generated by nonlocal operators (16) cannot be obtained in the classical Lie approach.

3. What conservation laws correspond to the symmetries stated by Theorems 1 and 2? Since basic elements of the additional symmetry algebras are nonlocal operators the traditional method for construction of conserved quantities based on the Noether theorem is of no use. Another possibility of building up the conserved quantities is to put every element of the invariance algebra of Maxwell equations into correspondence with a four-vector:

$$J_0^A = \psi^+ M Q^A \psi, \qquad J_a^A = -\psi^+ M \sigma_2 S_a Q^A \psi \tag{18}$$

satisfying the continuity equation

$$\partial_{\mu} (J^A)^{\mu} = 0, \tag{19}$$

where ψ is vector-function from (3), σ_2, S_a are matrices introduced in (4), M is an operator which satisfies the following equation

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}, M \right] \psi = 0. \tag{20}$$

Employing the Gauss–Ostrogradsky theorem we can conclude from (19) and (20) that the integrals

$$\langle Q_A \rangle = \int d^3 x J_A^0 = \int d^3 x \psi^+ M Q_A \psi \tag{21}$$

are independent of time. In this way it is possible to obtain all classical conserved quantities as well as new conserved quantities which correspond to the non-Lie symmetry of Maxwell equations. Operator M must be chosen in accordance with the demand for integrals (21) to have a clear physical interpretation. The following operator does satisfy this requirement:

$$M = \frac{p_0}{p} = -\frac{\sigma_2 \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p}}{p^2}, \tag{22}$$

where $1/p^2$ is the integral operator defined in (17). As a matter of fact, substituting (22) into (21) and choosing $Q_A = \{P_{\mu}, J_{\mu\nu}\}$, where P_{μ} and $J_{\mu\nu}$ are basic elements of the Poincaré algebra, we obtain classical expressions for energy, momentum, angular momentum and center-of-energy of the electromagnetic field. Inserting (6) into (21) one obtains

$$\langle Q_1\rangle = \int \frac{d^3p}{\varphi p}\left\{ f\tilde{\boldsymbol{E}}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{H}}(t,\boldsymbol{p}) + \sum_a p_a^2 \dot{\tilde{E}}_a(t,-\boldsymbol{p})\dot{\tilde{H}}_a(t,\boldsymbol{p})\right\}, \tag{23a}$$

$$\langle Q_2\rangle = \int \frac{d^3p}{2p^2}\left\{\boldsymbol{p}\cdot\left[\tilde{\boldsymbol{E}}(t,-\boldsymbol{p})\times\tilde{\boldsymbol{E}}(t,\boldsymbol{p}) + \tilde{\boldsymbol{H}}(t,\boldsymbol{p})\times\tilde{\boldsymbol{H}}(t,\boldsymbol{p})\right]\right\}, \tag{23b}$$

$$\begin{aligned}\langle Q_3\rangle = \int \frac{d^3p}{2\varphi p}\left\{\sum_a f\left[\tilde{H}_a(t,\boldsymbol{p})\tilde{H}_a(t,-\boldsymbol{p}) - \tilde{E}_a(t,\boldsymbol{p})\tilde{E}_a(t,-\boldsymbol{p})\right] + \right.\\ \left. + \sum_a p_a^2\left[\dot{\tilde{H}}_a(t,\boldsymbol{p})\dot{\tilde{H}}_a(t,-\boldsymbol{p}) - \dot{\tilde{E}}_a(t,\boldsymbol{p})\dot{\tilde{E}}_a(t,-\boldsymbol{p})\right]\right\},\end{aligned} \tag{23c}$$

$$\langle Q_8\rangle = \int \frac{d^3p}{2p}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}(t,\boldsymbol{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}(t,-\boldsymbol{p}) + \tilde{\boldsymbol{H}}(t,\boldsymbol{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{H}}(t,-\boldsymbol{p})\right], \tag{23d}$$

$$\langle Q_4\rangle = \langle Q_5\rangle = \langle Q_6\rangle = \langle Q_7\rangle = 0, \qquad \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{23e}$$

Thus, the existence of additional symmetry algebras for the electromagnetic field equations gives rise to the new conserved quantities independent of classical ones.

In a similar way we can show that the additional symmetry (16) of Eqs.(15) leads us to the following conserved quantities:

$$\tilde{S}_a = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\int A_b(t,\boldsymbol{x})\overleftrightarrow{p_0}A_c(t,\boldsymbol{x})d^3x, \quad a,b,c = 1,2,3, \tag{24a}$$

$$\tilde{\Sigma}_{ab} = \frac{1}{2}\int\left\{A_a(t,\boldsymbol{x})\overleftrightarrow{p_0}\left[\frac{p_0}{p}A_b(t,\boldsymbol{x})\right] + A_b(t,\boldsymbol{x})\overleftrightarrow{p_0}\left[\frac{p_0}{p}A_a(t,\boldsymbol{x})\right]\right\}d^3x. \tag{24b}$$

Formulas (24a) express the spin of the vector field [17]. The time independence of spin components (24a) was originally derived by consideration of properties of energy-momentum tensor of the vector fields having nothing to do with their symmetry properties. Now we see that conservation of (24a) as well as the existence of six new conserved quantities (24b) are the consequences of the non-Lie symmetry of Eqs.(15).

In conclusion we discuss briefly a physical meaning of the new conserved quantities (23) and (24). It is readily shown that if a monochromatic wave solution of Eq.(1) is substituted into the following expression

$$K_a = \frac{\langle Q_a\rangle}{\langle Q_8\rangle}, \qquad a = 1,2,3, \tag{25}$$

the Stokes parameters describing polarization of this wave are obtained. In general integrals (23a)–(23d) can be regarded as a generalization of these parameters for arbitrary solutions of Maxwell equations. Equations (24) can be reduced to matrix elements of the polarization density matrix for the field with nonzero spin provided that (A_μ) is the solution of (15) corresponding to a monochromatic wave.

Thus, the non-Lie symmetry of the equations of motion can be employed to describe the polarization properties of the electromagnetic field. The analogous statement holds in the case of any relativistic equation for particles with non-zero mass and arbitrary spin, e.g., the additional symmetry of the Dirac equation [8, 9] was used in Ref. [18] to describe polarization of the electron. More extended discussion of non-Lie symmetry of Maxwell equations is given in Refs. [19, 20].

1. Plybon D., *Am. J. Phys.*, 1974, **42**, 998.
2. Ibragimov N.H., *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1968, **178**, 566.
3. Bateman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223.
4. Cunningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
5. Heaviside O., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423.
6. Larmor I., Collected Papers, London, 1928.
7. Rainich G.I., *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
8. Fushchych W.I., Preprint, ITP-70-32E, Kyiv, 1970.
9. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **7**, 3.
10. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, 508.
11. Nikitin A.G., Segeda Ju.N., Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1976, **29**, 82.
12. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A*, 1979, **12**, 747.
13. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1979, **24**, 220.
14. Fushchych W.I., Nakonechny V.V., *Ukr. Mat. Zh.*, 1980, **32**, 267.
15. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Czech. J. Phys. B*, 1982, **32**, 476.
16. Fushchych W.I., Vladimirov V.A., *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1981, **257**, 1105.
17. Bogoliubov N.N., Shirkov D.V., Introduction to quantum field theory, Moscow, Nauka, 1973.
18. Strazhev V.I., *Vesti Akad. Sci. Byelorus. SSR*, 1981, **5**, 75.
19. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Fiz. Elem. Chast. i Atom. Jadra*, 1983, **14**, 5.
20. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetry of Maxwell equations, Kiev, Naukova Dumka, 1983.

Contents