# Clifford–algebraische Formulierung und Regularität der Quantenfeldtheorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Bertfried Fauser
aus Speyer
1996

Tag der mündlichen Prüfung: 1. April 1996
Dekan: Prof. Dr. H. Herold
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Harald Stumpf
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Heinz Krüger
3. Berichterstatter: Prof. Dr. Peter Kramer

# Zusammenfassung

Bertfried Fauser

Clifford–algebraische Formulierung und Regularität der Quantenfeldtheorie

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Clifford–algebraischen Formulierung nichtlinearer fermionischer Quantenfeldtheorien. Sie besteht aus drei Teilen.

In Teil I wird ein spezielles Verfahren angegeben, das mittels eines Hilfsfeldansatzes zu einer Theorie mit höheren Ableitungen führt. Durch die Verwendung diskreter Symmetrien wird ein Ansatz mit vier Hilfsfeldern gefunden, der zu einer hinreichenden Regularisierung der Theorie führt. Die Quantisierung und Interpretation dieser Theorie wird diskutiert. Yang–Baxter–Symmetrie und Tripelprodukte erlauben es, einen regulären Vertex zu finden, der im nichtrelativistischen Grenzfall zur BCS–Theorie führt.

In Teil II entwickeln wir eine neue, geometrisch motivierte Sicht auf die fermionische Feldquantisierung. Clifford– und Graßmannalgebren, sowie ihre Verbindung zur funktional formulierten Quantenfeldtheorie, werden ausführlich diskutiert. Es werden drei verschiedene Möglichkeiten angegeben, Cliffordalgebren zu konstruieren. Cliffordalgebren mit nichtsymmetrischen Bilinearformen werden ausführlich untersucht. Die gewonnenen Erkenntnisse werden dann benutzt, um die geometrische Interpretation der Feldquantisierung zu erläutern. Dabei sind die Feldoperatoren Elemente einer Cliffordalgebra. Sie wirken als Endomorphismen auf die Graßmannunteralgebra der Zustände. Der Antikommutator der Feldoperatoren legt die polare (symmetrische) Bilinearform zur quadratischen Form der Cliffordalgebra und damit die Metrik im Funktionalraum fest. Der Propagator parametrisiert die Clifford–algebraische Einbettung der Graßmannunteralgebra der Zustände. Inäquivalente Zustände werden so konstruktiv beschrieben. Propagator und Antikommutator bilden die nichtsymmetrische Bilinearform der Cliffordalgebra. Die Feldquantisierung erweist sich somit als Geometrisierung.

Teil III faßt die Ergebnisse zusammen und vergleicht die Teile I und II. Dabei wird eine neue Interpretation der Hilfsfelder als Spaltenspinoren eines Operatorspinors gegeben. Großer Wert wird auf die neu gewonnene Vereinheitlichung der mathematischen Methoden in der Physik gelegt. Im Ausblick werden weitere Schritte skizziert, die zu einer vollständig geometrischen Clifford–algebraischen und damit regulären Quantenfeldtheorie führen sollen.

## Abstract

BERTFRIED FAUSER

### Clifford Algebraic Formulation and Regularity of Quantum Field Theories

This work is concerned with the Clifford–algebraic formulation of nonlinear fermionic field theories and is divided into three parts.

Part I provides the development of a special method, which by an Ansatz of auxiliary fields gives a connection to theories with higher order derivatives. The relation of these auxiliary fields and the discrete symmetries leads to a sufficiently regular theory with four auxiliary fields. The quantization and interpretation of this theory is shown in the following thesis. With the help of Yang–Baxter symmetries and triple–products a regular vertex function is obtained, which yields in the non–relativistic limit the BCS–Theory.

Part II develops a new, geometric view of fermionic field quantization. The relation between Clifford and Graßmann algebra to functional quantum field theory is dealt with in considerable length. By the discussion of three possibilities in constructing Clifford algebras, especially for Clifford algebras exhibiting non–symmetric bilinear forms, a new interpretation of field quantization is reached. The main conclusions are: The field operators are elements of a Clifford algebra, they act as endomorphisms on the Graßmann subalgebra of states. The anticommutator of the field operators fixes the polar bilinear form of the quadratic form of the Clifford algebra. The propagator gives a parameterization of the inequivalent embedding of the Graßmann subalgebra of states. This provides us with a constructive way to deal with inequivalent states. Thus, the propagator and the anticommutator build up the non–symmetric bilinear form of the desired Clifford algebra and the field quantization is shown to be of geometric origin.

Part III gives a conclusion and comparison of the results obtained. A new interpretation of the nature of auxiliary fields as column–spinors of operator–spinors is given. Most emphasis is laid on the unifying power of Clifford algebraic methods. The outlook provides a short comment on further steps to be done to complete the geometric point of view towards a regular theory.

STILLE – DER ZIKADENLÄRM
DRINGT
EIN IN DIE FELSEN

BASHŌ[1]

# Vorwort

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die (fermionische) Quantenfeldtheorie mit Clifford– und Graßmann–algebraischen Methoden neu zu formulieren. Der Titel „Clifford–algebraische Formulierung und Regularität der Quantenfeldtheorie“ soll daher als Programm und Ziel gleichermaßen verstanden werden.

Die funktionale Quantenfeldtheorie, wie sie von Stumpf [STUM 94] entwickelt wurde, bildet die Grundlage und den Startpunkt für unsere Überlegungen. Ausgehend von der Heisenbergschen Idee einer nichtlinearen Spinorfeldtheorie wird dort eine Methode zur Ableitung effektiver Dynamiken angegeben. Diese „schwache Abbildung“ (auf die effektive, funktional formulierte Theorie) kann nur angegeben werden, wenn alle zu berechnenden Integrale endlich bleiben. Die Abbildung wurde jedoch schon auf die renormierbare Quantenelektrodynamik ausgeweitet [STUM 93].

Für die Herleitung von effektiven Theorien spielt die Regularität der Ausgangsgleichung eine noch viel größere Rolle als gewöhnlich.

Auch vom ästhetischen Standpunkt aus ist es unbefriedigend, daß bis heute keine, im mathematischen Sinne existierende, wechselwirkende Feldtheorie in vier Dimensionen gefunden wurde. Ein dreiviertel Jahrhundert nach den ersten Versuchen eine Quantenfeldtheorie zu formulieren, kann dieser Mißstand nicht mehr bemäntelt werden. Die feldtheoretischen Probleme sind nicht solcher Art, wie einst die der Diracschen Deltafunktion. Jahrzehnte sind verstrichen und trotz intensiver Bemühungen von Mathematikern und Physikern ist es nicht gelungen, über die freie Theorie hinaus einen Existenzbeweis zu führen [GLIM 81, HAAG 92].

Man weiß schon lange um das Problem der inäquivalenten Darstellungen von Quantenfeldtheorien. Trotzdem überwiegen störungstheoretische Ansätze, die auf den wechselwirkungsfreien Fockzustand bezogen sind. Dies zeigt bereits in der Formulierung der Theorie eine Inkonsistenz auf.

Der funktionale Zugang wurde schon früh benutzt. Im Unterschied zu Operatormethoden bietet sich hier die Möglichkeit, mit Matrixelementen zu arbeiten. Dadurch ist die Theorie von vornherein auf einen physikalischen Vakuumzustand bezogen. Die funktionale Technik erlaubt es nun, ganze Hierarchien von Matrixelementen in einen Funktionalzustand zusammenzufassen. Hier wird der Vakuumzustand nicht aufgeprägt, sondern kann aus der Theorie und ihrer Dynamik bestimmt werden.

[1] Aus [KRUS 94]

Viele der ubiquitären störungstheoretischen Modelle liefern überraschend gute Ergebnisse, obwohl sie im obigen Sinne nicht konsistent sind. Diese irritierende Tatsache macht eine Analyse der genannten Problematik überfällig.

Ausgehend von dem Versuch, eine Eichtheorie quantenfeldtheoretisch korrekt zu beschreiben, ergab sich die Notwendigkeit, höhere Ableitungen genauer zu untersuchen. Neue Ergebnisse zur Quantenelektrodynamik finden sich in [Stum 96], die QCD ist in Vorbereitung. In Kapitel 4 wird die Clifford–algebraische Behandlung der Feldtheorie vorgestellt. Sie erweist sich auch für Eichtheorien als Schlüssel zum Verständnis.

In Teil I dieser Arbeit werden heuristische Methoden benutzt. Ausgehend von einer kurzen Betrachtung der höheren Ableitungen und der damit verbundenen nichtstörungstheoretischen Pauli–Villars–Regularisierung wird in Kapitel 1 mittels eines *Ansatzes* versucht, die Natur der Hilfsfelder zu ergründen. Dabei stößt man auf die ungewöhnliche Interpretation dieser Hilfsfelder als Subfelder einer thermodynamischen Theorie. Obwohl die Einführung chemischer Potentiale anstelle der Massenparameter in der Quantenfeldtheorie unüblich ist und keine wirkliche Erklärung liefert, kann innerhalb des heuristischen Vorgehens keine andere Interpretation angegeben werden. Diese Analyse wird in Kapitel 3 wieder aufgegriffen.

In Kapitel 2 wird kurz skizziert, wie die Theorie der Tripelsysteme und die eng damit verwandte Yang–Baxter–Symmetrie in einem einfachen Beispiel zu einem regulären Vertex führt. Die Vertexfunktion ist zudem in der nichtrelativistischen BCS–Theorie relevant.

Beide heuristische Methoden basieren stark auf algebraischen Konzepten und Anschauungen. Es scheint daher angebracht, eine grundlegende Neuformulierung dieser Ansätze im algebraischen Bild zu versuchen. Damit einher geht aber eine grundlegend neue Sichtweise der Feldquantisierung und der Formulierung einer (fermionischen) Quantenfeldtheorie. In Teil II dieser Arbeit wird diese Sichtweise entwickelt.

Kapitel 3 stellt die notwendigen Begrifflichkeiten der Clifford– und Graßmannalgebren bereit. Dabei reicht es nicht aus, den Standarddarstellungen zu folgen. Es müssen subtile Unterschiede herausgearbeitet werden. Sehr wichtig für das Verständnis wird die Unterscheidung von algebraischer, geometrischer und physikalischer Äquivalenz. Gerade diese Unterschiede ermöglichen es dann in Kapitel 4, die hier entwickelte Methode erfolgreich auf ein nichtlineares Spinorfeldmodell anzuwenden.

Das Vorgehen ist universell gültig und kann in analoger Form auch für Bosonen oder Kopplungstheorien durchgeführt werden [Faus 95c]. Das spezielle fermionische Modell ist *ein* Beispiel für diese Methode.

In Teil III der Arbeit werden die recht unterschiedlichen Teile I und II zusammengefaßt. Die Ergebnisse werden verglichen und nochmals kompakt angegeben. Schließlich werden im Ausblick in aller Kürze die weiteren Schritte erläutert, die im algebraischen Bild nötig sind, um eine universelle Sicht auf die Quantenfeldtheorie zu entwerfen.

Ein Hauptanliegen dieser Arbeit besteht darin, der begrifflichen Verwirrung in der modernen Physik durch die (Weiter–) Entwicklung des geometrischen

Kalküls auf die Quantenfeldtheorie entgegenzuwirken. Ausgehend von Graßmann und Clifford hat dieser Kalkül vor allem durch das Werk David Hestenes' eine integrative Kraft entwickelt, die nahezu alle Gebiete der Physik und sehr viele aus der Mathematik umschließt. Hestenes nennt die Cliffordalgebra daher eine „unified language for mathematics and physics". Der Cliffordkalkül umfaßt alle modernen Begriffsbildungen, den Formenkalkül, die Supersymmetrie, die q–Deformation und weitere. Im folgenden werden zudem viele quantenfeldtheoretische Begriffsbildungen hinzugefügt. Die kohärente Formulierung ermöglicht ein gegenseitiges Befruchten der verschiedenen Gebiete.

Die vorliegende Arbeit wurde erst durch ein langwieriges und intensives Studium vieler Quellen möglich. Insbesondere das Ringen um die Bedeutung der Quantentheorie nahm viel Raum ein. In der Bibliographie ist daher angegeben, wo welche Arbeiten im Text zitiert wurden, um eine Gewichtung der Relevanz zum Text herzustellen. Nichtzitierte Arbeiten sollten jedoch in ihrer Bedeutung für die dem Text zugrundeliegende Sichtweise nicht unterschätzt werden. Besonders erwähnen möchte ich die radikal quantentheoretischen Arbeiten von Fritz Bopp [Bopp 61] bis [Bopp 85b], die die Kommutatorrelationen und den Operatorcharakter der „Erzeuger" und „Vernichter" überdeutlich in den Vordergrund stellen. Ebenso wichtig ist der Einfluß der Werke von Margenau [Marg 76, Marg 84], Stapp [Stap 93], LeShan [LeSh 82], Home und Whitaker [Home 92], Schrödinger [Schr 58], Heisenberg [Heis 58], Louis de Broglie [Brog 71, Brog 90], Frescura und Hiley [Fres 80], Bell [Bell 87], Born und Einstein [Born 71], Wigner [Wign 55] und weiteren.

Die Arbeit kann an zwei Stellen sinnvoll fortgeführt werden. Eine ausführliche Diskussion der Quantisierung nichtlinearer Modelle sollte folgen. In einer frühen Arbeit hat Einstein [Eins 17] bereits darauf hingewiesen, daß die Invariante–Torus–Struktur für die Quantisierung benutzt werden *muß*. Nichtlineare und damit meist auch nichtintegrable klassische Systeme besitzen keine solche Phasenraumstruktur [Abra 78, Arno 78]. Es gibt dann keine topologischen Argumente für eine Quantisierung. Hier sei auf die Diskussion dieser Sachverhalte bei Gutzwiller verwiesen [Gutz 90].

Die zweite vielleicht noch wichtigere Aufgabe wäre ein abschließender Beweis der Regularität des aufgeführten nichtlinearen Spinorfeldmodelles. Um innerhalb des algebraischen Bildes einen solchen Beweis führen zu können, müßte das analytische Verhalten der Funktionalzustände untersucht werden, siehe dazu Teil III, Ausblick. Es hätte den Rahmen der Arbeit bei weitem gesprengt, nach der mühsamen Umformulierung der Quantenfeldtheorie nun in die diffizile monogenetische Funktionentheorie einzudringen. In der Mathematik wird diese Theorie gegenwärtig entwickelt [Brac 82, Hest 84, Gilb 91, Dela 92]. Die Anwendung solcher Techniken bleibt somit weiteren Arbeiten vorbehalten. Das Ziel ist freilich ein Existenzbeweis für eine wechselwirkende Quantentheorie.

Um die Arbeit lesbarer zu gestalten, sind **Beispiele** eingefügt worden. **Bemerkungen** beziehen sich auf Gebiete, die entweder mit dem Text nicht in direktem Zusammenhang stehen, oder weisen auf „Fallen" hin. Der eilige Leser kann Kapitel 1 und 2 übergehen und die Arbeit ab Kapitel 3 selbstkonsistent lesen. Als Standardreferenz für die Nomenklatur werden im Spinorfeldmodell

[Stum 94, Kers 94] und im algebraischen Bild die jeweils im Text zitierten Arbeiten verwendet.

## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei all denen bedanken, die wissentlich oder nichtwissentlich die Entstehung dieser Arbeit ermöglicht haben.

Herrn Prof. Harald Stumpf möchte ich dafür danken, daß er mich Physik und Quantenfeldtheorie auf eine überaus klare Weise gelehrt und mir so tiefe Einblicke gewährt hat. Ebenso danke ich ihm dafür, daß er mir große Freiheiten ließ, mit dem erlernten Material eigenverantwortlich umzugehen.

Den Arbeitsgruppenmitgliedern danke ich für ihre Leidensfähigkeit, auch emotionsgeladene Diskussionen auszuhalten. Besonders erwähnen möchte ich Dr. Winfried Pfister, Dr. Ralf Kerschner und Thomas Borne, sowie Jürgen Sand.

Für wesentliche Korrekturen meiner Anschauungen bin ich Herrn Priv. Doz. Heinrich Saller, Herrn Dr. Claude Daviau und Herrn Prof. Zbigniew Oziewicz Dank schuldig.

Die zum Teil schwierige Suche nach ausgefallener Literatur führte durch die zuvorkommende Hilfe und Findigkeit von Frau Dipl. Bibl. Susanne Hempel regelmäßig zum Erfolg.

Die Arbeit wäre ohne die tatkräftige und finanzielle Unterstützung durch meine Frau Mechthild Riehle, sowie ihre wohltuende Wirkung auf meine Psyche und mein Schaffen, nie entstanden. Auf daß dies anhalte!

Finaly I would like to thank David Chisholm for the kind permission of reproducing the Clifford cartoons.

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I

# Heuristische Überlegungen

# Kapitel 1

# Dynamische Regularität

## 1-1 Vorüberlegung

In diesem Teil der Arbeit sollen heuristische Ansätze zur Regularisierung durch Hilfsfelder besprochen werden. Ungeachtet der vielen anderen Methoden, welche im Lauf der Zeit entwickelt wurden, sollen vor allem die höheren Ableitungen untersucht werden [Stum 94]. Solche Ableitungen wurden ausgiebig und nutzbringend in den algebraisch motivierten Auswertungen des Spinorfeldmodells von Stumpf und Mitarbeitern benutzt. Hier soll jedoch das Augenmerk nicht auf die Anwendung, sondern auf die prinzipielle Notwendigkeit einer Regularisierung gerichtet werden.

Jede wechselwirkende Quantenfeldtheorie ist mit Regularitätsproblemen konfrontiert. Obwohl schon durch die Entwicklung der Quantenmechanik klar wurde [Jord 34, Birk 36], daß diese nicht zur Beschreibung von unendlichen Vielteilchensystemen oder Feldern geeignet war, hat erst die Renormierungstheorie zu einem quantitativen Durchbruch der Quantenfeldtheorie geführt. Dabei spielte wohl ihr Erfolg eine entscheidende Rolle. Die Quantenelektrodynamik (QED) ist jedoch die einzige realistische Feldtheorie, die sehr gute quantitative Resultate liefert. Qualitativ bleibt zu bemängeln, daß nur ein störungstheoretischer Zugang besteht und das Gros der Methoden darauf fußt. Das Renormierungskonzept selbst stellt die wichtigste Methode in der Feldtheorie dar.

Selbstwechselwirkungen, also Nichtlinearitäten wie in nichtabelschen Eichtheorien, skalaren $\Phi^4$ Theorien oder in Spinortheorien mit Selbstkopplungen wie Heisenberg [Heis 67], Nambu, Jona-Lasinio [Namb 61a, Namb 61b] oder in der Festkörperphysik das Hubbard Modell [Frad 91], sind nur nicht störungstheoretisch zugänglich. Man kann allenfalls hoffen, in gewissen Regionen der Kopplungsstärke bzw. der Energie mit der Störungstheorie Ergebnisse zu erzielen. Gerade die Quantenchromodynamik läßt sich für starke Kopplungen nicht wie die QED behandeln.

In den Aufsätzen von Stumpf und Mitarbeitern[1] besteht das Hauptanliegen darin, aufzuzeigen, wie aus geeigneten Subfelddynamiken eine effektive Dynamik für zusammengesetzte unter der Dynamik stabile Objekte gewonnen werden kann. Dazu sind mehrere in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie unübliche Schritte notwendig.

Zuerst wird eine Grundgleichung aus pragmatischen Gründen postuliert. Die widerspruchslose Formulierung einer Theorie mit unendlich vielen Teilchen kann

[1] Siehe dazu vor allem [Born 91, Stum 94, Kers 94, Grim 94] und die Literaturangaben darin.

nur mit Erzeugendenfunktionalen geschehen. Dort ist es möglich, eine Quasi–GNS–Konstruktion durchzuführen, die auf dem physikalischen Vakuum beruht. Die Bewegungsgleichungen übersetzen sich im Funktionalraum in Funktionalgleichungen und damit zu Matrixelementhierarchien. Danach ist es notwendig, zusammengesetzte Objekte zu definieren, die komplexe Gebilde darstellen. Drittens wird die Grundgleichung mittels einer sogenannten „schwachen Abbildung" auf effektive Funktionale umgeschrieben [Kers 91]. Die erhaltenen, exakten aber komplizierten Gleichungen werden aus ökonomischen Gründen für Interpretation und Anwendung noch genähert.

Für unsere Überlegungen sind jedoch nur die ersten Schritte von Bedeutung. Zuerst stellt sich die Frage, ob eine nichtlineare quantenfeldtheoretische Gleichung überhaupt formulierbar ist. Betrachten wir im einfachsten Fall ein skalares Feld mit $\Phi^4$ oder ein Spinorfeld mit $\Psi^4$ Kopplung, so ergibt sich das Problem, daß die Feldoperatoren überhaupt nur darstellungsabhängig im mathematischen Sinne existieren. Es mag sogar Darstellungen der Theorie geben, in denen es nicht möglich ist, den Feldoperator mathematisch sauber zu definieren [Haag 92, Murp 90]! Diese Problematik wird ausführlich mit $C^*$–algebraischen Methoden untersucht. Konventionellerweise nehmen jedoch die Physiker die Existenz von Feldoperatoren in einer Darstellung als gegeben an. Somit sind zumindest freie Gleichungen formulierbar, in deren Fockdarstellung der Feldoperator dann auch wirklich existiert [Glim 81].

Nun sieht man leicht an den Kommutatorrelationen, daß Feldoperatoren distributiven Charakter besitzen und somit Produkte von Feldoperatoren nicht wohldefiniert sind[2]. Die Definition der Theorie schreitet mit der Definition bilinearer Ausdrücke fort, welche durch (Anti–) Symmetrieargumente eingeführt werden. Typischerweise betrachtet man einen Strom [Jauc 76] und stellt fest, daß schon das Vakuum eine unendliche Ladung besitzt. Die (Anti–) Symmetrisierung renormiert die Ladung des Vakuums zu Null. Dies ist eine rein physikalische Argumentation und ergibt mathematisch eine neue Theorie. Solche Re– und Neudefinitionen sind leider jedoch in der Quantenfeldtheorie üblich.

Es treten im Wechselwirkungsterm jedoch immer noch Singularitäten auf, die zu divergenten Integralen führen. Benötigt wird nun eine Redefinition der Theorie, welche die Terme in endliche und divergente Anteile aufspaltet. Dabei müssen die divergenten Terme immer vom gleichen Typus sein. Diesen (endlich vielen) divergenten Ausdrücken werden endliche physikalische Konstanten per definitionem zugeordnet. Dieser Prozeß heißt (innerhalb der Störungstheorie) *Renormierung* und bewährt sich überraschenderweise gut in der QED.

Es taucht jedoch (selbst in der QED) noch einmal ein Regularitätsproblem auf, wenn Bindungszustände definiert werden [Stum 93]. Ziel muß es jedoch sein, dies in der Theorie tun zu können und nicht durch externe (Re–) Definitionen, die dann die Theorie erweitern. Will man, wie oben beschrieben, den Versuch unternehmen, zusammengesetzte Objekte und deren dynamische Eigenschaften zu berechnen, so stehen Massen und Kopplungskonstanten nicht mehr

[2] Das Produkt von Distributionen hängt von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen ab und besitzt daher keinen unabhängigen Sinn [Gelf 60].

für Redefinitionen zur Verfügung, sondern müssen berechnet werden, wenn die Theorie überhaupt von Gehalt sein soll!

Es erscheint daher nicht nur vom ästhetischen Standpunkt, sondern vom prinzipiellen Vorgehen her notwendig, alle Definitionen zu Beginn in konsistenter Weise zu treffen und dann mathematisch exakt, d.h. ohne Redefinition schon benutzter Größen, mit der Deduktion fortzufahren.

Hilfsfelder und Counterterme wurden schon früh benutzt, um Theorien zu regularisieren [PAUL 43, PAUL 49]. Allerdings konnten nur lineare Theorien so behandelt werden. Für eine nichtlineare Feldgleichung wurde eine Verallgemeinerung notwendig. Eine solche Verallgemeinerung wird durch die Hilfsfeldregularisierung ermöglicht, wie sie von Stumpf [STUM 82] und Großer [GROSS 83] beschrieben wurde. Dabei ist es wichtig zu beobachten, daß die kanonische Quantisierung der Subfelder zu einer nichtkanonischen Quantisierung des betrachteten Feldes führt. Durch das Verschwinden des Kommutators wird auf elegante Weise das Produktproblem für Operatoren gelöst. Dies wurde schon von Heisenberg untersucht, jedoch ohne ein konkretes Verfahren dafür anzugeben, wie der Quantencharakter des Feldes beschrieben wird [HEIS 67].

Es ergeben sich aber neue Probleme durch die höheren Ableitungen. Einerseits werden die Hilfsfelder (Subfelder), die ein gekoppeltes Gleichungssystem erster Ordnung darstellen, quantisiert, andererseits wird über die Hilfsfelder summiert und es existiert keine Hilfsfeldquantenzahl. Man kommt zu dem Schluß, daß diese Felder unbeobachtbar sein sollten. Desweiteren ist das aufsummierte, nicht kanonisch quantisierte Feld alleine physikalisch, aber seine Interpretation gestaltet sich gerade wegen der regularisierenden Eigenschaften als schwierig. Besonders die „Massenparameter“ erscheinen problematisch, da auf dieser Ebene der Theorie der Begriff der „Masse“ noch gar nicht definiert ist. Die Namensgebung stammt wohl aus der Analogie zur Pauli–Villars Regularisierung [PAUL 43, PAUL 49], wo diese Parameter die Massen (d.h. Pole) der Counterterme bestimmen. Die Parameter erfüllen Regularitätsbedingungen der Art (z.B. [THIR 50])

$$\begin{aligned} \lambda_i &:= \prod_{j,i\neq j}(m_i-m_j)^{-1} \\ \sum \lambda_i &= 0 \\ \sum m_i\lambda_i &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1-1}$$

welche für physikalische Massen nicht offensichtlich sind.

Der pragmatische Zugang von Stumpf vermag darüberhinaus auch keine Aussage über die Zahl der verwendeten Hilfsfelder zu machen, es werden so viele benutzt, wie zur Regularität nötig sind.

Im Weiteren wird versucht, eine Idee von Stumpf [STUM 84] zu verallgemeinern, welche eine tiefere Einsicht in den regularisierenden Mechanismus gibt. Dabei stoßen wir auf natürliche Art und Weise auf notwendig mit der Regularität verknüpfte algebraische Strukturen. Mit Hilfe eines Ansatzes und den

Eigenschaften von Darstellungen der algebraischen Struktur kann die Zahl der Hilfsfelder mit der Dimension von Divisionsalgebren (1,2,4,8) in Verbindung gebracht werden. Die „Massen“ werden zu einem chemischen Potential und die reguläre lokale Theorie erscheint als effektive Theorie der unbeobachtbaren Subfelder. Die hier begründete Regularität ist strenger als üblich, erlaubt jedoch Wechselwirkungen endlicher Potenz im Feldoperator. Es wird versucht, an den geeigneten Stellen die Notwendigkeit aufzuzeigen, die algebraischen Strukturen besser zu verstehen. Dabei wird dann auf Teil II und III verwiesen. Wie im Vorwort angedeutet, wird es uns nicht gelingen, einen zwingenden Zusammenhang herzustellen, da dies den Rahmen der Arbeit bei weitem sprengen würde.

## 1-2 Höhere Ableitungen

Schon früh wurde bemerkt, daß Feldgleichungen mit höheren Ableitungen ‘regulärer’ sind, als solche erster Ordnung. So wurden Versuche unternommen, Theorien der Art zu formulieren, daß im schwachen Feld und bei hinreichenden Abständen der Quellen die übliche (Quanten) Elektrodynamik als Grenzfall resultiert[3] [Bopp 40, Thir 50, Kikk 76, Stum 84].

Es ergeben sich jedoch sofort auch neue Probleme, da Theorien mit höheren Ableitungen nicht nach den üblichen Schemata konstruiert und interpretiert werden können. Betrachtet man ein dynamisches System mit Ableitungen höherer Ordnung, so liegt es nahe, darin ein gekoppeltes System von dynamischen Partikeln oder Feldern zu erblicken und durch das Einführen neuer Koordinaten, den Hilfsfeldern, das System zu reduzieren. Auf Kosten neuer dynamischer Koordinaten treten dann nur noch Ableitungen erster Ordnung auf[4].

Genau dies ist die Idee, die der Hilfsfeldregularisierung nach Stumpf und Großer [Stum 82, Gross 83] zugrundeliegt. Das Vorgehen läßt sich in Kürze so beschreiben:

1. Aus physikalischen Annahmen heraus wird eine (nichtlineare) Feldgleichung postuliert, welche i.a. nicht regulär ist[5].

2. Es wird der kinetische Operator (freier Anteil) in die gewünschte für die Regularität ausreichende Potenz erhoben. Dies ist eine Redefinition der Theorie! Es müßte gezeigt werden, daß die Theorie erster Ordnung als (nicht regulärer!) Grenzfall enthalten ist.

[3] Die Singularitäten einer Elektrodynamik mit klassischen geladenen Punktmassen (Abraham–Lorentz–Modell [Stum 73]) erzeugen sogenannte Selbstbeschleunigungslösungen (Runaway Solutions). Die Analyse eines schwingenden ausgedehnten Balls mit analogen Methoden (Störungstheorie) liefert für diesen Fall ebensolche Selbstbeschleunigungen gegen jede Anschauung! [Burk 70]

[4] Jede physikalische Theorie sollte nur endlich viele Ableitungen enthalten, da sonst zum Integrieren unendlich viele Konstanten notwendig werden. Dies verhindert jede Vorhersage. Somit benötigt man nur endlich viele Hilfsfelder.

[5] Nichtrenormierbarkeit bedeutet nichts weiter, als daß es unangebracht ist, eine Störungsreihe in der Kopplungskonstante zu betrachten, und sagt nichts weiter über die Theorie aus. Die Regularität hingegen bezieht sich auf alle auftretenden Integrale.

3. Es wird das Zerlegungstheorem [Stum 82, Gross 83] angewandt, um die Gleichung in ein System von Gleichungen erster Ordnung zu zerlegen.

4. Diese *Hilfsfelder* werden quantisiert. Es ist wichtig, die Hilfsfelder zu quantisieren, da sich sonst Probleme mit dem Spin–Statistik–Theorem ergeben würden [Lüde 54, Lüde 57, Stre 64]. Gleichungen (ungerader) erster Ordnung müssen aus Konsistenzgründen fermionisch und Gleichungen (gerader) zweiter Ordnung bosonisch quantisiert werden [Thir 50]. Eine quantisierte Gleichung vierter Ordnung beschriebe dann Bosonen. Die zerlegten vier Gleichungen erster Ordnung würden jedoch fermionisch quantisiert.

Damit ist der Regularisierungs– und Redefinitionsprozeß abgeschlossen. Somit sind alle weiteren Auswertungen der mathematisch exakten Deduktion vorbehalten. Treten nun neuerlich Regularitätsprobleme auf, so muß die Zahl der Hilfsfelder, das heißt die Zahl der Ableitungen, erhöht und *von vorne* begonnen werden.

Es ergeben sich folgende Eigenheiten der Methode:

- Das physikalische Feld ist die *Summe* der Hilfsfelder.

- Die Hilfsfelder tragen keine eigene Quantenzahl zur Beschreibung, also keinen „Hilfsfeldspin“ oder ähnliches. Das heißt, die Hilfsfelder sind per Konstruktion unbeobachtbare Substrukturen.

- Die Regularität ergibt sich aus den Relationen der Partialbruchzerlegung und der *Wahl* der „Massenparameter“, so daß je nach Zahl der Hilfsfelder
$$\sum \lambda_i = 0; \qquad \sum m_i \lambda_i = 0 \quad \ldots \tag{1-2}$$
gilt.

- Diese regularisierenden Eigenschaften ergeben sich ebenso in der störungstheoretischen Pauli–Villars–Regularisierung mit „Counter–Termen“, siehe [Paul 43, Paul 49]. Man nennt deshalb das allgemeinere Verfahren hier „nichtstörungstheoretische Pauli–Villars–Regularisierung“.

- Das Verfahren respektiert die speziell relativistische Invarianz.

- Eine direkte Quantisierung von Theorien mit höheren Ableitungen führt zu Problemen mit dem Spin–Statistik–Theorem [Stre 64].

## 1-3 Kritik des Zerlegungstheorems

Zweifelsohne wurde mit dem Zerlegungstheorem ein gangbarer Weg gefunden, um (nichtlineare) Feldtheorien zu behandeln. Wird zusätzlich noch eine Vertexnormalordnung eingeführt, über die noch zu sprechen sein wird, so hat man eine vollständig reguläre Quantenfeldtheorie formuliert. Dies beweisen zahlreiche Rechnungen von Stumpf und seinen Mitarbeitern. So wurden Zweiteilchenamplituden berechnet und effektive Dynamiken bestimmt [Pfis 89, Stum 94].

Angesichts der Mißerfolge anderer Vorgehensweisen scheint es unangebracht, diesen großen Fortschritt zu kritisieren. Doch ergeben sich gerade dadurch, daß man gute Konzepte kritisch betrachtet, noch tiefere Einsichten.

Zuerst fällt auf, daß durch das Zerlegungstheorem neue zu interpretierende Größen, Felder und Parameter eingeführt werden. Es ist insbesondere paradox, „Massen"[6] in eine nichtlineare Spinorfeldtheorie einzuführen, in der noch gar keine gravitative Kopplung vorhanden ist. Heisenberg war deshalb bemüht, eine masselose Theorie zu formulieren [Heis 67]. Auch scheinen Relationen der Art, wie $\sum m_i \lambda_i = 0, \ldots$, für Massen keinen Sinn zu ergeben, zumindest wenn man an klassische Massen denkt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Regularisierungsmechanismus *vor* der Quantisierung greift. Ebenso ungewöhnlich wäre eine Art der „Massenquantisierung", die auf die obigen Relationen führt.

Weiterhin spielt die nichtdurchleuchtete Unbeobachtbarkeit eine Rolle. Es liegt zwar nahe, die „Massenparameter" auf eine experimentell nie zugängliche Skala zu legen, wie z.B. die Plankmasse oder einen „Massenlimes" gegen unendlich durchzuführen, aber es gibt innerhalb der Theorie keinen hinreichenden Grund dafür. Nur die regularisierenden Relationen müssen erfüllt sein, der Absolutbetrag der $m_i$ ist unbestimmt und kann durch Reskalieren verändert werden. Dabei verändert sich aber die Kopplungskonstante, die somit auch reskaliert werden muß. Die Möglichkeit der Reskalierung wird durch die Quantisierung zunichte gemacht [Sand 91]. Selbst wenn die Massen sehr groß, aber endlich wären, würden diese Probleme zumindest formal bei Integrationen und Vollständigkeitsrelationen auftreten. Es gäbe dann immer Streulösungen. Unendlich werdende „Massen" würden der Theorie auch jedwede Dynamik der Subkonstituenten nehmen, was den Ansatz der Lagrangedichte als inkonsequent entlarven würde.

Nun existiert aber gar keine Quantenzahl für die nur durch den Hilfsfeldindex unterschiedenen Hilfsfelder. Mithin existiert also keine physikalische Handhabe zu ihrer Unterscheidung[7]. So sind die Hilfsfelder auch für kleine oder im Extremfall verschwindende „Massen" unbeobachtbar.

Ein weiterer bemerkenswerter Fakt ist, daß zumindest eine „Masse" *negative* Werte annehmen muß, um die Regularitätsbedingungen zu erfüllen. Dieses Phänomen ist durchaus nicht unüblich in *Medien*, in denen eine effektive Masse auch negative Werte annehmen kann [Made 70]. Effektive Massen werden durch Rückwirkungseffekte des Mediums, das zeitweise auch Energie aufnehmen kann, erzeugt. Hierbei spielt die Kristallstruktur eine wesentliche Rolle. Eine veränderte Masse zeigt ein konkaves oder konvexes Band an. Der Festkörper reagiert auf die quasifreien Ladungen z.B. mit deren Beschleunigung. In der Quantenfeldtheorie steht nur das Vakuum als Medium zur Verfügung, eine statische negative Masse erscheint damit zumindest als sehr konstruiert. Selbstredend ist der Begriff der „Masse" für teilchenartige Felder auch aus der Gra-

[6]Ich schließe mich hier jedoch dem Sprachgebrauch an, die Parameter als „Massen" zu bezeichnen, und nicht etwa als „Selbstenergieparameter".

[7]Ich möchte darauf hinweisen, daß eine Unterscheidung mittels eines „Hilfsfeldspins" nicht vorgenommen und der Isospin bei Stumpf tensoriell an den Spinor geheftet wird [Stum 94]. Diese naheliegende Alternative fällt also aus.

vitationstheorie mit Konotationen behaftet, was eine Positivität von „Massen“ nahelegt. Aufgrund der regularisierenden Eigenschaften muß wenigstens eine „Masse“ negativ sein.

Mit der notwendig negativen „Masse“ geht auch der Verlust des Hilbertraumes einher. Für eine statistische Interpretation der Wellenfunktionen, bzw. der Zustände, sind Linearität, Positivität und Normierbarkeit von essentieller Bedeutung. Dies definiert ja gerade den Zustandsbegriff! Die mit dem Zerlegungstheorem gewonnene Theorie trägt nicht mehr per Konstruktion eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation, eine solche muß unter Schwierigkeiten erst gezeigt werden. Dabei gehen Annahmen ein. Es ist jedoch gelungen, diese Probleme auf pragmatische Art zu lösen [Stum 89b, Feyn 87, Faus 90]. Wünschenswert wäre aber eine physikalische Begründung, oder besser ein zwingender Grund für obige Annahmen.

Wir hatten schon bemerkt, daß die Hilfsfeldregularisierung alleine nicht ausreichend ist, sondern daß zusätzlich noch eine Vertexnormalordnung, d.h. eine Vertexregularisierung, nötig ist. Diesen Zusammenhang stellt das Zerlegungstheorem *nicht* her, wir wollen dennoch unten den sechsten Punkt hinzufügen.

Zusammenfassend bewegen uns folgende Fragen:

1. Was bedeuten die neuen Größen, wie „Massen“ und Hilfsfelder?

2. Welchen Ursprung haben die regularisierenden Relationen?

3. Wie erklärt sich die Unbeobachtbarkeit der Hilfsfelder?

4. Welche Art Medium oder Rückwirkung verursacht die negative Masse?

5. Was bedeutet ein indefiniter Zustandsraum und wie wird er theoretisch begründet?

6. Wie gestaltet sich die Verbindung zwischen Vertexnormalordnung (statische Regularisierung) und dynamischer (d.h. Hilfsfeld–) Regularisierung.

Diese Fragen sollen als Leitfaden dienen, wenn nun ein alternativer Zugang zu den Hilfsfeldern diskutiert werden soll.

## 1-4 Regularität durch diskrete Symmetrie

In einem Aufsatz von Stumpf, „On the connection of nonrenormalizable and renormalizable unified nonlinear spinor field models“ [Stum 84], wird ein alternativer Zugang zu den Hilfsfeldern vorgeschlagen.

Aus mehreren Gründen geriet die Methode jedoch in Vergessenheit. Zuerst waren zwei Hilfsfelder nicht ausreichend, dann war die Methode für allgemeinere, sich aus pragmatischer Sicht aufdrängende Wechselwirkungen nicht erweiterbar. Nicht zuletzt wegen der Fierz–Symmetrie mit Isospin, sind nichttriviale Terme für dessen Ankopplung notwendig [Grim 94].

Trotzdem soll diese Methode unser Ausgangspunkt werden. Sie wird deshalb nun genauer untersucht.

### 1-4.1 Paritätssymmetrie bei Stumpf

Die Idee entsteht aus folgender Beobachtung:
Führt man ein paritätstransformiertes Feld ein, so besitzen die Einfeld– und die Mehrfeldhamiltondichten inäquivalente Lagrangedichten. Die klassisch äquivalenten Ein– und Mehrfeldhamiltondichten geben Anlaß zu verschiedenen Quantenfeldtheorien, wobei die Mehrfeldtheorie regulärer[8] ist.

Zuerst rekapitulieren wir die Ergebnisse von Stumpf [STUM 84]. Wir betrachten die nichtlineare masselose Feldgleichung mit skalarer Wechselwirkung[9]:

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) &= g\{\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\}\Psi(x) \\ x &:= (t, \vec{\mathbf{r}}). \end{aligned} \tag{1-3}$$

Diese Feldgleichung kann aus der nachfolgenden Lagrangedichte abgeleitet werden, dabei benutzen wir die Penrose–Konvention, bei der Differentiationen nur das nächste Symbol differenzieren. Also $\partial ab = (\partial a)b$; $\partial(ab) = \partial ab + a\partial b$.

$$\begin{aligned} L[\Psi] &:= \frac{i}{2}\int [\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) - \partial^\mu\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)]dx^3 \\ &\quad -g\int [\bar{\Psi}(x)\Psi(x)][\bar{\Psi}(x)\Psi(x)]dx^3 \end{aligned} \tag{1-4}$$

Damit ergibt sich nun die Hamiltondichte

$$\begin{aligned} H[\Psi] &:= -\frac{i}{2}\int [\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\Psi(t,\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\nabla}\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\cdot\vec{\gamma}\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})]dr^3 \\ &\quad +g\int [\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})][\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})]dr^3. \end{aligned} \tag{1-5}$$

Beide Ausdrücke sind paritätsinvariant. Mit der Paritätstransformation für Spinoren[10]

$$\Psi'(t,\vec{\mathbf{r}'}) := i\gamma^0\Psi(t,\vec{\mathbf{r}}); \quad \vec{\mathbf{r}'} = -\vec{\mathbf{r}} \tag{1-6}$$

hat man die üblichen Invarianzen

$$\begin{aligned} L[\Psi'] &= L[\Psi] \\ H[\Psi'] &= H[\Psi]. \end{aligned} \tag{1-7}$$

Nun betrachten wir aber ein neues Feld, in dem wir zwar die Spinorkomponenten transformieren, nicht aber die Ortskoordinaten

$$\xi(t,\vec{\mathbf{r}}) := \Psi'(t,\vec{\mathbf{r}}) = \Psi'(t,-\vec{\mathbf{r}}') = i\gamma_0\Psi(t,\vec{\mathbf{r}}). \tag{1-8}$$

Wir sind nun in der Lage, eine Zweifeld–Hamiltondichte anzugeben, die für die Nebenbedingung (1-8) mit der Einfeld–Hamiltondichte übereinstimmt.

$$H[\Psi] \equiv H[\Psi,\xi]|_{\xi=i\gamma_0\Psi}$$

[8] Regulärer in dem Sinne, daß die auftretenden Divergenzen weniger ausgeprägt sind.
[9] In konventioneller Schreibweise, z.B Bjoken und Drell [BJOR 66]
[10] Für die Dirac–Darstellung siehe z.B. [NACH 86]

$$
\begin{aligned}
H[\Psi,\xi] \;:=\; & \frac{i}{4}\int [\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\Psi(t,\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\nabla}\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\cdot\vec{\gamma}\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})]dr^3 \\
& -\frac{i}{4}\int [\bar{\xi}(t,\vec{\mathbf{r}})\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\xi(t,\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\nabla}\bar{\xi}(t,\vec{\mathbf{r}})\cdot\vec{\gamma}\xi(t,\vec{\mathbf{r}})]dr^3 \\
& +\frac{1}{4}g\int \{[\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})+\bar{\xi}(t,\vec{\mathbf{r}})][\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})+\xi(t,\vec{\mathbf{r}})]\}^2 dr^3 \qquad (1\text{-}9)
\end{aligned}
$$

Der Beweis findet sich in dem Aufsatz von Stumpf [Stum 84] und beruht auf der Kompensation überzähliger Terme mit Hilfe der Nebenbedingung durch Nachrechnen.

Es ist nun möglich, die Hamiltondichte auf die Zweifeld–Lagrangedichte zu transformieren. Dabei erhalten wir die bemerkenswerte Tatsache, daß die Ein– und Mehrfeld–Lagrangedichten klassisch inäquivalent sind.

$$
\begin{aligned}
H[\Psi] \;&=\; H[\Psi,\xi]|_{\xi=i\gamma_0\Psi} \\
\Updownarrow \;& \qquad\quad \Updownarrow \qquad\qquad (1\text{-}10) \\
L[\Psi] \;&\neq\; L[\Psi,\xi]|_{\xi=i\gamma_0\Psi}
\end{aligned}
$$

Definieren wir der Übersicht halber nun

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \Psi \\
\varphi_2 &:= \xi \\
\lambda_1 &= -\lambda_2 = 2, \qquad (1\text{-}11)
\end{aligned}
$$

so schreibt sich $L[\Psi,\xi]$ als

$$
\begin{aligned}
L[\Psi,\xi] \;\equiv\; & L[\varphi_1,\varphi_2] = \frac{i}{2}\int\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\lambda_j}[\bar{\varphi}_j\gamma^\mu\partial_\mu\varphi_j - \partial_\mu\bar{\varphi}_j\gamma^\mu\varphi_j]dx^3 \\
& -\frac{1}{4}\int\left\{\sum_{j=1}^{2}\bar{\varphi}_j\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\right\}^2 dx^3. \qquad (1\text{-}12)
\end{aligned}
$$

Die Ungleichheit der Lagrangedichten ist nicht so überraschend, wie sie auf den ersten Blick erscheint. Bei dem Übergang von der Einfeld– zur Zweifeld–Hamiltondichte müßte für die Äquivalenz die Nebenbedingung mittels eines Lagrangeparameters eingeführt werden. Daß dies nicht geschieht, eröffnet nun gerade die benötigte Freiheit. Die Ungleichheit der Lagrangedichte bezieht sich also auf die Art der Behandlung der Nebenbedingung.

#### 1-4.1.1 Symmetriebrechung durch Quantisieren

Nun sollen $H[\Psi]$ und $H[\Psi,\xi]$ quantisiert werden. Es stellt sich daher die Frage, ob die Äquivalenz der Theorien durch die Wiedereinführung der Nebenbedingung in $H[\Psi,\xi]$ erhalten werden kann.

Im Einfeld–Fall haben wir als kanonischen Impuls

$$
\Pi(t,\vec{\mathbf{r}}) \;:=\; i\Psi^\dagger(t,\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\delta\mathcal{L}[\Psi]}{\delta\partial_t\Psi}, \qquad (1\text{-}13)
$$

woraus sich in kanonischer Weise der Kommutator

$$\{\Pi(t,\vec{\mathbf{r}}'),\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})\}_+ \;=\; \delta(\vec{\mathbf{r}}'-\vec{\mathbf{r}}) \tag{1-14}$$

ergibt. Dies sind Standardresultate der Feldtheorie. Im Zweifeld–Fall haben wir zwei unabhängige Impulse. Wir erhalten

$$\Xi_i(t,\vec{\mathbf{r}}) \;:=\; \frac{\delta\mathcal{L}[\varphi_1,\varphi_2]}{\delta\partial_t\varphi_i} = \frac{i}{\lambda_i}\varphi_i^\dagger(t,\vec{\mathbf{r}}), \tag{1-15}$$

woraus sich die Kommutatorrelationen

$$\{\varphi_j^\dagger(t,\vec{\mathbf{r}}'),\varphi_i(t,\vec{\mathbf{r}})\}_+ \;=\; \lambda_j\delta_{ji}\delta(\vec{\mathbf{r}}'-\vec{\mathbf{r}}) \tag{1-16}$$

ergeben (keine Summe). Diese Art der Quantisierung ist nicht mehr kanonisch, da ein Faktor $\lambda_j$ auftritt. Man muß berücksichtigen, daß die $\lambda_j$ positive und negative Werte annehmen müssen. Es ist also nicht möglich, durch eine Reskalierung die $\lambda_i$ zum Verschwinden zu bringen [Sand 91].

Die Nebenbedingung kann ebenfalls nicht mehr implementiert werden, was bedeutet, daß für die quantisierten Feldoperatoren

$$\varphi_1(t,\vec{\mathbf{r}}) \;\neq\; i\gamma^0\varphi_2(t,\vec{\mathbf{r}}) \tag{1-17}$$

gelten muß. Weiterhin ergibt sich, daß die Subteilchenzahloperatoren

$$N[\varphi_i] \;:=\; \int \bar{\varphi}_i(t,\vec{\mathbf{r}})\varphi_i(t,\vec{\mathbf{r}})d^3\vec{\mathbf{r}} \tag{1-18}$$

nicht mit dem Hamiltonoperator vertauschen. Man erhält also in einer Energieeigenbasis keine guten Subteilchenquantenzahlen. Das bringt aber mit sich, daß den Subfeldern kein Teilchencharakter zugebilligt werden kann. Betrachtet man jedoch die Summe der Subteilchenzahloperatoren, so ist

$$\begin{aligned} N[\Psi] \;&:=\; \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}N[\varphi_i] \\ [N[\Psi],H[\varphi_1,\varphi_2]]_- \;&=\; 0. \end{aligned} \tag{1-19}$$

Es liegt nun nahe, zu einem großkanonischen Ensemble überzugehen. Dies geschieht durch das Einführen chemischer Potentiale $\mu_i$. Man erhält dann den großkanonischen Hamiltonoperator

$$K[\varphi_1,\varphi_2] \;:=\; H[\varphi_1,\varphi_2]+\mu_1N[\varphi_1]+\mu_2N[\varphi_2] \tag{1-20}$$

einer neuen Theorie. Führt man die Legendretransformation zurück zur Lagrangedichte durch, so besitzt diese die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K[\varphi_1,\varphi_2] \;:=\; & \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2}\int\frac{1}{\lambda_j}\left[\bar{\varphi}_j\gamma^\mu\partial_\mu\varphi_j-\partial_\mu\bar{\varphi}_j\gamma^\mu\varphi_j\right]d^3\vec{\mathbf{r}} \\ & -\sum_{j=1}^{2}\int\mu_j\bar{\varphi}\varphi d^3\vec{\mathbf{r}} \\ & -\frac{1}{4}g\int\left\{\sum_{i=1}^{2}\bar{\varphi}_i(t,\vec{\mathbf{r}})\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(t,\vec{\mathbf{r}})\right\}^2 d^3\vec{\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{1-21}$$

Daraus erhält man für das Summenfeld $\Psi = \varphi_1 + \varphi_2$ unter Zuhilfenahme der Verbindung von $\mu_i$ und $\lambda_i$,

$$\lambda_i \;=\; \frac{1}{\mu_i - \mu_j}, \quad i \neq j, \quad \mu_i \neq \mu_j \tag{1-22}$$

die Feldgleichung zweiter Ordnung

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \mu_1)(i\gamma^\nu\partial_\nu - \mu_2)\Psi(t,\vec{\mathbf{r}}) \;=\; \frac{1}{4}g\left\{\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}})\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})\right\}\Psi(t,\vec{\mathbf{r}}). \tag{1-23}$$

Weiterhin ist dieses Summenfeld nun *nicht* kanonisch quantisiert. Durch Nachrechnen ergibt sich

$$\{\bar{\Psi}(t,\vec{\mathbf{r}}'),\Psi(t,\vec{\mathbf{r}})\}_+ \;=\; 0. \tag{1-24}$$

Dies ist die von Heisenberg [HEIS 67] vorgeschlagene nichtkanonische Quantisierung. Sie bedeutet jedoch in keiner Weise, daß die Theorie klassisch wäre!

Durch unsere schrittweise Überlegung sind wir nun zu einer völlig neuen Theorie gelangt, die im klassischen Grenzfall und bei verschwindenden chemischen Potentialen zur Ausgangstheorie (1-3) zurückführt.

Was hat man nun mit diesem Vorgehen erreicht? Der Prozeß erscheint willkürlich und schränkt zusätzlich die Wechselwirkung auf den uninteressanten skalaren Fall ein. Man mag sich deshalb fragen, ob nicht der einfachere Weg gleich von einer Theorie mit höheren Ableitungen aus beginnen sollte, zumal dabei jede Wechselwirkung zugelassen werden kann.

Eine unklare Rolle spielt die Paritätstransformation, die die unbeobachtbaren Subfelder, zumindestens auf klassischer Ebene, verbindet. Auch scheint es willkürlich, gerade die Paritätstransformation in solch einer Weise auszuzeichnen. Dies wird uns Anlaß dazu geben, das Verfahren zu verallgemeinern.

### 1-4.2 Strukturelle Untersuchung des Regularisierungsverfahrens

#### 1-4.2.1 Komplexer oder euklidischer Fall

Um das Stumpfsche Verfahren verallgemeinern zu können, wollen wir uns nun in $1+1$ Dimensionen verdeutlichen was geschieht. Die dabei erhaltenen Erkenntnisse lassen sich in jeder Dimension verwenden. Beweise und Berechnungen sind hier besonders einfach.

Wir betrachten eine Matrixdarstellung der komplexen Zahlen. Diese wird durch die Injektion von 1 und $i$ in die reellen $2\times 2$ Matrizen gegeben. Es existiert also ein Homomorphismus $\varphi$ mit

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\varphi}{\to} \mathbf{1}_{2\times 2} \\ i &\overset{\varphi}{\to} \epsilon = i\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1-25}$$

siehe dazu [EBBI 91]. Man verifiziert leicht, daß die Matrizen

$$z \;=\; \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \tag{1-26}$$

eine kommutative Unteralgebra der $2 \times 2$ Matrizen bilden. Die Matrixmultiplikation ist das Bild der komplexen Multiplikation unter $\varphi$. Die Darstellung $\varphi$ ist bijektiv und treu. Die Matrizen stellen also Repräsentanten von komplexen Zahlen im Matrixring dar.

Das adjektiv „euklidisch" wird im algebraischen Teil II wichtig werden und wurde hier nur zu Referenzzwecken benutzt.
**Bemerkung:** Die Konjugation $i \to \bar{i} = -i$ wird in diesem Fall durch die Transposition dargestellt, vergl. unten.

Wir betrachten das Spinorfeld

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi(z) \tag{1-27}$$

und den Vertex

$$M := a\mathbf{1} + b\epsilon. \tag{1-28}$$

Dabei ist $\epsilon = \varphi(i)$ die Matrixdarstellung der komplexen Einheit und $\mathbf{1}$ die $2 \times 2$ Einheitsmatrix (1-25). $\epsilon$ besitzt somit die Eigenschaften

$$\epsilon = -\epsilon^t = \bar{\epsilon} = -\epsilon^\dagger. \tag{1-29}$$

Die Hamiltondichte lautet also

$$\begin{aligned} H[\varphi] := & \frac{i}{2} \int [\bar{\varphi}\epsilon\partial_y\varphi - \partial_y\bar{\varphi}\epsilon\varphi]\, dy \\ & -g \int \{\bar{\varphi}M\varphi\}^2\, dy. \end{aligned} \tag{1-30}$$

Eine analoge Transformation zur oben betrachteten Paritätstransformation erhalten wir, wenn wir für die Mehrfeldtheorie nun

$$\varphi \to \frac{1}{\sqrt{N}}(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{1-31}$$

mit

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \epsilon\varphi \tag{1-32}$$

setzen. Die klassische Äquivalenz ergibt sich, wenn gilt

$$\begin{aligned} i) \quad \bar{\varphi}\epsilon\varphi &= \frac{1}{N}\sum_{i,j} \bar{\varphi}_i\epsilon\varphi_j \\ ii) \quad \bar{\varphi}M\varphi &= \frac{1}{N}\sum_{i,j} \bar{\varphi}_i M\varphi_j. \end{aligned} \tag{1-33}$$

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen und Nachrechnen. Es ist

$$\bar{\varphi}\epsilon\varphi \stackrel{!}{=} \frac{1}{N}\{(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)\epsilon(\varphi_1 + \varphi_2)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}(\bar{\varphi}+\bar{\varphi}\epsilon^t)\epsilon(\varphi+\epsilon\varphi) \\
&= \frac{1}{N}\left\{\bar{\varphi}\epsilon\varphi+\bar{\varphi}\epsilon^t\epsilon\varphi+\bar{\varphi}\epsilon^2\varphi+\bar{\varphi}\epsilon^t\epsilon^2\varphi\right\} \\
&= \frac{1}{N}\left\{\bar{\varphi}\epsilon\varphi+\bar{\varphi}\varphi-\bar{\varphi}\varphi+\bar{\varphi}\epsilon\varphi\right\} \\
&= \frac{2}{N}\bar{\varphi}\epsilon\varphi. \qquad (1\text{-}34)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten bei Gleichheit $N = 2$ und damit die Äquivalenz des ersten Termes. Mit Hilfe des Kommutators $[M,\epsilon]_- = 0$ und $[M,\mathbf{1}]_- = 0$ haben wir dann ebenfalls

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}M\varphi &\stackrel{!}{=} \frac{1}{N}\left\{(\bar{\varphi}_1+\bar{\varphi}_2)M(\varphi_1+\varphi_2)\right\} \\
&= \frac{2}{N}\bar{\varphi}M\varphi = \bar{\varphi}M\varphi. \qquad (1\text{-}35)
\end{aligned}
$$

Der zweite Term erlaubt es uns, die gleiche Normierung zu wählen. Um dieses Verfahren in die Diractheorie einzubetten, muß man $\gamma$–Matrizen mit den obigen Eigenschaften der $\mathbf{1}$ und des $\epsilon$ finden. Dies ist für $\gamma$–Algebren über $\mathbf{C}$ immer möglich. Mit der Ersetzung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{2\times 2} &\rightarrow \mathbf{1}_{4\times 4} \\
\epsilon_{2\times 2} &\rightarrow i\gamma^0_{4\times 4} \qquad (1\text{-}36)
\end{aligned}
$$

gelangen wir genau zu der oben besprochenen Situation. Nun ist aber für vierdimensionale Theorien noch zusätzlich die Lorentzinvarianz zu fordern. Damit scheidet der Term $i\gamma^0$ als Wechselwirkung aus. Man behält in $M$ also nur den skalaren Anteil. Dies geschieht in voller Übereinstimmung mit den Ergebnissen bei Stumpf [STUM 84].

#### 1-4.2.2 Pseudokomplexer oder hyperbolischer Fall

Im Gegensatz zu den wohlbekannten komplexen Zahlen mit $i^2 = -1$, besteht bei zweikomponenten Zahlen (binären Zahlen) mit der Relation $j^2 = +1$ eine große Namensfülle. Untersuchungen von Clifford [CLIF 78], Mehmke [MEHM 13], Study [STUD 03, STUD 14], Lotze [LOTZ 50], Hahn [HAHN 94], Reany, Hestenes, Sobczyk [HEST 91D, REAN 93, REAN 94] und Keller [KELL 94] benutzen verschiedene Namen. Wir bevorzugen zwei Varianten. Zum einen „hyperbolisch", da solche Zahlen sehr gut in der hyperbolischen Geometrie verwendet werden können, zum anderen „trivial", was aus der Theorie der quadratischen Algebren stammt und die direkte Summenstruktur solcher Algebren (als Modul über $\mathbf{R}$) ausdrückt [FAUS 95B]. Dies wird im Teil II wichtig werden.

Wir betrachten also wieder einen Homomorphismus $\varphi$ in den $2\times 2$ Matrixring über $\mathbf{R}$:

$$
\begin{aligned}
1 &\stackrel{\varphi}{\rightarrow} \mathbf{1}_{2\times 2} \\
j &\stackrel{\varphi}{\rightarrow} \tau = \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1\text{-}37)
\end{aligned}
$$

Wieder bilden die Elemente $z = a + b\tau,\ a, b \in \mathbf{R}$ eine Unteralgebra, diesmal aber keinen Körper. Es gibt Nullteiler, z.B.

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad det(v) = 0, \tag{1-38}$$

die eine Lichtkegelstruktur ausbilden. Die Konjugation solcher Zahlen legen wir als

$$\overline{a1 + bj} = a1 - bj \tag{1-39}$$

fest, oder äquivalent dazu als

$$\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}. \tag{1-40}$$

Mit derselben Argumentation wie im vorigen Abschnitt müssen wir für die Ersetzung

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{N}}(\varphi + \tau\varphi) \tag{1-41}$$

folgende Gleichheiten zeigen

$$\begin{aligned} i) \quad \bar{\varphi}\tau\varphi &= \frac{1}{N}\sum_{i,j} \bar{\varphi}_i \tau \varphi_j \\ ii) \quad \bar{\varphi}M\varphi &= \frac{1}{N}\sum_{i,j} \bar{\varphi}_i M \varphi_j, \end{aligned} \tag{1-42}$$

wobei $M := a1 + b\tau$ gilt. Wieder erfolgt der Beweis durch Nachrechnen, man erhält

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}\tau\varphi &= \frac{1}{N}\left\{(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)\tau(\varphi_1 + \varphi_2)\right\} \\ &= \frac{1}{N}\left\{(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\tau)\tau(\varphi + \tau\varphi)\right\} \\ &= \frac{1}{N}\left\{\bar{\varphi}\tau\varphi + \bar{\varphi}\varphi - \bar{\varphi}\varphi_2 - \bar{\varphi}\tau\varphi\right\} \\ &= 0 \quad \forall N. \end{aligned} \tag{1-43}$$

Es ist damit unmöglich, hier eine Gleichheit zu erhalten und wir erkennen, daß der Körper $\mathbf{C}$ dem hier benutzten Matrixring überlegen ist und die Signatur für unsere Überlegungen eine wesentliche Rolle spielt. Dies wird uns im vierdimensionalen Fall wieder begegnen.

**Bemerkung:** Man könnte versucht sein, hier als Konjugation im Matrixbild nicht $\bar{\tau} = -\tau$, sondern $\bar{\tau} \rightarrow \tau^t = \tau$ zu verwenden. Dies würde ausreichen, um Ausdrücke der Form $\varphi^t M\varphi$ zu bilden. Algebraische Untersuchungen werden jedoch in Teil II zeigen, daß eine Konjugation dieser Art nicht in kanonischer Weise mit der abstrakten algebraischen Struktur verbunden werden kann. Die größere Freiheit in der Matrixdarstellung kommt von der willkürlichen Wahl des Homomorphismus in den (größeren) Matrixring.

## 1-5 Ansätze mit vier Hilfsfeldern

Wir wollen nun das Verfahren auf vier Hilfsfelder verallgemeinern. Dies wird es uns ermöglichen, auch nichttriviale Wechselwirkungen zuzulassen. Darüberhinaus wurde durch Bindungsrechnungen gezeigt, daß eine Theorie mit zwei Hilfsfeldern nicht ausreichend regulär ist, was auch anhand von Dimensionsargumenten in der Lagrangefunktion erkannt werden kann. In neuen Rechnungen werden deshalb bei Stumpf und Mitarbeitern gegenwärtig *drei* Hilfsfelder benutzt.

Aus prinzipiellen Erwägungen heraus arbeiten wir jedoch mit *vier* Hilfsfeldern. Dies wird dadurch motiviert, daß in den folgenden Ansätzen die Struktur einer Divisionsalgebra auftaucht, die für bestimmte Rechenschritte unerläßlich ist, insbesondere für das Herausheben der Mischterme verschiedener Hilfsfelder. Nun existieren aber Divisionsalgebren nur in 1, 2, 4 und 8 Dimensionen (endlich über $\mathbf{R}$) [Ebbi 91]. Dies nötigt uns als kleinste Verallgemeinerung die 4–Zahl auf. Zeichnet man eine Dimension aus, z.B. durch einen Vektor $e$ mit der Eigenschaft $|e| = 1$, so kann man eine Konjugation einführen und die vier Hilfsfelder in ein „reelles“ und drei „imaginäre“ Felder unterteilen[11]. Beschränkt man sich auf den Imaginärteil, so erhält man viele Eigenschaften der Hilfsfeldregularisierung mit drei Hilfsfeldern. Da dies ein Spezialfall ist, und wir ohnehin nur an der Natur der Hilfsfeldregularisierung interessiert sind, kann für den Fall von 3 Hilfsfeldern auf das Zerlegungstheorem verwiesen werden.

### 1-5.1 Reduzierung der dynamischen Gleichung

Bevor wir mit konkreten Rechnungen fortfahren, soll die dynamische Gleichung noch umgeformt werden. Diese Umformung ist aus der Mathematik wohlbekannt [Brac 82, Gilb 91, Dela 92]. Man kann die Spingruppe **Spin(1,3)** durch Abspalten eines Faktors, hier des $\gamma_0$, in eine **Spoin**gruppe überführen. Dies gelingt natürlich nur für den Unterraum der geraden[12] Elemente. Eine solche Reduzierung hat weitreichende geometrische Konsequenzen und wird als „Split“ bezeichnet [Hest 91a, Hest 91b].

Man beachte auch die sich hier aufzeigende Verbindung zu quadratischen und zu Jordanalgebren [Brau 66]. Wir werden in Kapitel 2 wieder darauf stoßen.

Bis auf ein idempotentes Element lassen sich Spinoren mit dem geraden Teil einer Cliffordalgebra identifizieren. Deshalb ist eine solche Reduktion möglich[13]. Allerdings erlegt uns dieses Vorgehen Beschränkungen der Art auf, daß wir uns nur noch mit der geraden Unteralgebra beschäftigen können. Dies wird sich auch im Weiteren bemerkbar machen. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \gamma_0\phi &:= \Psi \\ M' &:= M\gamma_0, \end{aligned} \tag{1-44}$$

[11] Siehe dazu Kapitel 2 und die Überlegungen dort.

[12] Das sind Elemente mit geradzahlig vielen Faktoren in einer „geeigneten“, $\gamma^0$ abhängigen Basis.

[13] Siehe dazu Teil II.

womit wir die dynamische Gleichung

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi \;=\; gV\bar{\Psi}\Psi\Psi = g\bar{\Psi}M\Psi M\Psi \tag{1-45}$$

schreiben können als

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\gamma_0\partial_\mu\phi &= i\sigma^\mu\partial_\mu\phi = g\phi^\dagger\gamma_0\gamma_0 M\gamma_0\phi M\gamma_0\phi \\ i\sigma^\mu\partial_\mu\phi &= g\phi^\dagger M'\phi M'\phi. \end{aligned} \tag{1-46}$$

Dabei wurde die Konvention $\sigma^\mu = \gamma^\mu\gamma_0$ benutzt. Das Symbol $\sigma$ ist mit Bedacht gewählt, da die so definierten Größen die üblichen Vertauschungsrelationen der gewöhnlichen Paulimatrizen besitzen. Hier handelt es sich aber um eine $4\times 4$ Darstellung der Algebra. Es ist weiterhin $\sigma^0 = \mathbf{1}$.

Diese etwas ungewöhnliche Darstellung wird uns bei konkreten Rechnungen nun große Dienste leisten, da die $\sigma-$ oder Paulilalgebra viel weniger Freiheitsgrade besitzt. Unsere heuristischen Ersetzungsformeln lauten also

$$\begin{aligned} \phi &\;\to\; \phi' = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{3}\phi_i = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{3}x_i\phi \\ \phi^\dagger &\;\to\; \phi'^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{3}\phi_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{3}\phi^\dagger x_i^\dagger. \end{aligned} \tag{1-47}$$

Diese Ersetzung ist nun aber zuerst nur rein formal, da sie von der Signatur der Elemente $x$ abhängt. Mit Signatur sind diejenigen Vorzeichen gemeint, die durch Multiplikation der normierten Elemente $x_i$ mit sich selbst $x_i x_i = \pm 1$ ergeben. Wir können genau 5 Fälle unterscheiden.

$$\begin{aligned} &(+,+,+,+) \qquad \mathrm{sig} = \;\;4 \\ &(+,+,+,-) \qquad \mathrm{sig} = \;\;2 \\ &(+,+,-,-) \qquad \mathrm{sig} = \;\;0 \\ &(+,-,-,-) \qquad \mathrm{sig} = -2 \\ &(-,-,-,-) \qquad \mathrm{sig} = -4. \end{aligned} \tag{1-48}$$

Hier haben wir willkürlich eine Ordnung der Basis vorgenommen. Da solche Umordnungen nun aber durch Elemente der $\mathbf{O(p,q)}$ (orthogonal) vermittelt werden, ist eine Umordnung immer möglich. Die Signatur der $\mathbf{O(p,q)}$ richtet sich dabei nach dem zu betrachtenden Fall.

Um den Reduzierungsprozeß verstehen zu können, müssen wir noch das Symbol '$i$' in die Algebra transferieren. Die algebraische Einbettung des Elementes '$i$' in die Dirac–Hestenes–Theorie ist relativ kompliziert und erfordert das Studium der $CL_{4,1}$ [Zeni 94]. Die Matrixdarstellungen (in einer Spinbasis) wären dann $8\times 8$ über $\mathbf{R}$, reduzibel und 32 dimensional. Dies entspricht den komplexen $4\times 4$ Matrizen der Diractheorie, $4\times 4$ über $\mathbf{R}$ mal 2. Unser unten aufgeführter Formalismus würde also auf $32\times 32$ Matrizen führen, die für eine Auswertung, selbst mit Computeralgebrasystemen, weit jenseits unserer Fähigkeiten liegen.[14]

[14] Zur Darstellung von Cliffordalgebren siehe Teil II, Abschnitt 3-4.

Die reelle Dirac–Hestenes–Theorie, dargestellt auf der geraden Unteralgebra $CL^+_{4,1} \cong CL_{1,3}$, würde immer noch zu große Matrizen liefern. Deshalb beschränken wir uns auf die Paulialgebra $CL_3$, die gerade noch handhabbare $8 \times 8$ Matrizen ergibt.

Allerdings sind damit einige, in der Diractheorie noch mögliche Wechselwirkungen ausgeschieden. Für unser Modellsystem reicht dieser Ansatz jedoch aus.

Um eine einheitliche Notation zu erhalten, werden wir einige Definitionen einführen, die erst im algebraischen Teil genauer erläutert werden. Dies vereinfacht den Vergleich mit der algebraischen Methode in Teil II, stellt jedoch keine Einschränkung dar. Die ursprünglichen Untersuchungen wurden *ohne* diese Definition mit den Matrizen durchgeführt.

Zur Verdeutlichung könnte hier ohne Gefahr eine $2 \times 2$ komplexe oder $4 \times 4$ reelle Matrixdarstellung angenommen werden. In diesem Fall werden die Generatoren $e_i$ durch die Darstellungsmatrizen $\sigma_i$ beschrieben.

Die Paulialgebra $P$ ist die Cliffordalgebra $CL_3$ über dem reellen Raum $\mathcal{V} = < e_1, e_2, e_3 >$. Die Klammern zeigen die lineare Hülle, in diesem Fall über $\mathbf{R}$, an. Die Generatoren erfüllen die Relationen (siehe auch Anhang A)

$$e_i e_j + e_j e_i \;=\; 2\delta_{ij}. \tag{1-49}$$

Damit ist es möglich, ein inneres Produkt und ein Keilprodukt einzuführen; näheres dazu in Teil II.

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &\equiv\; < e_i | e_j > := \frac{1}{2}(e_i e_j + e_j e_i) \\ e_{ij} \equiv e_i \wedge e_j &:= \frac{1}{2}(e_i e_j - e_j e_i). \end{aligned} \tag{1-50}$$

Der letztgenannte Sachverhalt ist den Physikern bekannt, es wird jedoch häufig aufgrund der Orthogonalität kein neues Produkt für die antisymmetrisierten Größen eingeführt, da folgende Gleichheit gilt:

$$e_i e_j \;=\; e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = 0 + e_i \wedge e_j. \tag{1-51}$$

Nun können wir versuchen, das '$i$' in der Algebra zu finden. Die $2^3$ generierenden Elemente des linearen 8 dimensionalen Raumes $\Lambda\mathcal{V}$ sind

$$\{Id = \mathbf{1}, e_1, e_2, e_3, e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{123}\}. \tag{1-52}$$

Weiterhin bemerken wir, daß gilt:

$$\begin{aligned} [e_{123}, X]_- &= 0 \quad \forall X \in P \\ e_{123}^2 &= e_{123}e_{123} = -e_3e_2e_1e_1e_2e_3 = -1. \end{aligned} \tag{1-53}$$

Damit ist es möglich, $e_{123}$ formal als komplexe Einheit aufzufassen. Wir setzen deshalb '$i$':$= e_{123}$, siehe Bemerkung unten.

Die Basiselemente der Paulialgebra können wir dann folgendermaßen angeben:

$$\{Id, e_1, e_2, e_3, ie_1, ie_2, ie_3, i\}. \tag{1-54}$$

Dies kann umgeschrieben werden in

$$\mathbf{C} \otimes \mathcal{V} \quad = \quad < Id, i > \otimes < e_1, e_2, e_3 >, \tag{1-55}$$

also als komplexifizierter 3 dimensionaler Raum.

Da in der dynamischen Gleichung das Symbol '$i$' schon als komplexe Einheit des Zahlenkörpers **C** vorkommt, erscheint uns diese Identifikation gefährlich. Wir verweisen jedoch hierfür auf Teil II und die Arbeiten von Hestenes und Anderen [HEST 66, HEST 67A, HEST 75A, Gurt 75, BAYL 89A, BAYL 92A, GULL 93A, DORA 93D, ZENI 94].

**Bemerkung:** Stellt man dieselben Überlegungen mit Matrizen an, so ergibt sich damit keine Schwierigkeit, da dort ohnehin nur ein '$i$' zur Verfügung steht. Das '$i$' der dynamischen Gleichung wird ohne weiteres mit dem Darstellungs '$i$' der Matrizen identifiziert. Erst der durch die Algebra geschärfte Blick läßt hier ein Problem sichtbar werden. Unsere Identifikation entspricht somit dem „üblichen“ Vorgehen. Siehe dazu auch die Diskussion in Abschnitt 3-4 sowie die Ausführungen in Anhang A.

### 1-5.2 Konjugationen

Da wir nicht nur $\phi$ sondern auch $\phi^\dagger$ bilden wollen, müssen wir uns ebenfalls um die Konjugationen kümmern. In der Paulialgebra haben wir, wie in jeder Cliffordalgebra, zwei wichtige Konjugationen [BENN 87, BUDI 88].

Die Vektorraumkonjugation $\hat{}$, welche $\mathcal{V} \to \hat{\mathcal{V}} = -\mathcal{V}$ abbildet und als Hauptautomorphismus bezeichnet wird, ist auf der Basis gegeben als

$$\begin{gathered} \{Id, -e_1, -e_2, -e_3, ie_1, ie_2, ie_3, -i\} \\ < Id, -i > \otimes < -e_1, -e_2, -e_3 > . \end{gathered} \tag{1-56}$$

Diese Gradinversion besteht etwas ungenau ausgedrückt aus der komplexen Konjugation *und* der Rauminversion. $\hat{}$ respektiert die Reihenfolge von Produkten, $(ab)^\wedge = \hat{a}\hat{b}$.

Die zweite Transformation ist die Reversion oder der Hauptantiautomorphismus. Man hat dabei eine Umordnung *zerlegbarer* Elemente der Algebra vor sich. $X$ heißt zerlegbar, wenn es sich als Produkt (ohne Zeichen) von Vektoren (d.h. Elementen aus $\mathcal{V}$) schreiben läßt, also etwa

$$X = ab, \qquad a, b \in \mathcal{V}. \tag{1-57}$$

Die Reversion kehrt dann die Reihenfolge der Faktoren um.

$$X^\sim \quad = \quad (ab)^\sim = b^\sim a^\sim = ba, \quad a, b \in \mathcal{V}. \tag{1-58}$$

$\mathcal{V}$ bleibt invariant unter dieser Operation. Man erhält auf der Basis

$$\begin{aligned} &\{Id, e_1, e_2, e_3, -ie_1, -ie_2, -ie_3, -i\} \\ &< Id, -i > \otimes < e_1, e_2, e_3 > . \end{aligned} \tag{1-59}$$

Wir erhalten somit die Komplexkonjugation im ersten Faktor. Dabei wird die Reihenfolge von Produkten vertauscht.

Beide Operationen werden mit Hilfe der Linearität auf die ganze Algebra ausgedehnt. Wir können zusätzlich noch eine dritte Konjugation aus der Komposition der vorherigen Konjugationen bilden. Dies ergibt

$$\bar{\ } \quad = \quad \hat{\ } \circ \tilde{\ } = \tilde{\ } \circ \hat{\ }, \tag{1-60}$$

also

$$\bar{X} \quad = \quad (\hat{X})\tilde{\ } = (X\tilde{\ })\hat{\ }. \tag{1-61}$$

Auf der Basis erhält man

$$\begin{aligned} &\{Id, -e_1, -e_2, -e_3, -ie_1, -ie_2, -ie_3, i\} \\ &< Id, i > \otimes < -e_1, -e_2, -e_3 > . \end{aligned} \tag{1-62}$$

Dies entspricht der Raumspiegelung. Die Wortwahl ist zwar offensichtlich, sollte aber nur als Merkregel und nicht im exakten Sinne benutzt werden. Dazu müßte das Transformationsverhalten von physikalischen Größen wie Vektoren und Tensoren untersucht werden.

Wir erhalten also insgesamt drei Transformationen zuzüglich zur identischen Abbildung $Id : P \to P$. Es liegt nahe, unsere 4 Hilfsfelder damit in Verbindung zu bringen.

Um eine Zuordnung der Algebrakonjugationen zu den gewöhnlichen Transformationen der Spinoren $\Psi$ zu bekommen, müssen wir beachten, daß $\tilde{\ }$ und $\hat{\ }$ die Reihenfolge von Produkten vertauschen. Beide Transformationen enthalten also eine Transposition. Man erkennt durch Vergleich [Bayl 89a, Gull 93a, Dora 93d, Zeni 94], daß gilt:

$$\begin{aligned} \Psi &\leftrightarrow \phi \\ \Psi^{*T} &\leftrightarrow \phi\tilde{\ } \\ \Psi^{*} &\leftrightarrow \hat{\phi} \\ \Psi^{T} &\leftrightarrow \bar{\phi}. \end{aligned} \tag{1-63}$$

Es ergeben sich dann mit (1-44) reelle Ausdrücke für bilineare Formen dergestalt:

$$\Psi^{*T}\gamma_0 M \Psi \quad \leftrightarrow \quad \phi\tilde{\ } M' \phi. \tag{1-64}$$

**Bemerkung:** Diese Zuordnung erhält man aus dem Vergleich mit Diracspinoren. Sie ist nicht offensichtlich im reduzierten Bild.

**Bemerkung:** Unsere Reduktion wirkt sich an dieser Stelle störend aus, da die Automorphismen im reduzierten Bild *äußere* Automorphismen sind. Zum Beispiel wird die Rauminversion im Diracbild durch $\hat{\mathcal{V}} = \gamma_0 \mathcal{V} \gamma_0 = -\mathcal{V}$ vermittelt. Die Reduktion

$$CL_{3,0} \cong CL^+_{1,3} \cong \frac{CL_{1,3}}{\gamma_0} \tag{1-65}$$

eliminiert jedoch $\gamma_0$ aus der Algebra.

## 1-6 Wahl der Hilfsfelder

Um fortfahren zu können, müssen wir uns noch zwei Dinge überlegen. Erstens, wie wir die Hermiteschadjunktion in unserem reduzierten Bild darstellen können und zweitens, welche Elemente die Rolle der spinoriellen Paritätstransformationsmatrix $i\gamma_0$ übernehmen.

Zur Wahl der Konjugation betrachten wir die zwei Möglichkeiten, die eine Reversion beinhalten. Da die Reversion, ähnlich dem Transponieren, die Reihenfolge der Faktoren vertauscht, transformiert sie Linksmodule in Rechtsmodule und umgekehrt. Nun sind Spinoren Elemente eines Darstellungsraumes und als solche auch Elemente eines Links– (Rechts) Moduls. Um c–zahlwertige Produkte zu bilden, müssen zwei verschiedene Spinoren (rechts und links) kontrahiert werden.

Betrachten wir nun die Wirkung der gewöhnlichen Hermiteschadjunktion auf die $\gamma$–Matrizen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma_\mu = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \\ \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}^\dagger &= \{\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3\}. \end{aligned} \tag{1-66}$$

Damit schreiben sich die $\sigma$–Matrizen als

$$(\sigma^\mu)^\dagger = (\gamma^\mu\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu\gamma^0 = \sigma^\mu. \tag{1-67}$$

In der Algebra ist aber

$$\begin{aligned} \{\mathbf{1}, e^k\}^{\tilde{}} &= \{\mathbf{1}, e^k\} \\ \{\mathbf{1}, e^k\}^{-} &= \{\mathbf{1}, -e^k\} \end{aligned} \tag{1-68}$$

und wir erkennen, daß wir die Reversion wählen müssen, um die Adjunktion darzustellen. Zudem liegen Produkte der Form $aa^{\tilde{}}$ im reellen Teil der Paulialgebra:

$$aa^{\tilde{}} \in \mathbf{K} \oplus \mathcal{V}. \tag{1-69}$$

Produkte der Form $aa^{-}$ hingegen liegen im Bild $\mathbf{C}$ in der Algebra selbst, also

$$aa^{-} \in \mathbf{K} \oplus i\mathbf{K}. \tag{1-70}$$

Wir müssen also die Reversion $\tilde{}$ wählen.

Um die Hilfsfelder zu wählen, stellen wir eine Nebenrechnung an. Dazu sei $q \in \mathbf{H}$ ein Quaternion. Dann läßt sich $q$ wie folgt nach quaternionischen Einheiten $i_0 = \mathbf{1}, i_1, i_2, i_3 = i_1 i_2$ zerlegen

$$q \;=\; q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3. \tag{1-71}$$

Die Quaternionenkonjugation ist nun die Verallgemeinerung der Komplexkonjugation und schreibt sich als [Ebbi 91]

$$q\tilde{\ } \;=\; q_0 i_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3 \tag{1-72}$$

($^-$ könnte hier ebenfalls verwendet werden [Bayl 92a, Bayl 92b, Vold 93a, Vold 93b]). Betrachten wir nun die Multiplikationstabelle der Einheiten, so erhalten wir [Clif 78]

$$\begin{array}{c|cccc} i_r \times i_s & \mathbf{1} & i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 & i_1 & \mathbf{-1} & i_3 & -i_2 \\ i_2 & i_2 & -i_3 & \mathbf{-1} & i_1 \\ i_3 & i_3 & i_2 & -i_1 & \mathbf{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} i_r\tilde{\ } \times i_s & \mathbf{1} & i_1 & i_2 & i_3 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & i_1 & i_2 & i_3 \\ -i_1 & -i_1 & \mathbf{1} & -i_3 & i_2 \\ -i_2 & -i_2 & i_3 & \mathbf{1} & -i_1 \\ -i_3 & -i_3 & -i_2 & i_1 & \mathbf{1} \end{array}\;. \tag{1-73}$$

Der erste Fall gibt in unserer Sprechweise die Signatur $-2$. Im zweiten Fall bemerken wir, daß die Summe über die nichtdiagonalen Elemente verschwindet. Es ergibt sich somit

$$\sum_{i,j} q_i\tilde{\ }\mathbf{1} q_j \;=\; \sum_{ij} q_i q_j i_i\tilde{\ } i_j = \sum_i q_i^2. \tag{1-74}$$

Genau diese Eigenschaft benötigen wir für einen Äquivalenzbeweis, wie wir ihn für zwei Hilfsfelder führten (1-33,1-42). Der kinetische Term würde eine Summe von 1 bis 3 beinhalten. Eine analoge Symmetrieüberlegung ergibt ebenfalls eine Invarianz. Damit sind wir wieder bei der skalaren Wechselwirkung, aber mit 4 Hilfsfeldern.

Nun existiert innerhalb der Paulialgebra eine Kopie der Quaternionen, wenn wir folgende Identifikation nach Clifford vornehmen [Clif 78]:

$$i_0 = \mathbf{1}, i_1 = e_{23}, i_2 = e_{13}, i_3 = e_{12}. \tag{1-75}$$

Es gilt dann wie oben $k, l \in (1,2,3)$, $i_k^2 = -1$, $i_k i_l = -i_l i_k$, $l \neq k$ und $i_1 i_2 = e_{23} e_{13} = -e_{2331} = e_{12} = i_3$.

So ergibt sich, daß die Quaternionenkonjugation von der Reversion *oder* der Konjugation gebildet werden kann, wir wählen jedoch die Reversion.

Die Signatur kann nun dadurch verändert werden, daß ein 4–Tupel von Elementen $\{x_1, \ldots, x_4\}$ aus der Basis der Paulialgebra gewählt wird. Je nachdem, ob ein $x_i$ aus $\mathbf{1}$, $\mathcal{V}$ oder $i$, $i\mathcal{V}$ gewählt wird, ist $x_i x_i = +1$ oder $-1$. Von den $2^4$ möglichen Kombinationen verbleiben durch Ordnen 5 unterschiedliche Fälle:

$$\begin{aligned} sig = +4 &\;:\; x_i \ni \{Id, e_1, e_2, e_3\} \\ sig = +2 &\;:\; x_i \ni \{Id, e_1, e_2, e_{12} = ie_3\} \\ sig = \phantom{+}0 &\;:\; x_i \ni \{Id, e_1, i = e_{123}, ie_1 = e_{23}\} \\ sig = -2 &\;:\; x_i \ni \{Id, ie_1 = e_{23}, -ie_2 = e_{13}, ie_3 = e_{12}\} \\ sig = -4 &\;:\; x_i \ni \{i = e_{123}, ie_1, -ie_2, ie_3\}. \end{aligned} \tag{1-76}$$

**Bemerkung:** In den Fällen $sig = \pm 2, 0$ ist es möglich, eine quaternionische Struktur zu finden. Dies gelingt nicht in den Fällen $sig = \pm 4$.
**Bemerkung:** Da wir in der Darstellung $\mathbf{C} \otimes \mathcal{V}$ arbeiten, unterscheidet sich die übliche Komplexkonjugation von der hier verwendeten, siehe [Loun 93b]. Wir müssen daher alle 5 Fälle untersuchen und können nicht auf die Symmetrie $g^*(k,l) = g(l,k)$ [Benn 87, Budi 88] zurückgreifen.

Nun soll noch angegeben werden, welche Wechselwirkungen im reduzierten Bild möglich sind. Es ist mit den Definitionen (1-44)

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}\mathbf{1}\Psi &= \phi\tilde{\ }\gamma^0\phi \\
\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi &= \phi\tilde{\ }\gamma^\mu\gamma^0\phi = \phi\tilde{\ }\sigma^\mu\phi \\
\bar{\Psi}\Sigma^{\mu\nu}\Psi &= \phi\tilde{\ }\Sigma^{\mu\nu}\gamma^0\phi \\
\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi &= \phi\tilde{\ }\gamma^\mu i\gamma^0\phi = \phi\tilde{\ }\sigma^\mu i\phi \\
\bar{\Psi}\gamma^5\Psi &= \phi\tilde{\ } i\gamma^0\phi.
\end{aligned} \tag{1-77}$$

Nur Vektor– und Axialvektorkopplung können im reduzierten Bild gefunden werden, da alle anderen Ausdrücke ein nicht in der Paulialgebra liegendes $\gamma^0$ enthalten.

### 1-6.1 Die Signaturen $\pm 4, \pm 2$ und 0

Ziel ist es nun, Wechselwirkungen zu finden, die einen Äquivalenzbeweis wie in (1-9,1-33) und (1-42) zulassen. Dabei beschränken wir uns auf bilineare Ausdrücke. Ist deren Äquivalenz gezeigt, so überträgt sich dies sogar für (endliche) Potenzen auf die Wechselwirkung in $\bar{\Psi}M\Psi$.

Es seien nun $e_\rho$ die Basiselemente der Paulialgebra und $x_i$ eine Hilfsfeldtransformation wie in (1-76) definiert, dann lautet unsere Ersetzung (1-47)

$$\phi \quad\rightarrow\quad \phi' = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i x_i\phi \tag{1-78}$$

und der allgemeinste bilineare Ausdruck wird durch

$$\begin{aligned}
M &= \sum_\rho a_\rho e_\rho \\
\phi\tilde{\ }M\phi &= \phi\tilde{\ }a_\rho e_\rho\phi
\end{aligned} \tag{1-79}$$

gegeben. Für die Invarianz muß somit

$$\phi\tilde{\ }M\phi \;\stackrel{!}{=}\; \phi'\tilde{\ }M\phi' \tag{1-80}$$

gezeigt werden. Dies führt auf

$$a_\rho\phi\tilde{\ }e_\rho\phi \;\stackrel{!}{=}\; \frac{1}{\sqrt{N\tilde{\ }N}}\sum_{ij} a_\rho\phi\tilde{\ }x_i e_\rho x_j\phi. \tag{1-81}$$

Nun kann die rechte Seite wieder nach Basiselementen $e_\rho$ entwickelt werden. Die reziproke Basis zu den $e_\rho$ ist durch die $e_\rho\tilde{\ }$ gegeben, wegen $e_\rho\tilde{\ }e_\nu = \delta_{\rho\nu}$. Wir beschränken uns auf die Algebra und betrachten die schärfere Äquivalenz

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N\tilde{}N} a_\rho e_\rho &\stackrel{!}{=} a_\rho \sum_{ijv} x_i\tilde{} e_\rho x_j e_\nu \tilde{} e_\nu \\
\sqrt{N\tilde{}N} a_\nu &\stackrel{!}{=} a_\rho \sum_{ij} x_i\tilde{} e_\rho x_j e_\nu \tilde{}
\end{aligned} \tag{1-82}
$$

oder kurz

$$
\lambda \vec{a} = \vec{a} R. \tag{1-83}
$$

Sind wir also in der Lage, diese $8 \times 8$ Eigenwertgleichung zu lösen, so stellen die Eigenvektoren invariante bilineare Ausdrücke dar. Dies soll jedoch nicht in der reellen $8 \times 8$ Darstellung, sondern in der „komplexen“ $4 \times 4$ Darstellung geschehen. Die Vektoren und die Matrix $R$ sind dann formal komplex. Für die Entwicklung muß dann auf $\mathbf{1}$ und $i$ projeziert werden [Bayl 92a, Dora 93d, Vrog 93]. Wir erhalten

$$
[R_{\rho\nu}] = < \sum_{i,j} x_i\tilde{} e_\rho x_j e_\nu \tilde{} > -i < \sum_{i,j} x_i\tilde{} e_\rho x_j e_\nu \tilde{} i >, \tag{1-84}
$$

wobei nun auch $\rho$ und $\nu$ nur von 0 bis 3 laufen (im Programm von 1 bis 4). Es werden nur Elemente aus $\mathbf{1}$ und $\mathcal{V}$ benutzt. Die Klammer $< \ldots >$ bedeutet die Projektion auf den skalaren Anteil. Dies entspricht der Spurbildung. Durch solch ein Vorgehen wird der algebraische Aufwand erheblich reduziert.

Die weitere Auswertung erfolgt unter Zuhilfenahme des Computeralgebraprogrammes MapleV3 und des Algebrapaketes „Clifford“ von R. Ablamowicz [Abla 95].

Befehle werden in `typewriter` gesetzt. Zuerst laden wir das „Clifford“–Modul. Dies ermöglicht es uns, mit der Paulialgebra symbolisch zu rechnen. Der Befehl `dim` legt die Dimension der Algebra fest, `B:=linalg[diag](1,1,1)` definiert die euklidische Metrik der Paulialgebra. Danach wird die Basis definiert, wobei $e_i \wedge e_j$ = `eiwej` gesetzt werden muß. Die duale Basis wird über die Reversion erzeugt und in der Liste `rBas` gespeichert. Danach werden noch Matrizen definiert, die die Ergebnisse jeweils aufnehmen sollen. Die Ausgaben stehen im üblichen TEX–Formelsatz.

```
> restart:with(Clifford):
> dim:=3: B:=linalg[diag](1,1,1):
> Bas:=[Id,e1,e2,e3,e1we2we3,e2we3,-e1we3,e2we3];
> rBas:=map(reversion,Bas);
> M:=linalg[matrix](4,4):
> R:=linalg[matrix](4,4):
```

$$
\begin{aligned}
Bas &:= [\,Id, e1, e2, e3, e1we2we3, e2we3, -e1we3, e2we3\,] \\
rBas &:= [\,Id, e1, e2, e3, -e1we2we3, -e2we3, e1we3, -e2we3\,]
\end{aligned} \tag{1-85}
$$

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir die Hilfsfeldtransformation $x_i$ und deren Dual $x_i\tilde{}$ hier für die Signatur 4 und speichern sie in den Listen `Hfd` und `rHfd`.

```
> Hfd:=[Id,e1,e2,e3];
> rHfd:=map(reversion,Hfd);
```

$$\begin{aligned} Hfd &:= [Id, e1, e2, e3] \\ rHfd &:= [Id, e1, e2, e3]. \end{aligned} \tag{1-86}$$

Nun soll zur Kontrolle die Multiplikationstabelle der $x_i$ (hier in `Hfd` gespeichert) angegeben werden. Das Ergebnis speichern wir in `M`. Zusätzlich bestimmen wir die Summe $Sum = \sum_{ij} x_i\tilde{}\, x_j$ (Zwischenergebnis in `rM[i,j]`).

```
> Sum:=0:
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
> M[i,j]:=cmul(Hfd[i],Hfd[j]):
> rM[i,j]:=cmul(rHfd[i],Hfd[j]):
> Sum:=Sum+rM[i,j]:
> od; od;
> 'M'=evalm(M);
> 'Sum'=Sum;
```

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} Id & e1 & e2 & e3 \\ e1 & Id & e1we2 & e1we3 \\ e2 & -e1we2 & Id & e2we3 \\ e3 & -e1we3 & -e2we3 & Id \end{bmatrix} \\ Sum &= 4\,Id + 2\,e1 + 2\,e2 + 2\,e3 \end{aligned} \tag{1-87}$$

Wir erkennen in `M` die Signatur +4 und stellen fest, daß die Summe über alle `M[i,j]` in $< \mathbf{1}, \mathcal{V} >$ liegt. Als nächstes wird die Matrix `R` berechnet und ausgegeben. Dies geschieht mit

```
> for i from 1 to 4 do
> for j from 1 to 4 do
> Sum:=scalarpart(eval(eval(sum(sum(
> ''''cmul''''(rHfd[a],'''cmul'''(Bas[i],''cmul''(
> Hfd[b],rBas[j]))),a=1..4),b=1..4) ))):
> R[i,j]:=scalarpart(Sum)-I*scalarpart(cmul(Sum,e1we2we3)):
> od; od;
> 'R'=evalm(R);
```

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-88}$$

Das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt man mit

```
> linalg[charpoly](R,lambda)=0;
> factor(");
> solve(");
> linalg[eigenvects](R);
```

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 24\,\lambda^2 - 16\,\lambda - 4\,\lambda^3 + 16 &= 0 \\ \left(\lambda^2 - 8\,\lambda + 4\right)\,(\,\lambda + 2\,)^2 &= 0 \\ 4 + 2\,\sqrt{3}, 4 - 2\,\sqrt{3}, -2, -2. & \end{aligned} \tag{1-89}$$

Die Eigenvektoren lauten in der etwas gewöhnungsbedürftigen Schreibweise von MapleV3

$$\begin{aligned} &[\,-2, 2, \{\,[\,0\ \ -1\,1\,0\,], [\,0\ \ -1\,0\,1\,]\,\}\,], \\ &\left[\%1, 1, \left\{\left[1\ \frac{1}{6}\,\%1 - \frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\%1 - \frac{2}{3}\,\frac{1}{6}\,\%1 - \frac{2}{3}\right]\right\}\right] \\ &\%1 := \mathrm{RootOf}(\,\_Z^2 - 8\,\_Z + 4\,). \end{aligned} \tag{1-90}$$

Angegeben wird zuerst der Eigenwert, danach die Entartung. `%1` steht für die Lösungen des `RootOf` ausdruckes. Wir erkennen den zweifach entarteten Eigenwert $-2$ und die beiden Eigenräume zu $4 \pm 2\sqrt{3}$. Es sind in diesem Fall maximal zwei Hilfsfelder möglich. Da wir an Lorentz–invarianten Wechselwirkungen interessiert sind, ist dies nicht ausreichend.

Alle weiteren Fälle lassen sich nun mit den oben angeführten Programmschritten auswerten. Daher verzichten wir im Weiteren auf die MapleV3 Eingaben und diskutieren nur die Ergebnisse. Für die Signatur $+2$ definieren wir

$$\begin{aligned} Hfd &:= [\,Id, e1, e2, e1we2\,] \\ rHfd &:= [\,Id, e1, e2, -e1we2\,]. \end{aligned} \tag{1-91}$$

Die Signatur ergibt sich damit zu $+2$, und die Summe über die Basiselemente wird zu

$$Sum = 4\,Id + 4\,e2 = 8\mathcal{P}. \tag{1-92}$$

Das Auftreten eines Projektors $\mathcal{P}$ ist an dieser Stelle typisch. Für die Matrix `R` erhalten wir

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-93}$$

mit folgendem charakteristischen Polynom und den Eigenwerten

$$\begin{aligned} (\,\lambda - 4\,)\,\lambda^3 &= 0 \\ 4, 0, 0, 0 & \end{aligned} \tag{1-94}$$

sowie den Eigenvektoren

$$\begin{aligned}&[0,3,\{[0\,1\,0\,0],[-1\,0\,1\,0],[0\,0\,0\,1]\}],\\&\quad[4,1,\{[1\,1\,0\,0]\}].\end{aligned}\tag{1-95}$$

Dieser Fall ist mit dem dreifach entarteten Eigenwert Null sehr singulär. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 lassen sich mit demselben Zahlenwert normieren, wie der Eigenvektor zum Eigenwert 4. Damit steht uns hier ein 4–dimensionaler „Eigenraum“ zur Verfügung. Durch Linearkombinationen erreichen wir nun die invarianten Kombinationen

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= Id\\ \vec{v}_2 &= e_1\\ \vec{v}_3 &= e_2\\ \vec{v}_4 &= e_3.\end{aligned}\tag{1-96}$$

Da wir komplexe Linearkombinationen zugelassen haben, führt dieser Fall zu einer Vektor–Axialvektorkopplung im ursprünglichen Bild. Wir haben hier also eine nichttriviale reguläre Verallgemeinerung gefunden.

Es geht weiter mit dem Fall der Signatur 0. Diese ist definiert durch

$$\begin{aligned}Hfd &:= [\,Id, e1, e1we2we3, e2we3\,]\\ rHfd &:= [\,Id, e1, -e1we2we3, -e2we3\,].\end{aligned}\tag{1-97}$$

Wieder ergibt die Summation über die Hilfsfelder einen Projektor

$$Sum = 4\,Id + 4\,e1.\tag{1-98}$$

Die Matrix `R` schreibt sich als

$$R = \begin{bmatrix}4&4&0&0\\4&4&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\tag{1-99}$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^4 - 8\,\lambda^3 = 0\tag{1-100}$$

und wir erhalten bis auf einen Faktor 4 denselben Fall wie für die Signatur 2, sodaß wir auf die weitere Auswertung verzichten.

Die Signatur $-2$ erhält man mit der Definition

$$\begin{aligned}Hfd &:= [\,Id, e2we3, e1we3, e1we2\,]\\ rHfd &:= [\,Id, -e2we3, -e1we3, -e1we2\,].\end{aligned}\tag{1-101}$$

Dieser Fall ist der oben schon untersuchte quaternionische Fall, die Hilfsfeldsumme ergibt sich somit zu $4\mathit{Id}$. Dieser Fall war eine 4-dimensionale Verallgemeinerung für die skalare Wechselwirkung, die im reduzierten Formalismus nicht mehr vorkommt. Es ergibt sich hier[15]

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 4)\left(\lambda^3 - 64\right) &= 0 \\ (\lambda - 4)^2\left(\lambda^2 + 4\,\lambda + 16\right) &= 0 \\ 4, 4, -2 + 2\,I\,\sqrt{3}, -2 - 2\,I\,\sqrt{3}, & \end{aligned} \tag{1-102}$$

damit also nur ein zweidimensionaler Eigenraum. Wir verzichten auf die Angabe der Eigenvektoren. Es ergeben sich zudem hier auch komplexe Eigenwerte, die mit unserer Hermiteschen Normierung $\sqrt{N\tilde{\ }N}$ nicht erzeugt werden können wegen $N \in \mathbf{C} =< \mathbf{1}, i >$.

Das Ausscheiden dieses Falles ist völlig konform mit der Benutzung des reduzierten Bildes. Um auch skalare Wechselwirkungen zuzulassen, müßte unbedingt die volle Theorie untersucht werden.

Der letzte Fall ist die Signatur $-4$ mit den Hilfsfeldtransformationen

$$\begin{aligned} \mathit{Hfd} &:= [\, \mathit{e1we2we3}, \mathit{e2we3}, \mathit{e1we3}, \mathit{e1we2}\,] \\ \mathit{rHfd} &:= [\, -\mathit{e1we2we3}, -\mathit{e2we3}, -\mathit{e1we3}, -\mathit{e1we2}\,]. \end{aligned} \tag{1-103}$$

Wir erhalten für die Hilfsfeldsumme

$$\mathit{Sum} \;=\; 4\,\mathit{Id} + 2\,\mathit{e1} - 2\,\mathit{e2} + 2\,\mathit{e3} \tag{1-104}$$

und für die Matrix `R` bis auf die Vorzeichen das Analogon zu dem Fall Signatur $+4$.

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 24\,\lambda^2 - 16\,\lambda - 4\,\lambda^3 + 16 &= 0 \\ \left(\lambda^2 - 8\,\lambda + 4\right)(\lambda + 2)^2 &= 0 \\ 4 + 2\,\sqrt{3}, 4 - 2\,\sqrt{3}, -2, -2. & \end{aligned} \tag{1-105}$$

Eine Auswertung erübrigt sich.

Einzelne Untersuchungen an $8 \times 8$ reellen Matrizen bestätigen unsere Überlegungen. So findet man dort 7–fach entartete Eigenräume zum Eigenraum 0. Diese Eigenvektoren besitzen dieselbe Form wie (1-107).

[15] Diese Matrix hat die interessante Eigenschaft, daß sie, bis auf einen Faktor 4, eine zyklische Gruppe der Ordnung 3 generiert [Chis 89].

### 1-6.2 Dynamisch reguläre Theorie

Obgleich wir nicht in der Lage waren, die nichtreduzierte Diractheorie zu untersuchen, haben wir eine Wechselwirkung gefunden, die eine Verallgemeinerung zu 4 Hilfsfeldern zuläßt. Die invariante Bilinearform war durch

$$M = a_\rho e_\rho \tag{1-106}$$

gegeben. Komplexe Linearkombinationen der gefundenen 4 Eigenvektoren erlauben uns folgende Wechselwirkungsterme:

$$\begin{aligned} M &\in \{\mathbf{1}, e_1, e_2, e_3, i, ie_1, ie_2, ie_3\} \\ &\cong \{\sigma^\mu, i\sigma^\mu\}. \end{aligned} \tag{1-107}$$

Dies führt im ursprünglichen Diracbild nun mit (1-44,1-77) auf

$$M \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\}. \tag{1-108}$$

Der kinetische Term kann ebenfalls gebildet werden und wir können die Überlegungen des Äquivalenzbeweises (1-9) und (1-33) nun mit 4 Hilfsfeldern nachvollziehen. Damit erhalten wir als Mehrfeldhamiltondichte

$$\begin{aligned} H[\psi_i] &= \frac{i}{2}\int \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{\lambda_j}\Big[\bar\psi_j\gamma^k\partial_k\psi_j - \partial_k\bar\psi_j\gamma^k\psi_j\Big]dr^3 \\ &\quad + \frac{g}{16}\int \Big[\sum_{j,k,l,m=1}^{4} \bar\psi_j\gamma^\mu\psi_k\bar\psi_l\gamma_\mu\psi_m \\ &\quad + \sum_{j,k,l,m=1}^{4} \bar\psi_j\gamma^\mu\gamma^5\psi_k\bar\psi_l\gamma_\mu\gamma^5\psi_m\Big]dr^3 \end{aligned} \tag{1-109}$$

mit $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4 = 8$ (Signatur=0). Die Struktur der Wechselwirkung ergibt sich aus der direkten Summenstruktur $< \mathbf{1}, i > \otimes\mathcal{V}$. In $\mathbf{C}\otimes\mathcal{V}$ sind auch nicht–Hermitesche Wechselwirkungen enthalten, die jedoch durch $MM^\dagger$ ausgeschlossen werden.

Wieder bricht die Quantisierung die starre Verbindung der Hilfsfelder auf und die $\psi_i$ müssen als unabhängig betrachtet werden. Dies führt uns auf Kommutatorrelationen wie in (1-20)

$$\{\psi_i^\dagger, \psi_j\}_+ = \lambda_i\delta_{ij}. \tag{1-110}$$

Und wieder ist es angebracht, wie in (1-20) zum großkanonischen Formalismus überzugehen und chemische Potentiale einzuführen. Man kann zum Lagrangeformalismus übergehen. Mit dem aufsummierten Feld

$$\Psi = \sum_{i=1}^{4}\psi_i \tag{1-111}$$

und dem Zusammenhang vom chemischen Potential $\mu_i$ und den $\lambda_i$ Normierungen

$$\lambda_i = \prod_{j,i\neq j}\frac{1}{\mu_i - \mu_j} \tag{1-112}$$

gelangen wir zu der dynamisch regularisierten Feldgleichung

$$\begin{aligned}\Big[\prod_{i=1}^{4}(i\gamma^\mu\partial_\mu-\mu_i)\Big]\Psi &= \frac{g}{16}\Big[\bar\Psi\gamma^\mu\Psi\gamma_\mu\Psi+\bar\Psi\gamma^\mu\gamma^5\Psi\gamma_\mu\gamma^5\Psi\Big] \\ \{\bar\Psi,\Psi\}_+ &= 0. \end{aligned} \tag{1-113}$$

Wir haben gesehen, daß die Parität im Zweifeld–Fall als Transformation geeignet war. Nun wollen wir untersuchen, welche Transformation hier zum Ziel führt.

Für die Signatur 0 hatten wir als Hilfsfeldtransformation

$$x_i \in \{Id, e_1, i, ie_1\} \tag{1-114}$$

im reduzierten Bild. Dies ergibt, abgesehen von Phasenfaktoren und der unwesentlichen Umbenennung $e_1 \to e_2$, im ursprünglichen Bild mit (1-44) und (1-77),

$$x_i'\gamma_0 \in \{\gamma_0, \gamma_2, \gamma_5\gamma_0, \gamma_1\gamma_3\}. \tag{1-115}$$

Vergleicht man dies mit den Spinordarstellungen der diskreten Transformationen, z.B. bei Bjorken und Drell [Bjor 66], so erhält man modulo Phasen, die allerdings für die Regularisierung eine wesentliche Rolle spielen,

$$x_i'\gamma_0 \in \{P, CP, CPT, TP\}. \tag{1-116}$$

Als Ergebnis erhalten wir also 4 „dynamisch unabhängige“ Felder, die zwar die regularisierenden Eigenschaften erfüllen müssen, ansonsten aber in verschiedenen Zusammenhangsgebieten der Lorentzgruppe gebildet werden. Dies wird uns bei der Hestenes–Formulierung der Diractheorie wieder begegnen [Parr 89].

## 1-7 Resümee

Abschließend wollen wir in Thesenform das Erreichte zusammenfassen, um in Teil II und Teil III darauf zurückgreifen zu können. Ebenfalls soll hier versucht werden, eine erste heuristisch motivierte Interpretation der Hilfsfelder anzuführen. Dabei beziehen wir uns *nicht* auf das Zerlegungstheorem, für dessen Erläuterung hier noch nicht genügend Informationen zur Verfügung stehen.

- Die Theorie ist dynamisch regulär, d.h. alle auftretenden Integrale lassen sich berechnen.

- Die $\mu_i$ sind chemische Potentiale, keine „Massen“. Die $\lambda_i$ sind endliche Größen. Es ergeben sich durch ihre Festlegung Beschränkungen an die $\mu_i$. Negative chemische Potentiale sind nichts ungewöhnliches [Stum 76].

- Die $\psi_i$ beschreiben verschiedene Subteilchen, deren Wechselwirkung sehr speziellen Beschränkungen unterliegt.

- Die regularisierende Wirkung der $\lambda_i$ beruht auf der Tatsache, daß sich die kinetischen Energien der Subteilchen gerade wegen $\sum\lambda_i = 0$ kompensieren. Das Summenfeld $\Psi$ ist jedoch *nichtstatisch*.

- Die $\psi_i$ transformieren sich ineinander mit der diskreten Untergruppe der Spingruppe **Spin(1,3)**.
- Nur das Summenfeld $\Psi$ ist physikalisch zugänglich.
- Der Vertex muß noch regularisiert werden, um eine Normaltransformation zuzulassen, siehe dazu jedoch Kapitel 2 und Teil II.
- Es ist nicht möglich, die Hilfsfeldtransformationen zu dynamisieren, d.h. $x(t)_i$ zu wählen. Solch eine Wahl führt notwendig auf $\dot{x}(t)_i = 0$, siehe dazu auch [Namb 73].
- Die hier vorgestellte Methode ist erheblich spezieller als das Zerlegungstheorem [Stum 82, Gross 83], welches von vornherein von höheren Ableitungen ausgeht. Es liegt jedoch nahe, die hier erhaltene Interpretation der Subfelder auch im Falle des Zugangs mit Hilfe des Zerlegungstheoremes anzuwenden. Siehe dazu die Interpretation in Teil III.
- Die Methode ist für ein praktisches Arbeiten mit realistischen Modellen (Isospin, etc.) viel zu aufwendig.
- Wählt man die $x_i$ aus einer Algebra, die mit der $\gamma$–Algebra kommutiert, etwa $< x_i > \otimes < \gamma >$, so können alle Wechselwirkungen regularisiert werden, da sie sich wie die skalare Wechselwirkung verhalten. Die Hilfsfelder sind dann jedoch unabhängige Felder und die Aussage scheint leer zu sein.

# Kapitel 2

# Regularisierung des Vertex

Nachdem wir uns in Kapitel 1 mit dem Problem der dynamischen Regularität beschäftigt haben, sind immer noch Probleme offen. In diesem Kapitel soll ein ebenfalls heuristischer Weg zur Regularität einer Vertexfunktion für ein nichtlineares Spinorfeld aufgezeigt werden. Auch wenn im algebraischen Teil von dieser Art der Überlegungen kein Gebrauch gemacht wird, da dort eine viel einfachere Argumentation ein befriedigendes Ergebnis liefert, so werden uns hier Strukturen begegnen, von denen wir in zukünftigen Arbeiten einiges erwarten dürfen.

Der Grund dafür, daß diese Ausführung dennoch in der Dissertation behandelt wird, besteht darin, daß einerseits das heuristische Vorgehen komplettiert wird und zu einer „endgültigen“ oder „regulären“ Theorie führt und andererseits die algebraische Struktur von großem Interesse ist, besonders in integrablen Modellen und speziell in der Festkörpertheorie. Wir werden aber keine Gelegenheit haben, auf letztere Verbindung näher einzugehen.

Durch einige historische Bemerkungen sei belegt, daß dieses Kapitel ebenfalls einen zentralen Punkt in der Entwicklung der Quantentheorie berührt.

Schon früh, nach der auch heute noch aktuellen mathematischen Formulierung der Quantenmechanik durch John von Neumann [VON N 55], kamen Zweifel an deren Abgeschlossenheit [HEIS 48] auf. Pascal Jordan, Garret Birkhof, Eugene Wigner, J. v. Neumann und Andere untersuchten neue algebraische Strukturen mit verschiedenen Zielsetzungen [JORD 33, JORD 34, BIRK 36]. Ein wesentlicher Punkt bestand darin, den Körper $\mathbf{C}$, der in der Quantenmechanik *zwingend* auftaucht und *nicht* wie z.B. in der Elektrodynamik als formale Rechenhilfe betrachtet werden kann, zu vermeiden. Dies gelang durch die sogenannten $r$–Zahlen[1], heute als Elemente einer Jordanalgebra bekannt. Jordanalgebren sind (ursprünglich) kommutative nicht assoziative $\mathbf{R}$–Algebren [JORD 33, JORD 34]. Heute werden auch allgemeinere Algebren als Jordanalgebren benannt. Es stellt sich heraus, daß die Nichtkommutativität der Quantenmechanik sich in die Nichtassoziativität der Jordanalgebra übersetzen läßt [NAMB 73]. Damit steht zwar keine Verallgemeinerung, dafür aber eine neue Beschreibung zur Verfügung. Da in Jordanalgebren das Assoziativgesetz nicht mehr gilt, sondern durch die schwächere Bedingung der Alternativität [BRAU 66, SCHA 66] ersetzt wird, gestaltet sich das Rechnen als sehr mühsam. Wohl aus diesem Grund erlangten Jordanalgebren keine große Bedeutung in der Physik. In neuerer Zeit erleben die Jordanalgebren eine Renaissance in supersymmetrischen Stringmodellen und in der konformen Feldtheorie [GÜNA 91, GÜNA 92]. Uns

[1] $r$–Zahl soll eine reelle Formulierung ausdrücken.

beschäftigt eine Verbindung zu ternären Algebrastrukturen, den sogenannten Tripelsystemen [TITS 62, KANT 64]. Jodanalgebrastrukturen findet man auf natürliche Weise in Cliffordalgebren [SOBC 81].

In gewöhnlichen Algebren haben Addition und Multiplikation jeweils eine binäre Struktur

$$
\begin{aligned}
+ \quad &: \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\
&\quad\;\; a + b = c \\
m \quad &: \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\
&\quad\;\; m(a,b) = ab = c'.
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

Es ist jedoch auch möglich, Strukturen auf Tripeln vorzugeben

$$
(a,b,c) \quad \to \quad d. \tag{2-2}
$$

Eine solche Struktur findet sich zusätzlich zur binären Multiplikation in einer Jordanalgebra und wird durch den Assoziator gebildet. Der Assoziator ist das Gegenstück zum Kommutator. Dieser beschreibt die Abweichung von der Kommutativität, während der Assoziator die Abweichung von der Assoziativität ausdrückt. Man definiert ihn als

$$
(a,b,c) \quad := \quad (ab)c - a(bc) \tag{2-3}
$$

mit dem gewöhnlichen Algebraprodukt durch Hintereinanderstellen der Algebraelemente. In einer assoziativen Algebra verschwindet dieser Ausdruck offensichtlich. Der Assoziator hängt mit Tripelsystemen im obigen Sinn zusammen.

Die Beziehung zu den Cliffordalgebren und zur Supersymmetrie erfolgt über sogenannte verallgemeinerte Cliffordalgebren [DIXO 78, DIXO 81, RAMA 85]. Diese stehen in enger Verbindung zu den Duffin–Kemmer–Petiau–Gleichungen und Matrizen [ROMA 61, KROL 93B], jedoch in diesem Fall für beliebige Dimensionen und unter Einschluß der Supersymmetrie. Hier ist die Verbindung zum Teil II der Arbeit zu sehen.

## 2-1 Tripelsysteme

Wir folgen hier in weiten Teilen der Darstellung von Okubo [OKUB 93A] [OKUB 93B] und [OKUB 86].

### 2-1.1 Definition von Tripelsystemen

Als erstes sollen Tripelsysteme definiert werden. Dabei legen wir den größten Wert auf eine Motivation der Definitionen, denn nur dadurch gelingt es uns, das Modell für unseren Fall nutzbar zu machen.

Sei nun $\mathcal{V}$ ein endlichdimensionaler $\mathbf{K}$–Vektorraum der Dimension $N$. Die Elemente von $\mathcal{V}$ werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Weiterhin besitze $\mathcal{V}$ ein nicht ausgeartetes Innenprodukt, das wir als $< .|. >$ schreiben. Es ist dann

$$
\begin{aligned}
< .|. > \quad &: \quad \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbf{K} \\
&\quad\;\; < x|y >= \alpha \in \mathbf{K}.
\end{aligned}
\tag{2-4}
$$

Das Tripelprodukt wird als $[x,y,z]$ notiert, es bildet nach $\mathcal{V}$ ab. Wir fordern nun mit $x,y,z,u,v,w \in \mathcal{V}, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{K}$

$$
\begin{aligned}
&i) && <x|y>=<y|x> \\
&ii) && [x,y,z]=[y,z,x]=-[z,y,x] \\
&iii) && <w|[x,y,z]> \quad \text{ist total antisymmetrisch in } x,y,z \text{ und } w \\
&iv) && <[x,y,z]|[u,v,w]>=\alpha\Big\{ \\
& && <x|u><y|v><z|w>+<y|u><z|v><x|w> \\
& && +<z|u><x|v><y|w>-<x|w><y|v><z|u> \\
& && -<y|w><z|v><w|u>-<z|w><x|v><y|v>\Big\} \\
& && +\beta\Big\{<x|u><y|[z,v,w]>+<y|u><z|[x,v,w]> \\
& && +<z|u><x|[y,v,w]>+<x|v><y|[z,w,u]> \\
& && +<y|v><z|[x,w,u]>+<z|v><x|[y,w,u]> \\
& && +<x|w><y|[z,u,v]>+<y|w><z|[x,u,v]> \\
& && +<z|w><x|[y,u,v]>\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2-5}
$$

Wir können die Bedingung (2-5-iv) auch äquivalent schreiben als

$$
\begin{aligned}
&iv)' && [[x,y,z],u,v]=\{ \\
& && \alpha\{<y|v><z|u>-<y|u><z|v>\}-\beta<u|[v,y,z]>\}x \\
& && +\alpha\{<z|v><x|u>-<z|u><x|v>\}-\beta<u|[v,z,x]>\}y \\
& && +\alpha\{<x|v><y|u>-<x|u><y|v>\}-\beta<u|[v,x,y]>\}z \\
& && -\beta\{<x|v>[u,y,z]+<y|v>[u,z,x]+<z|v>[u,x,y] \\
& && +<x|u>[v,z,y]+<y|u>[v,x,z]+<z|u>[v,y,x]\}.
\end{aligned}
\tag{2-6}
$$

Für unsere Zwecke reicht dieses Tripelsystem vollständig aus. Würden wir jedoch Systeme betrachten, in denen die Kopplungskonstante *keine* Konstante ist, so müßte ein $\theta$–abhängiges Tripelprodukt eingeführt werden. Dies ist ein häufiger Fall in der Feldtheorie, insbesondere in der QCD und dort unter dem Stichwort „running coupling constant“ bekannt. Zweifelsohne müßte dann $\theta$ eine Funktion der Energie sein.

Ein weiteres Anwendungsgebiet solcher Tripelsysteme findet sich überraschenderweise im Zusammenhang mit den Yang–Baxter–Gleichungen (YBE). Dort ist das $\theta$–abhängige System unverzichtbar. Man definiert (Reihenfolge der Variablen beachten!)

$$
\begin{aligned}
[z,x,y]_\theta \;:=\;& P(\theta)[x,y,z] \\
&+A(\theta)<x|y>z+B(\theta)<z|x>y+C(\theta)<z|y>x
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

mit Funktionen $A(\theta),B(\theta),C(\theta)$ und $P(\theta)$. Um den Zusammenhang zu den YBE herzustellen, definieren wir die Dualbasis bezüglich des Innenproduktes als

$$
<e^a|e_b> \;:=\; \delta^a_b. \tag{2-8}
$$

Man erhält die Yang–Baxter–Matrix $R^{ab}_{cd}(\theta)$ über

$$R^{ab}_{cd}(\theta)e_a = [e^b, e_c, e_d]_\theta. \tag{2-9}$$

Damit läßt sich nun die YBE wahlweise in ihrer Indexnotation oder im Tripelsystem formulieren. Die äquivalenten Darstellungen lauten mit $\theta' = \theta + \theta''$

$$R^{b'a'}_{a_1a_2}(\theta)R^{c'a_2}_{cd}(\theta')R^{c_2b_2}_{b'c'}(\theta'') \;=\; R^{c'b'}_{b_1c_1}(\theta'')R^{c_2a'}_{a_1c'}(\theta')R^{b_2a_2}_{a'b'}(\theta) \tag{2-10}$$

oder

$$[v, [u, e_j, z]_{\theta'}, [e^j, x, y]_\theta]_{\theta''} \;=\; [u, [v, e_j, x]_{\theta'}, [e^j, z, y]_{\theta''}]_\theta, \tag{2-11}$$

wobei $x = e_{a_1}$, $y = e_{b_1}$, $z = e_{c_1}$, $u = e^{a_2}$ und $v = e^{c_2}$ gilt. Hier ist $\theta$ der „rapidity“ Parameter. Aus der Theorie der YBE weiß man, daß mit den Lösungen der YBE integrable Modelle zusammenhängen. Dies motiviert zusätzlich unsere Erwartung, „reguläre“ Ausdrücke im Vertex damit zu erzeugen.

Die Verbindung zu den Cliffordalgebren läßt sich hier nicht so leicht herstellen. Ein $\theta$–abhängiges Produkt erscheint zwar realisierbar, dies widerspricht jedoch dem globalen geometrischen Charakter der Cliffordalgebra.

Der Übergang vom nicht $\theta$–abhängigen auf das $\theta$–abhängige Tripelprodukt stellt jedoch eine verallgemeinerte Normaltransformation dar. Dies wird ersichtlich, wenn man konstante Funktionen $A, B, C$ und $P$ in (3-209) einsetzt. In diesem Sinne stellt die Untersuchung der Normalordnung in Teil II eine Vorüberlegung zur Einführung einer YB–Symmetrie dar. Cliffordalgebren zu Zopfgruppen werden gegenwärtig erst in der Mathematik untersucht [Ozie 95, Durd 94a, Durd 94b, Marc 94, Maji 94]. Wir wollen diesen Aspekt nicht vertiefen.

### 2-1.2 Motivation der definierenden Relationen

Auf den ersten Blick erscheinen die definierenden Relationen des Tripelsystems (2-5) als willkürlich und unübersichtlich. Es ist also angebracht, den physikalischen und mathematischen Gehalt näher zu erläutern. Um die Definition (2-5-i) besser zu verstehen, betrachten wir eine Symmetrie der YB–Matrix. Gilt

$$R^{ab}_{cd}(\theta) \;=\; R^{ba}_{dc}(\theta), \tag{2-12}$$

so erhält man eine zusätzliche Symmetrie. Tripelsysteme, die dies respektieren nennt man orthogonale Tripelsysteme (OTS). Die Symmetrie des Innenproduktes reflektiert diesen Sachverhalt. Ein antisymmetrisches Innenprodukt führt auf symplektische Tripelsysteme (STS) [Okub 93b].

Um die weiteren Definitionen etwas plausibler zu machen, folgen wir einigen Erläuterungen von Okubo [Okub 93a, Okub 86].

Sei $L$ eine einfache oder halbeinfache Liealgebra über dem Körper der komplexen Zahlen und $\mathcal{V}$ ein irreduzibles $L$–Modul (Darstellungsraum mit irreduzibler Darstellung). Das Tensorprodukt $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ kann dann immer in eine direkte Summe von symmetrischen $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})_S$ und antisymmetrischen $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})_A$ Tensoren zerlegt werden.

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \;=\; (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})_S + (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})_A. \tag{2-13}$$

Im Fall von drei Tensorfaktoren kann eine ebensolche aber kompliziertere Zerlegung mit Hilfe von Young–Tableaux vorgenommen werden [HAME 62]. Die Tableaux werden durch Partitionen unterschieden, z.B. $[1^3]$ total antisymmetrisch, $[3]$ total symmetrisch und $[2,1]$ gemischt symmetrisch. Erfüllt nun das $L$–Modul $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$=[1]) die Bedingungen

$$\begin{aligned} i) \qquad & Dim\ Hom((\mathcal{V}\otimes\mathcal{V})_S \to \mathbf{K}) = 1 \\ ii) \qquad & Dim\ Hom([1^3] \to \mathcal{V}) = 1 \\ iii) \qquad & Dim\ Hom([1^4] \to \mathbf{K}) = 1 \\ iv) \qquad & Dim\ Hom(([1^3]\otimes[1^3])_S \to \mathbf{K}) \leq 2, \end{aligned} \tag{2-14}$$

wobei gilt, daß $Dim\mathcal{W}$ die Dimension des Moduls ist und $Hom(\mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2)$ den Raum der Homomorphismen der $L$–Module von $\mathcal{W}_1$ nach $\mathcal{W}_2$ darstellt, die mit der Wirkung von $L$ verträglich sind, dann implizieren diese Bedingungen die definierenden Relationen des Tripelsystems (2-5).

(2-14-i) erzwingt die Existenz eines symmetrischen Innenproduktes. Die Invarianz unter der Wirkung von $L$ erzwingt die Nichtdegeneriertheit, da $\mathcal{V}$ als irreduzibel angenommen wurde [OKUB 86]. Diese Forderung besagt, daß das Dualprodukt mit dem Innenprodukt übereinstimmt. Damit ist *ein* Dualisomorphismus ausgezeichnet worden. Nun erst kann $\mathcal{V}^*$ eindeutig mit $\mathcal{V}$ identifiziert werden. Die Existenz *eines* total antisymmetrischen Tripelproduktes folgt aus (2-14-ii). Diese Forderung schränkt in essenzieller Weise die Dimension des $L$–Moduls $\mathcal{V}$ ein. Dasselbe begegnet uns im nächsten Abschnitt wieder. Die Bedingung (2-14-iii) erlaubt uns die Bildung von Innenprodukten mit Tripelprodukten. Ein solches Tripelsystem besitzt eine enge Verbindung zu Algebren mit Kompositionsgesetz. Sei

$$\begin{aligned} \cdot\ :\ & \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{V} \\ & x\cdot y = z, \end{aligned} \tag{2-15}$$

dann bedeutet Kompositionsalgebra, daß für das Innenprodukt folgende Relation gilt:

$$< x\cdot y|x\cdot y > \;=\; < x|x >< y|y > . \tag{2-16}$$

Dies steht in sehr enger Beziehung zu der Determinantenformel

$$det(AB) \;=\; det(A)det(B), \tag{2-17}$$

siehe dazu [EBBI 91]. Die Verbindung von (2-14-iv) zu (2-5-iv) erfolgt nun genau über diese Struktur einer Kompositionsalgebra. Man weiß nun durch Hurrwitz [EBBI 91], daß diese nur in 1,2,4 und 8 Dimensionen existieren. Die dazugehörigen Kompositionsalgebren werden als $\mathbf{R}$–Algebra betrachtet; $\mathbf{R}$ selbst, $\mathbf{C}$, die komplexen Zahlen, $\mathbf{H}$, die Hamiltonschen Quaternionen und $\mathbf{O}$, die Cayleyschen Oktaven oder Oktonionen. Die Oktonionen sind nicht mehr assoziativ. Für eine Behandlung von Derivationen und der Komposition auf nicht assoziativen Algebren, siehe [SCHA 66].

## 2-2 Regulärer Vertex

Da wir vornehmlich an der Formulierung eines nichtlinearen Spinorfeldmodelles interessiert sind, können wir auf die Komplikation einer parameterabhängigen Kopplungskonstante verzichten. Man vergleiche jedoch dazu die von Daviau vorgeschlagene Gleichung [Loch 85, Davi 91a, Davi 93b].

Es wird sich später im Teil II zeigen, daß eine Spinorfeldgleichung *immer* auch dynamische Gleichungen für Bosonfelder nach sich zieht, wenn nicht die Dimension gleich eins gewählt wird (über **R**), so daß eine triviale Graduierung vorliegt. Zweifelsohne ist jedoch dann auch die Theorie im Sinne einer Spinorgleichung trivial.

Wir können hier davon ausgehen, daß ein Vertex der Form

$$gV_I^{I_1 I_2 I_3} \Psi_{I_1} \Psi_{I_2} \Psi_{I_3} \tag{2-18}$$

eine hinreichend allgemeine Wechselwirkung beschreibt. Dabei können nun $g$ als konstant, Element **R** sowie $V$ als eine ebenfalls konstante Verknüpfung der spinoriellen Feldoperatoren $\Psi_{I_1} \ldots \Psi_{I_3}$ aufgefaßt werden. Dieser Ansatz ist konform zu Heisenbergs Überlegungen [Heis 67].

Unabhängig von den in Kapitel 1 untersuchten Problemen der dynamischen Regularität und der damit etwa verbundenen Frage der Kompatibilität des Vertexes mit der dort vorgestellten speziellen Methode, stellt sich hier ein neues Problem. Die Feldoperatoren sind nach der Bildung von Erwartungswerten distributionswertig. Es stellt nun ein großes Problem dar, Produkte von Distributionen zu definieren. Ein solches Produkt beraubt die Theorie der Distributionen ihrer Unabhängigkeit von der Wahl des Repräsentanten. Dies stammt daher, daß das Produkt verschiedener Repräsentanten einer singulären Funktion keine neue Repräsentantenklasse bildet, sondern in verschiedene Klassen abbildet. Stromausdrücke können jedoch gebildet werden, da ein Faktor aus dem Raum der Distributionen (Ket) und der andere aus dem Raum der Linearformen stammt (Bra). Hierzu muß eine Dualität definiert sein [Gelf 60].

Ein weiteres Problem bereiten die Ordnungsrelationen. Um von einer klassischen Theorie zu einer Quantentheorie übergehen zu können, sind heuristische Prinzipien nötig. Solche Prinzipien führen im Falle freier Theorien nicht zu Inkonsistenzen. Es treten in der Lagrangefunktion freier Theorien allerdings $p$ und $q$ nur quadratisch auf, (siehe metaplektische Quantisierung und Groenwald–van Hove Theorem [Guil 90]).

Nach dieser Vorrede sind wir in der Lage, einen kompatiblen Vertex mittels der Analyse von Tripelsystemen herzuleiten. Dies ist jedoch in keiner Weise ein ausgezeichneter Vertex oder gar „der“ Vertex schlechthin, wie ihn z.B. Grimm nach Ideen Heisenbergs postulierte [Grim 94]. Wir können hier auch nichts zu der Frage beitragen, ob eine Klassifizierung der Tripelsysteme alle möglichen Vertices liefern würde.

Gesucht sind also Lösungen des Tripelsystems (2-5) ohne $\theta$–Abhängigkeit. Diese Lösungen sind somit *keine* Lösungen der YBE. Wir können die Ergebnisse von Okubo übernehmen [Okub 93a, Okub 93b].

**Theorem:** *Es gibt drei Klassen von Lösungen zum Tripelsystem (2-5)*:

$$\begin{aligned} &a) \quad N = 8, \quad \text{mit } \alpha^2 = \beta \\ &b) \quad N = 4, \quad \text{mit } \beta = 0 \\ &c) \quad [[x,y,z],u,v] \equiv 0, \quad \text{mit } \alpha = \beta = 0. \end{aligned} \tag{2-19}$$

Der Fall $c$) ist bedeutungslos, da trivial. Der Fall $a$) führt auf $L$–Module der Dimension 8 und auf die Cayleyschen Oktonionen. Wir wollen uns hier deshalb auf den einfachen Fall $b$) beschränken, um daran unser Vorgehen zu erläutern. Der allgemeine Beweis findet sich bei [Okub 93a].

Sei nun also $Dim\mathcal{V} = N = 4$. Wir wählen eine orthonormierte Basis, deren Elemente wir mit $e_\mu$ bezeichnen, $\mu \in \{1,2,3,4\}$

$$< e_\mu | e_\nu > \;=\; \delta_{\mu\nu}. \tag{2-20}$$

So erhalten wir dann für (2-5-iii)

$$< e_\alpha | [e_\mu, e_\nu, e_\lambda] > \;=\; \epsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}, \tag{2-21}$$

wobei $\epsilon$ das antisymmetrische vierdimensionale Levi–Civita–Symbol ist. Zeichnet man ein Element $e$, mit $< e|e >= 1$ und $e \cdot x = x \cdot e = x$ aus, wobei

$$\cdot \;:\; \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \tag{2-22}$$

das binäre Algebraprodukt darstellt, so läßt sich das Tripelprodukt mit dem Assoziator und Kommutator

$$\begin{aligned} (x,y,z) &:= (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) \\ [x,y] &:= x \cdot y - y \cdot x \end{aligned} \tag{2-23}$$

in Verbindung bringen. Man erhält

$$\begin{aligned} [x,y,z] \;=\; & \frac{1}{2}\Big\{(x,y,z) + < x|e > [y,z] + < y|e > [z,x] \\ & + < z|e > [x,y] - < z|[y,z] > e\Big\}. \end{aligned} \tag{2-24}$$

Diese Gleichung steht nun in engem Bezug zu einer Quaternionenalgebra. Dort kann $1 \equiv e$ und $\{i,j,k\}$ als Basis des „Imaginärteils" bezüglich der Konjugation

$$\bar{x} \;=\; 2 < x|e > e - x \tag{2-25}$$

betrachtet werden. Das Punktprodukt wird dann zum Kreuzprodukt, das auch in 7 Dimensionen für die Oktonionen gebildet werden kann. Das *nicht* assoziative Kreuzprodukt steht über eine Dualitätsbeziehung mit Graßmanns äußerem Produkt in Verbindung [Hest 86, Hest 91a, Hest 91b]. Man fühlt sich hier jedoch näher am regressiven Produkt Graßmanns. Mit

$$\begin{aligned} x \cdot y \;=\; & [x,y,e] \\ & + < x|e > y + < y|e > x - < x|y > e \end{aligned} \tag{2-26}$$

erkennt man das Tripelprodukt als das Analogon zum Graßmannschen Schachtelprodukt und die Innenprodukte $< a|b >$ als „Ligation“ wieder, siehe dazu [ZADD 94].

Für unseren Fall mit Spinoren der Dimension 4, d.h. aus einem linearen Raum der Dimension 4, ergibt sich nun eine einfache Situation. Der Spinorraum trägt in natürlicher Weise eine $L$–Modulstruktur über die Wirkung der $\gamma$–Matrizen, die zugehörige Metrik ist nicht ausgeartet und die Spindarstellung ist irreduzibel. Damit haben wir die Voraussetzungen für das Tripelsystem erfüllt und setzen für unsere Vertexfunktion (ohne Isospin und Superspin!)

$$V_{\alpha}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad := \quad \epsilon_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}. \tag{2-27}$$

Der $\epsilon$–Tensor läßt sich nun nach Tensorprodukten von $\gamma$–Matrizen entwickeln. Führt man dies durch, so gelangt man zu[2]

$$\epsilon_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad = \quad \frac{1}{2}\Big\{\gamma^{\mu}\gamma^5 C \otimes \gamma_{\mu}\gamma^5 C + C \otimes C - \gamma^5 C \otimes \gamma^5 C\Big\}_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \tag{2-28}$$

wobei $C = i\gamma^2\gamma^0$ die Ladungskonjugationsmatrix (in Dirac–Darstellung) ist. Man erkennt in der Sprache der Feldtheorie einen Axialvektoranteil, einen skalaren Anteil und einen pseudoskalaren Anteil. Dabei wurde die symmetrierespektierende Basis (Spinor, ladungskonjugierter Spinor) gewählt, welche aus der gewöhnlichen $\gamma$–Darstellung durch Rechtsmultiplikation mit $C$ hervorgeht.

Wünscht man eine Fierz–symmetrische Form des Vertex, so kann diese leicht mit Hilfe der Tabellen im Anhang D von Grimm [GRIM 94] gefunden werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad = \quad & \Big\{ -\frac{1}{4} C \otimes C + \frac{3}{4}\gamma^5 C \otimes \gamma^5 C \\ & -\frac{1}{8}\gamma^{\mu} C \otimes \gamma_{\mu} C - \frac{1}{4}\gamma^{\mu}\gamma^5 C \otimes \gamma_{\mu}\gamma^5 C + \frac{1}{8}\Sigma_{\mu\nu} C \otimes \Sigma^{\mu\nu} C\Big\}_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \end{aligned} \tag{2-29}$$

Hieraus erkennt man, daß alle möglichen Kopplungsarten skalar, pseudoskalar, tensoriell, pseudovektoriell und pseudoskalar im Vertex enthalten sind. Wir sind nun in der Lage, eine reguläre nichtlineare Spinorfeldgleichung mit nichttrivialem Vertex zu formulieren. Sie lautet

$$\begin{aligned} [\prod_{i=1}^{4}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_i)]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta}(x) \quad &= \quad g\epsilon_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\Psi_{\alpha_1}\Psi_{\alpha_2}\Psi_{\alpha_3}(x) \\ \{\Psi_{\alpha_1}(t,\vec{\mathbf{r}}_1), \Psi_{\alpha_2}(t,\vec{\mathbf{r}}_2)\}_+ \quad &= \quad 0. \end{aligned} \tag{2-30}$$

Es müßte jedoch noch in aufwendiger Weise gezeigt werden, daß der $\epsilon$–Vertex mit der dynamischen Hilfsfeldregularisierung so wie sie in Kapitel 1 eingeführt wurde, verträglich ist. Da ein praktisches Arbeiten auch mit dem Zerlegungstheorem möglich ist und wir in Teil II zu neuen Argumenten bezüglich der Natur der Hilfsfelder gelangen, soll an dieser Stelle die Untersuchung beendet werden.

[2] Private Mitteilung von W. Pfister.

Da wir erst nach der algebraischen Behandlung weitere Aussagen über die Hilfsfelder, die chemischen Potentiale und die nichtkanonische Quantisierung machen können, soll die Diskussion der Ergebnisse auf Teil III verschoben werden.

**Bemerkung:** Betrachtet man den nichtrelativistischen Grenzfall der Gleichung (2-30) wie in (3-8) und vernachlässigt man die dynamische Regularisierung durch die höheren Ableitungen, so erhält man die Bewegungsgleichung (ohne Ruhemasse)

$$-\frac{\Delta}{2m}\psi_\alpha \quad = \quad g\epsilon_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\psi_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2}\psi_{\alpha_3}(x). \tag{2-31}$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung für Elektronen im BCS–Supraleiter, nachdem die Phononenwechselwirkung eliminiert wurde [Fett 71].

# Teil II

# Algebraischer Zugang

# Kapitel 3

# Die Cliffordalgebra

## 3-1 Historisches

Die heutige Form einer mathematisch geprägten Physik geht auf die Erfindung des Differentialkalküls durch Leibniz und Newton zurück. Dadurch wurde eine stürmische Entwicklung der Mechanik möglich, die Ende des 19. Jh. ihren Höhepunkt erreichte. Danach wurden, ausgehend von thermodynamischen Überlegungen, Kontinuumstheorien entwickelt, die den Weg zur Quantenphysik eröffneten. Allerdings wies schon Bernhard Riemann auf die Möglichkeit hin, diskrete Varietäten (Mannigfaltigkeiten) zu betrachten.

Zu Beginn des 20. Jh. wendete sich das Interesse der Quantentheorie zu und die Mechanik geriet für einige Dekaden ins wissenschaftliche Abseits. Sollte man daraus schließen, daß der mechanische Formalismus vollständig entwickelt war und damit keiner weiteren Untersuchungen mehr bedurfte, wie man vor Max Planck glaubte?

Es stellt sich überraschenderweise heraus, daß das Konzept des Raumes (hier nicht im mathematischen Sinne) in keiner Weise vollständig mathematisch durchdrungen und in die Formulierung inkorporiert war [HEST 86]. Woran liegt das?

Die Axiomatisierung des Vektorraumbegriffes wurde von Peano [PEAN 88] durchgeführt. Also zu einer Zeit, als Mechanik und Elektrodynamik schon weit entwickelt waren. Nun müssen wir uns klar machen, daß ein Vektorraum $\mathcal{V}$ *nicht* ausreicht, um Mechanik oder Elektrodynamik zu betreiben. Vektorraum bedeutet nichts weiter als ein linearer Raum (über einem Körper). Das heißt, wir können Vektoren addieren, $u, v, w \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} u + v &= w \\ u + u &= 2u. \end{aligned} \tag{3-1}$$

Aus der zweiten Gleichung entnehmen wir die Bedeutung der *skalaren* Multiplikation als eine Kurzschreibweise der Addition *gleicher* Vektoren.

Um Physik betreiben zu können, muß der Vektorraum mit zusätzlichen Eigenschaften ausgestattet werden. Man gelangt so zu projektiven, affinen oder metrischen Räumen, je nach der Stärke der zusätzlichen Forderungen.

Diese Eigenschaften werden nun in der Physik nicht expliziert, sondern sie werden implizit benutzt. So findet die Mechanik gewöhnlich in einem metrischen (3 dimensionalen euklidischen) Raum statt. Eichtheorien wie die Elektrodynamik werden in affinen Räumen behandelt. Das Vektorpotential ist dabei der

Zusammenhang (Konnexion), der Feldstärketensor ist der Krümmungstensor. Die Quantentheorie wird in projektiven Räumen formuliert, wenn dies auch selten hervorgehoben wird [BIRK 36, STRO 66, HESL 85, WEIN 89A, WEIN 89B, JORD 93, JONE 94]. Das Hilbertrauminnenprodukt (oft zweideutig auch Skalarprodukt) spiegelt dann eine Pol–Polaren–Beziehung wieder und konstituiert *keine* metrische Struktur. Diese sogenannte Strahldarstellung macht es notwendig, Zustände zu normieren. Das bedeutet, daß man einen Repräsentanten des Strahls $\alpha|\psi>$ so wählt, daß $\alpha^*\alpha <\Psi|\Psi>= 1$ gilt. Die normierten Hilbertraumvektoren sind dann Punkte auf der $\infty$–dimensionalen Einheitskugel.

Aber auch diese Systeme sind noch zu eng für die Beschreibung von Physik. Um die volle Kraft der Analysis einer Veränderlichen (reell oder komplex) in Vektorräumen zur Verfügung zu haben, ist unbedingt eine Algebrastruktur vonnöten.

In der Mechanik wird die Algebrastruktur (wieder implizit) durch das Kreuzprodukt vermittelt. Nun wird mit dem Kreuzprodukt ein Tensor zweiter Stufe mittels einer Dualität auf einen Vektor abgebildet. Man erhält folgende Beziehungen in drei Dimensionen ($\mathcal{V} \cong \mathbf{R}^3$, Symbolik siehe unten und Anhang A)

$$\begin{aligned} v \times w &= i(v \wedge w) = (iv) \cdot w = u \\ \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\to *(\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}) =< *\mathcal{V}, \mathcal{V} >= \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{3-2}$$

Die korrekte Unterscheidung der Tensoren ohne Zuhilfenahme der Dualität ($i$ oder dem Hodge–Dual $*$) ermöglicht erst die Verallgemeinerung zu beliebigen Dimensionen und Signaturen.

Betrachtet man Funktionen in den mechanischen Variablen $q_i$ und $p_i$ als Observablen, so erhält man ein Bild, das der Quantenmechanik am ähnlichsten wird. Die Quantenmechanik selbst weicht ganz auf das Konzept des Operators aus. Durch die Komposition von Operatoren (Hintereinanderausführung) ist auf natürliche Weise eine Algebrastruktur gegeben.

Ziel muß es also sein, eine algebraische Theorie des Raumes zur Verfügung zu stellen, um damit physikalische Theorien zu behandeln. Dies führt uns sofort zurück in das beginnende 19. Jh. Damals wurden in der Mathematik projektive Strukturen und nichteuklidische Geometrien untersucht, lange vor der mathematischen Präzisierung von Begriffsbildungen wie Raum, Vektor, Algebra, ....

Um die 20er Jahre des vorigen Jh. bemerkte Günther Graßmann, daß sich die orientierte Fläche eines Parallelogrammes als antisymmetrisches *Produkt* zweier orientierter Geradenstücke auffassen läßt. Möbius untersuchte projektive Räume.[1]

Hermann Graßmann (d. Ält.) legte mit der „Linealen Ausdehnungslehre“ von 1844 [GRASS 44, GRASS 62] ein seiner Zeit um Jahrzehnte vorauseilendes Werk vor. Er begründete damit eine Theorie des Raumes (extensive Größen), die von Anfang an algebraisch motiviert und durchgeführt wurde.

[1] Wir werden hier weiterhin die moderne Nomenklatur benutzen, auch wenn Namen wie Vektor (Hamilton), etc. erst (viel) später eingeführt und axiomatisiert wurden, um Begriffsbildungen wie „gerichtetes Geradenstück“, „Affinor“, usw. zu vermeiden.

Sein hochabstraktes Werk, das algebraische Methoden benutzt, die erst viel später in der Mathematik formalisiert und axiomatisiert wurden, war jedoch nicht geeignet, in die damalige Physik[2] Eingang zu finden. Wohl trug auch Graßmanns bescheidene Art, heute würde man sagen, sein schlechtes „Marketing“, dazu bei, daß diese überlegene Methode noch viele Jahrzehnte auf Anerkennung warten mußte [Zadd 94]. Es gelang nur wenigen seiner Mathematikerkollegen, sein Werk zu verstehen. So weigerte sich Möbius, eine Stellungnahme zur Ausdehnungslehre abzugeben, da er diese nicht vollständig verstehe.

Und es gab doch Resonanz, und zwar nicht von den geringsten Geistern. Hermann Hankel, Alfred Clebsch und Gordan in Göttingen, Giuseppe Peano in Italien und nicht zuletzt Rowan Hamilton und William K. Clifford aus England erkannten die Wichtigkeit des Graßmannschen Werkes [Zadd 94]. Sophus Lie besuchte Graßmann 1872 in Stettin.

Kernpunkt der Graßmannschen Ideen sind die extensiven Größen $n$–ter Stufe. Dies sind im heutigen Sprachgebrauch antisymmetrische Tensoren vom Rang $n$, für $n = 0$ Zahlen, $n = 1$ Vektoren, $n = 2$ antisymmetrischer Tensor 2. Stufe oder Bivektor undsofort (metrische Interpretation, vgl. [Hest 91a, Hest 91b, Zadd 94]). Graßmann erkannte jedoch nicht nur die Zuordnung von geometrischen Objekten zu seinen extensiven Größen, sondern entwickelte ein mächtiges und (fast) vollständiges Werkzeug zur algebraischen Behandlung geometrischer Probleme.

Auch sind in beiden Ausdehnungslehren konkrete (damals neue) Anwendungen enthalten, vor allem aus der projektiven Geometrie. Das von Graßmann verwendete Doppelverhältnis ist dabei viel mächtiger und mittels des algebraischen Formalismus leichter zu manipulieren, als die üblichen in homogenen Plückerkoordinaten formulierten Doppelverhältnisse.

Die mangelnde Anerkennung, ja sogar teilweise Ablehnung seiner mathematischen Ideen, bewogen Graßmann dazu, sich linguistischen Studien zu widmen. Er gelangte dort mit seinem 1976(!) in 5. Auflage erschienenen Sanskritlexikon zu so viel Ruhm, daß ihm 1876, ein Jahr vor seinem Tod die Ehrendoktorwürde der Universität Tübingen zuteil wurde. Graßmann war nicht promoviert und seine Versuche, eine Lehrerlaubnis an einer Universität zu erhalten, scheiterten am Einspruch Kummers. Er wurde jedoch daraufhin zum Gymnasialprofessor ernannt.

**Bemerkung:** Das regressive Produkt H. Graßmanns läßt sich *nicht* in einfacher Weise mit einem $\cdot$ (dot) Produkt verbinden, vgl. jedoch [Hest 66, Hest 86]. Es muß vielmehr mit der „Meet–“ oder Inzidenz–Relation in Verbindung gebracht werden [Hest 84, Hest 91a, Hest 91b].

Das aufkommende positive Echo auf Graßmanns Werk erlitt durch den frühen Tod von Alfred Clebsch (1872), Hermann Hankel (1873) und William K. Clifford (1879) einen schweren Rückschlag.

Clifford hatte die Bedeutung der Graßmannschen Überlegungen erkannt und

[2]So hatte Graßmann in seinem Formalismus bereits eine Graduierung, nichtkommutative Multiplikationen, Dualitätsbeziehungen etc., die zum Teil bis heute nicht in der Physik zu finden sind. Die Supersymmetrie ist ein Fall, in dem *Teile* der Graßmannschen Ideen neu entdeckt wurden. Damit ist leider auch die Einheit von Nomenklatur und Anwendung zerstört.

war in der Lage, substantielle Verbesserungen vorzunehmen [CLIF 76, CLIF 78]. Insbesondere stammt der Ausdruck „geometrische Algebra", der auch von Hestenes bevorzugt wird, von ihm. Clifford vereinigte das Innenprodukt, (dot · Produkt) mit Bild in **R** (nicht in $\Lambda^n\mathcal{V}$), siehe die Bemerkung oben und Seite 76, mit dem äußeren Graßmannschen Produkt zum geometrischen Produkt. Wegen des Innenproduktes auf dem Grundraum $\mathcal{V}$ sollte diese Cliffordalgebra „metrisch–geometrische Algebra" heißen. Es ist jedoch in einem erweiterten Rahmen möglich, projektive Geometrie mit Cliffordalgebren zu betreiben [HEST 91A, HEST 91B]. Hier sehen wir die Verbindung zu inhomogenen Gruppen. Solche affinen Gruppen werden gegenwärtig in der Physik für den supersymmetrischen Fall untersucht [JARV 95A].

Auch die Ideen W.K. Cliffords mußten über 40 Jahre ruhen, bevor seine Gedanken neu entdeckt wurden.

In der Mathematik entwickelte Eli Cartan den Kalkül der äußeren Differentialformen, der im Wesentlichen eine analytische Verallgemeinerung der Graßmannschen Ideen darstellt. Graßmann selbst hatte schon Infinitesimalrechnung mit Formen betrieben. Die Bourbakis formalisierten Cartans Werk und setzten damit einen neuen Standard mit einer modernen Nomenklatur. Der Keil $\wedge$ stammt von Bourbaki, ebenso wie die Symbole für die Kontraktionen $\lrcorner$, $\llcorner$ (rechts/links). Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit zum großen Teil auf die Notation Bourbakis zurückgreifen [BOUR 59]. In älteren Büchern findet man noch Notationen, die auf Graßmann zurückgehen. So verwendet u.a. A. Budo [BUDO 53] für das Kreuzprodukt von Dreiervektoren eine eckige Klammer $[.,.]$, die aus Graßmanns äußerem Produkt abgeleitet ist.

Die Einführung des Spins in die Physik zog den Einzug der Cliffordalgebra und damit implizit der Graßmannalgebra nach sich [PAUL 21, PAUL 27]. Wenig später postulierte Dirac seine Elektronentheorie und die Diracgleichung [DIRA 28A, DIRA 28B, DIRA 30]. Die unter den Physikern ausgelöste Verwirrung durch das neue Spinorkonzept ist nicht hoch genug einzuschätzen und wirkt bis heute nach [PARR 89]. Viele neue Sorten von Indizes, gepunktete und ungepunktete, verschleierten die Sachverhalte mehr, als daß sie nutzten. Und dabei war die Invariantentheorie schon weit entwickelt (Aronhold, Clebsch, Gordan).

Mit dem Spinor zog ein neues Konzept in die Physik ein, das gruppentheoretisch gut verstanden werden kann. Allerdings ergeben sich neue interpretatorische Schwierigkeiten. So beschreibt ein Spinor keine physikalische Entität (wie z.B. ein Vektor), sondern es können nur „kovariante" bilineare Ausdrücke mit Meßgrößen verknüpft werden. Der Zusammenhang von Spinor und Vektor kann aber im algebraischen Bild angegeben werden, siehe dazu Kapitel 3, die Abschnitte 3-4 und 3-5. Die Notwendigkeit diesen Zusammenhang zu verstehen, wurde nahezu gleichzeitig mit der Entwicklung der Diractheorie erkannt. Charles Galton Darwin [DARW 28] und E. Madelung [MADE 29] versuchten, die Spinortheorie Paulis und Diracs in Vektor– und Tensorgleichungen zu übersetzen. So schrieb Darwin 1928:

> *Now the relativity theory is based on nothing but the idea of invariance, and develops from it the conception of tensors as a matter*

> *of necessity: and it is rather disconcerting to find that apparently something has slipped through the net, so that physical quantities exist wich would be, to say the least, very artificial and inconvenient to express as tensors* [Darw 28].

Dabei ergaben sich jedoch mancherlei Schwierigkeiten (Auszüge aus einem Brief Darwins an Bohr, zitiert nach [Parr 89]):

> (31. März 1928) *I was very sorry not to have seen Klein when he was over there (visiting Dirac) as I am dying to know what you all are thinking about. As you have heard I have got a short paper, out in a day ore two, on Dirac's work. There is nothing much in it but it treats in a way that I can understand the equations that he treats by his non commutative methods ...*

und im gleichen Brief:

> *I continue to find that though Dirac evidently knows all about everything the only way to get it out of his writings is to think of it all for oneself in ones own way and afterwards to see it was the same thing. But I had great misgivings about the whole business when I read that paper of Jordan and Klein, because that adopts the methods I find so hard to understand, and I have not yet found how they can be translated.*

Ein weiterer Grund mag die „Goldgräberstimmung" unter den jungen Quantenphysikern gewesen sein, die viel zu viele Resultate viel zu schnell lieferten, sodaß Darwin, Madelung und Andere (konservativ Eingestellte) nicht in der Lage waren, diese zu übersetzen und zu verstehen [Parr 89].

Der Zusammenhang zwischen klassischer und quantenmechanischer Physik ist heute immer noch Forschungsgegenstand. Die „Korrespondenzen" sind mit Annahmen und (teilweise unhaltbaren) Hypothesen verknüpft [Hest 75a, Hest 75b]. Dieses Vorgehen, die Physik nicht aufbauend auf dem alten, also evolutiv, sondern durch eine Axiomatisierung neuer Prinzipien, also diskontinuierlich revolutionär zu entwickeln, ist ohne Beispiel in der Geschichte der Physik. So sind bis heute alle Quantisierungs– und Dequantisierungskonzepte von freien, d.h. trivialen Fällen abgesehen, gescheitert [Glim 81, Guil 90, Gutz 90]. Dieser Sachverhalt wird gegenwärtig mit verschiedenen Ansätzen behandelt. Abschließende Ergebnisse liegen jedoch noch nicht vor.

Wie war es möglich, daß diese großen Physiker und sogar Mathematiker wie Pauli, Dirac, Sommerfeld, Bohr, von Neumann u.A. nichts von den Werken Graßmanns und Cliffords wußten?

Diese Frage stellte sich David Hestenes, als er seine Dissertation verfaßte, siehe [Hest 84, Hest 85a, Hest 86, Hest 89]. Sie wurde 1966 in erweiterter Buchform veröffentlicht [Hest 66]. Seine Arbeit fußt vor allem auf den Werken und Anschauungen von E. Artin und M. Riesz [Arti 57, Ries 58]. Obwohl das Buch klar und mit Anwendungen geschrieben ist, war auch hier die Resonanz gering [Boud 69, Casa 70]. Daraufhin wurde aus der physikalischen eine mathematische Theorie, die sich weit entwickeln ließ und damit nun endlich Aufmerksamkeit erregte.

Der Schlüssel zu dieser Theorie ist eine konsequente koordinatenfreie, d.h. explizit invariante Formulierung aller Aussagen. Angewandt auf die Diracgleichung ergeben sich tiefe Einsichten in deren Struktur und in die Natur der Spinoren. Die übersetzte Gleichung wird als Hestenes– oder Dirac–Hestenes–Gleichung bezeichnet.

Der geometrische Hintergrund dieses Ansatzes ermöglicht neue Vorgehensweisen. So ist es nicht mehr nötig, den Spinor als Element eines Wahrscheinlichkeitsraumes aufzufassen, sondern der Spinor kann (für massive Teilchen) in eine Dilatation, eine Dualitätstransformation (chirale Transformation), eine Lorentzrotation und ein primitives idempotentes Element der Algebra (Referenzspinor) zerlegt werden. Die Integralkurven dieses Feldes (Stromlinien punktförmiger Testteilchen) zeigen eine Zitterbewegung [Hokk 87, Hest 90]. Damit kann der Spin als dynamischer Effekt vortexartiger Objekte modelliert werden [Hest 91c, Baru 93, Vaz 93b]. Der Isospin ergibt sich dann in einfacher Weise als Rechtstransformation des Referenzspinors [Hest 67b, Davi 94a, Davi 94b].

Um die Unterschiede hervorzuheben, wollen wir ein Beispiel betrachten:
**Beispiel:** In der Diractheorie stößt man auf die $\gamma$–Matrizen mit den Antikommutatorrelationen

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\nu \;=\; 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}. \tag{3-3}$$

Der Diracspinorraum $\mathcal{S} \cong \mathbf{C}^4[M]$ besteht aus einer 4 komponentigen Spalte mit $\mathbf{C}$–wertigen Funktionen des Minkowskiraumes $\Psi_i : M \to \mathbf{C}$. Nun ist es möglich, eine Matrix $U$ zu finden mit $UU^{-1} = 1$, so daß die Diracmatrizen in eine andere Darstellung transformiert werden, z.B. von der Dirac– in die Majoranadarstellung [Chen 84]. Die Antikommutatorrelation ist invariant unter dieser Transformation $\gamma \to \gamma' = U\gamma U^{-1}$.

$$\begin{aligned} U\gamma^\mu U^{-1}U\gamma^\nu U^{-1} + U\gamma^\nu U^{-1}U\gamma^\mu U^{-1} &= 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\nu &= 2\eta^{\mu\nu}UU^{-1} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Der Spinor transformiert sich als $U\Psi_D = \Psi_M$. Nun mag man sich wundern, warum in der Physik verschiedene Darstellungen für spezielle Situationen benutzt werden. Dies liegt daran, daß die zugehörigen Algebren *nicht* isomorph sind. Die unter Umständen komlexen Transformationsmatrizen liegen nicht notwendig in der (komplex dargestellten) reellen Algebra und respektieren die Algebrastruktur daher nicht immer. Die obige Transformation ist also *keine* Äquivalenzrelation von Spinormodulen und Cliffordalgebren! Ein wesentliches Anliegen dieser Arbeit ist die Analyse dieser Unterschiede. Für die mathematischen Begriffe siehe Anhang A und die Ausführungen unten.

Eine Theorie, die solche Unterschiede klar heraushebt und damit die physikalischen Sachverhalte besser modelliert, ist nun der „geometrische Kalkül“ (Cliffordkalkül) [Hest 84, Sobc 85] oder äquivalent dazu die hyperkomplexe Funktionentheorie [Brac 82, Dela 92]. Es gibt heute eine beachtliche Anzahl von Mathematikern und Physikern, die dieses universelle Werkzeug entwickeln und anwenden, die Bibliographie stellt eine Auswahl dar.

In Teil II dieser Arbeit soll die Theorie soweit entwickelt werden, daß ein Arbeiten in der Quantenfeldtheorie mit Clifford–algebraischen Methoden möglich wird. Dabei werden auch neue in der Literatur noch wenig oder nicht behandelte Fälle zwingend auftauchen, um Feldtheorien modellieren zu können. Das Hauptgewicht wird auf der algebraischen Beschreibung liegen, obwohl gerade die analytische Struktur für die Regularität von essentieller Bedeutung ist. Aber bevor man sich den analytischen Problemen widmen kann, muß die von Ungereimtheiten und heuristischen Prinzipien durchdrungene Quantenfeldtheorie erst im algebraischen Bild formuliert werden. Regularität ergibt sich dann als Existenzbedingung an die, hier oft nur formal, benutzten Algebren. Unsere Analyse stellt damit eine wichtige *Vorstufe* dar, diese Problematik zu untersuchen.

## 3-2 Drei Wege zur Cliffordalgebra

Wir wollen uns auf drei verschiedene Arten der Cliffordalgebra nähern. Dabei sollen jeweils andere Aspekte hervorgehoben und betont werden. So erhält man ein umfassendes Bild von dieser Struktur. Selbstverständlich sind die Zugänge in weiten Teilen äquivalent, jedoch werden sich subtile Differenzen ergeben, die für die quantenfeldtheoretischen Anwendungen benötigt werden. Die Unterscheidung zwischen den Zugängen Bourbakis und Chevalleys ist nicht scharf, da Chevalley ebenfalls die Tensoralgebra zur Konstruktion heranzieht. Hier soll speziell die Chevalley–Deformation der Graßmannalgebra hervorgehoben werden. Im heutigen Sprachgebrauch könnte man dies auch als „Quantisierung" der Graßmannalgebra bezeichnen.

### 3-2.1 Die Diracsche Methode, Generatoren und Relationen

Obwohl die Cliffordalgebren schon in der Mathematik bekannt waren und als geometrische Algebren benutzt wurden, spielen sie in der Physik nur eine untergeordnete Rolle. Das Hauptaugenmerk gilt dem Zustand und den Observablen, nicht der algebraischen Struktur. Der Spinor wird in vielen Lehrbüchern wie ein komplexer Vektor (gerader Dimension) behandelt. Es ist deshalb angebracht, das Vorgehen Diracs und Paulis näher zu untersuchen. Dabei werden wir auf die in der Physik geläufige Darstellung der Cliffordalgebra mit Generatoren und Relationen geführt.

Durch die Einführung des Spins durch Pauli (z.B. [Paul 21, Paul 33]) waren mehrkomponentige Wellenfunktionen schon bekannt. Dirac nutzte nun eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes, um eine relativistisch invariante Theorie des Elektrons zu formulieren [Dira 28a, Dira 28b]. Sein Hauptanliegen war es, das Problem der negativen Energien zu lösen, die in der Klein–Gordon–Gleichung auftraten. Ebenfalls sollte eine Feldgleichung erster Ordnung in den Ableitungen ermöglicht werden, um die relativistische Invarianz zu wahren. Diracs Gedanken mögen in etwa folgende gewesen sein:

Betrachtet man den relativistischen Energiesatz

$$E^2 \;=\; p^2 + m^2, \tag{3-5}$$

so wird man auf die folgende Hamiltondichte geführt

$$H \;=\; +\sqrt{p^2 + m^2}. \tag{3-6}$$

Übersetzt man nun nach den üblichen Korrespondenzregeln $p \to i\nabla$ für kartesische Koordinaten, so führt dies auf die Feldgleichung

$$i\partial_t \psi \;=\; +\sqrt{-\nabla^2 + m^2}\psi. \tag{3-7}$$

Diese Gleichung ist schwer zu interpretieren. Wollte man etwa die Wurzel entwickeln, so erhielte man, von Konvergenzproblemen abgesehen, $\infty$–viele Ableitungen. Z.B. ist für $p^2 \ll m^2$

$$\sqrt{-\nabla^2 + m^2} \;=\; m\sqrt{1 - \frac{\nabla^2}{m^2}} = m - \frac{\nabla^2}{2m} + \ldots \tag{3-8}$$

Eine solche Gleichung ist physikalisch unbefriedigend. Man muß deshalb einen anderen Weg finden. Iteriert man (3-7), so führt dies auf die Klein–Gordon–Gleichung

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \psi &= (-\nabla^2 + m^2)\psi \\ (\Box + m^2)\psi &= 0. \end{aligned} \tag{3-9}$$

Diese beschreibt ein geladenes Skalarfeld. Das Problem, eine Gleichung erster Ordnung zu gewinnen, ist also äquivalent zum Auffinden einer „Wurzel“ des Klein–Gordon–Operators. Es ist sofort klar, daß eine solche „Wurzel“ nicht in $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ gefunden werden kann. Man muß also mit „Zahlen“ aus einer Körpererweiterung oder gar aus einem Ring rechnen. Genau dies tat Dirac. Er postulierte mit den unbekannten algebraischen Größen $\alpha_i$ und $\beta$

$$i\partial_t \psi \;=\; (-i[\alpha_1 \partial_{x_1} + \alpha_2 \partial_{x_2} + \alpha_3 \partial_{x_3}] + \beta m)\psi. \tag{3-10}$$

Es ist damit klar, daß nun $\psi$ ebenfalls keine c-zahlwertige Wellenfunktion oder kein Operator mit c-Zahl–Erwartungswerten mehr sein kann.

Um nun Rechenregeln für die $\alpha_i$ und $\beta$ zu gewinnen, forderte Dirac, daß die iterierte Gleichung wieder die Klein–Gordon–Gleichung ergeben solle. Dies entspricht der Idee, eine formale Wurzel in einem erweiterten Körper (oder Ring) gefunden zu haben. Man erhält durch Iteration von (3-10)

$$-\partial_t^2 \;=\; -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i}{2} \partial^2_{x_i x_j}\psi - im\sum_{j=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\partial_{x_i}\psi + \beta^2 m^2 \psi. \tag{3-11}$$

Ein Vergleich mit der Klein–Gordon–Gleichung führt dann auf die Bedingungen[3] (Relationen, siehe (A.1))

$$
\begin{aligned}
\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij} \\
\alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \\
\alpha_i^2 = \beta^2 &= 1.
\end{aligned}
\tag{3-12}
$$

Die $\alpha_i$ und $\beta$ sollen Hermitesch sein, damit die Gleichung auf reelle Größen führt. Weiterhin folgt unter Benutzung von (3-12) aus:

$$
\begin{aligned}
tr(\alpha_i) &= tr(\alpha_i\beta^2) = -tr(\beta\alpha_i\beta) = -tr(\alpha_i\beta^2) = -tr(\alpha_i) \\
tr(\alpha_i) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3-13}
$$

Gleiches gilt für $\beta$. Dirac ging nun, die Paulimatrizen zum Vorbild nehmend, davon aus, daß die $\alpha_i$ und $\beta$ sich als reelle oder komplexe Matrizen realisieren lassen. Die kleinste Matrixalgebra, in der 4 Hermitesche spurfreie Matrizen untergebracht werden können, ist nun eine $4 \times 4$ Darstellung.

Das Objekt $\psi$ wird zu einer (komplexen) Spalte mit 4 Funktionen des Minkowskiraumes $\psi_i : M \to \mathbf{C}$. Wegen des halbzahligen Transformationsverhaltens und dem Zusammenhang mit dem Spin des Elektrons, der mit der Diracgleichung zum ersten Mal relativistisch korrekt behandelt wurde, heißt $\psi$ Spinor. Obwohl *Spinor* von *Vektor* abgeleitet und $\psi$ ein „Spaltenobjekt" ist, muß hier begrifflich deutlich unterschieden werden. Der Spinor wird oft über sein Transformationsverhalten definiert. Der hier verwendete Spinorbegriff ist mit jenem verwandt, bezieht sich jedoch auf algebraische Konzepte, siehe (A.28,A.29).

Die so erhaltene Gleichung hatte zwar eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte, aber das Problem der negativen Energien blieb bestehen. Die Entdeckung des Positrons machte aus diesem Manko jedoch einen grandiosen Erfolg. Eine korrekte Behandlung des Energieproblems kann erst in der QED erfolgen und ist für unsere algebraischen Überlegungen nicht wichtig.

Führt man noch die $\gamma$–Matrizen durch

$$
\begin{aligned}
\gamma^0 &:= \beta \\
\gamma^k &:= \alpha^k\beta
\end{aligned}
\tag{3-14}
$$

ein, so ergibt sich die gewöhnliche Formulierung der Dirac–Gleichung und der Relationen für die $\gamma$–Matrizen zu

$$
\begin{aligned}
(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \\
\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2\eta^{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{3-15}
$$

Es muß selbstverständlich nun noch gezeigt werden, daß die Gleichung kovariant ist und physikalische Aussagen gestattet, wie etwa den anomalen g–Faktor 2 für

[3] Wir werden weiter unten genauer darauf eingehen, wie die Diracalgebra und ihre Darstellungen verknüpft sind. In den alten Arbeiten wurde zwischen Algebra und Matrixdarstellungen der Algebra nicht konsequent unterschieden.

das Elektron. Wir halten hier jedoch inne und resümieren die algebraischen Sachverhalte.

Der von den $\gamma$–Matrizen und ihren (antisymmetrischen) Produkten aufgespannte Raum ist 16 dimensional über $\mathbf{C}$. Mit $\mathcal{V} =< \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3 >$ ist

$$\begin{aligned} \Lambda\mathcal{V} &= \oplus_{n=0}^{4} \Lambda^n \mathcal{V} =< \mathbf{1} > \oplus < \gamma^0, \ldots, \gamma^3 > \oplus < \gamma^0\gamma^1, \ldots > \\ &\oplus < \gamma^0\gamma^1\gamma^2, \ldots > \oplus < \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 > . \end{aligned} \tag{3-16}$$

Es ist aufgrund der Vertauschungsrelationen immer möglich, die Monome zu *ordnen*. Daher kann man jedes Element $X$ aus $\Lambda\mathcal{V}$ in eine direkte Summe geordneter Monome zerlegen. Wegen ihres Transformationsverhaltens unter Lorentztransformationen heißen die Terme von $X$

$$\Lambda\mathcal{V} \ni X = S + V + T + AV + PS, \tag{3-17}$$

Skalar, Vektor, Tensor, Axialvektor und Pseudoskalar. Die Möglichkeit, jedes $X$ so zu zerlegen, stellt eine $\mathbf{Z}$–Graduierung dar, siehe (A.13). Cliffordalgebren besitzen jedoch nur eine Semi– oder $\mathbf{Z}_2$–Graduierung

$$X = X^+ + X^- = (S + T + PS) + (V + AV). \tag{3-18}$$

Hier erhält man also mehr Information. Da wir explizit eine Basis in $\mathcal{V}$ gewählt haben, nämlich die $\gamma$–Matrizen, induziert diese die $\mathbf{Z}$–Graduierung. Der Spinor ist nun ein Element des Darstellungsraumes (Linksmoduls) der $\gamma$–Algebra (siehe A.9), wie sie oben definiert wurde. Der Spinor unterliegt ebenfalls mittelbar den Relationen, dies ist der diffizile Unterschied zum Vektor.

Nachdem wir uns mittels einer physikalischen Argumentation der Cliffordalgebra genähert haben, die $\gamma$–Algebra ist der Spezialfall $CL_{1,3}$[4], wollen wir den umgekehrten Weg beschreiten. Es sollen dabei Cliffordalgebren über Generatoren und Relationen definiert werden. Dies stellt in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Diracschen Methode auf beliebige Dimensionen und Signaturen dar. In der Physik werden solche Algebren für vereinheitlichende Modelle benötigt, hier soll dieses Vorgehen das Verständnis der Konstruktion fördern.

Wir sind bestrebt, wo es möglich ist, alle Algebren über $\mathbf{R}$ zu konstruieren. Dies ist erheblich aufwendiger als über $\mathbf{C}$ [PORT 81]. In diesem Abschnitt untersuchen wir jedoch nur recht allgemeine Eigenschaften, die meistens unabhängig von dieser Komplikation sind. Vom physikalischen Standpunkt aus muß jedoch größter Wert auf eine reelle Theorie gelegt werden. Ziel ist es auch, den Ursprung des '$i$'s' in der Quantentheorie zu erhellen.

Um den Unterschied zwischen „Abstrakter–“Algebra und (Matrix)–Darstellung deutlich zu machen, werden die Generatoren im folgenden mit $e_i$, $i \in \mathcal{I}$ einer Indexmenge mit Ordnungsrelation bezeichnet.

Die Generatoren $e_i$ spannen einen linearen Raum $\mathcal{V} =< e_1, e_2, \ldots >$. Wir teilen die Indexmenge $\mathcal{I}$ in zwei disjunkte Teilmengen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{N}$, so daß $p < n$,

[4] Zur Notation siehe (A.18) und unten.

$\forall p \in \mathcal{P}$ und $n \in \mathcal{N}$ gilt. Die Relationen einer Cliffordalgebra mit Signatur $\#\mathcal{P}$, $\#\mathcal{N}$[5] über **R** lauten dann ($p, p' \in \mathcal{P}$, $n, n' \in \mathcal{N}$)

$$\begin{aligned} e_p e_{p'} + e_{p'} e_p &= 2\delta_{pp'} \\ e_n e_{n'} + e_{n'} e_n &= -2\delta_{nn'} \\ e_p e_n + e_n e_p &= 0. \end{aligned} \qquad (3\text{-}19)$$

Die Algebra selbst bezeichnen wir mit $CL(\#\mathcal{P}, \#\mathcal{N})$ oder als $CL(\mathcal{V}, \delta_{\mathcal{P}} \oplus -\delta_{\mathcal{N}})$. Dabei sind $\delta_{\mathcal{P}}$ und $-\delta_{\mathcal{N}}$ die jeweiligen quadratischen Formen (siehe (A.15)) auf den Räumen $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}$, die von den Generatoren $e_p$ und $e_n$ aufgespannt werden. Es ist dann auch $\mathcal{V} = \mathcal{W}_{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{W}_{\mathcal{N}}$ als linearer Raum. Mit Hilfe der Relationen können nun reguläre Monome definiert werden, die die gesamte Algebra aufspannen. Wir fassen Indexteilmengen in griechischen Minuskeln zusammen, also $\alpha \subset \mathcal{I}$. Ein Monom heißt regulär, wenn gilt (Die Multiplikation erbt die Assoziativität aus der Assoziativität der Indizes unter Komposition, siehe Seite 148)

$$e_\alpha = e_{p_1} e_{p_2} \ldots e_{p_r} e_{n_1} \ldots e_{n_s} = e_{i_1} \ldots e_{i_{r+s}} \qquad (3\text{-}20)$$

mit $p_1 < p_2 < \ldots < n_1 < \ldots$. Den Grad des Monoms definieren wir als die Anzahl $|\alpha|$ der Generatoren im Monom. Jedes Monom läßt sich nun als ein reguläres Monom und Monome vom Grad $|\alpha| - 2$ schreiben. Wir definieren noch $\mathbf{1} = e_\emptyset$ und $e_\alpha = 0 \Leftrightarrow |\alpha| < 0$.

Nun kann das Produkt der Algebra angegeben werden. Auf den Generatoren ist

$$e_{i_a} e_{i_b} = \begin{cases} \pm 1 & i_a = i_b \\ e_{i_a i_b} & i_a < i_b \\ -e_{i_b i_a} & i_a > i_b \end{cases} \qquad (3\text{-}21)$$

und für beliebige Elemente gilt

$$e_\alpha e_\beta = \sum_{|\gamma| = |\alpha+\beta|} a_\gamma e_\gamma + \sum_{|\gamma| = |\alpha+\beta-2|} a_\gamma e_\gamma + \ldots + \sum_{|\gamma| = |\alpha-\beta|} a_\gamma e_\gamma. \qquad (3\text{-}22)$$

Dabei sind die $a_\gamma$ reelle (komplexe) Koeffizienten. Ist nun $\alpha \cap \beta = \{\emptyset\}$, so ist

$$e_\alpha e_\beta = \pm e_{\alpha \cup \beta} \qquad (3\text{-}23)$$

und für $\alpha = \beta$ erhält man

$$e_\alpha e_\beta = \pm 1, \qquad (3\text{-}24)$$

nicht jedoch für $|\alpha| = |\beta|$. Diese Zerlegung nach regulären Monomen ist in der Physik als „Ausreduzieren nach Basisvektoren" bekannt.

Die Algebra besitzt als linearer Raum betrachtet die Dimension $2^{\#\mathcal{I}}$. Für die $\gamma$–Algebra über **R** erhalten wir also $\#\mathcal{I} = 4$ Generatoren und einen $2^4 = 16$

[5] $\#\mathcal{I}$ bezeichnet die Mächtigkeit einer Indexmenge $\mathcal{I}$, also die Anzahl der Elemente. Die Potenzmenge, Menge der Teilmengen, hat dann die Mächtigkeit $2^{\#\mathcal{I}}$.

dimensionalen linearen Raum, dessen Basis von den regulären Monomen gebildet wird.

Der Spinor ist nun ein Element des Darstellungsraumes $\mathcal{S}$ (siehe Seite 154) dieser Algebra. Seine Dimension ist immer gerade und hängt vom benutzten Körper ab, dies wird in Abschnitt 3-4 ausführlich diskutiert. In der Physik werden Spinoren gewöhnlich über $\mathbf{C}$ betrachtet, dann ist die Dimension von

$$\mathcal{S} \quad = \quad 2[\frac{\#\mathcal{I}}{2}] \tag{3-25}$$

mit der Gaußklammer

$$[x] \quad = \quad n, \quad \text{mit } n \in \mathbf{N}, n \leq x < n+1. \tag{3-26}$$

Paulispinoren sind also komplex 2 dimensional, während Diracspinoren komplex 4 dimensional sind. Die involutiven Haupt–(anti)–automorphismen (siehe (A.12, Seite 149,A.19, A.20)) werden nun auf den Generatoren und den regulären Monomen definiert. Über die Linearität sind sie dann in der ganzen Algebra verfügbar. Man setzt für die Konjugation

$$\begin{aligned} {}^{-} \quad : \quad & \Lambda\mathcal{V} \to \Lambda\mathcal{V} \\ & {e_{i_r}}^{-} = -e_{i_r}, \quad \text{mit } |i_r| = 1 \\ & 1^{-} = 1, \quad \text{in } \mathbf{R} \\ & (1+i)^{-} = (1-i), \quad \text{in } \mathbf{C} \end{aligned} \tag{3-27}$$

und für die Reversion

$$\begin{aligned} {}^{\sim} \quad : \quad & \Lambda\mathcal{V} \to \Lambda\mathcal{V} \\ & (e_\alpha e_\beta)^{\sim} = {e_\alpha}^{\sim} {e_\beta}^{\sim} \\ & {e_{i_r}}^{\sim} = e_{i_r}, \quad \forall i_r \text{ mit } |i_r| \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{3-28}$$

Diese Definitionen legen nun die wesentlichen Eigenschaften fest. Wir könnten den Wellenoperator im Raum $\mathcal{V}$ wie oben faktorisieren. Es besteht jedoch noch einige Freiheit, Spinornormen zu definieren. Von dieser Freiheit wird jedoch in der Physik kein Gebrauch gemacht.

Wir können die Konstruktion folgendermaßen zusammenfassen. Die Generatorenmethode legt eine Basis fest, dadurch erhält die Cliffordalgebra zusätzlich eine $\mathbf{Z}$–Graduierung, die in der Physik ausgiebig genutzt wird. Die $\mathbf{Z}$–Graduierung steht in engem Zusammenhang zu den verwendeten Konjugationen $^{-}$ und $^{\sim}$. Diese werden auf den Generatoren definiert und stabilisieren den von den Generatoren aufgespannten linearen Unterraum. Von den Relationen her ist es klar, daß diese etwas mit der Geometrie des Raumes $\mathcal{V}$ zu tun haben, da z.B. die Minkowskimetrik in der Diracalgebra verwendet wird. Die Generatoren sind Bilder einer Basis von $\mathcal{V}$ in der Cliffordalgebra $CL_{p,q}$. Damit sind sie aber Vektoren. In der Physik werden jedoch die $\gamma$–Matrizen als Komponenten *eines* Vierervektors aufgefaßt. Verwendet man nun die Clifford–algebraische Sicht, so ist die übliche Anschauung damit inkonsistent. So betrachten wir den Ausdruck

$$De^\mu D^{-1} \quad = \quad \sum_\nu a^\mu_\nu e^\nu = e'^\mu \tag{3-29}$$

als Transformation der Basis $\{e^\mu\}$ in die neue Basis $\{e'^\mu\}$. Dies geschieht in enger Anlehnung an Tetradenbasen, hier jedoch mit ortsfesten Basen $e^\mu \neq e^\mu(x)$. Man beachte aber, daß die $e_i$ Elemente einer Cliffordalgebra und damit Bilder von Basisvektoren sind, nicht jedoch selber „Vektoren“ sein können. Wir werden später sehen, daß die Elemente einer Cliffordalgebra Endomorphismen, also Operatoren auf einem Vektorraum, bzw. der Graßmannalgebra sind.
**Bemerkung:** Da die Generatoren immer auch ein Erzeugendensystem für $\mathcal{V}$ darstellen, ist es *nicht* möglich, diesen Zugang ohne die Wahl einer Basis durchzuführen. Die Basisiunabhängigkeit *aller* verwendeten Konzepte muß daher gezeigt werden. Insbesondere hängt die $\mathbf{Z}$–Graduierung und die Komplexkonjugation der Algebra von der Basiswahl ab.
**Bemerkung:** Um eine Algebra durch Generatoren und Algebrarelationen definieren zu können, muß nachgewiesen werden, daß die Algebrarelationen Äquivalenzrelationen im mengentheoretischen Sinne (A.2) bilden. Dies werden wir unten mittels Idealen und Faktorisierungen aus der freien assoziativen Algebra etablieren. Weiterhin müssen die Algebrarelationen wiederspruchsfrei sein, siehe dazu [Serr 66], vgl. auch (A.1).

### 3-2.2 Bourbaki und der tensoralgebraische Zugang

Wir wollen nun einen zweiten Weg einschlagen, um Cliffordalgebren zu definieren. Dabei werden Existenz und Universalität der Cliffordalgebra zutage treten. Dieses Konstruktionsverfahren wurde ausgiebig von Bourbaki [Bour 59] benutzt. Wir folgen in unserer Darstellung Chevalley [Chev 49, Chev 55] und Moody–Pianzola [Mood 95].

Im Weiteren betrachten wir assoziative Algebren $\mathcal{A}$. Diese seien wie folgt charakterisiert (siehe auch A.11):

AA1: Jeder Raum, der als assoziative Algebra bezeichnet wird, besitzt ein Einselement.

AA2: Jede assoziative Subalgebra $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ hat ebenfalls ein Einselement. Dieses ist identisch mit dem Einselement von $\mathcal{A}$.

AA3: Jeder Homomorphismus assoziativer Algebren überführt Einselement auf Einselement.

Zuerst betrachten wir eine Menge $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Aus den Elementen $x_i$ von $\mathcal{X}$ bilden wir (ungeordnete) Monome $m \in M[\mathcal{X}]$, dabei schreiben wir $x_i^n = x_i x_i \ldots x_i$, $n$–mal. Das Element $\emptyset$ schreibt man als 1. Beispiele sind

$$x_{i_1}x_{i_3}x_{i_1}x_{i_1}x_{i_4} = x_{i_1}x_{i_3}x_{i_1}^2 x_{i_4} \neq x_{i_1}^3 x_{i_3}x_{i_4}. \tag{3-30}$$

Durch Hintereinanderschreiben ist es leicht möglich, eine *assoziative* Multiplikation zu definieren. Mit

$$\begin{aligned} m &= x_{i_1}\ldots x_{i_p} \\ m' &= x_{i'_1}\ldots x_{i'_r} \end{aligned} \tag{3-31}$$

ist dann

$$
\begin{aligned}
m \cdot m' &= (x_{i_1} \dots x_{i_p})(x_{i'_1} \dots x_{i'_r}) \\
&= x_{i_1} \dots x_{i_p} x_{i'_1} \dots x_{i'_r} \\
m \cdot 1 &= 1 \cdot m = m.
\end{aligned} \tag{3-32}
$$

$M[\mathcal{X}]$ mit dieser Multiplikation heißt freies Monoid. (Ein Monoid ist eine Halbgruppe mit Einselement). Um aus $M[\mathcal{X}]$ eine Algebra zu machen, muß noch eine mit der Multiplikation kompatible Addition eingeführt werden. Dies ist die übliche komponentenweise Addition. Mit den Monomen $m_\alpha$ und den Koeffizienten $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ ist dann formal

$$
\begin{aligned}
a + b &= \sum_\alpha a_\alpha m_\alpha + \sum_\alpha b_\alpha m_\alpha \\
&= \sum_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) m_\alpha = \sum_\alpha c_\alpha m_\alpha \\
&= c.
\end{aligned} \tag{3-33}
$$

Sei nun $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ der lineare $\mathbf{K}$–Raum, der von den Monomen $m \in M[\mathcal{X}]$ aufgespannt wird, sodaß jedes Element $a \in \mathcal{A}[\mathcal{X}]$ als

$$
a = \sum_{\substack{\rho \subset \mathcal{I} \\ |\rho| = n}} a_\rho m_\rho \tag{3-34}
$$

mit endlich vielen Termen $(\# a_\rho \neq 0 < \infty)$[6] geschrieben werden kann. Die Algebra $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ heißt „freie assoziative Algebra“, siehe (A.10). Wir beschränken uns hier auf die Elemente eines formalen Polynomringes, um deren Existenz zu garantieren. Da bis hierher keine Topologie eingeführt wurde, kann auch noch nichts über die Art und Weise ausgesagt werden, wie ein Abschluß der Algebra durchgeführt werden sollte. Die hier besprochene Struktur ist somit frei von topologischen Überlegungen.

**Bemerkung:** Solche Algebren sind wohlbekannt. Man wähle $\mathcal{X} = \{x\}$, eine einelementige Menge, dann ist $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ der Polynomring $\mathbf{K}[x]$, gebildet aus allen Polynomen (mit $\mathbf{K}$–Koeffizienten) und endlichem Grad, also etwa

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 1 \\
p_1 &= ax^2 + b.
\end{aligned} \tag{3-35}
$$

Für mehrelementige Mengen erhält man Polynome mit nichtkommutierenden Variablen.

Die so gebildete Algebra ist universell (A.3). Universell ist ein Begriff aus der Theorie der Kategorien. Kategorien sind Zusammenfassungen von Objekten wie

[6] Wir schreiben lax $\rho \subset \mathcal{I}$, wenn $\rho$ ein Multiindex ist und damit nicht in $\mathcal{I}$, sondern in der Potenzmenge liegt. Insbesondere wäre die Graduierung sonst unsinnig, da jedes Element $i \in \mathcal{I}$ vom Grad eins ist und der Grad somit genau die Mächtigkeit der durch den Multiindex $\rho$ gekennzeichneten Untermenge der Potenzmenge von $\mathcal{I}$ kennzeichnet.

etwa Vektorräumen, Mengen, Algebren etc., also i.a. von Mengen mit Strukturelementen. Kategorien sind keine Mengen. Damit vermeidet man die Antinomien der „naiven“ Mengenlehre. Abbildungen von Kategorien aufeinander heißen Funktoren. Eine einfache Erklärung der Begriffe findet sich in [Breu 95].

Die Universalität von $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ bedeutet nun, daß es bis auf Isomorphien (Isomorphismus = bijektiver Homomorphismus und $\varphi(1) = 1'$) nur eine freie assoziative Algebra über $\mathcal{X}$ gibt. Es existiert also ein Funktor $\mathcal{F}$ von der Kategorie der Mengen $\underline{\mathbf{Set}}_{\mathcal{X}}$ in die Kategorie der freien assoziativen Algebren $\underline{\mathbf{f.a.–Alg.}}$

$$\mathcal{F} \quad : \quad \underline{\mathbf{Set}}_{\mathcal{X}} \rightarrow \underline{\mathbf{f.a.\text{-}Alg}}. \tag{3-36}$$

Dieser Funktor ist aufgrund der Universalitätseigenschaft injektiv, jedem $\mathcal{X}$ wird genau eine Algebra $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ (bis auf Isomorphien) zugeordnet. Offensichtlich ist $\mathcal{X}$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ mit der kanonischen Injektion $Id$

$$\begin{aligned} Id \quad : \quad & \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}[\mathcal{X}] \\ & x \rightarrow x. \end{aligned} \tag{3-37}$$

Die freie assoziative Algebra ist $\mathbf{Z}$–graduiert. Wir definieren für jedes $n \in \mathbf{N}$, $M[\mathcal{X}]$, die Menge der Monome mit $n$–Elementen und $\mathbf{1} \in M^0[\mathcal{X}]$. Die $\mathbf{Z}$–Graduierung von $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ wird definiert als (vgl. Anhang A (A.13))

$$\mathcal{A}[\mathcal{X}] \quad = \quad \begin{cases} \sum a_m m \quad |m \in M^n[\mathcal{X}], a_m \in \mathbf{K}, & \text{wenn } n \geq 0 \\ (0) & \text{wenn } n < 0. \end{cases} \tag{3-38}$$

Wir erhalten dann

$$\mathcal{A}[\mathcal{X}] \quad = \quad \oplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{A}^n[\mathcal{X}] \tag{3-39}$$

und

$$\mathcal{A}^n[\mathcal{X}]\mathcal{A}^m[\mathcal{X}] \quad \subset \quad \mathcal{A}^{n+m}[\mathcal{X}]. \tag{3-40}$$

Sei nun ein $\mathbf{K}$–Vektorraum mit der Basis $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, dann ist es offensichtlich, daß sich die obige Konstruktion wiederholen läßt. Die Algebra $T[\mathcal{V}]$ heißt Tensoralgebra von $\mathcal{V}$, sie ist universell und $\mathbf{Z}$–graduiert.

#### 3-2.2.1 Die symmetrische Algebra

Wir betrachten wieder eine Menge $\mathcal{X}$, bilden nun aber Monome, in denen die $x_i$, $i \in \mathcal{I}$ kommutieren. Es ist also z.B.

$$x_{i_1} x_{i_3} x_{i_1} x_{i_1} x_{i_4} \quad = \quad x_{i_1} x_{i_3} x_{i_1}^2 x_{i_4} = x_{i_1}^3 x_{i_3} x_{i_4}. \tag{3-41}$$

Wieder kann aus diesen Monomen eine Algebra konstruiert werden. Diese Algebra ist die freie assoziative kommutative $\mathbf{K}$–Algebra $\mathbf{K}[\mathcal{X}]$. Es läßt sich wieder zeigen, daß $\mathbf{K}[\mathcal{X}]$ ein universelles Objekt ist, außerdem ist die Algebra $\mathbf{Z}$–graduiert.

**Bemerkung:** Diese Algebra ist die Polynomalgebra über $\#\mathcal{I}$ vielen $\mathbf{K}$–Variablen. Sei z.B. $\mathbf{K}$=$\mathbf{R}$ und $\#\mathcal{I} = 2$, dann ist dies der kommutative Polynomring $\mathbf{R}[x, y]$, gebildet aus Polynomen in $x$ und $y$ von endlichem Grad, z.B.

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 + xy \\ p_1 &= (ax + by)^4, \in \mathbf{R}^4[x, y] \\ p_2 &= x^3 + 4xy - 4y^2. \end{aligned} \tag{3-42}$$

Konstruiert man die freie assoziative kommutative Algebra über einem Vektorraum, so erhält man die symmetrische Algebra $\mathcal{S}[\mathcal{V}]$. Die symmetrische Algebra ist universell und $\mathbf{Z}$–graduiert.

**Bemerkung:** Es ist nicht notwendig, sich auf Algebren über Körpern zu beschränken. Die Konstruktion ist erheblich allgemeiner mit Ringen und mit Modulen über Ringen (nicht notwendig kommutativ) durchführbar.

Sei nun $M$ ein Modul über einem kommutativen Ring $R$, dann schreibt man

$$\begin{aligned} T^p[M] &= M \otimes M \otimes \ldots \otimes M, \quad p\text{–mal}, \, p \geq 0 \\ T[M] &= \oplus_{p \geq 0} T^p[M] \end{aligned} \tag{3-43}$$

und erhält die Tensoralgebra über $M$ mit den üblichen Eigenschaften.

Wie hängt nun $T[M]$ und $\mathcal{S}[M]$ zusammen?

Um diese Frage beantworten zu können, benötigen wir den Begriff des Ideals, vgl. (A.7. Ein Ideal ist ein beidseitiges, d.h. gleichzeitig ein Links– und ein Rechtsideal. Ein Linksideal ist eine Teilmenge $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$, so daß $\forall x \in \mathcal{A}[\mathcal{X}]$ und $a, b \in \mathcal{J}$ gilt

$$\begin{aligned} xa &\in \mathcal{J} \\ a + b &\in \mathcal{J}. \end{aligned} \tag{3-44}$$

In der symbolischen Mengenschreibweise lautet dies

$$\mathcal{A}[\mathcal{X}]\mathcal{J} \subset \mathcal{J}. \tag{3-45}$$

Ein Ideal $\mathcal{J}$ ist eine Unteralgebra, nicht jedoch ein Rechts– oder Linksideal. Vorsicht, es ist insbesondere nicht $xa = x$. Wird ein Ideal von bestimmten Elementen generiert, so bedeutet dies

$$\mathcal{J} = \{xa | x \in \mathcal{A}[\mathcal{X}] \text{ und } a \text{ spezielle Elemente}\}. \tag{3-46}$$

**Beispiel:** Sei $\mathbf{R}[x]$ die Polynomalgebra über $x$ und $\mathcal{J}_{Poly}$ sei generiert von $x$ selbst, dann ist

$$\mathcal{J}_{Poly} = \{a | a \in \mathbf{R}^p[x], \quad p \geq 1\}, \tag{3-47}$$

das sind die Polynome $p(x) = \sum_{i \subset \mathcal{I}} a_i x^i$ mit verschwindendem Koeffizienten $a_0$.

Sei nun $\mathcal{J}_{sym}$ das Ideal generiert von den Elementen der Form $x \otimes y - y \otimes x$,

$$\mathcal{J}_{sym} = \{a \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \otimes b | a, b \in T[M]; \quad x, y \in M\}, \tag{3-48}$$

dann gilt

$$\mathcal{S}[M] \quad = \quad \frac{T[M]}{\mathcal{J}_{sym}}. \tag{3-49}$$

Das heißt, die Elemente von $\mathcal{S}[M]$ sind $\mathcal{J}$–cosets, (Äquivalenzklassen) in $T[M]$.

$$\phi \quad : \quad T \rightarrow \mathcal{S} \tag{3-50}$$

ist injektiv und $ker\{\phi\} = \mathcal{J}$. Betrachtet man die Injektion $\iota : \mathcal{S} \rightarrow T$, so unterscheiden sich Repräsentanten eines Elementes $x \in \mathcal{S}$ in $T$ nur um Elemente aus $\mathcal{J}_{sym}$, z.B. $a, b \in T$, $x, y \in T^1[M]$

$$\begin{aligned} \iota(s) &= a \otimes b = a \otimes b + x \otimes y - y \otimes x \\ &= a \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \otimes b + a \otimes b = \ldots \end{aligned} \tag{3-51}$$

**Bemerkung:** Um die Wirkung des Faktorisierens zu demonstrieren, wollen wir den Faktor von $\mathbf{K}[x]$, der Polynomalgebra einer Veränderlichen, nach dem Ideal $\mathcal{J}_{Poly}$ (3-47) betrachten. Das Ideal identifiziert alle Polynome mit gleichem Koeffizienten $a_0$. Es ist dann

$$\begin{aligned} p &= \sum_{m \subset \mathcal{I}} a_m x^m = a_0 + \sum_{m \subset \mathcal{I} \setminus \emptyset} a_m x^m \\ &= a_0 + p', \\ p' &\in \mathcal{J}_{Poly}. \end{aligned} \tag{3-52}$$

Damit ist aber

$$\frac{p}{\mathcal{J}_{Poly}} \quad = \quad a_0 \tag{3-53}$$

und der Faktor „projeziert" auf den Koeffizienten $a_0$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{p}{\mathcal{J}_{Poly}} = \frac{p'}{\mathcal{J}_{Poly}} &\quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a'_0, \\ a_0 + \sum_{m \subset \mathcal{I} \setminus \emptyset} a_m x^m &= a_0 + \sum_{m \subset \mathcal{I} \setminus \emptyset} a'_m x^m \mod \mathcal{J}_{Poly}. \end{aligned} \tag{3-54}$$

Ein weiteres Beispiel wird unten für Cliffordalgebren angeführt werden.

Sei nun $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann generieren auch die Elemente $v_i v_j - v_j v_i$ das Ideal $\mathcal{J}_{sym}$ (3-48). Nun definiert ein beidseitiges Ideal eine Äquivalenzrelation. Damit, und da aus $ker\{\phi\} = \mathcal{J}$, $\phi(\mathcal{J}) = 0$ folgt, ist es gerechtfertigt, folgende Relationen zu definieren:

$$v_i v_j - v_j v_i = 0. \tag{3-55}$$

Wir können somit die symmetrische Algebra ebenfalls über Generatoren und Relationen definieren. Es ist von großer Bedeutung, daß die Relationen Äquivalenzrelationen sind, da sonst das Produkt zweier Repräsentanten symmetrischer

Algebraelemente in der Tensoralgebra *nicht* in der durch das Produkt gebildeten Äquivalenzklasse liegen würde. So kann z.B. eine Ungleichung nicht als Relation verwendet werden, vgl. (A.1,A.2). Mit $\mathcal{V} =< v_1, \ldots, v_n, \ldots >$ und der Relationen (3-55) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\mathcal{V}] &= < \mathbf{1} > \oplus < v_1, \ldots, v_n, \ldots > \\ &\oplus < v_1 v_1, v_1, v_2, \ldots, v_2^2, v_2 v_3, \ldots > \oplus \ldots . \end{aligned} \tag{3-56}$$

Da das Ideal $\mathcal{J}_{sym}$ (respektive die Relationen) homogen vom Grade 2 ist (0 hat jeden Grad), überträgt sich die Graduierung von $T[\mathcal{V}]$ nach $\mathcal{S}[\mathcal{V}]$. Man beachte, daß $\mathcal{S}[\mathcal{V}]$ beliebige Potenzen der Generatoren beinhaltet.

Es ist üblich, für die Multiplikation in der symmetrischen Algebra ein $\vee$ (Vee–Produkt) zu schreiben. Ist das Produkt das Einzige (Polynomring), so schreibt man es ohne Zeichen. Berechnet man $s_1, s_2 \in \mathcal{S}[\mathcal{V}]$

$$s_1 \vee s_2 = s_3 \in \mathcal{S}[\mathcal{V}] \tag{3-57}$$

in der Tensoralgebra (vor dem Faktorisieren), so entspricht $\vee$ nicht dem Produkt (ohne Zeichen) in $T[\mathcal{V}]$. Mit der Injektion

$$\begin{aligned} \iota &: \mathcal{S} \to T \\ &\iota(s_i) = a_i \in T[\mathcal{V}] \end{aligned} \tag{3-58}$$

ist dort

$$a_1 a_2 = b = a_3 + c \tag{3-59}$$

mit

$$\begin{aligned} \iota(s_3) &= a_3 \\ c &\in \mathcal{J}_{sym} . \end{aligned} \tag{3-60}$$

Es muß also wieder auf $\mathcal{S}[\mathcal{V}]$ projeziert werden.

#### 3-2.2.2 Die Graßmannalgebra

Definieren wir nun ein anderes Ideal $\mathcal{J}_{as}$ durch

$$\mathcal{J}_{as} = \{a \otimes (x \otimes x) \otimes b | a, b \in T[M], \quad x \in T^1[M]\}, \tag{3-61}$$

dann ist die Algebra

$$\Lambda[M] = \frac{T[M]}{\mathcal{J}_{as}} \tag{3-62}$$

die Graßmannalgebra über M. Betrachten wir eine Basis $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ von $\mathcal{V}$, so ist

$$\Lambda[\mathcal{V}] = \Lambda \mathcal{V} = \oplus_n \Lambda^n \mathcal{V}. \tag{3-63}$$

Da die Elemente $e_i \otimes e_i$ im Ideal liegen und somit beim Faktorisieren auf Null abgebildet werden, kann in einem Monom $e_i$ nur in den Potenzen 0 und 1 vorkommen. Aus der Bedingung $\#\mathcal{I} < \infty$ folgt dann aber, daß es ein Monom mit höchstem Grad $\#\mathcal{I}$ gibt, das bis auf einen Faktor aus $\mathbf{K}$ eindeutig bestimmt ist.

Die Vektorraumdimension von $\mathcal{V} = \Lambda^1[\mathcal{V}]$ ist $\#\mathcal{I}$, die Dimension der anderen Gradunterräume ist durch

$$\#\Lambda^n\mathcal{V} \quad = \quad \binom{\#I}{n} \tag{3-64}$$

bestimmt. Damit ergibt sich die Dimension von $\Lambda[\mathcal{V}] = \Lambda\mathcal{V}$ zu

$$\#\Lambda\mathcal{V} \quad = \quad \#\left\{\oplus_{n=0}^{\#\mathcal{I}}\Lambda^n\mathcal{V}\right\} = \sum_{n=0}^{\#\mathcal{I}}\binom{\#\mathcal{I}}{n} = 2^{\#\mathcal{I}}. \tag{3-65}$$

Um die Relationen der Graßmannalgebra zu finden, reicht es nicht aus, $e_i \otimes e_i = 0$ zu betrachten. Wir betrachten stattdessen die polarisierte Gleichung

$$\begin{aligned} (e_i + e_j) \otimes (e_i + e_j) &= 0 \\ e_i \otimes e_i + e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i + e_j \otimes e_j &= 0 \\ e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i &= 0. \end{aligned} \tag{3-66}$$

Für Körper der Charakteristik 0 führt dies auf $e_i \otimes e_i = 0$ zurück. Die Generatoren der Graßmannalgebra sind also antikommutativ.

Die Graßmannalgebra kann durch $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ und die Relationen $e_ie_j = -e_je_i$ definiert werden. Wieder folgt die Universalität, die Graduierung wird von der Tensoralgebra übernommen.

Die Multipliklation in der Graßmannalgebra wird mit $\wedge$ (Keilprodukt oder Wedgeprodukt) bezeichnet. Wie im symmetrischen Fall unterscheidet sich $\wedge$ vom Algebraprodukt in $T[\mathcal{V}]$. $\wedge$ ist antikommutativ und assoziativ. Mit der Injektion $\iota : \Lambda\mathcal{V} \to T[\mathcal{V}]$ ist für $s_1 \wedge s_2 = s_3$

$$\iota(s_1)\iota(s_2) \quad = \quad a_1a_2 = \iota(s_3) + b \tag{3-67}$$

mit $b \in \mathcal{J}_{as}$. Der Homomorphismus $\phi : T[\mathcal{V}] \to \Lambda[\mathcal{V}]$ mit $ker\{\phi\} = \mathcal{J}_{as}$ ist nun genau der Antisymmetrisierer. Wir können daher auch

$$\begin{aligned} s_3 &= \phi(a_1a_2) = \frac{\phi(a_1)\phi(a_2)}{\mathcal{J}_{as}} \\ &= \frac{1}{2}(\phi(a_1)\phi(a_2) - \phi(a_2)\phi(a_1)) = s_1 \wedge s_2 \end{aligned} \tag{3-68}$$

schreiben.

Die Graßmannalgebra besitzt nun eine Interpretation, je nachdem wie man die Elemente der einzelnen Gradunterräume benennt. In der projektiven Interpretation heißen $x \in \Lambda^1\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}$ Punkte, $x \in \Lambda^2\mathcal{V}$ Geraden undsofort. Die Elemente $x \in \Lambda^{\#\mathcal{I}-1}\mathcal{V}$ heißen Hyperebenen. Zwischen den Räumen $\Lambda^{\#\mathcal{I}-n}\mathcal{V}$

und $\Lambda^n\mathcal{V}$ besteht eine Pol–Polaren Beziehung und wegen $\#\mathcal{I} - n = n$ ist dies eine Dualität.

Die Graßmannalgebra ist völlig metrikfrei, sie ist insbesondere *nicht* der Spezialfall einer Cliffordalgebra mit entarteter Metrik [Ozie 85, Hest 85a, Chev 55]. Diese Unterscheidung ist für mathematische Zwecke unnötig, da dort $\Lambda\mathcal{V}$ und $CL(\mathcal{V}, Q \equiv 0)$ isomorph sind. In der Physik jedoch unterscheiden sich beide Strukturen durch den unterschiedlichen Bedeutungsgehalt der Symbole, die ihren physikalischen Charakter erst ausmachen.

#### 3-2.2.3 Die Cliffordalgebra

Wir wollen nun die Cliffordalgebra als Faktoralgebra der Tensoralgebra konstruieren. Dies geschieht wieder durch die geeignete Definition eines Ideals $\mathcal{J}_{Cl}$.

Ziel ist es, eine Algebra zu konstruieren, deren Algebraprodukt mit einer quadratischen Form $Q$ kompatibel ist. Eine quadratische Form ist koordinatenfrei gegeben durch (vgl. (A.15))

$$\begin{aligned} Q \quad : \quad & \mathcal{V} \to \mathbf{K} \\ & Q(x) = \alpha \in \mathbf{K} \\ & Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x). \end{aligned} \tag{3-69}$$

Mittels $Q$ kann die polare Bilinearform $B_p \equiv B$ gebildet werden (A.16):

$$\begin{aligned} B \quad : \quad & \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbf{K} \\ & B_p = B(x,y) := \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)). \end{aligned} \tag{3-70}$$

$B$ ist offensichtlich symmetrisch. Gesucht ist nun die lineare Cliffordabbildung (Seite 152)

$$\gamma \quad : \quad \mathcal{V} \to CL(\mathcal{V}, Q), \tag{3-71}$$

so daß mit $x \in \mathcal{V}$ gilt

$$\gamma(x)\gamma(x) \quad = \quad Q(x) \in \mathbf{K}. \tag{3-72}$$

**Bemerkung:** Da wir bis hierher immer die kanonische Identifikation $Id : \mathcal{V} \to \mathcal{A}^1[\mathcal{V}]$ vorgenommen haben, ergibt sich an dieser Stelle eine begriffliche Schwierigkeit. Die Elemente von $\mathcal{V}$ sind „Vektoren" eines linearen Raumes. Auf diesen kann kein Produkt definiert werden. Elemente aus $\mathcal{A}^1[\mathcal{V}]$ heißen bei uns ebenfalls „Vektoren", besitzen aber nun eine multiplikative Struktur in der Algebra, nicht jedoch in $\mathcal{A}^1[\mathcal{V}]$ selbst. Somit ist $\mathcal{V} \ni x \neq \gamma(x) \in \mathcal{A}^1[\mathcal{V}]$ und man muß hier begrifflich unterscheiden.

Wir realisieren die Cliffordabbildung über den Umweg der Tensoralgebra. Offensichtlich müssen wir als erzeugende Elemente des Ideals $\mathcal{J}_{Cl}$

$$x \otimes x \quad = \quad Q(x) \tag{3-73}$$

wählen, um die Beziehung (3-72) zu erfüllen. Nun ist diese Beziehung wiederum nicht ausreichend, um auch die Relationen der Generatoren zu erhalten. Die

Relationen kann man aber mittels Polarisation (ersetzen von $x$ durch $x+y$) aus (3-73) erhalten. Es ist

$$\begin{aligned} (x+y)\otimes(x+y) &= Q(x+y) \\ x\otimes x + x\otimes y + y\otimes x + y\otimes y &= Q(x+y) \\ x\otimes y + y\otimes x &= Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \\ &= 2B(x,y). \end{aligned} \tag{3-74}$$

Wir erhalten also das Ideal

$$\mathcal{J}_{Cl} = \{a\otimes(x\otimes y + y\otimes x - 2B(x,y))\otimes b \mid a,b\in T[\mathcal{V}],\ x,y\in T^1[\mathcal{V}]\}. \tag{3-75}$$

Man beachte, daß es in der Tensoralgebra völlig natürlich ist, Summen von Elementen verschiedenen Grades zu bilden. Das Ideal $\mathcal{J}_{Cl}$ identifiziert also Elemente verschiedenen Grades. Es ist z.B. für $x,a,b\in T^1[\mathcal{V}]$

$$x = x - 2B(a,b)x + a\otimes b\otimes x + b\otimes a\otimes x \mod \mathcal{J}_{Cl}, \tag{3-76}$$

und die Äquivalenzklasse $[x]$ (vgl. A.3) von $x$ enthält Elemente beliebigen Grades wie schon bei $\mathcal{S}[\mathcal{V}]$ und $\Lambda[\mathcal{V}]$.

Die Cliffordalgebra über $\mathbf{K}$ zur quadratischen Form $Q$ sei nun gegeben durch

$$CL(\mathcal{V},Q) = \frac{T[\mathcal{V}]}{\mathcal{J}_{Cl}}. \tag{3-77}$$

**Beispiel:** Wir betrachten die Polynomalgebra $\mathbf{K}[x]$ in einer Veränderlichen. Das Ideal wird hier von

$$x\otimes x = \alpha\in\mathbf{K} \tag{3-78}$$

erzeugt. Betrachten wir nun Polynome, so ist

$$\begin{aligned} p &= \sum_{m\subset\mathcal{I}} a_m x^m = \sum_{m\subset\mathcal{I}^+} a_m x^m + \sum_{m\subset\mathcal{I}^-} a_m x^m \\ &= \sum_{m\subset\mathcal{I}^+} a_{2\frac{m}{2}} x^{2\frac{m}{2}} + \sum_{m\subset\mathcal{I}^-} a_{2\frac{m}{2}+1} x^{2\frac{m}{2}+1} \\ &= \sum_{m\subset\mathcal{I}^+} a_{2\frac{m}{2}} \alpha^{\frac{m}{2}} + x \sum_{m\subset\mathcal{I}^-} a_{2\frac{m}{2}+1} \alpha^{\frac{m}{2}} \\ &= a + xb, \quad a,b\in\mathbf{K}. \end{aligned} \tag{3-79}$$

Das Ideal identifiziert alle Potenzen größer 1 mit linearen Polynomen. Im Speziellen ist

$$\begin{aligned} p_0 &= x^3 + 4x^2 - 6x + 9 \\ \frac{p_0}{\mathcal{J}_{Cl}} &= \alpha x + 4\alpha - 6x + 9 = (4\alpha+9) + (\alpha-6)x, \end{aligned} \tag{3-80}$$

mit der „Rechenregel“ (Relation) $x^2 \to \alpha$. Setzt man nun $\alpha = -1$, so ist die Faktoralgebra isomorph zur Cliffordalgebra $CL_{0,1} \cong \mathbf{C}$, also isomorph zu den komplexen Zahlen. Ist z.B. $p_1 = x$, so erhält man für

$$\frac{p_1^2}{\mathcal{J}_{Cl}} = \frac{x \cdot x}{\mathcal{J}_{Cl}} = \alpha = -1. \tag{3-81}$$

Damit erkennt man, daß $x$ die Rolle des '$i$' in $\mathbf{C}$ übernimmt. Ein beliebiges Polynom $p \in \mathbf{K}[x]/\mathcal{J}_{CL}$ stellt dann eine komplexe Zahl dar. Das Produkt in $\mathbf{K}[x]$ modulo $\mathcal{J}_{Cl}$ ist dann genau die komplexe Multiplikation.

Man schreibt auch $CL(\mathcal{V}, B)$, oder über $\mathbf{R}$, $CL_{n,m}$ für eine Cliffordalgebra mit einer quadratischen Form der Signatur $(n, m)$, $Q = \delta|_{\mathbf{R}^n} \oplus -\delta|_{\mathbf{R}^m}$. Das Konzept der Signatur ist auch über $\mathbf{C}$ ($\mathbf{H}$) sinnvoll, wenn eine Hermitesche quadratische Form betrachtet wird, $\sigma$ ist dabei die (Anti–) Involution des Körpers $\mathbf{C}$ ($\mathbf{H}$)

$$Q(x) := \sigma(x)x = \bar{x}x, \tag{3-82}$$

beziehungsweise mit der Hermiteschen polaren Form

$$\overline{B(x, y)} = B(y, x). \tag{3-83}$$

Die Cliffordalgebra ist universell! (Siehe auch Seite 151.) Das heißt, gegeben sind ein Raum $\mathcal{V}$ und eine quadratische Form oder deren polare Bilinearform, dann exisitiert bis auf Isomorphien genau *eine* Cliffordalgebra mit $x^2 = Q(x)$. Damit ist $CL$ ein injektiver Funktor auf dem Paar $(\mathcal{V}, Q)$. Man spricht deshalb gewöhnlich von *der* Cliffordalgebra. Isomorphien von Cliffordalgebren erhält man z.B. durch Umordnen der Basiselemente. Es gelingt aber auch, Isomorphien zu finden, die die Signaturen verändern [Benn 87, Budi 88, Berg 93].

Die Existenz verschiedener Cliffordalgebren haben wir schon durch die explizite Konstruktion mit Generatoren und Relationen gezeigt. In der Quantenfeldtheorie werden wir mit der algebraischen Struktur formal umgehen. Wenn wir in der Lage sind, endliche Ergebnisse zu erreichen, dann hat sich a posteriori die Existenz der benutzten Algebren gezeigt. Einen Beweis für die Existenz dieser Algebren zu führen, hieße einen Konvergenzbeweis für eine Quantenfeldtheorie zu erbringen.

Mit der Faktorisierungsmethode ist leicht ersichtlich, daß auch Cliffordalgebren über Ringen oder Modulen mit einer quadratischen Form gebildet werden können [Knus 91]. Solche Räume nennt man quadratische Räume, siehe (A.17). Das Studium solcher Räume mit Hilfe der Cliffordalgebren ergibt sehr tiefliegende Ergebnisse der Arithmetik und der Klassifikation von quadratischen Formen [Witt 37, Hahn 94].

Die Cliffordalgebra besitzt *keine* $\mathbf{Z}$–Graduierung. Dies liegt daran, daß im Ideal $\mathcal{J}_{Cl}$ Grad 0 und Grad 2 Elemente identifiziert wurden. Damit gilt für homogene Elemente $x_\alpha$ und $x_\beta$, $\quad \alpha \cap \beta = \emptyset$

$$x_\alpha x_\beta \neq \pm x_{\alpha \cup \beta}, \tag{3-84}$$

wie in der symmetrischen Algebra und der Graßmannalgebra. Das Produkt ergibt sich wie in (3-22) mit den Graden $|\alpha+\beta|$, $|\alpha+\beta-2|$, ..., $|\alpha-\beta|$.

Die explizit basisfreie Konstruktion der Cliffordabbildung zeigt uns, daß wir mit der Generator– und Relationen–Methode gewissermaßen zuviel konstruiert haben, da wir dort in der Lage waren, das „Ausreduzieren nach der Basis" vorzunehmen. Arbeitet man basisfrei, so kann nur zwischen geraden (even,+) und ungeraden (odd,−) Elementen unterschieden werden. Diese Unterscheidung stellt nun ebenfalls eine Graduierung dar, sie heißt Semigraduierung oder $\mathbf{Z}_2$–Graduierung. Die Graduierung wird durch den Hauptautomorphismus induziert (A.19). Es ist

$$\begin{aligned} \hat{} \;\; : \;\; & \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \\ & x \rightarrow x\hat{} = -x. \end{aligned} \tag{3-85}$$

Damit kann man

$$\begin{aligned} X^+ &:= \frac{1}{2}(X + X\hat{}) \\ X^- &:= \frac{1}{2}(X - X\hat{}) \\ X &= X^+ + X^- \\ CL &= CL^+ \oplus CL^- \end{aligned} \tag{3-86}$$

definieren. Die direkte Summe bezieht sich auf die lineare Struktur. Dies ergibt, daß $CL^+$ eine Unteralgebra bildet, $CL^-$ jedoch nicht, da

$$\begin{aligned} CL^+CL^+ &\subset CL^+ \\ CL^-CL^- &\subset CL^+ \end{aligned} \tag{3-87}$$

ist. $CL^+$ eignet sich, um nicht notwendig irreduzible Darstellungen von $CL$ zu erhalten. Die Behandlung der Darstellung verschieben wir auf Abschnitt 3-4.
**Bemerkung:** Die obige Konstruktion läßt sich auch für symplektische Bilinearformen durchführen [Crum 90]. Man wählt mit $\sigma(x,y) = -\sigma(y,x)$ das Ideal

$$\mathcal{J}_W \;\; = \;\; \{a \otimes (x \otimes y - y \otimes x - 2\sigma(x,y)) \otimes b | a, b \in T[\mathcal{V}],\; x, y \in T^1[\mathcal{V}]\}. \tag{3-88}$$

Es erweist sich jedoch als schwierig, aus dieser Algebra eine Gruppenstruktur zu konstruieren, siehe auch (A.23). Diese Algebra ist über **R** und **C** *nicht integrabel*. Zu diesem Sprachgebrauch siehe [Mood 95]. Bildet man jedoch $T[\mathcal{V}]$ über einem kommutativen Polynomring, so findet man eine Gruppenwirkung. Die so erhaltene Algebra ist die Weylalgebra oder $W$–Algebra. Sie kann mit einer $*$–Struktur ausgestattet werden. Solche Algebren werden in der Feldtheorie für Bosonen verwendet. Es ist an dieser Stelle interessant, daß bosonische Algebren über den erheblich komplizierteren Ringen und nicht über Körpern konstruiert werden müssen [Crum 90].

### 3-2.3 Chevalley–Deformation der Graßmannalgebra

Chevalley entwickelte diesen Zugang zur Cliffordalgebra, um auch Cliffordalgebren über Körpern der Charakteristik 2 studieren zu können. ($Char(\mathbf{K}) = 2$ bedeutet, 2 ist Nullteiler, der Körper besitzt z.B. nur 0 und 1 als Elemente, addiert wird modulo 2, $1 + 1 = 2 \bmod 2 = 0$.) Die Methode gilt als sehr abstrakt [Crum 90, Benn 87, Budi 88]. Es scheint somit angebracht, vorab klarzustellen, warum wir diese abstrakte Methode bemühen, obwohl Feldtheorien gewöhnlich über **R** oder **C**, also Körpern der Charakteristik 0 (keine Nullteiler außer 0 selbst) konstruiert werden.

Wir werden in den Kapiteln 4 und 5 feldtheoretische Methoden mit Cliffordalgebren untersuchen. Normalerweise spielt das Element $\gamma^5$, bzw. das Element vom Grad $\#\mathcal{I}$ eine entscheidende Rolle in der Clifford–algebraischen Theorie, siehe z.B. die Klassifikations– und Periodizitätstheoreme [Port 81]. In einer Quantenfeldtheorie mit unendlich vielen Freiheitsgraden besitzt auch die Graßmann– oder die Cliffordalgebra keinen höchsten Grad. Man ist damit nicht mehr in der Lage, z.B. eine Pol–Polaren Beziehung zwischen $\Lambda^{\#\mathcal{I}-n}\mathcal{V}$ und $\Lambda^n\mathcal{V}$ herzustellen. Genau hier wird uns der Chevalleysche Zugang weiterhelfen. Es muß jedoch betont werden, daß für die Existenz der Algebren Konvergenzaussagen unabdingbar notwendig werden. Dies ist aber genau das angestrebte Ziel einer regulären Quantenfeldtheorie. Die Konvergenz ist auf eine enge Weise mit der $*$–Struktur und damit mit inäquivalenten Darstellungen der Algebra verknüpft.

Es erscheint hier also angebracht, diese algebraische Struktur zu untersuchen. Das formale Vorgehen ist gerechtfertigt, solange es gelingt, auf Konzepte zu verzichten, die einen Normbegriff oder ein Innenprodukt benötigen, wie eben Konvergenz, Stetigkeit, Integration etc. Es wird sich herausstellen, daß eine Quantenfeldtheorie erstaunlich weit *ohne* diese Konzepte behandelt werden kann und muß. Dies geschieht in Kapitel 4.

Darüberhinaus ist es mir nur mit der Chevalley–Deformation möglich, Cliffordalgebren mit nichtsymmetrischen Bilinearformen zu behandeln. Es ist sehr schwierig, geeignete Ideale dafür zu konstruieren. Diese nichtsymmetrische (nichtantisymmetrische) Verallgemeinerung wird für die korrekte Definition fermionischer (bosonischer) Feldtheorien von großer Bedeutung sein.

Auch wird dieser Zugang die in der Physik notwendige **Z**–Graduierung über die Graßmannalgebra in die Cliffordalgebra übertragen und so zur Klärung dieser Struktur beitragen, die zur Klassifikation von „Teilchen“ wesentlich ist.

#### 3-2.3.1 Die Graßmannalgebra der Linearformen, Derivationen

Wir betrachten hier weiterhin Räume mit $dim\mathcal{V} < \infty$. Der Raum der Homomorphismen nach **K** sei mit $\mathcal{V}^*$ bezeichnet

$$\mathcal{V}^* \cong Hom(\mathcal{V}, \mathbf{K}). \tag{3-89}$$

Elemente $f$ aus $\mathcal{V}^*$ sind Linearformen auf $\mathcal{V}$, es ist weiterhin $dim\mathcal{V}^* = dim\mathcal{V}$. Ist in $\mathcal{V}$ eine Basis $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ gegeben, dann kann in $\mathcal{V}^*$ eine Kobasis $\{f_{e_i} \equiv f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$

mittels

$$f_i(e_j) \quad = \quad \delta_{ij} \tag{3-90}$$

definiert werden. Da $\mathcal{V}^*$ nun selbst wieder ein linearer Raum ist, kann sofort wieder die Tensoralgebra $T[\mathcal{V}^*]$ gebildet werden.

Man muß nun untersuchen, wie eine Linearform $f$ auf den anderen Gradunterräumen von $T[\mathcal{V}]$ mit Grad $n$, $n > 1$ wirkt. Dazu benötigen wir das algebraische Konzept der Derivation.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ graduierte Algebren. $\mathcal{I}^+ \subset \mathcal{I}$ ist die Indexmenge, die durch den Hauptautomorphismus $J$ stabilisiert wird. $+$ hat index 2 und stabilisiert den geraden Unterraum. Sei nun $\varphi$ ein Homomorphismus von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{X}'$, $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$.

Eine $\varphi$–Derivation $D$ von $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ nach $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}[\mathcal{X}']$ ist eine lineare Abbildung $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, homogen vom Grade $n$, so daß für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt

$$D(xy) \quad = \quad D(x)\varphi(y) + \varphi(J^n x)D(y), \tag{3-91}$$

wobei $J^n$ die $n$–te Potenz des Hauptautomorphismus $J$ ist.

Ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$, dann ist $\varphi \equiv Id$ und $D$ heißt einfach Derivation. Spezialfälle von Derivationen sind mit $x \in \mathcal{A}^h[\mathcal{X}]$, $y \in \mathcal{A}[\mathcal{X}]$

$$D(x, y) \quad = \quad D(x) + (-1)^{hn} x D(y). \tag{3-92}$$

Dies reduziert sich für Elemente einer nichtgraduierten Algebra zur gewöhnlichen Derivation (alle Elemente vom Grad 0)

$$D(xy) \quad = \quad D(x)y + xD(y). \tag{3-93}$$

Die gewohnte Situation ergibt sich ebenfalls für $n$ gerade. Ist $n$ ungerade, so erhalten wir die Antiderivation

$$D(xy) \quad = \quad D(x)y - xD(y), \tag{3-94}$$

siehe dazu auch das umgekehrte Vorgehen von Marcel Riezs [Ries 58].

Wir wollen mit Chevalley [Chev 54] noch eine andere Schreibweise einführen. Sei $L_x$ die Linksmultiplikation mit $x$, also

$$L_x y \quad = \quad xy, \tag{3-95}$$

so schreibt sich (3-91) als Operatorgleichung

$$D \circ L_x \quad = \quad L_{D(x)} \circ \varphi + L_{\varphi(J^n x)} \circ D. \tag{3-96}$$

Ist wieder $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$, so erhält man

$$D \circ L_x \quad = \quad L_{D(x)} + L_{J^n x} \circ D. \tag{3-97}$$

Die Derivationen bilden den Raum $\mathcal{A}^0[\mathcal{X}]$ der „skalaren“ (Grad 0) Elemente auf 0 ab, wegen

$$D(1) \quad = \quad D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) = 2D(1) \tag{3-98}$$

und der Linearität der Derivation. Die Derivationen bilden einen linearen Raum. Ist $\varphi$ ein Homomorphismus von $\mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ und $\varphi'$ ein Homomorphismus von $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$, so ist

$$D_{\varphi'} \circ D_{\varphi} \tag{3-99}$$

ebenfalls eine Derivation. Eine weitere wichtige Eigenschaft von Derivationen besteht darin, daß sie homogene lineare Räume auf homogene lineare Räume abbilden, nicht jedoch notwendig Unteralgebren aufeinander. Arbeiten wir mit Generatoren, so folgt aus $D(e_i) = 0,\ \forall i \in \mathcal{I}'$ schon, daß $\mathcal{V} =< e_i, \ldots >,\ i \in \mathcal{I}'$ von der Derivation zu Null gemacht wird, $D(\mathcal{V}) = 0$. Dies ist wichtig, um die Wirkung von $D$ auf Ideale (Unteralgebren) zu untersuchen. Ist die Wirkung von $D$ auf den Generatoren bekannt, so kennt man sie auf der dadurch generierten Algebra, aufgrund der Linearität.

Aus den obigen Eigenschaften folgt nun, daß die Derivationen und eine Faktorisierung der Algebra kommutieren, wenn $D(\mathcal{J}) = 0$ gilt. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \stackrel{\varphi,D}{\longrightarrow} & \mathcal{A}' \\ \psi\downarrow & & \downarrow\psi' \\ \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{J}} & \stackrel{\bar{\varphi},\bar{D}}{\longrightarrow} & \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{J}} \end{array} \tag{3-100}$$

mit den kanonischen Projektionen (A) $\psi$ und $\psi'$ ist kommutativ.

Wirkt nun $D$ und $D'$ vom Grad $n$ und $n'$ auf $\mathcal{X}$ ($\varphi = Id$), so ist

$$\Delta \;=\; DD' + (-1)^{nn'} D'D \tag{3-101}$$

wieder eine Derivation, $\Delta$ ist vom Grade $nn'$. Wenn $n$ *oder* $n'$ ungerade sind, ist

$$[D, D']_- \;=\; DD' - D'D \tag{3-102}$$

eine Derivation. Sind $n$ *und* $n'$ gerade, so ist

$$\{D, D'\}_+ \;=\; DD' + D'D \tag{3-103}$$

wieder eine Derivation. Man sieht daran, daß die Derivationen *keine* Algebra unter der Komposition bilden. Graduiert man nun die Algebra $\mathcal{A}$ so, daß die Generatoren den Grad 1 erhalten, und sei $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, dann gilt, daß es für jedes homogene Element $y_\alpha \in \mathcal{A}$ mit Grad $|\alpha| = n + 1$ genau eine Derivation mit Grad $n$ gibt, so daß

$$D(e_i) \;=\; y_\alpha \tag{3-104}$$

erfüllt ist [Chev 55].
**Bemerkung:** Dies entspricht dem „Bracket"–Formalismus der Supersymmetrie. Gerader oder ungerader Grad unterscheidet dann den fermionischen oder bosonischen Charakter. Man beachte, daß „gerade" hier dem Begriff „fermionisch" entspricht.

Es ist nun klar, daß wir ebenfalls Derivationen auf Faktoralgebren wie der Graßmannalgebra oder der Cliffordalgebra finden können. In der Cliffordalgebra gibt es jedoch wegen der Semi– oder $\mathbf{Z}_2$–Graduierung nur 2 Sorten von Derivationen. Diese sind entweder ungerade (odd, $-$) oder gerade (even,$+$). Vernichtet eine Derivation das Ideal mit dem faktorisiert wird, so läßt sie sich auf den Faktor $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ übertragen. Dieses Konzept ist von größter Wichtigkeit, auch für die Konstruktion vom Matrixpseudogruppen (Quantengruppen) [Woro 89] .

Es ist nun möglich, mit der kanonischen Basis der $f_i \in \mathcal{V}^*$ $(f_i(e_j) = \delta_{ij})$ eine freie Algebra zu konstruieren. Sind nun die $f_i$ *Derivationen*, so kann die Wirkung der $f_i$ und ihrer Potenzen $f_\alpha = f_{i_1} \ldots f_{i_n}$ auf Elemente aus $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$ resp. $T[\mathcal{V}]$ bestimmt werden.
**Bemerkung:** Ohne die (graduierte) Leibnizregel ist es nicht klar, wie man etwa Ausdrücke der Form

$$f_i(x_j x_k);\ (f_i f_j)(x_k);\ f_\alpha(x_\beta) \quad |\alpha| \neq |\beta| \tag{3-105}$$

berechnen soll. Es erscheint somit *notwendig*, sich auf die Derivationen zu beschränken.

Wir wollen im Weiteren die Derivationen mit $\partial_i$ bezeichnen, um den Derivationscharakter hervorzuheben. Die Generatoren der Graßmannalgebra bezeichnen wir auch mit $j_i$. Somit ergibt sich $\mathcal{V} =< j_{i_1}, \ldots, j_{i_n}, \ldots >$, $\mathcal{V}^* = < \partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_n}, \ldots >$

$$\partial_{i_r}(j_{i_s}) \;=\; \delta_{i_r i_s} \tag{3-106}$$

und daraus erhält man $\Lambda[\mathcal{V}]$ und $\Lambda[\mathcal{V}^*]$. Es ist möglich, Elemente aus $\Lambda[\mathcal{V}]\oplus\Lambda[\mathcal{V}^*]$ auf $\Lambda[\mathcal{V}]$ wirken zu lassen.
**Bemerkung:** Legt man die Graduierung im Raum $\mathcal{V}^*$, $\partial_i$, $i \in \mathcal{I}$, $|i| = 1$ dadurch fest, daß $\partial_i$ den Grad $-1$ besitzt, so bildet der Antikommutator der Derivationen wieder eine Derivation. Sollen in der äußeren Algebra über $\mathcal{V}^*$ nur Derivationen enthalten sein, so muß man gewährleisten, daß Ausdrücke der Form $\partial_i\partial_j$ wieder Derivationen sind, siehe (3-103). Dies erzwingt die Antisymmetrie, die „richtige“ Algebra ist also $\Lambda[\mathcal{V}^*]$, sie besteht per Konstruktion aus Derivationen.

#### 3-2.3.2 Die Cliffordalgebra als Unteralgebra der Endomorphismenalgebra der Graßmannalgebra

Bevor wir nun die Cliffordalgebra mittels der Chevalley–Deformation konstruieren wollen, sollen zwei Beispiele angeführt werden, wie spezielle Endomorphismen der Graßmannalgebra realisiert werden. Wir betrachten also Elemente aus

$$End\{\Lambda[\mathcal{V}]\}. \tag{3-107}$$

Es ist auf jeden Fall $\Lambda[\mathcal{V}], \Lambda[\mathcal{V}^*] \in End\{\Lambda[\mathcal{V}]\}$. Insbesondere bilden die $\mathbf{K}$–wertigen linearen Abbildungen eine Teilmenge von $End\{\Lambda[\mathcal{V}]\}$. Solche Abbildungen stellen aber (bis auf die Positivität) die Kandidaten für quantentheoretische Zustände dar.

Zuerst betrachten wir als Beispiel die „Spur“. Sei dazu $\varphi$ ein Endomorphismus von $\mathcal{V}$. $\xi = e_\alpha = (e_{i_1} \ldots e_{i_n})$, $i_r \in \mathcal{I}$, $|\alpha| = n$ generiert den Unterraum $\Lambda^n[\mathcal{V}]$, wenn $\Lambda^n[\mathcal{V}]$ der größte Unterraum ist, für den $x \subset \Lambda^n[\mathcal{V}]$ gilt

$$x \wedge \xi \;=\; 0. \tag{3-108}$$

Wir wissen, daß eine Derivation vom Grad 0 existiert, sodaß $\varphi$ auf $\Lambda[\mathcal{V}]$ durch

$$D_\varphi \xi \;=\; s_\varphi \xi \tag{3-109}$$

gegeben wird. $s_\varphi$ ist ein Element des kommutativen Körpers **K**. In $\Lambda^1[\mathcal{V}]$ gilt nun

$$\varphi(e_i) \;=\; \sum_j a_{ij} e_j. \tag{3-110}$$

Man erhält für die Spur des Endomorphismus $\varphi$ auf dem von $\xi$ generierten Raum $\Lambda^n[\mathcal{V}]$:

$$\begin{aligned}
(Tr\varphi)\xi &= D_\varphi \xi = D_\varphi(e_{i_1} \ldots e_{i_n}) \\
&= (D_\varphi(e_{i_1}))e_{i_2} \ldots e_{i_n} + e_{i_1}(D_\varphi(e_{i_2})) \ldots e_{i_n} + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{n} e_{i_1} \ldots e_{i_{k-1}} \varphi(e_{i_k}) \ldots e_{i_n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} e_{i_1} \ldots e_{i_{k-1}} (a_{i_k i_r} e_{i_r}) \ldots e_{i_n},
\end{aligned} \tag{3-111}$$

und wegen $e_i^2 = 0$ ist dann

$$(Tr\varphi)\xi \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{i_k i_k}(e_{i_1} \ldots e_{i_n}). \tag{3-112}$$

Die Spur ist zyklisch, da **K** kommutativ war, $Tr(\varphi\varphi'\varphi'')\xi = Tr(\varphi'\varphi''\varphi)\xi$. Es ist durchaus bemerkenswert, daß die Spur zwar durch ein Element aus **K** gekennzeichnet ist, jedoch *nicht* nach **K** abbildet [Chev 55]. Siehe zum Vergleich auch die Bemerkungen von A. Zaddach zum regressiven Produkt H. Graßmanns [Zadd 94]. Ein Vergleich der Werte von Spuren bezüglich desselben Elementes $\xi$ ist jedoch möglich. Man könnte $(Tr\varphi)\xi$ als Partialspur von $\varphi$ auf $\xi$ bezeichnen.

Wir wenden uns noch der Determinante zu, diese wurde von Hestenes und Sobczyk [Hest 84] ausgiebig untersucht. Sei $S$ ein Endomorphismus von $\Lambda[\mathcal{V}]$, homogen vom Grade 0. Es gibt einen eindeutig bestimmten Skalar $\Delta_S$, sodaß gilt

$$S(z) \;=\; \Delta_S z, \quad \text{für } z \in \Lambda^{\#\mathcal{I}}[\mathcal{V}]. \tag{3-113}$$

Wir machen hier von der Endlichkeit der Indexmenge Gebrauch, könnten aber auch eine Folge von anwachsenden Indexmengen betrachten. In Moody–Pianzola finden sich noch weitere Konzepte zur Behandlung unendlicher Indexmengen [Mood 95].

$\Delta_S$ heißt Determinante des Endomorphismus $S$ (auf $\Lambda^{\#\mathcal{I}}[\mathcal{V}]$). Man hat mit $(\#\mathcal{I} = n)$

$$S(e_i) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \tag{3-114}$$

und damit

$$\begin{aligned}\Delta_S(e_{i_1}\ldots e_{i_n}) &= (\sum ae)_{i_1}(\sum ae)_{i_2}\ldots(\sum ae)_{i_n}\\ &= \sum_{i_1 i_2\ldots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}(e_{i_1}\ldots e_{i_n}).\end{aligned} \tag{3-115}$$

Hieraus folgt $det(SS') = det(S)det(S')$. Diese Art der Transformation ist *keine* Derivation, sondern ein „Outermorphism" [HEST 84].

Wir wollen nun die Cliffordalgebra aus Elementen der direkten Summe der Räume $\Lambda[\mathcal{V}]$ und $\Lambda[\mathcal{V}^*]$ bilden. Damit zeigt sich, daß die Cliffordalgebra eine Unteralgebra der Endomorphismenalgebra von $\Lambda[\mathcal{V}]$ ist.

Man setzt für die Generatoren $g$ der Cliffordalgebra und denen der Algebren $\Lambda[\mathcal{V}]$, $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}} \cong \{L_{e_i}\}_{i\in\mathcal{I}}$ und $\Lambda[\mathcal{V}^*]$, $\{\partial_{e_i}\}_{i\in\mathcal{I}}$ folgende Beziehung an [CHEV 54],

$$g_i = \partial_{e_i} + L_{e_i} \equiv \partial_{e_i} + e_i \circ . \tag{3-116}$$

Es läßt sich leicht nachrechnen, daß damit

$$g_i g_j + g_j g_i = 2\delta_{ij} \tag{3-117}$$

gilt. Das Ergebnis ist die euklidische Cliffordalgebra über $\mathbf{K}$ (Signatur $+\#\mathcal{I}$). Die Universalität garantiert uns nun die Eindeutigkeit etc. Wir können die Elemente $g_i$ als Endomorphismen (Operatoren) auf $\Lambda[\mathcal{V}]$ anwenden. Mit der Dualitätsbeziehung erhalten wir eine natürliche Wirkung der $g_i$ nach links auf $\Lambda[\mathcal{V}^*]$ durch

$$(g_i\Lambda[\mathcal{V}])^* = \Lambda[\mathcal{V}^*]g_i^*. \tag{3-118}$$

Dabei ist $e_i^* = \partial_{e_i}$ und $\partial_{e_i}^* = e_i$. Die $g_i$ sind also $*$–invariante Elemente

$$g_i^* = (\partial_{e_i} + e_i)^* = e_i + \partial_{e_i} = g_i. \tag{3-119}$$

**Bemerkung:** Da es *keinen* kanonischen Dualisomorphismus $* : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ gibt, bedeutet unsere Festlegung eine *Wahl*. Will man die Wahl vermeiden, so darf man keinen Dualisomorphismus ($*$–Struktur) festlegen. Saller verwendet deshalb die „Quantenalgebra", eine Cliffordalgebra über dem komplexen selbstdualen Raum $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^*$ [SALL 93, SALL 94, SALL 95].

Die oben betrachteten Definitionen der Spur und Determinante können leicht auf die Cliffordalgebra übertragen werden. So ist mit $\xi = (g_1 \wedge \ldots \wedge g_n) = (e_1 \ldots e_n) \in CL(\mathcal{V}, \delta)$

$$\begin{aligned}(TrA)\xi &= \sum_{ij}(e_i A_{ij}\partial_j)\xi\\ (detA)\xi &= A(e_1\ldots e_n) = (Ae_1)\ldots(Ae_n)\\ &= \Delta_A(e_1\ldots e_n) = \Delta_A\xi.\end{aligned} \tag{3-120}$$

Man beachte, daß auch hier *nicht* nach $\mathbf{K}$ abgebildet wird, sondern nach $\mathbf{K}\xi = \mathbf{K}(e_1 \ldots e_n)$. Absolute Werte sind also unerheblich, da sie von der Basis abhängig sind, ein Vergleich solcher Größen ist aber möglich.

## 3-3 Cliffordalgebren mit nichtsymmetrischer Bilinearform

Alle bisherigen Konstruktionen der Cliffordalgebren führten auf symmetrische Bilinearformen. Wir hätten jedoch alle Schritte auch mit einer antisymmetrischen Bilinearform, die zu einer symplektischen Form gehört, durchführen können. Die Algebren, die wir erhalten hätten, wären bosonische Algebren geworden [Crum 90]. Es erscheint als vorgegeben, daß wir eine der Symmetrien *wählen* müssen. In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, ein Konstruktionsverfahren zu entwickeln, das Cliffordalgebren zu *beliebigen* Bilinearformen erzeugen kann. Solche Bilinearformen sind daher nicht mehr diagonalisierbar und können auch nicht mehr auf rein bosonische oder fermionische Felder führen. Die zu solchen Algebren gehörige quadratische Form hat ein sogenanntes „singuläres Gebilde". Durch Einführen homogener Koordinaten könnten wir wieder eine homogene (vom Grad 2) quadratische Form erhalten. Dies geschähe jedoch auf Kosten der Einführung einer neuen Hilfskoordinate. Die dazu gehörige Cliffordalgebra hätte einen Generator mehr und als linearer Raum doppelt so viele Dimensionen. Um die ursprüngliche, zu beliebigen Bilinearformen gehörige Cliffordalgebra zurückzuerhalten, benötigt man *Nebenbedingungen.* Durch die direkte Konstruktion für nicht–(anti)–symmetrische Bilinearformen wird die Komplikation umgangen.

Cliffordalgebren zu allgemeinen Bilinearformen werden auch in der Mathematik nur selten untersucht. Sie stehen in sehr engem Bezug zu Zopfgruppen und quanten–deformierten Algebren und Gruppen. Es würde uns zu weit von unserem Ziel entfernen, diesen Zusammenhang zu erläutern, dies wird in zukünftigen Arbeiten aber eine wichtige Aufgabe sein. Es ist somit nicht möglich, auf eine ausgebaute mathematische Theorie zurückzugreifen, da diese eben noch nicht existiert. Wir beschränken uns deshalb auf die Konstruktion der notwendigen Begriffe [Faus 95b]. Alles wird nur insoweit entwickelt, als es eine erste Anwendung in der Quantenfeldtheorie erfordert.

Der einfachste und konstruktive Weg zu solchen Strukturen besteht in der Benutzung der Chevalley–Deformation.

Sei nun $B$ eine allgemeine, nicht notwendig mit einer Symmetrie versehene Bilinearform. Wir definieren die Linkskontraktion wie folgt:

$$\begin{aligned} \lrcorner \; &: \; \mathcal{V} \to \mathcal{V} \\ & f_x(y) = (x \lrcorner)(y) = B(x,y). \end{aligned} \tag{3-121}$$

Das Element $f_x \equiv (x \lrcorner)$ wirkt also wie eine Form aus $\mathcal{V}^*$. Wir haben durch $B$ somit *einen* Dualisomorphismus ausgezeichnet, einen, wegen des endlich dimensionalen Grundraumes. Da nun aber $B$ völlig beliebig war, kann die Situation auch so aufgefaßt werden, daß $B$ die Dualisomorphismen *parametrisiert.* Wir können also, solange wir $B$ nicht festlegen, mit einer beliebigen $*$–Struktur arbeiten. Dies wird in der Quantenfeldtheorie von großer Bedeutung sein.

Man kann völlig unabhängig von $B$ die Graßmannalgebra über $\mathcal{V}$ bilden. Dabei wird *ein* äußeres Produkt (Keilprodukt, $\wedge$) definiert. Wieder seien $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ die Generatoren von $\mathcal{V}$ und damit von $\Lambda[\mathcal{V}]$. Wir müssen dann die Wirkung von $f_x \equiv x \rfloor$ auf $\Lambda[\mathcal{V}]$ festlegen. Es erweist sich als vorteilhaft, $f_x$ als Derivation auf $\Lambda[\mathcal{V}]$ zu definieren. Wir benutzen dazu die Graduierung von $\Lambda[\mathcal{V}]$. Die Leibnizregel für $f_x \equiv x \rfloor$ lautet dann $x, y \in \mathcal{V}$, $f_x \in \mathcal{V}^*$, $a \in \Lambda[\mathcal{V}]$

$$\begin{aligned} f_x(ya) &= (f_x y)a - y f_x(a) \\ x \rfloor (ya) &= (x \rfloor y)a - y(x \rfloor a). \end{aligned} \tag{3-122}$$

Damit ist festgelegt, wie $\mathcal{V}^*$ auf $\Lambda[\mathcal{V}]$ wirkt. $\mathcal{V}^*$ ist ein linearer Raum, deshalb ist $f_x \equiv x \rfloor$ ein linearer Operator auf $\Lambda[\mathcal{V}]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $x, y \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} f_{(\alpha x + \beta y)} &= \alpha f_x + \beta f_y \\ (\alpha x + \beta y) \rfloor &= \alpha x \rfloor + \beta x \rfloor. \end{aligned} \tag{3-123}$$

Nun sollen die Linearformen selbst zu einer Algebra gemacht werden, dazu müssen wir ein Produkt definieren. Wir verlangen, daß Derivationen (lokal) nilpotent vom Grade 2 sind. Dies gewährleistet, daß das Produkt zweier Derivationen wieder eine Derivation ist. Wir haben also

$$f_x \circ f_x(a) = 0, \quad \forall a \in \Lambda[\mathcal{V}]. \tag{3-124}$$

Dies erreichen wir mit

$$\begin{aligned} f_x \circ f_x &= f_{x \wedge x} = f_0 \\ x \rfloor (x \rfloor a) &= (x \wedge x) \rfloor a = 0a = 0. \end{aligned} \tag{3-125}$$

Es bietet sich hier an, die Linearformen selbst zu einer Graßmannalgebra zu machen. Mit den Generatoren $f_{e_i}$, $B$–dual zu $\mathcal{V}$

$$f_{e_i}(e_j) = f_i(e_j) = B(e_i, e_j) = B_{ij} \in \mathbf{K}, \tag{3-126}$$

kann $\Lambda[\mathcal{V}^*] = \Lambda[< f_1, \ldots, f_n, \ldots >]$ gebildet werden. Mit den Rechenregeln (3-122,3-123,3-125) ist dann die Wirkung der Elemente $f_\alpha \in \Lambda[\mathcal{V}^*]$ auf $b \in \Lambda[\mathcal{V}]$ bekannt.

Jetzt können wir *wählen*, ob wir $\mathcal{V}^*$ oder $\mathcal{V}$ als Formenraum ansehen wollen. Wir könnten genauso die Elemente aus $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{V}^*$ wirken lassen. Dies läßt sich durch die Rechtskontraktion ausdrücken:

$$x \llcorner y = B(y, x). \tag{3-127}$$

Wieder ist $\llcorner$ ein linearer Operator, diesmal auf $\mathcal{V}^*$ und wir definieren analog $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $x, y \in \mathcal{V}$, $a, b \in \Lambda[\mathcal{V}]$,

$$\begin{aligned} x \llcorner y &= B(y, x) \\ a \llcorner (\alpha x + \beta y) &= \alpha(a \llcorner x) + \beta(a \llcorner y) \\ (ax) \llcorner y &= a(x \llcorner y) - (a \llcorner y)x \\ (a \llcorner x) \llcorner y &= a \llcorner (x \wedge y). \end{aligned} \tag{3-128}$$

**Bemerkung:** Hermann Graßmann versuchte schon in der „Linealen Ausdehnungslehre“ von 1844 zusätzlich zum äußeren (Keil–) Produkt ein zweites Produkt zu definieren, das den Grad verringern sollte, während das Keilprodukt ja den Grad immer gleich läßt oder erhöht. Dieses „eingewandte Produkt“ – in der $\mathbf{A}_2$ benannte er es dann in „regressives Produkt“ um – löste viel Verwirrung aus. Graßmann konstruierte über die „Ergänzung“ eine Pol–Polaren–Beziehung, mit deren Hilfe er die Räume gleicher Dimension $\Lambda^n[\mathcal{V}]$ und $\Lambda^{\#\mathcal{I}-n}[\mathcal{V}]$ identifizieren konnte. Läßt man nun ein Element des zweiten Raumes mittels des äußeren Produktes auf ein Element des ersten wirken, so ergibt sich ein Ausdruck mit Graden größer als n. Ergänzt man nun ein zweites Mal, was $n \to \#\mathcal{I} - n$ für die Grade $n$ entspricht, so haben sich die Grade erniedrigt. Sei z.B. die Dimension gleich 4 und wir bilden zuerst das regressive Produkt zweier Vektoren vom Grad 1. Ergänzen wir nun Einen, erhält er den Grad $4 - 1 = 3$. Das äußere Produkt der beiden Elemente ergibt die Grade 4 und 2. Ergänzt man nun ein weiteres Mal, so entstehen die Grade 0 und 2, also verminderte Grade. Der Grad 0 beschreibt den parallelen Anteil der Vektoren, der Grad 2 Anteil den orthogonalen Anteil. Obwohl es nun so aussieht, als ob Graßmann hier das Cliffordprodukt eingeführt hätte, ist diese Operation der „Meet“ oder die „Inzidenz“ und damit schwach basisabhängig [ZADD 94]. Die Inzidenz ist ein wichtiges Konzept der projektiven Geometrie. Durch die Chevalley–Deformation wird jedoch deutlich, daß die Cliffordalgebra zum gleichen Grundraum *nicht* innerhalb der Graßmannalgebra, gebildet werden kann.

Wir definieren nun die Chevalley–Deformation der Graßmannalgebra, wie wir dies schon in (3-116) getan haben. Sei $L_{e_i} \equiv L_i$ die Linksmultiplikation mit $e_i$ in $\Lambda[\mathcal{V}]$ und $\partial_i \equiv f_{e_i} \equiv f_i$ die dualen Generatoren mit

$$\partial_i(e_j) \;:=\; \delta_{ij}. \tag{3-129}$$

Es ist nun möglich, eine beliebige Bilinearform zu wählen und damit die Cliffordalgebra zu bilden. Zunächst zerlegen wir $B$ in symmetrische und antisymmetrische Anteile:

$$\begin{aligned} A + F &:= B \\ A^T &= A \\ F^T &= -F. \end{aligned} \tag{3-130}$$

Gesucht wird eine $B$–Dualität, die sich als

$$\begin{aligned} \partial_i^B(e_j^B) &= B_{ij} \\ e_i^B \,\lrcorner\, e_j^B &= B_{ij} \end{aligned} \tag{3-131}$$

ausdrückt. Dabei wollen wir diese Relation wieder in den alten $\delta$–dualen Größen $\partial_i$ und $e_i$ ausdrücken. Dazu haben wir drei Möglichkeiten. Wir können versuchen, mit der Wurzel von $B$ die Größen $\partial^B$ und $e^B$ zu bilden. Für nichtsymmetrische $B$ existiert jedoch i.a. keine Wurzel, weshalb wir diesen Weg verwerfen. Es verbleiben also noch die zwei Möglichkeiten $B$ entweder $\partial^B$ oder $e^B$ zuzuschlagen.

So ist z.B. mit den $\delta$–dualen $e_i$'s

$$e_i \lrcorner_B e_j \;=\; B_{ij} \tag{3-132}$$

dann eine $B$–Derivation. Bilden wir nun $e'_i = B_{ij}e_j$, so erhalten wir mit den $\delta$–dualen Derivationen

$$e_i \lrcorner_\delta e'_j \;=\; e_i \lrcorner_\delta (B_{jk}e_k) = B_{jk}\delta_{ik} = B_{ji}. \tag{3-133}$$

Beide Möglichkeiten unterscheiden sich nur durch eine Transposition in der Definition von $B$. Man beachte jedoch, daß i.a. $B^T \neq B$ gilt.

Wir werden für die Matrixbeispiele (3-132) benutzen, da dies viel bequemer ist. In der Feldtheorie bevorzugen wir jedoch (3-133), da solch ein Vorgehen zu früheren Rechnungen konsistent ist. Wir definieren im Hinblick auf die feldtheoretische Anwendung die Generatoren der Cliffordalgebra $g$ über die $\delta$–dualen $\partial$ und $e$ zu

$$g_i \;:=\; \partial_i + B_{ij}e_j = \partial_i + A_{ij}e_j + F_{ij}e_j. \tag{3-134}$$

Die unterschiedlichen Zugänge unterscheiden sich nur im Vorzeichen von $F$. Wir erhalten für den Kommutator der $g_i$ durch Nachrechnen

$$\begin{aligned}
g_ig_k + g_kg_i \;=\;& (\partial_i + A_{ii'}e_{i'} + F_{ii'}e_{i'})(\partial_k + A_{kk'}e_{k'} + F_{kk'}e_{k'})\\
&+(\partial_k + A_{kk'}e_{k'} + F_{kk'}e_{k'})(\partial_i + A_{ii'}e_{i'} + F_{ii'}e_{i'})\\
=\;& (\partial_i + A_{ii'}e_{i'})(\partial_k + A_{kk'}e_{k'})\\
&+(\partial_k + A_{kk'}e_{k'})(\partial_i + A_{ii'}e_{i'})\\
&+(\partial_i + A_{ii'}e_{i'})(F_{kk'}e_{k'}) + (\partial_k + A_{kk'}e_{k'})(F_{ii'}e_{i'})\\
&+(F_{ii'}e_{i'})(\partial_k + A_{kk'}e_{k'}) + (F_{kk'}e_{k'})(\partial_i + A_{ii'}e_{i'})\\
&+(F_{ii'}e_{i'})(F_{kk'}e_{k'}) + (F_{kk'}e_{k'})(F_{ii'}e_{i'})\\
=\;& \partial_i\partial_k + A_{ik} - A_{kk'}e_{k'} + A_{ii'}e_{i'} + A_{ii'}A_{kk'}e_{i'}e_{k'}\\
&+\partial_k\partial_i + A_{ki} - A_{ii'}e_{i'} + A_{kk'}e_{k'} + A_{kk'}A_{ii'}e_{k'}e_{i'}\\
&-F_{kk'}e_{k'}\partial_i + A_{ii'}F_{kk'}e_{i'}e_{k'} + F_{ki}\\
&-F_{ii'}e_{i'}\partial_k + A_{kk'}F_{ii'}e_{k'}e_{i'} + F_{ik}\\
&+F_{ii'}e_{i'}\partial_k + A_{kk'}F_{ii'}e_{i'}e_{k'}\\
&+F_{kk'}e_{k'}\partial_i + A_{ii'}F_{kk'}e_{k'}e_{i'}\\
&+F_{ii'}F_{kk'}e_{i'}e_{k'} + F_{ii'}F_{kk'}e_{k'}e_{i'}.
\end{aligned} \tag{3-135}$$

Mit der (Anti–) Symmetrie von $F$ und $A$, sowie den $\delta$–Kommutatorrelationen der $\partial$ und $e$ erhält man

$$\begin{aligned}
g_ig_k + g_kg_i \;=\;& A_{ik} + A_{ki} + F_{ik} + F_{ki}\\
=\;& 2A_{ik}.
\end{aligned} \tag{3-136}$$

$A_{ik}$ ist symmetrisch und daher diagonalisierbar. Es gibt also eine homogene quadratische Form $Q_A$, die in der nicht $Q$–orthogonalen Basis der $e_i$, $A_{ik}$ als Matrix besitzt. Wir könnten auf eine $Q$–orthogonale Basis transformieren und ebenfalls $Q$–orthogonale Derivationen einführen. Mit solchen $\partial^Q$ und $e^Q$ erhielten wir für ein $Q_A$ mit Signatur $(p,q)$

$$\begin{aligned} g_i^Q &:= \partial_i^Q + e_i^Q + F_{ij}^Q e_j^Q \\ &g_i^Q g_k^Q + g_k^Q g_i^Q = \quad 2\delta_{ik}, \quad i,k \le p \\ &g_i^Q g_k^Q + g_k^Q g_i^Q = -2\delta_{ik}, \quad p < i,k \\ &g_i^Q g_k^Q + g_k^Q g_i^Q = 0 \qquad i \le p, < k. \end{aligned} \tag{3-137}$$

In Übereinstimmung mit den mathematischen Überlegungen haben wir *die* Cliffordalgebra zur Signatur $(p,q)$ erhalten. Das zusätzliche $F$ spielt dabei *keine* Rolle. Wozu also diese Komplikation?

Wir werden feststellen, daß $F$ isomorphe Cliffordalgebren parametrisiert. Cliffordalgebren zu verschiedenen $F$ (gleiches $A$) lassen sich also bijektiv aufeinander abbilden. Die Morphismen sind dabei Algebramorphismen, sie transportieren auch die algebraische Struktur. Worin besteht der Unterschied dieser Strukturen?

Bevor wir diese Frage beantworten, wollen wir uns vergegenwärtigen, wie $\mathbf{R}$ als Substruktur in $\mathbf{C}$ eingebettet wird. Dabei wird klar werden, daß isomorphe Substrukturen vom höheren Standpunkt der allgemeinen Struktur aus unterschieden werden können und müssen. Die isomorphen Substrukturen sind dann nicht äquivalent, sondern hängen von *Wahlen* ab.

**Beispiel:** Sei $\mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, so fragen wir uns, wie wir eine reelle Struktur in $\mathbf{C}$ wiederfinden können. Um dies zu erreichen, müssen wir eine Konjugation (Involution mit Periode 2) *wählen*. Sei nun $* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine Komplexkonjugation, dann definiert man für $z \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ ist ein Körper, deshalb existiert $e_i^{-1}$.)

$$\begin{aligned} \Re(z) &:= \frac{1}{2}(z + z^*)e_1^{-1} \\ \Im(z) &:= \frac{1}{2}(z - z^*)e_2^{-1}, \\ z &:= \Re(z)e_1 + \Im(z)e_2. \end{aligned} \tag{3-138}$$

Die $e_i$ stellen eine $\mathbf{R}$–Basis von $\mathbf{C}$ dar, mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} * \ :\ & \mathbf{C} \to \mathbf{C} \\ & e_1^* = e_1 \\ & e_2^* = -e_2. \end{aligned} \tag{3-139}$$

Konstruiert man nun $\mathbf{C}$ von $\mathbf{R}$ aus, so fordert man, daß $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ mittels der *kanonischen* Injektion $\iota$ eingebettet wird

$$\begin{aligned} \iota \ :\ & \mathbf{R} \to \mathbf{C} \\ & \iota(\alpha) \to \alpha\mathbf{1} + 0i, \end{aligned} \tag{3-140}$$

mit der *speziellen* Basis $\{\mathbf{1}, i\}$ von $\mathbf{C}$. Die gewöhnliche Komplexkonjugation wird dann zu

$$\mathbf{1}^* = \mathbf{1}, \qquad i^* = -i. \tag{3-141}$$

Wir wählen nun diese Basis, wollen jedoch eine andere Gerade durch den Ursprung mit der reellen Unterstruktur versehen. Dazu wählen wir nun die neue Basis

$$\begin{aligned} e_1 &:= cos(\theta)\mathbf{1} + isin(\theta) = e^{i\theta}\mathbf{1} \\ e_2 &:= -sin(\theta)\mathbf{1} + icos(\theta) = e^{i\theta}i. \end{aligned} \tag{3-142}$$

Die neue Konjugation $*_\theta$ soll nun $e_1$ mit einer reellen Struktur versehen. Dazu muß

$$\begin{aligned} e_1^{*_\theta} &= e_1 \\ e_2^{*_\theta} &= -e_2 \end{aligned} \tag{3-143}$$

gesetzt werden. Man beachte, es ist $*_\theta \neq *$. Um nun $e_1$ mit einer reellen Multiplikation auszustatten, muß untersucht werden, wie die komplexe Multiplikation in der Basis der $e_i$ aussieht. Wir definieren aufgrund der kanonischen Injektion ($\iota_\theta$ hier nach $e_i$) das $\Box_\theta$–Produkt

$$\begin{aligned} e_1 \Box_\theta e_1 &= e_1 \\ e_2 \Box_\theta e_2 &= -e_1 \\ e_1 \Box_\theta e_2 &= e_2 \Box_\theta e_1 = e_2. \end{aligned} \tag{3-144}$$

Ausgedrückt mit der Multiplikation (ohne Zeichen) der alten Basis $\{\mathbf{1}, i\}$ erhalten wir für $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

$$z_1 \Box_\theta z_2 = z_1 z_2 e^{-i\theta} \tag{3-145}$$

z.B.:

$$\begin{aligned} e_1 \Box_\theta e_1 &= e_1 e_1 e^{-i\theta} = e^{i\theta} e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i\theta} = e_1 \\ e_2 \Box_\theta e_2 &= e_2 e_2 e^{-i\theta} = e^{i\theta} i e^{i\theta} i e^{-i\theta} = -e^{i\theta} = -e_1. \end{aligned} \tag{3-146}$$

Für $\theta = \pi/2$ ist z.B. $e_1 \equiv i$, und die $*$–„imaginäre“ Achse wird zur $*_\theta$–„reellen“ Achse.

Wir sind nun mit unserer Definition der Cliffordalgebra in derselben Situation. Die Graßmannalgebra besitzt über ihre Generatoren $e_i$ eine $\mathbf{Z}$–Graduierung, die Cliffordalgebra jedoch nur eine Semi– oder $\mathbf{Z}_2$–Graduierung. Es ist also größte Vorsicht geboten, wenn wir die Cliffordalgebra (entspricht $\mathbf{C}$ im Beispiel) mit der Graßmannalgebra (entspricht $\mathbf{R}$) in Beziehung setzen. Man erinnere sich, daß die Basismonome der Cliffordalgebra *antisymmetrische* Produkte der Generatoren waren:

$$g_{i_1 \ldots i_n} = g_{i_1} \wedge \ldots \wedge g_{i_n}. \tag{3-147}$$

Damit haben wir nun *ein* Keilprodukt festgelegt und dadurch auch *eine* Konjugation, hier die Reversion. Wählen wir eine andere Basis, so müssen wir auch hier damit rechnen, eine „ungewöhnliche“ Konjugation und ein mutiertes Produkt [EBBI 91] zu erhalten. Genau dies wird nun durch $F$ parametrisiert. Betrachten wir dazu die zwei Möglichkeiten

$$\begin{aligned} e_i \lrcorner_B e_j &= B_{ij} \\ e_i \lrcorner_A e_j &= A_{ij}, \end{aligned} \tag{3-148}$$

dann zerlegt sich das Cliffordprodukt zweier Elemente $x, y \in \mathcal{V}$ in

$$xy = x \lrcorner_B y + x \wedge y, \tag{3-149}$$

oder auf den Generatoren als

$$\begin{aligned} e_i e_j &= e_i \lrcorner_B e_j + e_i \wedge e_j \\ &= e_i \lrcorner_A e_j + e_i \lrcorner_F e_j + e_i \wedge e_j \\ &= e_i \lrcorner_A e_j + F_{ij} + e_i \wedge e_j. \end{aligned} \tag{3-150}$$

Im Fall $\lrcorner_A$ ist es angebracht, das neue mutierte Keilprodukt $\dot\wedge$ einzuführen,

$$e_i \dot\wedge e_j := F_{ij} + e_i \wedge e_j. \tag{3-151}$$

Der Übergang der Darstellung $\lrcorner_B, \wedge$ zu $\lrcorner_A, \dot\wedge$ ist nun ein Isomorphismus von Cliffordalgebren $CL(\mathcal{V}, Q) \cong CL(\mathcal{V}, B) \cong CL(\mathcal{V}, A)$. Man beachte jedoch, daß $\wedge \to \dot\wedge$ die $\mathbf{Z}$–Graduierung nicht respektiert. Die Graßmann–algebraische Substruktur wird also nicht isomorph verändert. Das „Ausreduzieren nach der Basis“ macht jedoch genau von dieser Struktur Gebrauch!

Wir wollen uns noch Konjugation und Reversion zuwenden. Da die Umdefinition des Keilproduktes nur gerade Elemente vom Grad 0 und 2 verbindet, ist die Transformation gerade. Die Semigraduierung der Cliffordalgebra, die durch die Konjugation (Hauptautomorphismus, $^-$) induziert wird, bleibt deshalb unberührt. Für die Reversion betrachten wir

$$\begin{aligned} (e_i \wedge e_j)^\sim &= (e_i e_j - e_i \lrcorner_B e_j)^\sim \\ &= (e_i e_j)^\sim - B_{ij}{}^\sim \\ &= e_j e_i - B_{ij} \\ &= e_j \wedge e_i + B_{ji} - B_{ij} \\ &= -e_i \wedge e_j - 2F_{ij}. \end{aligned} \tag{3-152}$$

$e_i \wedge e_j$ ist nicht konjugationsstabil, mit (3-151,3-152) ist dies aber der Fall für

$$\begin{aligned} (e_i \dot\wedge e_j)^\sim &= (e_i \wedge e_j + F_{ij})^\sim \\ &= -e_i \wedge e_j - 2F_{ij} + F_{ij} \\ &= -(e_i \wedge e_j + F_{ij}) \\ &= -(e_i \dot\wedge e_j). \end{aligned} \tag{3-153}$$

Die Transformation, die Rechts– und Linkswirkung in einer Algebra vertauscht, ist die Reversion. Diese ist somit die „Dualität", $\tilde{} : \mathcal{A}[\mathcal{V}] \to \mathcal{A}^{\sim}[\mathcal{V}]$. Mit $a, b \in \mathcal{A}$, ist $(ab)^{\sim} = b^{\sim}a^{\sim}$ die reversierte Wirkung. In physikalischer Sprechweise bildet $\tilde{}$ Rechts– auf Linkszustände (Kets auf Bras) ab. Man erinnere sich an Kapitel 1, wo wir $\psi^{\dagger} \cong \phi^{\sim}$ gefunden haben.

Es gilt nun, siehe [Rodr 94, Greu 67], das Theorem:

$$CL(\mathcal{V}^* \oplus \mathcal{V}, \delta) \cong End(\Lambda\mathcal{V}). \tag{3-154}$$

In unserem Fall waren die $g_i = \partial_i + e_i \in \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{V}$ und wir hatten gerade durch die Linearkombination $\partial + e$ die Cliffordalgebra erhalten. Nun war schon wiederholt darauf hingewiesen worden, daß es keinen *kanonischen* Stern gibt. Wir benötigen daher einen selbstdualen Raum $\mathcal{V}' =< g_1, \ldots, g_n, \ldots >$ mit $\mathcal{V}'^* \cong \mathcal{V}'$, der sich bezüglich einer *gewählten* $*$–Struktur als $\mathcal{V}' \cong \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{V}$ schreiben läßt. Hier erkennt man, daß auch $\Lambda\mathcal{V}$ über die induzierte Definition des Keilproduktes *nur* mit dem konjugationsstabilen $\dot{\wedge}$ gebildet werden muß. Wir erhalten mit

$$CL(\mathcal{V}', B) \cong CL(\mathcal{V}', Q_A) \cong End(\dot{\Lambda}\mathcal{V}) \tag{3-155}$$

eine durch $F$ parametrisierte Familie von Cliffordalgebren und darin eingebetteten Graßmannalgebren.

## 3-4 Matrixdarstellungen

Wir wenden uns jetzt den Matrixdarstellungen zu, vgl dazu auch Seite 154 und (A.28,A.29,A.23). Dabei geben wir endlichdimensionale Beispiele an und lernen die verschiedenen Techniken der Darstellung kennen. Die Darstellungstheorie ist ein weites Feld und von großer Bedeutung für die konkrete physikalische Anwendung [Gelf 61, Baru 86]. Für allgemeine strukturelle Überlegungen erweist es sich jedoch als hilfreich, auf Darstellungen zu verzichten, dadurch werden die Probleme in die Teilprobleme der Theorie und deren Darstellung zerlegt.

Für das feldtheoretische Modell in Kapitel 5 benötigen wir verschiedene Darstellungen. Um den Unterschied zu dem gewöhnlichen, in der Physik benutzten Vorgehen deutlich zu machen, betrachten wir zunächst die Diracdarstellung. Wesentliches Ziel dieses Abschnittes ist es, ein Verständnis für den Unterschied der geometrischen und algebraischen Äquivalenz zu entwickeln (siehe auch Seite 153, 153 und Kapitel 5). Dieser Unterschied kann in der üblichen Behandlung *nicht* auf einfache Weise dargestellt werden.

Die Clifford–algebraische Betrachtung erlaubt es dann, sogar Matrixdarstellungen anzugeben, die zwar noch den vollen algebraischen Gegebenheiten entsprechen, aber nicht mehr in einfacher Weise mit einem Spinor zusammenhängen. Genau diese „exotischen" Darstellungen benötigen wir dann allerdings in der Quantenfeldtheorie.

### 3-4.1 Gewöhnliche Matrixdarstellung nach Dirac

Wir haben gesehen, daß Dirac durch Faktorisieren des Klein–Gordon–Operators zu den Matrixgrößen $\alpha^i$ und $\beta$ gelangt war (3-10,3-12). Fordert man nun, daß die Diracgleichung „reell" ist, so muß $\alpha^i$ und $\beta$ Hermitesch sein. Man beachte, daß das Konzept „reell" eine Konjugation *wählt*! Wir sind also hier schon dabei, Spezialfälle auszuwählen. Weiterhin hatten wir aus den Kommutatorrelationen in (3-12) die Spurfreiheit der $\alpha^i$– und $\beta$–Matrizen erhalten (3-13). Nun ist die Spur unabhängig von der Basis. Dies impliziert jedoch nicht, daß sich jede Linearform als Matrixspur ausdrücken läßt.

Wir haben in einem Beispiel untersucht, wie Konjugationen und Substrukturen das Produkt mutieren können, dies kann auch hier geschehen. Die Diracsche Methode liefert nur soviel Information, wie nötig ist, um die Relationen der Cliffordalgebra innerhalb einer Matrixalgebra zu realisieren. Eine solche Darstellung $\pi$ ist gegeben durch

$$\pi \quad : \quad CL \rightarrow M_{n\times n}(\mathbf{C}). \tag{3-156}$$

Da nun CL eine reelle Algebra war, müssen die Periodizitätstheoreme der reellen Cliffordalgebren angewandt werden, um zu entscheiden, welche Cliffordalgebra irreduzible Darstellungen über $M_{n\times n}(\mathbf{C})$ besitzt. Reelle Cliffordalgebren müssen i.a. über verschiedenen (Schief–) Körpern dargestellt werden. Man erhält über die Radon–Hurwitz Zahl $r_i$ für $CL_{p,q}$ die Dimension der Darstellung zu $2^k$ mit

$$k := q - r_{q-p} \bmod 8. \tag{3-157}$$

$r_i$ ist durch die rekursive Vorschrift $r_{i+8} := r_i + 4$,

$$\begin{array}{c|cccccccc} i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline r_i & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \tag{3-158}$$

gegeben.

Für die Diracdarstellung ist $p = 1$, $q = 3$ und somit $r_{3-1} = r_2 = 2$, woraus sich $k = 3 - 2 = 1$ ergibt. Die Dimension des Darstellungsraumes ist daher $2^1 = 2$. Der Körper ist jedoch der schiefsymmetrische Quaternionenkörper. Wir erhalten für die Darstellung der $CL_{3,1}$ eine Matrixalgebra $M_{2\times 2}(\mathbf{H})$. Mit der Injektion $\iota \, : \, \mathbf{H} \rightarrow M_{2\times 2}(\mathbf{C})$ erkennen wir, daß $M_{2\times 2}(\mathbf{H})$ eine Unteralgebra von $M_{4\times 4}(\mathbf{C})$ ist [Port 81, Dima 83, Dima 89, Vrog 93].

Für die Majoranadarstellung hingegen erhalten wir $r_{q-p} = r_{1-3} = r_{-2} \bmod 8 = r_6 = 3$, $k = (3 - 1) = 2$. Der Darstellungsraum ist also 4 dimensional. Die Algebra ist isomorph zu $M_{4\times 4}(\mathbf{R})$.

Obwohl Dirac– und Majoranadarstellung so unterschiedliche Charaktere haben, können sie durch eine $gl(4, \mathbf{C})$ Transformation ineinander überführt werden. Die Lehrbuchmeinung geht sogar davon aus, daß es unerheblich ist, ob die Minkowskimetrik $\eta^D_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ oder die Majoranametrik $\eta^M_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ verwendet wird [Bjor 66, Penr 84]. Dies scheint um so unverständlicher, als daß kein Physiker auf die Idee käme, das ladungslose Majoranateilchen zur Beschreibung eines Elektrons zu benutzen. Eine ebensolche Sonderstellung bildet die chirale Darstellung für masselose Teilchen [Chen 84].

Dirac selbst wählte mit den Paulimatrizen

$$\sigma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3-159}$$

die Diracmatrizen in der Diracdarstellung zu

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}. \tag{3-160}$$

Man beachte hier, daß die Paulimatrizen keine **R**–Algebra bilden, da $\sigma^i\sigma^j = i\epsilon^{ijk}\sigma^k$ gilt. Wir benutzen damit implizit die „komplexe" Version der 8 dimensionalen reellen Paulialgebra $CL_{3,0}$. Damit besitzt das '$i$' eine geometrische Bedeutung. Die $i\sigma^i$–Matrizen bilden zusammen mit den $\sigma^0 = 1$ eine Basis der Quaternionen. Die Blockstruktur der $\gamma$–Matrizen erklärt sich somit aus der Tatsache, daß wir eigentlich mit einer quaternionischen $2 \times 2$ Matrix umgehen,

$$\gamma^\mu \quad \in \quad M_{2\times 2}(\mathbf{H}) \subset M_{4\times 4}(\mathbf{C}). \tag{3-161}$$

Wir sind hier zum Ursprung der „Supersymmetrie" der Diracgleichung gelangt [Thal 92]. Es ist überhaupt nicht verwunderlich, eine Supersymmetrie in der Diractheorie zu finden, da sie durch die $\mathbf{Z}_2$–Graduierung schon „eingebaut" ist.

Die Wurzel der negativen Energien läßt sich hier ebenfalls finden. Da die Diracdarstellung nur ein 2 dimensionaler Spinormodul über **H** besitzt, findet man *innerhalb* der Diractheorie $CL_{1,3}$ nur zwei idempotente Elemente $p_\pm = 1/2(1 \pm \gamma^0)$. Damit läßt sich die Algebra über **H** als totale Matrixalgebra schreiben, nicht jedoch über **C**, da hier eine Blockstruktur zu berücksichtigen ist. Erst das Hinzufügen eines *neuen* '$i$'s' macht es möglich, Spin– und Energieprojektoren zu definieren. So wurde die Dimension der Algebra von $4 \times 4 = 16$ über **R** auf $4 \times 4 \times 2 = 32$ über **R** verdoppelt, indem komplexifiziert wurde. Die volle Matrixalgebra über $M_{4\times 4}(\mathbf{C})$ ist aber isomorph zu $CL_{4,1}$ und damit 5 dimensional [Zeni 94]. Man hat hiermit die Diractheorie verlassen.

Im Falle der Majoranaalgebra $CL_{1,3}$ kann man vier primitive idempotente Elemente (siehe unten) finden. Diese Algebra ist die 16 dimensionale totale Matrixalgebra über **R**.

**Bemerkung:** Die Spinoren der Algebren $CL_{3,1}$ und $CL_{1,3}$ sind im Sinne von Hestenes [Loun 85, Loun 93b, Loun 95] äquivalent. Das bedeutet, daß die geraden Unteralgebren isomorph sind. $CL^+_{3,1} \cong CL^+_{1,3}$. Damit sind Majorana– und Diracteilchen bei Abwesenheit von ungeraden Elementen nicht zu unterscheiden. Nun besitzt gerade die elektromagnetische Ankopplung ungeraden Charakter und unterscheidet die Teilchen über die Ladung.

Wir wollen fortfahren, die $\gamma$–Matrizen zu untersuchen. Dazu betrachten wir die adjungierte Darstellung einer Liealgebra (A.14,A) mit den Generatoren $L^i$. Man gelangt über den Kommutator

$$[L^i, L^j]_- \quad = \quad f^{ij}_k L^k \tag{3-162}$$

zur adjungierten Darstellung der $L^i$

$$ad(L^i) \quad \cong \quad [(f^i)^j_k]. \tag{3-163}$$

So erhält man immer ko-kontravariante (kontra–kovariante) Indizes als Matrixindizes. Eine ko–ko– oder kontra–kontravariante Darstellung würde das Algebraprodukt nicht auf das Matrixprodukt abbilden [LOUN 93A, LOUN 81]. Liealgebren können ebenfalls mittels Faktorisieren aus der Tensoralgebra gewonnen werden, siehe z.B. [MOOD 95]. Dies berechtigt uns, den Kommutator in der assoziativen Matrixalgebra zu bilden (A). Das Liealgebraprodukt selbst ist nichtassoziativ. Der Kommutator, gebildet mit den Darstellungsmatrizen, lautet:

$$(f^i)^a_b(f^j)^b_c - (f^j)^a_b(f^i)^b_c \;\; = \;\; f^{ij}_k(f^k)^a_c. \tag{3-164}$$

Für Drehmatrizen erhalten wir ($s^i = i/2e_i$)

$$s^i s^j - s^j s^i \;\; = \;\; \epsilon^{ij}_k s^k. \tag{3-165}$$

Es ergibt sich damit für die Matrizen

$$[s^i] \;\; = \;\; [(s^i)^j_k] := [\epsilon^{ij}_k] = [\epsilon^i_{jk}] \tag{3-166}$$

eine reelle $3 \times 3$ dimensionale Darstellung der Drehimpulsalgebra. Die Indexstellung ist hier unerheblich, da eine kartesische Basis benutzt wird. Hier fällt auf, daß alle Indizes vom gleichen Typ sind. Dies ist nicht der Fall, wenn wir die $\gamma$–Matrizen

$$\gamma^\mu_{\alpha\beta} \tag{3-167}$$

anschauen. $\mu$ ist ein Lorentzindex, oder wie man auch sagt, ein Vektorindex, dagegen beziehen sich die $\alpha, \beta$ Spinindizes auf eine kartesische Spinbasis und sind daher kontra–kontravariant geschrieben. Es stellt sich die Frage, ob man auch die $\gamma$–Matrizen der Form

$$\gamma^\mu_{\nu\rho} \quad \text{oder} \quad \gamma^\alpha_{\beta\gamma} \tag{3-168}$$

finden kann und wie die $\alpha$ und $\mu$ Indizes zusammenhängen. Diese Fragen führen uns über die Möglichkeiten des Diracschen Zugangs hinaus.

### 3-4.2 Links– und rechtsreguläre Matrixdarstellungen, Spinordarstellungen

Aus der Theorie der Algebren [BOUR 59, SCHE 80, SCHE 81, SCHE 88] wissen wir, daß jede Algebra auf sich selbst dargestellt werden kann. Solche Darstellungen heißen links– oder rechtsreguläre Darstellungen, je nachdem ob Links– oder Rechtsmultiplikation benutzt wird. Abelsche Algebren besitzen offensichtlich nur eine reguläre Darstellung.

Sei nun $b \in \mathcal{A}$ ein festes Element und $\mathcal{A}$ wird durch die Generatoren $\{e_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ und deren Produkte generiert, so können wir mit $a_\rho \in \mathbf{K}$, $\forall\rho$

$$be_\rho \;\; = \;\; \sum_{\beta\subset\mathcal{I}} a_\beta e_\beta \tag{3-169}$$

bilden. $\rho$ und $\beta$ sind dabei Multiindizes regulärer Monome. Wir erhalten somit für die Generatoren die rechtsreguläre Darstellung über

$$\begin{aligned} e_i e_\rho &= \sum_{\beta \subset \mathcal{I}} a_\beta e_\beta \\ (e_i)_\rho^\beta &= a_\beta \in \mathbf{K}. \end{aligned} \tag{3-170}$$

Dabei müssen die Generatoren weder normiert noch orthogonal sein. Die Dimension der Darstellung ist $2^{\#\mathcal{I}}$. Im allgemeinen ist diese Darstellung reduzibel. Das Algebraprodukt wird auf das Matrixprodukt abgebildet [Loun 93a, Loun 95].

Um irreduzible Darstellungen zu erhalten, müssen Sätze aus der Theorie der Ideale bemüht werden. Das sind Standardmethoden. Wir haben gesehen, daß ein beidseitiges Ideal $\mathcal{J}$ eine Unteralgebra bildet. Damit ist leicht ersichtlich, daß eine Algebra, die ein beidseitiges Ideal enthält, nicht „einfach" ist. Die Algebra kann faktorisiert werden. Man kann $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ als

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{J}} \otimes \mathcal{J} \tag{3-171}$$

zerlegen. Auf diese Weise ist es möglich, sich auf Algebren zu beschränken, die keine Ideale enthalten. Irreduzible Darstellungen erhält man nun in solchen einfachen Algebren mittels minimaler Links– oder Rechtsideale. Ein minimales Linksideal wird von einem primitiven idempotenten Element erzeugt (A.27). $P$ ist ein idempotentes Element, wenn

$$P^2 = P \tag{3-172}$$

gilt. Damit zerlegt sich die Eins zu

$$\mathbf{1} = P + (\mathbf{1} - P), \tag{3-173}$$

wobei $P$ und $(\mathbf{1} - P)$ auf orthogonale Unterräume projezieren. $P$ heißt nun primitiv, wenn es keine paarweise kommutierenden idempotenten Elemente $P_i$ gibt, so daß sich $P$ nach ihnen zerlegt

$$\begin{aligned} P &\neq \sum P_i \\ P_i P_j &= P_j P_i \\ P_i^2 &= P_i. \end{aligned} \tag{3-174}$$

Ein minimales Linksideal zum primitiven idempotenten Element $P$ schreibt sich als

$$\mathcal{J}^L := \{a | a \in CL_{p,q}, \exists b \in CL_{p,q} \Rightarrow a = bP\}. \tag{3-175}$$

Es ist offensichtlich, daß die Projektoren eine orthogonale Basis bilden. Die Dimension dieser irreduziblen Darstellung hängt nun von der Anzahl der Projektoren ab, diese wird durch $k$ (3-157) gegeben. Letztendlich ist sie von der Radon–Hurwitz Zahl $r_{q-p}$ abhängig.

**Beispiel:** Wir betrachten die Majoranaalgebra $CL_{1,3}$. Die Generatoren erfüllen

$$e_i e_j + e_j e_i \;=\; 2\,diag(-1,1,1,1). \tag{3-176}$$

Wir können mit einem Element $u$, $u^2 = 1$ ein Projektorpaar

$$P^u_\pm \;:=\; \frac{1}{2}(1 \pm u) \tag{3-177}$$

definieren. Mit $uv = vu$ und $v^2 = 1$ finden wir ein weiteres kommutierendes Paar

$$P^v_\pm \;:=\; \frac{1}{2}(1 + v). \tag{3-178}$$

Es gibt kein weiteres Element $w$, das mit $u$ und $v$ vertauscht und zum Quadrat Eins ergibt, siehe dazu [DIMA 83, DIMA 89]. Wir definieren nun die Projektoren $P^i_i$ [BERG 93, KELL 92, ABLA 95] mit $u = e_4$ und $v = e_1e_2$ zu

$$\begin{aligned}
P^1_1 &:= \frac{1}{4}(1+e_4)(1+e_1e_2)\\
P^2_2 &:= \frac{1}{4}(1+e_4)(1-e_1e_2)\\
P^3_3 &:= \frac{1}{4}(1-e_4)(1+e_1e_2)\\
P^4_4 &:= \frac{1}{4}(1-e_4)(1-e_1e_2).
\end{aligned} \tag{3-179}$$

Jeder dieser Projektoren erzeugt ein minimales Linksideal. Wir erhalten eine Basis des Linksideals zu $P^1_1$ durch Anwenden von Elementen aus $CL_{3,1}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
P^1_1 &\equiv \mathbf{1}P^1_1 = \frac{1}{4}(1+e_4)(1+e_1e_2)\\
P^2_1 &:= e_1P^1_1 = \frac{1}{4}(1-e_4)(e_1+e_2)\\
P^3_1 &:= e_3P^1_1 = \frac{1}{4}(1-e_4)e_3(1+e_1e_2)\\
P^4_1 &:= e_3e_1P^1_1 = \frac{1}{4}(1+e_4)e_3(e_1+e_2),
\end{aligned} \tag{3-180}$$

desgleichen für die $P^j_2$, $P^j_3$ und $P^j_4$. Diese Elemente erfüllen die Produktrelation

$$P^j_i P^l_k \;=\; \delta^k_j P^l_i. \tag{3-181}$$

Die Elemente $P^j_i$ sind durch solche Matrizen darstellbar, die in der i–ten Zeile und j–ten Spalte eine Eins und sonst Nullen enthalten. Ein Element aus einem minimalen Linksideal ist ein *Spinor* [CHEV 54, RIES 58, HEST 84]. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Psi_1P^1_1 + \Psi_2P^2_1 + \Psi_3P^3_1 + \Psi_4P^4_1\\
&= \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & 0\\ \Psi_2 & 0 & 0 & 0\\ \Psi_3 & 0 & 0 & 0\\ \Psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3-182}$$

Durch dieses Beispiel wird deutlich, daß sich die gewöhnlichen Spinorindizes $\alpha$ auf diese Projektorbasis $P^\alpha_j$ oder eben auf die Spinorbasis $u_\alpha \equiv P^\alpha_j$, $j$ fest, beziehen. Man erhält für die Majoranamatrizen in dieser Basis

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [e_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$[e_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [e_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3-183}$$

also eine reelle $4 \times 4$ Darstellung, wie wir sie erwartet haben. Der Spinindex $\alpha$ bezieht sich auf eine Linearkombination von geraden und ungeraden Elementen. Der Majoranaindex $\mu$ (Lorentzindex im Falle der $CL_{1,3}$) bezieht sich jedoch auf homogene Elemente vom Gradeinsunterraum. Der Bezug auf ein notwendig inhomogenes idempotentes Element erzwingt ein anderes Transformationsverhalten der $\alpha$–Indizes eines Spinors.

Die Cliffordalgebra läßt sich auch auf ihrer geraden Unteralgebra $CL^+ \subset CL$, nicht notwendig irreduzibel, darstellen. Dies ermöglicht es, weiterhin mit der Graduierung zu arbeiten.

Auf diese Art und Weise führte Hestenes den Operatorspinor ein, [Hest 66, Hest 86, Loun 83, Loun 85, Loun 93b], der aus $CL^+$–Elementen besteht. Solche „Spinoren“ wirken dann mittels

$$u(x) \quad = \quad uxu^{-1} \tag{3-184}$$

auf Elemente $x$ z.B. vom Grad 1.

Nun sollen die $u$ zerlegbare (A.24) Elemente sein, da damit garantiert ist, daß für $x \in \mathcal{V} \cong \mathcal{A}^1$, $uxu^{-1} \in \mathcal{V}$ ist. Diese $u$ bilden die Lipschitz oder Clifford–Lipschitz Gruppe (unter der Multiplikation, (A.23)). Nichtzerlegbare Elemente können den Grad auch verändern und die Homogenität zerstören. Bergdold [Berg 93] führt ein Beispiel an, wie ein nicht homogener bijektiver Algebrahomomorphismus $\varphi$ gefunden werden kann, der $CL_{2,2}$ und $CL_{3,1}$ verbindet. Man beachte, daß das geometrische Konzept der Signatur von solchen algebraischen Transformationen *nicht* erhalten wird. Der Übergang zwischen den verschiedenen physikalischen Darstellungen wie Majorana–, Dirac– oder chirale Darstellung ist eine ebensolche, den geometrischen Sinn zerstörende Transformation.

Will man den geometrischen Gehalt bewahren, so dürfen nur Transformationen verwendet werden, die homogene Algebrahomomorphismen sind. Dies sind aber Clifford–Lipschitz–Gruppen. Deren Untergruppen stellen gerade die **Pin**– und **Spin**–Gruppen dar. Mit ihnen erhält man als Untergruppen auch [Dora 93a] die $O(p,q)$, $SO(p,q)$, $U(n)$ etc.

**Bemerkung:** Wir haben in Kapitel 1 gesehen, daß Hilfsfeldtransformationen existieren, die sich mit geradem Grad schreiben lassen. Dies gilt nicht für die hier erhaltenen Projektorbasen

$$\{P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_1^4\} \quad = \quad \{Id, e_1, e_3, e_3 \wedge e_1\} \times P_1^1. \tag{3-185}$$

Es liegt nahe, den Hilfsfeldindex als Spinindex aufzufassen. Dadurch wird der Hilfsfeldspinor zum Spintensor

$$\Psi_\alpha^{reg.} = \sum_i \Psi_{\alpha i} \cong \Psi_{\alpha i} P_\beta^i \quad = \quad \Psi_{\alpha 1} P_1^1 + \Psi_{\alpha 2} P_1^2 + \Psi_{\alpha 3} P_1^3 + \Psi_{\alpha 4} P_1^4. \tag{3-186}$$

Um einen Operatorspinor zu erhalten, muß dieser aus $CL^+$ gebildet werden können. Solche Operatorspinoren sind wieder in direkte Summen homogener Terme zerlegbar, sie können mit homogenen Majoranaindizes (Lorentzindizes) beschrieben werden. Ein solches Feld könnte mithin auch als ein aus skalaren, vektoriellen und tensoriellen Feldern zusammengesetztes Feld betrachtet werden.

Wir gelangen hier zu einer völlig neuen Interpretation des Hilfsfeldes, die in Teil III noch einmal kurz zur Sprache kommen wird. Leider ist es *nicht* einfach, den algebraischen und den analytischen Charakter der Hilfsfelder auf einfache Weise zu verbinden.

### 3-4.3 Matrixdarstellungen für Cliffordalgebren mit beliebiger Bilinearform

Wir wollen nun noch am Beispiel der Paulialgebra Matrixdarstellungen für Cliffordalgebren mit beliebigen Bilinearformen untersuchen. Dabei erweisen sich die links– und rechtsregulären Darstellungen gegenüber den Spinordarstellungen als sehr viel einfacher. Es ist schwierig, Spinorbasen (Projektorbasen) in solchen Algebren anzugeben, da die idempotenten Elemente in komplizierter Weise von der Bilinearform $B$ abhängen.

Die Paulialgebra $CL_{3,0}$ respektive $CL(\mathcal{V}, B)$, bietet sich als Studienobjekt an, da sie alle Schwierigkeiten beinhaltet, die in einer fermionischen Quantenfeldtheorie mit Vierfermionenwechselwirkung auftreten. Insbesondere werden wir hier Gelegenheit haben, die Normalordnung des Vertex vorzubereiten. Viele der an diesem Beispiel aufgezeigten Eigenschaften können für beliebige Dimensionen und Signaturen verallgemeinert werden. Davon wird in formaler Weise in Kapitel 4 Gebrauch gemacht.

Sei $\mathcal{V}$ generiert von $\{e_i\}_{i \in \{1,2,3\} \equiv \mathcal{I}}$, den Generatoren der Paulialgebra $CL(\mathcal{V}, B)$. Eine Basis des linearen Raumes $\Lambda\mathcal{V}$ wird durch

$$\{Y_i\} = \{e_0; e_1, e_2, e_3; e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1; e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\} \tag{3-187}$$

gegeben. Das Keilprodukt ist das übliche antisymmetrische Produkt der Generatoren $e_i$. Die Bilinearform $B$ schreibt sich in dieser Basis als

$$\begin{aligned} B &= [B_{ij}] = [e_i \lrcorner_B e_j] = [A_{ij}] + [F_{ij}] \\ [A_{ij}]^T &= [A_{ij}] \\ [F_{ij}]^T &= -[F_{ij}]. \end{aligned} \tag{3-188}$$

Wir suchen im folgenden die Darstellungsmatrizen der Generatoren $\{e_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ in dieser Basis. Zuerst betrachten wir die $\mathbf{1}$ der Algebra. Aus

$$\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a \tag{3-189}$$

erhalten wir für alle Monome der Basis $\{Y_i\}$

$$Y_i\mathbf{1} = \mathbf{1}Y_i = Y_i. \tag{3-190}$$

Die Matrixdarstellung von $Y_0 = \mathbf{1}$ erhält man mit (3-170) zu

$$Y_0 Y_i Y^k = [(Y_0)_i^k] = [\delta_i^k]. \tag{3-191}$$

Für die rechts– und linksreguläre Darstellung wird die Eins auf die Einheitsmatrix abgebildet. Für den Generator $e_1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
e_1 Y_\rho &= \sum_{\alpha\subset\mathcal{I}} a_\alpha Y_\alpha \\
e_1 1 &= e_1 \\
e_1 e_1 &= A_{11} \\
e_1 e_2 &= e_1 \lrcorner_B e_2 + e_1\wedge e_2 = A_{12} + F_{12} + e_1\wedge e_2 \\
e_1 e_3 &= A_{13} + F_{13} + e_1\wedge e_3 \\
e_1(e_1\wedge e_2) &= e_1(e_1e_2 - e_1\lrcorner_B e_2) = A_{11}e_2 - (A_{12}+F_{12})e_1 \\
e_1(e_2\wedge e_3) &= (A_{12}+F_{12})e_3 - (A_{13}+F_{13})e_2 + e_1\wedge e_2\wedge e_3 \\
e_1(e_3\wedge e_1) &= -A_{11}e_3 + (A_{13}+F_{13})e_1 \qquad (3\text{-}192)\\
e_1(e_1\wedge e_2\wedge e_3) &= A_{11}e_2\wedge e_3 + (A_{12}+F_{12})e_3\wedge e_1 + (A_{13}+F_{13})e_1\wedge e_2.
\end{aligned}$$

Durch Ablesen ergibt sich die Darstellungsmatrix

$$[e_1] = \tag{3-193}$$
$$\begin{bmatrix}
0 & A_{11} & A_{12}+F_{12} & A_{13}+F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -A_{12}-F_{12} & 0 & A_{13}+F_{13} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} & -A_{13}-F_{13} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}+F_{12} & -A_{11} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}+F_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & A_{12}+F_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, daß $[e_1]^2 = A_{11}[\mathbf{1}]$ gilt. Analog errechnen sich für die Generatoren $e_2$ und $e_3$ die Darstellungsmatrizen

$$[e_2] \quad = \tag{3-194}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & A_{21}+F_{21} & A_{22} & A_{23}+F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -F_{22} & 0 & A_{23}+F_{23} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & A_{21}-F_{12} & -F_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & -A_{12}+F_{12} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}+F_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A_{12}-F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[e_3] \quad = \tag{3-195}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & A_{13}-F_{13} & A_{23}-F_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{23}+F_{23} & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}-F_{13} & -A_{33} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}-F_{23} & -A_{13}+F_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}-F_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{23}-F_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkenswert erscheint die große Asymmetrie der Matrizen. Die Darstellung ist ein Algebrahomomorphismus $\varphi_B$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_B \quad : \quad & CL(\mathcal{V}, B) \to M_{8\times 8}(\mathbf{R}) \\ & \varphi_B(e_i) = [e_i] \\ & \varphi_B(1) = [1] = [\delta_i^k] \\ & \varphi_B(ab) = \varphi_B(a)\varphi_B(b). \end{aligned} \tag{3-196}$$

Es stellt sich somit die Frage, ob diese Abbildung reduzibel ist. Der Matrixring $M_{8\times 8}(\mathbf{R})$ besitzt 64 reell linear unabhängige Elemente und erscheint als viel zu groß für die 8 linear unabhängigen Monome der Paulialgebra. Selbst wenn wir beachten, daß die Paulialgebra über $\mathbf{C}$ dargestellt werden müßte, sind die Darstellungsmatrizen $4\times 4$ über $\mathbf{C}$. Es verbleiben immer noch 32 linear unabhängige Elemente über $\mathbf{R}$.

Man sieht den Darstellungsmatrizen der Generatoren jedoch an, daß sie weder diagonalisierbar sind, noch auf einfache Art und Weise in eine diagonale Blockstruktur gebracht werden können.

Betrachtet man Bivektorelemente $e_i \wedge e_j$, $i \neq j$, so besitzen diese eine *nichtverschwindende* Spur! Damit ist gezeigt, daß die Matrixspur nicht als Linearform benutzt werden kann. Also muß das algebraische Konzept der Projektion auf den skalaren Anteil verwendet werden. Dies wird durch die Klammer $< \ldots >$ ausgedrückt, mit

$$CL(\mathcal{V}, B) \ni X \quad = \quad \sum_{\alpha \subset \mathcal{I}} a_\alpha Y_\alpha \tag{3-197}$$

ist

$$\begin{aligned} <\ldots> \quad : \quad & CL(\mathcal{V},B) \to \mathbf{K} \\ & < X > \equiv < X >_0 = a_0. \end{aligned} \tag{3-198}$$

Als weiteres Problem ergibt sich, daß die gewöhnliche Matrixtransposition Matrizen liefert, die *nicht* in der Paulialgebra $CL(\mathcal{V},B)$ liegen. Dies rührt daher, daß diese Darstellungen notwendig ko–kontravariant oder kontra–kovariant sind. Bezeichnet man dies mit hoch– und tiefgestellten Indizes, so ist

$$([a]_j{}^i)^T \quad = \quad ([a]^i{}_j) \neq \sum_{\alpha\subset\mathcal{I}} a_\alpha [e_\alpha]_j{}^i. \tag{3-199}$$

Um die Transposition wieder in die Algebra zurückzuführen, müßte eine Metrik auf dem linearen Spann der $\{Y_\alpha\}$ vorhanden sein, dann wäre

$$([a]_j{}^i)^T \quad := \quad G_{jj'}[a]^{j'}{}_{i'}G^{i'i} = [GaG^{-1}]_j{}^i. \tag{3-200}$$

Nun läßt sich zeigen, daß eine solche Metrik *inkompatibel* mit der algebraischen Struktur ist [Bour 59]. Wir müssen hier also die Transposition verwerfen!
**Bemerkung:** In der Diractheorie hängt die Ladungskonjugation mit der Ladungskonjugationsmatrix $C$ und der Komplexkonjugation zusammen. Nun gilt

$$C\gamma^\mu C^T \quad = \quad -\gamma^{\mu T} \tag{3-201}$$

und $C$ beschreibt die Transposition. Eine genaue Studie dieses Sachverhaltes zeigt nun, daß die Komplexkonjugation und die Transposition darstellungsabhängig sind [Loun 93b, Loun 95, Abla 95], was durch unseren Befund im allgemeineren Fall bestätigt wird. Es ist auch nicht mehr möglich, ohne eine *Wahl* der Darstellung „Bras“ oder Linkszustände zu bilden. In der gewöhnlichen Diractheorie geschieht dies implizit.

Wir wollen nun die Zerlegung (3-148) benutzen und eine neue Basis $\{X_\rho\}$ mit dem gepunkteten Keilprodukt $\dot\wedge$ (3-151) bilden. Es ist

$$\begin{aligned} e_i \lrcorner_B e_j &= B_{ij} \\ e_i \lrcorner_A e_j &= A_{ij} \\ e_i e_j &= e_i \lrcorner_B e_j + e_i \wedge e_j \\ &= e_i \lrcorner_A e_j + F_{ij} + e_i \wedge e_j = A_{ij} + e_i \dot\wedge e_j \end{aligned} \tag{3-202}$$

und die Basis wird nun mit einer anderen Anordnung der Multivektoren zu

$$\{X_\rho\} \quad = \quad \{e_1, e_2, e_3; e_1\dot\wedge e_2\dot\wedge e_3; e_0; e_1\dot\wedge e_2, e_2\dot\wedge e_3, e_3\dot\wedge e_1\}. \tag{3-203}$$

Mit denselben Methoden wie oben erhalten wir einen Darstellungshomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_A \quad : \quad & CL(\mathcal{V},B) \to M_{8\times 8}(\mathbf{R}) \\ & \varphi_A(1) = [1] \\ & \varphi(ab) = \varphi_A(a)\varphi_A(b) = [a][b]. \end{aligned} \tag{3-204}$$

Die Generatoren ergeben sich in der Matrixdarstellung zu

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -A_{12} & 0 & A_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} & -A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12} & -A_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-205}$$

$$[e_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{22} & 0 & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{12} & -A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & -A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-206}$$

$$[e_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{23} & 0 & A_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13} & -A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_{23} & -A_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-207}$$

Diese Matrizen haben nun Blockstruktur, wobei die geraden Elemente Blöcke auf der Diagonalen aufweisen, während die ungeraden Elemente nichtdiagonale Blöcke besitzen. Es bleibt aber eine Asymmetrie bestehen, die verhindert, daß die dargestellten Generatoren invariant unter der Transposition sind.

Der antisymmetrische Anteil der Bilinearform ist aus den Darstellungsmatrizen verschwunden. Das neue gepunktete Keilprodukt hat diesen Teil absorbiert. Man beachte, daß die Transformation

$$\begin{aligned} \pi \quad : \quad & M_{8\times 8}(\mathbf{R}) \to M_{8\times 8}(\mathbf{R}) \\ & \pi(\lrcorner_B) \to \lrcorner_A \\ & \pi(\wedge) \to \dot{\wedge} \\ & \pi([e_i]^B) \to [e_i]^A \end{aligned} \tag{3-208}$$

ein inhomogener Algebrahomomorphismus ist. $\dot{\wedge}$ besitzt in der ursprünglichen Graduierung den Grad 0 und 2. Damit respektiert diese Transformation den geometrischen Inhalt der Theorie nicht. Wir haben gesehen, daß z.B. Signaturen

verändert werden können ($CL_{2,2} \to CL_{3,1}$ [Berg 93]). Die Transformation ist also physikalisch relevant, da sie verschiedene Theorien aufeinander abbildet. Die „geeignete“ *Wahl* der Generatoren und des Keilproduktes zur Erzeugung der Basismonome $\{X_\rho\}$ oder $\{Y_\rho\}$ ist damit grundverschieden von der Wahl eines Koordinatensystemes in der klasssischen Mechanik.
**Bemerkung:** Die Frage nach der Reduzibilität der Darstellung (3-196) hängt somit davon ab, ob man die algebraische oder geometrische Äquivalenz betrachtet. Sind $B$ und $A$ invertierbar, so ist $\pi$ ein Isomorphismus und die Darstellung (3-196) ist *algebraisch* äquivalent zur Darstellung (3-204). In diesem Fall muß $\varphi_B$ als reduzibel angesehen werden. Benötigt man jedoch die geometrische Äquivalenz, so steht der Isomorphismus $\pi$ *nicht* zur Verfügung und $\varphi_B$ ist $8 \times 8$ und irreduzibel.

Wir führen noch die Verbindung des Trivektorterms unter dem Homomorphismus $\pi$ an

$$e_1 \dot{\wedge} e_2 \dot{\wedge} e_3 \quad = \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - F_{12} e_3 + F_{13} e_2 - F_{23} e_1. \tag{3-209}$$

Da das gepunktete Keilprodukt stabil unter der Reversion (3-153) ist,

$$(e_i \dot{\wedge} e_j)^{\tilde{}} \quad = \quad -e_i \dot{\wedge} e_j, \tag{3-210}$$

können wir eine Dualbasis zu den Generatoren $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ angeben. Dies verallgemeinert die Konstruktion, wie sie von Hestenes beschrieben wurde [Hest 84] zu beliebigen Bilinearformen. Mit

$$E \quad := \quad e_1 \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} e_n = \pm E^{\tilde{}} \tag{3-211}$$

bilden wir unter der Voraussetzung $det(G) = |G| \neq 0$

$$E^{-1} \quad = \quad \frac{E^{\tilde{}}}{E E^{\tilde{}}} = \frac{1}{|G|} E^{\tilde{}}. \tag{3-212}$$

Die rechtsdualen Generatoren ergeben sich dann zu

$$e^i \quad := \quad (-)^{i+1} e_1 \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} e_{i-1} \dot{\wedge} e_{i+1} \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} e_n E^{-1}. \tag{3-213}$$

Sie erfüllen ($|i| = |k| = 1$)

$$e_k e^i \quad = \quad \delta^i_k, \tag{3-214}$$

aber nicht notwendig die vertauschte Relation

$$e^i e_k \quad = \quad \delta^i_k. \tag{3-215}$$

Bildet man nun Matrixdarstellungen mit diesen Basen, so ergibt sich die Symmetrie der Generatoren unter der Transposition.
**Bemerkung:** Obwohl die $\{e^i\}$ Rechtsduale zu den $\{e_k\}$ bilden, kann daraus *nicht* gefolgert werden, daß die $\{e^i \dot{\wedge} e^j\}$ Rechtduale zu den $\{e_k \dot{\wedge} e_l\}$ sind. Daher ist es nicht möglich, eine lineare Transformation (Metrik) zum Heben oder Senken der Multiindizes $\alpha$, $|\alpha| \geq 2$ einzuführen [Bour 59, Zadd 94].

## 3-5 Dirac–, Hestenes– und nichtlineare Daviaugleichung

Um die Verbindung zwischen der Einteilchenquantenmechanik und der Feldtheorie deutlicher aufzuzeigen, wollen wir uns hier einigen neuen Aspekten der Diractheorie zuwenden, die nur im Clifford–algebraischen Kalkül so klar und einfach behandelt werden können. Wir greifen für die Nomenklatur und Teile der Darstellung auf [KELL 93] zurück. Dort finden sich auch viele (in der Bibliographie nicht aufgeführte) Zitate von Arbeiten zu diesem Thema. Ebenfalls finden sich dort eine historische Einführung und interessante Kommentare. Insbesondere das Werk Focks und Iwanenkos [FOCK 29A, FOCK 29B, FOCK 29C, FOCK 29D] erfährt dort gebührende Beachtung.

Um die Wellenfunktion der Diracgleichung genauer zu untersuchen, betrachten wir die Ortsvektoren

$$x \quad = \quad e_\mu x^\mu \tag{3-216}$$

im Koordinatensystem eines *Beobachters*. In diesem System erhält man für das Energieimpulsfeld $p(x) = e_\mu p^\mu(x)$ die Gleichung

$$e_\mu p^\mu(x) = m_0 c e'_0. \tag{3-217}$$

Dabei nehmen wir an, daß das gestrichene Koordinatensystem $\{e'_0, e'_1, e'_2, e'_3\}$ das Ruhesystem des Teilchens beschreibt. Die beiden Koordinatensysteme sind durch eine Lorentztransformation miteinander verbunden. Mit $e'_\mu \in CL_{1,3}$, $e_\mu \in CL_{1,3}$ erhält man

$$\begin{aligned} e'_\mu &= R(x) e_\mu R^{-1}(x) \\ R^{-1}(x) &= R(x)\tilde{}, \quad R\tilde{}R = RR\tilde{} = Id. \end{aligned} \tag{3-218}$$

Die Bewegungsgleichung (3-217) wird dann nach Rechtsmultiplikation mit $R(x)$ zu

$$e_\mu p^\mu(x) R(x) \quad = \quad m_0 c R(x) e_0. \tag{3-219}$$

Führt man einen primitiven Projektor $P_{+\uparrow}$ ein, wie wir dies in (3-179,3-180) bereits getan haben, so wählt man diesen so, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$\begin{aligned} P_{+\uparrow} &= e_0 P_{+\uparrow} = P_{+\uparrow} e_0 \\ P_{+\uparrow} &= P_{+\uparrow} i e_1 e_2, \end{aligned} \tag{3-220}$$

also

$$P_{+\uparrow} \quad = \quad \frac{1}{4}(1 + e_0)(1 + i e_1 e_2). \tag{3-221}$$

Damit erhält man

$$e_\mu p^\mu(x) R(x) P_{+\uparrow} \quad = \quad m_0 c R(x) P_{+\uparrow} i e_0 e_1 e_2. \tag{3-222}$$

Der hier etwas ungewöhnliche Faktor rechts von $P_{+\uparrow}$ führt zur gewöhnlichen Form der Diracgleichung, andere Wahlen wären möglich [PARR 89]. Das $(+)$ am Projektor soll positive Energie anzeigen, während $(\uparrow)$ den Spin–up–Zustand andeutet (dies sind reine Konventionen). Definieren wir nun

$$\psi(x) \;=\; A(x)R(x)P_{+\uparrow} \tag{3-223}$$

und gehen zur Operatornotation $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$ über, so erhalten wir

$$\hbar e\partial^\mu\psi(x) \;=\; m_0c\psi(x)e_0e_1e_2. \tag{3-224}$$

Das '$i$' hat sich herausgehoben. Es ist der Eigenwert zur Rechtsoperation mit $e_1e_2$ und $\psi$ ein Ideal–Spinor aus dem durch $P_{+\uparrow}$ erzeugten minimalen Linksideal. Die Gleichung (3-224) heißt Dirac–Hestenes Gleichung. Für eine genauere Analyse auch des $A(x)$–Faktors, siehe [HEST 66, HEST 75A, HEST 75B, HEST 82, HEST 90, HEST 91C].

Den umgekehrten Weg von der Diractheorie mit $\Psi \in \hat{\mathcal{L}}^{1,3}$ und $e_\mu\partial^\mu \in CL_{1,3}$ erhält man durch die *Wahl* eines konstanten Referenzspinors $\eta$ mit

$$\begin{array}{cc} \eta^\dagger\eta = 1 & P_{+\uparrow}\eta = \eta \\ \eta^\dagger P_{+\uparrow} = \eta^\dagger & \eta^\dagger P_{+\uparrow} = \eta^\dagger i e_0e_1e_2. \end{array} \tag{3-225}$$

Man gewinnt somit aus der Diracgleichung

$$i\hbar e_\mu\partial^\mu\Psi(x)\eta^\dagger \;=\; m_0c\Psi\eta^\dagger i e_0e_1e_2 \tag{3-226}$$

den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Psi(x)\eta^\dagger \\ \Psi(x) &= \psi(x)\eta. \end{aligned} \tag{3-227}$$

Für eine genaue Analyse siehe auch [ZENI 94].

Massive Teilchen lassen eine Zerlegung des Spinors $\psi$ (DH–Spinor, Operator–Spinor, vgl. (A.28,A.29)) zu. Es ist

$$\psi \;=\; \sqrt{\rho}e^{\frac{\beta}{2}\gamma^5}R. \tag{3-228}$$

Dabei ist $R$ eine Lorentztransformation, respektive ein Feld von Lorentztransformationen $R(x)$. Eine Dualitätstransformation wird durch $exp\{\beta/2\gamma^5\}$ gegeben, $\beta$ ist der Yvon–Takabayasi–Winkel [YVON 40, TAKA 57] und $\rho$ ist die skalare Dichte.

In der $4\times 4$ Matrixdarstellung erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{bmatrix} \psi_1 & -\bar\psi_2 & \psi_3 & \bar\psi_4 \\ \psi_2 & \bar\psi_1 & \psi_4 & -\bar\psi_3 \\ \psi_3 & \bar\psi_4 & \psi_1 & -\bar\psi_2 \\ \psi_4 & -\bar\psi_3 & \psi_2 & \bar\psi_1 \end{bmatrix} \\ \psi^\sim = \gamma_0\psi^\dagger\gamma_0 &= \begin{bmatrix} \bar\psi_1 & \bar\psi_2 & -\bar\psi_3 & -\bar\psi_4 \\ -\psi_2 & \psi_1 & -\psi_4 & \psi_3 \\ -\bar\psi_3 & -\bar\psi_4 & \bar\psi_1 & \bar\psi_2 \\ -\psi_4 & \psi_3 & -\psi_2 & \psi_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3-229}$$

sowie

$$\psi\psi^{\tilde{}} \;=\; \Omega_1 + \Omega_2\gamma^5, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{R}. \tag{3-230}$$

Die Cartanabbildung (Spinor $\rightarrow$ Spintensor = DH–Spinor) erhält man nun wie schon oben formal ausgeführt als

$$\psi \;=\; \sum_{i=1}^{4} \Psi_i \eta_i^\dagger \tag{3-231}$$

mit den Zeilenmatrizen $\eta_i^\dagger$ (1 an der $i$–ten Stelle der ersten Zeile, sonst Nullen).

Die Cartanabbildung ist damit nichts anderes als die Hilfsfeldsummation! Wir kommen daher zu dem Schluß, daß das *aufsummierte* Hilfsfeld ein Dirac–Hestenes–Spinorfeld $\psi$, also ein Matrixspinor aus $CL^+_{1,3}$ ist. Die $\eta^\dagger_{i\beta}$ erhält man aus

$$\begin{aligned}
\eta^\dagger_{11} &= \frac{1}{4}(1+\gamma_0)(1+i\gamma_1\gamma_2) \\
\eta^\dagger_{12} &= \gamma_2\frac{1}{4}(1+\gamma_0)(1+i\gamma_1\gamma_2) \\
\eta^\dagger_{13} &= \gamma_3\frac{1}{4}(1+\gamma_0)(1+i\gamma_1\gamma_2) \\
\eta^\dagger_{14} &= (\gamma_2\wedge\gamma_3)\frac{1}{4}(1+\gamma_0)(1+i\gamma_1\gamma_2)
\end{aligned} \tag{3-232}$$

undsofort. Bis auf die unterschiedliche Algebra ist dies identisch mit der in Teil I gefundenen Hilfsfeldsummation (1-76,3-185). Wir hatten dort den Majoranafall $CL_{3,1}$ über $\mathbf{R}$ untersucht. Mit ausgeschriebenen Indizes erhält man

$$\psi_{\alpha\beta} \;=\; \sum_{i=1}^{4} \Psi_{\alpha i}\eta^\dagger_{i\beta}, \tag{3-233}$$

wobei $i$ nur ein Summationsindex und $\alpha, \beta$ Spinorindizes sind. Man beachte, daß $\beta$ ein Zeilenindex ist und somit $\psi \in CL_{1,3}$ gilt.

Die Eigenschaften der Hilfsfeldtransformation ergeben sich dadurch, daß nur die diskrete Untergruppe der Spingruppe Referenzspinoren ineinander überführt. Dies verdeutlicht den Sinn der Verbindung von Hilfsfeldtransformationen mit den diskreten Transformationen $P, C$ und $T$ und darüberhinaus das Auftreten spezieller Kombinationen.

Da wir hier die Theorie über $\mathbf{C}$ untersucht haben, ist $i = \sqrt{-1}$ keine geometrische Größe. $i$ läßt sich geometrisieren, wenn die Diractheorie in der Algebra $CL_{4,1}$ über $\mathbf{R}$ formuliert wird. Leider werden dann auch die Argumente undurchsichtiger. Der Dirac–Hestenes–Spinor $\psi$ ist dann aus $CL^+_{4,1} \cong \mathbf{C} \otimes CL_{1,3}$ [Zeni 94].

Die bilinearen kovarianten Ausdrücke der Diractheorie können nun ($\mathbf{C} \otimes CL_{1,3}$) durch Dirac–Hestenes–Spinoren ausgedrückt werden

$$T_A(x) \;=\; \psi\gamma_A\psi^{\tilde{}}. \tag{3-234}$$

Will man jedoch den skalaren oder statistischen Faktor [HEST 90, HEST 91C] in diesen Ausdrücken vermeiden, so kann

$$T_A(x) \;=\; \psi\gamma_A\psi^{-1} \tag{3-235}$$

gebildet werden. C. Daviau untersuchte solche Größen ausführlich [DAVI 89, DAVI 91A, DAVI 91B, DAVI 93A, DAVI 93B]. Man erhält die eichinvarianten Größen

$$\begin{aligned}
f_0 = \psi\gamma_0\psi^{-1} &= \sqrt{\rho}e^{\frac{-\beta}{2}\gamma^5}R\gamma_0\tilde{R}e^{\frac{\beta}{2}\gamma^5}\frac{1}{\sqrt{\rho}} = e^{\beta\gamma^5}R\gamma_0\tilde{R} \\
&= e^{\beta\gamma^5}e_0 = e_0e^{-\beta\gamma^5} \\
\frac{2}{\hbar}S = \psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} &= \frac{1}{k_1}F = e_1e_2 \\
f_3 = \psi\gamma_3\psi^{-1} &= e^{\beta\gamma^5}e_3 = e_3e^{-\beta\gamma^5}.
\end{aligned} \tag{3-236}$$

Diese Größen sind „intensive“ Größen [STUM 76], da sie nicht mehr von der Dichte $\rho$ abhängen. Auch für kleine $\rho$ ist $f_i^2 = 1$! Der Multivektorformalismus der Cliffordalgebra erweist sich als besonders mächtig, da $\psi^{-1}$ nur hier auf einfache Weise gebildet werden kann.

Die neuen intensiven Größen $f_i$ ermöglichen es jetzt, die Diractheorie wesentlich zu verallgemeinern. Um dies einzusehen, wenden wir uns zuerst den Maxwellgleichungen ($\Box \equiv \partial$)

$$\Box F \;=\; \frac{4\pi}{c}J \tag{3-237}$$

zu. Nun findet man die Beziehung

$$F \;=\; \psi\gamma_1\gamma_2\tilde{\psi}. \tag{3-238}$$

Betrachtet man mit Rodrigues, Vaz [RODR 94] und Daviau [DAVI 93B] die freie Maxwellgleichung und definiert

$$\begin{aligned}
F &= He^{\beta\gamma^5}R\gamma_1\gamma_2\tilde{R} \\
H &:= b\rho, \quad \rho \leq 0,
\end{aligned} \tag{3-239}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
F &= b\psi\gamma_1\gamma_2\psi^{-1} \\
\Box F &= 0.
\end{aligned} \tag{3-240}$$

Ebene Wellen erhält man für $F^2 = 0$. Der für uns interessantere Fall ist somit $F^2 \neq 0$. Für die Zerlegung und Darstellung von Bivektoren siehe [RIES 58].

Nimmt man aber an, daß im einfachsten Fall $b, \rho$ und $\beta$ konstant sind, so erhält man eine Heisenberg–artige nichtlineare Spinorfeldgleichung [RODR 94]

$$\begin{aligned}
\Box\psi\gamma^1\gamma^2 + \mathcal{F}(\psi) &= 0 \\
\{b,\rho\}_+ &= cte
\end{aligned} \tag{3-241}$$

mit

$$\mathcal{F}(\psi) \;=\; \gamma^\mu \psi \gamma^1 \gamma^2 (\partial_\mu \psi) \psi (\psi \psi\tilde{})^{-1}. \tag{3-242}$$

So hat man aus $RR\tilde{} = R\tilde{}R = Id$ [Hest 86]

$$\begin{aligned}\partial_\mu R &= \frac{1}{2}\Omega_\mu R \\ \Omega_\mu &= 2(\partial_\mu R)R\tilde{},\end{aligned} \tag{3-243}$$

$\Omega_\mu$ heißt Darboux–Bivektor. Wegen der Konstanz von $\rho$ und $\beta$ kann man dies in Spinorform als

$$\partial_\mu \psi \;=\; \frac{1}{2}\Omega_\mu \psi \tag{3-244}$$

schreiben. Mit dem Spin–Bivektor von oben ist dann

$$\begin{aligned}S &\equiv \frac{\hbar}{2} R\gamma^1\gamma^2 R\tilde{} = \frac{\hbar}{2}\psi\gamma^1\gamma^2\psi^{-1} \\ -\frac{1}{\hbar} S\Omega_\mu &= \frac{\hbar}{2} R\gamma^1\gamma^2 R\tilde{} R(\partial_\mu R\tilde{}) 2\frac{1}{\hbar},\end{aligned} \tag{3-245}$$

was sich mit $\{b, \rho\}_+ = cte$ in

$$\Box\psi\gamma^1\gamma^2 - \frac{1}{\hbar}\gamma^\mu S\Omega_\mu\psi \;=\; 0 \tag{3-246}$$

überführen läßt. Diese Gleichung ist unter den obigen Voraussetzungen äquivalent zu den freien Maxwellgleichungen. Für eine algebraische Motivation der Gleichung siehe [Davi 93a], daher wird die dort angegebene nichtlineare Gleichung als Daviau– oder Dirac–Hestenes–Daviau–Gleichung bezeichnet. Diese läßt eine $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$ Eichung zu. Damit kann die elektroschwache Theorie in diesem Zugang behandelt werden, siehe [Hest 67b, Hest 82, Davi 93a, Davi 94a].

Die Multivektorgröße $S\Omega_\mu$ besitzt drei verschiedene Komponenten, Skalar, Bivektor und Pseudoskalar:

$$S\Omega_\mu \;=\; -\rho_\mu + E_{\mu,\alpha\beta}(\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) + \gamma^5 r_\mu, \tag{3-247}$$

mit $\rho_\mu, E_{mu,\alpha\beta}, r_\mu \in \mathbf{C}$.

Besitze $S\Omega_\mu$ nur einen skalaren Anteil $\rho_\mu$, so ist

$$\gamma^\mu S\Omega_\mu \;=\; -\gamma^\mu\rho_\mu \equiv -\rho. \tag{3-248}$$

Mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$\begin{aligned}v &= R\gamma^0 R\tilde{} \\ \rho v &= \psi\gamma^0\psi\tilde{}\end{aligned} \tag{3-249}$$

kann die *Masse* m so definiert werden, daß gilt

$$\rho\psi \quad = \quad e^{\beta\gamma^5} mcv\psi, \tag{3-250}$$

woraus

$$\rho\psi \quad = \quad mc\psi\gamma^0 \tag{3-251}$$

folgt. Setzt man dies in die nichtlineare Gleichung (3-246) ein, so erhält man

$$\Box\psi\gamma^1\gamma^2 + \frac{mc}{\hbar}\psi\gamma^0 \quad = \quad 0, \tag{3-252}$$

also die Dirac–Hestenes–Gleichung für ein freies Elektron! Wählt man nur einen Bivektoranteil, so ist

$$\begin{aligned} E_{\mu,\alpha\beta}\gamma^\mu(\gamma^\alpha \wedge \gamma^\beta) \quad &= \quad -\frac{e}{c}A_\mu\gamma^\mu - \gamma^5\frac{g}{c}B_\mu\gamma^\mu \\ &= \quad -\frac{e}{c}A - \frac{g}{c}\gamma^5 B. \end{aligned} \tag{3-253}$$

Dies führt auf die Monopolgleichungen von [Loch 85]. War nun $\rho$ und $\beta$ konstant, so folgt auch die Konstanz von $A$ und $B$. Es ist jedoch möglich, eine Analyse durchzuführen, in der alle Variablen dynamisch sind. Man erhält nach längerer Rechnung [Rodr 93a]

$$\begin{aligned} \Box\psi\gamma^1\gamma^2 - \frac{1}{\hbar}\gamma^\mu S\Omega_\mu\psi \quad &= \quad (\Box \log\psi_0)\psi\gamma^1\gamma^2 \\ \psi_0 \quad &:= \quad (\rho e^{\beta\gamma^5})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3-254}$$

Hat nun $S\Omega_\mu$ wieder nur einen skalaren Anteil, so kann durch nochmaliges Anwenden von $\partial \equiv \Box$ und einigen Umformungen eine nichtlineare Schrödingergleichung gewonnen werden:

$$\Box^2\psi + (\frac{mc}{\hbar})^2\psi \quad = \quad \frac{\Box^2\psi_0}{\psi_0}\psi. \tag{3-255}$$

Diese Gleichung besitzt lokalisierte nichtdispersive Lösungen [Guer 82]. Solche solitonischen Lösungen bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v < c$.

Benutzen wir die Spaltenschreibweise für $\Psi = \psi\eta$, um den Wechselwirkungsterm genauer zu analysieren. Mit

$$\begin{aligned} \Im(\partial_\mu\bar{\Psi}\Psi) \quad &= \quad -\frac{i}{2}\xi \\ \Im(\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^5\Psi) \quad &= \quad -\frac{1}{2}\eta \end{aligned} \tag{3-256}$$

erhalten wir

$$\{\Im(\partial_\mu\bar{\Psi}\Psi) - \gamma_5\Im(\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)\}\Psi \quad = \quad -\frac{i}{2}\xi\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} + \frac{\eta 1}{2}\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\\ \psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}. \tag{3-257}$$

Definiert man noch

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi\psi_1 + \eta\psi_3 \\ \xi\psi_2 + \eta\psi_4 \\ \xi\psi_3 + \eta\psi_1 \\ \xi\psi_4 + \eta\psi_2 \end{bmatrix}, \qquad (3\text{-}258)$$

so schreibt sich die nichtlineare Gleichung (3-241) mit den explizit angegebenen Matrizen für $\psi$ und $\psi^{\sim}$ (3-229) als

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -\frac{1}{2}\gamma^\mu \frac{e^{-\gamma^5\beta}}{\rho}\xi \qquad (3\text{-}259)$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \begin{bmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 & \psi_3 & \bar{\psi}_4 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 & \psi_4 & -\bar{\psi}_3 \\ \psi_3 & \bar{\psi}_4 & \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_4 & -\bar{\psi}_3 & \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma^\mu \frac{e^{-\gamma^5\beta}}{\rho} \begin{bmatrix} \xi_1 & -\bar{\xi}_2 & \xi_3 & \bar{\xi}_4 \\ \xi_2 & \bar{\xi}_1 & \xi_4 & -\bar{\xi}_3 \\ \xi_3 & \bar{\xi}_4 & \xi_1 & -\bar{\xi}_2 \\ \xi_4 & -\bar{\xi}_3 & \xi_2 & \bar{\xi}_1 \end{bmatrix}.$$

Betrachtet man die Rückübersetzung des Maxwelltensors in die Spaltenform

$$F = \bar{\Psi}\gamma^1\gamma^2\Psi, \qquad (3\text{-}260)$$

so wird dieser nicht in der angegebenen Weise auf die obige Gleichung abgebildet, da

$$F = \left(\sum_{j=1}^{4} \eta_j \bar{\Psi}_j\right) \gamma^1\gamma^2 \left(\sum_{i=1}^{4} \Psi_i \eta_i^\dagger\right) \qquad (3\text{-}261)$$

gebildet werden muß. Man erhält nicht nur die $\Psi_i\gamma^1\gamma^2\Psi_i$ Terme, sondern noch 12 weitere $\Psi_i\gamma^1\gamma^2\Psi_j$, $i \neq j$.

Dies ist exakt die Situation des Zerlegungstheorems! Durch die Zerlegung der Gleichung vierter Ordnung in ein Gleichungssystem gewöhnlicher Spaltenspinoren entstehen für die Hilfsfelder, also für die Spalten des Matrixspinors, Ausdrücke der Form $\sum \Psi_i\eta_i$. Unsere aufwendige Analyse mit Hilfe der Ansätze hat uns damit genau *die* Fälle als „regulär" geliefert, für die die zusätzlichen Terme wegfallen:

$$\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} F = \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} (\eta_j\bar{\Psi}_j)\gamma^1\gamma^2(\Psi_i\eta_i^\dagger) = 0. \qquad (3\text{-}262)$$

Wir sehen, daß die algebraisch motivierte Methode in Teil I wesentlich spezieller ist als das Zerlegungstheorem. Der algebraische Ansatz war jedoch der Auslöser dieser Überlegungen und hat schließlich zu einem tieferen Verständnis der Hilfsfelder geführt. Nicht zuletzt muß jedoch bemerkt werden, daß die dynamischen Gleichungen sich in den beiden Fällen wesentlich unterscheiden.

**Bemerkung:** Alle Überlegungen dieses Abschnittes wurden im Einteilchenbild angestellt. Die Vielfalt der Modelle und die nahe Beziehung von Dirac–Hestenes– und Daviau–Gleichung zur Heisenberg–artigen Spinortheorie sollten jedoch Anlaß genug sein, sich klar zu machen, daß in der gewöhnlichen Art der Behandlung von Feldtheorien *nicht* korrekt zwischen Einteilchen– und Vielteilchenbild unterschieden wird, z.B. in [Boud 90]. So hat Daviau einen vielversprechenden Versuch unternommen, den Lamb–Shift im Einteilchenbild mit seiner nichtlinearen (auf die $f_i$ bezogene) Gleichung zu berechnen. Auch wenn, aufgrund der Schwierigkeiten bei der Lösung einer nichtlinearen Theorie, bis jetzt noch keine überzeugenden quantitativen Resultate vorliegen, wurde doch die Möglichkeit aufgezeigt, den Effekt als Einteilcheneffekt zu verstehen. Das Vakuum und seine schwierige Interpretation muß dann nicht mehr bemüht werden. Interessante Ergebnisse zu Bindungsrechnungen finden sich auch bei Krüger [Krüg 91, Krüg 93].

**Bemerkung:** Betrachtet man Stromlinien des Diracfeldes, so erhält man für die freie Theorie helixartige Kurven. Dies bildet den Ausgangspunkt für die Zitterbewegungsinterpretation der Quantenmechanik. Besonders interessant dabei sind Modelle mit masselosen Konstituenten wie das Barut–Modell [Baru 93]. Solche Modelle wurden ausführlich mit Clifford–algebraischen Methoden untersucht [Hest 79, Hest 85b, Hest 85c, Gull 91, Gull 93e]. Es ist ebenfalls möglich, einen Multivektorkalkül für solche, sich lichtartig bewegende „Teilchen" zu entwickeln [Hest 74a, Hest 74b, Hest 86, Lase 93b, Lase 93d]. Dies ergänzt die alten Arbeiten der de Broglie Schule [Yvon 40, Taka 57].

# Kapitel 4

# Erzeugendenfunktionale, eine Clifford–algebraische Sicht

Der quantenmechanische Formalismus beschreibt zwar viele Gegebenheiten, doch war schon bald nach der Entdeckung der Quantentheorie klar, daß man auch Felder quantisieren muß. Das Paradebeispiel und die Theorie, an der und für die die Feldquantisierung entwickelt wurde, ist die QED. Nun fehlt bis heute, ca. 50 Jahre nach der Etablierung der QED immer noch ein mathematischer Existenzbeweis für die QED. Die, schon bei schwacher Kopplung, immensen mathematischen Schwierigkeiten werden in der stark wechselwirkenden Quantenchromodynamik (QCD) nachgerade unlösbar. So leiden alle diese Theorien unter Singularitäten und Konvergenzproblemen. Geistfelder und indefiniter Zustandsraum machen die Situation in den Eichtheorien (QED, QCD) noch unübersichtlicher.[1] Die häufig benutzte Pfadintegralmethode, die ebenfalls mit Funktionalen arbeitet, kämpft ebenso mit diesen allgemeinen Problemen. Einige Erfolge wurden mit zweidimensionalen Quantenfeldtheorien erzielt. Dort war es möglich, mittels konformer Modelle die Existenz wechselwirkender Feldtheorien zu zeigen. Die mathematische Existenz bedeutet aber nichts weniger, als daß diese Theorien *vollständig* regulär sind.

In diesem Kapitel sollen nun Funktionale mit Clifford–algebraischen Methoden formuliert werden. Ziel ist es, die heuristische Vorgehensweise in diesen mathematisch begründbaren und geometrisch interpretierbaren Formalismus zu übertragen und dadurch zu verstehen. Umgekehrt versprechen wir uns viel von der Übertragung der, der Cliffordalgebra inhärenten, geometrischen Interpretation in die Feldtheorie. Damit sollen neue Ansätze gefunden werden, reguläre Theorien zu formulieren. Nimmt man die geometrische Struktur ernst, so muß diese in der Feldtheorie Auswirkungen besitzen. Das bedeutet aber, daß der ganze Fundus an geometrischen Theoremen und Anschauungen z.B. der projektiven Geometrie, in die Feldtheorie übertragen werden kann. Am Ende des Kapitels werden wir Gelegenheit haben, die Normalordnung auf eine solche Weise geometrisch zu verstehen. Die übliche Vertexregularisierung entfällt dann und die Theorie verliert *eine* Ursache für die Nichtregularität.

## 4-1 Quantenfeldtheorie mit Erzeugendenfunktionalen

Die Quantenfeldtheorie wird auf verschiedene Art und Weise behandelt. Üblich ist es, von einer klassischen Lagrangedichte auszugehen und mittels der kanonischen Quantisierung den klassischen Feldern Operatorcharakter zu verleihen. In Kapitel 1 waren wir in etwa so vorgegangen. Die erhaltenen Gleichungen besitzen

[1] Eine geometrische Interpretation der Geistfelder findet sich in [THIE 80].

ebenfalls diesen Operatorcharakter und sind deshalb einer direkten Interpretation unzugänglich. Erst wenn man zusätzlich den Zustand berücksichtigt, können Matrixelemente berechnet werden. Die Matrixelemente beschreiben dann die speziellen physikalischen Prozesse mittels Übergangswahrscheinlichkeiten[2] und Erwartungswerten. Vom physikalischen Standpunkt aus muß also nicht die Operatorgleichung gelöst werden. Es genügt eventuell, nur einige Matrixelemente zu bestimmen.

Auch das Pfadintegral stellt einen solchen Ansatz dar, der sich mit Hierarchien von Matrixelementen in kompakter funktionaler Schreibweise beschäftigt. Schreibt man die Hierarchien aus, so erhält man ein gekoppeltes System von Feldgleichungen für distributionswertige Funktionen mit beliebig vielen Unbekannten. Diese Hierarchien heißen Dyson–Schwinger–Freese–Gleichungen [Dyso 49a, Dyso 49b, Schw 51, Free 51, Dyso 52].

**Bemerkung:** Man beachte auch die Pauli–algebraische Formulierung der Maxwelltheorie, die ebenfalls zu Hierachiegleichungen führt [Bayl 89a, Bayl 93, Bayl 94].

In der QED erhält man Lösungen dieser Hierarchien durch eine störungstheoretische Entwicklung nach der hier kleinen Kopplungskonstante. Nichtstörungstheoretische Lösungen sind für realistische vierdimensionale Modelle unbekannt.

Nach dem Wightmanschen Rekonstruktionstheorem [Wigh 56] ist es möglich, die gesamte physikalische Information aus den Vakuumerwartungswerten zu gewinnen. Diese mehrzeitigen Distributionen bilden die Wightmanfunktionen. Da wir uns hier jedoch ausschließlich mit Evolutionsgleichungen beschäftigen wollen, ist der Hamiltonformalismus unausweichlich. Die Kovarianz muß dann nachträglich gezeigt werden. Es ist im Hamiltonformalismus angebracht, einzeitige Hierarchien zu betrachten. Die Wightmandistributionen hängen dann nur noch von einer Zeit ab. Man definiert für Fermionen

$$\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a) \quad := \quad <0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})|a> |_{t_1=t_2=\ldots=t_n}. \tag{4-1}$$

Dabei ist $|a>$ ein beliebiger Zustand. $|0>$ bezeichnet das physikalische Vakuum und ist deshalb insbesondere kein Fockvakuum. $\mathcal{A}$ bezeichnet den Antisymmetrisierer. Der Sammelindex $I$ faßt alle hier nicht näher bestimmten Freiheitsgrade zusammen.

**Bemerkung:** Während der Übergang vom Operatorbild zu den Übergangsmatrixelementen mit einem festen Zustand $|a>$ eindeutig möglich ist, kann aus einem Übergangsmatrixelement nicht auf seinen Operatorinhalt geschlossen werden, wie man an

$$\tau^2(I_1I_2|a) \quad = \quad <0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\psi_{I_2})|a> \neq <0|F^{I_3I_4}\mathcal{A}(\psi_{I_1}\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4})|a> \tag{4-2}$$

sieht. Man muß Faktorisierungseigenschaften der $\tau$–Funktionen kennen, um eine solche Identifikation vorzunehmen. Dieses schwierige nichtlineare Problem

[2] Die Quantenmechanik ist keine klassische Wahrscheinlichkeitstheorie, wie z.B. die Thermodynamik. Während in einer klassisch statistischen Theorie Wahrscheinlichkeitsmaße existieren, gibt es in der Quantentheorie nur Wahrscheinlichkeitsamplituden (Wellenfunktionen), die kein Wahrscheinlichkeitsmaß besitzen müssen. Die quantentheoretischen „Wahrscheinlichkeitsmaße“ besitzen notwendigerweise selbst Operatorcharakter.

[Riec 77] wurde in der Quantenfeldtheorie bis heute nicht konstruktiv gelöst, siehe dazu [Haag 92].

Ist nun eine quantenfeldtheoretische Bewegungsgleichung gegeben, so induziert diese eine Hierarchiegleichung in den Übergangsmatrixelementen der Art

$$i\partial_0\tau^n \quad = \quad \sum_{\substack{r\in\mathbf{Z} \\ |\rho|=r,\ \rho\subset\mathcal{I}}} \alpha_\rho \tau^{n+r}(\rho|a), \tag{4-3}$$

mit endlich vielen Kopplungen, $\#\{a_\rho \neq 0\} < \infty$.

Fordert man eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation, so muß ein positivdefinites Innenprodukt existieren. Dann folgt mit dem Robinson–Theorem [Robi 65] aber, daß die Hierarchie nicht abbricht, wenn die Theorie nicht quasifrei sein soll.

Wir wollen trotzdem diese Übergangsmatrixelemente auf rein formale Weise zusammenfassen. Dies geschieht mit Erzeugendenfunktionalen. Dazu definieren wir die Antisymmetrie respektierend, Quellen $j$ mit den Vertauschungsrelationen

$$\{j_I, j_K\}_+ \quad = \quad 0. \tag{4-4}$$

Multipliziert man an die $\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a)$ die funktionalen Quellen $j_{I_1}\ldots j_{I_n}$, so entsteht ein Ausdruck ohne offene Indizes. Gewichtet man diese Terme mit $i^n/n!$, wobei das $i$ aus Konventionsgründen auftritt, so kann

$$G(j,a) \quad = \quad \sum_{n=0}^{n} \frac{i^n}{n!}\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a)j_{I_1}\ldots j_{I_n} \tag{4-5}$$

gebildet werden. Um aus diesem formalen Konstrukt die $\tau^n$–Funktionen zurückzugewinnen, definieren wir duale Gößen $\partial$ zu den Quellen $j$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \{\partial_I, \partial_K\}_+ \quad &= \quad 0 \\ \{\partial_I, j_K\}_+ \quad &= \quad \delta_{IK}. \end{aligned} \tag{4-6}$$

Um die Analogie zu quantenmechanischen Zuständen zu vervollständigen und das Nullsetzen der Quellen beim Extrahieren der $\tau^n$–Funktionen zu vermeiden, definieren wir ein „funktionales Vakuum“ mittels

$$\partial_I|0>_F \quad = \quad {}_F<0|j_I \equiv 0. \tag{4-7}$$

Wir erhalten die Funktionalzustände

$$|G(j,a)>_F \quad = \quad \sum_{n=0}^{n} \frac{i^n}{n!}\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a)j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F \tag{4-8}$$

eines linearen Funktionalraumes $\mathcal{F}$. Die Übergangsmatrixelemente werden durch die „Projektion“ mit Linkszuständen

$$i^{-m}\ {}_F<0|\partial_{I_m}\ldots\partial_{I_1} \tag{4-9}$$

gewonnen. Es ist also

$$\tau^n(I_1,\ldots,I_m|a) \quad = \quad i^{-m}\,{}_F<0|\partial_{I_m}\ldots\partial_{I_1}|G(j,a)>_F\,. \tag{4-10}$$

Der Funktionalraum ist ein fermionischer Fockraum. Dies darf nicht mit dem physikalischen Zustandsraum verwechselt werden. Die Fockraumkonstruktion bezieht sich ausschließlich auf die Zusammenfassung der Matrixelemente und auf deren Rückgewinnung durch Projektion. Abgesehen von der durch die Quellen erzwungene Antisymmetrie, sind die $\tau^n$–Funktionen durch die funktionale Konstruktion nicht festgelegt.

In diesem Stadium der Definition ist es völlig sinnlos, eine Norm oder ein Innenprodukt auf dem Funktionalraum einführen zu wollen. Wir haben sogar schon Gründe dafür, anzunehmen, daß $|G(j,a)>_F$ „divergieren“ muß, wenn man der formalen Reihe über den Distributionen einen Sinn verleihen will. Auf jeden Fall muß vermieden werden, Linkszustände etwa mittels

$$\partial_I \quad \equiv \quad j_I^\dagger \tag{4-11}$$

zu definieren. Ein solches Vorgehen würde den Fockraum überbetonen und die Intention, mit den $\partial_I$ *nur* die Projektion zu beschreiben, verlassen. Mit (4-11) hätte man die Fockraumstruktur sogar auf den physikalischen Raum übertragen. Ein funktionaler Zustand

$$|B(j,a)>_F \quad = \quad \frac{i^n}{n!}\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a)j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F, \tag{4-12}$$

der der Einfachheit halber nur einen Term besitzt, hätte den Linkszustand

$${}_F<B(j,a)| \quad = \quad {}_F<0|\frac{(-i)^n}{n!}\partial_{I'_n}\ldots\partial_{I'_1}\tau^{*n}(I'_1,\ldots,I'_n|a). \tag{4-13}$$

Die *Focknorm* des Zustandes ergibt sich zu

$$\begin{aligned} {}_F<B(j,a)|B(j,a)>_F \quad &= \quad \frac{1}{2(n!)}\tau^{*n}(I'_1,\ldots,I'_n|a)\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a)\,\times \\ &\quad\quad \times_F<0|\partial_{I'_n}\ldots\partial_{I'_1}j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F \\ &= \quad \frac{1}{n!}\tau^{*n}(I'_1,\ldots,I'_n|a)\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a). \end{aligned} \tag{4-14}$$

Linkszustände und die Wahrscheinlichkeitsinterpretation bedürfen also einer gesonderten Untersuchung. Diese wurde von Stumpf [STUM 89B, FAUS 90] (siehe auch [FEYN 87]) durchgeführt und man gelangt unter einigen Annahmen bis zu einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation der durch die Funktionale beschriebenen physikalischen Zustände.

Um die Bewegungsgleichungen mit der funktionalen Formulierung untersuchen zu können, müssen diese noch in den Funktionalraum übertragen werden. Aus der Operatorgleichung

$$i\partial_0\psi \quad = \quad [\psi, H[\psi]]_- \tag{4-15}$$

entsteht für stationäre Zustände $|a>$ die Funktionalgleichung

$$i\partial_0|G(j,a)>_F \;=\; E_{a0}|G(j,a)>_F = H[j,\partial]|G(j,a)>_F \,. \qquad (4\text{-}16)$$

Man erhält die Energiedifferenz $E_{a0}$, da wir Matrixelemente betrachten. Diese Gleichung stellt also eine renormierte Energieeigenwertgleichung dar. Weiterhin wird $H[j,\partial]$ als funktionaler Hamiltonoperator bezeichnet. Die Gleichung ist äquivalent zur vollen Hierarchiegleichung der Matrixelemente und besitzt die formale Struktur einer Schrödingergleichung. Man beachte jedoch die obige Bemerkung und die Tatsache, daß die genannten Zustände $|G(j,a)>_F$ keine direkte Wahrscheinlichkeitsinterpretation besitzen.

Die funktionale Beschreibung ist in der Quantenfeldtheorie üblich und unser spezieller Zugang wurde in [Stum 94] ausführlich beschrieben. Wir verzichten hier daher auf weitere Ausführungen und wenden uns der Clifford–algebraischen Formulierung des Funktionalraumes zu.

## 4-2 Algebraische Eigenschaften der Erzeugendenfunktionale

In diesem Abschnitt soll eine neue Sicht auf die funktionalen Techniken der Quantenfeldtheorie entwickelt werden. Dabei spielen im fermionischen Fall die Graßmannalgebra und die Cliffordalgebra die entscheidende Rolle.

Während in der Quantenfeldtheorie immer wieder physikalische Argumente bemüht werden um die Divergenzen zu beseitigen, erhoffen wir uns durch die algebraische Formulierung neue Hinweise, wie eine Quantenfeldtheorie vollständig regulär behandelt werden kann. Dadurch erhält die Theorie eine saubere mathematische Form. Der geometrische Charakter der Cliffordalgebra ist dabei äußerst hilfreich. Zudem garantiert uns die Universalität der Clifford– und Graßmannalgebren, daß die geometrische Interpretation *notwendig* vorhanden ist. Dabei ist die Existenz dieser Algebren äquivalent zur Regularität der Feldtheorie.

### 4-2.1 Erzeugendenfunktionale in der Graßmannalgebra

Wir betrachten deshalb von neuem die Konstruktion des Funktionalraumes. Es wurden bereits antikommutierende $j$–Quellen eingeführt, die als Basis aufgefaßt den linearen Raum $\mathcal{V}_D$ über den Distributionen spannen

$$\mathcal{V}_D \;:=\; <j_{I_1},\ldots,j_{I_n},\ldots> \,. \qquad (4\text{-}17)$$

Nun ist in $D$ zwar die Addition definiert, aber für die Multiplikation zweier Distributionen muß wenigstens ein Faktor regulär sein. Andernfalls muß das Produkt zweier Distributionen regularisiert werden. Das ist ein schwieriger, nicht kanonisch durchführbarer Prozeß [Gelf 60].

Man kann sich auch durch das Ausschmieren der Felder, $I=\{\Lambda,\alpha,x\}$

$$\begin{aligned} \psi_I(f) &= \int \psi_{\Lambda\alpha}(x)f(x)dx \\ \{\psi_I(f),\psi_{I'}(g)\}_+ &= \sigma^1_{\Lambda\Lambda'}(C\gamma^0)_{\alpha\alpha'}\int \bar f(x)g(x)dx \end{aligned} \qquad (4\text{-}18)$$

behelfen. In relativistischen Theorien stellt sich aber auch das als schwierig heraus, da auch die Zeitrichtung ausgeschmiert wird. Für unsere formale Untersuchung nehmen wir hier an, daß die Definitionsbereiche aller Größen so gewählt werden, daß im Produkt von Distributionen höchstens ein Faktor singulären Charakter besitzt und das Produkt somit existiert. Damit ist $\mathcal{V}_D$ mit den Definitionen (4-17) als Vektorraum der durch die $j$–Quellen (Generatoren) generierten Graßmannalgebra zu betrachten. Wir erhalten

$$\Lambda\mathcal{V}_D \quad := \quad \oplus_n \Lambda^n \mathcal{V}_D = D \oplus \mathcal{V}_D \oplus \Lambda^2 \mathcal{V}_D \ldots \tag{4-19}$$

Diese Algebra besitzt keinen höchsten Grad. Ein Element $X$ dieser Algebra besitzt die Form

$$X \quad = \quad \sum_{\substack{\rho\subset\mathcal{I} \\ |\rho|=n}} a_\rho j_\rho, \tag{4-20}$$

wobei $\rho$ ein Multiindex eines regulären Monoms $j_\rho$ ist,

$$j_\rho \quad = \quad j_{\rho_1} j_{\rho_2} \ldots j_{\rho_n}, \quad \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_n \in \rho \cap \mathcal{I}. \tag{4-21}$$

Die $a_\rho$ Koeffizienten sind Distributionen von $|\rho| = n$ vielen Argumenten. Mit der Identifikation

$$a_\rho \quad \equiv \quad \tau^n(I_1, \ldots, I_n | a), \quad |\rho| = n \tag{4-22}$$

ergibt sich mit (4-8)

$$G(j, a) \quad \equiv \quad X. \tag{4-23}$$

Das Erzeugendenfunktional $G$ ist somit ein Element aus $\Lambda\mathcal{V}_D$ geworden,

$$G(j, a) \quad \in \quad \Lambda\mathcal{V}_D. \tag{4-24}$$

Man beachte, daß die Koeffizienten $a_\rho \equiv \tau^n$ nicht zerlegbar sein müssen, sondern in jedem Grad eine Summe zerlegbarer Elemente darstellen können. $G(j, a)$ kann damit mittels der Technik der algebraischen Kohomologie untersucht werden.

Es ist ohne weiteres möglich, das funktionale Vakuum $|0>_F$ einzuführen. Dazu definieren wir

$$|0>_F \quad \equiv \quad \mathbf{1} \in D. \tag{4-25}$$

Aus

$$G(j, a) \quad = \quad \sum_{\substack{\rho\subset\mathcal{I} \\ |\rho|=n}} \tau^n(\rho | a) j_\rho \mathbf{1} \tag{4-26}$$

wird dann der Funktionalzustand

$$|G(j, a)>_F \quad = \quad \sum_{\substack{\rho\subset\mathcal{I} \\ |\rho|=n}} \tau^n(\rho | a) j_\rho |0>_F\ . \tag{4-27}$$

Die Fockraumeigenschaft

$$\partial_I|0>_F \quad = \quad 0 \tag{4-28}$$

folgt aus der Tatsache, daß jedes Element $f \in D$ als Skalar von der *Derivation* $\partial_I$ vernichtet wird. $|0>_F = \mathbf{1}$ wird also nur bis auf eine Konstante bestimmt. $\mathbf{1}$ wählt man, um in den restlichen Graden nichts zu ändern. Aus dem *Derivationscharakter* von $\partial_I$ erhalten wir den Kommutator

$$\{\partial_I, j_k\}_+ \quad = \quad \delta_{IK}. \tag{4-29}$$

Die Derivationen sind keine Elemente der Graßmannalgebra.

Es wäre durchaus möglich, einen Projektionsmechanismus anzugeben, der ohne Derivationen auskommt. Setzt man z.B. $j_{I_0}$ als den Generator zur leeren Indexmenge an, so kann der Term $\tau^2(I_2, I_3|a)$ durch Nullsetzen aller Quellen $j_{I_k}$ inklusive $k = 0$ und Einssetzen der speziellen Quellen $j_{I_2} j_{I_3}$ erhalten werden,

$$\tau^2(I_2, I_3|a) \quad = \quad G(j,a)\Big|_{\substack{j_{I_2}=j_{I_3}=1 \\ j_{I_k}=0 \quad \forall k \notin \{2,3\}}}. \tag{4-30}$$

Diese Prozedur der Valuation setzt aber voraus, daß $G(j,a)$ als Reihe existiert. Nur wenn eine Konvergenz vorliegt, kann eine solche Sichtweise, das heißt $G$ als Funktion, vertreten werden. Man findet schon in der klassischen Analysis Gegenbeispiele zu einem solchen Vorgehen [Wilf 94]. Zudem wissen wir, daß $G(j,a)$ nicht „konvergieren“ sollte, da die $\tau^n$–Funktionen mit $n$ wachsen [Heis 67].

Diese Technik ist jedoch im Zusammenhang mit dem Pfadintegral weit verbreitet. Benutzt man aber Derivationen, so verhindert man eine solche Komplikation. Es ist also unausweichlich, Elemente aus $\mathcal{V}_D^*$ zu betrachten.

### 4-2.2 Erzeugendenfunktionale in der Cliffordalgebra

Wir hatten in Kapitel 3-2.3 mittels der Chevalley–Deformation die Cliffordalgebra aus der Graßmannalgebra konstruiert. Da die Anzahl der Generatoren an keiner Stelle in diesen Prozeß eingeht, können wir hier ebenfalls so vorgehen. Sei also $\mathcal{V}_D$ wie oben von den Graßmannquellen $j_I$ (Generatoren) aufgespannt (generiert). Die Derivationen $\partial_I$ spannen dann den Dualraum $\mathcal{V}_D^* = <\partial_{I_1}, \ldots \partial_{I_n}, \ldots>$. Mit denselben Einschränkungen, die wir aufgrund des Distributionscharakters der Skalaren in $\Lambda\mathcal{V}_D$ besprochen hatten, ist es nun möglich, die Graßmannalgebra der Linearformen zu bilden:

$$\Lambda\mathcal{V}_D^* \quad = \quad \oplus_n \Lambda^n \mathcal{V}_D^* = D \oplus \mathcal{V}_D^* \oplus \Lambda^2\mathcal{V}_D^* \oplus \ldots. \tag{4-31}$$

Nun betrachten wir die Chevalley–Deformation

$$\Lambda\mathcal{V}_D \quad \to \quad \Lambda\mathcal{V}_D^* \oplus \Lambda\mathcal{V}_D \cong CL_D(\mathcal{V}^* \oplus \mathcal{V}, \delta). \tag{4-32}$$

Dazu bilden wir die Generatoren der Cliffordalgebra

$$e_I \quad := \quad \partial_I + j_I. \tag{4-33}$$

Wieder erhält man durch Nachrechnen

$$e_I e_K + e_K e_I \;=\; 2\delta_{IK}. \tag{4-34}$$

Es ergibt sich durch diese Konstruktion auf natürliche Art und Weise der selbstduale Raum $H_D = \mathcal{V}_D^* \oplus \mathcal{V}_D$, der von den Generatoren $e_I$ als linearer Raum gespannt wird,

$$\begin{aligned} H_D &= \;< e_{I_1}, \ldots, e_{I_n}, \ldots > \\ &= \;< \partial_{I_1}, \ldots, \partial_{I_n}, \ldots > \oplus < j_{I_1}, \ldots, j_{I_n}, \ldots > . \end{aligned} \tag{4-35}$$

Wir haben die natürliche $*$–Struktur

$$\begin{aligned} * \;:\; & H_D \to H_D \\ & e_I^* = e_I \\ & \partial_I^* = j_I \\ & j_I^* = \partial_I. \end{aligned} \tag{4-36}$$

Man beachte, daß die Indexmengen für die $j_I$ und $\partial_I$ per Konstruktion von gleicher Mächtigkeit sind. Dies erzwingt die Reflexivität von $H_D$.

Es erscheint nun so, als ob wir eine Relation zwischen den $j_I$ und den $\partial_I$ eingeführt hätten, wie wir sie eigentlich vermeiden wollten. Dazuhin entsteht der Verdacht, daß wir im Fockraum arbeiten würden. Um zu sehen, daß dem nicht so ist, müssen wir uns vergegenwärtigen, daß die hier erhaltene $*$–Struktur nur durch die Konstruktion der Cliffordalgebra und nicht durch die Physik bestimmt ist. Ausdrücke der Form $X^*X$ ergeben somit keinen physikalischen Sinn. Wir haben schon wiederholt darauf verwiesen, daß kein kanonischer Dualisomorphismus existiert. Wie in unserem Beispiel zu den verschiedenen $*_\theta$–Konjugationen auf Seite 78, müssen wir hier sehr sorgfältig die Injektion

$$\begin{aligned} \iota \;:\; & \Lambda\mathcal{V}_D \to CL(H, \delta) \\ & X = \sum a_\rho j_\rho \to X = \sum a'_\rho e_\rho \end{aligned} \tag{4-37}$$

untersuchen. Dabei soll sich herausstellen, wie die Graßmannalgebra innerhalb der Cliffordalgebra gefunden werden kann.

Wir können angeben, wie die Generatoren der Cliffordalgebra auf die Graßmannalgebra wirken. Es ist für ein $j_I$

$$\begin{aligned} e_K j_I &= (\partial_K + j_K) j_I \\ &= \delta_{IK} - j_I \partial_K + j_K j_I \\ e_K j_I |0>_F &= (\delta_{KI} + j_K j_I)|0>_F \\ {}_F<0|e_K j_I|0>_F &= \delta_{IK}\, {}_F<0|0>_F = \delta_{IK}. \end{aligned} \tag{4-38}$$

Man erkennt, wie das funktionale Vakuum, wenn es nur von rechts angewandt wird, auf $\Lambda\mathcal{V}_D$ projeziert, während es beidseitig angewandt auf $D$ projeziert.

Diese Projektoreigenschaften weisen $|0>_F$ als primitives idempotentes Element aus. Man darf hier nicht vergessen, daß $|0>_F \in \Lambda\mathcal{V}_D$ und damit ein Algebraelement ist, auch wenn es hier aus Konventionsgründen wie ein Zustand geschrieben wird. Mit Crumeyrolle [Crum 90] erhalten wir für ein primitives idempotentes Element $f$ einer Cliffordalgebra die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$\begin{array}{rl} i) & f \ \text{ist primitives idempotentes Element} \\ ii) & CLf = I_f \ \text{ist ein min. Linksideal} \\ iii) & fCLf \in \mathbf{K}f. \end{array} \qquad (4\text{-}39)$$

Schreiben wir der physikalischen Nomenklatur entsprechend
$|0>_F$ als $|0>_F<0|$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (|0>_F<0|)^2 &= |0>_F<0| \\ X(|0>_F<0|) &= (X|0>_F)_F<0| = |a>_F<0| \\ |0>_F<0|X|0>_F<0| &= <X>|0>_F<0|, \end{aligned} \qquad (4\text{-}40)$$

genau die Eigenschaften des Crumeyrolleschen Theorems, wenn $_F<0|X|0>_F$ nach $D$ abbildet. Dies hatten wir per Konstruktion gefordert.

Nun müssen alle primitiven idempotenten Elemente der Algebra $CL(H,\delta)$ gefunden werden. Sie klassifizieren dann die möglichen Einbettungen der Graßmannalgebra in die Cliffordalgebra, dies soll hier nicht weiter verfolgt werden. Es gibt keinen konstruktiven Zugang zu solchen Idempotenten und schon für niedrige Dimensionen $(5,6,7,\ldots)$ erhält man unübersichtliche Situationen. Weit wichtiger aber ist, daß wir nicht erwarten dürfen, daß die Cliffordalgebra mit der quadratischen Form $Q_\delta$ und ihrer polaren Bilinearform $B_p = \delta$ die physikalische Situation beschreibt. Ein Übergang zu anderen Signaturen oder gar zu nichtsymmetrischen Bilinearformen ist aber *innerhalb* der Cliffordalgebra nicht möglich.

Wir definieren nun *zwei* Sätze von Generatoren:

$$\begin{aligned} e_I &:= \partial_I + j_I \\ \bar{e}_I &:= \partial_I - j_I. \end{aligned} \qquad (4\text{-}41)$$

Es ist offensichtlich, daß diese Gleichungen nach $\partial_I$ und $j_I$ aufgelöst werden können,

$$\begin{aligned} \partial_I &= \frac{1}{2}(e_I + \bar{e}_I) \\ j_I &= \frac{1}{2}(e_I - \bar{e}_I). \end{aligned} \qquad (4\text{-}42)$$

Wir haben die Kommutatorrelationen der Generatoren $e_I$ schon in (4-33) angeführt. Für die $\bar{e}_I$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{e}_I\bar{e}_K + \bar{e}_K\bar{e}_I &= -2\delta_{IK} \\ \bar{e}_I e_K + e_K\bar{e}_I &= 0. \end{aligned} \qquad (4\text{-}43)$$

Diese Generatoren erzeugen eine antieuklidische Cliffordalgebra $CL(H,-\delta)$. Es gilt nun das Theorem (Chevalley) [CHEV 54, BUDI 88]:

*Ist $g$ das Innenprodukt in $\mathcal{V}$, so ist $-g$ das „oppositionelle“ Innenprodukt in $\mathcal{V}$, $u,v \in \mathcal{V}$*

$$(-g)(u,v) \quad = \quad -g(u,v), \tag{4-44}$$

*bezüglich der Injektion (Cliffordabbildung)*

$$\iota^{op} \quad : \quad \mathcal{V} \rightarrow CL^{op}(\mathcal{V},g). \tag{4-45}$$

Es gibt einen natürlichen, graderhaltenden (homogenen) Isomorphismus $\varphi$ der Cliffordalgebren $CL(H,+g)$ und $CL(H,-g)$. Dieser Isomorphismus bildet $CL(H,-g)$ auf $CL^{op}(H,g)$ ab,

$$\varphi \quad : \quad CL(H,-g) \rightarrow CL^{op}(H,g). \tag{4-46}$$

$CL^{op}$ ist die Cliffordabbildung mit vertauschtem Produkt. Die beiden Algebren $CL(H,g)$ und $CL^{op}(H,g)$ sind isomorph als graduierte Algebren mit Eins.

Die Transformation $^-$ ist eine Involution der Periode 2 auf $CL(H,\delta)$ mit

$$\begin{aligned} ^- \quad : \quad & CL(H,\delta) \rightarrow CL(H,\delta) \\ & (e_I)^- = \bar{e}_I \\ & (\bar{e}_I)^- = e_I. \end{aligned} \tag{4-47}$$

Der von $^-$ stabilisierte Unterraum ist $\Lambda\mathcal{V}^*_D$, der orthogonale Unterraum dazu ist $\Lambda\mathcal{V}_D$,

$$\begin{aligned} X^- = \;\; X \quad &\Rightarrow \quad X \in \Lambda\mathcal{V}^*_D \\ X^- = -X \quad &\Rightarrow \quad X \in \Lambda\mathcal{V}_D. \end{aligned} \tag{4-48}$$

Eine analoge Situation erhält man im Fall der komplexen Zahlen. Definiert man dort $^-$ als Vertauschung $\bar{\mathbf{1}} = i$, $\bar{i} = \mathbf{1}$, so sind die Winkelhalbierenden im $\{\mathbf{1}, i\}$ Koordinatensystem gerade die obigen Räume,

$$\begin{aligned} (a+ia)^- \quad &= \quad (a+ia) \\ (a-ia)^- \quad &= \quad -(a-ia). \end{aligned} \tag{4-49}$$

Die Winkelhalbierenden $(a \pm ia)$ werden durch die Konjugation $^-$ (anti) stabilisiert. So ist $*_\theta$ mit $\theta = \pi/4$ wie im Beispiel Seite 78. Daß wir mit den $j_I$ den „imaginären“ Raum aufspannen, liegt an der unglücklichen Wahl des Vorzeichens in (4-41). Dies ist im Weiteren unerheblich, wird aber beibehalten, um an die Ergebnisse der Quantenfeldtheorie Anschluß zu erhalten.

Wir halten fest, daß die Elemente der Cliffordalgebra auf die Graßmannalgebra als Endomorphismen wirken. So besitzen wir zwei Möglichkeiten, die Graßmannalgebra in $CL(H,\delta)$ wiederzufinden. Mit der Auffassung, daß $|0>_F$ ein primitives idempotentes Element ist, wird die Graßmannalgebra quasi als Spinormodul behandelt. Die Reversion erzeugt aus Linksmodulen Rechtmodule und verbindet damit Links– und Rechtsmultiplikation. Die erläuterte Konstruktion ist schwierig auszuführen. Faßt man die Graßmannalgebra als konjugationsstabilen (antistabilen) Unterraum auf, so wird hier die Involution (Hauptautomorphismus) benutzt, um die Zustände in der Cliffordalgebra auf $\Lambda\mathcal{V}_D$ zu reduzieren. Diese Konstruktion ist explizit möglich, man erhält aber keine Aussage über Linkszustände.

In beiden Fällen ist klar, daß ein Funktionalzustand $|G(j,a)>_F$ als Element der Graßmannalgebra innerhalb der Cliffordalgebra gebildet werden kann. Wir werden im folgenden das zweite Bild untersuchen.

**Bemerkung:** Mit dem Chevalley–Theorem haben wir bemerkt, daß auch der Zugang mit der Involution $^-$ auf die Reversion zurückgeht.

### 4-2.3 Der Feldoperator im algebraischen Bild

Um verstehen zu können, wie eine Operatorgleichung im algebraischen Bild ausgedrückt werden kann, müssen wir untersuchen, wie der Feldoperator übersetzt wird.

Wir benutzen die Nomenklatur des Spinorfeldmodells von Stumpf wie in [Stum 94]. Das Spinorfeld $\psi_I$ beschreibt nicht nur den gewöhnlichen Spinor, sondern auch den ladungskonjugierten Spinor,

$$\psi_I \equiv \psi_{\Lambda\alpha}(x) \quad = \quad \begin{cases} \psi_\alpha(x) & \Lambda = 1 \\ \psi^c_\alpha(x) = (C\gamma^0)_{\alpha\beta}\psi^*_\beta(x) & \Lambda = 2 \end{cases} . \tag{4-50}$$

Der kanonische einzeitige Antikommutator ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \{\psi_I, \psi'_I\}_+ &= A_{II'} \\ A_{II'} &= (C\gamma^0)_{\alpha\alpha'}\sigma_{\Lambda\Lambda'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \end{aligned} \tag{4-51}$$

Wir betrachten die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad = \quad gV[\psi] = g\sum_h \psi^c M^h \psi M_h \psi. \tag{4-52}$$

Lösen wir nach der Zeitableitung auf und benutzen die sehr kompakte Indexschreibweise $I = \{\Lambda, \alpha, x\}$, so ergibt sich

$$i\partial_0\psi_I \quad = \quad D_{II'}\psi_{I'} + gV_I^{I'I''I'''}\psi_{I'}\psi_{I''}\psi_{I'''}. \tag{4-53}$$

Dabei ist $D_{II'}$ eine Abkürzung für den kinetischen Term und $V_I^{I'I''I'''}$ die Vertexfunktion im Spin ($\alpha$ Indizes) und Superspin ($\Lambda$ Indizes). Die genaue Form spielt für unsere Überlegungen keine Rolle. Der Isospin könnte in analoger Weise inkorporiert und im Multiindex untergebracht werden. Die formale Struktur ändert sich dadurch nicht. Die obige Gleichung entspricht somit in etwa Elektronen mit lokaler Selbstwechselwirkung. Solche Modelle treten in der Festkörpertheorie und in der Hochenergiephysik auf.

Um nun zu einer funktionalen Formulierung zu gelangen, betrachtet man die Zeitableitung einer $\tau^n$–Funktion,

$$i\partial_0\tau^n(I_1,\ldots,I_n|a) \quad = \quad i\partial_0 < 0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})|a > . \tag{4-54}$$

Unter Berücksichtigung der Antisymmetrie und der Bewegungsgleichung (4-53) kann die rechte Seite von (4-54) wieder nach $\tau^n$–Funktionen zerlegt werden. Multipliziert man dann $n$ funktionale Quellen an die Terme, so besitzen die Kopplungsterme eine von $n$ abweichende Anzahl von Indizes. Durch das Einführen zusätzlicher Quellen und funktionaler Ableitungen kann $\tau^n j^n$ ausgeklammert werden. Summiert man diese Terme zu einem Funktionalzustand auf, so erhält man

$$i\partial_0 |G(j,a)>_F \;=\; H[j,\partial]|G(j,a)>_F, \tag{4-55}$$

eine funktionale Schrödingergleichung. Der Prozeß ist langwierig und verschleiert die Verbindung von Bewegungsgleichung und Funktionalgleichung.

Wir wollen diese Gleichung nun direkt vom Hamiltonoperator ausgehend ableiten und dabei tiefere Einblicke in die algebraische Struktur gewinnen. Aus der Bewegungsgleichung (4-53) und mit dem Antikommutator (4-51) erhalten wir den Hamiltonoperator

$$H[\psi] \;=\; \frac{1}{2}A_{I_1I_3}D_{I_3I_2}\psi_{I_1}\psi_{I_2} + \frac{g}{4}A_{I_1I_5}V_{I_5}^{I_2I_3I_4}\psi_{I_1}\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4}. \tag{4-56}$$

Der Beweis erfolgt mit (4-51) durch Nachrechnen von

$$[\psi_I, H[\psi]]_- \;=\; D_{II_1}\psi_{I_1} + gV_I^{I_2I_3I_4}\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4}. \tag{4-57}$$

Dabei benutzt man die Antisymmetrie von $D_{I_1I_3}A_{I_3I_2}$ und $A_{I_1I_5}V_{I_5}^{I_2I_3I_4}$, sowie die Beziehung

$$A_{I_1I_3}A_{I_3I_2} \;=\; \delta_{I_1I_2}. \tag{4-58}$$

Die Bewegungsgleichung schreibt sich dann für Übergangsmatrixelemente wie folgt:

$$\begin{aligned} i\partial_0 <0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})|a> &= E_{0a} <0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})|a> \\ &= <0|\Big[\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n}), H[\psi]\Big]_-|a>. \end{aligned} \tag{4-59}$$

Die linke Seite läßt sich sofort zum Funktionalzustand aufsummieren, während die rechte Seite ungeordnete Monome enthält. Wir müssen Matrixelemente der Form

$$\begin{aligned} &<0|\psi_{J_1}\ldots\psi_{J_m}\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})|a> \\ &<0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})\psi_{J_1}\ldots\psi_{J_m}|a> \end{aligned} \tag{4-60}$$

aus dem Funktional $|G(j,a)>_F$ herausprojezieren. Die bemerkenswerteste Tatsache besteht aber darin, daß durch den Kommutator mit $H$ nichtantisymmetrisierte Produkte von Feldoperatoren rechts und links von dem antisymmetrisierten Block zu stehen kommen. Führen wir die Funktionalzustände

$$\begin{aligned} |_{J_1\ldots J_m}G(j,a)>_F &= \sum_{\substack{\rho\subset\mathcal{I} \\ |\rho|=n}} <0|\psi_{J_1}\ldots\psi_{J_m}\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})|a> j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F \\ |G(j,a)_{J_1\ldots J_m}>_F &= \sum_{\substack{\rho\subset\mathcal{I} \\ |\rho|=n}} <0|\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})\psi_{J_1}\ldots\psi_{J_m}|a> j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F \end{aligned} \tag{4-61}$$

ein, so hat Pfister [Pfis 87] die Identität

$$
\begin{aligned}
|_{J_1} G(j,a) >_F &= \sum_{\substack{\rho \subset \mathcal{I} \\ |\rho|=n}} < 0|\psi_{J_1} \mathcal{A}(\psi_{I_1} \dots \psi_{I_n}|a > j_{I_1} \dots j_{I_n}|0 >_F \\
&= \Big(\frac{1}{i}\partial_{J_1} + \frac{i}{2} A_{J_1 J_1'} j_{J_1'}\Big)|G(j,a) >_F \qquad (4\text{-}62)
\end{aligned}
$$

erhalten. Die allgemeinen Ausdrücke für Links– und Rechtsmultiplikation wurden in [Stum 93] und [Stum 94] angegeben. Die Links– und Rechtsmultiplikationen wurden in [Faus 95c] und [Stum 96] mit Erfolg verwendet. Wir erhalten die beiden Identitäten

$$
\begin{aligned}
|_{J_1 \dots J_m} G(j,a) >_F &= \prod_{k=1,>}^{m} (\frac{1}{i}\partial_{I_k} + \frac{i}{2} A_{J_k J_k'} j_{J_k'})|G(j,a) >_F \\
|G(j,a)_{J_1 \dots J_m} >_F &= \prod_{k=1,>}^{m} (\frac{1}{i}\partial_{I_k} - \frac{i}{2} A_{J_k J_k'} j_{J_k'})|G(j,a) >_F , \qquad (4\text{-}63)
\end{aligned}
$$

wobei $>$ die Ordnung der Faktoren bezüglich des Index $k$ angibt. Die $J_1 \dots J_m$ im Funktionalzustand sind umgekehrt geordnet zu den $(\partial + AJ)_{J_m} \dots (\partial + Aj)_{J_1}$.

Mit den Identitäten (4-63) kann die Energieeigenwertgleichung (4-59) in die funktionale Sprache übersetzt werden. Wegen des Kommutators ist

$$
\begin{aligned}
i\partial_0|G(j,a) >_F &= E_{0a}|G(j,a) >_F \\
&= (H[\partial - Aj] - H[\partial + Aj])|G(j,a) >_F . \qquad (4\text{-}64)
\end{aligned}
$$

Um $H[j,\partial]$ zu erhalten, betrachten wir die zwei Terme der Bewegungsgleichung getrennt. Für den $D$–Term des Hamiltonoperators (4-103) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
T_1[\psi] &= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \psi_{I_1} \psi_{I_2} \\
&= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \psi_{I_1} \wedge \psi_{I_2}. \qquad (4\text{-}65)
\end{aligned}
$$

Dieser Term wird in die funktionale Sprache übersetzt als

$$
\begin{aligned}
T_1[j,\partial] &= T_1[\partial + Aj] - T_1[\partial - Aj] \\
&= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \Big( \\
&\quad (\frac{1}{i}\partial_{I_2} + \frac{i}{2} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'})(\frac{1}{i}\partial_{I_1} + \frac{i}{2} A_{I_1 I_1'} j_{I_1'}) \\
&\quad -(\frac{1}{i}\partial_{I_2} - \frac{i}{2} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'})(\frac{1}{i}\partial_{I_1} - \frac{i}{2} A_{I_1 I_1'} j_{I_1'})\Big) \\
&= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \Big( \\
&\quad + \frac{1}{i^2}\{\partial_{I_2}, \partial_{I_1}\}_+ + \frac{i^2}{4} A_{I_2 I_2'} A_{I_1 I_1'} \{j_{I_2'}, j_{I_1'}\}_+ \\
&\quad + 4\frac{i}{2i} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} \partial_{I_1}\Big). \qquad (4\text{-}66)
\end{aligned}
$$

Jetzt ergeben aufgrund der Vertauschungsrelationen für die $j$ und $\partial$ die ersten beiden Terme Null. Für den verbleibenden Term benutzen wir die Antisymmetrie von $AD$ und die Eigenschaft (4-58) des Antikommutators $A$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_1[j,\partial] &= -\frac{1}{2} A_{I_2 I_3} D_{I_3 I_1} 2 A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} \partial_{I_1} \\ &= -D_{I_2' I_1} j_{I_2'} \partial_{I_1} \\ &= -D_{I_1 I_2} j_{I_1} \partial_{I_2}. \end{aligned} \tag{4-67}$$

Der Term $T_2$ ist erheblich aufwendiger. Wir erhalten aus (4-56)

$$\begin{aligned} T_2[\psi] &= \frac{g}{4} A_{I_1 I_5} V_{I_5}^{I_2 I_3 I_4} \psi_{I_1} \psi_{I_2} \psi_{I_3} \psi_{I_4} \\ &= \frac{g}{4} A_{I_1 I_5} V_{I_5}^{I_2 I_3 I_4} \psi_{I_1} \wedge \psi_{I_2} \wedge \psi_{I_3} \wedge \psi_{I_4}. \end{aligned} \tag{4-68}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2[j,\partial] &= T_2[\partial + Aj] - T_2[\partial - Aj] \\ &= \frac{g}{4} A_{I_1 I_5} V_{I_5}^{I_2 I_3 I_4} \Big\{ \times \\ &\quad \times (\frac{1}{i}\partial_{I_4} + \frac{i}{2} A_{I_4 I_4'} j_{I_4'})(\frac{1}{i}\partial_{I_3} + \frac{i}{2} A_{I_3 I_3'} j_{I_3'}) \times \\ &\quad \times (\frac{1}{i}\partial_{I_2} + \frac{i}{2} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'})(\frac{1}{i}\partial_{I_1} + \frac{i}{2} A_{I_1 I_1'} j_{I_1'}) \\ &\quad - (\frac{1}{i}\partial_{I_4} - \frac{i}{2} A_{I_4 I_4'} j_{I_4'})(\frac{1}{i}\partial_{I_3} - \frac{i}{2} A_{I_3 I_3'} j_{I_3'}) \times \\ &\quad \times (\frac{1}{i}\partial_{I_2} - \frac{i}{2} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'})(\frac{1}{i}\partial_{I_1} - \frac{i}{2} A_{I_1 I_1'} j_{I_1'}) \Big\}. \end{aligned} \tag{4-69}$$

Nun ist $T[j,\partial]$ eine gerade Funktion der „Variablen“ $j$ und $\partial$. Damit heben sich in der Differenz alle Terme mit geradzahlig vielen $j$ oder $\partial$ Anteilen weg. Die Antisymmetrie der Vertexfunktion $AV$ in $I_1 I_2 I_3 I_4$ verhindert das Auftreten *neuer* Antikommutatorterme. Damit kann das Binomialtheorem angewandt werden, um Vorfaktoren zu bestimmen. Das jeweilige Vorzeichen ergibt sich aus dem entsprechenden unvertauschten Term. Da sich immer zwei identische Terme addieren, erhält man zusätzlich einen Faktor 2. Insgesamt ergibt sich dann

$$\begin{aligned} T_2[j,\partial] &= \frac{g}{2} A_{I_1 I_5} V_{I_5}^{I_2 I_3 I_4} \Big\{ \\ &\quad \frac{4!}{3!} \frac{i}{2i^3} A_{I_4 I_4'} j_{I_4'} \partial_{I_3} \partial_{I_2} \partial_{I_1} \\ &\quad + \frac{4!}{3!} \frac{i^3}{2^3 i} A_{I_4 I_4'} j_{I_4'} A_{I_3 I_3'} j_{I_3'} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} \partial_{I_1} \Big\} \\ &= g A_{I_4 I_5} V_{I_5}^{I_1 I_2 I_3} A_{I_4 I_4'} j_{I_4'} \partial_{I_3} \partial_{I_2} \partial_{I_1} \\ &\quad + \frac{g}{4} A_{I_4 I_5} V_{I_5}^{I_1 I_2 I_3} A_{I_4 I_4'} j_{I_4'} A_{I_3 I_3'} j_{I_3'} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} \partial_{I_1} \\ &= g j_{I_1} V_{I_1}^{I_2 I_3 I_4} \Big( \partial_{I_4} \partial_{I_3} \partial_{I_2} + \frac{1}{4} A_{I_4 I_4'} A_{I_3 I_3'} j_{I_4'} j_{I_3'} \partial_{I_2} \Big). \end{aligned} \tag{4-70}$$

Der funktionale Hamiltonoperator zu (4-56) ergibt sich dann aus $T_1 + T_2$ und wir erhalten die zum gewöhnlichen Keilprodukt gehörige funktionale Energieeigenwertgleichung

$$\begin{aligned} E_{a0}|G(j,a)>_F &= \Big\{ D_{I_1 I_2} j_{I_1} \partial_{I_2} \\ &+ g j_{I_1} V_{I_1}^{I_2 I_3 I_4} \Big( \partial_{I_3} \partial_{I_2} \partial_{I_1} + \frac{1}{4} A_{I_4 I_4'} A_{I_3 I_3'} j_{I_4'} j_{I_3'} \partial_{I_2} \Big) \Big\} |G(j,a)>_F \end{aligned} \tag{4-71}$$

in Übereinstimmung zu [Stum 94](3.98).

Die Ersetzung

$$\psi_I^{L/R} = \frac{1}{i} \partial_I \pm \frac{i}{2} A_{II'} j_{I'} \tag{4-72}$$

legt nahe, dies als Chevalley–Deformation aufzufassen. Es ergeben sich für die Antikommutatoren

$$\begin{aligned} \{\psi_I^L, \psi_K^L\}_+ &= -\{\partial_I, \partial_K\}_+ - \frac{1}{4} A_{II'} A_{KK'} \{j_I, j_K\}_+ \\ &\quad + \frac{1}{2} A_{II'} \{\partial_I, j_K\}_+ + \frac{1}{2} A_{KK'} \{j_I, \partial_K\}_+ \\ &= A_{IK} \\ \{\psi_I^R, \psi_K^R\}_+ &= -\{\partial_I, \partial_K\}_+ - \frac{1}{4} A_{II'} A_{KK'} \{j_I, j_K\}_+ \\ &\quad - \frac{1}{2} A_{II'} \{\partial_I, j_K\}_+ - \frac{1}{2} A_{KK'} \{j_I, \partial_K\}_+ \\ &= -A_{IK} \\ \{\psi_I^R, \psi_K^L\}_+ &= 0. \end{aligned} \tag{4-73}$$

Dieses Ergebnis ist im Hinblick auf das Chevalleysche Theorem (Seite 81,111) leicht verständlich. Die Feldoperatoren $\psi^L$, $\psi^R$ müssen als Links– bzw. Rechtsmultiplikation innerhalb des Matrixelementes aufgefaßt werden.

Nun ist

$$\psi_I^L = \frac{1}{i} \partial_I + \frac{i}{2} A_{II'} j_{I'} \tag{4-74}$$

das funktionale Abbild dieser Linksmultiplikation. Die Antikommutatorrelationen der Feldoperatoren spiegeln sich im Clifford–algebraischen Bild wieder. Der Feld*operator* kann und muß als Endomorphismus des Graßmannfunktionals aufgefaßt werden. Die $\psi^R$ Ersetzung liefert wegen des negativen Vorzeichens der Metrik $A_{II'}$ in der Cliffordalgebra die oppositionelle Wirkung. Formal ist dies

$$\begin{aligned} \psi_I^L &= L_{\psi_I} \\ \psi_I^R &= R_{\psi_I} \end{aligned} \tag{4-75}$$

und

$$\begin{aligned} L_{\psi_I} \mathcal{A}(\psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}) &= \psi_I \mathcal{A}(\psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}) \\ R_{\psi_I} \mathcal{A}(\psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}) &= \mathcal{A}(\psi_{I_1} \ldots \psi_{I_n}) \psi_I. \end{aligned} \tag{4-76}$$

In jeder assoziativen Algebra kommutieren Links– und Rechtsmultiplikation [Scha 66]. Dieser Tatsache wird durch

$$\{\psi_I^R, \psi_K^L\}_+ \quad = \quad 0 \tag{4-77}$$

Rechnung getragen. Es ist

$$\begin{aligned}\Big(L_{\psi_I} R_{\psi_K} + R_{\psi_K} L_{\psi_I}\Big)\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n}) \quad &= \quad \psi_I(\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})\psi_k) \\ &\quad\quad +(\psi_I\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n}))\psi_k \\ &= \quad 0,\end{aligned} \tag{4-78}$$

da modulo Antisymmetrie gerechnet wird. Das Operatorprodukt ist in diesem Fall antiassoziativ.

**Bemerkung:** Es ist ohne weiteres möglich, alle Überlegungen auf Operatorniveau zu wiederholen und Funktionalzustände der Form

$$|\hat{G}(j,a)>_F \quad = \quad \sum \frac{i^n}{n!}\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F \tag{4-79}$$

zu bilden. Bis auf die Tatsache, daß nun die dynamische Gleichung gelöst werden muß, da keine Energieeigenwerte mehr gebildet werden können, ändert sich nichts an der Übersetzung in den Funktionalraum. Bildet man *nachträglich* die Erwartungswerte $< 0|\ldots|a>$, so erhält man alles wie oben angeführt.

Es zeigt sich hier ganz deutlich, daß der Feldoperator ein Element der Endomorphismenalgebra $CL(H,\delta)$ der Graßmannalgebra $\Lambda\mathcal{V}_D$ ist. Um Feldgleichungen funktional zu formulieren, benötigen wir zusätzlich die oppositionelle Algebra $CL^{op}$, die mittels der $\psi^R$ gebildet werden kann. Die Transformation $Aj \to -Aj$ ist eine Abbildung von $CL \to CL^{op}$ und damit mit der Reversion verwandt. Der Antikommutator übernimmt die Rolle der Metrik. Funktionalzustand und Feldoperator sind somit Elemente aus $CL(H,\delta)$. Wir untersuchen zuerst den Propagator und verweisen für weitere Interpretationsversuche auf Abschnitt 4-2.5.

### 4-2.4 Der Propagator im algebraischen Bild

Bis hierher haben wir uns nur mit dem Antikommutator und damit automatisch mit dem symmetrischen Teil der Kontraktion beschäftigt. Wie wir in Kapitel 3-2.3 gesehen haben, existiert eine ganze Klasse von Cliffordalgebren mit zugehöriger Bilinearform $B$. Sie ist durch den symmetrischen Teil $A$ bestimmt. Somit besitzen alle Cliffordalgebren einer Klasse dieselbe polare Bilinearform. Wir hatten ausführlich untersucht, wie die Chevalley–Deformation einer solchen Algebra aussieht, was zu folgender Überlegung führt: wenn wir die Kontraktion $\lrcorner_B$ in der Basis der $j$ und ihrer Duale $\partial$ angeben, so erhalten wir für die Generatoren der Cliffordalgebra $CL(H,B)$

$$\hat{\psi}_I^L \quad = \quad \frac{1}{i}\partial_I + \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'}, \tag{4-80}$$

also die Ersetzung für die Linksmultiplikation. Wenn wir die oppositionelle Algebra durch die negative *Metrik* ersetzen, so ändert sich das Vorzeichen von $A$, nicht jedoch das Vorzeichen von $F$. Offensichtlich entspricht dies einer anderen Art der Konjugation als $\bar{j} = -j$. Wir erhalten

$$\hat{\psi}_I^R = \frac{1}{i}\partial_I - \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'}. \tag{4-81}$$

Da die Symbole $j, \partial$ und $A$ schon eine Interpretation besitzen, stellt sich noch die Frage, was der antisymmetrische Anteil $F$ der Bilinearform bedeutet.

In den Antikommutatoren macht sich $F$ nicht bemerkbar, wir erhalten dieselben Antikommutatoren

$$\begin{aligned}
\{\hat{\psi}_I^L, \hat{\psi}_K^L\}_+ &= A_{IK} \\
\{\hat{\psi}_I^R, \hat{\psi}_K^R\}_+ &= -A_{IK} \\
\{\hat{\psi}_I^L, \hat{\psi}_K^R\}_+ &= 0,
\end{aligned} \tag{4-82}$$

wie schon ohne den antisymmetrischen Anteil in (4-73). In Kapitel 3 wurde die Verknüpfung der Kontraktion und damit des graderniedrigenden Antikommutators mit dem symmetrischen Teil von $B$ dargestellt, während wir hier den antisymmetrischen Teil $F$ mit dem Keilprodukt in Verbindung bringen. Dies freilich nur, wenn wir verlangen, daß das Keilprodukt homogen unter der Reversion transformiert wird.

Betrachten wir also den Kommutator der Feldoperatoren, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
[\hat{\psi}_I^L, \hat{\psi}_K^L]_- &= \Big\{(\frac{1}{i}\partial_I + \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + F_{II'}j_{I'}) \times \\
&\quad \times(\frac{1}{i}\partial_K + \frac{i}{2}A_{KK'}j_{K'} + F_{KK'}j_{KI'}) \\
&\quad -(\frac{1}{i}\partial_K + \frac{i}{2}A_{KK'}j_{K'} + F_{KK'}j_{KI'}) \times \\
&\quad \times(\frac{1}{i}\partial_I + \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + F_{II'}j_{I'})\Big\} \\
&= \ldots \\
&= 2F_{IK} + 2\hat{\psi}_I^L \wedge \hat{\psi}_K^L.
\end{aligned} \tag{4-83}$$

Bilden wir den Vakuumerwartungswert [Faus 95a]

$$\begin{aligned}
< 0|[\hat{\psi}_I^L, \hat{\psi}_K^L]_-|0 > &= 2F_{IK} + 2 < 0|\hat{\psi}_I^L \wedge \hat{\psi}_K^L|0 > \\
&= 2F_{IK} + 2 < 0|\mathcal{A}(\hat{\psi}_I^L\hat{\psi}_K^L)|0 > \\
&= 2F_{IK} + 2\tau^2(IK|0),
\end{aligned} \tag{4-84}$$

so sehen wir, daß $2F_{IK}$ mit dem Propagator der Theorie identifiziert werden muß. Diese Sichtweise wird sich bei der Diskussion der Vertexregularisierung und der Untersuchung der Normalordnung in Abschnitt 4-3 bestätigen.

### 4-2.5 Interpretation der Feldquantisierung

Nach diesen Überlegungen ist es möglich geworden, eine neue geometrische Interpretation der Feldquantisierung anzugeben. Wir wollen hier noch einmal betonen, daß unser Standpunkt nicht die Abschaffung der teilweise sehr erfolgreichen quantenfeldtheoretischen Methoden zum Ziel hat. Die geometrische Sichtweise soll durch mathematisch fundierte und ausgefeilte Konzepte ein integrales

Verständnis der heuristischen Prinzipien der Quantenfeldtheorie herbeiführen. Gemeint sind kanonische Quantisierung, Normalordnung, Wahrscheinlichkeitsinterpretation etc. Wir erwarten zudem, daß die hier ausgeführten verfeinerten Methoden der algebraischen Analyse in der Quantenfeldtheorie zu neuen Ergebnissen hinleiten, wenn sie konsequent angewandt werden. Ein erster die Anwendung betonender Schritt, allerdings ohne explizite Ausformulierung der algebraischen Methoden, stellt das Buch von Stumpf und Borne [Stum 94] dar. In dieser Arbeit steht jedoch das konzeptionelle Verständnis im Vordergrund.

Wir können nun im folgenden die neue und der geometrischen Algebra verpflichtete Sicht der fermionischen Feldquantisierung formulieren.

Die Quantenfeldtheorie der Fermionen wird durch Funktionalzustände beschrieben, die formale Elemente einer unendlichdimensionalen Graßmannalgebra darstellen. Diese Größen werden im doppelten Wortsinn geometrisch verstanden. Die Graduierung zerspaltet die Elemente der Graßmannalgebra (Funktionalzustände) in eine direkte Summe homogener Elemente bestimmten Grades. Der Grundraum $\mathcal{V}_D$ wird durch die auf die $j$–Quellen aufgespannten Einteilchenmatrixelemente gebildet. Der in thermodynamischen Hierarchien unverständliche [Stum 76] Normierungsfaktor $1/n!$ ergibt sich hier aus der algebraischen Konstruktion.

Die Operatoren $\psi_I$ beschreiben Endomorphismen auf solchen Funktionalzuständen. Die Endomorphismenalgebra der Graßmannalgebra zu $\mathcal{V}_D$ ist die Cliffordalgebra $CL(H,\delta)$ über dem selbstdualen reflexiven Raum $H = \mathcal{V}_D^* \oplus \mathcal{V}_D$ und der euklidischen, bzw. Hermiteschen Metrik $\delta : H \times H \to D$.

Die Quantisierung

$$\{\psi_I^L, \psi_K^L\}_+ \quad = \quad A_{IK} \tag{4-85}$$

legt einen Algebrahomomorphismus $\varphi$ fest, der nicht per se homogen ist,

$$\varphi \quad : \quad CL(H,\delta) \to CL(H,A). \tag{4-86}$$

$\varphi$ *wählt* eine der möglichen Geometrisierungen, die durch die algebraische Äquivalenz erreicht werden können. $\varphi$ legt somit den geometrischen Gehalt der Theorie fest. Dabei werden z.B. Signaturen und Invarianzgruppen festgelegt.

Nach dieser Wahl ist es nicht mehr sinnvoll, inhomogene (supersymmetrische) Algebrahomomorphismen als Transformationen zuzulassen. Diese würden den geometrischen Inhalt der Theorie zerstören. Die Feldtheorie besitzt durch die Graduierung per Konstruktion eine supersymmetrische Struktur, die durch die *Wahl* der Quantisierung berücksichtigt wurde.

Die Quantisierung stellt eine Metrisierung der Endomorphismenalgebra von $\Lambda\mathcal{V}_D$ dar. Die Graßmannalgebra selbst besitzt *keine* metrische Struktur!

Die Graßmannalgebra $\Lambda\mathcal{V}_D$ der Funktionalzustände ist eine Unteralgebra der Cliffordalgebra $CL(H,\delta)$ bzw. $CL(H,A)$. Obwohl $\Lambda\mathcal{V}_D$ universell ist, d.h. bis auf Isomorphien eindeutig, haben wir bemerkt, daß isomorphe Strukturen in einer allgemeineren Struktur unterschiedlich eingebettet werden können. Dies beschreibt die Injektion

$$\iota \quad : \quad \Lambda\mathcal{V}_D \to CL(H,A). \tag{4-87}$$

Umgekehrt kann die Substruktur durch eine Invarianz charakterisiert werden. Wir hatten gesehen, daß durch eine geeignete Konjugation $\Lambda\mathcal{V}_D$ als (anti)konjugationsstabiler linearer Unterraum von $CL(H,A)$ erhalten werden kann,

$$\Lambda\mathcal{V}_D \;\; = \;\; \{X|X^{-} = -X\}, \tag{4-88}$$

mit $^{-}$ wie in (1-60,4-47).

In der Feldtheorie wird diese Konjugation durch die *Wahl*, oder wenn möglich durch die selbstkonsistente Berechnung der *Propagators* getroffen. Dies entspricht der Auszeichnung eines speziellen Keilproduktes und damit der Wahl der speziellen Graßmannalgebra in $CL(H,A)$.

Die Algebren $CL(H,B)$ mit $B = A + F$ bilden für festes $A$ und beliebiges $F$ eine Äquivalenzklasse von Cliffordalgebren unter dem *geometrischen* Äquivalenzbegriff, d.h. $B$ und $A$ beschreiben für beliebige $F$ dieselbe quadratische Form. Da die Cliffordalgebra die geometrische Algebra zu einer quadratischen Form ist, garantiert uns die Universalität, daß der Übergang $A \leftrightarrow B = A + F$, auch wenn $det(B) = 0$ wird, für ein beliebiges $F$ ein Isomorphismus von Cliffordalgebren ist.

Da die Graßmannalgebra eine Algebra und nicht nur ein linearer Raum oder Linksmodul ist, können wir nicht nur die Linkswirkung, sondern auch die Rechtswirkung betrachten,

$$\begin{aligned} L_a(x) &= ax \\ R_a(x) &= xa. \end{aligned} \tag{4-89}$$

Das funktionale Vakuum verschleiert die Rechtswirkung durch den suggestiven Zug, einen Zustand zu beschreiben. Mit Hilfe der Operatoren $L_a$ und $R_a$ können Links– und Rechtswirkung als von links wirkende Operatoren geschrieben werden. Der formale Zustandscharakter wird so erhalten. Mit einer Quantisierung $A$ und einem Propagator $F$ übersetzt sich die Links– und Rechtswirkung der Feldoperatoren wie folgt in die funktionale oder Clifford–algebraische Formulierung:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_I^L &= \frac{1}{i}\partial_I + \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'} \\ \hat{\psi}_I^R &= \frac{1}{i}\partial_I - \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'}. \end{aligned} \tag{4-90}$$

Das Minuszeichen erhält man durch Anwenden des Chevalleyschen Theorems

$$(\mathcal{V}, -g) \;\; \overset{\gamma}{\longrightarrow} \;\; CL^{op}(\mathcal{V}, g) \tag{4-91}$$

mit der Cliffordabbildung $\gamma$ vom Paar $(\mathcal{V}, -g)$ in die oppositionelle Cliffordalgebra (mit reversiertem Produkt).

So verstanden wurde der Feld*operator* aus einem Vektor eines linearen Raumes durch Anwenden der speziellen Cliffordabbildung $\gamma_B$ gewonnen. Sei $v_{\hat{\psi}_I}$ ein

Element des linearen Raumes $\mathcal{V}_D$ mit Bilinearform $B = A + F$, dann ist

$$\begin{aligned}
\gamma_B &: (\mathcal{V}, B) = (\mathcal{V}, +A + F) \to CL(\mathcal{V}, B) \\
\gamma_B^{op} &: (\mathcal{V}, B^{op}) = (\mathcal{V}, -A + F) \to CL^{op}(\mathcal{V}, B) \\
& v_{\hat{\psi}_I} \to \gamma_B(v_{\hat{\psi}_I}) = \hat{\psi}_I^L = \frac{1}{i}\partial_I + \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'} \\
& v_{\hat{\psi}_I} \to \gamma_B^{op}(v_{\hat{\psi}_I}) = \hat{\psi}_I^R = \frac{1}{i}\partial_I - \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'}
\end{aligned} \tag{4-92}$$

die Injektion in die zugehörige Cliffordalgebra mit Linkswirkung für beide Arten der Produkte.

Bevor wir zusammenfassen, soll am Beispiel der Vertexregularisierung eines nichtlinearen Spinorfeldmodelles gezeigt werden, daß die erläuterte geometrische Sicht zu neuen Erkenntnissen führt, die ohne sie nicht erreicht und verstanden werden können.

## 4-3 Vertexregularisierung im nichtlinearen Spinorfeldmodell

Die Normalordnung spielt in fast allen feldtheoretischen Anwendungen eine Rolle. Das Auswerten der S–Matrix [Dyso 49b, Wick 50, Dyso 52][3], Supraleitungsmodelle [Frad 91] sowie Bindungsrechnungen, erfordert eine Normalordnung [Salp 51, Beth 77, Stum 94]. Oft wird die Normalordnung als Synonym zum Herausziehen bestimmter Korrelationen betrachtet. Die adäquaten reduzierten Größen der Thermodynamik bezeichnet man als Ursellfunktionen [Riec 77]. In der Feldtheorie ist diese Art der Reduzierung nicht möglich, da sie transzendente Funktionen in den Feldoperatoren liefert. Daher werden nur spezielle niedrige Korrelationen betrachtet.

Im Fockraum erzeugt die Normalordnung eine Standardordnung, in der die Erzeuger links und die Vernichter rechts stehen. Dies verleiht ihr den Namen. Im fermionischen Fall ergeben Vertauschungen innerhalb der Normalordnung ein Minuszeichen. Das Normalprodukt wird durch $:\ldots:$ oder $\mathcal{N}(\ldots)$ angezeigt, also

$$\begin{aligned}
:\{a_I^\dagger, a_K\}_+: &= 0 \\
:a_{I_1} a_{I_2}^\dagger a_{I_3}: &= \mathcal{N}(a_{I_1} a_{I_2}^\dagger a_{I_3}) = -a_{I_2}^\dagger a_{I_1} a_{I_3}.
\end{aligned} \tag{4-93}$$

Man sieht, daß ein normalgeordneter Operator bezüglich $|k>, <l|$, $n > k$, $m > l$ den Erwartungswert Null besitzt, wenn mindestens $n$ Vernichter und $m$ Erzeuger in ihm vorkommen. Die Matrixelemente bezüglich den durch die Erzeuger generierten Zuständen mit $|k>$ und $<l|$ ergeben dann

$$\begin{aligned}
|k> &= a_{I_1}^\dagger \ldots a_{I_k}^\dagger |0> \\
<l| &= (|l>)^\dagger \\
<l|\mathcal{O}(n,m)|k> &= <l|(a_{J_1}^\dagger \ldots a_{J_n}^\dagger)(a_{K_1} \ldots a_{K_m})|k> \\
&= 0 \quad \forall l < n,\ k < m.
\end{aligned} \tag{4-94}$$

[3] Siehe dazu die Erläuterungen in [Dyso 72].

In Nicht–Fockräumen kann diese Vernichtungseigenschaft nicht benutzt werden. Die Feldtheorie wird jedoch trotzdem von der Vorstellung beherrscht, daß eine nichtstörungstheoretische Normalordnung benötigt wird.

In der Sprache der Feynmanngraphen resultieren aus solchen Überlegungen topologische Fragen. Man fragt sich etwa, ob ein Graph „einfach“ oder „mehrfach“ zusammenhängend ist. Es muß aber betont werden, daß die obige Interpretation an den Fockraum und an die Störungstheorie gebunden ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt den algebraischen Grund für die Normalordnung anführen. Dies geschieht, ohne das Fockraumkonzept zu bemühen. Ausgangspunkt ist die funktionale Formulierung der nichtstörungstheoretischen Normalordnung im funktionalen Formalismus. Es wird sich zeigen, daß die Normalordnung mit inäquivalenten Darstellungen und der dynamischen Wahl der Darstellung zu tun hat[4].

### 4-3.1 Algebraische Formulierung der Normalordnung

Wir haben in Abschnitt 4-2.2 gesehen, wie die dynamische Gleichung eines quantisierten Spinorfeldes in die funktionale Sprache übersetzt werden kann. Die so erhaltene Funktionalgleichung (4-59,4-71) besitzt als Koeffizienten nichtnormalgeordnete Matrixelemente.

Es gibt nun hinreichende Gründe, für Bindungsrechnungen den freien Propagator zur Normalordnung heranzuziehen [Stum 94]. Dieser Propagator entspricht den Kontraktionen in der S–Matrixtheorie. Man hat durch Herausziehen des freien Propagators quasi den Fockraum gewählt. Es ist zwar nicht einfach, aber möglich, selbstkonsistente Gleichungen für den Propagator zu erhalten. Kann man diese lösen, so hat die dynamische Theorie durch die Lösungen einen Zustand gewählt. Das Selbstkonsistenzproblem kann, da es nichtlinear ist, Phasenübergänge etc. enthalten.

Wir wollen uns hier vorläufig auf den Standpunkt stellen, daß der Propagator ein Parameter der Theorie darstellt.

Um nun die Normalordnung durchzuführen, benutzen wir den funktionalen Formalismus. Eine Untersuchung ohne diese Hilfe wurde in [Faus 95a] durchgeführt und führt mit Hilfe der algebraischen Argumentation ebenfalls zum selben Ergebnis.

Wir haben für das nichtlineare Spinorfeld die Energieeigenwertfunktionalgleichung (4-59) der Form

$$E_{a0}|G(j,a)>_F \quad = \quad H[j,\partial]|G(j,a)>_F \tag{4-95}$$

erhalten. Führt man das neue Funktional $|\mathcal{N}(j,a)>_F$ mit

$$|G(j,a)>_F \quad =: \quad exp(-\frac{1}{2}jFj)|\mathcal{N}(j,a)>_F \tag{4-96}$$

ein, so kann der Exponentialfaktor nach links getauscht und im formalen Sinne durch sein Inverses zum Verschwinden gebracht werden. Dazu benutzt man

$$d_I \quad := \quad \partial_I - F_{II'}j_{I'}$$

[4]Vgl. dazu die Behandlung der Supraleitung in [Stum 94].

$$
\begin{aligned}
H[j,\partial]e^{-\frac{1}{2}jFj} &= e^{-\frac{1}{2}jFj}H[j,d] \\
&= e^{-\frac{1}{2}jFj}\hat{H}[j,\partial].
\end{aligned}
\tag{4-97}
$$

Die normalgeordnete Funktionalgleichung lautet dann

$$
\begin{aligned}
E_{a0}|\mathcal{N}(j,a)>_F &= e^{\frac{1}{2}jFj}H[j,\partial]e^{-\frac{1}{2}jFj}|\mathcal{N}(j,a)>_F \\
&= H[j,d]|\mathcal{N}(j,a)>_F \\
&= \hat{H}[j,\partial]|\mathcal{N}(j,a)>_F\ .
\end{aligned}
\tag{4-98}
$$

$\hat{H}$ ist der normalgeordnete funktionale Hamiltonoperator. Um die Verbindung von $|G(j,a)>_F$ und $|\mathcal{N}(j,a)>_F$ besser zu verstehen, geben wir die niedrigsten Terme der Hierarchie an. Mit (4-8) und

$$
|\mathcal{N}(j,a)>_F \;:=\; \sum_{\substack{\rho\subset\mathcal{I}\\ |\rho|=n}} \frac{i^n}{n!}\varphi^n(I_1,\ldots,I_n|a)j_{I_1}\ldots j_{I_n}|0>_F
\tag{4-99}
$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich in den $j$–Quellen

$$
\begin{aligned}
\tau^1(I_1|a) &= \varphi^1(I_1|a) \\
\tau^2(I_1,I_2|a) &= \varphi^2(I_1,I_2|a) + F_{I_1I_2} < 0|a> \\
\tau^3(I_1,I_2,I_3|a) &= \varphi^3(I_1,I_2,I_3|a) + 3\{F_{I_1I_2}\tau^1(I_3|a)\}_{as} \\
\tau^4(I_1,I_2,I_3,I_4|a) &= \varphi^4(I_1,I_2,I_3,I_4|a) \\
&\quad +6\{F_{I_1I_2}\tau^2(I_3,I_4|a)\}_{as} - 3\{F_{I_1I_2}F_{I_3I_4}\}_{as} < 0|a>\ .
\end{aligned}
\tag{4-100}
$$

Ist $|a>$ ein Energieeigenzustand zum Eigenwert $E_a$ und normiert, so gilt $<0|a>=\delta_{0a}$. Für Übergangsmatrixelemente verschwinden diese Terme. Damit unterscheiden sich $\tau^1,\tau^2$ und $\varphi^1,\varphi^2$ nicht für solche Zustände. Trotzdem muß auch für Zweiteilchenzustände normalgeordnet werden, da sich $H$ und $\hat{H}$ auch im Zweiteilchensektor unterscheiden.

Nun taucht durch die Normalordnung das Problem auf, daß singuläre Terme im Vertex entstehen. Dies wird üblicherweise durch Einführung einer Vertexregularisierung verhindert. So definiert man

$$
\begin{aligned}
:\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4}: &:= \psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4} + F_{I_2I_3}\psi_{I_4} - F_{I_2I_4}\psi_{I_3} + F_{I_3I_4}\psi_{I_2} \\
gV_{I_1}^{reg.\,I_2I_3I_4}\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4} &:= gV_{I_1}^{I_2I_3I_4} :\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4}:\ .
\end{aligned}
\tag{4-101}
$$

Dieses Vorgehen ist nun äußerst unbefriedigend. Die Vertexregularisierung besitzt die konstruktive Eigenschaft, die singulären Terme nach der Normaltransformation mit den von Hand addierten zu kompensieren. Dadurch wird aber die nicht normalgeordnete Gleichung singulär. Durch die Vertexregularisierung werden die Singularitäten vertuscht, sie ist somit keine „Regularisierung“. Die Terme werden in der Ausgangsgleichung eben *so* gewählt, daß sie in der normalgeordneten Gleichung, die die physikalischen Aussagen liefert, nicht mehr erscheinen.

Damit ist aber die Normaltransformation selbst eine singuläre Transformation und die oben benutzte, durch die exponentielle Schreibweise suggerierte Bijektivität kann nicht ernst genommen werden. Die Transformation verbindet eine singuläre mit einer regulären Theorie (bez. des Vertex).

Betrachten wir die Transformation algebraisch, so erkennen wir mit der Gleichung (3-209), daß durch die Transformation verschiedene Keilprodukte verbunden werden. In (3-209) wurde

$$\psi_{I_2}\dot{\wedge}\psi_{I_3}\dot{\wedge}\psi_{I_4} \;=\; \psi_{I_2}\wedge\psi_{I_3}\wedge\psi_{I_4} + F_{I_2I_3}\psi_{I_4} - F_{I_2I_4}\psi_{I_3} + F_{I_3I_4}\psi_{I_2} \qquad (4\text{-}102)$$

*abgeleitet.* Die genaue Verbindung auf Operatorniveau ist in [FAUS 95A] angegeben. Die Transformation von $CL(\mathcal{V},A) \to CL(\mathcal{V},B) = CL(\mathcal{V};A+F)$ war eine geometrische Äquivalenztransformation. Sie ist aber aufgrund der Inhomogenität *keine* physikalische Äquivalenzrelation, da das Keilprodukt die Einbettung der Graßmannalgebra in die Cliffordalgebra beschreibt. Dies legt die Darstellung der Theorie fest. Die Normaltransformation verbindet *keine* physikalisch äquivalenten Theorien.

Betrachten wir den Hamiltonoperator (4-56), so erkennen wir die Antisymmetrie in den Feldern. Nun läßt sich jeder fermionische Hamiltonoperator durch antisymmetrische Produkte von Feldoperatoren darstellen, wenn konstante, unter Umständen divergierende Terme, vernachlässigt werden. Diese haben jedoch auch keinen Einfluß auf die durch die Heisenberggleichung generierte Dynamik. Wir können daher $H$ mit $\wedge$ als

$$H[\psi] \;=\; \frac{1}{2}A_{I_1I_3}D_{I_3I_2}\psi_{I_1}\wedge\psi_{I_2} + \frac{g}{4}A_{I_1I_5}V_{I_1}^{I_2I_3I_4}\psi_{I_1}\wedge\psi_{I_2}\wedge\psi_{I_3}\wedge\psi_{I_4} \qquad (4\text{-}103)$$

schreiben. Jedoch sind wir völlig frei, $H$ mit dem gepunkteten, ebenfalls antisymmetrischen Keilprodukt $\dot{\wedge}$ zu schreiben:

$$\dot{H}[\psi] \;=\; \frac{1}{2}A_{I_1I_3}D_{I_3I_2}\psi_{I_1}\dot{\wedge}\psi_{I_2} + \frac{g}{4}A_{I_1I_5}V_{I_1}^{I_2I_3I_4}\psi_{I_1}\dot{\wedge}\psi_{I_2}\dot{\wedge}\psi_{I_3}\dot{\wedge}\psi_{I_4}. \qquad (4\text{-}104)$$

Die Antisymmetrie in $I_1I_2$ und $I_1I_2I_3I_4$ kann hier keine Entscheidung herbeiführen. Die physikalisch wichtige *Wahl* des Keilproduktes wird durch den Propagator getroffen. Dieser muß entweder selbstkonsistent berechnet, oder vorab gegeben sein.

### 4-3.2 Feldmodell ohne explizite Normalordnung

Um nun die Wahl des geeigneten Keilproduktes bestimmen zu können, betrachten wir $F_{I_1I_2}$ als Parameter der geometrisch äquivalenten aber physikalisch inäquivalenten Theorien, die wir durch die Cliffordabbildung (3-71) erhalten.

Dazu nehmen wir uns (4-56) her und führen die Transformation in den Funktionalraum durch. Wie in (4-59) erhalten wir nun aus der Heisenberggleichung für die Monome die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} i\partial_0|\mathcal{N}(j,a)>_F &= E_{a0}|\mathcal{N}(j,a)>_F \\ &= \Big(H[\psi]\big|_{\psi=\hat{\psi}^L} - H[\psi]\big|_{\psi=\hat{\psi}^R}\Big)|\mathcal{N}(j,a)>_F\,. \end{aligned} \qquad (4\text{-}105)$$

Wir werten auch hier den kinetischen und den Wechselwirkungsterm getrennt aus.

**Bemerkung:** Die normalgeordnete Funktionalgleichung ließe sich auch mittels der Funktionaltransformation (4-96) berechnen. Dann müßte einfach in (4-71) $\partial$ durch $d := \partial - Fj$ ersetzt werden. Damit ist es aber notwendig, zuerst die singuläre Gleichung (4-71) abzuleiten. Dies soll hier durch die direkte Ableitung aus (4-104) vermieden werden.

Man erhält für den ersten Term in (4-104)

$$\begin{aligned} T_1[\psi] &= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \psi_{I_1} \psi_{I_3} \\ &= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \psi_{I_1} \dot{\wedge} \psi_{I_3}. \end{aligned} \tag{4-106}$$

Die zum gepunkteten Keilprodukt gehörenden Feldoperatoren werden in funktionaler Schreibweise durch (4-90) gegeben. Damit ist

$$\begin{aligned} T_1[j,\partial] &= T_1[\partial + Aj + Fj] - T_1[\partial - Aj + Fj] \\ &= \frac{1}{2} A_{I_1 I_3} D_{I_3 I_2} \Big\{ \times \\ &(\frac{1}{i}\partial_{I_2} + \frac{i}{2} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} + iF_{I_2 I_2'} j_{I_2'})(\frac{1}{i}\partial_{I_1} + \frac{i}{2} A_{I_1 I_1'} j_{I_1'} + iF_{I_1 I_1'} j_{I_1'}) \\ &-(\frac{1}{i}\partial_{I_2} - \frac{i}{2} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} + iF_{I_2 I_2'} j_{I_2'})(\frac{1}{i}\partial_{I_1} - \frac{i}{2} A_{I_1 I_1'} j_{I_1'} + iF_{I_1 I_1'} j_{I_1'})\Big\}. \end{aligned} \tag{4-107}$$

Nun ist $T_1[j,\partial]$ keine gerade oder ungerade Funktion von $j$. Aber die Antisymmetrie in $I_1 I_2$ verbleibt. Damit kann das Polynomialtheorem benutzt werden, um die Vorfaktoren zu berechnen. Da $F$ sein Vorzeichen nicht ändert, müssen nur Terme mit ungeradzahlig vielen $A$'s berechnet werden. Dies sind zwei Stück:

$$\begin{aligned} Aj\partial &: 2\frac{i}{2i} A_{I_2 I_2'} j_{I_2'} \partial_{I_1} \\ AFjj &: 2\frac{i^2}{2} A_{I_2 I_2'} F_{I_1 I_1'} j_{I_2'} j_{I_1'}. \end{aligned} \tag{4-108}$$

Mit denselben Umindizierungen und der Berücksichtigung beider Summanden ergibt sich mittels (4-58)

$$T_1[j,\partial] = -D_{I_1 I_2} j_{I_1} \partial_{I_2} + D_{I_1 I_3} F_{I_3 I_2} j_{I_1} j_{I_2}. \tag{4-109}$$

Für den Wechselwirkungsterm geben wir eine Tabelle an. Darin sind alle sechs Terme enthalten, die ungeradzahlig viele $A$'s enthalten. Es werden ebenfalls die Polynomialkoeffizienten

$$P_{k_1 \ldots k_n} := \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}, \quad k = \sum k_n \tag{4-110}$$

und die restlichen Faktoren jeweils *eines* der beiden identischen Summanden angegeben. Wir erhalten

$$\begin{array}{llll} (\#\partial,\#Aj,\#Fj) & P_{k_1\ldots k_n} & \text{Faktor} & \text{ergibt als Summand:} \\ (3,1,0) & \frac{4!}{3!}=4 & 4\frac{i}{2i^3}=-2 & -2A_{I_4I'_4}j_{I'_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2}\partial_{I_1} \\ (2,1,1) & \frac{4!}{2!}=12 & 12\frac{i^2}{2i^2}=6 & 6A_{I_4I'_4}F_{I_3I'_3}j_{I'_4}j_{I'_3}\partial_{I_2}\partial_{I_1} \\ (1,3,0) & \frac{4!}{3!}=4 & 4\frac{i^3}{2^3i}=-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}A_{I_4I'_4}A_{I_3I'_3}A_{I_2I'_2}j_{I'_4}j_{I'_3}j_{I'_2}\partial_{I_1} \\ (1,1,2) & \frac{4!}{2!}=12 & 12\frac{i^3}{2i}=-6 & -6A_{I_4I'_4}F_{I_3I'_3}F_{I_2I'_2}j_{I'_4}j_{I'_3}j_{I'_2}\partial_{I_1} \\ (0,3,1) & \frac{4!}{3!}=4 & 4\frac{i^4}{2^3}=\frac{1}{2} & \frac{1}{2}A_{I_4I'_4}A_{I_3I'_3}A_{I_2I'_2}F_{I_1I'_1}j_{I'_4}j_{I'_3}j_{I'_2}j_{I'_1} \\ (0,1,3) & \frac{4!}{3!}=4 & 4\frac{ii^3}{2}=2 & 2A_{I_4I'_4}F_{I_3I'_3}F_{I_2I'_2}F_{I_1I'_1}j_{I'_4}j_{I'_3}j_{I'_2}j_{I'_1}. \end{array} \tag{4-111}$$

Durch Umindizieren und Zusammenfassen ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2[j,\partial] &= gV_{I_1}^{I_2I_3I_4}\Big[-j_{I_1}\partial_{I_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2}+3F_{I_2I'_2}j_{I_1}j_{I'_2}\partial_{I_3}\partial_{I_4} \\ &\quad -(3F_{I_3I'_3}F_{I_2I'_2}+\frac{1}{4}A_{I_3I'_3}A_{I_2I'_2})j_{I_1}j_{I'_3}j_{I'_2}\partial_{I_4} \\ &\quad -(3F_{I_3I'_3}F_{I_2I'_2}+\frac{1}{4}A_{I_3I'_3}A_{I_2I'_2})F_{I_1I'_1}j_{I_1}j_{I'_3}j_{I'_2}j_{I'_1}\Big]. \end{aligned} \tag{4-112}$$

Direkt aus (4-103) erhalten wir also mittels der funktionalen Übersetzung (4-90) die normalgeordnete Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} E_{a0}|\mathcal{N}(j,a)>_F &= \hat{H}[j,\partial]|\mathcal{N}(j,a)>_F \\ &= \Big\{D_{I_1I_2}j_{I_1}\partial_{I_2}-D_{I_1I_3}F_{I_3I_2}j_{I_1}j_{I_2} \\ &\quad +gV_{I_1}^{I_2I_3I_4}\Big[j_{I'_1}\partial_{I_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2}-3F_{I_2I'_2}j_{I_1}j_{I'_2}\partial_{I_3}\partial_{I_4} \\ &\quad +(3F_{I_3I'_3}F_{I_2I'_2}+\frac{1}{4}A_{I_3I'_3}A_{I_2I'_2})j_{I_1}j_{I'_3}j_{I'_2}\partial_{I_4} \\ &\quad +(3F_{I_3I'_3}F_{I_2I'_2}+\frac{1}{4}A_{I_3I'_3}A_{I_2I'_2})F_{I_1I'_1}j_{I_1}j_{I'_3}j_{I'_2}j_{I'_1}\Big]|\mathcal{N}(j,a)>_F . \end{aligned} \tag{4-113}$$

$\hat{H}$ ist der normalgeordnete funktionale Hamiltonoperator. Das Ergebnis stimmt mit (4.1) und (3.106) in [Stum 94] überein. Die Funktionalgleichung wird durch $F_{II'}$ *parametrisiert*, daher ist $F$ zunächst nicht der freie Propagator. Dies erklärt den zusätzlichen $DF$ Term, der sonst verschwindet.

Wir sehen, daß der *Propagator* die Darstellung der Theorie wählt, indem er bestimmt, welches Keilprodukt gewählt wird. Setzt man z.B. $F_{II'}\equiv 0$, so erhält man (4-59) bzw. (4-71) zurück.

Die Wahl von $F$ beeinflußt auch die Reversion. Die Reversion legt Rechts– und Linkszustände fest. Dies entspricht aber der Festlegung des physikalischen Vakuums. Man bedenke, daß die funktionalen Linkszustände auf den Dualen $\partial_I$ aufgespannt werden. Die $\partial_I$ sind Kovektoren ohne physikalische, d.h. metrische Information. Die $\hat{\psi}_I^{L/R}$ jedoch *beinhalten* die physikalische Situation darin, daß sie den Antikommutator und den Propagator enthalten. Wir haben hier also einen konstruktiven Weg gefunden, inäquivalente Darstellungen von Feldtheorien zu konstruieren. Solche Feldtheorien sind durch algebraische, die Geometrie und damit die Physik nicht respektierende, Transformationen verbunden.

Der Antikommutator *wählt* nun die zu beachtende quadratische Form. Damit werden auch die Invarianzgruppen festgelegt, die das physikalische System wesentlich bestimmen. Der Propagator *wählt* aus einem Kontinuum an Möglichkeiten die jeweilige Darstellung der Theorie aus.

**Bemerkung:** In nichtlinearen Theorien sollte es möglich sein, durch *Berechnung* des Propagators, etwa über Selbstkonsistenzgleichungen, die Darstellung der Theorie festzulegen. Haben solche nichtlinearen Gleichungen mehrere Lösungen, so erwarten wir verschiedene dazugehörige Phasen und die Möglichkeit von Phasenübergängen.

Bis zu diesem Punkt haben wir jedoch nur algebraische Eigenschaften des Propagators benutzt und diesen als Parameter angesehen. In diesem Sinne ist die Quantenfeldtheorie bis hierher darstellungsfrei entwickelt worden. Ohne die Clifford–algebraische Behandlung ist eine solche Sichtweise nicht möglich.

# Teil III

# Ergebnisse und Ausblick

# Kapitel 5

# Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die gewonnenen Ergebnisse zusammengestellt und verglichen. Dabei soll verdeutlicht werden, welche verborgenen Wurzeln die heuristischen Methoden haben und wie sie aufgedeckt werden können. Die Gegenüberstellung der Methoden gewichtet auch die beiden unterschiedlichen Teile I und II in ihrer Bedeutung und Aussagekraft.

Die Notwendigkeit einer Renormierung, oder besser einer Regularisierung der Quantenfeldtheorie, ist unumstritten. Ausgehend von der, für lineare Theorien entwickelten Pauli–Villars–Regularisierung, haben deshalb Stumpf und Großer [STUM 82, GROSS 83] die nichtstörungstheoretische Pauli–Villars–Regularisierung für nichtlineare Theorien entwickelt. Das wesentliche Werkzeug dazu ist das Zerlegungstheorem, mit dessen Hilfe die nichtlineare Bewegungsgleichung in ein System von Gleichungen erster Ordnung zerlegt werden kann.

Abgesehen von der fehlenden lokalen Eichinvarianz, die jedoch für nichtlineare Spinorfelder nicht benötigt wird, ist dieses Verfahren für praktische Rechnungen, z.B. im Stumpfschen Modell, vollauf befriedigend.

In der vorliegenden Arbeit wurde auf verschiedene Art und Weise die Natur dieser Hilfs– oder Subfeldtheorie beleuchtet. Dazu konnte ein alternativer Zugang zur Hilfsfeldtheorie betrachtet und auf nichttriviale Wechselwirkungen verallgemeinert werden. Eine Plausibilitätsbetrachtung, warum das Zerlegungstheorem *immer* zu reguläreren und für genügend hohe Ableitungen zu vollständig regulären Theorien führt, wird in Kapitel 6 gegeben. Dabei sind jedoch die bis hierher nicht untersuchten analytischen Eigenschaften der verwendeten Funktionen notwendig.

Nach den allgemeinen Vorüberlegungen in den Abschnitten 1-1 bis 1-3 wurde in Abschnitt 1-4 eine algebraisch motivierte Analyse des algebraischen Zugangs durchgeführt. Es stellte sich heraus, daß die (globale) komplexe Struktur für die *Wahl* des Hilfsfeldansatzes ausschlaggebend war. Pseudokomplexe Zahlen mit ihren anderen algebraischen Eigenschaften führten nicht zum Ziel.

Weiter wurde gezeigt, daß die von Stumpf [STUM 84] gewählte Paritätstransformation nicht zwingend nötig ist, um zu einem Ansatz mit regularisierendem Effekt zu gelangen. Jede $\gamma$–Matrix mit der Eigenschaft $\gamma^2 = -1$ erzeugt eine regularisierende Wirkung durch den Ansatz

$$\psi \quad \rightarrow \quad \psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \gamma\psi). \tag{5-1}$$

Mit der Wahl $\gamma = i\gamma^0$ wird das zweite Hilfsfeld bezüglich der Spinorkoordinaten zum paritätstransformierten Feld verändert. Die Ortskoordinaten werden nicht transformiert. Das aufsummierte Feld $\psi'$ ist somit antistabil unter der folgenden Linkstransformation:

$$\gamma\psi' \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma\psi + \gamma^2\psi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \gamma\psi). \tag{5-2}$$

Siehe dazu das Beispiel auf Seite 78. Die diskrete Transformation muß also als Konjugation betrachtet werden! Der Ansatz mit zwei Hilfsfeldern ist auf die skalare Wechselwirkung beschränkt.

Ausgehend von diesen Überlegungen wurde in Abschnitt 1-5 untersucht, inwieweit ein Ansatz mit vier Hilfsfeldern möglich ist. Um die Auswertung überhaupt zu ermöglichen, mußte ein reduziertes Bild eingeführt werden. Abgesehen von der Einschränkung der möglichen Wechselwirkungen bleiben dabei jedoch alle charakteristischen Eigenschaften des Modells erhalten. Der Einfachheit halber wurden Majoranaspinoren untersucht, siehe dazu die Diskussion in Abschnitt 3-4. Die aufwendige technische Auswertung des verallgemeinerten Modells ergibt dann die gewünschte reguläre Theorie mit nichtskalarem Vertex.

Abschnitt 1-7 faßt die Ergebnisse zusammen, die mit Hilfe des Ansatzes und den damit verknüpften Methoden gewonnen werden konnten. Am wichtigsten sind die Regularität sowie der nichtdynamische starre Charakter der Hilfsfeldkonjugationen. Die Erklärung befriedigt nicht, da die interpretatorischen Probleme der höheren Ableitungen nun einfach verschoben sind. Ob ein Parameter „Masse“ oder „chemisches Potential“ heißt, scheint nur graduelle Unterschiede der Sicht zu betonen. Damit ist schon der größte Schritt zu der neuen Interpretation getan, die auf den in Teil II beschriebenen Methoden beruht. Der Leser sei hier aufgefordert, das Resümee in Abschnitt 1-7 nochmals zu lesen. Die Vertexregularisierung ist dabei unerheblich.

In Teil II, Abschnitt 3-5 wurde gezeigt, wie im Cliffordkalkül Multivektorgleichungen behandelt werden können. Betrachtet man nämlich Matrix– oder besser Operatorspinoren $\psi$, so erhält man die alten Spaltenspinoren $\Psi$ durch Projektion mit einem primitiven idempotenten Element von rechts. Wir haben mit den Spaltenmatrizen $\eta_{i\alpha}$ (3-232) eine Basis des minimalen Linksideals zum Projektor $\eta_1 \equiv \eta_1^1$ erhalten. Die Algebra kann nun nach idempotenten Elementen zerlegt werden [Berg 93]. Siehe dazu auch das ausführliche Beispiel anhand der Majoranaalgebra und die Formeln (3-179) sowie (3-180).

Die Hilfsfeldsummation ist nun gerade die Zerlegung des Operatorspinors $\psi$ nach Spaltenspinoren bezüglich *einer* Projektorbasis (3-231):

$$\psi_\alpha \;=\; \sum_i \Psi_{\alpha i}\eta_i^\dagger. \tag{5-3}$$

Nun sind die $\eta_i^\dagger$ aber selbst Zeilenmatrizen und besitzen somit einen offenen Spinorindex $\beta$. Ausführlich lautet die obige Gleichung mit (3-232):

$$\psi_{\alpha\beta} \;=\; \sum_i \Psi_{\alpha i}\eta_{i\beta}^\dagger. \tag{5-4}$$

Dies ist ein „Spintensor“, oder mit anderen Worten ein Operatorspinor! Die analytischen Eigenschaften eines solchen Objektes sind viel vorteilhafter als die der Spaltenspinoren [Dela 92].

Für unsere Betrachtungen reicht es aus zu bemerken, daß mit den Operatorspinoren Inverse gebildet werden können. Dies gelingt mit den Spaltenspinoren nicht. Ein Spaltenspinor hat, als Matrix aufgefaßt, nur in der ersten Spalte von Null verschiedene Elemente und somit immer die Determinante Null.

Bezieht man nun die Bewegungsgleichung auf die intensiven Größen (3-236)

$$f_i \;=\; \psi\gamma_i\psi^{-1}, \tag{5-5}$$

so erhält man *nichtlineare* Spinorgleichungen in der Variablen $\psi$. Wir gelangen somit durch die Rekapitulation des Abschnittes 3-5 zur folgenden neuen Interpretation der Hilfsfelder, die nicht nur für die Ansätze aus Kapitel 1, sondern auch für das Zerlegungstheorem gültig ist. Dies soll in Thesenform formuliert werden:

- Der aufsummierte Spinor $\psi$ ist ein Matrix– oder Operatorspinor.
- Der Operatorspinor $\psi$ zerlegt sich in die Spaltenspinoren $\Psi_i$ bezüglich *eines* Satzes von primitiven idempotenten Projektoren.
- Die Hilfsfeldregularisierung erzwingt die Benutzung von Operatorspinoren.
- Die zugehörigen Spinorfeldgleichungen lassen sich in Tensorgleichungen übersetzen.
- Die Spinorfeldgleichungen sind *nichtlinear* mit i.a. transzendenter Nichtlinearität.
- Der Massenparameter ist der erste Term einer Entwicklung der Nichtlinearität nach dem Operatorspinorfeld.
- Die „Quantisierung“ der Subfelder, ihre Unabhängigkeit etc., erklärt sich aus den Eigenschaften der Projektorbasis.
- Die in Abschnitt 1-6 gefundene Lösung zur Signatur 0 (Metrik $(+,+,-,-)$) ist eine Twistorlösung [Penr 86, Haag 92, Kell 93]. Die zweite Lösung besitzt jedoch eine Spinorbasis.
- Die „Feldquantisierung“ solcher Operatorspinorgleichungen kann mittels der in Kapitel 4 besprochenen Methode durchgeführt werden.

Bevor wir auf Teil II und die algebraische Formulierung der Feldquantisierung eingehen, sollen noch kurz die Ergebnisse von Kapitel 2 zusammengefaßt werden. Dabei darf nicht vergessen werden, daß in Kapitel 4, Abschnitt 4-3.1 und 4-3.2 gezeigt wurde, daß eine Vertexnormalordnung bei korrekter algebraischer Behandlung unnötig wird!

Die Wichtigkeit der Überlegungen in Kapitel 2 besteht nicht in der Erzeugung einer regulären Theorie. Spannend ist die Verbindung von (partieller) Yang–Baxter–Symmetrie und gewissen Regularisierungseffekten. Es ist im

Rahmen der schwachen Abbildung möglich, die BCS–Theorie mittels unendlichdimensionaler Liealgebren als effektive Theorie zu beschreiben [KERS 95]. Eine Übersetzung des dort $C^*$–algebraischen Zugangs in die Cliffordalgebra kann gefunden werden. Kapitel 2 reflektiert also die Notwendigkeit, integrable Substrukturen zu verwenden. Siehe dazu auch Kapitel 6, Ausblick.

Tripelsysteme hängen eng mit Jordanalgebren und Oktonionen zusammen [GÜNA 91, GÜNA 92], letztere wiederum mit dem Trialitätsprinzip und der $SO(1,7)$ sowie der $SO(7)$ und den dazugehörigen **Pin**– und **Spin**gruppen. Diese führen in der Twistortheorie zu Lösungen nichtlinearer Gleichungen [PENR 86].

Es wurde sowohl im Vorwort, als auch in Teil II darauf hingewiesen, daß eine einheitliche Formulierung der Physik der einzig mögliche Schritt zu ihrer Vereinheitlichung ist. Die in Teil II entwickelte Clifford–algebraische Sicht auf die (fermionische) Quantenfeldtheorie stellt somit eine Vereinheitlichung in diesem Sinne dar. Daß diese Sicht nicht nur eine linguistische Spielerei oder eine Umdeutung beinhaltet, sondern neue integrative Kräfte freisetzt, wurde in Kapitel 4 demonstriert. Der geometrische Charakter der Feldquantisierung ist dabei deutlich zutage getreten.

Ausgehend von der Multivektorformulierung der Diractheorie in Abschnitt 3-5 – dies entspricht im Spezialfall einer Heisenberg–artigen Spinorgleichung – gelangt man zu einer Vielteilchentheorie. Mit dem Stumpfschen Funktionalkalkül gelangt man zu Funktionalgleichungen als ausgezeichneten Bestimmungsgleichungen der Feldtheorie. Erst der funktionale Zugang ermöglicht eine Formulierung der Feldtheorie, die mit der Darstellung konform wird. Solch eine Formulierung ist aber unerläßlich, will man überhaupt jenseits der Störungstheorie Aussagen erhalten. Bindungsrechnungen sind hier ein wichtiges Beispiel. Sie widersetzen sich nicht zuletzt wegen dieser Schwierigkeiten hartnäckig dem störungstheoretischen Zugang. Ein weiteres Beispiel wären Phasenübergänge und Kondensate, die in der QCD oder der BCS–Theorie eine wichtige Rolle spielen.

Hat man Funktionale akzeptiert, so ist dies quasi äquivalent zum Clifford–algebraischen Zugang.

Kapitel 3 dieser Arbeit entwickelt im Detail die subtilen Unterschiede und Begriffe, die im gewöhnlichen feldtheoretischen Bild *nicht* zur Verfügung stehen. Zentrale Bedeutung erlangen die folgenden drei Äquivalenzbegriffe: die algebraische, geometrische und physikalische Äquivalenz. Diese sollen hier nochmals explizit aufgeführt werden.

Wir rekapitulieren dazu die Notwendigkeit, eine *Operator*algebra und *Zustände* definieren zu können. Unsere Analyse hat ergeben, daß die Operatoralgebra durch die Cliffordalgebra *und* ihre oppositionelle Algebra gegeben ist. Der Zustand wird durch eine Konjugation bestimmt. Die konjugations(anti)stabile Algebra war die Graßmannalgebra. Sie wird durch *ein* primitives idempotentes Element $|0>_f<0|$ bestimmt, in voller Analogie zum Einteilchenfall. Wir finden verschiedene Einbettungen der Graßmannalgebra (Zustände) in die Cliffordalgebra (Operatoren). Damit werden folgende Unterscheidungen wichtig:

**Algebraische Äquivalenz:**

Betrachten wir die Cliffordalgebra als linearen Raum, so erhält man für jede lineare nichtsinguläre Transformation des linearen Raumes eine Isomorphie von Algebren; jedoch nicht von Cliffordalgebren! Diese Transformation ist aber in dem Sinne, daß sie weder den *Semigrad* noch die der Cliffordalgebra inhärente *quadratische Form* invariant läßt, eine „verallgemeinerte supersymmetrische Transformation“[1]. Wir haben Beispiele gefunden, in denen die Signaturen geändert wurden. Damit ändert sich aber auch die metrische Struktur der Theorie [CRUM 90, BERG 93]. *Diese Form der Symmetrie ist somit viel zu allgemein für die physikalische Anwendung.*

**Geometrische Äquivalenz:**

Wollen wir den geometrischen Gehalt der Operatoralgebra (d.h. der Cliffordalgebra) unter einer Transformation *erhalten*, so müssen wir uns auf Transformationen der Lipschitz– oder Clifford–Lipschitzgruppen beschränken. Dies sind algebraische Transformationen, die aus zerlegbaren Elementen bestehen. Ein Element heißt zerlegbar, wenn es sich als Cliffordprodukt von Vektorelementen schreiben läßt [BOUR 59]. Hat man nun eine quadratische Form $Q$, so gibt es dazu aufgrund der Universalitätseigenschaft *die* Cliffordalgebra $CL(\mathcal{V}, Q)$. Sie ist in ihrer Struktur invariant unter den geometrischen Transformationen. Die quadratische Form $Q$ besitzt auf kanonische Weise eine polare Bilinearform $B_p \equiv A$, die symmetrisch ist. In der Generatordarstellung schreiben sich die Relationen der Cliffordalgebra $CL(\mathcal{V}, A)$ mit $\mathcal{V} =< \psi_{I_1}, \ldots, \psi_{I_n}, \ldots >$ als

$$\psi_I \psi_K + \psi_K \psi_I \;\; = \;\; 2A_{IK}. \qquad (5\text{-}6)$$

Will man Physik betreiben, so benötigt man noch das Konzept des Zustandes. Diesen haben wir mit *einer* Graßmannunteralgebra verknüpft. Nun gilt: *Geometrische Transformationen lassen i.a. den Zustand (d.h. die spezielle Graßmannunteralgebra) nicht invariant.*

**Physikalische Äquivalenz:**

Um auch die spezielle Graßmannunteralgebra zu fixieren, müssen wir das dazugehörige spezielle Keilprodukt *wählen*. Dies geschieht durch einen nichtsymmetrischen Anteil $F$ der Bilinearform $B = A + F$, wobei $A$ die symmetrische Polarform zur quadratischen Form $Q$ der Cliffordalgebra darstellt. $F$ parametrisiert eine ganze Schar von Cliffordalgebren zur *selben* quadratischen Form $Q$. Die Injektion der Graßmannalgebra in die Cliffordalgebra hängt jedoch empfindlich von dieser Parametrisierung ab. Dies überträgt sich auf die quantenfeldtheoretischen Zustände. *Nur Transformationen, die $Q$ und $F$ invariant lassen, erhalten den physikalischen Gehalt der Theorie.*

Wir gelangen daher zu folgendem, neuen, geometrisch motivierten Bild der (fermionischen) Feldquantisierung.

[1] Dies wäre dann konsequenterweise eine „Ultrasymmetrie“! Nennt man die Supersymmetrie graduierte Symmetrie, so würde man die „Ultrasymmetrie“ als viel verständlichere „algebraische Symmetrie“ bezeichnen.

In dieser Interpretation betrachten wir die Feldoperatoren als Elemente der Cliffordalgebra, die zur polaren symmetrischen Bilinearform $A$ korrespondiert,

$$\psi \;\in\; CL(\mathcal{V}, A). \tag{5-7}$$

Der Grundraum $\mathcal{V}$ wird von Linearkombinationen der Quellen $j$ und der Dualen $\partial$ aufgespannt. Die invarianten Objekte sind Vektoren, das heißt Größen ohne offene Indizes, nicht die Koeffizienten. Der Zustandsraum wird von der Graßmannalgebra $\Lambda\mathcal{V}$ gebildet. Die Cliffordalgebra ist die Endomorphismenalgebra der Graßmannalgebra. Die *Rechtswirkung* der Cliffordalgebra auf die Graßmannalgebra wird durch die *Linkswirkung* der oppositionellen Cliffordalgebra gegeben. Die Rechtswirkung hängt nach dem Chevalleyschen Theorem mit der Linkswirkung der Cliffordalgebra zur negativen quadratischen Form $-Q$ zusammen:

$$CL^{op}(\mathcal{V}, Q) \;\cong\; CL(\mathcal{V}, -Q). \tag{5-8}$$

Wir müssen daher Links– und Rechtsfeldoperatoren unterscheiden,

$$\begin{aligned} \psi^L &\in CL(\mathcal{V}, Q) \\ \psi^R &\in CL^{op}(\mathcal{V}, Q) \cong CL(\mathcal{V}, -Q). \end{aligned} \tag{5-9}$$

Man erhält damit die Antikommutatoren

$$\begin{aligned} \{\psi^L_I, \psi^L_K\}_+ &= 2A_{IK} \\ \{\psi^R_I, \psi^R_K\}_+ &= -2A_{IK} \\ \{\psi^L_I, \psi^R_K\}_+ &= 0. \end{aligned} \tag{5-10}$$

Der quantenfeldtheoretische Antikommutator legt somit die polare Bilinearform $A$ und damit die *Metrik* des Funktionalraumes fest. Wir erhalten zwei Sorten von Antikommutatoren. Diese Antikommutatoren sind *unabhängig* von der Wahl eines antisymmetrischen Anteils $F$ der vollen Bilinearform der Cliffordalgebra $CL(\mathcal{V}, B)$. Solche Cliffordalgebren bilden eine Klasse isomorpher Algebren (isomorph als Cliffordalgebren), die durch $F$ parametrisiert wird,

$$CL(\mathcal{V}, B) \;\equiv\; CL(\mathcal{V}, A + F) \approx CL(\mathcal{V}, A). \tag{5-11}$$

Dies entspricht der geometrischen Äquivalenz.

Die Graßmannunteralgebra der Zustände wird durch eine Konjugation (anti)stabilisiert. Diese Konjugation hängt wesentlich von $F$ ab. Die Injektion von $\Lambda^F\mathcal{V} \to CL(\mathcal{V}, B)$ wird durch die Chevalley–Deformation (auf Vektoren ist dies die Cliffordabbildung (3-71))

$$\begin{aligned} \gamma \;:\; & \mathcal{V} \to CL(\mathcal{V}, B) \\ & x \to \partial_x + Aj + Fj \end{aligned} \tag{5-12}$$

gegeben. Unter Berücksichtigung der Rechts– und Linkswirkung gilt für die Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_I^L &= \frac{1}{i}\partial_I + \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'} \\ \hat{\psi}_I^R &= \frac{1}{i}\partial_I - \frac{i}{2}A_{II'}j_{I'} + iF_{II'}j_{I'}. \end{aligned} \tag{5-13}$$

Die Faktoren $i$ und $1/2$ sind aus Kompatibilitätsgründen zu Arbeiten von Stumpf und Mitarbeitern gewählt worden und unerheblich. Weiterhin *parametrisiert* $F$ die physikalisch inäquivalenten Zustände. $F$ ist der *Propagator* der Theorie und über Selbstkonsistenzrechnungen aus der Theorie ableitbar. Die Dynamik bestimmt somit den Zustand. Man hat so ein konstruktives Verfahren gefunden, mit inäquivalenten Zuständen umzugehen.
**Bemerkung:** Bis zu diesem Stadium wurden alle Konzepte algebraisch begründet. Die Stetigkeit oder die Konvergenz von Funktionalzuständen kann daher noch gar nicht betrachtet werden. Somit kann erst nach der Wahl, sowie der Berechnung der polaren Form $A$ und des Propagators $F$, eine Topologie eingeführt werden. Da im *Integral* ein Grenzprozeß enthalten ist, muß für dessen Definition eine Topologie gegeben sein. So betrachtet sind die Probleme einer mathematisch sauberen Definition des Pfadintegrals offensichtlich.
**Bemerkung:** Die hier vorgestellte Sichtweise kann ebensogut mit kleinen Verallgemeinerungen für Bosonen und Kopplungstheorien entwickelt werden, siehe [Faus 95c]. Eine Anwendung auf die gewöhnliche Einteilchenquantenmechanik scheint ebenfalls möglich und sollte tiefere Einblicke gewähren.

# Kapitel 6

# Ausblick

Im Ausblick wollen wir noch einige Gedanken zusammenfassen, die die Arbeit ergänzen und ihr eine Perspektive für weitere Forschungen geben. Zwei Richtungen bieten sich besonders an, um Erweiterungen durchzuführen. Zum einen sollte eine umfassende analytische Untersuchung der Funktionalzustände erfolgen, um zu einem mathematischen Existenzbeweis für die Quantenfeldtheorie zu gelangen. Zum anderen erwarten wir von der Ausweitung der algebraischen Methode auf unendlichdimensionale Liealgebren wesentliche Erweiterungen und neue Einsichten. Als besonders wichtig erweist sich die Übersetzung der schwachen Abbildung und die algebraische Definition und Klassifizierung von Bindungszuständen. Wir wollen hier im Ausblick noch einige Überlegungen anstellen, die diese Erwartungen stützen.

Die Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen besticht durch ihre analytische Kraft. Viele Probleme lassen sich dort geschlossen lösen. Dies ändert sich schnell, wenn man zu reellen Funktionen auf Vektorräumen übergeht. Das Fehlen eines geeigneten Ersatzes für die *Holomorphie* macht viel von der analytischen Kraft zunichte, die man über **C** gewohnt war. Es stellt sich somit die Frage, wie der Begriff der Holomorphie geeignet auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann. Dies wurde schon früh von Fueter untersucht [Fuet 35].

Betrachten wir zuerst die Definition der komplexen Holomorphie. Wir finden drei wesentliche Eigenschaften, die die Holomorphie erzwingen, aber dabei jeweils einen anderen Schwerpunkt betonen. Die Differentiation ist eine lokale Eigenschaft, deshalb gelten alle weiteren Aussagen nur in einer offenen Umgebung um den betrachteten Punkt. Wir beachten dies nicht weiter.

a) Eine holomorphe Funktion besitzt immer eine komplexe Ableitung

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \tag{6-1}$$

Dabei ist der Limes unabhängig von der Art wie er gebildet wird.

b) Holomorphe Funktionen besitzen eine Potenzreihenentwicklung in der Variablen $z = x + iy$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \tag{6-2}$$

Solche Funktionen nennt man auch analytische Funktionen. Die Konvergenzeigenschaften übertragen sich auf die reelle Achse, sofern diese überhaupt in der offenen Umgebung um $z_0$ liegt, in der die Reihe konvergiert.

c) Holomorphe Funktionen $f$ erfüllen die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen (CRC)

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} = \bar{\partial}_z \quad &:= \quad \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \\ \partial_{\bar{z}} f = 0. & \end{aligned} \tag{6-3}$$

Sucht man nach Verallgemeinerungen im einfachsten hyperkomplexen Fall, den Quaternionen $\mathbf{H}$, so stellt man fest, daß die ersten beiden Fassungen der Holomorphie untauglich dafür sind.

Der quaternionische Limes

$$f'(w_0) \quad = \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(w_0+h) - f(w_0)) \tag{6-4}$$

existiert aufgrund der Nichtkommutativität in $\mathbf{H}$ nicht einmal für alle *linearen* Funktionen. Diese Tatsache schränkt die Klasse der 'holomorphen' Funktionen zu stark ein.

Der Fall b) ergibt die umgekehrte Situation. Erweitert man den Begriff analytisch auf höhere Dimensionen, so erhält man zuviele 'holomorphe' Funktionen. Definiert man nämlich $w = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ und $\mathbf{H} =< 1, i, j, k >$ sowie

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{4}(w - iwi - jwj - kwk) \\ x_1 &= \frac{1}{4}(w - iwi + jwj + kwk) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(w + iwi - jwj - kwk) \\ x_3 &= \frac{1}{4}(w + iwi + jwj - kwk), \end{aligned} \tag{6-5}$$

so sieht man leicht, daß jede Funktion $f(x_0, x_1, x_2, x_3) : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{H}$ der *reellen* Variablen $x_i$ als quaternionische Potenzreihe geschrieben werden kann. Dazu setzt man einfach (6-5) in die Funktion $f$ ein und erhält die Aussage von b). Ist nun aber jede solche Funktion holomorph, so ist dieser Begriff wertlos.

So verbleibt also der Fall c). Die CRC können verallgemeinert werden, dazu definieren wir mit Fueter [Fuet 35, Gilb 91]

**Definition** (Fueter): *Sei $U$ eine offene Menge in $\mathbf{H}$ und $f : U \to \mathbf{H}$ eine quaternionenwertige Funktion definiert auf $U$, dann heißt $f$ rechts (links) regulär, wenn gilt*

$$\begin{aligned} D_R f \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x_0} f - i\frac{\partial}{\partial x_1} f - j\frac{\partial}{\partial x_2} f - k\frac{\partial}{\partial x_3} f = 0 \\ (D_L f \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x_0} f + i\frac{\partial}{\partial x_1} f + j\frac{\partial}{\partial x_2} f + k\frac{\partial}{\partial x_3} f = 0). \end{aligned} \tag{6-6}$$

Man beachte, daß die Basiselemente folgende Eigenschaften besitzen

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij + ji = ik + ki = jk + kj = 0. \end{aligned} \tag{6-7}$$

Die Funktion

$$\begin{aligned}
\phi(w) &= \frac{1}{|w|^4}(x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k) = \frac{\bar{w}}{|w|^4} \\
|w| &:= \sqrt{w\bar{w}} \\
\bar{w} &:= (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)^- \\
&= x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k
\end{aligned} \tag{6-8}$$

beweist, daß die zuletzt angeführte Definition sinnvoll ist. Obige Funktion ist für alle $w$ mit $|w| \neq 0$ sogar links– und rechtsregulär. Wir stehen hier am Startpunkt der monogenetischen Funktionentheorie [Brac 82, Gilb 91, Dela 92].

Es erweist sich als günstig, monogenetische Variablen [Krol 93a] einzuführen. Betrachtet man die $m$–dimensionale euklidische Cliffordalgebra der Generatoren $e_k$, so bildet man dazu [Malo 93]

$$\mathbf{R}^{m+1} \cong \tilde{A} =< 1, e_1, \ldots, e_k > . \tag{6-9}$$

Dies entspricht dem reduzierten Bild aus Kapitel 1. Die zugehörigen Gruppen sind die **Spoin**gruppen [Brac 82, Gilb 91]. Die monogenetischen Variablen verallgemeinern die Wirtinger–Variablen ($z$ und $\bar{z}$) der komplexen Funktionentheorie

$$\begin{aligned}
z &= x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m \\
\bar{z} &= x_0 - x_1 e_1 - \ldots - x_m e_m \\
x_0 &= \frac{1}{2}(\bar{z} + z) \\
x_k &= \frac{1}{2}(\bar{z} e_k - e_k z) = \frac{1}{2}(e_k \bar{z} - z e_k).
\end{aligned} \tag{6-10}$$

Für $m = 1$ ist dies der komplexe Fall ($e_1 = i$)

$$x_0 = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \qquad x_1 = \frac{i}{2}(\bar{z} - z). \tag{6-11}$$

Betrachtet man nun eine formale Taylorreihe, so kann diese mittels der monogenetischen Variablen wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big\{ x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \Big\}^k f|_0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big\{ \frac{\bar{z} + z}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{2}(\bar{z} e_1 + e_1 z) \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots + \frac{1}{2}(\bar{z} e_m + e_m z) \frac{\partial}{\partial x_m} \Big\}^k f|_0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big\{ \frac{\bar{z}}{2} \Big( \frac{\partial}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots + e_m \frac{\partial}{\partial x_m} \Big) \\
&\quad + \frac{1}{2} \Big( z \frac{\partial}{\partial x_0} - e_1 z \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots - e_m z \frac{\partial}{\partial x_m} \Big) \Big\}^k f|_0.
\end{aligned} \tag{6-12}$$

Man sieht leicht, daß für monogenetische Funktionen die Abhängigkeit von $\bar{z}$ verschwindet. Dies unterstreicht die Bedeutung der monogenetischen Variablen.

Die gut untersuchten Polynome in monogenetischen Variablen heißen Fueter-polynome. Man findet orthogonale Polynome etc., wie sie in der Theorie der speziellen Funktionen üblich sind. Mit der umgeformten CRC Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = -\frac{\partial f}{\partial x_1}e_1 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_m}e_m \tag{6-13}$$

erhält man nun die Entwicklung nach monogenetischen Variablen

$$z_k := x_k - x_0 e_k = -\frac{z e_k + e_k z}{2} \tag{6-14}$$

als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\{z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + z_m \frac{\partial}{\partial x_m}\}^k f|_0. \tag{6-15}$$

Man beachte das Verschwinden des skalaren $x_0$ Anteils.

Ohne weiter in die monogenetische Funktionentheorie einzudringen, wollen wir die Bedeutung dieses Verfahrens für die Methode aus Kapitel 1 untersuchen. Die Quaternionen $\mathbf{H}$ bilden die gerade Unteralgebra der Paulialgebra

$$\begin{aligned} P &\cong CL_{3,0} \\ \mathbf{H} &\cong P^+ \cong CL^+_{3,0}. \end{aligned} \tag{6-16}$$

Wir haben nun gesehen, daß Operatorspinoren Elemente der geraden Unteralgebra, hier also aus $\mathbf{H}$, sind. Daher können wir einen Operatorspinor als $\mathbf{H}$–wertige Funktion ansehen. Damit kann die CRC Bedingung untersucht werden, somit können Aussagen über analytische Eigenschaften getroffen werden. Wir haben also für Operatorspinoren

$$\psi(x) = \psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = q \in \mathbf{H}. \tag{6-17}$$

$\psi$ erfüllt die CRC Bedingungen, wenn gilt (links, bzw. rechtsregulär, siehe (6-6))

$$\begin{aligned} D_R\psi &= 0 \\ (D_L\psi &= 0). \end{aligned} \tag{6-18}$$

Um dies besser nachvollziehen zu können, betrachten wir zuerst folgende $\mathbf{R}$–lineare Abbildung

$$\begin{aligned} q = q^0 &= x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \\ q^1 &= x_0 + x_1 i - x_2 j - x_3 k \\ q^2 &= x_0 - x_1 i + x_2 j - x_3 k \\ q^3 &= x_0 - x_1 i - x_2 j + x_3 k. \end{aligned} \tag{6-19}$$

Solche Transformationen sind Konjugationen auf $\mathbf{H}$. Zum Beispiel ist $q^1 = iqi^{-1}$ etc. Betrachten wir nun die Kettenregel. Sie wird benötigt, wenn man von den

$x$–Variablen zu den $q$–Variablen und umgekehrt wechseln will. Löst man die obigen Gleichungen analog zu (6-5) nach den alten Variablen auf, so erhält man

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{4}(q^0 + q^1 + q^2 + q^3) \\ x_1 &= \frac{1}{4i}(q^0 + q^1 - q^2 - q^3) \\ x_2 &= \frac{1}{4j}(q^0 - q^1 + q^2 - q^3) \\ x_3 &= \frac{1}{4k}(q^0 - q^1 - q^2 + q^3). \end{aligned} \tag{6-20}$$

Die Kettenregel ergibt sich damit zu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q^j} \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{6-21}$$

Die Terme $\partial x_i / \partial q^j$ sind für die Transformation (6-20) konstant. Man erhält für $q = q^0$ fest die folgenden Koeffizienten

$$\left\{ \tfrac{1}{4}, -\tfrac{i}{4}, -\tfrac{j}{4}, -\tfrac{k}{4} \right\} \quad . \tag{6-22}$$

In Kapitel 1 wurde genau diese Wahl für die Hilfsfelder des skalaren Falls getroffen! Die Bedingung, daß $\psi$ monogenetisch ist lautet damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x)}{\partial q} &= \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - i\frac{\partial}{\partial x_1} - j\frac{\partial}{\partial x_2} - k\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\psi \\ &= \frac{1}{4} D_R \psi = 0. \end{aligned} \tag{6-23}$$

Mit $D_L D_R \equiv \Delta$ (wir haben eine euklidische Algebra) sind solche Funktionen auch harmonisch. Um eine exakte Verbindung zum Hilfsfeldformalismus herzustellen, müßten jedoch die Konjugationen genauer untersucht werden. Die formale Analogie der CRC Bedingung und des Hilfsfeldformalismus ist jedoch hier schon offensichtlich.

Wir wollen jetzt noch eine weitere Eigenschaft monogenetischer Funktionen anführen.

Die wichtigste Eigenschaft der Propagatoren besteht in der Bildung reproduzierender Kerne

$$\psi(x') = \int F(x', x)\psi(x)dx. \tag{6-24}$$

Dieser Eigenschaft verdanken sie ihren Namen. Sie gilt jedoch nur für (hyper)holomorphe oder äquivalent monogenetische Funktionen. Im $m$–dimensionalen Fall ergibt sich mit dem verallgemeinerten Cauchyintegralkern (6-8)

$$\phi(w, q) = \frac{\bar{w} - \bar{q}}{|w - q|^m} \tag{6-25}$$

und dem Volumen der $m$–dimensionalen Einheitskugel $\omega_m$ folgender Ausdruck [Gilb 91]:

$$
\begin{aligned}
f(w) &= \frac{1}{\omega_m}\int_{\partial M}\frac{\bar{w}-\bar{q}}{|w-q|^m}d\sigma(q)f(q) \\
&\quad -\frac{1}{\omega_m}\int_{M}\frac{\bar{w}-\bar{q}}{|w-q|^m}D_R f(q)dV(q).
\end{aligned} \tag{6-26}
$$

Der zweite Term verschwindet genau dann, wenn $f$ eine (rechtsreguläre) monogenetische Funktion ist. Er wächst mit dem Volumen und wird daher schneller singulär als der erste Term. Eine Störungsreihe mit diesem Integralkern führt in jeder Ordnung zu neuen Singularitäten immer des gleichen Typs. Eine Diskussion dieser Integralkerne findet sich auch in [Hest 84].

Betrachten wir noch den Spezialfall der Quaternionen und setzen dazu

$$
\begin{aligned}
w &= p^0 + p^k\alpha_k \\
q &= q^0 + q^k\alpha_k.
\end{aligned} \tag{6-27}
$$

Hierbei benutzt man die Diracmatrizen $\alpha_k$, die ihr Vorzeichen unter der Konjugation ändern. Man erhält damit für den Integralkern (6-8)

$$
\phi(p,q) = \frac{(p^0-q^0)-(p^k-q^k)\alpha_k}{((p^0-q^0)^2+(p^k-q^k)(p_k-q_jk))^2}, \tag{6-28}
$$

also einen typischen quantenfeldtheoretischen Integralkern. Die reproduzierende Eigenschaft besitzt er wiederum nur für monogenetische Funktionen. Es existieren ausführliche mathematische Untersuchungen, die nur noch auf eine Anwendung in der Quantenfeldtheorie warten. Auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen[1] lassen sich auf diese Weise behandeln. Die linearisierende Wirkung der Cliffordabbildung ermöglicht auch dort ein besseres Arbeiten.

Der wichtigste Punkt einer algebraischen Verallgemeinerung der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden betrifft die Definition von „Composites“ und die Algebraisierung der schwachen Abbildung [Jarv 93a].

So läßt sich die Clifford–algebraische Sicht zwar auf bosonische Theorien und Kopplungstheorien verallgemeinern, nicht jedoch auf das Composite–Konzept selbst [Faus 95c, Stum 96]. Die für solche Abbildungsrechnungen benutzten Compositewellenfunktionen werden aus Bethe–Salpeter–ähnlichen Gleichungen gewonnen, die wiederum durch algebraische Konzepte ersetzt werden müssen.

Den Ansatzpunkt hierzu bildet die Theorie der Vertexoperatoren [Kac 90, Jarv 93a, Bake 95]. Dies sind Laurentreihen mit Koeffizienten, die gewöhnliche Antikommutatorrelationen erfüllen. Die Vertexoperatoren selbst besitzen dann bosonischen Charakter. Man betrachtet solch ein Vorgehen als Bosonisierung der Theorie. Nun leidet dieser Zugang darunter, daß nur niederdimensionale Modelle ($d = 1, 2$) damit zugänglich sind. Es sollte nun gelingen, mittels

[1] Solche Differentialgleichungssyteme können für Spezialfälle exakt gelöst werden. Beispiele dazu bilden die KP– und BKP–Hierarchien [Bake 93]. Sie hängen mit q–Deformationen zusammen [Jarv 93a].

der monogenetischen Funktionentheorie auch quaternionenwertige Laurentreihen dazu heranziehen zu können, um höherdimensionale Vertexoperatoren zu definieren. Bereits bekannt ist, daß deformierte Cliffordalgebren zu verallgemeinerten Boson–Fermion–Korrespondenzen gehören. Wir hatten nun in Kapitel 2 gesehen, wie die Normalordnung über den dann energieabhängigen Propagator Yang–Baxter–Symmetrien realisieren kann. Betrachtet man die gerade Unteralgebra wieder als eigenständige Cliffordalgebra, so hat diese i.a. eine deformierte Kommutatorstruktur. Die Behandlung von Cliffordalgebren mit nichtsymmetrischen Bilinearformen, wie sie in dieser Arbeit vorgeführt wurde, erlaubt es dann, mehrere Deformationsparameter einzuführen und diese aus der größeren Algebra heraus zu beschreiben [Faus 95c]. Vorüberlegungen zeigen, daß insbesondere solche Deformationen, deren Parameter $q$ eine Wurzel der Eins sind ($q^n = 1$), sehr leicht mit nichtdeformierten Cliffordalgebren mit nichtsymmetrischer Bilinearform beschrieben werden können. Damit lassen sich die Deformationsparameter der von den Bivektoren erzeugten Unteralgebra *berechnen*.

Die Beschreibung von Wurzelsystemen zu unendlichdimensionalen Liealgebren gestaltet sich mit Cliffordalgebren als besonders einfach. Moody [Mood 95] nennt die zugrundeliegenden Gitter „geometric lattices“. Diese Gitter bilden quadratische Räume und besitzen somit auf eine kanonische Weise eine Cliffordalgebrastruktur [Knus 91, Hahn 94]. Daher können Zuordnungen von Witt–, Virasoro–, Kac–Moody– und Cliffordalgebren über die generalisierten Cartanmatrizen gefunden werden.

Wieder liefert dann die Boson–Fermion–Korrespondenz die konstruktive Verbindung zur Darstellung der verallgemeinerten Liesymmetrie. Man kann erhoffen, mit solchen Methoden exakt lösbare Subsysteme der Funktionalgleichung zu erhalten. Solche Subsysteme werden über ihre algebraischen Eigenschaften bestimmt. Sie sollten dann als „composite“ benutzt werden, um mit Hilfe der schwachen Abbildung ihre Dynamik zu bestimmen. Integrable Systeme besitzen zudem über ihre topologischen Eigenschaften diskrete „Quantenzahlen“, die ein diskretes Spektrum liefern.

Die Entwicklung und Anwendung eines solchen Zugangs sollte zuerst an einfachen Beispielen wie BCS–Theorie oder (fraktionalem) Quanten–Hall-Effekt erfolgen. Man kann sich davon viele neue Einblicke in die mikroskopische Funktionsweise dieser Effekte erhoffen. Nicht zuletzt erscheint die hier angedeutete Verknüpfung der doch recht unterschiedlichen Gebiete, eine interessante Aufgabe für weitere Forschungen darzustellen. Die algebraische Neuformulierung der fermionischen Quantenfeldtheorie hat so zu vielfältigen neuen Fragen und Möglichkeiten geführt.

# Anhang A

## Mathematische Definitionen und Sprechweisen

In diesem Anhang sollen einige grundlegende Definitionen und Theoreme angeführt werden, die die Theorie der Cliffordalgebren tangieren. Es kann hier jedoch nur die Klärung des Sprachgebrauchs sichergestellt werden, für die Entwicklung der Theorie wird auf die mathematische Lehrbuchliteratur verwiesen.

Die Theorie der Algebren und Standardbegriffe der Algebra sind dem Lehrbuch von Scheja und Storch [Sche 80, Sche 81, Sche 88] entnommen. Tensoralgebren und speziell die Verbindung zur Cliffordalgebra findet sich in sehr kompakter Form bei Chevalley [Chev 54, Chev 55]. Die Darstellung hier folgt Knus in Bezug auf die Cliffordalgebren [Knus 91]. Eine klare nicht allzu formale Darstellung solcher Ideen, allerdings mit Zielrichtung auf die Liealgebren, findet sich in Moody und Pianzola [Mood 95]. Die Cliffordalgebra, der algebraische Spinorbegriff und die mit diesen Algebren verbundenen verschiedenen Gruppen etc. finden sich in den Büchern von Hestenes, Porteous und in Benn und Tucker [Chev 54, Hest 66, Hest 84, Hest 86, Port 81, Benn 87].

Die im Weiteren angegebenen Zitate werden *nicht* durch ihre Seitenzahl in der Bibliographie erwähnt. Zitate an Definitionen und Theoremen zeigen an, welchen Lehrbüchern und Monographien diese entnommen wurden, nicht jedoch die Urheberschaft.

**Definition: A.1** ([Sche 80]) *Seien $M, N$ Mengen und $M \times N$ die Menge der Paare $(x,y)$, $x \in M$, $y \in N$. ($(x,y)$ ist verschieden von $(y,x)$ sowie verschieden von der Menge $\{x,y\} = \{y,x\}$.) Eine* **Relation** *zwischen $M$ und $N$ ist eine Teilmenge $R$ von $M \times N$. Bei $M = N$ heißt $R$ eine Relation in oder auf $M$.*

**Bemerkung:** Relationen von zwei (nicht notwendig verschiedenen) Mengen heißen binäre Relationen. Es können auch mehrstellige Relationen betrachtet werden.

Man schreibt $(x,y) \in R$ für eine beliebige (binäre) Relation oft als $xRy$. Für spezielle Relationen werden oft andere Zeichen als $R$, so z.B. $(\sim, =, \cong, \equiv, \geq, \leq, \ldots)$, benutzt.

Ist $R$ eine Relation zwischen $M$ und $N$, so wird als **Umkehrrelation** oder **inverse Relation** zu $R$ die Relation $R^{-1} := \{(y,x) \in N \times M | (x,y) \in R\}$ zwischen $N$ und $M$ bezeichnet. Ist z.B. $R$ der Graph einer bijektiven Abbildung $f : N \to M$, ($(x,y) = (x, f(y)) \in R$), so ist $R^{-1}$ der Graph von $f^{-1}$.

Spezielle Eigenschaften einer binären Relation $R$ sind z.B.:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\forall x \in M$ ist $xRx$ | Reflexivität |
| (2) | $\forall x, y \in M$ gilt: Aus $xRy$ folgt $yRx$ | Symmetrie |
| (3) | $\forall x, y \in M$ gilt: Aus $xRy$ und $yRx$ folgt $x = y$ | Antisymmetrie |
| (4) | $\forall x, y, z \in M$ gilt: Aus $xRy$ und $yRz$ folgt $xRz$ | Transitivität |

**Definition: A.2** ([Sche 80]) *Eine binäre Relation in der Menge $M$ heißt eine* **Äquivalenzrelation**, *wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Man schreibt Äquivalenzrelationen für $xRy$ als $x \underset{R}{\sim} y$ oder $x \sim y$, wenn keine Verwechslung möglich ist.*

**Definition: A.3** ([Sche 80]) *Mit $[x]$ für $x \in M$ bezeichnet man die Teilmenge $[x] = \{y \in M | x \sim y\}$ aller zu $x$ äquivalenten Elemente von $M$. Die so definierten Mengen heißen die* **Äquivalenzklassen** *von $M$ (bezüglich der in Rede stehenden Äquivalenzrelation).*

**Theorem: A.1** ([Sche 80]) *Sei $R$ eine Äquivalenzrelation in der Menge $M$. Dann ist $M$ Vereinigung seiner Äquivalenzklassen bezüglich $R$. Diese Äquivalenzklassen sind paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen von $M$.*

**Bemerkung:** Siehe dazu die Definitionen zur Graduierung.

Sei $R$ eine Äquivalenzrelation in $M$. Die Menge der Äquivalenzklassen von $M$ bezüglich $R$ wird mit $M/R$ oder $M$ mod $R$ (lies: $M$ modulo $R$) bezeichnet und die **Quotientenmenge** von $M$ bezüglich $R$ genannt. Für die $x$ zugeordnete Äquivalenzklasse sind neben $[x]$ oder genauer $[x]_R$, Schreibweisen wie $x/R$ (lies: $x$ modulo $R$) etc. gebräuchlich.

Die surjektive Abbildung

$$x \quad \to \quad x/R \tag{A-1}$$

von $M$ auf $M/R$ heißt **kanonische Abbildung** oder **kanonische Projektion** von $M$ auf $M/R$. Ist $X \in M/R$ und $x \in M$ mit $[x] = X$, so heißt $x$ ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse $X$.

**Bemerkung: Ordnungen** sind reflexive, antisymmetrische und transitive binäre Relationen.

**Definition: A.4** ([Sche 80]) *Sei $A$ ein Ring. Eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe $V$ zusammen mit einer (multiplikativ geschriebenen) Operation von $A$ auf $V$ heißt ein $A$–***Modul**, *wenn folgende Bedingungen für alle $a, b \in A$ und $x, y \in V$ erfüllt sind:*

$$1_A x = x \tag{A-2}$$

$$a(bx) = (ab)x \tag{A-3}$$

$$a(x + y) = ax + ay \tag{A-4}$$

$$(a + b)x = ax + bx \tag{A-5}$$

**Bemerkung:** Der Modul–Begriff ist eine Verallgemeinerung des Vektorraumbegriffes. Viele Eigenschaften der Vektorräume gelten auch für Moduln, alle Eigenschaften von Moduln finden sich im Vektorraum wieder.

**Definition: A.5** ([SCHE 80]) *Moduln über einem Divisionsbereich* **K** *heißen gemeinhin* **K–Vektorräume**. *Die Elemente eines K–Vektorraumes werden* **Vektoren** *genannt. Ein Vektorraum über dem Körper* **R** *der reellen Zahlen (bzw. dem Körper* **C** *der komplexen Zahlen) heißt ein* **reeller** *(bzw.* **komplexer***)* **Vektorraum**.

**Bemerkung:** Es gilt die Klammerkonvention, die besagt, daß die Operation $ax = (ax)$ stärker bindet als die Addition in $A$ oder $V$.
**Bemerkung:** Der Begriff **Vektor** stammt von R. Hamilton. Hamilton verband mit diesem Begriff immer auch eine **Multiplikation**, wie sie z.B. für Vektorelemente einer Cliffordalgebra gegeben ist. Der oben definierte Vektorbegriff ist daher von dem Hamiltonschen verschieden.
**Bemerkung:** Man unterscheidet zwischen Links– und Rechtsmoduln, je nachdem ob die Operation links oder rechts geschrieben wird. Es ist möglich, mehrere (z.B. zwei) Operationen auf einer Abelschen Gruppe zu definieren. Sind diese kompatibel, so spricht man vom $A$–**(bi)–Modul**. Mit $A^{op}$, dem entgegengesetzten oder oppositionellen Ring zu $A$ wird aus dem $A$–Linksmodul ein $A$–Rechtsmodul.

**Definition: A.6** ([SCHE 80]) *Sei $V$ ein $A$–Modul. Ist $x_i, i \in \mathcal{I}$, eine Familie von Elementen aus $V$, so heißt der kleinste $A$–Untermodul von $V$, der alle $x_i, i \in \mathcal{I}$ enthält,* **der von den $x_i, i \in \mathcal{I}$ erzeugte $A$–Untermodul** *von $V$. Ist $W$ ein Untermodul von $V$ und $W$ gleich dem von dem System $x_i, i \in \mathcal{I}$, erzeugten Untermodul, so heißt $x_i, i \in \mathcal{I}$ ein* **Erzeugendensystem** *von $W$. Ist $M$ eine Teilmenge von $V$, so bezeichnet man den von $M$ erzeugten Untermodul ($M$ dabei als Familie mit der Identität $Id_M$ als Indizierung auffassend) mit $AM$.*

**Definition: A.7** ([SCHE 80]) *Sei $A$ ein Ring. Ein $A$–Untermodul des $A$–Linksmoduls $A$ (bzw. des $A$–Rechtsmoduls $A$) heißt* **Linksideal** *(bzw.* **Rechtsideal***) in $A$. Eine Teilmenge von $A$, die sowohl Links– als auch Rechtsideal ist, heißt ein* **beidseitiges** *oder* **zweiseitiges Ideal** *oder* **Ideal** *in $A$ schlechthin.*

**Bemerkung:** Ist die Indexmenge $\mathcal{I}$ nicht endlich ($chard\ \mathcal{I} \equiv \#\mathcal{I} \geq \infty$), so kann $A$ immer noch durch ein Erzeugendensystem $x_i, i \in \mathcal{I}$ gegeben werden. Man schreibt in diesem Fall auch $A^{\mathcal{I}}$. Die mathematisch genaue Behandlung dieses Falles erfordert den Begriff der Filter und Ultrafilter [SCHE 80] §20. In der Arbeit wird auf diese Komplikation nicht eingegangen, weshalb hier auf eine Erläuterung verzichtet wird.

**Definition: A.8** ([SCHE 80]) *Eine Familie $(c_i)_{i\in\mathcal{I}} \in A$ heißt eine* **lineare Relation** *der $x_i, i \in \mathcal{I}$, wenn $\sum_{i\in\mathcal{I}} c_i x_i = 0$ ist. Die Menge der Relationen $x_i, i \in \mathcal{I}$, wird mit $Rel_A(x_i; i \in \mathcal{I})$, $Rel(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ oder $Rel(x_i)$ bezeichnet.*

**Bemerkung:** Lineare Relationen heißen nach Hilbert **Syzygien**. Eine Verwechslung mit den Mengenrelationen ist nicht zu befürchten.
**Bemerkung:** Relationen werden in der Arbeit benutzt, um Ideale (in Algebren) zu definieren. Sie beziehen sich jedoch im obigen Sinne auf Mengen. Es ist völlig legitim, Relationen zwischen Elementen verschiedener Mengen zu definieren. So identifiziert das zu einer Cliffordalgebra gehörige Ideal Elemente aus $\mathbf{K}$ und $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$.

**Definition: A.9** ([SCHE 80]) *Sei $A$ ein kommutativer Ring. Ein $A$–Modul $B$ zusammen mit einer Verknüpfung auf $B$, die wir multiplikativ schreiben und* **Multiplikation** *nennen wollen, heißt eine $A$–***Algebra** *oder eine* **Algebra über** *$A$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

*(1) $B$ ist bezüglich der von der $A$–Modulstruktur herrührenden Addition und der Multiplikation ein Ring.*

*(2) Für alle $a, b \in A$ und alle $x, y \in B$ gilt:*

$$(ax)(by) = ab(xy)$$

**Bemerkung:** Sei $B$ eine $A$–Algebra. $B$ ist dann ein Ring. Die Multiplikation ist demgemäß assoziativ. Ferner besitzt $B$ ein Einselement. Man spricht deshalb genauer von einer **assoziativen $A$–Algebra mit Einselement**. Solche Algebren hießen früher auch **hyperkomplexe Systeme** über $A$ mit Eins. (Siehe die Bemerkung zu den Liealgebren unten.)

**Definition: A.10 (Freie Algebren** [CHEV 55]**)** *Sei $B$ eine $A$–Algebra, generiert von den Elementen $x_i, i \in \mathcal{I}$, mit irgendeiner Indexmenge $\mathcal{I}$. Sei $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ eine endliche Sequenz der Elemente aus $\mathcal{I}$ und setze $y_\sigma = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$. Die Zahl $n$ heißt* **Länge** *von $\sigma$. Für die leere Sequenz $\sigma_0$ schreiben wir $y_{\sigma_0} = 1$. Man definiert die Komposition zweier endlicher Sequenzen $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ und $\sigma' = (j_1, \ldots, j_m)$ durch*

$$\sigma\sigma' = (i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m). \tag{A-6}$$

*Diese Komposition ist per Konstruktion assoziativ $(\sigma\sigma')\sigma'' = \sigma(\sigma'\sigma\prime\prime)$.*

**Theorem: A.2** ([CHEV 55]) *Jedes Element von $B$ ist eine Linearkombination der $y_\sigma$, wobei $\sigma$ über alle endlichen Sequenzen der Elemente aus $\mathcal{I}$ läuft.*

**Definition: A.11** ([CHEV 55]) *Sind die $y_\sigma$ linear unabhängig über $A$, dann heißt $B$* **freie assoziative Algebra** *und die Menge $(x_i), i \in \mathcal{I}$ heißt* **freies System von Generatoren** *(Erzeugenden) von $B$.*

**Theorem: A.3** ([CHEV 55]) *Eine freie assoziative Algebra mit einem freien System von Generatoren (Erzeugenden) ist universell.*

Homomorphismen können für verschiedene Strukturen auftreten, z.B. für Moduln oder Algebren. Es wird dann von einem Modul– oder Algebrahomomorphismus gesprochen. Besteht keine Verwechslungsgefahr, so sagt man einfach Homomorphismus. Die jeweiligen Homomorphismen transportieren die gesamte Struktur. Hier sollen Homomorphismen für Algebren definiert werden, da hauptsächlich Algebrahomomorphismen in der Arbeit verwendet werden.

**Definition: A.12** ([Mood 95]) *Eine lineare Abbildung $f$ der $A$–Algebra $B$ in die $A$–Algebra $B'$, $f : B \rightarrow B'$, so daß mit $x, y \in B, \quad x', y' \in B'$ und $a, b \in A$ gilt:*

*(1)* $f(1) = 1'$

*(2)* $f(xy) = f(x)f(y) = x'y'$

*(3)* $f(ax + by) = af(x) + bf(y) = ax' + by'$,

*heißt* **Algebrahomomorphismus**.

Analoges gilt für Moduln etc. Man spricht weiterhin von **Monomorphismen** (= injektiver Homomorphismus), **Epimorphismen** (= surjektiver Homomorphismus), **Isomorphismen** (= bijektiver Homomorphismus) sowie von **Endomorphismen** (=Homomorphismus von $B$ nach $B$ selbst). Ein **Automorphismus** ist ein bijektiver Endomorphismus. Ein **Antiautomorphismus** $\sigma$ ist ein bijektiver Endomorphismus, für den anstelle von (2) $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ gilt. Als **Periode** des (Anti)–Automorphismus wird die Zahl $n$ bezeichnet, für die gilt, daß $f^n = Id$ (resp. $\sigma^n = Id$) ist. (Anti)–Automorphismen der Periode 2 heißen **(anti) involutiv**.

**Definition: A.13** ([Chev 55]) *Sei $G$ eine additive Gruppe. Eine $G$–***graduierte Algebra** *ist eine $A$–Algebra $B$ zusammen mit einer direkten Summenzerlegung als Modul*

$$B \;=\; \sum_{g \in G} B_g, \tag{A-7}$$

*so daß die $B_g$ Untermoduln von $B$ derart sind, daß gilt*

$$B_g B_{g'} \;\subset\; B_{g+g'}. \tag{A-8}$$

*Das heißt, für $x \in B_g$ und $y \in B_{g'}$ folgt $xy \in B_{g+g'}$.*

**Bemerkung:** Es gibt unter anderen die folgenden wichtigen Typen von Graduierungen:

(1) Mit $G = \mathbf{Z}$ der Gruppe der ganzen Zahlen (unter der Addition) heißt die Algebra **Z–graduiert** oder **graduiert** schlechthin.

Eine freie Algebra kann mit der Definition $g \in \mathbf{Z}$, $B_g = \{0\}$ für alle $g < 0$ als graduierte (**Z**–graduierte) Algebra betrachtet werden.

(2) Ist $G$ die Gruppe zweier Elemente 0 und 1, so schreibt man $B = B_+ \oplus B_-$ anstelle von $B = B_0 \oplus B_1$ und $B$ heißt **semigraduiert** oder $Z_2$–**graduiert**.

**Bemerkung:** Die $G$–Graduierung von Cliffordalgebren wird üblicherweise, entgegen der obigen Definition, als $\mathbf{Z}$–Graduierung oder einfach als Graduierung bezeichnet. Cliffordalgebren über endlicherzeugten Moduln vom Rang $n$ besitzen eine $2^n$–Graduierung, da sie als Modul von $2^n$ vielen Elementen erzeugt werden.

**Definition: A.14** ([Mood 95]) *Eine* **Liealgebra** *$L$ wird mit $x, y, z \in L$ durch die Bedingungen*

*LA1:* $[x, y] + [y, x] = 0$

*LA2:* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

*(LA3:* $[x, x] = 0$ *für alle* $x \in L$.*)*

*gegeben. Über Körpern der Charakteristik $\neq 2$ ist LA1: äquivalent zu LA3:.*

**Bemerkung:** Eine Liealgebra besitzt **kein** Einselement und ist nur unter extremen Bedingungen assoziativ. Es ist aber möglich (für perfekte Liealgebren), Liealgebren als Faktoralgebren von freien assoziativen Algebren zu erhalten. Diese Algebren heißen **assoziative Einhüllende** oder **universelle einhüllende Algebren**.

**Definition: A.15** ([Sche 88]) *Sei $A$ ein kommutativer Ring und $V$ ein $A$–Modul. Eine verallgemeinerte* **quadratische Form** *$Q$ ist durch die Funktion $Q : V \to A$ gegeben mit der Eigenschaft:*

$$Q(ax) = a^2 Q(x) \qquad \forall a \in A, x \in V. \tag{A-9}$$

**Definition: A.16** ([Sche 88]) *Die Funktion $B_p : V \times V \to A$ zur quadratischen Form $Q$ ist definiert als*

$$B_p(x, y) := Q(x + y) - Q(x) - Q(y), \tag{A-10}$$

*sie heißt* **polare Bilinearform**

**Theorem: A.4** ([Sche 88]) *Ist $V$ ein freier $A$–Modul und 2 eine Einheit in $A$, so rühren alle verallgemeinerten quadratischen Formen von Bilinearformen her.*

**Bemerkung:** Ist 2 eine Einheit in $A$ und $V$ ein freier $A$–Modul, so ist $Q(x) = 1/2 B_p(x, x)$.
**Bemerkung:** Sei $\mathbf{K}$ ein Körper (mit *char* $\mathbf{K} \neq 2$) und $V$ ein $\mathbf{K}$–Vektorraum. Besitzt $\mathbf{K}$ eine von der Identität verschiedene Involution $\sigma$, so kann man zeigen, daß die Sesquilinearformen schon durch ihre Werte auf der Diagonalen bestimmt sind, [Sche 88] Lemma 72.2.. Solche Sesquilinearformen heißen **Hermitesch**

bzw. **Schiefhermitesch**. Das Konzept der Signatur kann für solche Körper verwendet werden.

„Die Cliffordalgebra ist fundamental für die Untersuchung quadratischer Räume und ihrer orthogonalen Gruppen", Max Albert Knus [Knus 91].

Cliffordalgebren können benutzt werden, um die Diskriminante, die Arf–Invariante und die Witt–Invariante eines quadratischen Raumes zu definieren. Diese Begriffe stehen in engem Zusammenhang zur algebraischen Cohomologie. Die Bedeutung der Diskriminante ist z.B. in [Faus 95b] erläutert. Hier soll im Wesentlichen nur die Nomenklatur erläutert werden. Diese wird nur insoweit entwickelt, als sie in der Arbeit benötigt wird.

**Definition: A.17** ([Knus 91]) *Sei $A$ ein kommutativer Ring und $Q$ eine verallgemeinerte quadratische Form mit polarer Bilinearform $B_p$. Das Paar $(M,Q)$, wobei $M$ ein endlich erzeugter projektiver Modul und $Q$ die verallgemeinerte quadratische Form ist, heißt* **quadratischer Modul**. *Ist zudem die polare Bilinearform $B_p$ zur quadratischen Form $Q$ nicht singulär, so heißt das Paar $(M,Q)$* **quadratischer Raum**.

**Theorem: A.5** ([Knus 91]) *Sei $K$ eine Bilinearform auf dem $A$–Modul $M$ und $*$ eine möglicherweise triviale Involution von $A$. Läßt sich $B_p = K + K^*$ mit $K(x,x) = Q(x)$ schreiben, so wird $K$ von $Q$ bis auf eine alternierende Form bestimmt.*

**Bemerkung:** In gewisser Weise läßt sich somit eine quadratische Form als die Äquivalenzklasse einer Bilinearform modulo den alternierenden Formen betrachten (Klingenberg–Witt 1954, siehe [Knus 91]).

**Definition: A.18** ([Knus 91]) *Sei $A$ ein kommutativer Ring und $(M,Q)$ ein quadratischer $A$–Modul sowie $\iota$ ein Homomorphismus von Moduln in die assoziative $A$–Algebra $CL$ mit Eins, so daß gilt:*

$$[\iota(x)]^2 = Q(x)1_{CL} \qquad \forall x \in M. \tag{A-11}$$

*Die* **Cliffordalgebra** *zu $(M,Q)$ ist die Algebra $CL$ zusammen mit der $A$–linearen Abbildung $\iota$, so daß für jede $A$–Algebra $B$ und jede $A$–lineare Abbildung $f : M \to B$ mit $[f(x)]^2 = Q(x)1_B$ ein eindeutiger $A$–Algebrahomomorphismus $h : CL \to B$ existiert, mit $h\iota = f$.*

**Theorem: A.6 (Universalität,** [Knus 91]) *Für jeden quadratischen Modul $(M,Q)$ existiert eine bis auf Isomorphien eindeutige Cliffordalgebra.*

**Bemerkung:** Aufgrund der Universalität der Cliffordalgebra ist es angebracht, von **der** Cliffordalgebra zu sprechen. Man bezeichnet Cliffordalgebren auch mit $CL(M,Q)$ oder $CL(Q)$. Aus der Definition der Cliffordalgebra folgt die Beziehung

$$\iota(x)\iota(y) + \iota(y)\iota(x) \quad = \quad B_p(x,y)1_{CL}, \tag{A-12}$$

wobei $B_p$ die zu $Q$ polare Bilinearform ist. Der Homomorphismus $\iota$ heißt **Cliffordabbildung**. Der in der Arbeit übliche Faktor 2 ist hier nicht aus $B_p$ herausgezogen, um die Charakteristik 2 zuzulassen.

Betrachtet man Cliffordalgebren über dem $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$), so charakterisiert man die Cliffordalgebren über die Dimension $n$ und gegebenenfalls über die Signatur $s$. Hat die nicht degenerierte quadratische Form $Q$ nun $p$ positive und $q$ negative (meist auf $\pm 1$ normierte) Eigenwerte, so schreibt man auch $CL_{p,q}$ für $CL(\mathbf{R}^n, Q)$. In $\mathbf{C}$ kann keine Signatur definiert werden. Betrachtet man jedoch Hermitesche Formen, so erhält sich der Begriff der Signatur. Dies ist z.B. in der gewöhnlichen Diractheorie der Fall.

Als Folge der Universalität erhält man das Theorem:

**Theorem: A.7** *Jeder Morphismus $\tau : (M, Q) \to (M', Q')$ induziert einen graduierten Homomorphismus $C(\tau) : CL(M, Q) \to CL(M', Q')$, so daß $\iota'\tau = CL(\tau)\iota$ mit $\iota : M \to CL(M, Q)$ und $\iota' : M' \to CL(M', Q')$ gilt.*

**Definition: A.19** ([Knus 91]) *Die Isometrie $-1_M : (M, Q) \to (M, Q)$, induziert einen Automorphismus $C(-1)$ auf $CL(M, Q)$ mit ($CL = CL_0 \oplus CL_1$)*

$$C(-1) \;=\; \begin{cases} Id & auf\;\; CL_0 \\ -Id & auf\;\; CL_1. \end{cases} \tag{A-13}$$

*Dieser Automorphismus $C(-1)$ heißt* **Standard–** *oder* **Hauptautomorphismus**. *$C(-1)$ ist involutiv und wird auch häufig mit $\hat{}$ bezeichnet.*

**Definition: A.20** ([Knus 91]) *Sei $CL(M, Q)^{op}$ die oppositionelle Algebra. Aufgrund der Universalität von $CL(M, Q)$ induziert die Abbildung $\gamma' : M \to CL(M, Q)^{op}$ gegeben durch $\gamma'(x) = \iota(x)$, $x \in M$, einen Isomorphismus $\gamma : CL(M, Q) \to CL(M, Q)^{op}$ und damit einen Antiautomorphismus von $CL(M, Q)$. Wegen $\gamma^2 = Id$, ist $\gamma$ eine Involution, diese heißt* **kanonische Antiinvolution** *oder* **Hauptantiautomorphismus**. *Wir bezeichnen $\gamma$ auch mit dem Symbol $\tilde{}$.*

**Bemerkung:** Alle obigen Begriffe lassen sich auch für Moduln $M$ bilden, die nicht endlich erzeugte projektive Moduln sind.
**Bemerkung:** Vergleiche zur Definition der Cliffordalgebra auch [Chev 54], Kapitel 2 und Kapitel 3 der Arbeit.

**Definition: A.21** ([Sche 80]) *Sei $A$ ein Ring. Die Gruppe der invertierbaren Elemente des multiplikativen Monoids von $A$ heißt die* **Einheitengruppe** *von $A$, sie wird mit $A^\times$ bezeichnet. Die Elemente von $A^\times$ heißen* **Einheiten** *von $A$. (Analoges gilt in Algebren.)*

**Definition: A.22 (Automorphismengruppe)** *Sei $s$ eine Einheit in $CL(M, Q)$ und $N$ der von den Erzeugenden und ihren Produkten aufgespannte Bimodul. Die Abbildungen $\chi : N \to N$, $\chi(x) = sxs^{-1}$ bilden die Gruppe der (inneren) Automorphismen des Bimoduls $N$.*

**Bemerkung:** Im allgemeinen wird die Cliffordalgebrastruktur von solchen Automorphismen nicht erhalten. Damit ist $\chi$ ein Algebraisomorphismus, jedoch kein Cliffordalgebraisomorphismus. Dies bezeichnen wir in der Arbeit mit **algebraischer Äquivalenz**.

**Definition: A.23 (Clifford–Lipschitz–Gruppe)** *Sei $s$ eine Einheit in $CL(M,Q)$, so daß gilt:*

$$\chi(x) = sxs^{-1} \in M, \qquad \forall x \in M. \tag{A-14}$$

*Die $\chi$ bilden eine Gruppe $\Gamma$ (Untergruppe der Automorphismengruppe), diese heißt* **Clifford–Lipschitz–Gruppe**.

**Bemerkung:** Siehe zu diesem Sprachgebrauch [Budi 88]. Man sagt zu der aufgeführten Konstruktion auch **Vektordarstellung** der Gruppe $\Gamma$, wegen [Benn 87]

$$\begin{aligned} \chi &: \Gamma \rightarrow Aut(CL(M,Q)) \\ s &: \rightarrow \chi(s) \\ & \quad \chi(s)x = sxs^{-1}. \end{aligned} \tag{A-15}$$

**Definition: A.24 ([Bour 59])** *Ein Element $s$ heißt* **zerlegbar**, *wenn es sich als (Clifford) Produkt von Elementen homogen vom Grade 1 (Vektoren) schreiben läßt*

$$s = a_1 \ldots a_n, \qquad a_i \in M \subset CL(M,Q). \tag{A-16}$$

**Theorem: A.8** *Ein Element $s$ der Einheitengruppe von $CL(M,Q)$ ist genau dann in der Clifford–Lipschitz–Gruppe, wenn $s$ zerlegbar ist.*

**Bemerkung:** Die Clifford–Lipschitzgruppe ist die Gruppe der Isometrien der quadratischen Form $Q$,

$$\begin{aligned} Q(\chi(s)x) &= Q(sxs^{-1}) = sxs^{-1}sxs^{-1} \\ &= sx^2s^{-1} = sQ(x)s^{-1} = Q(x). \end{aligned} \tag{A-17}$$

Die Wirkung (Operation) der Clifford–Lipschitz–Gruppen erhält die Cliffordalgebrastruktur. Diese Isomorphismen vermitteln dann in unserer Sprechweise die **geometrische Äquivalenz**.

Um Algebren darstellen zu können, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine wesentliche Methode ist die Darstellung der Algebren auf sich selbst. Dies wird in der Arbeit in Abschnitt 3-4 behandelt. Mit der Darstellung der Algebren erhält man auch Darstellungen der verschiedenen (multiplikativen) Gruppen. Die Clifford–Lipschitz–Gruppen werden je nach verwendetem Körper (Ring) und weiteren Eigenschaften [Benn 87, Budi 88] mit $\mathbf{Pin}_{\mathbf{K}}$ oder $\mathbf{Spin}_{\mathbf{K}}$ bezeichnet. Sie hängen zudem von der Wahl der quadratischen Form $Q$ (z.B.: $Q^{\mathbf{R}}_{p,q} \rightarrow \mathbf{Pin}_{p,q}, \mathbf{Spin}_{p,q}$) ab. Da die Spingruppen in der Arbeit selbst keine wesentliche Rolle spielen, wird hier nicht auf deren Klassifikation eingegangen. Man beachte jedoch das folgende Theorem.

**Theorem: A.9** ([Dora 93a]) *Jede (klassische, d.h. halbeinfache) Liegruppe ist in einer Spin– (bzw. Pin–) Gruppe enthalten. (Z.B.: $\mathbf{O}(p,q) \subset \mathbf{Pin}_{p,q}$.)*

**Definition: A.25** *Ein Links– (Rechts–) Ideal $\mathcal{J}^{L/R}$ heißt* **minimales Links–** *(***Rechts–***)* **Ideal***, wenn es außer 0 und $\mathcal{J}$ selbst keine Links– (Rechts–) Unterideale enthält.*

**Definition: A.26** *Ein Element heißt* **idempotent***, wenn gilt $P^2 = P$.*

**Definition: A.27** *Ein idempotentes Element $P$ heißt* **primitiv***, wenn es keine paarweise kommutierenden idempotenten Elemente $P_i$ gibt, so daß gilt:*

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i\in\mathcal{I}} P_i \\ P_i P_k &= P_k P_i, \quad \forall i,k \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{A-18}$$

**Theorem: A.10** *Primitive idempotente Elemente $P$ der Algebra $B$ erzeugen minimale Links– (Rechts–) Ideale $\mathcal{J}^{L/R}$, also*

$$BP \subset \mathcal{J}^L, \qquad (PB \subset \mathcal{J}^R). \tag{A-19}$$

Es gibt nun viele verschiedene Möglichkeiten, Spinoren zu definieren. Wir werden uns hier auf die zwei beschränken, die für die Arbeit wesentlich sind. Siehe jedoch auch [Crum 90].

**Bemerkung:** Es ist durchaus möglich, $A$–Algebren $B$ auf $A'$–Algebren $B'$ mit $A \neq A'$ darzustellen. So betrachten wir in der Arbeit vor allem reelle Cliffordalgebren, also $\mathbf{R}$–Algebren $CL$, die jedoch, wenn sie als Matrixalgebren dargestellt werden, nicht notwendig $\mathbf{R}$–Matrixalgebren ergeben. So läßt sich z.B. die Majoranaalgebra $CL_{1,3}$ als $4 \times 4$ Matrixalgebra über $\mathbf{R}$ darstellen, während die Diracalgebra als $2 \times 2$ Matrixalgebra über $\mathbf{H}$ (Quaternionen) dargestellt werden muß. Will man die Diracalgebra über $\mathbf{R}$, $CL_{1,3}(\mathbf{R}^4)$ wie gewöhnlich mittels $4 \times 4$ komplexen Matrizen darstellen, so erhält man eine Blockstruktur, die aufzeigt, daß die Diracalgebra eine Unteralgebra von $M_{4\times4}(\mathbf{C})$ ist. Man erhält also **zusätzliche** Bedingungen an $M_{4\times4}(\mathbf{C})$, um $CL_{1,3}(\mathbf{R}^4)$ als Matrixalgebra zu definieren. Es ist somit

$$M_{4\times4}(\mathbf{C}) \quad \ncong \quad CL_{1,3}(\mathbf{R}^4). \tag{A-20}$$

**Definition: A.28 (Idealspinor)** *Sei $\mathcal{S}$ ein minimales Linksideal der einfachen Cliffordalgebra $CL(M,Q)$. Die Elemente $\psi$ von $\mathcal{S}$ heißen* **Idealspinoren** *oder* **Spinoren***. Sie tragen eine irreduzible Darstellung der zu $Q$ gehörigen Pin– und Spingruppen. Das Transformationsverhalten der Spinoren $\psi$ ist einseitig, $\psi' = R\psi$.*

**Bemerkung:** Der Name Spinor stammt nach B.L. van der Waerden von Paul Ehrenfest [Budi 88].

Es ist möglich, die Cliffordalgebra auf ihrer geraden Unteralgebra $CL_+$ ($CL = CL_+ \oplus CL_-$) (nicht notwendig irredzibel) darzustellen.

**Definition: A.29 (Dirac–Hestenes oder Operatorspinor)** *Gerade Elemente der Clifford–Lipschitz–Gruppe heißen* **Dirac–Hestenes–** *oder* **Operatorspinor**.

**Bemerkung:** Die nicht offensichtliche Verbindung dieser Elemente zum „gewöhnlichen Spinorbegriff“ findet sich in der Literatur [Hest 66, Dima 83, Dima 89, Loun 85, Loun 93b, Loun 95]. Da wir diese Verbindung in der Arbeit nicht benutzen, wird sie hier nicht aufgeführt.

# Bibliographie


– ABLAMOWICZ, RAFAL –

[ABLA 95] *Clifford algebra computations with Maple*
in proceedings of "Geometric (Clifford) Algebras in Physics", Banff, Alberta Canada **1995**, im Druck
Zit. auf S.: .......... 25, 86, 91

– ABRAHAM, RALPH –

[ABRA 78] & MARSDEN, J. E.
*Foundations of mechanics*
Benjamin/Cummings **1978**
Zit. auf S.: .......... V

– ACKER, NICOLE VAN –

[ACKE 93] siehe [DORA 93A]

– ARNOL'D, VLADIMIR IGOREVICH –

[ARNO 78] *Mathematical methods of classical mechanics*
Springer **1978**
Zit. auf S.: .......... V

– ARTIN, EMIL –

[ARTI 57] *Geometric algebra*
Interscience/New York [**1957**] **1988**
Zit. auf S.: .......... 49

– BAKER, T.H. –

[BAKE 93] & JARVIS, P.D.; YUNG, C.M.
*Hirota polynomials for the KP and BKP Hierarchies*
Lett. Math. Phys. 29 **1993** 55–62
Zit. auf S.: .......... 143

[BAKE 95] & JARVIS, P.D.; MCANALLY, D.S.
*Symmetric functions vertex operators and applications*
in Proc. of the XX Int. Colloquium "Group Theoretical Methods in Physics", Toyonaka (Japan) 4.–9. July 94, World Scientific/Singapore **1995**
Zit. auf S.: .......... 143

– BARUT, ASIM O. –

[BARU 86] & RAÇZKA, R
*Theory of group representations and applications*
World Scientific **1986**
Zit. auf S.: .......... 81

[BARU 93] *On Poisson brackets and symplectic structures for the classical and quantum Zitterbewegung*
Found. of Phys. 23(11) **1993** 1423
Zit. auf S.: .......... 50, 101

– BAYLIS, WILLIAM E. –

[BAYL 89A] & JONES, G.
*The Pauli algebra approach to special relativity*
J. Phys. A 22 **1989** 1
Zit. auf S.: .............................................. 20, 21, 103

[BAYL 89B] & JONES, G.
*Relativistic dynamics of charges in external fields: the Pauli algebra approach*
J. Phys. A 22 **1989** 17

[BAYL 92A] & HUSCHILT, J.; WEI, J.
*Why i?*
Am. J. Phys. 60(9) **1992** 788
Zit. auf S.: .............................................. 20, 23, 25

[BAYL 92B] *Classical Eigenspinors and the Dirac equation*
Phys. Rev. A 45(7) **1992** 4293
Zit. auf S.: .............................................. 23

[BAYL 93] & BONENFANT, J.; DERBYSHIRE J.; HUSCHILT, J.
*Light polarization: A geometric–algebraic approach*
Am. J. Phys. 61(6) **1993** 534
Zit. auf S.: .............................................. 103

[BAYL 94] & BONENFANT, J.; DERBYSHIRE, J.; HUSCHILT, J.
*Motion of charges in crossed and equal E and B fields*
Am. J. Phys. 62(10) **1994** 899
Zit. auf S.: .............................................. 103

– BELL, JOHN S. –

[BELL 87] *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*
Cambridge University Press **1987**
Zit. auf S.: .............................................. V

– BENN, I. M. –

[BENN 87] & TUCKER, R. W.
*Introduction to spinors and geometry with applications in physics*
Adam Hilger, Bristol **1987**
Zit. auf S.: .............................................. 20, 24, 66, 67, 145

– BERGDOLT, G. –

[BERG 93] *The complete reduction of Clifford algebras*
J. Math. Phys. 34(12) **1993** 5924
Zit. auf S.: .............................................. 66, 86, 87, 92, 132, 135

– BETHE, HANS A. –

[BETH 51] siehe [SALP 51]
Zit. auf S.: .............................................. 121

[BETH 77] & SALPETER, E.E.
*Quantum mechanics of one– and two–electron atoms*
Plenum Publ. Corp./New York **1977**
Zit. auf S.: .............................................. 121

– BIRKHOF, GARRET –

[BIRK 36] & V. NEUMANN, J.
*The Logic of Quantum Mechanics*
Ann. of Math. 37,4 **1936** 823
Zit. auf S.: .............................................. 3, 33, 45

– BJORKEN, JAMES D. –

[Bjor 66] & Drell, S.D.
*Relativistische Quantenmechanik*
Mc Graw–Hi–, Inc. [**1964**], BI–Wissenschaftsverlag/Mannheim **1966**
Zit. auf S.: ........ 10, 31, 82

– Bonenfant, J. –

[Bone 93] siehe [Bayl 93]

[Bone 94] siehe [Bayl 94]

– Bopp, Fritz –

[Bopp 40] *Eine lineare Theorie des Elektrons*
Ann. Phys. (Leipzig) 38 **1949** 345
Zit. auf S.: ........ 6

[Bopp 61] *Statistische Mechanik bei Störung des Zustandes eines physikalischen Systems durch die Beobachtung*
in Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit,
F. Bopp (ed.), Braunschweig **1961**
Zit. auf S.: ........ V

[Bopp 65] *Kanonische Quantisierung einer regularisierten Wellengleichung bei neuer Antiteilchenvorstellung*
Z. Phys. 186 **1965** 410

[Bopp 66] *Elementarvorgänge der Quantenmechanik in stochastischer Sicht*
Ann. Phys. (Leipzig) 17(7–8) **1966** 407

[Bopp 67] *Diracgleichung im Gitterraum als Beispiel einer aus Elementarprozessen folgenden Theorie*
Z. Phys. 200 **1967** 117

[Bopp 83] *Quantenphysikalischer Ursprung der Eichidee*
Ann. Phys. (Leipzig) 7(40) **1983** 317

[Bopp 84] *Sein oder Nichtsein als Grundfrage der Quantenphysik*
Z. Naturforsch. 39a **1984** 113

[Bopp 85a] *Newtons Wissenschaftslehre als Basis der Quantenphysik*
Ann. Phys. (Leipzig) 7(42) **1985** 217

[Bopp 85b] *Eine Welt im Werden*
Z. Naturforsch. 40a **1985** 1171
Zit. auf S.: ........ V

– Born, Max –

[Born 71] *The Born–Einstein–Letters*
ed. M. Born, Macmillen London **1971**
Zit. auf S.: ........ V

– Borne, Thomas –

[Born 91] *Quantenfeldtheoretische Energiedarstellung und „schwache Abbildung“*
Diplomarbeit, Universität Tübingen **1991**
Zit. auf S.: ........ 3

[Born 94] siehe [Stum 94]

– Boudet, R. –

[Boud 69] & Quilichini, P.
*Géométrie différentielle*
C. R. Acad. Sc. Paris, t.268 **1969** 724–726
Zit. auf S.: ........ 49

[BOUD 90] *The role of Planks constant in the Lamb shift standard formulas*
in New Frontiers in QED and Quantum Optics
A. O. Barut (ed.), Plenum Pub. Corp./New York **1990** 443
Zit. auf S.: ........ 100

– BRACKX, FRED –
[BRAC 82] & DELANGHE, R.; SOMMEN, F.
*Clifford analysis*
Research Notes in Mathematics 76, Pitman Books Ltd. **1982**
Zit. auf S.: ........ V, 17, 50, 140, 140

– BRAUN, HEL –
[BRAU 66] & KOECHER, M.
*Jordan–algebras*
Springer/Berlin **1966**
Zit. auf S.: ........ 17, 33

– BREUNINGER, RALF –
[BREU 95] *Kompakte und nichtkompakte Quantendynamik*
Dissertation, München **1995**
Zit. auf S.: ........ 58

– BROGLIE, LOUIS–VICTOR DE –
[BROG 71] *La réinterprétation de la méchanique ondulatoire 1re partie: Principles généraux*
Gauthier Villar, Paris **1971**
Zit. auf S.: ........ V

[BROG 90] *Heisenberg's uncertainties and the probabilistic interpretation of wave mechanics*
Kluwer **1990**
Zit. auf S.: ........ V

– BUDINICH, PAOLO –
[BUDI 88] & TRAUTMANN, A.
*The spinorial chessboard*
Trieste Notes in Physics, Springer **1988**
Zit. auf S.: ........ 20, 24, 66, 67, 110

– BUDÓ, ÁGOSTON –
[BUDO 53] *Theoretische Mechanik*
VEB Verlag Deutscher Wissenschaften [**1953**], **1980**
Zit. auf S.: ........ 48

– BOURBAKI, NICOLAS –
[BOUR 59] *Algèbre*
Herrmann/Paris **1959**
(und – Bourbaki **1989**, *Elements of mathematics*, bei Springer/Berlin)
Zit. auf S.: ........ 48, 57, 84, 91, 93, 135

– BURKE, W.L –
[BURK 70] *Runaway solutions: Remarks on asymptotic theory of radiation damping*
Phys. Rev. A2 **1970** 1501
Zit. auf S.: ........ 6

– CASANOVA, GASTON –
[CASA 70] C.R. Acad. Sci. (Paris) Ser. A270 **1970** 1202
Zit. auf S.: ........ 49

– CHENG, TA–PEI –

[Chen 84] & Li, L.
*Gauge theory of elementary particle physics*
Oxford Science Publications **1984**
Zit. auf S.: ........ 50, 82

– Chevalley, Claude –

[Chev 49] *Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leur représentations*
C.R., 227 **1949** 1136–1138
Zit. auf S.: ........ 57

[Chev 54] *The algebraic theory of spinors*
Columbia University Press/New York **1954**
Zit. auf S.: ........ 69, 73, 86, 110, 145, 145

[Chev 55] *The construction and study of certain important algebras*
The Mathematical Society of Japan **1955**
Zit. auf S.: ........ 57, 63, 70, 72, 145

– Chisholm, John Stephen Roy –

[Chis 89] & Farwell, R. S.
*Unified spin gauge theories for the four fundamental forces*
in [CL II] **1989** 363
Zit. auf S.: ........ 28

– Clifford Algebras ... –

[CL I] *Clifford algebras and their application in mathematical physics*
I. Workshop held at Canterbury, UK, **1985** J.S.R. Chisholm; A.K. Common (eds.); Kluwer **1986**

[CL II] *Clifford algebras and their application in mathematical physics*
II. Workshop held at Montpellier, France, **1989** A. Micali; R. Boudet; J. Helmstetter (eds.); Kluwer **1990**

[CL III] *Clifford algebras and their application in mathematical physics*
III. Workshop held at Deinze, Belgium, **1993** F. Brackx; R. Delanghe; Serras (eds.); Kluwer **1993**

– Clifford, William Kingdon –

[Clif 76] Proc. Math. Soc. London 7 **1876** 135, in [Math]
Zit. auf S.: ........ 47

[Clif 78] *Applications of Grassmann's extensive algebra*
Am. J. Math. 1 **1878** 350–358
Zit. auf S.: ........ 15, 23, 23, 47

– Crumeyrolle, Albert –

[Crum 90] *Orthogonal and symplectic Clifford algebras, spinor structures*
Mathemathics and its Applications, **1990** Kluwer
Zit. auf S.: ........ 67, 67, 67, 73, 109, 135

– Darwin, Charles Galton –

[Darw 28] *The wave equations of the electron*
Proc. Royal Soc. London A118 **1928** 654
Zit. auf S.: ........ 48, 48

– Daviau, Claude –

[Davi 89] *Electromagnétisme, monopôles magnetiques et ondes de matière dans d'algèbre d'espace–temps*
Ann. Found. Louis de Broglie 14(3/4) **1989**
Zit. auf S.: ........ 37, 96

[DAVI 91A] & LOCHAK, G.
*Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire*
Ann. Found. Louis de Broglie 16(1) **1991**
Zit. auf S.: .................................................... 37, 96

[DAVI 91B] *Pourquoi il faut lire Hestenes*
Ann. Found. Louis de Broglie 16 **1991** 391
Zit. auf S.: .................................................... 96

[DAVI 93A] *Equation de Dirac non linéaire*
Thesis, Universtiy of Nates **1993**
Zit. auf S.: .................................................... 96, 98, 98

[DAVI 93B] *Linear and nonlinear Dirac equation*
Found. of Phys. 23(11) **1993** 1431
Zit. auf S.: .................................................... 37, 96, 97

[DAVI 94A] *Remarques sur un équation de Dirac non linéaire*
Vorabdruck, Ann. Found. Louis de Broglie **1994**
Zit. auf S.: .................................................... 50, 98

[DAVI 94B] *Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atom d'hydrogène*
Vorabdruck **1994**, Ann. Found. Louis de Broglie **1994**
Zit. auf S.: .................................................... 50

– DELANGHE, RICHARD –

[DELA 82] siehe [BRAC 82]

[DELA 92] & SOMMEN, F.; SOUCEK, V.
*Clifford algebra and spinor–valued functions, a function theory of the Dirac operator*
Mathematics and its Applications, Kluwer **1992**
Zit. auf S.: .................................................... V, 17, 50, 132, 140

– DERBYSHIRE, J. –

[DERB 93] siehe [BAYL 93]
Zit. auf S.: .................................................... 103

[DERB 94] siehe [BAYL 94]

– DIMAKIS, ARISTOPHANES –

[DIMA 83] *Geometrische Behandlung von Cliffordalgebren und Spinoren mit Anwendungen auf die Dynamik von Spinteilchen*
Dissertation, Göttingen **1983**
Zit. auf S.: .................................................... 82, 86

[DIMA 89] *A new representation of Clifford Algebras*
J. Phys. A 22 **1989** 3171 und in [CL I] p. 49
Zit. auf S.: .................................................... 82, 86

– DIRAC, PAUL ADRIEN MAURICE –

[DIRA 28A] *The quantum theory of the electron*
Proc. R. Soc London A117 **1928** 610
Zit. auf S.: .................................................... 48, 51

[DIRA 28B] *The quantum theory of the electron. Part II*
Proc. R. Soc London A118 **1928** 351
Zit. auf S.: .................................................... 48, 51

[DIRA 30] *Principles of quantum mechanics*
Oxford University Press **1930**
Zit. auf S.: .................................................... 48

– DIXON, JOFREY –

[DIXO 78] *Super Clifford algebras*
J. Math. Phys. 19(10) **1978** 2103–2107
Zit. auf S.: .................................................. 34

[DIXO 81] *Generalized Clifford algebras: Orthogonal and symplectic cases*
Lett. Math. Phys. 5 **1981** 411–418
Zit. auf S.: .................................................. 34

– DORAN, CHRIS –

[DORA 93A] & HESTENES, D., SOMMEN, F., VAN ACKER, N.
*Lie groups as spin groups*
J. Math. Phys. 34(8) **1993** 3642
Zit. auf S.: .................................................. 87

[DORA 93B] siehe [GULL 93A]

[DORA 93C] siehe [LASE 93B]

[DORA 93D] & LASENBY, A.; GULL, S.
*States and operators in spacetime algebra*
Found. Phys. 33(9) **1993** 1239
Zit. auf S.: .............................................. 20, 21, 25

[DORA 93E] siehe [LASE 93D]

[DORA 93F] siehe [GULL 93E]

– DRELL, SIDNEY, D. –

[DREL 66] siehe [BJOR 66]

– DURDEVIĆ, MIĆO –

[DURD 94A] *Braided Clifford algebras as braided quantum groups*
Adv. in Appl. Clifford Alg. 4(2) **1994** 157–156
Zit. auf S.: .................................................. 36

[DURD 94B] & OZIEWICZ, Z.
*Clifford algebras and spinors for arbitrary braids*
Vorabdruck 363 UNAM, Mexico **1994**
Zit. auf S.: .................................................. 36

– DYSON, FREEMAN J. –

[DYSO 49A] *The radiationtheories of Tomonaga, Schwinger and Feynman*
Phys. Rev. 75 **1949** 486–502
Zit. auf S.: .................................................. 103

[DYSO 49B] *The S-matrix in electrodynamics*
Phys. Rev. 75 **1949** 1736–1755
Zit. auf S.: .............................................. 103, 121

[DYSO 52] *Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics*
Phys. Rev. 85 **1952** 631–632
Zit. auf S.: .............................................. 103, 121

[DYSO 72] *Missed opportunities*
Bull. Amer. Math. Soc. 78 **1972** 635–652
Zit. auf S.: .................................................. 121

– EBBINGHAUS, HEINZ–DIETER –

[EBBI 91] & HERMES, H.; HIRZEBRUCH, F.; KOECHER, M.; MAINZER, K.; NEUKIRCH, J.; PRESTEL, A.; REMMERT, R.
*Numbers*
Springer [**1988**] **1991**
Zit. auf S.: .................................... 13, 17, 22, 37, 37, 79

– EINSTEIN, ALBERT –

[EINS 17] Verh. Dtsch. Phys. Ges. 19 **1917** 82
Zit. auf S.: ........ V

– THE ELECTRON –

[ELEC 91] *The electron, new theory and experiment*
D. Hestenes und A. Weingartshofer (eds.); Reidel/Dordrecht **1991**

– FARWELL, RUTH S. –

[FARW 89] siehe [CHIS 89]

– FAUSER, BERTFRIED –

[FAUS 90] *Zur Normierung quantenfeldtheoretischer Wellenfunktionen*
Diplomarbeit, Universität Tübingen **1990**
Zit. auf S.: ........ 9, 105

[FAUS 93] siehe [STUM 93]

[FAUS 95A] *Vertex normalordering as a consequence of nonsymmetric bilinearforms in Clifford algebras*
hep-th/9504055, im Druck bei J. Math. Phys.
Zit. auf S.: ........ 118, 122, 124

[FAUS 95B] *Clifford algebraic remark on the Mandelbrot set of two–component number systems*
hep-th/9507133, eingereicht bei Adv. Appl. Clifford Alg.
Zit. auf S.: ........ 15, 74

[FAUS 95C] & H. STUMPF
*Positronium as an example of algebraic composite calculations*
in proceedings of the "Internacional Conference on the Theory of the Electron", J. Keller, Z. Oziewicz (eds.), Cuautitlan, Mexico **1995**, im Druck
Zit. auf S.: ........ IV, 114, 137, 143, 143

– FETTER, A.L. –

[FETT 71] & WALECKA, J.D.
*Quantum theory of many particle systems*
McGraw–Hill/New York **1971**
Zit. auf S.: ........ 41

– FEYNMANN, RICHARD P. –

[FEYN 87] *Negative probability*
in: Quantum Implications (Essays in honour of David Bohm) B. J. Hiley and F. D. Peat (eds.); Routledge & Keagen Paul, **1987**
Zit. auf S.: ........ 9, 105

– FOCK, V. –

[FOCK 29A] & IWANENKO, D.
*Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie*
Z. für Physik 54 **1929** 798
Zit. auf S.: ........ 93

[FOCK 29B] & IWANENKO, D.
*Géométrie quantique linéarie et déplacement parallelé*
(presented by Maurice de Broglie), C.R. Acad. Sciences (Paris) 188 **1929** 1470
Zit. auf S.: ........ 93

[FOCK 29C] *Geometrisierung der Diraschen Theorie des Elektrons*
Z. für Physik 55 **1929** 261
Zit. auf S.: ........ 93

[FOCK 29D] *Sur les équations de Dirac dans la théorie de relativité générale*
C.R. Acad. Siences (Paris) 189 **1929** 25
Zit. auf S.: ........ 93
– FRADKIN, EDUARDO –
[FRAD 91] *Field theories of condensed matter systems*
Frontiers in Physics, V. 82, Addison–Wesley **1991**
Zit. auf S.: ........ 3, 121
– FREESE, E. –
[FREE 51] Z. Naturforsch. 8a **1951** 776
Zit. auf S.: ........ 103
– FRESCURA, F. A. M. –
[FRES 80] & HILEY, B. J.
*The implicite order, algebras and the spinor*
Found. of Phys. 10 **1980** 7
Zit. auf S.: ........ V
– FUETER, R. –
[FUET 35] *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit 4 reellen Variablen*
Comment. Math. Helv. 7 **1935** 303
Zit. auf S.: ........ 138, 139
– GEL'FAND, I. M. –
[GELF 60] & SCHILOW, G.E.
*Verallgemeinerte Funktionen I. Distributionen*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin **1960**
Zit. auf S.: ........ 4, 38, 106
[GELF 61] *Lectures on linear algebra*
Interscience Pub. Inc. New York **1961**
– GILBERT, JOHN E. –
[GILB 91] & MURRAY M.A.M.
*Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*
Cambridge University Press **1991**
Zit. auf S.: ........ V, 17, 139, 140, 140, 142
– GLIMM, J. –
[GLIM 81] & JAFFE, A.
*Quantum physics. A functional integral point of view*
Springer **1981**
Zit. auf S.: ........ III, 4, 49
– GRASSMANN, HERMANN (D. ÄLT.) –
[GRASS 44] *Die lineale Ausdehnungslehre*, "$\mathbf{A}_1$" [**1844**]
Bd. I,1 der gesammelten Math. u. Phys. Werke, Reprint Chelsea Publ. Comp. **1969**
Zit. auf S.: ........ 46
[GRASS 62] *Die lineale Ausdehnungslehre*, "$\mathbf{A}_2$" [**1862**]
(Überarbeitete Neuauflage) Bd. I,2 der gesammelten Math. u. Phys. Werke, Johnson Reprint Corporation **1972**
Zit. auf S.: ........ 46
[GRASS 77] Math. Ann. 12 **1877** 375
– GREUB, W. –

[GREU 67] *Multilinear algebra*
Springer/New York **1967**
Zit. auf S.: ............ 81

– GRIMM, GEBHARD –

[GRIM 94] *Elektro–schwache Standardtheorie als effektive Dynamik von Bindungszuständen im Rahmen einer nichtlinearen Spinortheorie*
Dissertation, Tübingen **1994**
Zit. auf S.: ............ 3, 9, 38, 40

– GROSSER, D. –

[GROSS 83] *On the decomposition of spinorfields which satisfy a nonlinear higher order equation*
Z. Naturforsch. 38a **1983** 1293
Zit. auf S.: ............ 5, 6, 6, 32, 131

– GÜNAYDIN, MURAT –

[GÜNA 91] *N=2 superconformal algebras and Jordan triple systems*
Phys. Lett. B 255(1) **1991** 46–50
Zit. auf S.: ............ 33, 134

[GÜNA 92] & HYUN, S.
*Ternary algebraic approach to extended superconformal algebras*
Nuc. Phys. B373 **1992** 688–712
Zit. auf S.: ............ 33, 134

– GUERET, PH. –

[GUER 82] &VIGIER, J.P.
Found. Phys. 12 **1982** 1057
Zit. auf S.: ............ 99

– GUILLEMIN, VICTOR –

[GUIL 90] & STERNBERG, S.
*Symplectic techniques in physics*
Cambridge University Press/Cambridge [**1984**] **1990**
Zit. auf S.: ............ 38, 49

– GULL, STEPHEN –

[GULL 91] *Particles at potential steps*
in [ELEC 91] **1991** 37
Zit. auf S.: ............ 101

[GULL 93A] & LASENBY, A.; DORAN, C.
*Imaginary numbers are not real – The geometric algebra of space–time*
Found. Phys. 23(9) **1993** 1175
Zit. auf S.: ............ 20, 21

[GULL 93B] siehe [LASE 93B]

[GULL 93C] siehe [DORA 93D]

[GULL 93D] siehe [LASE 93D]

[GULL 93E] & LASENBY, A.; DORAN, C.
*Electron path, tunnelling and diffraction in the spacetime algebra*
Found. Phys. 23(10) **1993** 1329
Zit. auf S.: ............ 101

– GURTLER, R. –

[Gurt 75] & Hestenes, D.
*Consistency in the formulation of the Dirac–, Pauli– and Schrödinger theories*
J. Math. Phys. 16(3) **1975** 573
Zit. auf S.: ........................................................ 20

– Gutzwiller, Martin C. –
[Gutz 90] *Chaos in classical and quantum mechanics*
Interdisciplinary Applied Mathematics Vol. 1; Springer **1990**
Zit. auf S.: ........................................................ V, 49

– Haag, Rudolf –
[Haag 92] *Local quantum physics*
Springer **1992**
Zit. auf S.: ........................................................ III, 4, 103, 133

– Hahn, Alexander J. –
[Hahn 94] *Quadratic algebras, Clifford algebras and arithmetic Witt groups*
Springer **1994**
Zit. auf S.: ........................................................ 15, 66, 144

– Hamermesh, Morton –
[Hame 62] *Group theory and its application to physical problems*
Addison–Wesley Publ. Comp. Inc./Massachusetts **1962**
Zit. auf S.: ........................................................ 36

– Heisenberg, Werner –
[Heis 48] *Der Begriff „abgeschlossene Theorie“ in der modernen Naturwissenschaft*
Dialectica 2 **1948** 331–278
Zit. auf S.: ........................................................ 33

[Heis 58] *Physics and philosophy*
Allen and Unwin, London **1958**
Zit. auf S.: ........................................................ V

[Heis 67] *Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen*
Stuttgart, Hirzel **1967**
Zit. auf S.: ........................................................ 3, 5, 8, 13, 38, 108

– Hermes, Hans –
[Herm 91] siehe [Ebbi 91]

– Heslot, André –
[Hesl 85] *Quantum mechanics as a classical theory*
Phys. Rev. D 31(6) **1985** 1341
Zit. auf S.: ........................................................ 45

– Hestenes, David –
[Hest 66] *Space time algebra*
Gordon and Beach **1966**
Zit. auf S.: ........................................................ 20, 47, 49, 87, 95, 145

[Hest 67a] *Real spinor fields*
J. Math. Phys. 8(4) **1967** 798
Zit. auf S.: ........................................................ 20

[Hest 67b] *Spin and isospin*
J. Math. Phys. 8(4) **1967** 809
Zit. auf S.: ........................................................ 50, 98

[HEST 74A] *Proper particle mechanics*
J. Math. Phys. 115(10) **1974** 1768
Zit. auf S.: .................................................. 101

[HEST 74B] *Proper dynamics of a rigid point particle*
J. Math. Phys. 115(10) **1974** 1778
Zit. auf S.: .................................................. 101

[HEST 75A] *Observables, operators and complex numbers in the Dirac–theory*
J. Math. Phys. 16(3) **1975** 556
Zit. auf S.: .................................................. 20, 49, 95

[HEST 75B] siehe [Gurt 75]
Zit. auf S.: .................................................. 49, 95

[HEST 79] *Spin and uncertainty in the interpretation of quantum mechanics*
Am. J. Phys. 47(5) **1979**
Zit. auf S.: .................................................. 101

[HEST 82] *Space–time structure of weak and electromagnetic interactions*
Found. of Phys. 12 **1982** 153
Zit. auf S.: .................................................. 95, 98

[HEST 84] & SOBCZYK, G. E.
*Clifford algebra to geometric calculus*
Reidel/Dordrecht [**1984**] **1992**
Zit. auf S.: ..................... V, 47, 49, 50, 72, 72, 86, 93, 143, 145

[HEST 85A] *A unified language for mathematics and physics*
in [CL I] **1985** 1
Zit. auf S.: .................................................. 49, 63

[HEST 85B] *Clifford Algebra and the Interpretation of quantum mechanics*
in [CL I] **1985** 331
Zit. auf S.: .................................................. 101

[HEST 85C] *Quantum mechanics from self–interaction*
Found. Phys. 15 **1985** 63
Zit. auf S.: .................................................. 101

[HEST 86] *New foundations for classical mechanics*
Kluwer **1986**
Zit. auf S.: .......................... 39, 45, 47, 49, 87, 97, 101, 145

[HEST 89] *Mathematical viruses*
in [CL II] **1989** 3
Zit. auf S.: .................................................. 49

[HEST 90] *The Zitterbewegungs interpretation of quantum mechanics*
Found. Phys. 20 **1990** 1213
Zit. auf S.: .................................................. 50, 95, 96

[HEST 91A] & ZIEGLER, R.
*Projective geometry with Clifford algebra*
Acta Appl. Math. 23 **1991** 25
Zit. auf S.: .................................................. 17, 39, 47, 47, 47

[HEST 91B] *The design of linear algebra and geometry*
Acta Appl. Math. 23 **1991** 65
Zit. auf S.: .................................................. 17, 39, 47, 47, 47

[HEST 91C] *Zitterbewegung in radiative processes*
in [ELEC 91] **1991** 21
Zit. auf S.: .................................................. 50, 95, 96

[HEST 91D] & REANY, P.; SOBCZYK, G.
*Unipodal algebra and roots of polynomials*
Adv. in Appl. Clifford Alg. 1(1) **1991** 51–64
Zit. auf S.: ........ 15
[HEST 93] siehe [DORA 93A]
– HILEY, BASIL J. –
[HILE 80] siehe [FRES 80]
– HIRZEBRUCH, FRIEDRICH –
[HIRZ 91] siehe [EBBI 91]
– HOKKYO, N. –
[HOKK 87] *Radiationless Zitterbewegung of Dirac particles and mass formula*
N. Cim. 98A(6) **1987** 787
Zit. auf S.: ........ 50
– HOME, D. –
[HOME 92] & WHITAKER, M.A.B.
*Ensemble interpretations of quantum mechanics. – A modern perspective*
Phys. Rep. 210(4) **1992** 223
Zit. auf S.: ........ V
– HUSCHILT, J –
[HUSC 92] siehe [BAYL 92A]
[HUSC 93] siehe [BAYL 93]
[HUSC 94] siehe [BAYL 94]
– HYUN, SEUNGJOON –
[HYUN 92] siehe [GÜNA 92]
– IWANENKO, D. –
[IWAN 29A] siehe [FOCK 29A]
[IWAN 29B] siehe [FOCK 29B]
– JAFFE, A. –
[JAFF 81] siehe [GLIM 81]
– JARVIS, PETER D. –
[JARV 93A] & YUNG, C.M.
*Vertex operators and composite supersymmetric S–functions*
J. Phys. A26 **1993** 1881-1900
Zit. auf S.: ........ 143, 143, 143
[JARV 93B] siehe [BAKE 93]
[JARV 95A] & TSOHANTJIS, I.
*Covariant scalar representation of* $iso(d,2/2)$ *and quantization of the scalar relativistic particle*
Vorabdruck, hep-th/9506129 **1995**
Zit. auf S.: ........ 47
[JARV 95B] siehe [BAKE 95]
– JAUCH, J.M. –
[JAUC 76] & ROHRLICH, F.
*The theory of photons and electrons*
Springer **1976**
Zit. auf S.: ........ 4
– JONA–LASINIO, G. –
[JONA 61A] siehe [NAMB 61A]
[JONA 61B] siehe [NAMB 61B]
– JONES, GEORGE –

[JONE 89A] siehe [BAYL 89A]
[JONE 89B] siehe [BAYL 89B]
– JONES, K.R.W. –
[JONE 94] *Linear quantum theory and its possible nonlinear generalizations*
Ann. Phys. 233 **1994** 295
Zit. auf S.: .......... 45
– JORDAN, PASCAL –
[JORD 33] *Über die Multiplikation quantenmechanischer Größen*
Z. Phys. 80 **1933** 285–291
Zit. auf S.: .......... 33, 33
[JORD 34] & V. NEUMANN, J.; WIGNER, E.
*On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*
Ann. Math. 35(1) **1934** 29
Zit. auf S.: .......... 3, 33, 33
– JORDAN, THOMAS F. –
[JORD 93] *Reconstructing a nonlinear dynamical framework for testing quantum mechanics*
Ann. Phys. 225 **1993** 83
Zit. auf S.: .......... 45
– KAC, VICTOR G. –
[KAC 90] *Infinite dimensional Lie algebras*, Third edition [**1990**]
Cambridge University Press/Cambridge **1990**
Zit. auf S.: .......... 143
– KANTOR, I.L. –
[KANT 64] *Classification of irreducible transitively differential groups*
Sov. Math. Dokl. 5 **1964** 1404–1407
Zit. auf S.: .......... 33
– KELLER TORRES, JAIME –
[KELL 92] & RODRÍGUEZ, A.
*Geometric superalgebra and the Dirac equation*
J. Math. Phys. 33(1) **1992** 161
Zit. auf S.: .......... 86
[KELL 93] *The geometric content of the electron theory, Part I*
Adv. in App. Clifford Alg. 3(2) **1993** 147–200
Zit. auf S.: .......... 93, 133
[KELL 94] *Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras*
Adv. Appl. Clifford Alg. 4(19 **1994** 1–12
Zit. auf S.: .......... 15
– KERSCHNER, RALPH –
[KERS 91] *Derivation of composite particle dynamics by weak mapping of quantum fields*
Ann. Phys. (Leipzig) 48 **1991** 56–68
Zit. auf S.: .......... 3
[KERS 94] *Effektive Dynamik zusammengesetzter Quantenfelder*
Dissertation, Tübingen **1994**
Zit. auf S.: .......... V, 3
[KERS 95] *On quantum field theories with finitely many degrees of freedom*
preprint, hep-th/9505063
Zit. auf S.: .......... 133
– KIKKAWA, K. –

[Kikk 76] *Quantum corrections in superconductor models*
Prog. Theor. Phys. 56(3) **1976** 947–955
Zit. auf S.: ........ 6
– Knus, Max–Albert –
[Knus 91] *Quadratic and hermitean forms over rings*
Springer/Berlin **1991**
Zit. auf S.: ........ 66, 144, 145
– Koecher, Max –
[Koec 66] siehe [Brau 66]
[Koec 67] Am. J. Math. 89 **1967** 787
[Koec 91] siehe [Ebbi 91]
– Krolikowski, Wieslaw –
[Krol 93a] & Rprter, R.M.
*Biregular quaternionic functions*
in [CL III] **1993** 129–135
Zit. auf S.: ........ 140
– Krolikowski, Wojciech –
[Krol 93b] *Clifford algebras and algebraic structure of fermions*
in proc. of the second Max Born symposium 1992, "Clifford algebras and quantum deformations" Z. Oziewicz, B. Jancewiec, A. Borowiec (eds.)
Kluwer/Dordrecht **1993**
Zit. auf S.: ........ 34
– Krüger Heinz –
[Krüg 91] *New solutions of the Dirac equation for central fields*
in [Elec 91] **1991** 48
Zit. auf S.: ........ 100
[Krüg 93] *Classical limit of real Dirac theory: Quantization of relativistic central field orbits*
Found. Phys. 23(8) **1993** 1265
Zit. auf S.: ........ 100
– Krusche, Dietrich –
[Krus 94] *Haiku, Japanische Gedichte*
DTV/München **1994**
– Lasenby, Anthony –
[Lase 93a] siehe [Gull 93a]
[Lase 93b] & Doran, C.; Gull, S.
*Grassmann calculus, pseudoclassical mechanics and geometric algebra*
J. Math. Phys. 34(8) **1993** 3683
Zit. auf S.: ........ 101
[Lase 93c] siehe [Dora 93d]
[Lase 93d] & Doran, C.; Gull, S.
*A multivector derivative approach to Lagrangian field theory*
Found. Phys. 23(10) **1993** 1295
Zit. auf S.: ........ 101
[Lase 93e] siehe [Gull 93e]
– LeShan, Lawrence –
[LeSh 82] & Margenau, H.
*Einsteins's space & Van Gogh's sky, physical reality and beyond*
Collier Books, MacMillan **1982**
Zit. auf S.: ........ V
– Li, Ling–Fong –

[Li 84] siehe [Chen 84]

– Lochak, George –

[Loch 85] *Wave equation for a magnetic monopole*
Int. J. Theor. Phys. 24(10) **1985** 1019
Zit. auf S.: ................................................ 37, 99

[Loch 91] siehe [Davi 91a]

– Lotze, Alfred –

[Lotz 29] *Punkt– und Vektor–Rechnung*
Walter de Gruyter & Co./Berlin **1929**

[Lotz 50] *Vektor– und Affinor–Analysis*
R. Oldenburg/München **1950**
Zit. auf S.: ................................................ 15

– Lounesto, Pertti –

[Loun 81] *Scalarproducts of spinors and an extension of Brauer–Wall groups*
Found. Phys. 11 **1981** 721–740
Zit. auf S.: ................................................ 83

[Loun 83] Celest. Mech. 30(2) **1983** 171
Zit. auf S.: ................................................ 87

[Loun 85] *Clifford algebras and spinors*
in [CL I] **1985** 25
Zit. auf S.: ................................................ 83, 87

[Loun 93a] *Marcel Riesz's work on Clifford algebras*
im Anhang von [Ries 58], Faksimileausgabe Kluwer/Dordrecht **1993**
Zit. auf S.: ................................................ 83, 84

[Loun 93b] *Clifford algebras and Hestenes spinors*
Found. Phys. 23(9) **1993** 1203
Zit. auf S.: ................................................ 24, 83, 87, 91

[Loun 95] *Crumeyrolles's bivectors and spinors*, in "Clifford algebras and spinor structures", a special volume to the memory of Albert Crumeyrolle, R. Ablamowicz, P. Lounesto (eds.) Kluwer/Dordrecht **1995**
Zit. auf S.: ................................................ 83, 84, 91

– Lüders, G. –

[Lüde 54] *On the equivalence of invariance under time reversal and under partical-antipartical conjugation for relativistic field theories*
Dan. Mat. Fys. Medd. 28 **1954** 1–17
Zit. auf S.: ................................................ 7

[Lüde 57] *Proof of the TCP theorem*
Ann. Phys. (New York) 2 **1957** 1–15
Zit. auf S.: ................................................ 7

– McAnally, D.S –

[McAn 95] siehe [Bake 95]

– Madelung, E. –

[Made 29] *Eine Übertragung der Diracschen Theorie des Elektrons in gewohnte Formen*
Z. Phys. 54 **1929** 303
Zit. auf S.: ................................................ 48

– Madelung, Otfried –

[MADE 70] *Grundlagen der Halbleiterphysik*
Springer **1970**
Zit. auf S.: ........ 8

– MAINZER, KLAUS –
[MAIN 91] siehe [EBBI 91]

– MAJID, SAHAN –
[MAJI 94] *Introduction to braided geometry and q–Minkowski space*
DAMTP/94 – 68 Proc. Varenna, July **1994** (60 Seiten)
Zit. auf S.: ........ 36

– MALONEK, HELMUTH R. –
[MALO 93] *Hypercomplex differentiability and its applications*
in [CL III] **1993** 141–150
Zit. auf S.: ........ 140

– MARCINEK, W. –
[MARC 94] *On unital bradings and quantization*
Rep. on Math. Phys. 34(3) **1994** 325–340
Zit. auf S.: ........ 36

– MARGENAU, HENRY –
[MARG 76] *The nature of physical reality*
Ox Bow Press **1977**
Zit. auf S.: ........ V

[MARG 82] siehe [LESH 82]

[MARG 84] *The miracle of existence*
Ox Bow Press **1984**
Zit. auf S.: ........ V

– MARSDEN, JERROLD E. –
[MARS 78] siehe [ABRA 78]

– MATHEMATICAL ... –
[MATH] *Mathematical papers of William Kingdon Clifford*
ed. Tucker, R., Macmillan London **1982**

– MEHMKE, RUDOLF –
[MEHM 80] *Anwendung der Graßmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene*
Dissertation, Universität Tübingen **1880**

[MEHM 13] *Vorlesung über Punkt– und Vektorrechnung I*
Treubner **1913**
Zit. auf S.: ........ 15

– MOODY, ROBERT V. –
[MOOD 95] & PIANZOLA, A.
*Lie algebras with triangular decompositions*
J. Wiley & Sons/New York **1995**
Zit. auf S.: ........ 57, 67, 72, 83, 144, 145

– MURPHY, GERARD J. –
[MURP 90] *$C^*$–algebras and operator theory*
Academic Press Inc. **1990**
Zit. auf S.: ........ 4

– MURRAY, MARGARET A.M. –
[MURR 91] siehe [GILB 91]

– NACHTMANN, OTTO –

[NACH 86] *Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte*
Friedr. Vieweg & Sohn **1986**
Zit. auf S.: .......... 10
– NAMBU, YOICHIRO –
[NAMB 61A] & JONA–LASINIO, G.
*Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I.*
Phys. Rev. 122 **1961** 345
Zit. auf S.: .......... 3
[NAMB 61B] & JONA–LASINIO, G.
*Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity II.*
Phys. Rev. 124 **1961** 246
Zit. auf S.: .......... 3
[NAMB 73] *Generalized Hamilton dynamics*
Phys. Rev. D 7(8) **1973** 2405–2412
Zit. auf S.: .......... 32, 33
– NEUKIRCH, JÜRGEN –
[NEUK 91] siehe [EBBI 91]
– OKUBO, SUSUMU –
[OKUB 86] Alg. Group. Geom. 3 **1986** 60
Zit. auf S.: .......... 34, 36, 37
[OKUB 93A] *Triple products and Yang–Baxter equation I, Octonionic and quaternionic triple systems*
J. Math. Phys. 34(7) **1993** 3273
Zit. auf S.: .......... 34, 36, 38, 39
[OKUB 93B] *Triple products and Yang–Baxter equation II, Orthogonal and symplectic ternary systems*
J. Math. Phys. 34(7) **1993** 3292
Zit. auf S.: .......... 34, 36, 38
– OZIEWICZ, ZBIGNIEW –
[OZIE 85] *From Grassmann to Clifford*
in [CL I] **1985** 245–256
Zit. auf S.: .......... 63
[OZIE 94] siehe [DURD 94B]
[OZIE 95] *Clifford algebra for Hecke Braid*
in “Clifford Algebra and Spinor Structure”, Special Volume to the Memory of Albert Crumeyrolle, R. Ablamowicz, P. Lounesto (eds.) Kluwer **1995** 397–412
Zit. auf S.: .......... 36
– PARRA SERRA, JOSEP MANEL –
[PARR 89] *On Dirac and Darwin-Hestenes equation*
in [CL II] **1989** 463
Zit. auf S.: .......... 31, 48, 49, 49, 94
– PAULI, WOLFGANG –
[PAUL 21] Z. Phys. 31 **1921** 765
Zit. auf S.: .......... 48, 51
[PAUL 27] *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons*
Z. Phys. 43 **1927** 601–625
Zit. auf S.: .......... 48

[Paul 33] *Handbuch der Physik*
2. Aufl. Band 24, S. 1
Springer/Berlin **1933**
Zit. auf S.: ........................................................ 51
[Paul 43] *On Dirac's new method of field quantization*
Rev. Mod. Phys. 15 **1943** 175–207
Zit. auf S.: ........................................................ 5, 5, 7
[Paul 49] & Villars, F.
*On the invariant regularization in relativistic quantum theory*
Rep. Math. Phys. 21 **1949** 434
Zit. auf S.: ........................................................ 5, 5, 7
– Peano, Giuseppe –
[Pean 88] *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*
Fratelli Bocca Editori, Torino **1888**
Zit. auf S.: ........................................................ 45
– Penrose, Roger –
[Penr 84] & Rindler, W.
*Spinors and space–time, Vol 1: Two–spinor calculus and relativistic fields*
Cambridge University Press **1984**
Zit. auf S.: ........................................................ 82
[Penr 86] & W. Rindler
*Spinors and space–time, Vol 2: Spinor and twistor methods in space–time geometry*
Cambridge University Press **1986**
Zit. auf S.: ........................................................ 133, 134
– Pfister, Winfried –
[Pfis 87] *Der einzeitige Formalismus in der funktionalen Quantentheorie*
Diplomarbeit, Universität Tübingen **1987**
Zit. auf S.: ........................................................ 7
[Pfis 89] & Rosa, M.; Stumpf, H.
*Vector boson states as solutions of generalized Bargmann–Wigner equations*
Nuovo. Cim. 102A **1989** 1449–1467
Zit. auf S.: ........................................................ 7
[Pfis 93] siehe [Stum 93]
[Pfis 96] siehe [Stum 96]
– Pianzola, Arturo –
[Pian 95] siehe [Mood 95]
– Porteous, Ian R. –
[Port 81] *Topological geometry*
Cambridge University Press **1981**
Zit. auf S.: ........................................................ 54, 68, 82, 145
– Porter, R. Michael –
[Port 93] siehe [Krol 93a]
– Prestel, Alexander –
[Pres 91] siehe [Ebbi 91]
– Quilichini, Paul –
[Quil 69] siehe [Boud 69]
– Raçzka, Ryszard –

[RAÇZ 86] siehe [BARU 86]
– RAMAKRISHNAN, A. –
[RAMA 85] *Clifford algebras, its generalizations and physical applications*
in [CL I] **1985** 555
Zit. auf S.: ... 34
– REANY, P. –
[REAN 91] siehe [HEST 91D]
[REAN 93] *Unipodal algebra and 2nd-order linear differential equations*
Adv. Appl. Clifford Alg. 3(2) **1993** 121–126
Zit. auf S.: ... 15
[REAN 94] *Unipodal algebra reopens the theory of algebraic equations*
Adv. Appl. Clifford Alg. 4(2) **1994** 109–122
Zit. auf S.: ... 15
– RECAMI, ERASMO –
[RECA 93] siehe [RODR 93A]
– REMMERT, REINHOLD –
[REMM 91] siehe [EBBI 91]
– RIECKERS, ALFRED –
[RIEC 76] siehe [STUM 76]
[RIEC 77] & STUMPF, H.
*Thermodynamik*
Band 2, Vieweg/Braunschweig **1977**
Zit. auf S.: ... 103, 121
– RIESZ, MARCEL –
[RIES 58] *Clifford numbers and spinors*
Lecture series No. 38, The Institute of Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland **1958** (**1993** Faksimile bei Kluwer)
Zit. auf S.: ... 49, 69, 86, 97
– RINDLER, WOLFGANG –
[RIND 84] siehe [PENR 84]
[RIND 86] siehe [PENR 86]
– ROBINSON, DEREK W. –
[ROBI 65] *A theorem concerning the positive metric*
Commun. Math. Phys. 1 **1965** 89–94
Zit. auf S.: ... 104
– RODRIGUES JR., WALDYR ALVES –
[RODR 93A] & VAZ, J., RECAMI, E.
in “Courants, Amers. Écueils in Microphysique”, G. Lochak, P. Lochak (eds.), Found. L. de Broglie Paris **1993**
Zit. auf S.: ... 99
[RODR 93B] siehe [VAZ 93B]
[RODR 94] & VAZ, J.
Int. J. Mod. Phys. A7 **1994**
Zit. auf S.: ... 81, 97, 97
– RODRÍGUEZ, ADÁN RUBEN –
[RODR 92] siehe [KELL 92]
– ROMAN, PAUL –

[ROMA 61] *Theory of elementary particles*
North–Holland Publ. Comp. / Amsterdam [**1960**] **1961**
Zit. auf S.: .......... 34
– ROSA, MICHAEL –
[ROSA 89] siehe [PFIS 89]
– SALLER, HEINRICH –
[SALL 93] *Quantum algebras, I. – Basic algebraic and topological structures*
Nuovo Cim. 108B **1993** 603
Zit. auf S.: .......... 73
[SALL 94] *Quantum algebras, II. – Tangent and gauge symmetries*
Nuovo Cim. 109B **1994** 255
Zit. auf S.: .......... 73
[SALL 95] *Physik–Brevier*
Unveröffentlichtes Manuskript, Version März **1995**
Zit. auf S.: .......... 73
– SALPETER, EDWIN E. –
[SALP 51] & BETHE H.A.
*A relativistic equation for bound–state problems*
Phys. Rev 84 **1951** 1232–1242
[SALP 77] siehe [BETH 77]
– SAND, JÜRGEN –
[SAND 91] *Zur Pauli–Villars–Regularisierung in der Preontheorie*
Diplomarbeit, Universität Tübingen **1991**
Zit. auf S.: .......... 8, 12
– SCHAFER, RICHARD D. –
[SCHA 66] *An introduction to nonassociative algebras*
Academic Press/New York, London **1966**
Zit. auf S.: .......... 33, 37, 116
– SCHEJA, GÜNTER –
[SCHE 80] & STORCH, U.
*Lehrbuch der Algebra*, Teil 1
Treubner/Stuttgart **1980**
Zit. auf S.: .......... 84, 145
[SCHE 81] & STORCH, U.
*Lehrbuch der Algebra*, Teil 3
Treubner/Stuttgart **1981**
Zit. auf S.: .......... 84, 145
[SCHE 88] & STORCH, U.
*Lehrbuch der Algebra*, Teil 2
Treubner/Stuttgart **1988**
Zit. auf S.: .......... 84, 145
– SCHILOW, G.E. –
[SCHI 60] siehe [GELF 60]
– SCHRÖDINGER, ERWIN –
[SCHR 58] *Mind and matter*
Cambridge University Press **1958**, deutsch bei Diogenes
Zit. auf S.: .......... V
– SCHULER, WOLFGANG –
[SCHU 73] siehe [STUM 73]
– SCHWINGER, JULIAN –

[SCHW 51] Proc. Nat. Acad. Sc. 37 **1951** 452 und 455
Zit. auf S.: ........ 103
– SERRE, J.P. –
[SERR 66] *Algèbres de Lie semi–simple complèxes*
Benjamin Cummings/New York **1966**
Zit. auf S.: ........ 57
– SOBCZYK, GARRET E. –
[SOBC 81] *Space–time algebra approach to curvature*
J. Math. Phys. 22(2) **1981** 333
Zit. auf S.: ........ 33
[SOBC 84] siehe [HEST 84]
[SOBC 85] *Simplicial calculus with geometric algebra*
in [CL II] **1985** 279
Zit. auf S.: ........ 50
[SOBC 91] siehe [HEST 91D]
– SOMMEN, FRANCK –
[SOMM 82] siehe [BRAC 82]
[SOMM 92] siehe [DELA 92]
[SOMM 93] siehe [DORA 93A]
– SOUCEK, V. –
[SOUC 92] siehe [DELA 92]
– STAPP, HENRY PIERCE –
[STAP 93] *Mind, matter, and quantum mechanics*
Springer **1993**
Zit. auf S.: ........ V
– STERNBERG, SHLOMO –
[STER 90] siehe [GUIL 90]
– STORCH, UWE –
[STOR 80] siehe [SCHE 80]
[STOR 81] siehe [SCHE 81]
[STOR 88] siehe [SCHE 88]
– STREATER, R. F. –
[STRE 64] & WIGHTMAN, A. S.
*PCT, spin and statistics and all that*
Benjamin/Cummings **1964**
Zit. auf S.: ........ 7, 7
– STROCCHI, F. –
[STRO 66] *Complex coordinates and quantum mechanics*
Rev. of. Mod. Phys. 38(1) **1966** 36
Zit. auf S.: ........ 45
– STUDY, EDUARD –
[STUD 89] *Methoden zur Theorie der ternären Formen*
Treubner/Leipzig **1889**, Reprint Springer **1982**
[STUD 03] *Die Theorie der Dynamen*
(Die Zusammensetzung von Kräften und verwandten Gegenständen der Geometrie), Treubner/Leipzig **1903**
Zit. auf S.: ........ 15
[STUD 14] *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume*
(Geometrie, Anschauung und Erfahrung), Vieweg/Braunschweig **1914**
Zit. auf S.: ........ 15

[Stud 23] *Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorrechnung*
Erster Teil, Vieweg/Braunschweig **1923**

– Stumpf, Harald –

[Stum 82] *On some physical properties of a unified lepton–hadron field model with composite bosons*
Z. Naturforsch. 37a **1982** 1295
Zit. auf S.: ........ 6

[Stum 73] & Schuler, W.
*Elektrodynamik*
Vieweg **1973**
Zit. auf S.: ........ 6

[Stum 76] & Rieckers, A.
*Thermodynamik*
Band 1, Vieweg/Braunschweig **1976**
Zit. auf S.: ........ 31, 97, 119

[Stum 77] siehe [Riec 77]

[Stum 84] *On the connection of nonrenormalizable and renormalizable unified non-linear spinor field models*
Z. Naturforsch. 39a **1984** 441
Zit. auf S.: ........ 5, 6, 9, 10, 11, 15, 131

[Stum 89a] siehe [Pfis 89]

[Stum 89b] *Normalization and probability densities for wavefunctions of quantum field theoretic energy equations*
Z. Naturforsch. 44a **1989** 262–268
Zit. auf S.: ........ 9, 105

[Stum 91] siehe [Kers 91]

[Stum 93] & Fauser B., Pfister, W.
*Composite particle theory in quantum electrodynamics*
Z. Naturforsch. 48a **1993** 765–776
Zit. auf S.: ........ III, 4, 114

[Stum 94] & Borne, T.
*Composite particle dynamics in quantum field theory*
Vieweg/Braunschweig **1994**
Zit. auf S.: III, V, 3, 3, 7, 8, 106, 112, 114, 116, 118, 121, 122, 122, 126

[Stum 95] siehe [Faus 95c]

[Stum 96] & Pfister, W.
*Algebraic treatment of quantum electrodynamics in temporal gauge*
eingereicht bei Ann. of Phys. (New York) **1996**
Zit. auf S.: ........ IV, 114, 143

– Takabayasi, Takehiko –

[Taka 57] *Relativistic hydrodynamics of the Dirac matter*
Suppl. Prog. Theor. Phys. 4 **1957** 1–80
Zit. auf S.: ........ 95, 101

– Thaler, Bernd –

[Thal 92] *The Dirac–equation*
Springer–Verlag/Berlin, Heidelberg, New York **1992**
Zit. auf S.: ........ 83

– Thierry–Mieg, Jean –

[THIE 80] *Geometrical reinterpretation of Fadeev–Popov ghost particles and BRS transformation*
J. Math. Phys. 21(12) **1980** 2834
Zit. auf S.: ........ 102
– THIRRING, WALTER –
[THIR 50] *Regularization as a consequence of higher order equations*
Phys. Rev. **1950** 570
Zit. auf S.: ........ 5, 6, 7
– TITS, J. –
[TITS 62] Nederl. Akad. van Wetens. 65 **1962** 530
Zit. auf S.: ........ 33
– TRAUTMANN, ANDRZEJ –
[TRAU 88] siehe [BUDI 88]
– TSOHANTJIS, I. –
[TSOH 95] siehe [JARV 95A]
– TUCKER, R. W. –
[TUCK 87] siehe [BENN 87]
– VAZ, JAYME JR. –
[VAZ 93A] siehe [RODR 93A]
[VAZ 93B] & RODRIGUES, W.A. JR.
*Zitterbewegung and the electromagnetic field of the electron*
Phys. Let. B 319 **1993** 203
Zit. auf S.: ........ 50
[VAZ 94] siehe [RODR 94]
– VIGIER, J.P. –
[VIGI 82] siehe [GUER 82]
– VILLARS, F. –
[VILL 49] siehe [PAUL 49]
– VOLD, TERJE G. –
[VOLD 93A] *An introduction to geometric algebra with an application in rigid body mechanics*
Am. J. Phys. 61(6) **1993** 491
Zit. auf S.: ........ 23
[VOLD 93B] *An introduction to geometric algebra and its application to electrodynamics*
Am. J. Phys. 61(6) **1993** 505
Zit. auf S.: ........ 23
– VON NEUMANN, JOHN –
[VON N 34] siehe [JORD 34]
[VON N 36] siehe [BIRK 36]
[VON N 55] *Mathematical foundations of quantum mechanics*
Princeton University Press/Princeton **1955**
Zit. auf S.: ........ 33
– VROGINDEWEIJ, P. G. –
[VROG 93] *The equations of Dirac and the $M_2(H)$–representation of $CL(1,3)$*
Found. of Phys. 23(11) **1993** 1445
Zit. auf S.: ........ 25, 82
– WALECKA, J.D. –
[WALE 71] siehe [FETT 71]
– WEI, JIANSU –

[Wei 92] siehe [Bayl 92a]
– Weinberg, Stephen –
[Wein 89a] *Precision tests of quantum mechanics*
Phys. Rev. Let. 62(5) **1989** 485
Zit. auf S.: .......... 45
[Wein 89b] *Testing quantum mechanics*
Ann. Phys. 194 **1989** 336
Zit. auf S.: .......... 45
– Whitaker, M. A. B. –
[Whit 92] siehe [Home 92]
– Wick, G.C. –
[Wick 50] *The evaluation of the collision matrix*
Phys. Rev. 80 **1950** 268–272
Zit. auf S.: .......... 121
– Wigner, Eugene P. –
[Wign 34] siehe [Jord 34]
[Wign 55] *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*
Adress given at the Gauss Centinental, Göttingen **1955** in: T.L. Saaty, F.J. Weyl (eds.) 'The Spirit and Uses of Mathematical Sciences, McGraw–Hill **1969**
Zit. auf S.: .......... V
– Wightman, A. S. –
[Wigh 56] *Quantum field theory in terms of vacuum expectation values*
Phys. Rev. 101 **1956** 860–866
Zit. auf S.: .......... 103
[Wigh 64] siehe [Stre 64]
– Wilf, Herbert S. –
[Wilf 94] *Generatingfunctionology*
Academic Press, Inc. [**1990**] **1994**
Zit. auf S.: .......... 108
– Witt, E. –
[Witt 37] *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*
J. Reine Angew. Math. 176 **1937** 31–44
Zit. auf S.: .......... 66
– Woronowicz, S.L. –
[Woro 89] *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*
Com. Math. Phys. 122 **1989** 125–170
Zit. auf S.: .......... 70
– Yung, C.M. –
[Yung 93a] siehe [Jarv 93a]
[Yung 93b] siehe [Bake 93]
– Yvon, J. –
[Yvon 40] *Equations de Dirac–Madelung*
J. Phys. et le Radium 1 **1940** 18–30
Zit. auf S.: .......... 95, 101
– Zaddach, Arno –
[Zadd 94] *Graßmanns Algebra in der Geometrie, mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen*
BI Wissenschaftsverlag **1994**
Zit. auf S.: .......... 39, 46, 47, 47, 72, 75, 93
– Zeni, Jose Ricardo R. –

[ZENI 94] *The theory of electron: A comment on recent results*
in "Gravitation: The Space–Time Structure" W.A. Rodrigues, P.S. Letelier (eds.), World Scientific **1994** 544–552
Zit. auf S.: .................................... 18, 20, 21, 83, 95, 96

– ZIEGLER, RENATUS –
[Zieg 91] siehe [HEST 91A]

## Lebenslauf

Ich, Bertfried Fauser, wurde am 28. November 1962 in Speyer am Rhein geboren. Meine Eltern sind Rudolf Eugen Fauser, von Beruf Kaufmann und Dorothea Ida Fauser, geborene Neth, von Beruf Schneiderin. Von 1969 an besuchte ich die Grund– und Hauptschule in Nehren, Württemberg und von 1973 an die Grund– und Hauptschule Ofterdingen. Im Jahre 1974 wechselte ich auf die Friedrich–List–Realschule nach Mössingen, wo ich ab 1976 das Quenstedt–Gymnasium besuchte. Am 9. Juni 1983 schloß ich mit dem Abitur ab.

Zum Wintersemester 1983 begann ich mit dem Studium der Physik an der Eberhard–Karls–Universität Tübingen. Dort erwarb ich am 29. Oktober 1985 das Vordiplom und am 6. Februar 1990 das Hauptdiplom. Die Diplomarbeit „Zur Normierung quantenfeldtheoretischer Wellenfunktionen" fertigte ich unter der Anleitung von Herrn Prof. Stumpf an. Von 1990 an arbeitete ich, ebenfalls bei Herrn Stumpf, an meiner Dissertation „Clifford–algebraische Formulierung und Regularität der Quantenfeldtheorie". Sie wurde im Januar 1996 abgeschlossen.

Von 1987 bis 88 war ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut und von 1988 bis 94 am Institut für Theoretische Physik tätig. Dabei betreute ich unter anderem Übungen und war als Prüfungsbeisitzer tätig.

Seit dem 4.1. 1994 bin ich mit Mechthild Riehle, von Beruf Diplom–Kirchenmusikerin, verheiratet.

## Akademische Lehrer

Baumann, Clement, Dähn, Faessler, Fischer, Gaukler, Großer, Herold, Herrmann, Hübener, Kasper, Kaul, Lenz, Lindner, Lutz, Mack, Mertens, Müther, Nagel, Nakel, Pfister, Rieckers, Schief, E. Schmid, K.–W. Schmid, Schwenk, Speidel, Staudt, Stumpf, Wagner, Wahl, Wittern, Wolff

In Kyoto bin ich,
doch beim Schrei des Kuckucks
sehn ich mich nach Kyoto

Bashō[1]

[1] Aus [Krus 94]