

[Эта страница заменяет титульный лист, изготовленный издательством]

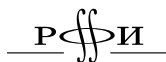
В. В. ПРАСОЛОВ

**ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ТОПОЛОГИИ**

Москва  
Издательство МЦНМО  
2004

ББК 22.15  
УДК 515.14  
П70

Издание осуществлено при поддержке РФФИ  
(издательский проект № 02-01-14081).



**Прасолов В. В.**

П70 Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. —  
М.: МЦНМО, 2004. — 352 с. ISBN 5-94057-072-0

Методы, используемые современной топологией, весьма разнообразны. В этой книге подробно рассматриваются методы комбинаторной топологии, которые заключаются в исследовании топологических пространств посредством их разбиений на какие-то элементарные множества, и методы дифференциальной топологии, которые заключаются в рассмотрении гладких многообразий и гладких отображений. Нередко одну и ту же топологическую задачу можно решить как комбинаторными методами, так и дифференциальными. В таких случаях обсуждаются оба подхода.

Одна из главных целей книги состоит в том, чтобы продвинуться в изучении свойств топологических пространств (и особенно многообразий) столь далеко, сколь это возможно без привлечения сложной техники. Этим она отличается от большинства книг по топологии.

Книга содержит много задач и упражнений. Почти все задачи снабжены подробными решениями.

Ил. 150. Библиогр. 149 назв.

ББК 22.15

*Прасолов Виктор Васильевич*

**Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.**

Редактор: Скопенков А. Б. Корректор: Коробкова Т. Л.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 5.04.2004 г.

Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 22. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».  
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11 Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

---

ISBN 5-94057-072-0

© В. В. Прасолов, 2004.

© МЦНМО, 2004.

# Оглавление

Некоторые обозначения . . . . .	7
Предисловие . . . . .	9
Основные определения . . . . .	13
<b>Глава I. Графы . . . . .</b>	<b>17</b>
§ 1. Топологические и геометрические свойства графов . . . . .	17
1.1. Планарные графы . . . . .	17
1.2. Формула Эйлера для планарных графов . . . . .	27
1.3. Вложения графов в трёхмерное пространство . . . . .	30
1.4. $k$ -связные графы . . . . .	32
1.5. Теорема Штейница . . . . .	35
§ 2. Гомотопические свойства графов . . . . .	41
2.1. Фундаментальная группа графа . . . . .	41
2.2. Накрытия 1-мерных комплексов . . . . .	46
2.3. Накрытия и фундаментальная группа . . . . .	51
§ 3. Инварианты графов . . . . .	57
3.1. Хроматический многочлен . . . . .	59
3.2. Многочлен от трёх переменных . . . . .	61
3.3. Многочлен Ботта—Уитни . . . . .	62
3.4. Инварианты Татта . . . . .	64
<b>Глава II. Топология в евклидовом пространстве . . . . .</b>	<b>66</b>
§ 4. Топология подмножеств евклидова пространства . . . . .	66
4.1. Расстояние от точки до множества . . . . .	66
4.2. Продолжение непрерывных отображений . . . . .	67
4.3. Теоремы Лебега о покрытиях . . . . .	70
4.4. Канторово множество . . . . .	73
§ 5. Кривые на плоскости . . . . .	75
5.1. Теорема Жордана . . . . .	75
5.2. Теорема Уитни—Грауштейна . . . . .	78
5.3. Двойные точки, двойные касательные и точки перегиба . . . . .	81
§ 6. Теорема Брауэра и лемма Шпернера . . . . .	83
6.1. Теорема Брауэра . . . . .	83
6.2. Теорема Жордана как следствие теоремы Брауэра . . . . .	88
6.3. Лемма Шпернера . . . . .	91
6.4. Теорема Какутани . . . . .	96
<b>Глава III. Топологические пространства . . . . .</b>	<b>98</b>
§ 7. Элементы общей топологии . . . . .	98

7.1.	Хаусдорфовы пространства и компактные пространства . . . . .	98
7.2.	Нормальные пространства . . . . .	102
7.3.	Разбиения единицы . . . . .	104
7.4.	Паракомпактные пространства . . . . .	106
§ 8.	Симплициальные комплексы . . . . .	112
8.1.	Евклидовы клеточные комплексы . . . . .	113
8.2.	Симплициальные отображения . . . . .	114
8.3.	Абстрактные симплициальные комплексы . . . . .	115
8.4.	Симплициальные аппроксимации . . . . .	117
8.5.	Нерв покрытия . . . . .	122
8.6.	Псевдомногообразия . . . . .	123
8.7.	Степень отображения в евклидово пространство . . . . .	125
8.8.	Теорема Борсука—Улама . . . . .	128
8.9.	Следствия и обобщения теоремы Борсука—Улама . . . . .	130
§ 9.	$CW$ -комплексы . . . . .	132
9.1.	Приклеивание по отображению . . . . .	132
9.2.	Определение $CW$ -комплексов . . . . .	134
9.3.	Топологические свойства . . . . .	138
9.4.	Клеточная аппроксимация . . . . .	142
9.5.	Геометрическая реализация $CW$ -комплексов . . . . .	144
§ 10.	Конструкции . . . . .	145
10.1.	Прямое произведение . . . . .	145
10.2.	Цилиндр, конус и надстройка . . . . .	146
10.3.	Джойн . . . . .	147
10.4.	Симметрическая степень . . . . .	151
<b>Глава IV. Двумерные поверхности. Накрытия. Расслоения.</b>		
<b>Гомотопические группы . . . . . 154</b>		
§ 11.	Двумерные поверхности . . . . .	154
11.1.	Основные определения . . . . .	154
11.2.	Приведение двумерных поверхностей к простейшему виду . . . . .	156
11.3.	Завершение классификации двумерных поверхностей . . . . .	161
11.4.	Риманово определение рода поверхности . . . . .	164
§ 12.	Накрытия . . . . .	164
12.1.	Универсальные накрытия двумерных поверхностей . . . . .	165
12.2.	Существование накрывающего пространства с заданной фундаментальной группой . . . . .	166
12.3.	Единственность накрывающего пространства с заданной фундаментальной группой . . . . .	168

12.4. Локальные гомеоморфизмы . . . . .	171
§ 13. Графы на поверхностях. Взрезанный квадрат графа . . . . .	173
13.1. Род графа . . . . .	173
13.2. Раскраски карт . . . . .	175
13.3. Взрезанный квадрат графа . . . . .	177
§ 14. Расслоения и гомотопические группы . . . . .	178
14.1. Накрывающая гомотопия . . . . .	178
14.2. Гомотопические группы . . . . .	183
14.3. Точная последовательность расслоения . . . . .	185
14.4. Относительные гомотопические группы . . . . .	190
14.5. Теорема Уайтхеда . . . . .	193
<b>Глава V. Многообразия . . . . .</b>	<b>197</b>
§ 15. Определение и основные свойства . . . . .	197
15.1. Многообразия с краем . . . . .	198
15.2. Отображения многообразий . . . . .	201
15.3. Гладкие разбиения единицы . . . . .	204
15.4. Теорема Сарда . . . . .	205
15.5. Важный пример: многообразия Грассмана . . . . .	210
§ 16. Касательное пространство . . . . .	217
16.1. Дифференциал отображения . . . . .	220
16.2. Векторные поля . . . . .	221
16.3. Риманова метрика . . . . .	224
16.4. Дифференциальные формы и ориентируемость . . . . .	224
§ 17. Вложения и погружения . . . . .	227
17.1. Вложения компактных многообразий . . . . .	228
17.2. Триангуляция замкнутого многообразия . . . . .	230
17.3. Погружения . . . . .	233
17.4. Вложения некомпактных многообразий . . . . .	236
17.5. Невозможность некоторых вложений . . . . .	239
§ 18. Степень отображения . . . . .	241
18.1. Степень гладкого отображения . . . . .	241
18.2. Индекс особой точки векторного поля . . . . .	246
18.3. Теорема Хопфа . . . . .	253
18.4. Аппроксимации непрерывных отображений . . . . .	255
18.5. Конструкция Понтрягина . . . . .	257
18.6. Гомотопически эквивалентные линзовые пространства . . . . .	259
§ 19. Теория Морса . . . . .	261
19.1. Функции Морса . . . . .	261
19.2. Градиентные векторные поля и приклеивание ручек . . . . .	267
19.3. Примеры функций Морса . . . . .	273

---

<b>Глава VI. Фундаментальная группа</b> . . . . .	282
§ 20. $CV$ -комплексы . . . . .	282
20.1. Основная теорема . . . . .	282
20.2. Некоторые примеры . . . . .	284
20.3. Фундаментальная группа пространства $SO(n)$ . . . . .	288
§ 21. Теорема Зейферта—ван Кампена . . . . .	292
21.1. Эквивалентные формулировки . . . . .	292
21.2. Доказательство . . . . .	294
21.3. Группа узла . . . . .	298
21.4. Рогатая сфера Александера . . . . .	302
§ 22. Фундаментальная группа дополнения алгебраической кривой . . . . .	304
22.1. Дополнение к набору комплексных прямых . . . . .	305
22.2. Теорема ван Кампена . . . . .	308
22.3. Применения теоремы ван Кампена . . . . .	314
Решения и указания . . . . .	316
Литература . . . . .	338
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	345

## Некоторые обозначения

- $X \approx Y$  — топологическое пространство  $X$  гомеоморфно  $Y$ ;  
 $X \sim Y$  — топологическое пространство  $X$  гомотопически эквивалентно  $Y$ ;  
 $f \simeq g$  — отображение  $f$  гомотопно отображению  $g$ ;  
 $|A|$  — количество элементов множества  $A$ ;  
 $\text{int } A$  — внутренность множества  $A$ ;  
 $\bar{A}$  — замыкание множества  $A$ ;  
 $\partial A$  — граница множества  $A$ ;  
 $\text{id}_A$  — тождественное отображение множества  $A$ ;  
 $K_n$  — полный граф с  $n$  вершинами;  
 $K_{n,m}$  — см. с. 20;  
 $D^n$  —  $n$ -мерный шар;  
 $S^n$  —  $n$ -мерная сфера;  
 $\Delta^n$  —  $n$ -мерный симплекс;  
 $I^n$  —  $n$ -мерный куб;  
 $P^2$  — проективная плоскость;  
 $T^2$  — двумерный тор;  
 $S^2 \# nP^2$  или  $nP^2$  — связная сумма  $n$  проективных плоскостей;  
 $S^2 \# nT^2$  или  $nT^2$  — связная сумма  $n$  двумерных торов (сфера с  $n$  ручками);  
 $K^2$  — бутылка Клейна;  
 $\|x - y\|$  — расстояние между точками  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;  
 $\|v\|$  — длина вектора  $v \in \mathbb{R}^n$ ;  
 $d(x, y)$  — расстояние между точками  $x, y$ ;  
 $\text{inf}$  — точная нижняя грань;  
 $X \sqcup Y$  — дизъюнктное объединение  $X$  и  $Y$  (все элементы  $X$  и  $Y$  считаются различными);  
 $\text{supp } f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$  — носитель функции  $f$ ;  
 $X * Y$  — джойн пространств  $X$  и  $Y$ ;  
 $\text{SP}^n(X)$  — симметрическая степень пространства  $X$ ;  
 $f: (X, Y) \rightarrow (X_1, Y_1)$  — отображение пар, при котором  $Y \subset X$  отображается в  $Y_1 \subset X_1$ ;  
 $\pi_1(X, x_0)$  — фундаментальная группа пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$ ;

$\pi_n(X, x_0)$  —  $n$ -мерная гомотопическая группа пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$ ;

$\deg f$  — степень отображения  $f$ ;

$\text{rank } f(x)$  — ранг отображения  $f$  в точке  $x$ ;

$G(n, k)$  — многообразие Грассмана;

$\text{GL}_k(\mathbb{R})$  — группа невырожденных матриц порядка  $k$  с вещественными координатами;

$U(n)$  — группа унитарных матриц порядка  $n$ ;

$SU(n)$  — группа унитарных матриц порядка  $n$  с определителем 1;

$O(n)$  — группа ортогональных матриц порядка  $n$ ;

$SO(n)$  — группа ортогональных матриц порядка  $n$  с определителем 1;

$T_x M^n$  — касательное пространство в точке  $x \in M^n$ ;

$TM^n$  — касательное расслоение;

$\Omega_{\text{ir}}^k(n+k)$  — множество классов оснащённо кобордантных многообразий размерности  $k$  в  $\mathbb{R}^{n+k}$ .



## Предисловие

Методы, используемые современной топологией, весьма разнообразны. В этой книге подробно рассматриваются в основном методы комбинаторной топологии, которые заключаются в исследовании топологических пространств посредством их разбиений на элементарные множества (например, симплексы) или посредством покрытий какими-либо простыми множествами, и методы дифференциальной топологии, которые заключаются в рассмотрении гладких многообразий и гладких отображений. Нередко одну и ту же топологическую задачу можно решить как комбинаторными методами, так и дифференциальными. В таких случаях мы обсуждаем оба подхода.

Исторически начало топологии связано с работами Римана; затем его исследования продолжили Бетти и Пуанкаре. При изучении многозначных аналитических функций комплексного переменного Риман понял, что эти функции следует рассматривать не на плоскости, а на тех двумерных поверхностях, на которых многозначные функции превращаются в однозначные. Двумерная поверхность возникает при этом как самостоятельный объект, определенный внутренним образом, т. е. безотносительно к её конкретному вложению в  $\mathbb{R}^3$ . При таком подходе двумерная поверхность получается в результате склейки налегающих друг на друга областей плоскости. В дальнейшем Риман ввёл понятие многомерного многообразия (*Mannigfaltigkeit* — в немецком языке этот термин Римана сохранился, а в других языках появились кальки этого термина). Многообразие размерности  $n$  получается в результате склейки налегающих друг на друга областей пространства  $\mathbb{R}^n$ . Позднее было осознано, что если нас интересуют лишь непрерывные отображения многообразий, то для описания структуры многообразия достаточно знать лишь строение его открытых подмножеств. Это послужило одной из важнейших причин появления понятия топологического пространства как множества с выделенной системой открытых множеств, обладающих определенными свойствами.

Глава I посвящена простейшему с топологической точки зрения объекту — графам (1-мерным комплексам). Сначала обсуждаются пограничные с геометрией вопросы: планарность, формула Эйлера, теорема Штейница. Затем мы переходим к фундаментальной группе и накрытиям,

основные свойства которых очень хорошо прослеживаются на графах. Завершается глава подробным обсуждением полиномиальных инвариантов графов, интерес к которым в последнее время сильно вырос, поскольку обнаружилось их связи с инвариантами узлов.

Глава II посвящена другому достаточно простому с точки зрения топологии объекту — евклидову пространству со стандартной топологией. Подмножества евклидова пространства могут иметь очень сложное топологическое строение, поэтому мы обсуждаем только несколько основных утверждений о топологии евклидова пространства и его подмножеств. Одна из основных задач топологии — классификация непрерывных отображений одного топологического пространства в другое (на эти пространства могут быть наложены определённые ограничения; классификация проводится с точностью до некоторой эквивалентности. Простейшие классификации такого рода связаны с кривыми на плоскости, т. е. с отображениями  $S^1$  в  $\mathbb{R}^2$ . Сначала мы доказываем теорему Жордана и теорему Уитни—Грауштейна о классификации гладких замкнутых кривых с точностью до регулярной гомотопии. Затем несколькими разными способами доказываются теорема Брауэра о неподвижной точке и лемма Шпернера (помимо стандартного варианта леммы Шпернера приведён и более точный её вариант, учитывающий ориентации симплексов). Доказана также теорема Какутани, обобщающая теорему Брауэра. Глава завершается теоремой Титце о продолжении непрерывных отображений, которая выводится из леммы Урысона, и двумя теоремами Лебега: теоремой Лебега об открытых покрытиях, без которой не обходятся строгие доказательства многих теорем теории гомотопий и гомологий, и теоремой Лебега о замкнутых покрытиях, которая служит основой для определения понятия топологической размерности.

Глава III начинается с элементов общей топологии — того необходимого минимума, который постоянно используется в алгебраической топологии. Здесь обсуждаются три свойства (хаусдорфовость, нормальность, паракомпактность), наличие которых существенно облегчает работу с топологическими пространствами. Затем обсуждаются два важнейших для алгебраической топологии класса топологических пространств — симплициальные комплексы и  $CW$ -комплексы, приводится необходимая для работы с ними техника (клеточные и симплициальные аппроксимации) и доказываемся, что они обладают тремя упомянутыми выше свойствами. Здесь также вводится понятие степени отображения для псевдомногообразий, и с помощью степени доказываемся теорема Борсука—Улама, из которой выводятся многочисленные следствия. Завершается глава описанием конструкций, применимых к топологическим пространствам, в том числе джойна, взрезанного джойна и симметрической степе-

ни. С помощью взрезанного джойна доказывается, что некоторые  $n$ -мерные симплициальные комплексы нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

В главе IV обсуждаются весьма разнообразные темы — двумерные поверхности, накрытия, локальные гомеоморфизмы, графы на поверхностях (род графа, раскраски карт на графах), расслоения, гомотопические группы.

В главе V мы обращаемся к дифференциальной топологии. Здесь обсуждаются гладкие многообразия и приложения гладких отображений в топологии. Сначала вводится основная техника (гладкие разбиения единицы, теорема Сарда) и обсуждается важный для всей топологии пример — многообразие Грассмана. Затем обсуждаются понятия, связанные с касательным пространством: векторные поля и дифференциальные формы. После этого доказываются важные для работы с гладкими многообразиями теоремы о существовании вложений и погружений (в том числе и о вложениях некомпактных многообразий в качестве замкнутых подмножеств). Помимо этого доказывается, что замкнутое неориентируемое многообразие размерности  $n$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и выясняется, какие двумерные поверхности вкладываются в  $\mathbb{R}P^3$ . Далее вводится гомотопический инвариант — степень гладкого отображения. С помощью степени определяется индекс особой точки векторного поля. Доказывается теорема Пуанкаре—Хопфа о гомотопической классификации отображений  $M^n \rightarrow S^n$ . Приводится конструкция Понтрягина, интерпретирующая  $\pi_{n+k}(S^n)$  как множество классов оснащённо кобордантных многообразий размерности  $k$  в  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Глава завершается теорией Морса, которая связывает топологическое строение многообразия с локальными свойствами особых точек невырожденной функции на данном многообразии. Приводятся явные примеры функций Морса на некоторых многообразиях, в том числе и на многообразиях Грассмана.

Глава VI посвящена явным вычислениям фундаментальной группы некоторых пространств и приложениям фундаментальной группы. Прежде всего доказывается теорема о задании фундаментальной группы  $CW$ -комплекса образующими и соотношениями и приводятся некоторые примеры применения этой теоремы. Иногда фундаментальную группу более удобно вычислять с помощью точной последовательности расслоения. Так обстоит дело, например, с фундаментальной группой  $SO(n)$ . При вычислении фундаментальной группы нередко бывает полезна теорема ван Кампена о строении фундаментальной группы объединения двух открытых множеств. Её можно использовать, например, для вычисления фундаментальной группы дополнения узла. В конце главы приводится другая теорема ван Кампена — о вычислении фундаментальной группы дополнения алгебраической кривой в  $CP^2$ . Соответствующие вычисления

для конкретных кривых довольно сложные; здесь есть много интересных результатов, но многое пока остаётся не до конца понятным.

Одна из главных целей книги состоит в том, чтобы продвинуться в изучении свойств топологических пространств (и особенно многообразий) столь далеко, сколь это возможно без привлечения сложной техники. Этим она отличается от большинства книг по топологии.

Книга рассчитана на читателей, знакомых с основными понятиями геометрии, линейной алгебры и анализа. В частности, предполагается некоторое знакомство с открытыми, замкнутыми и компактными множествами в евклидовом пространстве.

Для самостоятельного обдумывания в книге предлагаются три вида заданий. 1) *Упражнения*, которые не должны вызвать затруднений; их решения не приводятся. 2) *Задачи*, которые уже не столь просты, а потому в конце книги приведены их решения. 3) *Задачи* «со звёздочкой», каждая из которых составляет содержание отдельной научной статьи. В качестве задач эти утверждения сформулированы для того, чтобы не перегружать основной текст книги. Решения этих задач тоже приведены в конце книги. Задачи составлены по материалам семинаров по топологии для студентов I и II курса Независимого московского университета, которые автор вёл в 2002 г.

Во время работы над этой книгой я получал финансовую поддержку от Российского фонда фундаментальных исследований согласно проекту 01–01–00660.

## Основные определения

Для начала нам потребуются лишь основные понятия топологии. Приведём их определения.

*Топологическим пространством* называют множество  $X$ , в котором выделена система подмножеств  $\tau$ , обладающая следующими свойствами:

- 1) пустое множество и всё множество  $X$  принадлежат  $\tau$ ;
- 2) пересечение конечного числа элементов  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
- 3) объединение любого семейства элементов  $\tau$  принадлежит  $\tau$ .

Множества, принадлежащие  $\tau$ , называют *открытыми*. *Окрестностью* точки  $x \in X$  называют любое открытое множество, содержащее  $x$ . Множества, дополнения которых открыты, называют *замкнутыми*.

Важнейшим примером топологического пространства служит евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ . Открытыми множествами в  $\mathbb{R}^n$  являются шары  $D_{a,\varepsilon}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$  и всевозможные их объединения.

Семейство множеств  $\tau' \subset \tau$  называют *базой* топологии  $\tau$ , если любой элемент системы  $\tau$  является объединением элементов системы  $\tau'$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что семейство множеств  $\tau' \subset \tau$  является базой топологии  $\tau$  тогда и только тогда, когда для любой точки  $x$  и для любой её окрестности  $U$  найдётся такое множество  $V \in \tau'$ , что  $x \in V \subset U$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите, что семейство множеств  $\tau'$  является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда для любых двух множеств  $U, V \in \tau'$  и для любой точки  $x \in U \cap V$  найдётся такое множество  $W \in \tau'$ , что  $x \in W \subset U \cap V$ .

Топологическое пространство  $X$  называют пространством со *счётной базой*, если у него есть база, состоящая из счётного семейства множеств. Например, открытые шары  $D_{a,\varepsilon}^n$ , где число  $\varepsilon$  и все координаты точки  $a$  рациональны, образуют счётную базу пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Если  $X$  — топологическое пространство, то на любом его подмножестве  $Y$  можно ввести *индуцированную топологию*, считая открытыми множествами пересечения  $Y$  с открытыми подмножествами  $X$ . Это позволяет снабдить сферу  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  структурой топологического пространства.

Образование одного топологического пространства в другое называют *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества от-

крыт. Эквивалентное условие: прообраз любого замкнутого множества замкнут.

При доказательстве того, что отображение  $f$  непрерывно, часто бывает удобно пользоваться следующим критерием непрерывности: *отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно тогда и только тогда, когда для любой точки  $x \in X$  и для любой окрестности  $U$  точки  $f(x)$  существует окрестность  $V(x)$  точки  $x$ , образ которой целиком лежит в  $U$* . Действительно, если выполняется второе условие, то множество  $f^{-1}(U)$ , где  $U$  — открытое множество, можно представить в виде  $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V(x)$ , поэтому оно открыто. В другую сторону утвержде-

ние очевидно: в качестве  $V(x)$  можно взять  $f^{-1}(U)$ .

**У п р а ж н е н и е 3.** Докажите, что отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно тогда и только тогда, когда для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $\|x - a\| < \delta$ , то  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ .

В топологии довольно часто используется следующее утверждение о склейке непрерывных отображений.

**Теорема 0.1.** Пусть  $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ , причём множества  $X_1, \dots, X_n$  замкнуты. Рассмотрим отображение  $f: X \rightarrow Y$  и его ограничения  $f_i = f|_{X_i}$ . Отображение  $f$  непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения  $f_i$ .

**Доказательство.** Ясно, что если отображение  $f$  непрерывно, то все отображения  $f_i$  тоже непрерывны. Предположим, что все отображения  $f_i$  непрерывны и  $C \subset Y$  — произвольное замкнутое множество. Тогда множество  $C_i = f_i^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap X_i$  замкнуто в  $X_i$ , т. е. существует замкнутое в  $X$  множество  $C'_i$ , для которого  $C_i = C'_i \cap X_i$ . Оба множества  $C'_i$  и  $X_i$  замкнуты в  $X$ , поэтому множество  $C_i$  тоже замкнуто в  $X$ . Следовательно, множество  $f^{-1}(C) = C_1 \cup \dots \cup C_n$  замкнуто в  $X$ .  $\square$

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и оба отображения  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны. Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называют в таком случае *гомеоморфными*.

**У п р а ж н е н и е 4.** Докажите, что пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $S^n \setminus \{x_0\}$  гомеоморфны.

**З а д а ч а 0.1.** Докажите, что  $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1} \approx \mathbb{R}^n \times S^{m-1}$ . (Предполагается, что сфера  $S^{n-1}$  расположена в  $S^{n+m-1}$  стандартно.)

Топологическое пространство  $X$  называют *дискретным*, если любое его подмножество открыто (эквивалентное определение: любое его подмножество замкнуто). Топологию дискретного топологического пространства называют *дискретной*. Если  $X$  — дискретное топологическое пространство, а  $Y$  — произвольное топологическое пространство, то любое отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно.

Топологическое пространство  $X$  называют *связным*, если оно не содержит собственных подмножеств, которые одновременно открыты и замкнуты. Иными словами, если множество  $A \subset X$  одновременно открыто и замкнуто, то либо  $A = \emptyset$ , либо  $A = X$ .

У п р а ж н е н и е 5. Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^n$  связно.

У п р а ж н е н и е 6. Докажите, что если  $X$  — связное топологическое пространство, а  $Y$  — дискретное топологическое пространство, то любое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  постоянно, т. е.  $f(X)$  состоит из одной точки.

Множество  $X$  называют *метрическим пространством*, если для любых двух точек  $x, y \in X$  определено число  $d(x, y) \geq 0$ , причем выполняются следующие свойства:

- 1)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 2)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (*неравенство треугольника*);
- 3)  $d(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ .

Число  $d(x, y)$  называют *расстоянием* между точками  $x$  и  $y$ .

Для любого метрического пространства  $X$  открытые шары  $D_{a,\varepsilon}^n = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$  образуют базу некоторой топологии. Эту топологию называют топологией, *индуцированной метрикой  $d$* . Если  $X$  — топологическое пространство, топология которого индуцируется некоторой метрикой, то в таком случае  $X$  называют *метризуемым* топологическим пространством.

Топологическое пространство называют *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

У п р а ж н е н и е 7. Докажите, что сфера  $S^n$  компактна, а пространство  $\mathbb{R}^n$  некомпактно.

У п р а ж н е н и е 8. Докажите, что непрерывный образ компактного пространства компактен.

З а д а ч а 0.2. Пусть  $K$  — компактное метрическое пространство с метрикой  $\rho$ . Предположим, что  $f: K \rightarrow K$  — непрерывное отображение, для которого  $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$  для любых  $x, y \in K, x \neq y$ . Докажите, что отображение  $f$  имеет неподвижную точку.

На прямом произведении  $X \times Y$  топологических пространств  $X$  и  $Y$  можно задать *топологию прямого произведения*. Для этого нужно считать открытыми множествами в  $X \times Y$  прямые произведения открытых множеств в  $X$  и  $Y$ , а также всевозможные их объединения.

Топология прямого произведения возникает из естественного требования непрерывности проекций  $p_X(x, y) = x$  и  $p_Y(x, y) = y$ . В самом деле, чтобы эти отображения были непрерывны, множества  $U \times Y$  и  $X \times V$ , где  $U \subset X$  и  $V \subset Y$  — открытые множества, должны быть открытыми. Ми-

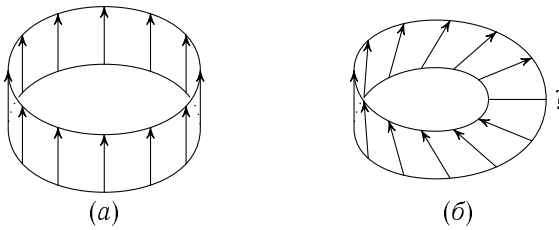


Рис. 1. Цилиндр и лист Мёбиуса

нимальная топология на множестве  $X \times Y$ , включающая все указанные множества, совпадает с топологией прямого произведения.

Отметим, что прямым произведением  $S^1 \times I$ , где  $I$  — отрезок  $[0, 1]$ , является цилиндр (рис. 1 (а)), а не лист Мёбиуса (рис. 1 (б)). Дело в том, что хотя и для листа Мёбиуса можно указать естественную проекцию на  $S^1$ , но естественную проекцию на  $I$  для него указать не удаётся.

Для любого подмножества  $Y$  топологического пространства  $X$  можно определить *факторпространство*  $X/Y$ , отождествив все точки множества  $Y$  друг с другом. При этом точками пространства  $X/Y$  служат все точки множества  $X \setminus Y$  и одна точка  $Y$ . Множество в  $X/Y$  является открытым тогда и только тогда, когда его прообраз при естественной проекции  $p: X \rightarrow X/Y$  открыт.

Факторпространство можно определить также и в том случае, когда на множестве  $X$  задано отношение эквивалентности  $\sim$ . А именно, точками *факторпространства*  $X/\sim$  служат классы эквивалентности; множество в  $X/\sim$  открыто тогда и только тогда, когда его прообраз при естественной проекции  $p: X \rightarrow X/\sim$  открыт. (Если  $x_1 \sim x_2$  тогда и только тогда, когда  $x_1, x_2 \in Y \subset X$ , то мы получаем предыдущую конструкцию.)



## Глава I

### Графы

В этой главе теория графов обсуждается существенно более подробно, чем это обычно делается в курсах топологии. При этом § 1 и 3 относятся собственно к теории графов и в дальнейшем не используются. Поэтому читатель, у которого нет интереса к теории графов, может их пропустить.

#### § 1. Топологические и геометрические свойства графов

Возьмём в пространстве  $\mathbb{R}^3$  несколько точек  $A_1, \dots, A_n$  и соединим некоторые из них попарно непересекающимися кривыми. Полученное множество с индуцированной из  $\mathbb{R}^3$  топологией называют *графом*, или *1-мерным комплексом*. Точки  $A_1, \dots, A_n$  называют при этом *вершинами*, или *0-мерными клетками*, а соединяющие их кривые называют *рёбрами*, или *1-мерными клетками*. Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называют *степенью* вершины. В том случае, когда из любой вершины графа можно пройти по его рёбрам в любую другую вершину, граф называют *связным*.

Граф может иметь *петли* (рёбра, начало и конец которых совпадают) и *двойные рёбра* (несовпадающие рёбра, имеющие одну и ту же пару вершин).

Последовательность попарно различных вершин  $v_1, \dots, v_n$ , соединённых рёбрами  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_1$ , называют *циклом*.

##### 1.1. Планарные графы

Граф  $G$  называют *планарным*, если его можно расположить на плоскости так, чтобы его рёбра попарно не пересекались. При этом, вообще говоря, рёбра могут быть произвольными кривыми линиями, но легко убедиться, что рёбра можно считать конечнозвенными ломаными. Более того, Вагнер [135] и Фари [55] независимо доказали следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Любой планарный граф можно так вложить в плоскость, что все его рёбра будут прямолинейными отрезками.*

**Доказательство.** Требуемое утверждение достаточно доказать для максимальных планарных графов. (Планарный граф называют *максимальным*, если после добавления любого дополнительного ребра он перестаёт быть планарным.) Ясно, что у максимального планарного графа все *границы* (области, на которые он разбивает плоскость) содержат ровно по три ребра. Пусть  $G$  — максимальный планарный граф, содержащий  $v \geq 4$  вершин (при  $v < 4$  утверждение очевидно). Выберем в графе  $G$  произвольную вершину  $V_1$ , отличную от вершин криволинейного треугольника, ограничивающего граф  $G$ . Пусть  $G_1$  — граф, который получается из графа  $G$  после выбрасывания вершины  $V_1$  и выходящих из неё рёбер. В графе  $G_1$  все грани, кроме грани  $F_1$ , которой принадлежала выброшенная вершина  $V_1$ , являются треугольными. Гресь  $F_1$  ограничена циклом  $C_1$ . Среди вершин цикла  $C_1$  выберем вершину  $V_2$ , отличную от вершин треугольника, ограничивающего граф  $G$ , и рассмотрим граф  $G_2$ , который получается из графа  $G_1$  после выбрасывания вершины  $V_2$  и выходящих из неё рёбер. В графе  $G_2$  гресь  $F_2$ , которой принадлежала вершина  $V_2$ , не обязательно ограничена циклом (соответствующий пример приведён на рис. 2).

Чтобы гресь  $F_2$  была ограничена некоторым циклом  $C_2$ , вершину  $V_2$  нужно выбрать специальным образом. А именно, пусть цикл  $C_1$  содержит вершину  $V$  степени 2 (имеется в виду степень вершины в графе  $G_1$ ), причём  $V$  отлична от вершин ограничивающего граф  $G$  треугольника. Тогда в качестве  $V_2$  мы выбираем именно эту вершину  $V$ . Концы рёбер, выходящих из вершины  $V$ , соединены ребром, поэтому после выбрасывания вершины  $V$  мы получим цикл  $C_2$ . Если же цикл  $C_1$  не содержит вершин степени 2, то в качестве  $V_2$  можно выбрать произвольную вершину.

Продолжая аналогичные операции, получим последовательность графов  $G, G_1, G_2, \dots, G_{v-3}$ , где  $G_{v-3}$  — граф, состоящий из трёх вершин, попарно соединённых рёбрами; при этом граница каждой грани  $F_i$  — цикл.

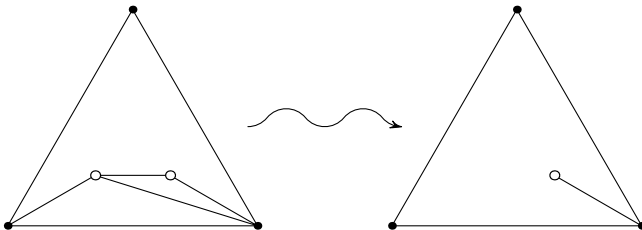


Рис. 2. Граница грани — не цикл

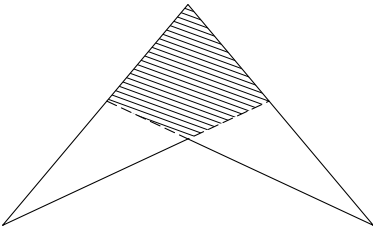


Рис. 3. Область видимости для невыпуклого четырёхугольника

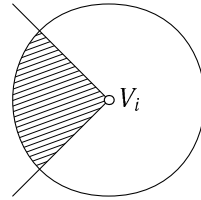


Рис. 4. Область видимости для одной из новых граней

Построим теперь последовательно требуемое вложение графа  $G$ , начиная с графа  $G_{v-3}$ . В качестве вложения графа  $G_{v-3}$  возьмём произвольный треугольник. В качестве вершины  $V_{v-3}$  возьмём произвольную точку внутри этого треугольника. Точку  $V_{v-3}$  нужно соединить с двумя или тремя вершинами треугольника. После этого треугольник разобьётся либо на 3 треугольные области, либо на треугольную и невыпуклую четырёхугольную. Если вершину  $V_{v-4}$  нужно поместить в треугольную область, то это делается произвольным образом. Если же вершину  $V_{v-4}$  нужно поместить в невыпуклую четырёхугольную область, то поместим её в область, заштрихованную на рис. 3. Это — область, из которой видны все вершины цикла. В дальнейшем, исходя из области видимости, мы на каждом шаге снова будем получать некоторую область видимости — непустое открытое множество (рис. 4). Вершину  $V_{i-1}$  нужно каждый раз помещать в область видимости.  $\square$

Для доказательства непланарности графов обычно используется простейший вариант теоремы Жордана — для конечнозвенных ломаных.

**Теорема 1.2** (кусочно-линейная теорема Жордана). Пусть  $C$  — замкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  состоит ровно из двух связных областей, причём границей каждой из них служит  $C$ .

**Доказательство.** Выберем некоторый фиксированный круг  $D$ , пересекающий ломаную  $C$  по отрезку. Из каждой точки множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  можно сколь угодно близко подойти к ломаной  $C$ , не пересекая ее. Затем, идя вдоль ломаной  $C$ , можно войти в круг  $D$ . Ломаная  $C$  делит круг  $D$  на две части, поэтому количество областей не больше двух.

Остаётся доказать, что множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  несвязно. Пусть  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$  и  $l$  — произвольный луч с началом  $x$ . Пересечение луча  $l$  с ломаной  $C$  состоит из нескольких точек и отрезков. Каждой такой точке (или отрезку) сопоставим 0 или 1 в зависимости от того, как расположены входящее и выходящее звенья ломаной  $C$  по отношению к лучу  $l$ : если они расположены по одну сторону от  $l$  (или если луч  $l$  касается  $C$ ), то сопоставим 0,

а если по разные стороны — сопоставим 1. Чётность (остаток от деления на 2) суммы всех сопоставленных чисел при повороте луча изменяется непрерывно, поэтому чётность постоянна. Ясно также, что во всех точках связной области множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  чётность должна быть одной и той же. С другой стороны, если некоторый отрезок пересекает ломаную  $C$  ровно в одной точке, то в его концах чётность принимает разные значения.  $\square$

*Следствие.* Пусть  $a, b, c, d$  — точки замкнутой несамопересекающейся ломаной  $C$ , расположенные в указанном порядке. Предположим, что точки  $a$  и  $c$  соединены ломаной  $L_1$ , а точки  $b$  и  $d$  соединены ломаной  $L_2$ , причём обе эти ломаные лежат в одной и той же из двух областей, образованных ломаной  $C$ . Тогда ломаные  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются в некоторой точке.

*Доказательство.* Точки  $a$  и  $c$  разбивают ломаную  $C$  на две части. Ломаные  $C$  и  $L_1$  разбивают плоскость на три области: границей одной из этих областей служит  $C$ , а границами двух других областей служит  $L_1$  и дуги ломаной  $C$  (для доказательства этого утверждения можно рассмотреть концы отрезка, пересекающего ломаную  $L_1$  в одной точке и не пересекающего ломаную  $C$ ). По условию ломаная  $L_2$  лежит в той же области множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , что и ломаная  $L_1$ . Поэтому точки ломаной  $L_2$ , близкие к точкам  $b$  и  $d$ , лежат в разных областях, образованных ломаными  $C$  и  $L_1$ .  $\square$

Простейшими примерами непланарных графов служат графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$ , изображённые на рис. 5 (вершинами этих графов являются только выделенные точки: у графа  $K_{3,3}$  шесть вершин, а у графа  $K_5$  пять вершин). Аналогично можно определить графы  $K_n$  и  $K_{n,m}$ . Граф  $K_n$  (полный граф с  $n$  вершинами) состоит из  $n$  вершин, попарно соединённых рёбрами. Граф  $K_{n,m}$  состоит из  $n + m$  вершин, разбитых на два подмножества из  $n$  вершин и из  $m$  вершин; рёбрами соединены все пары вершин из разных множеств.

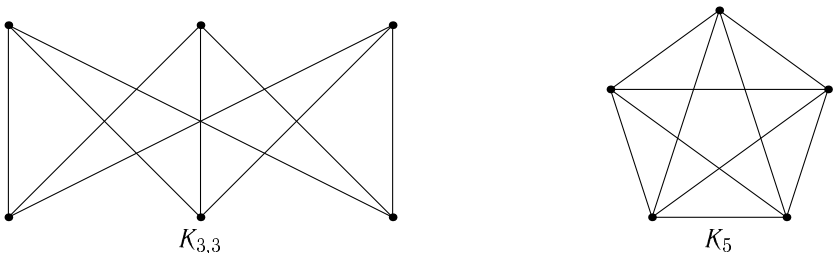


Рис. 5. Графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$

**Теорема 1.3.** *Графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$  непланарные.*

**Доказательство.** Вершины графа  $K_{3,3}$  можно занумеровать так, что его рёбра образуют замкнутую ломаную  $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ , а кроме того, у графа есть рёбра  $x_1x_4$ ,  $x_2x_5$  и  $x_3x_6$ . Если бы граф  $K_{3,3}$  был планарным, то указанная замкнутая ломаная разбивала бы плоскость на две области и два из указанных трёх рёбер лежали бы в одной из этих областей. Но в таком случае эти рёбра обязаны пересекаться.

Непланарность графа  $K_5$  доказывается аналогично. Замкнутая ломаная  $x_1x_2x_3x_4x_5$  разбивает плоскость на две области. Три из пяти остальных рёбер графа лежат в одной из этих областей. Из этих трёх рёбер можно выбрать два ребра, не имеющие общих вершин.  $\square$

**Задача 1.1.** а) Можно ли граф  $K_{3,3}$  вложить в лист Мёбиуса (т. е. расположить на листе Мёбиуса так, чтобы его рёбра попарно не пересеклись)?

б) Можно ли граф  $K_5$  вложить в тор?

Наметим ещё один подход к доказательству непланарности графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$ . Будем предполагать, что все рассматриваемые графы расположены на плоскости, но их рёбра могут при этом пересекаться (рёбра пересекаются в конечном числе точек, и никакое ребро не проходит через вершину). Назовём *индексом пересечения* двух графов количество точек пересечения рёбер одного графа с рёбрами другого графа, приведённое по модулю 2. (Предполагается, что графы находятся в общем положении, т. е. они пересекаются в конечном числе точек, и точки пересечения отличны от вершин.)

**Задача 1.2.** Докажите, что индекс пересечения двух циклов равен 0.

Назовём *индексом самопересечения* графа на плоскости сумму индексов пересечения всех его (неупорядоченных) пар несмежных рёбер; суммирование снова ведётся по модулю 2.

**Задача 1.3.** а) Предположим, что для любого ребра графа несмежные с ним рёбра образуют цикл. Докажите, что индекс самопересечения такого графа не зависит от того, как он расположен на плоскости, а зависит только от самого графа.

б) Докажите, что графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$  непланарные.

Ясно, что если граф содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ , то он непланарен. В 1930 г. Куратовский [84] доказал, что верно и обратное.

**Теорема 1.4** (Куратовский). *Граф непланарен тогда и только тогда, когда он содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ .*

**Доказательство** (см. [91]). Нам остаётся доказать трудную часть теоремы Куратовского: если граф непланарен, то он содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ . Предположим, что существуют непла-

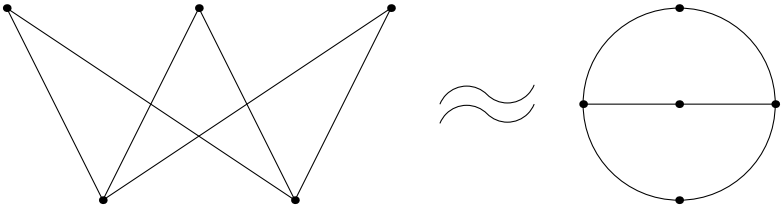


Рис. 6. Граф  $K_{3,2}$

нарные графы, не содержащие подграфов, гомеоморфных  $K_{3,3}$  или  $K_5$ . Среди всех таких графов выберем граф  $G$  с наименьшим числом рёбер.

Шаг 1. Пусть граф  $G$  содержит ребро  $xy$ . Тогда после выбрасывания вершин  $x$  и  $y$  (и выходящих из них рёбер) получается граф  $G - x - y$ , не содержащий подграфов, гомеоморфных графу  $K_{3,2}$  (рис. 6).

Предположим, что граф  $G' = G - x - y$  содержит подграф, гомеоморфный графу  $K_{3,2}$ .

Несложно убедиться, что граф  $G/xy$ , полученный из графа  $G$  стягиванием ребра  $xy$  в точку, не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_{3,3}$  или  $K_5$ . В самом деле, если граф  $G/xy$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ , то граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ , а если граф  $G/xy$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_5$ , то граф  $G$  содержит либо подграф, гомеоморфный  $K_5$ , либо подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  (рис. 7).

Из минимальности графа  $G$  следует, что граф  $G/xy$  планарен. Поэтому граф  $G' = G - x - y = (G/xy) - (xy)$  тоже планарен. Рассмотрим вложение в плоскость графа  $G/xy$  и индуцированное им вложение в плос-

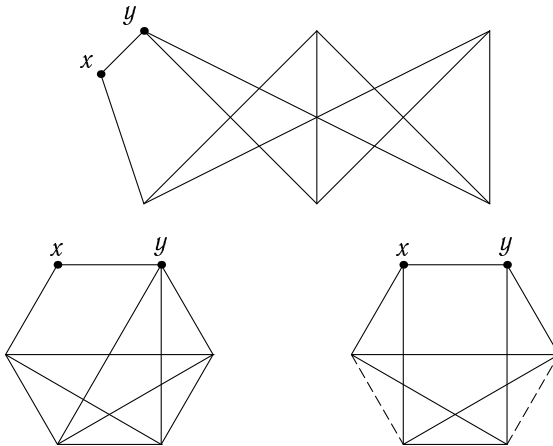


Рис. 7. Граф  $G$  содержит подграф  $K_{3,3}$  или  $K_5$

кость графа  $G'$ . Одна из областей, на которые рёбра графа  $G'$  разбивают плоскость, содержит вершину  $xy$  графа  $G/xy$ . Пусть  $F$  — подграф графа  $G'$ , состоящий из рёбер, которые ограничивают эту область. Граф  $F$  разбивает плоскость не более чем на две части, поэтому он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_{3,2}$ . Согласно предположению граф  $G'$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,2}$ . Следовательно, у графа  $G'$  есть ребро  $e$ , отличное от рёбер графа  $F$ . Это, в частности, означает, что граф  $F$  разбивает плоскость на две части. Поэтому он содержит некоторый цикл  $C$ . Выброшенная вершина  $xy$  и ребро  $e$  лежат в разных частях плоскости, заданных циклом  $C$ . Для определённости будем считать, что вершина  $xy$  лежит внутри  $C$ , а ребро  $e$  лежит вне  $C$ .

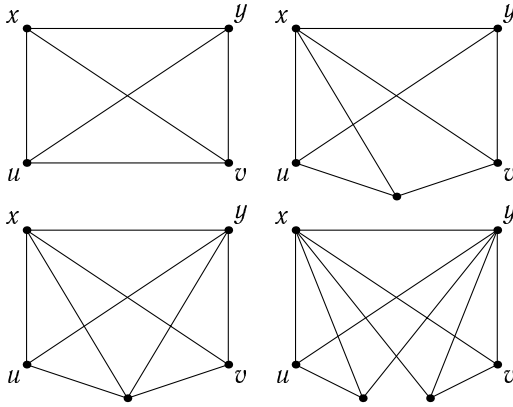
Чтобы прийти к противоречию, построим вложение графа  $G$  в плоскость. Для  $\text{ext } C$ , т.е. для части графа  $G' \subset G$ , лежащей вне цикла  $C$ , воспользуемся уже имеющимся вложением графа  $G'$ . Оставшуюся часть графа  $G$  обозначим  $G - \text{ext } C$ . Она содержит строго меньше рёбер, чем граф  $G$ , поскольку ребро  $e$  ей не принадлежит. Из минимальности графа  $G$  следует, что граф  $G - \text{ext } C$  планарен. В графе  $G - \text{ext } C$  вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром, поэтому при любом вложении графа в плоскость вершины  $x$  и  $y$  лежат либо внутри  $C$ , либо вне  $C$ . Можно считать, что они лежат внутри  $C$ . Поэтому у планарного графа  $G - \text{ext } C$  есть вложение, для которого цикл  $C$  служит границей. Комбинируя указанные вложения графов  $\text{ext } C$  и  $G - \text{ext } C$ , получаем вложение графа  $G$ .

Шаг 2. Пусть граф  $G$  содержит ребро  $xy$ . Тогда у графа  $G - x - y$  не может быть двух вершин степени 1.

Предположим, что из вершин  $u$  и  $v$  графа  $G - x - y$  выходит по одному ребру. Из минимальности графа  $G$  следует, что у него нет вершин, из которых выходит менее трёх рёбер. Поэтому вершины  $u$  и  $v$  соединены рёбрами с вершинами  $x$  и  $y$ . Кроме того, вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром, а значит, вершины  $x, y, u, v$  порождают в  $G$  подграф, содержащий граф  $K_{3,2}$ . В таком случае из шага 1 следует, что у графа  $G$  не может быть рёбер, оба конца которых отличны от  $x, y, u, v$ . Пусть  $w$  — вершина графа  $G$ , отличная от  $x, y, u, v$ . Из вершины  $w$  выходит не менее трёх рёбер, поэтому она соединена ребром с одной из вершин  $u$  и  $v$ . Согласно предположению каждая из вершин  $u$  и  $v$  соединена ребром не более чем с одной вершиной, отличной от  $x$  и  $y$ . Поэтому граф  $G$  содержит не более двух вершин, отличных от  $x, y, u, v$ . В таком случае граф  $G$  является одним из четырёх графов, изображённых на рис. 8.

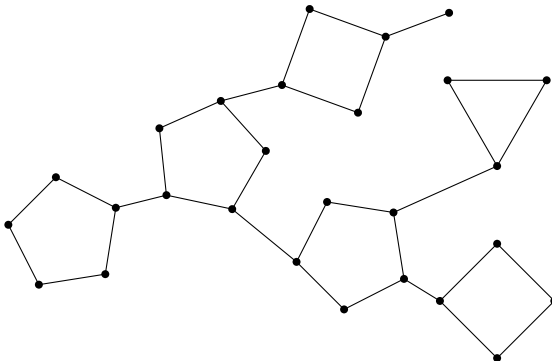
Шаг 3. Пусть граф  $G$  содержит ребро  $xy$ . Тогда граф  $G - x - y$  является циклом.

Пусть  $G' = G - x - y$ . У графа  $G'$  нет изолированных вершин, поскольку изолированная вершина графа  $G'$  соответствует вершине гра-

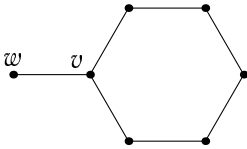
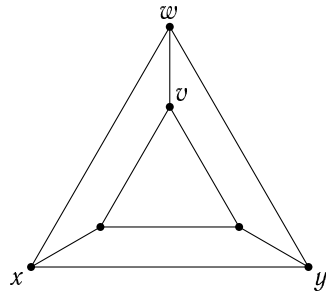
Рис. 8. Четыре варианта графа  $G$ 

фа  $G$ , из которой выходит не более двух рёбер, а это противоречит минимальности графа  $G$ . Из шагов 1 и 2 следует, что граф  $G'$  представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы (рис. 9); при этом у графа  $G'$  не может быть более одного ребра со свободным концом.

Предположим, что граф  $G'$  не является циклом. Он не может содержать двух изолированных циклов  $C_1$  и  $C_2$ . В самом деле, вершины  $x$  и  $y$  вместе с вершинами цикла  $C_1$  порождают граф, содержащий подграф, гомеоморфный  $K_{3,2}$ , поскольку любая вершина цикла  $C_1$  соединена ребром с вершиной  $x$  или с вершиной  $y$ . Поэтому у графа  $G$  не может быть рёбер, оба конца которых отличны от  $x$ ,  $y$  и вершин цикла  $C_1$ . Таким образом, граф  $G'$  содержит цикл  $C$ , у которого есть вершина  $v$ , соединённая

Рис. 9. Связная компонента графа  $G'$



Рис. 10. Подграф графа  $G'$ Рис. 11. Структура графа  $G$ 

ребром с некоторой вершиной  $w$ , не принадлежащей циклу  $C$ ; при этом никакие другие вершины цикла  $C$  не соединены рёбрами с вершинами, не принадлежащими циклу  $C$  (рис. 10).

В графе  $G$  любая вершина цикла  $C$ , кроме вершины  $v$ , соединена ребром с вершиной  $x$  или с вершиной  $y$ . Таких вершин по крайней мере две, поэтому вершины цикла  $C$  вместе с вершинами  $x$  и  $y$  порождают граф, содержащий подграф, гомеоморфный  $K_{3,2}$ . Из этого следует, что у графа  $G'$  нет рёбер, не имеющих общих вершин с циклом  $C$ . Но для ребра, не входящего в цикл  $C$ , общей с циклом  $C$  вершиной может быть только вершина  $v$ , причём из  $v$  выходит только одно ребро, не содержащееся в цикле  $C$ . Следовательно, граф  $G$  состоит из подграфа, изображённого на рис. 10, и рёбер, выходящих из вершин  $x$  и  $y$ .

Если цикл  $C$  содержит более трёх вершин, то после выбрасывания из графа  $G$  вершин  $v$  и  $w$  получается граф, содержащий подграф, гомеоморфный  $K_{3,2}$ . Поэтому цикл  $C$  содержит ровно три вершины, а тогда граф  $G$  имеет такой вид, как на рис. 11. Этот граф планарен.

Доказательство теоремы Куратовского теперь легко завершается. Пусть  $x$  и  $y$  — смежные вершины графа  $G$ . Тогда граф  $G - x - y$  представляет собой цикл  $C$ , каждая вершина которого в графе  $G$  соединена ребром с вершиной  $x$  или с вершиной  $y$ . Предположим, что вершина  $u$  цикла  $C$  соединена ребром с вершиной  $x$  и не соединена ребром с вершиной  $y$ . Тогда вершина  $v$  цикла  $C$ , соседняя с вершиной  $u$ , не соединена ребром с вершиной  $x$ . Действительно, если граф  $G$  содержит ребро  $xv$ , то после выбрасывания этого ребра получаем планарный граф. У этого планарного графа нет ребра  $yu$ , поэтому на плоскости точки  $x$  и  $v$  можно соединить и получить вложение графа  $G$ , чего не может быть.

Итак, либо все вершины цикла  $C$  соединены с обеими вершинами  $x$  и  $y$ , либо они поочередно соединены то с  $x$  то с  $y$ . В первом случае граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_5$ , а во втором случае граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ .  $\square$

Другие доказательства теоремы Куратовского можно найти в [125].

Помимо критерия Куратовского известны и другие критерии планарности графов; см., например, [92], [41] и [30]. Одним из наиболее интересных среди этих критериев является критерий Уитни [141], основанный на понятии двойственности для графов.

Графы  $G$  и  $G^*$  называют *двойственными*, если существует взаимно однозначное соответствие между их рёбрами, при котором циклам одного графа соответствуют разделяющие множества другого графа, и наоборот. Под *разделяющими множествами* здесь подразумеваются минимальные наборы рёбер, после удаления которых увеличивается число связанных компонент графа.

**Теорема 1.5 (Уитни).** *Граф планарен тогда и только тогда, когда существует двойственный ему граф.*

**Доказательство** (см. [104]). Прежде всего убедимся в том, что для планарного графа можно построить двойственный ему граф. Рассмотрим вложение планарного графа  $G$  в плоскость и выберем в каждой из областей, на которые граф  $G$  разбивает плоскость, по одной точке. Эти точки будут вершинами графа  $G^*$ . Две вершины графа  $G^*$  соединим ребром, если соответствующие им части плоскости граничат по некоторому ребру графа  $G$ . Ясно, что графы  $G$  и  $G^*$  двойственны друг другу.

Займемся теперь доказательством трудной части теоремы Уитни: если граф непланарен, то у него нет двойственного графа. При этом мы воспользуемся теоремой Куратовского, т. е. будем доказывать, что если граф содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ , то у него нет двойственного графа.

**Шаг 1.** У графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$  нет двойственных графов.

Предположим, что  $G$  — граф, двойственный графу  $K_{3,3}$ . У графа  $K_{3,3}$  нет разделяющих множеств, состоящих менее чем из трёх рёбер, и у него есть циклы только длины 4 и 6. Поэтому у графа  $G$  нет циклов длины 1 или 2 и из любой его вершины выходит по крайней мере 4 ребра. Из этих двух условий следует, что у графа  $G$  есть по крайней мере 5 вершин. Из каждой вершины выходит по крайней мере 4 ребра. Поэтому у графа  $G$  есть по крайней мере  $5 \cdot 4/2 = 10$  рёбер. Получено противоречие, так как у графа  $K_{3,3}$  всего 9 рёбер.

Предположим теперь, что  $G$  — граф, двойственный графу  $K_5$ . У графа  $K_5$  нет двойных рёбер и у него есть разделяющие множества только

из 4 и 6 рёбер. Поэтому у графа  $G$  нет вершин степени менее 3 и у него есть циклы только длины 4 и 6. Граф  $G$  имеет 10 рёбер и не совпадает с  $K_5$ , поэтому он имеет по крайней мере 6 вершин. Если граф  $G$  имеет ровно 6 вершин, то он должен иметь такой вид, как на рис. 12. У такого графа 9 рёбер, а у графа  $K_5$  количество рёбер равно 10. Если же граф  $G$  имеет 7 или более вершин (которые по условию имеют степень не менее 3), то количество его рёбер не меньше  $7 \cdot 3/2 > 10$ .

**Шаг 2.** Если у графа  $G$  есть двойственный граф, то и у любого его подграфа тоже есть двойственный граф.

Достаточно доказать, что если у графа  $G$  есть двойственный граф  $G^*$  и  $e$  — ребро графа  $G$ , то у графа  $H$ , полученного из графа  $G$  выбрасыванием ребра  $e$ , есть двойственный граф  $H^*$ . Легко проверить, что если  $e^*$  — ребро графа  $G^*$ , соответствующее ребру  $e$  графа  $G$ , то граф  $H^*$ , полученный из графа  $G^*$  стягиванием ребра  $e^*$  в точку, двойствен графу  $H$ .

**Шаг 3.** Если у графа  $G$  есть двойственный граф, то и у любого графа  $H$ , гомеоморфного графу  $G$ , тоже есть двойственный граф.

Достаточно доказать, что если у графа  $G$  есть двойственный граф  $G^*$  и граф  $H$  получен из графа  $G$  добавлением вершины степени 2, лежащей на ребре  $e$  графа  $G$ , то у графа  $H$  тоже есть двойственный граф  $H^*$ . Легко проверить, что граф  $H^*$ , полученный из графа  $G^*$  добавлением ещё одного ребра с теми же самыми вершинами, что и у ребра  $e^*$ , двойствен графу  $H$ .  $\square$

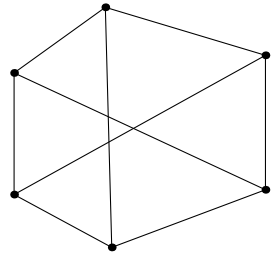


Рис. 12. Структура графа  $G$  с шестью вершинами

## 1.2. Формула Эйлера для планарных графов

Для выпуклого многогранника (в трёхмерном пространстве) справедлива следующая *формула Эйлера*: если  $v$  — число вершин многогранника,  $e$  — число рёбер и  $f$  — число граней, то  $v - e + f = 2$ . Граф, образованный рёбрами выпуклого многогранника в трёхмерном пространстве, планарен: если из поверхности выпуклого многогранника выколоть одну точку, то получится топологическое пространство, гомеоморфное плоскости.

Для планарных графов формула Эйлера остаётся справедливой и в общей ситуации. Будем называть *гранями* связные области, на которые разбивает плоскость вложенный в неё планарный граф.

**Теорема 1.6** (формула Эйлера). Пусть  $G$  — планарный граф, состоящий из  $s$  компонент связности, среди которых нет изолированных вершин. Пусть, далее,  $v$  — число вершин графа  $G$ , а  $e$  — число его рёбер. Тогда для любого вложения графа  $G$  в плоскость число граней  $f$  одно и то же, а именно,  $f = 1 + s - v + e$ .

**Доказательство.** Если граф не содержит циклов, то он не разбивает плоскость. Связные компоненты такого графа называют *деревьями*. Индукцией по числу рёбер дерева легко доказать, что у любого дерева число вершин равно на 1 больше числа рёбер. В самом деле, удаление любого ребра разбивает дерево на два дерева с меньшим числом рёбер. Поэтому для графа, состоящего из одного или нескольких деревьев, формула Эйлера верна.

Если же граф содержит цикл, то можно рассмотреть область, ограниченную циклом и не содержащуюся в другой области, ограниченной циклом. Для такой области удаление одного граничного ребра уменьшает число граней на 1 и не изменяет число вершин.  $\square$

**Следствие.** Связный планарный граф (без петель и двойных рёбер) содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

**Доказательство.** Любая грань содержит не менее 3 рёбер, поэтому  $3f \leq 2e$ . Подставляя это неравенство в соотношение  $3f = 6 - 3v + 2e$ , получаем  $e \leq 3v - 6$ . Предположим, что из любой вершины выходит не менее 6 рёбер. Тогда  $6v \leq 2e$ , а значит,  $6v \leq 2e \leq 2(3v - 6) = 6v - 12$ , чего не может быть.  $\square$

Воспользовавшись тем, что любой планарный граф имеет вершину, степень которой не превосходит 5, легко доказать следующую знаменитую теорему о раскраске карт.

**Теорема 1.7** (о пяти красках). Вершины любого планарного графа (без петель и двойных рёбер) можно раскрасить в пять цветов так, что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — планарный граф с  $n$  вершинами. Применим индукцию по  $n$ . При  $n \leq 5$  утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для всех планарных графов, у которых число вершин не превосходит  $n - 1$ . Если у графа  $G$  есть вершина  $v$ , степень которой строго меньше 5, то рассмотрим граф  $G'$ , который получается из графа  $G$  после выбрасывания вершины  $v$  и выходящих из неё рёбер. Согласно предположению индукции вершины графа  $G'$  можно раскрасить в 5 цветов. Вершина  $v$  в графе  $G$  соединена рёбрами менее чем с 5 вершинами, поэтому её можно окрасить в цвет, отличный от цветов соседних с ней вершин.

Предположим теперь, что у графа  $G$  нет вершин, степень которых строго меньше 5. Тогда у него есть вершина  $v$ , степень которой равна 5. Вершины графа  $G$ , соседние с вершиной  $v$ , не могут быть все попарно соединены рёбрами, потому что иначе граф  $G$  содержал бы непланарный граф  $K_5$ . Пусть  $v_1$  и  $v_2$  — вершины графа  $G$ , соединённые рёбрами с вершиной  $v$  и не соединённые ребром друг с другом. Рассмотрим сначала граф  $G'$ , который получается из графа  $G$  после выбрасывания вершины  $v$  и выходящих из неё рёбер. Затем рассмотрим граф  $G''$ , который получается из графа  $G'$  после проведения дополнительного ребра, соединяющего вершины  $v_1$  и  $v_2$ . Это дополнительное ребро можно составить из рёбер  $v_1v$  и  $vv_2$ , поэтому граф  $G''$  планарен. Наконец, стянем в графе  $G''$  дополнительное ребро в точку. В результате получим планарный граф  $G'''$ , число вершин которого равно  $n - 2$ . По предположению вершины этого графа можно раскрасить в 5 цветов. Эта раскраска индуцирует раскраску вершин графа  $G'$ , при которой вершины  $v_1$  и  $v_2$  будут одного цвета. Это означает, что вершины графа  $G$ , соседние с вершиной  $v$ , имеют не более 4 различных цветов. Поэтому вершину  $v$  можно окрасить в цвет, отличный от цветов соседних с ней вершин.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** В действительности вершины любого планарного графа можно раскрасить в 4 цвета (*теорема о четырёх красках*), но доказывается это чрезвычайно сложно. Первое опубликованное доказательство теоремы о четырёх красках ([27] и [29]) занимало 150 страниц, но исчерпывающее изложение этого доказательства [28] занимало 740 страниц. Затем появились более простые доказательства. Например, доказательство, приведённое в [112], занимает чуть больше 40 страниц, но и это доказательство весьма сложно. Оно тоже было получено с помощью компьютера.

**З а д а ч а 1.4.** а) Пусть  $G$  — планарный граф, все грани которого содержат чётное число рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.

б) Пусть  $\gamma$  — гладкая замкнутая кривая, все самопересечения которой трансверсальны. Докажите, что  $\gamma$  разбивает плоскость на области, которые можно раскрасить в два цвета так, что области, граничащие по некоторой дуге, будут разного цвета.

Из формулы Эйлера можно вывести разные другие формулы. Из них наиболее часто применяется следующая формула.

**Т е о р е м а 1.8.** Пусть  $G$  — планарный граф без изолированных вершин,  $v_i$  — число его вершин, из которых выходит  $i$  рёбер,  $f_j$  — число граней, ограниченных  $j$  рёбрами (с учетом их кратностей).

Тогда  $\sum_i (4-i)v_i + \sum_j (4-j)f_j = 4(1+s) \geq 8$ , где  $s$  — число компонент связности графа  $G$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $\sum_i iv_i = 2e = \sum_j jf_j$  (каждое ребро имеет ровно два конца и принадлежит ровно двум граням). Кроме того,  $\sum_i v_i = v$  и  $\sum_j f_j = f$ . Поэтому из формулы Эйлера следует, что

$$\begin{aligned} \sum_i (4-i)v_i + \sum_j (4-j)f_j &= 4v - 2e + 4f - 2e = \\ &= 4(v - e + f) = 4(1+s), \end{aligned}$$

где  $s$  — число компонент связности графа  $G$ . □

**Следствие.** Если все грани 4-угольные, то  $3v_1 + 2v_2 + v_3 \geq 8$ .

Часто используется также следующее неравенство.

**Теорема 1.9.** Если любая грань ограничена циклом, содержащим не менее  $n$  рёбер, то  $e \leq \frac{n(v-2)}{n-2}$ .

**Доказательство.** Требуемое неравенство следует из неравенств  $nv - ne + nf \geq 2n$  и  $2e \geq nf$ . □

**Задача 1.5.** Воспользовавшись теоремой 1.9, получите ещё одно доказательство непланарности графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

### 1.3. Вложения графов в трёхмерное пространство

В плоскость можно вложить не любой граф. Но любой конечный граф можно вложить в трёхмерное пространство. Более того, граф можно вложить в трёхмерное пространство так, что все его рёбра будут прямолинейными отрезками. Например, если вершины графа разместить на кривой  $(t, t^2, t^3)$ , то отрезки, соединяющие вершины графа, не будут пересекаться. В самом деле, точки кривой с параметрами  $t_1, t_2, t_3, t_4$  являются вершинами тетраэдра, объем которого равен

$$\pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

в частности, противоположные рёбра этого тетраэдра не пересекаются.

Обсудим теперь более подробно вложения в  $\mathbb{R}^3$  графа  $K_6$ , состоящего из шести вершин, попарно соединённых рёбрами. Выберем в графе  $K_6$  три вершины и рассмотрим цикл  $C_1$ , порождённый этими тремя верши-

нами, и цикл  $C_2$ , порождённый тремя остальными вершинами. Фиксируем проекцию вложенного в  $\mathbb{R}^3$  графа  $K_6$  и определим  $\omega(C_1, C_2)$  как остаток от деления на 2 количества перекрестков, на которых цикл  $C_1$  проходит над  $C_2$ . Иными словами,  $\omega(C_1, C_2) = \text{lk}(C_1, C_2) \pmod{2}$ , где  $\text{lk}$  — коэффициент зацепления. В частности,  $\omega(C_1, C_2) = \omega(C_2, C_1)$  (доказательство этого свойства коэффициента зацепления приведено в [17]). Поэтому можно рассмотреть число  $\lambda(K_6) = \sum \omega(C_i, C_j)$ , где суммирование ведётся по всем  $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$  неупорядоченным парам непересекающихся циклов из трёх элементов.

**Теорема 1.10** ([116] и [48]). *Для любого вложения графа  $K_6$  в трёхмерное пространство  $\lambda(K_6) \equiv 1 \pmod{2}$ . В частности, для любого такого вложения найдётся пара зацепленных циклов.*

**Доказательство.** У графа  $K_6$  есть вложение в  $\mathbb{R}^3$ , для которого ровно два цикла зацеплены, а все остальные циклы незацеплены (рис. 13).

Любое вложение графа  $K_6$  в  $\mathbb{R}^3$  можно преобразовать в данное вложение, если при этом допускаются преобразования рёбер, изображённые на рис. 14.

Посмотрим, что происходит с  $\lambda(K_6)$  при пересечении пары рёбер  $e_i$  и  $e_j$ . Число  $\omega(C_p, C_q)$  при этом изменяется лишь в том случае, когда  $e_i \subset C_p$  и  $e_j \subset C_q$  (или  $e_j \subset C_p$  и  $e_i \subset C_q$ ). Непересекающиеся циклы  $C_p$  и  $C_q$ , содержащие пару рёбер  $e_i$  и  $e_j$ , существуют тогда и только тогда, когда рёбра  $e_i$  и  $e_j$  несмежные. Таких пар циклов для данных рёбер  $e_i$  и  $e_j$  ровно две: к ребру  $e_i$  можно добавить одну из двух вершин, которые не входят в  $e_i$  и  $e_j$ . Таким образом, при пересечении ребра с самим собой или со смежным ребром число  $\sum \text{lk}(C_i, C_j)$  не изменяется, а при пересечении ребра с несмежным ребром это число изменяется

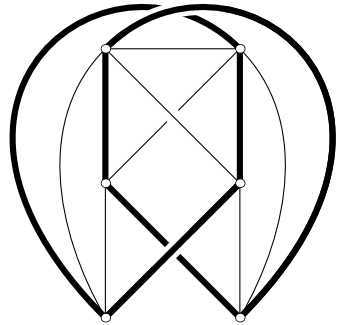


Рис. 13. Граф  $K_6$  с двумя зацепленными циклами

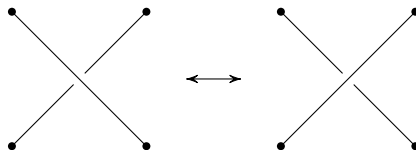


Рис. 14. Изменение типа перекрёстка (пересечение пары рёбер)

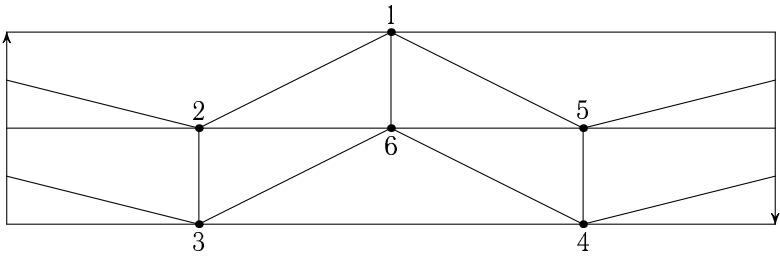


Рис. 15. Вложение графа  $K_6$  в лист Мёбиуса

на  $\pm 2$ . Поэтому число  $\lambda(K_6) = \sum \text{lk}(C_i, C_j) \pmod{2}$  не изменяется при всех преобразованиях вложения графа  $K_6$ .  $\square$

**Следствие 1.** При любом вложении листа Мёбиуса в  $\mathbb{R}^3$  его край зацеплен со средней линией.

**Доказательство** (см. [89]). Вложим в лист Мёбиуса граф  $K_6$ , как показано на рис. 15.

Циклы 134 и 256 соответствуют краю листа Мёбиуса и его средней линии. Несложно проверить, что во всех других парах несамопересекающихся циклов один из циклов заклеен треугольной областью, принадлежащей листу Мёбиуса. Такие циклы не могут быть зацеплены, потому что иначе возникли бы самопересечения листа Мёбиуса. Если циклы  $C_i$  и  $C_j$  не зацеплены, то  $\omega(C_i, C_j) = 0$ . Поэтому циклы 134 и 256 зацеплены.  $\square$

**Следствие 2.** Проективную плоскость  $\mathbb{R}P^2$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^3$ .

**Доказательство.** Вырежем из вложенной в  $\mathbb{R}^3$  проективной плоскости диск  $D^2$ . В результате получим лист Мёбиуса. Его средняя линия  $S$  зацеплена с  $S^1 = \partial D^2$ , поэтому  $S$  пересекает  $D^2$ , чего не может быть.  $\square$

#### 1.4. $k$ -связные графы

Два пути, проходящих по рёбрам графа из вершины  $x$  в вершину  $y$ , называют *независимыми*, если у них нет других общих вершин, кроме  $x$  и  $y$ .

Граф называют  *$k$ -связным\**, если он содержит по крайней мере  $k + 1$  вершину и любые две его различные вершины можно соединить по крайней мере  $k$  независимыми путями.

**Теорема 1.11** (Менгер—Уитни). *Граф  $G$ , содержащий по крайней мере  $k + 1$  вершину, является  $k$ -связным тогда и только тогда,*

\*) В гомотопической топологии этот термин имеет совсем другой смысл.



когда после выбрасывания любых его  $k-1$  вершин (и выходящих из них рёбер) получается связный граф.

Доказательство (см. [100]). Мы докажем более общее утверждение, а именно, если  $p(G, x, y)$  — наибольшее число независимых путей из вершины  $x$  в вершину  $y$ , а  $q(G, x, y)$  — наименьшее число точек, отличных от  $x$  и  $y$  и обладающих тем свойством, что любой путь из вершины  $x$  в вершину  $y$  проходит через одну из них, то  $p(G, x, y) = q(G, x, y)$ .

Неравенство  $p(G, x, y) \geq q(G, x, y)$  достаточно очевидно. В самом деле, пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  — независимые пути из  $x$  в  $y$ ;  $x_1, \dots, x_q$  — точки (отличные от  $x$  и  $y$ ), для которых любой путь из  $x$  в  $y$  проходит через одну из них. Из независимости путей  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  следует, что каждый из них проходит не более чем через одну из точек  $x_1, \dots, x_q$ . С другой стороны, любой путь из  $x$  в  $y$  проходит через одну из точек  $x_1, \dots, x_q$ , поэтому  $p \geq q$ .

Предположим, что  $G$  — граф с минимальным числом рёбер, для которого не выполняется равенство  $p(G, x, y) = q(G, x, y)$ . Тогда  $p = p(G, x, y) < q(G, x, y) = q$ . У графа  $G$  есть рёбра, отличные от ребра  $xy$ . Пусть  $\lambda$  — одно из таких рёбер,  $G-\lambda$  — граф, полученный из графа  $G$  выбрасыванием ребра  $\lambda$ , и  $\hat{G} = G/\lambda$  — граф, полученный из графа  $G$  стягиванием ребра  $\lambda$  в одну точку. Число рёбер графов  $G-\lambda$  и  $\hat{G}$  строго меньше числа рёбер графа  $G$ , поэтому согласно предположению  $p(G-\lambda, x, y) = q(G-\lambda, x, y)$  и  $p(\hat{G}, x, y) = q(\hat{G}, x, y)$ , а значит,  $q(G-\lambda, x, y) = p(G-\lambda, x, y) \leq p(G, x, y) = p < q$ ; аналогично  $q(\hat{G}, x, y) < q$ . Таким образом, в графах  $G-\lambda$  и  $\hat{G}$  есть множества вершин  $I$  и  $\hat{J}$ , разделяющие  $x$  и  $y$  и состоящие менее чем из  $q$  элементов. Множеству  $\hat{J}$  соответствует множество  $J$  вершин графа  $G$ , разделяющее  $x$  и  $y$ . При этом  $|J| \leq |\hat{J}| + 1$  и  $|J| \geq q$ . Следовательно,  $|J| = |\hat{J}| + 1$ . Это означает, что оба конца ребра  $\lambda$  принадлежат множеству  $J$ .

Пусть  $H_x$  — множество вершин  $z \in I \cup J$ , для которых в  $G$  есть путь из  $x$  в  $z$ , не проходящий через остальные вершины из множества  $I \cup J$ ;  $H_y$  определяется аналогично. Любой путь из  $x$  в  $y$  в графе  $G$  проходит через одну из вершин множества  $J$ , поэтому, в частности, он проходит через одну из вершин множества  $I \cup J$ . Первая из таких вершин лежит в  $H_x$ , а последняя лежит в  $H_y$ . Поэтому множества  $H_x$  и  $H_y$  разделяют вершины  $x$  и  $y$  в графе  $G$ , а значит,  $|H_x| \geq q$  и  $|H_y| \geq q$ .

Пусть  $z \in H_x \cap H_y$ . Тогда в  $G$  есть пути из  $x$  в  $z$  и из  $z$  в  $y$ , не проходящие через вершины множества  $I \cup J$ , отличные от  $z$ . Из этих двух путей можно составить один путь  $\gamma$  из  $x$  в  $y$ . Путь  $\gamma$  проходит ровно через одну вершину множества  $I \cup J$ , а именно, вершину  $z$ . Поэтому, в частности, путь  $\gamma$  не проходит через ребро  $\lambda$ , поскольку оба конца

ребра  $\lambda$  лежат в  $J$ . Следовательно, путь  $\gamma$  принадлежит графу  $G - \lambda$ , а значит, путь  $\gamma$  проходит через одну из вершин множества  $I$ . Но такой вершиной может быть только вершина  $z$ . Кроме того, путь  $\gamma$  проходит через одну из вершин множества  $J$ ; такой вершиной тоже может быть только вершина  $z$ . Таким образом,  $z \in I \cap J$ , т. е.  $H_x \cap H_y \subset I \cap J$ . Поэтому

$$|H_x| + |H_y| = |H_x \cap H_y| + |H_x \cup H_y| \leq |I \cap J| + |I \cup J| = |I| + |J|,$$

но этого не может быть, поскольку  $|H_x| \geq q$ ,  $|H_y| \geq q$ ,  $|I| < q$  и  $|J| = q$ .  $\square$

**С л е д с т в и е.** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  —  $k$ -связные подграфы одного и того же графа. Тогда если  $|G_1 \cap G_2| \geq k$ , то граф  $G_1 \cup G_2$   $k$ -связен.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно теореме Менгера—Уитни после выбрасывания произвольных  $k - 1$  вершин графа  $G_1 \cup G_2$  графы  $G_1$  и  $G_2$  остаются связными. У графов  $G_1$  и  $G_2$  есть общая вершина, отличная от выброшенных вершин, поэтому граф  $G_1 \cup G_2$  тоже остаётся связным.  $\square$

Важным примером  $n$ -связных графов являются графы, образованные рёбрами выпуклых многогранников в  $n$ -мерном пространстве. Будем называть граф  $n$ -реализуемым, если его можно реализовать как набор рёбер (невыврожденного) выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^n$ .

**Т е о р е м а 1.12** (Балинский [31]). Любой  $n$ -реализуемый граф является  $n$ -связным.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $P^n$  — многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , рёбра которого образуют рассматриваемый граф. Требуется доказать, что если выбросить произвольные вершины  $A_1, \dots, A_{n-1}$  и выходящие из них рёбра, то в результате получится связный граф. Пусть  $V$  — аффинное пространство, порожденное точками  $A_1, \dots, A_{n-1}$ . Возможны два случая.

**С л у ч а й 1.**  $V$  не содержит внутренних точек многогранника  $P^n$ .

В этом случае  $V \cap P^n = F_1^k$  — грань многогранника  $P^n$ . Пусть  $H_1$  — опорная гиперплоскость многогранника  $P^n$ , содержащая грань  $F_1^k$ ,  $H_2$  — вторая опорная гиперплоскость, параллельная  $H_1$ , и  $F_2^l = P^n \cap H_2$ . Если  $A$  — вершина многогранника  $P^n$ , отличная от  $A_1, \dots, A_{n-1}$ , то из  $A$  можно опуститься по рёбрам многогранника на гиперплоскость  $H_1$ , не поднимаясь при этом на гиперплоскость  $H_2$ , и, в частности, не проходя через вершины  $A_1, \dots, A_{n-1}$  и выходящие из них рёбра. Из другой вершины  $B$  мы точно так же попадаем в некоторую вершину многогранника  $F_2^l = P^n \cap H_2$ . Остаётся заметить, что вершины многогранника  $F_2^l$  образуют связный граф.

**С л у ч а й 2.**  $V$  содержит внутренние точки многогранника  $P^n$ .

Размерность пространства  $V$  не превосходит  $n - 2$ . Поэтому существует гиперплоскость  $H$ , содержащая пространство  $V$  и ещё хотя бы одну вершину  $A_n$  многогранника  $P^n$ , не лежащую в  $V$ . Пусть  $H_1$  и  $H_2$  —

опорные гиперплоскости многогранника  $P^n$ , параллельные  $H$ . Такие же рассуждения, как и в случае 1, показывают, что из любой вершины  $A$ , отличной от  $A_1, \dots, A_{n-1}$ , можно попасть в вершину  $A_n$ , не проходя при этом через вершины  $A_1, \dots, A_{n-1}$  и выходящие из них рёбра. Для этого нужно спуститься или подняться на гиперплоскость  $H_1$  или гиперплоскость  $H_2$ . Ясно также, что если из любой вершины можно пройти в вершину  $A_n$ , то из любой вершины можно пройти в любую другую вершину, пройдя через вершину  $A_n$ .  $\square$

### 1.5. Теорема Штейница

Рёбра выпуклого многогранника (в трёхмерном пространстве) образуют 3-связный граф (теорема 1.12 на с. 34). Этот граф, очевидно, планарен: поверхность выпуклого многогранника с одной выколотой точкой гомеоморфна плоскости. Оказывается, что 3-связность и планарность графа являются не только необходимыми, но и достаточными условиями того, что граф реализуется как набор рёбер выпуклого многогранника.

**Теорема 1.13** (Штейниц [123]). *Граф<sup>\*</sup> можно реализовать как набор рёбер выпуклого многогранника в трёхмерном пространстве тогда и только тогда, когда этот граф 3-связен и планарен.*

**Доказательство** (см. [35]). Напомним, что граф 3-связен тогда и только тогда, когда он содержит по крайней мере 4 вершины и после выбрасывания любых двух его вершин и выходящих из них рёбер получается связный граф (теорема 1.11 на с. 32). В 3-связном графе не может быть вершин, из которых выходит менее трёх рёбер, поэтому 3-связный граф с  $n$  вершинами содержит по крайней мере  $n \cdot 3/2$  рёбер. Следовательно, минимальное число рёбер имеет 3-связный граф  $K_4$ , образованный рёбрами тетраэдра.

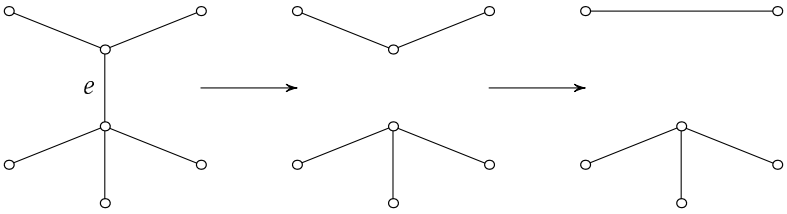
Доказательство теоремы Штейница проведем индукцией по числу рёбер 3-связного планарного графа. База индукции: граф  $K_4$ , имеющий 6 рёбер. Шаг индукции делается в два этапа:

1) Сначала сопоставляем 3-связному планарному графу  $G$ , имеющему более 6 рёбер, 3-связный планарный граф  $G'$  с меньшим числом рёбер.

2) Затем по данному выпуклому многограннику  $P'$ , рёбра которого образуют граф  $G'$ , мы строим выпуклый многогранник  $P$ , рёбра которого образуют граф  $G$ .

Пусть  $G$  — граф с ребром  $e$ . Определим операцию *уничтожения* ребра  $e$  следующим образом. Сначала удалим из графа  $G$  ребро  $e$ , а затем,

<sup>\*</sup>Здесь предполагается, что у графа нет ни петель, ни двойных рёбер.

Рис. 16. Уничтожение ребра  $e$ 

если в результате такой операции возникнут вершины степени 2, удалим их, т. е. заменим одним ребром два ребра с общей вершиной, из которой не выходит никаких других рёбер (рис. 16).

Мы рассматриваем только графы без петель и двойных рёбер, поэтому уничтожать можно не любое ребро: после уничтожения ребра могут появиться петли или двойные рёбра.

**Шаг 1.** Любой 3-связный планарный граф  $G$ , число рёбер которого больше 6, имеет ребро  $e$ , уничтожив которое, получим 3-связный планарный граф  $G'$ .

Планарность графа, который получается после уничтожения ребра, очевидна. Для 3-связных графов мы докажем одно общее утверждение, из которого вытекает утверждение шага 1.

Пусть  $\Pi = \{\pi_0, \dots, \pi_n\}$  — набор несамопересекающихся путей в графе  $G$ . Сопоставим графу  $G$  и набору путей  $\Pi$  1-мерный комплекс  $G_\Pi$ , у которого могут быть петли и двойные рёбра. Вершинами комплекса  $G_\Pi$  будут те вершины графа  $G$ , которые являются концами путей  $\pi_i \in \Pi$ , и те вершины графа  $G$ , через которые проходят по крайней мере два пути  $\pi_i$ . Рёбрами комплекса  $G_\Pi$  будут дуги путей  $\pi_i$ , высекаемые на этих путях вершинами  $G_\Pi$ .

**Л е м м а.** Пусть  $G$  — 3-связный граф. Тогда существует такой набор путей  $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$ , что для  $\Pi(k) = \{\pi_0, \dots, \pi_k\}$ , где  $1 \leq k \leq n$ , выполняются следующие свойства:

1) комплекс  $G_{\Pi(k)}$  является 3-связным графом;

2)  $G_{\Pi(1)} = K_4$ ;

3)  $G_{\Pi(n)} = G$ ;

4) при  $k = 1, \dots, n - 1$  путь  $\pi_{k+1}$  не пересекает граф  $G_{\Pi(k)}$  в точках, отличных от концов пути  $\pi_{k+1}$ .

**Доказательство.** Набор путей  $\{\pi_i\}$  для графа  $G$  будем строить по индукции. Прежде всего докажем, что любой 3-связный граф  $G$  содержит подграф, гомеоморфный  $K_4$ . Пусть  $x$  и  $y$  — две различные вершины графа  $G$ . По условию существуют независимые пути  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  из  $x$  в  $y$ . Из этих трёх путей только один путь может быть ребром. Пусть для

определённости пути  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  проходят через вершины  $z_2$  и  $z_3$ , отличные от  $x$  и  $y$ . После выбрасывания точек  $x$  и  $y$  остаётся связный граф, поэтому точки  $z_2$  и  $z_3$  можно соединить путём  $\sigma$ , не проходящим через  $x$  и  $y$ . Путь  $\sigma$  может частично проходить по  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , но у него есть участок, не проходящий по  $\sigma_2 \cup \sigma_3$  и соединяющий вершины  $v \in \sigma_2$  и  $w \in \sigma_3$ . Вершины  $x, y, v, w$  и высекаемые ими на путях  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  дуги образуют подграф, гомеоморфный  $K_4$ .

Среди всех подграфов графа  $G$ , гомеоморфных  $K_4$ , выберем подграф  $T$ , которой содержит наибольшее число вершин графа  $G$ . Пусть  $x, y, v, w$  — его вершины. В качестве  $\pi_0$  выберем путь  $v\omega$ , а в качестве  $\pi_1$  выберем путь  $v\chi w y$ . Тогда  $G_{\Pi(1)} = K_4$ .

Предположим, что пути  $\pi_0, \dots, \pi_k$  уже построены и  $G_{\Pi(k)} \neq G$ . Тогда выполняется одно из двух условий:

а) существует вершина  $z$  графа  $G$ , которая лежит на ребре графа  $G_{\Pi(k)}$ , но не является вершиной графа  $G_{\Pi(k)}$ ;

б) условие а) не выполняется, но существует вершина  $z$  графа  $G_{\Pi(k)}$ , из которой выходит ребро графа  $G$ , не являющееся ребром графа  $G_{\Pi(k)}$ .

Действительно, из связности графа  $G$  следует, что если некоторая вершина графа  $G$  не принадлежит графу  $G_{\Pi(k)}$ , то существует ребро графа  $G$ , один конец которого принадлежит графу  $G_{\Pi(k)}$ , а другой не принадлежит.

В случае а) рассмотрим ребро  $e$  графа  $G_{\Pi(k)}$ , содержащее вершину  $z$ . Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — концы ребра  $e$ , а  $z'$  — вершина графа  $G_{\Pi(k)}$ , отличная от  $z_1$  и  $z_2$ . Из 3-связности графа  $G$  следует, что в нём существует путь из  $z$  в  $z'$ , не проходящий через  $z_1$  и  $z_2$ . Поэтому в графе  $G$  существует путь из некоторой внутренней точки ребра  $e$  в некоторую точку (не обязательно вершину) графа  $G_{\Pi(k)}$ , не имеющий с графом  $G_{\Pi(k)}$  общих точек, отличных от концов пути. В качестве  $\pi_{k+1}$  выберем такой путь, содержащий наибольшее число вершин графа  $G$ .

В случае б) любое ребро графа  $G_{\Pi(k)}$  является также и ребром графа  $G$ . В графе  $G$  существует путь  $\sigma$ , идущий из вершины  $z$  в некоторую точку графа  $G_{\Pi(k)}$  и не имеющий других общих точек с графом  $G_{\Pi(k)}$ . Пути  $\pi_0, \dots, \pi_k$  выбирались так, чтобы они содержали наибольшее число вершин графа  $G$ . Поэтому путь  $\sigma$  ведёт из вершины  $z$  в вершину графа  $G$ , не соседнюю с  $z$ . В качестве пути  $\pi_{k+1}$  выберем путь  $\sigma$ , проходящий через наибольшее число вершин графа  $G$ .

В случае б) в графе проводится дополнительное ребро; это не может нарушить 3-связность графа.

В случае а) либо на одном ребре выбирается дополнительная вершина  $u$  и из нее проводится ребро в уже имеющуюся вершину, либо на двух рёбрах выбираются дополнительные вершины  $u$  и  $v$  и проводится ребро  $uv$ . Ясно, что после выбрасывания любых двух вершин нового

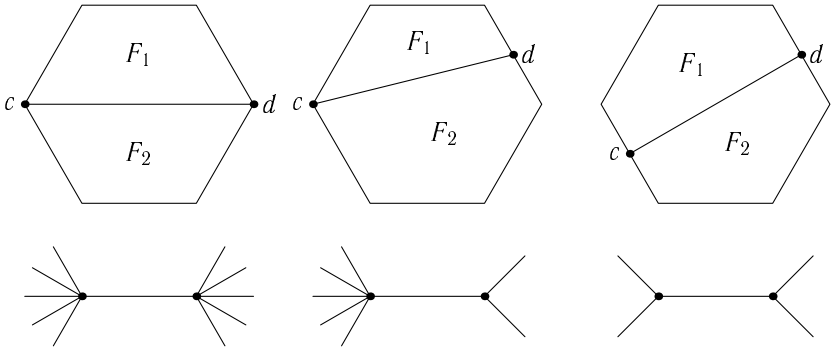


Рис. 17. Три варианта уничтожения ребра

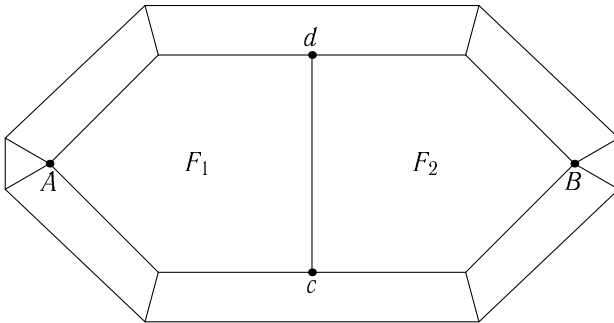
графа, отличных от  $u$  и  $v$ , граф остаётся связным. Выбрасывание вершины  $u$  эквивалентно выбрасыванию ребра в старом графе, на котором лежит вершина  $u$ . После выбрасывания одного ребра 3-связный граф превращается по крайней мере в 2-связный граф. Поэтому новый граф 3-связен.

Остальные требования, которым должен удовлетворять путь  $\pi_{k+1}$ , выполняются очевидным образом.  $\square$

С помощью леммы шаг 1 доказывается совсем просто. Пусть  $\{\pi_0, \dots, \pi_n\}$  — набор путей для 3-связного графа  $G$ , содержащего более 6 рёбер. Этот граф отличен от  $K_4$ , поэтому  $n > 1$ . У графа  $G$  нет вершин степени 2, поэтому путь  $\pi_n$  состоит из одного ребра графа  $G$ . После уничтожения этого ребра получаем 3-связный граф  $G_{\Pi(n-1)}$ , что и требовалось.  $\square$

Теперь нужно сделать второй шаг — научиться строить по выпуклому многограннику  $P'$ , соответствующему графу  $G'$ , выпуклый многогранник  $P$ , соответствующий графу  $G$ . В планарном графе  $G$  уничтожаемое ребро может быть одного из трёх видов, изображённых на рис. 17. Этим трём видам уничтожаемых рёбер графов соответствуют три вида добавляемых рёбер многогранников; они изображены на том же рисунке.

Требуемое преобразование многогранников можно попытаться построить, слегка пошевелив грани  $F_1$  и  $F_2$ , чтобы они оказались в разных плоскостях (в исходном многограннике  $P'$  они лежат в одной плоскости, а в многограннике  $P$  они должны лежать в разных плоскостях). Но при этом возникает одна трудность: если плоскость грани проходит через  $n$ -гранный угол, где  $n \geq 4$ , то шевелить её нельзя, потому что иначе нарушится структура графа рёбер многогранника. Например, для многогранника, изображённого на рис. 18, нельзя шевелить ни грань  $F_1$ ,

Рис. 18. Грани  $F_1$  и  $F_2$  шевелить нельзя

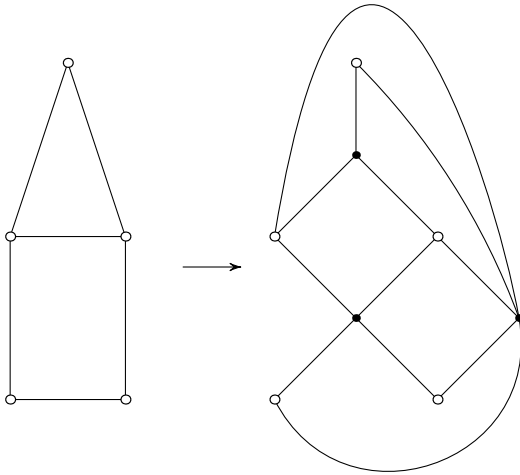
ни грань  $F_2$ , потому что иначе нарушится структура рёбер, выходящих из вершин  $A$  и  $B$ . Таким образом, чтобы добиться требуемого, придется пошевелить ещё и вершины  $A$  и  $B$ . В свою очередь, малое шевеление вершины может нарушить структуру графа рёбер, если эта вершина принадлежит грани, у которой более трёх сторон.

Чтобы избавиться от этой трудности, можно попытаться упорядочить вершины и грани так, чтобы последовательность вершин и граней началась четверкой  $F_1, F_2, c, d$  и никакой член последовательности не был инцидентен\*) более чем трём предшествующим членам. В самом деле, если вершины и грани удастся так упорядочить, то можно пошевелить грани  $F_1$  и  $F_2$ , а затем каждый следующий член последовательности сдвигать так, чтобы он оказывался инцидентным всем тем предшествующим членам последовательности, которым он должен быть инцидентен. Если вершина инцидентна трём предшествующим граням, то ее положение определено однозначно. Если же вершина инцидентна  $p < 3$  предшествующим граням, то при выборе положения вершины имеется  $3 - p$  степеней свободы.

**Шаг 2.** Множество всех вершин и граней 3-связного планарного графа  $G$  можно упорядочить так, что любой член последовательности вершин и граней инцидентен не более чем трём предшествующим членам. Более того, в качестве четырёх первых членов можно взять две грани, примыкающие к данному ребру, и два конца этого ребра.

Начнем с того, что сопоставим планарному графу  $G$  планарный граф  $\tilde{G}$ , вершинами которого служат вершины графа  $G$  и дополнительные вершины, соответствующие граням графа  $G$ . Две вершины графа  $\tilde{G}$  соединены ребром, если они инцидентны друг другу (рис. 19).

\*) Инцидентными могут быть только вершина и грань (или грань и вершина); вершина  $A$  инцидентна грани  $F$ , если  $A \in F$ .

Рис. 19. Граф  $\tilde{G}$ 

Требуется упорядочить вершины графа  $\tilde{G}$  так, чтобы в последовательности вершин каждая вершина была бы соединена рёбрами не более чем с тремя предыдущими. При этом в качестве четырёх первых вершин нужно взять заданные вершины  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$ , порождающие цикл в графе  $\tilde{G}$ .

В графе  $\tilde{G}$  все грани 4-угольные, поэтому можно воспользоваться следствием теоремы 1.8 (см. с. 30). В результате получим, что граф  $\tilde{G}$  имеет по крайней мере 8 вершин степени 3 (вершин степени 1 и 2 у него, очевидно, нет). В частности, граф  $\tilde{G}$  имеет вершину степени 3, отличную от вершин  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$ . Эту вершину мы выберем в качестве последнего члена последовательности и обозначим её  $k_n$  (здесь  $n$  — число вершин графа  $\tilde{G}$ ). Пусть  $K(n)$  — граф, полученный из графа  $\tilde{G}$  выбрасыванием вершины  $k_n$  и выходящих из неё рёбер.

Предположим, что вершины  $k_n, k_{n-1}, \dots, k_m$  уже выбраны и, кроме того, построены графы  $K(n), K(n-1), \dots, K(m)$ . Если  $m > 5$ , то нужно выбрать вершину  $k_{m-1}$  и построить граф  $K(m-1)$ . По условию вершины  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  заданы так, что порождаемый ими граф является циклом. В частности, степень каждой из этих вершин не меньше 2. Если граф  $K(m)$  содержит изолированную вершину или вершину степени 1, то такую вершину можно выбрать в качестве вершины  $k_{m-1}$ . Если же степень любой вершины графа  $K(m)$  не меньше 2, то возможны два случая.

**С л у ч а й 1.** В графе  $K(m)$  подграф, порожденный вершинами  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$ , изолирован.

Выбросим из графа  $K(m)$  вершины  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$ . К полученному графу снова можно применить следствие теоремы 1.8 и найти в этом



графе по крайней мере одну вершину степени не более 3. Эту вершину выберем в качестве  $k_{m-1}$ .

**С л у ч а й 2.** В графе  $K(m)$  по крайней мере одна из вершин  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  соединена ребром с вершиной  $k_i, i \geq 5$ .

В этом случае одна из вершин  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  имеет степень не менее 3, поэтому в величину  $2v_2 + v_3$  эти вершины дают вклад не более 7. Это означает, в частности, что граф  $K(m)$  имеет вершину степени не более 3, отличную от вершин  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$ . Эту вершину мы и выберем в качестве  $k_{m-1}$ .

Во всех случаях граф  $K(m-1)$  получается из графа  $K(m)$  выбрасыванием вершины  $k_{m-1}$ .  $\square$

## § 2. Гомотопические свойства графов

### 2.1. Фундаментальная группа графа

На графах (1-мерных комплексах) можно наблюдать многие явления гомотопической топологии, чем мы сейчас и займемся.

Образования  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  называют *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , что  $F(x, 0) = f_0(x)$  и  $F(x, 1) = f_1(x)$ . Иными словами, отображения  $f_0$  и  $f_1$  можно связать семейством непрерывных отображений  $f_t: X \rightarrow Y, 0 \leq t \leq 1$ , непрерывно зависящих от  $t$ . Это семейство непрерывных отображений называют *гомотопией*, связывающей  $f_0$  и  $f_1$ . Для гомотопности отображений  $f_0$  и  $f_1$  используется обозначение  $f_0 \simeq f_1$ .

Легко проверить, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности. При доказательстве того, что если  $f \simeq g$  и  $g \simeq h$ , то  $f \simeq h$ , следует воспользоваться теоремой о склейке отображений (теорема 0.1 на с. 14).

**З а д а ч а 2.1.** Пусть отображения\*)  $f, g: \text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(2n, \mathbb{R})$  заданы формулами

$$f(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad g(A, B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что  $f \simeq g$ .

Отображение, гомотопное постоянному отображению, называют *гомотопным нулю*.

---

\*) На множестве, состоящем из матриц размером  $m \times n$ , топология вводится следующим образом: каждая матрица отождествляется с точкой пространства  $\mathbb{R}^{mn}$  (или  $\mathbb{C}^{mn}$ , если элементы матрицы комплексные) и берётся индуцированная топология.

Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называют *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие непрерывные отображения  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$ , что отображения  $f \circ g$  и  $g \circ f$  гомотопны тождественным отображениям пространств  $Y$  и  $X$ , соответственно. Для гомотопической эквивалентности пространств  $X$  и  $Y$  используется обозначение  $X \sim Y$ .

Топологическое пространство называют *стягиваемым*, если оно гомотопически эквивалентно точке.

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^n$  стягиваемо.

Топологическое пространство  $X$  называют *линейно связным*, если любые две его точки  $x_0$  и  $x_1$  можно соединить путём, т.е. существует непрерывное отображение  $f$  отрезка  $I = [0, 1]$  в  $X$ , для которого  $f(0) = x_0$  и  $f(1) = x_1$ .

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите, что линейно связное пространство связно.

**З а д а ч а 2.2.** Докажите, что следующие топологические пространства линейно связны: а) пространство вещественных матриц порядка  $n$  с положительным определителем; б) пространство  $SO(n)$ , состоящее из ортогональных матриц порядка  $n$  с определителем 1;

в) пространство  $U(n)$ , состоящее из унитарных матриц порядка  $n$ ; г) пространство  $SU(n)$ , состоящее из унитарных матриц порядка  $n$  с определителем 1.

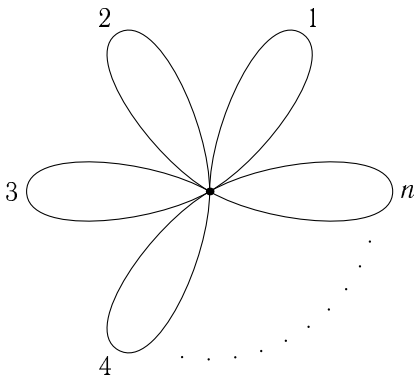


Рис. 20. Букет окружностей

Если в топологических пространствах  $X$  и  $Y$ , не имеющих общих точек, отмечены точки  $x_0 \in X$  и  $x_1 \in Y$ , то можно определить топологическое пространство  $X \vee Y = X \cup Y / \{x_0, y_0\}$ , называемое *букетом* пространств  $X$  и  $Y$ . Иными словами, пространство  $X \vee Y$  получается в результате отождествления точек  $x_0$  и  $y_0$ . По-другому букет  $X \vee Y$  можно определить как подмножество в  $X \times Y$ , состоящее из таких точек  $(x, y)$ , что  $x = x_0$  или  $y = y_0$ . Аналогично для пространств  $X_1, \dots, X_n$  с отмеченными точками  $x_1, \dots, x_n$  можно определить букет  $X_1 \vee \dots \vee X_n = X_1 \cup \dots \cup X_n / \{x_1, \dots, x_n\}$ . Букет  $n$  окружностей изображён на рис. 20.

**Теорема 2.1.** Любой конечный связный 1-мерный комплекс гомотопически эквивалентен букету окружностей.

**Доказательство.** Предположим, что концы ребра  $A$  1-мерного комплекса  $X$  не совпадают. Тогда  $A$  представляет собой отрезок, а не окружность, поэтому существует гомотопия  $f_t: A \rightarrow A$ , связывающая тождественное отображение  $f_0 = \text{id}_A$  и постоянное отображение  $f_1: A \rightarrow * \in A$ . Докажем, что в таком случае пространства  $X$  и  $X/A$  гомотопически эквивалентны. Гомотопию  $f_t: A \rightarrow A$  можно продолжить до такой гомотопии  $F_t: X \rightarrow X$ , что  $F_0 = \text{id}_X$ . Иными словами, отображение множества  $(A \times I) \cup (X \times \{0\}) \subset X \times I$  можно продолжить до отображения всего множества  $X \times I$ . Это продолжение строится следующим образом. Пусть оба конца ребра  $B$  принадлежат ребру  $A$ . Тогда отображение задано на трёх из четырёх сторон квадрата  $B \times I$ ; на рис. 21 эти стороны изображены сплошными линиями, а четвертая сторона квадрата изображена пунктиром. Все точки луча, выходящего из точки  $P$ , отобразим в одну и ту же точку (образ точки пересечения луча с одной из трёх выделенных сторон). Если один конец (или оба конца) ребра  $B$  не принадлежит ребру  $A$ , то на одной боковой стороне (или на обеих боковых сторонах) отображение задаём произвольно. Затем аналогично строим продолжение отображения для рёбер, граничащих с  $A$  и  $B$ , и т. д.

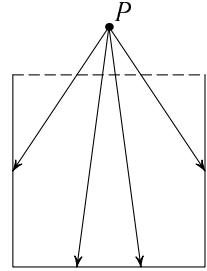


Рис. 21. Продолжение отображения

Пусть  $p: X \rightarrow X/A$  — естественная проекция. Отображение  $F_1$  обладает следующим свойством:  $F_1(A) = * \in A$ . Поэтому существует (единственное) отображение  $q: X/A \rightarrow A$ , для которого  $F_1 = q \circ p$ . Для доказательства гомотопической эквивалентности пространств  $X$  и  $X/A$  достаточно проверить, что  $q \circ p \sim \text{id}_X$  и  $p \circ q \sim \text{id}_{X/A}$ . Гомотопия  $F_t$  по построению связывает отображения  $F_1 = q \circ p$  и  $F_0 = \text{id}_X$ . А так как  $F_t(A) \subset A$  при всех  $t$ , то  $p \circ F_t = q_t \circ p$ , где  $q_t$  — некоторая гомотопия, связывающая отображения  $q_0 = \text{id}_{X/A}$  и  $q_1 = p \circ q$ .

Последовательные переходы от 1-мерного комплекса  $X$  к 1-мерному комплексу  $X/A$  приводят в конце концов к 1-мерному комплексу, у которого нет рёбер с несовпадающими концами. Такой комплекс представляет собой букет окружностей.  $\square$

Нетрудно убедиться, что связный 1-мерный комплекс, содержащий  $n_0$  вершин и  $n_1$  рёбер, гомотопически эквивалентен букету  $n_1 - n_0 + 1$  окружностей. Чтобы доказать это, построим *максимальное дерево*, т. е. стягиваемый подкомплекс, содержащий все вершины. Фиксируем для этого некоторую вершину  $P_0$  и рассмотрим множества  $S_n, n = 1, 2, \dots$ , состоящие из тех вершин, для которых самый короткий путь до  $P_0$  проходит ровно через  $n$  рёбер. Соединим каждую вершину из множества

$S_{n+1}$  с одной из тех вершин множества  $S_n$ , с которыми она соединена ребром (рис. 22). В результате получим максимальное дерево. Оно содержит  $n_0 - 1$  рёбер, которые можно последовательно стянуть. После этого получится 1-мерный комплекс с одной вершиной и  $n_1 - n_0 + 1$  рёбрами, т. е. букет  $n_1 - n_0 + 1$  окружностей.

Важной характеристикой линейно связного топологического пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0$  является его *фундаментальная группа*  $\pi_1(X, x_0)$ . Элементами фундаментальной группы служат классы гомотопных *петель* в  $X$  с началом  $x_0$ , т. е. отображений  $f: I \rightarrow X$  отрезка  $I = [0, 1]$ , для которых  $f(0) = f(1) = x_0$ . Структура группы на множестве  $\pi_1(X, x_0)$  вводится следующим образом. Положим

$$f_1 f_2(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f_2(2t - 1) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Иными словами, за первую половину пути мы с удвоенной скоростью проходим петлю  $f_1$ , а за вторую половину пути мы с удвоенной скоростью проходим петлю  $f_2$ .

Единичным элементом фундаментальной группы служит класс, содержащий постоянное отображение  $f: I \rightarrow x_0$ . Для класса, содержащего петлю  $f(t)$ , обратным является класс, содержащий петлю  $g(t) = f(1 - t)$ . В самом деле, гомотопия

$$F_s(t) = \begin{cases} x_0 & \text{при } 0 \leq t \leq s/2, \\ f(2t - s) & \text{при } s/2 \leq t \leq 1/2, \\ f(2 - 2t - s) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1 - s/2, \\ x_0 & \text{при } 1 - s/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(рис. 23) связывает отображения  $F_0 = fg$  и  $F_1: I \rightarrow x_0$ .

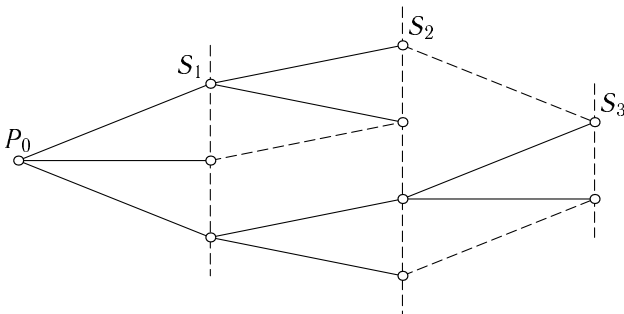


Рис. 22. Максимальное дерево

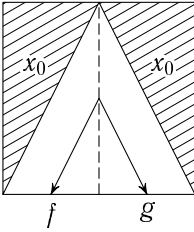


Рис. 23. Обратный элемент фундаментальной группы

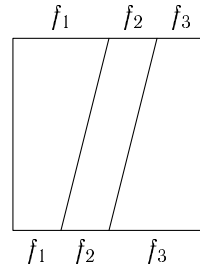


Рис. 24. Ассоциативность умножения

С помощью рис. 24 несложно построить гомотопию, связывающую отображения  $f_1(f_2 f_3)$  и  $(f_1 f_2)f_3$ .

Пусть  $\alpha$  — путь в  $X$  с началом  $x_1$  и концом  $x_2$ ;  $f$  — петля с началом и концом в точке  $x_1$ . Тогда  $\alpha^{-1} f \alpha$  — петля с началом и концом в точке  $x_2$ . Легко проверить, что отображение  $f \mapsto \alpha^{-1} f \alpha$  индуцирует изоморфизм группы  $\pi_1(X, x_1)$  на группу  $\pi_1(X, x_2)$ . Пути  $\alpha$  и  $\beta$  индуцируют один и тот же изоморфизм тогда и только тогда, когда класс петли  $\alpha\beta^{-1}$  принадлежит центру группы  $\pi_1(X, x_1)$ . В самом деле, петли  $\alpha^{-1} f \alpha$  и  $\beta^{-1} f \beta$  гомотопны тогда и только тогда, когда петли  $f(\alpha\beta^{-1})$  и  $(\alpha\beta^{-1})f$  гомотопны.

Линейно связное пространство  $X$  называют *односвязным*, если  $\pi_1(X, x_0) = 0$  для некоторой точки  $x_0 \in X$ ; в таком случае  $\pi_1(X, x_1) = 0$  для любой точки  $x_1 \in X$ .

Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  естественным образом индуцирует гомоморфизм  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0)$ . При этом гомоморфизме класс, содержащий петлю  $\omega(t)$ , переходит в класс, содержащий петлю  $f(\omega(t))$ . Ясно, что  $(fg)_* = f_* g_*$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $f_i$  — гомотопия, связывающая отображения  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ . Тогда гомоморфизм  $(f_1)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f_1(x_0))$  совпадает с композицией гомоморфизма  $(f_0)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f_0(x_0))$  и изоморфизма  $\pi_1(Y, f_0(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, f_1(x_0))$ , индуцированного путём  $\alpha(t) = f_i(x_0)$ , соединяющим точки  $f_0(x_0)$  и  $f_1(x_0)$ .

**Доказательство.** Пусть  $h$  — некоторая петля в  $X$  с началом и концом в точке  $x_0$ . Требуется доказать, что петли  $f_1(h(t))$  и  $\alpha^{-1} f_0(h(t)) \alpha$  гомотопны. Рассмотрим отображение  $F: I \times I \rightarrow Y$ , заданное формулой

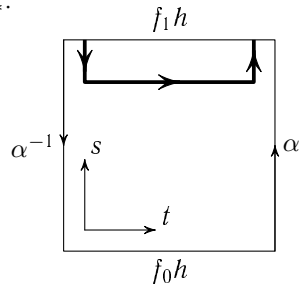


Рис. 25. Гомотопия

$F(s, t) = f_s(h(t))$ . Семейство путей, один из которых изображён на рис. 25, представляет собой гомотопию, связывающую петли  $f_1 h$  и  $\alpha^{-1}(f_0 h)\alpha$ .  $\square$

**Теорема 2.3.** *Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных топологических пространств изоморфны.*

**Доказательство.** Предположим, что линейно связные топологические пространства  $X$  и  $Y$  гомотопически эквивалентны. Тогда существуют отображения  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$ , для которых  $fg \sim id_Y$  и  $gf \sim id_X$ . Согласно теореме 2.2 гомоморфизмы  $g_* f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  и  $f_* g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, g(y_0))$  являются композициями тождественного отображения и изоморфизма, т. е. изоморфизмами. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*^{(1)}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*^{(2)}} \pi_1(Y, fgf(x_0)).$$

(Здесь  $f_*^{(1)}$  и  $f_*^{(2)}$  — гомоморфизмы фундаментальных групп с разными отмеченными точками, индуцированные одним и тем же отображением  $f$ .) Гомоморфизм  $g_* f_*^{(1)}$  — изоморфизм, поэтому  $g_*$  — эпиморфизм. Гомоморфизм  $f_*^{(2)} g_*$  — изоморфизм, поэтому  $g_*$  — мономорфизм. В итоге получаем, что  $g_*$  — изоморфизм.  $\square$

Из теорем 2.1 и 2.3 следует, что фундаментальная группа связного 1-мерного комплекса изоморфна фундаментальной группе некоторого букета окружностей. А именно, фундаментальная группа связного 1-мерного комплекса, содержащего  $n_0$  вершин и  $n_1$  рёбер, изоморфна фундаментальной группе букета  $n_1 - n_0 + 1$  окружностей.

## 2.2. Накрытия 1-мерных комплексов

Пусть  $\tilde{X}$  и  $X$  — линейно связные топологические пространства (например, связные 1-мерные комплексы). Отображение  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  называют *накрытием*, если  $p(\tilde{X}) = X$  и у каждой точки  $x \in X$  есть такая окрестность  $U$ , что прообраз  $p^{-1}(U)$  этой окрестности гомеоморфен  $U \times D$ , где  $D$  — дискретное множество, причём ограничение отображения  $p$  на  $p^{-1}(U)$  устроено как естественная проекция  $U \times D \rightarrow U$  (рис. 26). При этом  $\tilde{X}$  называют *накрывающим пространством*, а  $X$  — *базой накрытия*. Если дискретное множество  $D$  состоит ровно из  $n$  точек, то говорят, что накрытие  *$n$ -листно*. Прообраз точки  $x_0 \in X$  называют *слоем* над точкой  $x_0$ . Слой  $n$ -листного накрытия состоит ровно из  $n$  точек.

**З а д а ч а 2.3.** а) Пусть  $K_n$  — полный граф с  $n$  вершинами,  $p: K_n \rightarrow G$  — некоторое накрытие. Докажите, что число листов этого накрытия нечётно.

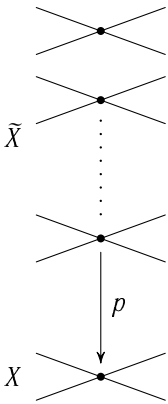


Рис. 26. Накры- тие 1-мерного комплекса

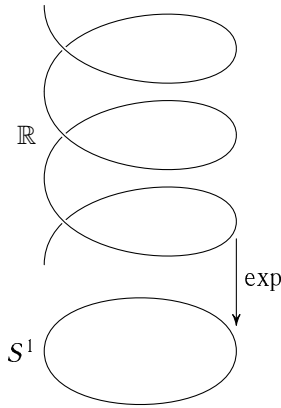


Рис. 27. Экспоненциальное накрытие окружности

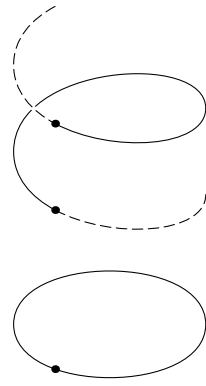


Рис. 28. Незамкнутое поднятие замкнутого пути

б) Докажите, что существует накрытие  $p: K_n \rightarrow G$  с любым нечётным числом листов.

В этой главе мы будем рассматривать только накрытия 1-мерных комплексов.

Прямую  $\mathbb{R}$  можно рассматривать как 1-мерный комплекс с вершинами в точках с целочисленными координатами. Отображение  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , переводящее точку  $t \in \mathbb{R}$  в точку  $\exp(2\pi it) \in S^1$ , является накрытием (рис. 27).

Назовем *поднятием* пути  $\gamma(t) \subset X$  такой путь  $\tilde{\gamma}(t) \subset \tilde{X}$ , что  $p(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$  при всех  $t$ . Если  $x_0$  — начало пути  $\gamma(t)$ , а  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ , то существует единственное поднятие пути  $\gamma(t)$  с началом в точке  $\tilde{x}_1$ . Пример отображения  $\exp$  показывает, что поднятие замкнутого пути не обязательно будет замкнутым путём (рис. 28). Накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  индуцирует гомоморфизм  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ , где  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ . Класс петли  $\gamma(t) \subset X$  с началом в точке  $x_0$  принадлежит подгруппе  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$  тогда и только тогда, когда поднятие этой петли с началом в точке  $\tilde{x}_0$  замкнуто. Если рассмотреть другую точку  $\tilde{x}_1$  из прообраза точки  $x_0$ , то группы  $G_0 = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  и  $G_1 = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$  не обязательно будут совпадать. В самом деле,  $G_1 = \alpha^{-1}G_0\alpha$ , где  $\alpha$  — проекция пути в  $\tilde{X}$ , соединяющего точки  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{x}_1$ . Совпадение групп  $G_0$  и  $G_1$  эквивалентно тому, что поднятие петли  $\gamma$  с началом в точке  $\tilde{x}_0$  замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто поднятие этой петли с началом в точке  $\tilde{x}_1$ . Ясно также, что для петли  $\gamma$  с началом и концом в точке  $x_0$  любое её поднятие соединяет некоторые точки прообраза точки  $x_0$ . Поэтому для любой петли  $\gamma$  с нача-

лом  $x_0$  её поднятия, начинающиеся в разных точках прообраза точки  $x_0$ , одновременно замкнуты или одновременно незамкнуты лишь в том случае,

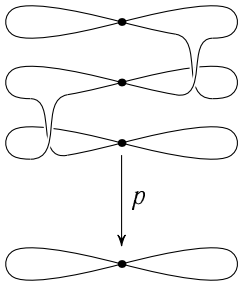


Рис. 29. Нерегулярное накрытие

когда  $\alpha^{-1}G_0\alpha = G_0$  для всех  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ , т. е.  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  — нормальная подгруппа в  $\pi_1(X, x_0)$ . В таком случае накрытие  $p$  называют *регулярным*. Пример нерегулярного накрытия изображён на рис. 29. По-другому то же самое накрытие изображено на рис. 30.

Изучим теперь более подробно гомоморфизм  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Прежде всего покажем, что  $p_*$  — мономорфизм. Для этого нужно проверить, что если петли  $\tilde{\gamma}_0$  и  $\tilde{\gamma}_1$  с началом в точке  $\tilde{x}_0$  проецируются в гомотопные петли  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ , то петли  $\tilde{\gamma}_0$  и  $\tilde{\gamma}_1$  тоже гомотопны. Пусть  $\gamma_s(t)$  — гомотопия, соединяющая петли  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ . Тогда при фиксированном  $t = t_0$  получаем путь  $\omega(s, t_0) = \gamma_s(t_0)$ , соединяющий точки  $\gamma_0(t_0)$  и  $\gamma_1(t_0)$ . Рассмотрим его поднятие  $\tilde{\omega}(s, t_0)$  с началом в точке  $\tilde{\gamma}_0(t_0)$  (рис. 31).



Рис. 30. Другое изображение нерегулярного накрытия

Концы путей  $\tilde{\omega}(s, t)$  образуют путь  $\tilde{\gamma}$ , проецирующийся в  $\gamma_1$ , причём началом (и концом) пути  $\tilde{\gamma}$  служит точка  $\tilde{x}_0$ . Поэтому  $\tilde{\gamma}$  совпадает с  $\tilde{\gamma}_1$ , а значит,  $\tilde{\gamma}_s(t) = \tilde{\omega}(s, t)$  — гомотопия, соединяющая петли  $\tilde{\gamma}_0$  и  $\tilde{\gamma}_1$ .

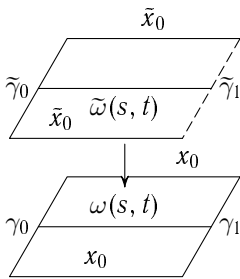


Рис. 31. Поднятие гомотопии

Для подгруппы  $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0) = G$  можно рассмотреть правые смежные классы  $Hg_i, g_i \in G$ . Смежные классы  $Hg_1$  и  $Hg_2$  совпадают, если  $g_1g_2^{-1} \in H$ , и не пересекаются, если  $g_1g_2^{-1} \notin H$ . Между множеством правых смежных классов  $Hg_i$  и точками  $p^{-1}(x_0)$  существует естественное взаимно однозначное соответствие. При построении этого соответствия мы воспользуемся тем, что среди точек  $p^{-1}(x_0)$  есть выделенная точка, а именно, точка  $\tilde{x}_0$ . Сопоставим петле  $\gamma$  в  $X$  с началом  $x_0$  конец поднятия этой петли с началом  $\tilde{x}_0$ . В результате получим отображение  $G \rightarrow p^{-1}(x_0)$ . Покажем, что это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами и точками

$G \rightarrow p^{-1}(x_0)$ . Покажем, что это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами и точками



множества  $p^{-1}(x_0)$ . Пусть  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  — поднятия с началом  $\tilde{x}_0$  петель  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Конец пути  $\tilde{\gamma}_1$  совпадает с концом пути  $\tilde{\gamma}_2$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2^{-1}$  — замкнутый путь с началом  $x_0$ , т. е.  $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2^{-1} \in H$ . Остаётся заметить, что рассматриваемое отображение  $G \rightarrow p^{-1}(x_0)$  является отображением на всё множество  $p^{-1}(x_0)$ . В самом деле, в точку  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$  отображается элемент группы  $\pi_1(X, x_0)$ , соответствующий проекции пути в  $\tilde{X}$  с началом  $\tilde{x}_0$  и концом  $\tilde{x}_1$ ; проекция этого пути является петлей в  $X$  с началом  $x_0$ . Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.4.** *Если  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  — накрытие и  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ , то существует взаимно однозначное соответствие между множеством смежных классов  $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  и слоем  $p^{-1}(x_0)$ .*

В общем случае множество смежных классов не имеет естественной структуры группы. Например, если однозначно определено произведение классов  $Hg$  и  $Hg^{-1}$ , то для всех  $g \in G$  должно выполняться равенство  $HgHg^{-1} = H$ , т. е.  $gHg^{-1} = H$ . Это означает, что  $H$  — нормальная подгруппа в  $G$ , т. е.  $p$  — регулярное накрытие. Ясно также, что если  $H$  — нормальная подгруппа, то  $Hg_1Hg_2 = Hg_1g_2$ , так как  $g_1H = Hg_1$ .

Итак, если накрытие  $p$  регулярное, то множество  $G/H$ , находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством  $p^{-1}(x_0)$ , имеет естественную структуру группы. В таком случае, фиксируя точку  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , множество  $p^{-1}(x_0)$  тоже можно снабдить структурой группы. Эта группа допускает более геометрическое описание, чем факторгруппа  $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ . Дело в том, что для регулярных накрытий в соответствие  $G/H \leftrightarrow p^{-1}(x_0)$  можно вставить промежуточную группу  $\text{Aut}(p)$ :

$$G/H \leftrightarrow \text{Aut}(p) \leftrightarrow p^{-1}(x_0).$$

Здесь  $\text{Aut}(p)$  — группа автоморфизмов накрытия  $p$ , которую мы сейчас определим.

Гомеоморфизм  $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  называют *автоморфизмом* накрытия  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , если  $p(f(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$  для всех  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Если  $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ , то  $p(\tilde{y}) = p(f(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$ , поэтому автоморфизм накрытия переставляет точки каждого слоя.

**Теорема 2.5.** *Любой автоморфизм накрытия полностью задаётся образом одной точки при этом автоморфизме.*

**Доказательство.** Покажем, что для накрытия  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  существует не более одного автоморфизма  $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , переводящего точку  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  в заданную точку  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ . Пусть  $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}$  — произвольная точка. Рассмотрим путь  $\tilde{\gamma}_0$ , соединяющий точки  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$ . Пусть  $\gamma = p\tilde{\gamma}_0$  — проекция пути  $\tilde{\gamma}_0$ , а  $\tilde{\gamma}_1$  — поднятие пути  $\gamma$  с началом в точке  $\tilde{x}_1$ . Тогда автоморфизм  $f$  переводит путь  $\tilde{\gamma}_0$  в путь  $\tilde{\gamma}_1$ , а значит,  $f(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_1$ . Таким образом,

автоморфизм  $f$  определён однозначно. Ясно также, что автоморфизм  $f$ , переводящий точку  $\bar{x}_0$  в точку  $\bar{x}_1$ , существует тогда и только тогда, когда точка  $\bar{y}_1$  однозначно определяется точкой  $\bar{y}_0$ , т.е. поднятие с началом в точке  $\bar{x}_1$  проекции любого замкнутого пути с началом в точке  $\bar{x}_0$  тоже будет замкнуто.  $\square$

**У п р а ж н е н и е 3.** Докажите, что любой автоморфизм накрытия, изображённого на рис. 29, тождествен.

**Т е о р е м а 2.6.** а) *Накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  регулярно тогда и только тогда, когда группа  $\text{Aut}(p)$  транзитивно действует на слое  $p^{-1}(x_0)$ , т.е. переводит любой элемент слоя в любой другой элемент того же слоя.*

б) *Для регулярного накрытия  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  группа  $\text{Aut}(p)$  изоморфна  $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \bar{x}_0)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** а) Пусть накрытие  $p$  регулярно и  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ . Построим автоморфизм  $g \in \text{Aut}(p)$ , переводящий  $\bar{x}_1$  в  $\bar{x}_2$ . Пусть  $\bar{y}_1 \in \tilde{X}$  — произвольная точка;  $\tilde{\gamma}_1$  — произвольный путь из  $\bar{x}_1$  в  $\bar{y}_1$ ;  $\gamma = p\tilde{\gamma}_1$  — проекция пути  $\tilde{\gamma}_1$ ;  $\tilde{\gamma}_2$  — поднятие пути  $\gamma$  с началом в точке  $\bar{x}_2$ . Положим  $g(\bar{y}_1) = \bar{y}_2$ , где  $\bar{y}_2$  — конец пути  $\tilde{\gamma}_2$ . Отображение  $g$  определено корректно, т.е.  $\bar{y}_2$  не зависит от выбора пути  $\tilde{\gamma}_1$ . В самом деле, из регулярности накрытия  $p$  следует, что если путь  $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}'_1$  замкнут, то любое поднятие пути  $p(\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}'_1)$  тоже является замкнутым путём.

Предположим теперь, что группа  $\text{Aut}(p)$  транзитивно действует на слое  $p^{-1}(x_0)$ . Пусть  $\omega$  — замкнутый путь с началом и концом в точке  $\bar{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$  и  $g$  — автоморфизм, переводящий  $\bar{x}_1$  в  $\bar{x}_2$ . Тогда  $g\omega$  — поднятие пути  $p\omega$  с началом в точке  $\bar{x}_2$ . Ясно, что путь  $g\omega$  замкнут.

б) Пусть  $\alpha$  — петля в  $X$  с началом и концом  $x_0$ ,  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  — класс гомотопных петель, содержащий петлю  $\alpha$ . Сопоставим классу  $[\alpha]$  следующий автоморфизм  $g_\alpha$  накрытия  $p$ . Пусть  $\bar{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  — фиксированная точка слоя,  $\bar{y}_0 \in \tilde{X}$  — произвольная точка. Соединим  $\bar{x}_0$  и  $\bar{y}_0$  путём  $\tilde{\gamma}$  и рассмотрим путь  $\gamma = p\tilde{\gamma}$ . Положим  $g_\alpha(\bar{y}_0) = \bar{y}_1$ , где  $\bar{y}_1$  — конец поднятия пути  $\gamma\alpha$  с началом  $\bar{x}_0$ .

Ядром гомоморфизма  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(p)$  служит подгруппа  $\pi_1(\tilde{X}, \bar{x}_0)$ . Этот гомоморфизм эпиморфен. В самом деле, для любой точки  $\bar{x}_i \in p^{-1}(x_0)$  можно рассмотреть петлю  $\alpha_i$ , являющуюся проекцией пути из  $\bar{x}_0$  в  $\bar{x}_i$ . Петле  $\alpha_i$  соответствует автоморфизм, переводящий  $\bar{x}_0$  в  $\bar{x}_i$ . Но автоморфизм накрытия, переводящий  $\bar{x}_0$  в  $\bar{x}_i$ , единствен.  $\square$

**С л е д с т в и е 1.** *Если  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  накрытие и  $\pi_1(\tilde{X}) = 0$ , то  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X)$ .*

**С л е д с т в и е 2.** *Если  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  — регулярное накрытие и  $A = \text{Aut}(p)$ , то  $X = \tilde{X}/A$  и накрытие имеет вид  $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/A$ .*

**Задача 2.4.** Докажите, что отображение  $f: S^1 \rightarrow S^1$  гомотопно нулю тогда и только тогда, когда  $f$  можно представить в виде  $f = f_1 f_2$ , где  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  и  $f_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 2.3. Накрытия и фундаментальная группа

С помощью накрытий можно вычислить фундаментальную группу любого 1-мерного комплекса. Начнем с вычисления фундаментальной группы окружности  $S^1$ .

**Теорема 2.7.**  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим экспоненциальное накрытие  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , переводящее точку  $t \in \mathbb{R}$  в точку  $\exp(it) \in S^1$ . Накрывающее пространство  $\mathbb{R}$  стягиваемо, поэтому  $\pi_1(\mathbb{R}) = 0$ . Из следствия 1 теоремы 2.6 получаем, что группа  $\pi_1(S^1)$  изоморфна группе автоморфизмов накрытия  $p$ .

Любой автоморфизм  $g \in \text{Aut}(p)$  однозначно задаётся своим действием на элемент  $0 \in \mathbb{R}$ . Ясно, что  $g(0) = 2\pi n_g$ , где  $n_g \in \mathbb{Z}$ . При этом  $g(t) = t + 2\pi n_g$ , а значит,  $hg(t) = t + 2\pi(n_h + n_g)$ . Таким образом,  $\text{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$ . Целому числу  $n$  соответствует автоморфизм  $t \mapsto t + 2\pi n$ , а этому автоморфизму соответствует петля, обходящая  $n$  раз окружность  $S^1$ .  $\square$

Мы уже доказывали, что фундаментальная группа связного 1-мерного комплекса изоморфна фундаментальной группе некоторого букета окружностей (см. с. 46). Поэтому остаётся вычислить фундаментальную группу букета окружностей. Напомним, что *свободной группой* ранга  $n$  называют группу  $F_n$  с образующими  $a_1, \dots, a_n$ , между которыми нет никаких соотношений, т. е. в группе  $F_n$  любое несократимое слово вида  $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_l = \pm 1$ , представляет элемент, отличный от единичного элемента (несократимость означает, что слово не содержит участков вида  $a_i^\varepsilon a_i^{-\varepsilon}$ ).

**Теорема 2.8.** *Фундаментальная группа букета  $n$  окружностей изоморфна свободной группе с  $n$  образующими.*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — элементы группы  $G = \pi_1(\bigvee_{i=1}^n S_i^1)$ , соответствующие однократным обходам вдоль окружностей  $S_1^1, \dots, S_n^1$ . Ясно, что элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  порождают группу  $G$ . Нужно лишь проверить, что между ними нет никаких соотношений. Для этого достаточно доказать, что поднятие любой несократимой петли  $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$  для некоторого накрытия является незамкнутым путём. Для букета окружностей существует накрытие  $T_n \rightarrow \bigvee_{i=1}^n S_i^1$  со стягиваемым накрывающим пространством  $T_n$ ; при  $n = 2$  строение накрывающего

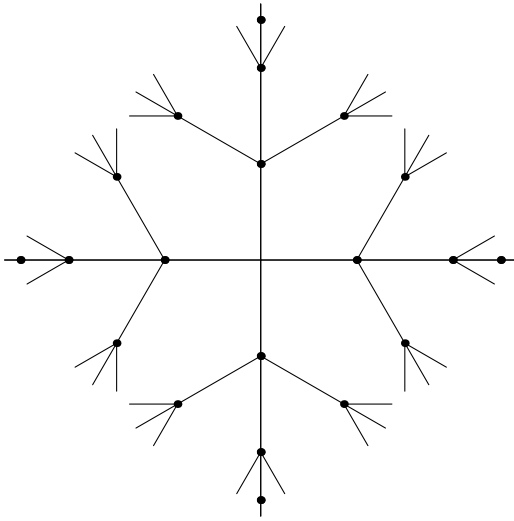


Рис. 32. Универсальное накрытие букета двух окружностей

пространства  $T_n$  ясно из рис. 32. Граф  $T_n$  не содержит петель, поэтому поднятие несократимой петли  $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$  не может быть замкнутым путём.  $\square$

**У п р а ж н е н и е 4.** Для несократимой петли  $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$  постройте такое  $k$ -листное накрытие букета окружностей, что некоторое поднятие этой петли незамкнуто.

Если  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  — накрытие, то отображение  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  мономорфно (см. с. 48). Это означает, что фундаментальная группа накрывающего пространства  $\tilde{X}$  изоморфна некоторой подгруппе фундаментальной группы базы  $X$ . Покажем, что каждой подгруппе фундаментальной группы базы соответствует некоторое накрытие.

**Т е о р е м а 2.9.** Пусть  $X$  — 1-мерный комплекс и  $G = \pi_1(X, x_0)$ . Тогда для любой подгруппы  $H \subset G$  существует накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , для которого  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Будем считать петли  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с началом в точке  $x_0$  эквивалентными, если гомотопический класс петли  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  принадлежит подгруппе  $H$ . Пусть  $U$  — множество всех петель, гомотопические классы которых лежат в  $H$ , и  $U_1 = U, \dots, U_i, \dots$  — классы эквивалентности петель. Для каждого класса эквивалентности рассмотрим экземпляр  $X_i$  комплекса  $X$ . Выберем в  $X$  максимальное дерево  $T$ ; в  $X_i$  ему соответствует дерево  $T_i$ . Рёбра деревьев  $T_i$  оставим без изменений, а остальные рёбра комплексов  $X_i$  перестроим по следующему

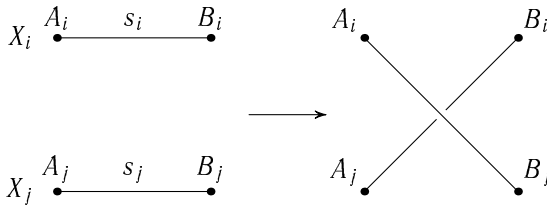


Рис. 33. Перестройка графа

правилу. Пусть  $s$  — ориентированное ребро комплекса  $X$ , не входящее в максимальное дерево  $T$ ; ему соответствует элемент  $\hat{s} \in \pi_1(X, x_0)$ . Если  $U_i \hat{s} = U_j$ , то заменим ребро  $s_i$  с концами  $A_i$  и  $B_i$  и ребро  $s_j$  с концами  $A_j$  и  $B_j$  на рёбра  $A_i B_j$  и  $A_j B_i$  (рис. 33). После всех таких перестроек из комплексов  $X_i$  получим комплекс  $\tilde{X}$ , для которого имеется естественное накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ . Покажем, что комплекс  $\tilde{X}$  связан и  $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$ .

Связность комплекса  $\tilde{X}$  следует из того, что для любых двух классов  $U_i$  и  $U_j$  найдётся такая петля  $\gamma_{ij}$ , что  $U_i \gamma_{ij} = U_j$ . Докажем теперь, что  $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$ . Пусть для определённости точка  $\tilde{x}_0$  принадлежит комплексу  $X_1$ . Петля  $e_1 \dots e_n$ , где  $e_1, \dots, e_n$  — рёбра комплекса  $X$ , соответствует классу гомотопных петель из подгруппы  $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  тогда и только тогда, когда её поднятие с началом  $\tilde{x}_0$  замкнуто. С другой стороны, конец поднятия (с началом  $\tilde{x}_0$ ) петли  $e_1 \dots e_n$  лежит в комплексе, соответствующем классу  $U_{e_1} \dots U_{e_n}$ . Это поднятие замкнуто тогда и только тогда, когда  $U_{e_1} \dots U_{e_n} = U$ , т. е. гомотопический класс петли  $e_1 \dots e_n$  лежит в  $H$ .  $\square$

Подгруппы фундаментальной группы  $G = \pi_1(X, x_0)$  частично упорядочены: некоторые подгруппы содержатся в других подгруппах. Пространства, накрывающие пространство  $X$ , тоже частично упорядочены: некоторые из них накрывают другие накрывающие пространства. Эти два частичных порядка связаны друг с другом.

**Теорема 2.10.** Пусть  $X$  — 1-мерный комплекс,  $G = \pi_1(X, x_0)$ . Пусть, далее,  $p_i: \tilde{X}_i \rightarrow X$  ( $i = 1, 2$ ) — накрытия, соответствующие подгруппам  $H_i \subset G$  (здесь  $H_i = (p_i)_* \pi_1(\tilde{X}_i, \tilde{x}_i)$  и  $p_i(\tilde{x}_i) = x_0$ ). В таком случае накрытие  $p: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ , для которого  $p(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  и  $p_2 p = p_1$ , существует тогда и только тогда, когда  $H_1 \subset H_2$ .

**Доказательство.** Если  $p_1 = p_2 p$ , то образ отображения  $(p_1)_*$  содержится в образе отображения  $(p_2)_*$ , т. е.  $H_1 \subset H_2$ . Предположим теперь, что  $H_1 \subset H_2$ . Пусть  $\tilde{y}_1 \in \tilde{X}_1$  — произвольная точка,  $\tilde{\gamma}_1$  — путь из  $\tilde{x}_1$  в  $\tilde{y}_1$ ,  $\gamma = p_1 \tilde{\gamma}_1$  — проекция пути  $\tilde{\gamma}_1$ . Положим  $p(\tilde{y}_1) = \tilde{y}_2$ , где  $\tilde{y}_2$  — конец поднятия пути  $\gamma$  с началом  $\tilde{x}_2$ . Отображение  $p$  корректно определено тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если путь  $\tilde{\gamma}_1$  замкнут, то путь  $\tilde{\gamma}_2$  тоже замкнут. Это означает, что если класс пет-

ли  $\gamma$  лежит в  $H_1$ , то он лежит и в  $H_2$ . Это условие выполнено, поэтому отображение  $p$  определено корректно.  $\square$

**С л е д с т в и е.** Если  $H_1 = H_2$ , то 1-мерные комплексы  $\tilde{X}_1$  и  $\tilde{X}_2$  гомеоморфны.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прообраз любой точки при отображении  $p$  находится во взаимно однозначном соответствии с множеством смежных классов  $H_2/H_1$ . Если  $H_1 = H_2$ , то отображение  $p$  взаимно однозначно.  $\square$

Если  $H_1 = 0$ , то пространство  $\tilde{X}_1$  накрывает любое пространство, накрывающее  $X$ . По этой причине накрывающее пространство с тривиальной фундаментальной группой называют *универсальным*; в таком случае накрытие  $p: \tilde{X}_1 \rightarrow X$  тоже называют *универсальным*. Для 1-мерного комплекса универсальное накрывающее пространство является деревом. Универсальное накрывающее пространство существует для любого 1-мерного комплекса; оно определено однозначно с точностью до гомеоморфизма.

Пусть  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$  — некоторое множество элементов свободной группы  $F_n$  с образующими  $a_1, \dots, a_n$ ;  $N$  — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая  $R$ , т.е. пересечение всех нормальных подгрупп, содержащих  $R$ . Тогда группу  $G = F_n/N$  называют группой, заданной образующими  $a_1, \dots, a_n$  и соотношениями  $r_1, \dots, r_m$ .

**Т е о р е м а 2.11.** Пусть  $G$  — группа, заданная  $n$  образующими и  $m$  соотношениями. Тогда существует регулярное накрытие букета  $n$  окружностей с группой автоморфизмов, изоморфной  $G$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Фундаментальная группа букета  $n$  окружностей изоморфна свободной группе  $F_n$ . Согласно теореме 2.9 для подгруппы  $N \subset F_n$  существует накрытие, для которого образ фундаментальной группы накрывающего пространства в фундаментальной группе базы совпадает с  $N$ . Подгруппа  $N$  нормальна, поэтому накрытие регулярно. Для регулярного накрытия группа автоморфизмов изоморфна  $F_n/N = G$ .  $\square$

**З а д а ч а 2.5.** Постройте регулярные накрытия букета двух окружностей со следующими группами автоморфизмов: а)  $\mathbb{Z}$ ; б)  $\mathbb{Z}_n$ ; в)  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ; г)  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ .

С помощью накрытий 1-мерных комплексов можно доказывать разные свойства свободных групп. Приведем несколько таких примеров.

**З а д а ч а 2.6.** а) Докажите, что любая подгруппа свободной группы  $G$  свободна.

б) Докажите, что если  $H$  — подгруппа свободной группы  $G$  и индекс  $[G : H] = k < \infty$ , то  $\text{rk } H = (\text{rk } G - 1)k + 1$ .

**З а д а ч а 2.7.** Докажите, что свободная группа ранга 2 содержит в качестве подгруппы свободную группу любого ранга  $n$  (в том числе и ранга  $\infty$ ).

Универсальное накрытие графа  $G$  (у которого могут быть двойные рёбра и петли) удобно строить с помощью матрицы  $R(G)$ , которая определяется следующим образом. Начнём с того, что разобьём вершины графа  $G$  на множества  $V_1, \dots, V_n$  так, чтобы из любой вершины  $v \in V_i$  выходило одно и то же число рёбер (своё для каждого  $j = 1, \dots, n$ ), ведущих в вершины множества  $V_j$  (мы предполагаем, что петля с вершиной  $v \in V_i$  соответствует двум рёбрам, ведущим из  $v$  в вершины множества  $V_i$ ). Такое разбиение можно построить следующим образом. На первом шаге разобьём вершины на множества  $V'_1, \dots, V'_k$ , объединив в одно множество все вершины одинаковой степени. На втором шаге измельчим это разбиение, объединив в одно множество все вершины множества  $V'_i$ , из которых выходит одно и то же число рёбер, ведущих в вершины множества  $V'_j$ . Затем повторяем второй шаг до тех пор, пока процесс не стабилизируется.

По определению матрица  $R(G)$  имеет размер  $n \times n$ ; её элемент  $r_{ij}$  равен числу рёбер, ведущих из вершины  $v \in V_i$  в вершины множества  $V_j$ .

**Пример.** Для графа, изображённого на рис. 34, на первом шаге получаем два множества вершин, а на втором шаге получаем три множе-

ства вершин. Для этого графа  $R(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Теорема 2.12.** а) Пусть граф  $\tilde{G}$  накрывает граф  $G$ . Тогда  $R(\tilde{G}) = R(G)$ ; здесь имеется в виду, что матрицы совпадают после изменения нумерации множеств, на которые разбиты вершины.

б) Универсальное накрывающее пространство графа  $G$  однозначно задаётся матрицей  $R(G)$ .

**Доказательство.** а) Множества  $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n$  образуют требуемое разбиение вершин графа  $\tilde{G}$  тогда и только тогда, когда множества  $V_1 = p(\tilde{V}_1), \dots, V_n = p(\tilde{V}_n)$  образуют требуемое разбиение вершин графа  $G$  (здесь  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  — накрытие).

б) Легко проверить, что связный граф, у которого нет циклов, однозначно задаётся матрицей  $R(G)$ . □

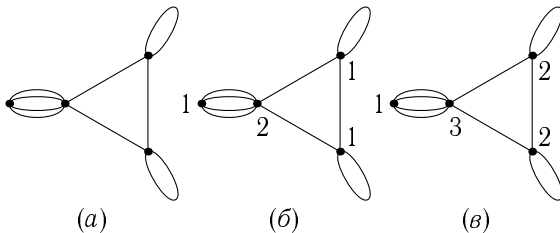


Рис. 34. Вычисление матрицы  $R(G)$

С помощью теоремы 2.12 можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.13** (см. [86]). *Пусть конечные связные графы  $G$  и  $G'$  имеют общее универсальное накрытие. Тогда они имеют конечное общее накрытие, т. е. существует конечный граф  $H$ , накрывающий оба графа  $G$  и  $G'$ .*

**Доказательство.** Согласно теореме 2.12  $R(G) = R(G') = R = (r_{ij})$ . Пусть  $V_1, \dots, V_\alpha$  и  $V'_1, \dots, V'_\alpha$  — соответствующие разбиения вершин графов  $G$  и  $G'$ . Для удобства мы заменим графы  $G$  и  $G'$  на ориентированные графы, заменив каждое ребро на пару противоположно направленных рёбер, а каждую петлю на пару ориентированных петель. Пусть  $n_i = |V_i|$  — число вершин типа  $i$ ,  $m_{ij}$  — число рёбер типа  $i \rightarrow j$  в графе  $G$ . Определим число  $s$  как наименьшее общее кратное чисел  $m_{ij}$  для всех  $i, j$ . Положим  $a_i = s/n_i$  и  $b_{ij} = s/m_{ij}$  (если  $m_{ij} = 0$ , то число  $b_{ij}$  не определено). Непосредственно из определения видно, что  $m_{ij} = n_i r_{ij}$  и числа  $a_i$  и  $b_{ij}$  целые. Ясно также, что  $m_{ij} = m_{ji}$ , а потому  $b_{ij} = b_{ji}$ .

Важнейшее свойство чисел  $a_i$  и  $b_{ij}$  заключается в том, что они полностью определяются матрицей  $R$ , т. е. для графов  $G$  и  $G'$  они одинаковы. Чтобы доказать это свойство, проверим сначала, что число  $f_i = n_i/n_1$  зависит только от матрицы  $R$ . Действительно, если  $r_{i1} \neq 0$ , то  $f_i = \frac{m_{i1}/r_{i1}}{m_{11}/r_{11}} = \frac{r_{1i}}{r_{i1}}$ , поскольку  $m_{i1} = m_{1i}$ . Может, конечно, оказаться, что  $r_{i1} = 0$ . Но в любом случае найдётся такая последовательность чисел  $1 = j_1, j_2, \dots, j_{h_i} = i$ , что  $r_{j_l j_{l+1}} \neq 0$  при  $l = 1, 2, \dots, h_i - 1$  (это следует из связности графа  $G$ ). Тогда  $f_i = \prod_{l=0}^{h_i-1} (r_{j_l j_{l+1}}/r_{j_{l+1} j_l})$ . Числа  $a_i$  и  $b_{ij}$  можно теперь вычислить, исходя из следующих соотношений:

$$a_1 = n_1^{-1} \text{НОК}(m_{ij}) = n_1^{-1} \text{НОК}(n_i r_{ij}) = n_1^{-1} \text{НОК}(f_i n_1 r_{ij}) = \text{НОК}(f_i r_{ij}),$$

$$a_i = s/n_i = a_1 n_1/n_i = a_1/f_i, \quad b_{ij} = a_i/r_{ij}.$$

Занумеруем рёбра типа  $i \rightarrow j$ , выходящие из вершины  $v \in V_i$ , числами от 0 до  $r_{ij} - 1$ ; пусть  $g(v, e)$  — номер ребра  $e$  при такой нумерации. Аналогично определим  $g'(v', e')$  для графа  $G'$ .

Определим ориентированный граф  $H$  следующим образом. Вершины графа  $H$  имеют вид  $(i, v, v', p)$ , где  $1 \leq i \leq \alpha$ ,  $v \in V_i$ ,  $v' \in V'_i$  и  $0 \leq p < a_i$ . Рёбра графа  $H$  имеют вид  $(i, j, e, e', q)$ , где  $1 \leq i, j \leq \alpha$ ,  $e$  и  $e'$  — рёбра типа  $i \rightarrow j$  в графах  $G$  и  $G'$ ,  $0 \leq q < b_{ij}$ . При этом вершина  $(i, v, v', p)$  является началом ребра  $(k, j, e, e', q)$  тогда и только тогда, когда  $i = k$ ,  $v$  — начало ребра  $e$ ,  $v'$  — начало ребра  $e'$ ,  $q = [p/r_{ij}]$  и  $g(v, e) - g'(v', e') \equiv p \pmod{r_{ij}}$ ; вершина  $(i, v, v', p)$  является концом ребра  $(j, k, e, e', q)$  тогда и только тогда, когда  $i = k$ ,  $v$  — конец ребра  $e$ ,  $v'$  — конец ребра  $e'$ ,



$q = [p/r_{ij}]$  и  $g(v, -e) - g'(v', -e') \equiv p \pmod{r_{ij}}$ , где  $-e$  и  $-e'$  — рёбра  $e$  и  $e'$  с противоположной ориентацией.

Используя тот факт, что  $a_i = r_{ij}b_{ij}$ , несложно проверить, что начало ребра  $(i, j, e, e', q)$  однозначно определено. Действительно, пусть  $x \equiv g(v, e) - g'(v', e') \pmod{r_{ij}}$  и  $0 \leq x < r_{ij}$ . Положим  $p = qr_{ij} + x$ . Ясно, что условия  $0 \leq p < a_i = r_{ij}b_{ij}$ ,  $q = [p/r_{ij}]$ ,  $0 \leq q < b_{ij}$  и  $p \equiv g(v, e) - g'(v', e') \pmod{r_{ij}}$  определяют именно это число  $p$ . Началом ребра  $(i, j, e, e', q)$  является вершина  $(i, v, v', p)$ . Ясно также, что вершина  $(i, v, v', p)$  является концом ребра  $(j, k, e, e', q)$  тогда и только тогда, когда она является началом ребра  $-(j, k, e, e', q) = (k, j, -e, -e', q)$ . Поэтому конец каждого ребра тоже определён однозначно. Корректность операции обращения ориентации рёбер следует из того, что  $b_{jk} = b_{kj}$ . Таким образом, граф  $H$  корректно определён и его рёбра разбиты на пары противоположно ориентированных рёбер.

Накрытие  $p: H \rightarrow G$  определим следующим образом: отображим ребро  $(j, k, e, e', q)$  графа  $H$  на ребро  $e$  графа  $G$ ; ясно, что при этом вершина  $(i, v, v', p)$  отобразится в вершину  $v$ . Нужно лишь проверить, что рёбра, выходящие из вершины  $(i, v, v', p)$ , взаимно однозначно отображаются на рёбра, выходящие из вершины  $v$ . Рассмотрим произвольное ребро  $e$  типа  $i \rightarrow j$ , выходящее из вершины  $v$ . В графе  $G'$  ему соответствует ребро  $e'$  типа  $i \rightarrow j$ , выходящее из вершины  $v'$  и имеющее номер  $g'(v', -e') \equiv g(v, -e) - p \pmod{r_{ij}}$ . На ребро  $e$  отображается ровно одно ребро, выходящее из вершины  $(i, v, v', p)$ , а именно, ребро  $(i, j, e, e', q)$ , где  $q = [p/r_{ij}]$ .

Проекцией ребра  $-(i, j, e, e', q) = (j, i, -e, -e', q)$  является ребро  $-e$ , поэтому из накрытия  $p: H \rightarrow G$  ориентированных графов можно построить покрытие исходного (неориентированного) графа  $G$ , заменив каждую пару противоположно направленных рёбер одним неориентированным ребром.

Накрытие  $p_1: H \rightarrow G_1$  строится аналогично.

Построенный граф  $H$  не обязательно связан, но любая его компонента связности обладает требуемым свойством.  $\square$

### §3. Инварианты графов

Мы будем рассматривать графы, которые могут иметь петли и двойные рёбра.

Пусть  $e$  — ребро графа  $G$ . Графы, которые получаются из графа  $G$  после уничтожения ребра  $e$  и после стягивания ребра  $e$  в точку, будем обозначать  $G - e$  и  $G/e$ , соответственно. Отметим, что ес-

ли  $e$  — петля, то  $G - e = G/e$ . Легко проверить, что операции стягивания и уничтожения ребра коммутируют, т.е. если  $e_1$  и  $e_2$  — два ребра графа  $G$ , то  $(G/e_1)/e_2 = (G/e_2)/e_1$ ,  $(G - e_1) - e_2 = (G - e_2) - e_1$  и  $(G/e_1) - e_2 = (G - e_2)/e_1$ .

Будем говорить, что графы  $G_1$  и  $G_2$  *изоморфны*, если существует гомеоморфизм  $h: G_1 \rightarrow G_2$ , который одновременно является взаимно однозначным отображением вершин этих графов. Иными словами, графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами, при котором две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины соединены ребром. *Инвариантом* графа называют отображение из множества всех графов в некоторое множество, при котором любые два изоморфных графа отображаются в один и тот же элемент. *Полиномиальный инвариант* — это инвариант со значениями в кольце полиномов; иными словами, каждому графу сопоставляется многочлен, причём изоморфным графам сопоставляется один и тот же многочлен.

Наиболее важные полиномиальные инварианты графов удовлетворяют соотношению

$$F(G) = aF(G/e) + bF(G - e), \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые фиксированные многочлены (или константы). При этом возможны два основных варианта: либо соотношение (1) выполняется для любого ребра  $e$  (в том числе и для петли), либо соотношение (1) выполняется только для тех рёбер  $e$ , концы которых различны.

После нескольких операций стягивания и уничтожения рёбер из любого графа можно получить граф  $\bar{K}_n$ , состоящий из  $n$  изолированных вершин (дополнение к полному графу  $K_n$ ). Поэтому если соотношение (1) выполняется для любого ребра  $e$ , то значения многочлена  $F$  на графах  $\bar{K}_n$  полностью определяют этот многочлен. Если же соотношение (1) выполняется только для тех рёбер, которые не являются петлями, то нужно задать значения многочлена  $F$  на графах, которые состоят из нескольких изолированных вершин, к каждой из которых может быть присоединено несколько петель.

Соотношение (1) могло бы оказаться противоречивым: упорядочив разными способами рёбра графа, которые последовательно уничтожаются и стягиваются, мы могли бы получить в результате разные многочлены. Поэтому нужно проверить, что разные последовательности вычислений многочлена  $F(G)$  приводят к одному и тому же результату.

**Т е о р е м а 3.1.** *Многочлен  $F(G)$  определён корректно.*

*Доказательство.* Пусть  $e_1$  и  $e_2$  — рёбра графа  $G$ . Тогда

$$\begin{aligned} aF(G/e_1) + bF(G - e_1) &= \\ &= a^2F((G/e_1)/e_2) + abF((G/e_1) - e_2) + abF((G - e_1)/e_2) + b^2F(G - e_1 - e_2) = \\ &= a^2F((G/e_2)/e_1) + abF((G/e_2) - e_1) + abF((G - e_2)/e_1) + b^2F(G - e_1 - e_2) = \\ &= aF(G/e_2) + bF(G - e_2). \end{aligned}$$

Поэтому результат вычислений не зависит от того, в каком порядке мы уничтожаем и стягиваем рёбра графа.  $\square$

Ясно, что если графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, то, уничтожая одновременно соответственные рёбра этих графов, мы придём к одному и тому же результату, поэтому  $F(G_1) = F(G_2)$ , т. е.  $F$  — полиномиальный инвариант графа. Многочлен  $F$  в некоторых случаях позволяет распознать неизоморфные графы.

Придавая разные значения многочленам  $a$  и  $b$  и задавая разные значения многочлена  $F$  на графах  $\bar{K}_n$  (или на графах, состоящих из изолированных вершин с петлями), мы будем получать разные многочлены  $F$ . Некоторые из них имеют интересную геометрическую интерпретацию.

### 3.1. Хроматический многочлен

*Хроматический многочлен*  $P(G, t)$  определяется соотношением

$$P(G, t) = -P(G/e, t) + P(G - e, t),$$

которое выполняется для любого ребра  $e$ . Значение многочлена  $P(G, t)$  на графе  $G$ , состоящем из  $n$  изолированных вершин, полагается равным  $t^n$ .

**Теорема 3.2.** *Если  $t$  — натуральное число, то  $P(G, t)$  — количество различных раскрасок вершин графа  $G$  в  $t$  цветов, при которых концы любого ребра разноцветны.*

*Доказательство.* Пусть  $t \in \mathbb{N}$  и  $\bar{P}(G, t)$  — количество раскрасок графа  $G$  в  $t$  цветов. Отметим, что если граф  $G$  имеет хотя бы одну петлю, то  $\bar{P}(G, t) = 0$  (концы петли совпадают, поэтому они не могут быть разноцветными). Если граф  $G$  состоит из  $n$  изолированных вершин, то  $\bar{P}(G, t) = t^n = P(G, t)$ . Поэтому достаточно проверить, что если  $e$  — ребро графа  $G$ , то  $\bar{P}(G, t) = -\bar{P}(G/e, t) + \bar{P}(G - e, t)$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $e$  — не петля. Пусть  $v_1$  и  $v_2$  — концы ребра  $e$ . Количество раскрасок графа  $G - e$  с одноцветными вершинами  $v_1$  и  $v_2$  равно  $\bar{P}(G/e, t)$ , а количество раскрасок с разноцветными вершинами  $v_1$  и  $v_2$  равно  $\bar{P}(G, t)$ . Поэтому  $\bar{P}(G - e, t) = \bar{P}(G, t) + \bar{P}(G/e, t)$ , что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда  $e$  — петля. В этом случае  $\tilde{P}(G, t) = 0$  и  $\tilde{P}(G/e, t) = \tilde{P}(G - e, t)$ , поскольку графы  $G/e$  и  $G - e$  совпадают.  $\square$

*С л е д с т в и е.* *Количество раскрасок графа  $G$  в  $t$  цветов полиномиально зависит от  $t$ .*

*У п р а ж н е н и е 1.* Докажите, что если  $K_n$  — полный граф с  $n$  вершинами, то  $P(K_n, t) = t(t-1) \dots (t-n+1)$ .

*Т е о р е м а 3.3* (Уитни [142]). *Пусть  $G$  — граф с  $n$  вершинами, не имеющий петель. Тогда*

$$P(G, t) = t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - a_3 t^{n-3} + \dots, \text{ где } a_i \geq 0.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Если граф  $G$  состоит из одной вершины и не имеет рёбер, то  $P(G, t) = t$ . Пусть  $\{e_1, \dots, e_k\}$  — множество всех рёбер графа  $G$ . Тогда

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G - e_1) - P(G/e_1) = \\ &= P(G - e_1 - e_2) - P((G - e_1)/e_2) - P(G/e_1); \end{aligned}$$

здесь графы  $G/e_1$  и  $(G - e_1)/e_2$  имеют по  $n - 1$  вершин. Ясно также, что  $G - e_1 - e_2 - \dots - e_k = \bar{K}_n$  — граф, состоящий из  $n$  изолированных вершин. Поэтому

$$P(G) = P(\bar{K}_n) - g_1 - \dots - g_k = t^n - g_1 - \dots - g_k,$$

где  $g_1, \dots, g_k$  — хроматические многочлены графов, каждый из которых содержит  $n - 1$  вершину.  $\square$

*Т е о р е м а 3.4* (Уитни [142]). *Хроматический многочлен графа можно вычислять по следующей комбинаторной формуле:*

$$P(G, t) = \sum_{H \subset G} (-1)^{e(H)} t^{c(H)},$$

где суммирование ведётся по всем подграфам  $H \subset G$ , множество вершин которых совпадает с множеством вершин графа  $G$ ; здесь  $e(H)$  — число рёбер,  $c(H)$  — число компонент связности.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Рассмотрим многочлен

$$\tilde{P}(G, t) = \sum_{H \subset G} (-1)^{e(H)} t^{c(H)}.$$

У графа  $G = \bar{K}_n$  есть ровно один подграф  $H$ , вершины которого совпадают с вершинами графа  $G$ , а именно,  $H = G = \bar{K}_n$ . При этом  $e(H) = 0$  и  $c(H) = n$ . В таком случае

$$\tilde{P}(G, t) = \sum_{H \subset G} (-1)^{e(H)} t^{c(H)} = t^n = P(G, t).$$

Остаётся проверить, что  $\tilde{P}(G, t) = -\tilde{P}(G/e, t) + \tilde{P}(G - e, t)$ . Для этого представим многочлен  $\tilde{P}(G, t)$  в виде  $\tilde{P}(G, t) = \sum_{e \in H} + \sum_{e \notin H}$ . Легко проверить, что  $\sum_{e \in H} = -\tilde{P}(G/e, t)$  и  $\sum_{e \notin H} = \tilde{P}(G - e, t)$ ; знак минус появляется в первом равенстве из-за того, что у графа  $H/e$  на одно ребро меньше, чем у графа  $H$ .  $\square$

### 3.2. Многочлен от трёх переменных

В [101] введён полиномиальный инвариант  $f(G; t, x, y)$ , удовлетворяющий соотношению  $f(G) = xf(G/e) + yf(G - e)$  (для всех рёбер  $e$ , в том числе и для петель) и принимающий на графе  $\bar{K}_n$  значение  $t^n$ .

У п р а ж н е н и е 2. а) Докажите, что если  $G$  — связное дерево, содержащее  $n$  рёбер, то  $f(G) = t(x + ty)^n$ .

б) Докажите, что если  $G$  — цикл длины  $n$ , то  $f(G) = t(x + ty)^n + (t - 1)x^n$ .

Коэффициенты многочлена  $f$  имеют следующую комбинаторную интерпретацию.

Т е о р е м а 3.5. Пусть  $G$  — граф, содержащий  $v$  вершин и  $e$  рёбер. Тогда

$$f(G) = \sum_{i=0}^e \sum_{j=1}^v b_{ij} t^i x^{e-i} y^j,$$

где  $b_{ij}$  — количество таких  $i$ -элементных подмножеств  $Y$  множества рёбер графа  $G$ , что после уничтожения в графе  $G$  всех рёбер, принадлежащих множеству  $Y$ , получается граф, содержащий  $j$  компонент связности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из определения многочлена  $f$  видно, что его можно вычислять следующим образом. Разобьём рёбра графа  $G$  на два множества  $X$  и  $Y$ . Затем все рёбра из множества  $X$  стянем, а все рёбра из множества  $Y$  уничтожим. Такому набору операций соответствует моном  $t^i x^{e-i} y^j$ . Чтобы вычислить многочлен  $f$ , нужно рассмотреть все подмножества  $Y$  и сложить все полученные мономы.  $\square$

С л е д с т в и е 1. Коэффициенты многочлена  $f$  неотрицательны.

С л е д с т в и е 2. Если графы  $K$  и  $H$  не имеют общих вершин, то  $f(K \cup H) = f(K)f(H)$ .

С л е д с т в и е 3. Если пересечение графов  $K$  и  $H$  состоит в точности из одной вершины, то  $f(K \cup H) = t^{-1}f(K)f(H)$ .

**Доказательство.** Пусть  $Y_1$  и  $Y_2$  — подмножества рёбер графов  $K$  и  $H$ . Предположим, что после выбрасывания из  $K$  и  $H$  рёбер, принадлежащих  $Y_1$  и  $Y_2$ , получаются графы, содержащие  $j_1$  и  $j_2$  компонент связности. Тогда после выбрасывания из  $K \cup H$  рёбер, принадлежащих множеству  $Y_1 \cup Y_2$ , получается граф, содержащий  $j_1 + j_2 - 1$  компонент связности (общая вершина графов  $K$  и  $H$  соединяет две компоненты связности в одну).  $\square$

Следствие 3 позволяет строить примеры неизоморфных графов с одинаковыми многочленами  $f(G)$ . А именно, мы берём графы  $K$  и  $H$  и поочерёдно отождествляем одну из вершин графа  $K$  с разными вершинами графа  $H$ . При этом могут получаться неизоморфные графы, но у них многочлен  $f(G)$  будет одним и тем же. Есть ещё одно преобразование графов, при котором получаются графы с одинаковыми многочленами  $f(G)$ .

**Теорема 3.6.** Пусть  $u_1$  и  $u_2$  — вершины графа  $K$ ,  $v_1$  и  $v_2$  — вершины графа  $H$ . Предположим, что граф  $G_1$  получен из графов  $K$  и  $H$  отождествлением вершин  $u_1$  и  $v_1$ ,  $u_2$  и  $v_2$ , а граф  $G_2$  получен из графов  $K$  и  $H$  отождествлением вершин  $u_1$  и  $v_2$ ,  $u_2$  и  $v_1$ . Тогда  $f(G_1) = f(G_2)$ .

**Доказательство.** Выберем в множествах рёбер графов  $K$  и  $H$  подмножества  $X_1$  и  $X_2$ . Такие подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами в множествах рёбер каждого из графов  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ . При этом в графе  $G_1$  ребро, соединяющее вершины  $v_1$  и  $v_2$ , входит в множество  $X = X_1 \cup X_2$  тогда и только тогда, когда оно входит в множество  $X$  в графе  $G_2$ . Поэтому в графах  $G_1$  и  $G_2$  число компонент связности графа, образованного рёбрами из множества  $X$ , одно и то же.  $\square$

### 3.3. Многочлен Ботта—Уитни

Многочлен Ботта—Уитни  $R(G, t)$  определяется соотношением

$$R(G, t) = R(G/e, t) - R(G - e, t), \quad (2)$$

которое выполняется только для рёбер  $e$ , которые не являются петлями. Значение многочлена  $R$  на графе, состоящем из одной вершины и  $n$  петель, равно  $(t - 1)^n$ ; значение многочлена  $R$  на объединении графов такого вида равно произведению значений на отдельных графах.

**У п р а ж н е н и е 3.** Докажите, что  $R(G, 1) = 0$ .

Многочлен Ботта—Уитни имеет следующую интерпретацию.

**Теорема 3.7.** Пусть  $G$  — граф,  $H$  — некоторое множество его рёбер,  $\bar{H}$  — дополнение  $H$  в графе  $G$  (т.е. такой граф, что его рёбрами являются те рёбра графа  $G$ , которые не входят в  $H$ ;

вершины у графа  $\bar{H}$  те же самые, что и у графа  $G$ ). Граф  $\bar{H}$  гомотопически эквивалентен объединению попарно не пересекающихся букетов окружностей. Пусть  $b_1(\bar{H})$  — количество всех окружностей в этих букетах. Тогда

$$R(G, t) = \sum_{H \subset G} (-1)^{e(H)} t^{b_1(\bar{H})}, \quad (3)$$

где  $e(H)$  — число элементов множества  $H$ ; суммирование ведётся по всем подмножествам рёбер, включая пустое множество.

**Доказательство.** Пусть граф  $G$  состоит из нескольких изолированных вершин с петлями. Если общее количество этих петель равно  $m$ , то

$$R(G, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{|H|=i} (-1)^i t^{m-i} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i t^{m-i} = (t-1)^m.$$

Остаётся доказать соотношение (3). Многочлен  $R(G)$  можно представить в виде  $R(G) = \sum_{e \notin H} + \sum_{e \in H}$ . Легко проверить, что  $\sum_{e \notin H} = R(G/e)$  и  $\sum_{e \in H} = -R(G-e)$ . Действительно, пусть  $e \notin H$ ; тогда  $e \in \bar{H}$ . По условию  $e$  — не петля, поэтому графы  $\bar{H}$  и  $\bar{H}/e$  гомотопически эквивалентны, а значит,  $b_1(\bar{H}) = b_1(\bar{H}/e)$ . Пусть теперь  $e \in H$ , т. е.  $H = H_1 \cup \{e\}$ . Тогда  $e(H) = e(H_1) + 1$ , а значит,  $(-1)^{e(H)} = -(-1)^{e(H_1)}$ . Кроме того, дополнение  $H$  в  $G$  совпадает с дополнением  $H_1$  в  $G-e$ .  $\square$

**Теорема 3.8.** Пусть граф  $G$  состоит из двух графов  $G_1$  и  $G_2$ , которые либо не пересекаются, либо имеют одну общую вершину и не имеют общих рёбер. Тогда  $R(G) = R(G_1)R(G_2)$ .

**Доказательство.** Воспользуемся равенством (3). Представим множество  $H$  в виде  $H = H_1 \cup H_2$ , где  $H_i$  состоит из рёбер графа  $G_i$ . Тогда  $e(H) = e(H_1) + e(H_2)$  и  $b_1(\bar{H}) = b_1(\bar{H}_1) + b_1(\bar{H}_2)$ , где  $\bar{H}_1$  и  $\bar{H}_2$  — дополнения  $H$  в графах  $G_1$  и  $G_2$ . Поэтому  $R(G) = R(G_1)R(G_2)$ .  $\square$

**Следствие 1.** Если у графа  $G$  есть свободное ребро (т. е. ребро, из одного конца которого не выходит других рёбер), то  $R(G) = 0$ .

**Доказательство.** Легко проверить, что если граф  $G_1$  состоит из одного ребра, то  $R(G_1) = 0$ . Граф  $G$  со свободным ребром можно представить в виде объединения графа  $G_1$  и некоторого графа  $G_2$ , пересекающего  $G_1$  в одной вершине. Поэтому  $R(G) = R(G_1)R(G_2) = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.** Если граф  $G$  является циклом, то  $R(G) = t - 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $e$  — ребро графа  $G$ . Тогда граф  $G - e$  имеет свободное ребро, поэтому  $R(G - e) = 0$ . Граф  $G/e$  является циклом

с меньшим числом рёбер. Остаётся заметить, что если граф  $G$  состоит из одной петли, то  $R(G) = t - 1$ .  $\square$

Многочлен Ботта—Уитни, в отличие от хроматического многочлена, является топологическим инвариантом, т. е. гомеоморфные графы имеют одинаковые многочлены Ботта—Уитни.

**Теорема 3.9.** *Многочлен Ботта—Уитни является топологическим инвариантом графа.*

**Доказательство.** Графы  $G$  и  $G'$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует последовательность графов с начальным членом  $G$  и конечным членом  $G'$ , все пары соседних членов которой связаны следующим преобразованием: на ребре  $e$  берётся дополнительная вершина  $v$  и в результате ребро  $e$  заменяется на два ребра  $e_1$  и  $e_2$  с общей вершиной  $v$ . Поэтому достаточно проверить, что если граф  $G'$  получается из графа  $G$  таким преобразованием, то  $R(G') = R(G)$ . Ребро  $e_1$  не является петлёй, поэтому  $R(G') = R(G'/e_1) - R(G' - e_1)$ . У графа  $G' - e_1$  есть свободное ребро  $e_2$ , поэтому  $R(G' - e_1) = 0$ . Ясно также, что граф  $G'/e_1$  изоморфен графу  $G$ .  $\square$

В [143] Уитни определил набор инвариантов графа, который совпадает с набором коэффициентов многочлена  $R(G)$ . Независимо Ботт [39] определил полиномиальный инвариант конечного клеточного комплекса, в 1-мерном случае совпадающий с  $R(G)$ . Подробно свойства многочлена Ботта—Уитни изучены в [136].

### 3.4. Инварианты Татта

Пусть  $g(G)$  — функция на множестве графов со значениями в некотором коммутативном ассоциативном кольце с единицей. Функцию  $g$  называют *инвариантом Татта*, или  *$V$ -функцией\**, если выполняются следующие условия:

- 1)  $g(\emptyset) = 1$ ;
- 2) если ребро  $e$  не является петлёй, то  $g(G) = g(G/e) + g(G - e)$ ;
- 3) если граф  $G$  является объединением непересекающихся графов  $K$  и  $H$ , то  $g(G) = g(K)g(H)$ .

Инвариант Татта полностью определяется значениями на графах, состоящих из одной вершины с несколькими петлями.

Одним из важнейших инвариантов Татта является введённый Таттом *дихроматический многочлен*

$$Q(G, t, z) = \sum_{H \subset G} z^{b_1(H)} t^{c(H)},$$

---

\*) Такое название использовал Татт.



где суммирование ведётся по всем подграфам  $H \subset G$ , множество вершин которых совпадает с множеством вершин графа  $G$ ;  $b_1(H)$  — количество независимых циклов в графе  $H$  (подробнее: граф  $H$  гомотопически эквивалентен объединению нескольких непересекающихся букетов окружностей;  $b_1(H)$  — это общее количество окружностей в этих букетах),  $c(H)$  — число компонент связности графа  $H$ .

**Теорема 3.10.** *Дихроматический многочлен является инвариантом Татта.*

**Доказательство.** Свойство 1 очевидно. Чтобы доказать свойство 2, представим дихроматический многочлен в виде  $Q(G) = \sum_{e \notin H} + \sum_{e \in H}$ .

Ясно, что  $\sum_{e \notin H} = Q(G - e)$ ; равенство  $\sum_{e \in H} = Q(G/e)$  следует из того, что  $b_1(H) = b_1(H/e)$  и  $c(H) = c(H/e)$ . Свойство 3 следует из того, что для непересекающихся графов функции  $b_1$  и  $c$  аддитивны.  $\square$

Пусть  $e$  — ребро с концами  $v_1$  и  $v_2$  в графе  $G$ . Ребро  $e$  называют *мостом*, если в графе  $G$  любой путь из  $v_1$  в  $v_2$  проходит через  $e$ . Татт [128] ввёл многочлен  $T(G, x, y)$ , для которого свойство 3 выполняется лишь в том случае, когда ребро  $e$  не только не является петлёй, но и не является мостом. А именно, *многочлен Татта*  $T(G, x, y)$  обладает следующими свойствами:

а) если граф  $G$  имеет ровно одно ребро, то  $T(G, x, y) = x$  в том случае, когда это ребро — мост, и  $T(G, x, y) = y$  в том случае, когда это ребро — петля;

б) если  $e$  — ребро графа  $G$ , которое не является ни петлёй, ни мостом, то  $T(G, x, y) = T(G - e, x, y) + T(G/e, x, y)$ ;

в) если  $e$  — мост, то  $T(G, x, y) = xT(G/e, x, y)$ , а если  $e$  — петля, то  $T(G, x, y) = yT(G - e, x, y)$ .

Ясно, что свойства а–в позволяют вычислить многочлен Татта для любого связного графа  $G$ . Непротиворечивость этих свойств следует из того, что многочлен Татта можно задать следующей комбинаторной формулой:

$$T(G, x, y) = \sum_{H \subset G} (x - 1)^{c(H) - c(G)} (y - 1)^{e(H) - v(G) + c(H)},$$

где суммирование ведётся по всем подграфам  $H \subset G$ , множество вершин которых совпадает с множеством вершин графа  $G$ .

## Глава II

# Топология в евклидовом пространстве

## § 4. Топология подмножеств евклидова пространства

### 4.1. Расстояние от точки до множества

Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — произвольное подмножество. Для произвольной точки  $x \in \mathbb{R}^n$  величину  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$  называют *расстоянием* от точки  $x$  до множества  $A$ .

**Теорема 4.1.** а) *Функция  $f(x) = d(x, A)$  непрерывна для любого подмножества  $A \subset \mathbb{R}^n$ .*

б) *Если множество  $A$  замкнуто, то функция  $f(x) = d(x, A)$  для всех  $x \notin A$  принимает положительные значения.*

**Доказательство.** а) Пусть  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| \leq \|x - y\| + \inf_{a \in A} \|y - a\| = \|x - y\| + d(y, A)$ , т.е.  $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$ . Аналогично доказывается, что  $d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|$ . Следовательно,  $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$ , поэтому функция  $f$  непрерывна.

б) Если множество  $A$  замкнуто, то множество  $\mathbb{R}^n \setminus A$  открыто. Поэтому для любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что шар радиуса  $\delta$  с центром  $x_0$  принадлежит множеству  $\mathbb{R}^n \setminus A$ . В таком случае  $d(x, A) \geq \delta > 0$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Теорема 4.1 верна и для произвольного метризуемого топологического пространства. Доказательство в точности то же самое. Это замечание относится и к теореме 4.2.

Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — произвольные подмножества. Величину  $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$  называют *расстоянием* между множествами  $A$  и  $B$ .

**Теорема 4.2.** *Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое подмножество,  $C \subset \mathbb{R}^n$  — компактное подмножество. Тогда существует такая точка  $c_0 \in C$ , что  $d(A, C) = d(A, c_0)$ . Если множество  $A$  тоже компактно, то существует ещё и такая точка  $a_0 \in A$ , что  $d(A, C) = d(a_0, c_0)$ .*

**Доказательство.** Функция  $f(x) = d(x, A)$  непрерывна на компактном множестве  $C$ , поэтому она достигает минимума в некоторой точке  $c_0 \in C$ . Если множество  $A$  компактно, то непрерывная функция  $g(x) = d(c_0, x)$  на множестве  $A$  достигает минимума в некоторой точке  $a_0 \in A$ .  $\square$

**Задача 4.1.** Верно ли, что  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ ?

Чтобы получить расстояние между множествами, удовлетворяющее неравенству треугольника, используют следующее определение. Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  — произвольные подмножества. Рассмотрим множество  $T$ , состоящее из всех положительных чисел  $t$ , обладающих следующими свойствами:

- для любого  $a \in A$  существует такое  $b \in B$  что  $\|a - b\| \leq t$ ;
- для любого  $b \in B$  существует такое  $a \in A$  что  $\|a - b\| \leq t$ .

Величину  $d_H(A, B) = \inf_{t \in T} t$  называют *расстоянием по Хаусдорфу* между множествами  $A$  и  $B$ .

**Задача 4.2.** Докажите, что  $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$ .

## 4.2. Продолжение непрерывных отображений

В топологии часто встречается задача о продолжении непрерывного отображения  $f: A \rightarrow Y$ , где  $A \subset X$ , до непрерывного отображения всего пространства  $X$  в  $Y$ . Задача продолжения отображения наиболее просто решается в том случае, когда  $X = \mathbb{R}^n$  и  $Y = \mathbb{R}$ . Основой для построения продолжения в этом случае служит следующее утверждение, которое обычно называют *леммой Урысона*.

**Теорема 4.3** (лемма Урысона [20]). *Пусть  $A$  и  $B$  — непересекающиеся замкнутые подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существует такое непрерывное отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]$ , что  $f(A) = \{-1\}$  и  $f(B) = \{1\}$ .*

**Доказательство.** По условию любая точка  $x \in \mathbb{R}^n$  лежит вне  $A$  или вне  $B$ . Множества  $A$  и  $B$  замкнутые, поэтому в первом случае  $d(x, A) > 0$ , а во втором случае  $d(x, B) > 0$ . В любом случае  $d(x, A) + d(x, B) > 0$ , поэтому функция

$$f(x) = \frac{d(x, A) - d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

корректно определена при всех  $x \in \mathbb{R}^n$ . Из непрерывности функций  $d(x, A)$  и  $d(x, B)$  следует непрерывность функции  $f(x)$ . Ясно также, что  $f(A) = \{-1\}$  и  $f(B) = \{1\}$ . Кроме того, для любой точки  $x$  выполняются

неравенства

$$-1 \leq \frac{-d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)} \leq \frac{d(x, A) - d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)} \leq \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \leq 1. \quad \square$$

*Следствие.* Пусть  $A$  и  $B$  — непересекающиеся замкнутые подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существуют непересекающиеся открытые множества  $U \supset A$  и  $V \supset B$ , замыкания которых тоже не пересекаются.

*Доказательство.* Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]$  — такая непрерывная функция, что  $f(A) = \{-1\}$  и  $f(B) = \{1\}$ . В качестве  $U$  и  $V$  можно выбрать прообразы множеств  $[-1, -\frac{1}{2})$  и  $(\frac{1}{2}, 1]$ .  $\square$

С помощью леммы Урысона можно доказать, что существует продолжение любой непрерывной функции, заданной на замкнутом подмножестве евклидова пространства.

**Теорема 4.4 (Титце).** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое подмножество,  $f: X \rightarrow [-1, 1]$  — непрерывная функция. Тогда существует непрерывная функция  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]$ , ограничение которой на  $X$  совпадает с  $f$ .

*Доказательство.* Положим  $r_k = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда  $3r_1 = 1$  и  $r_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Построим последовательность непрерывных функций  $f_1, f_2, \dots$  на множестве  $X$  и последовательность непрерывных функций  $g_1, g_2, \dots$  на  $\mathbb{R}^n$  следующим образом. Положим  $f_1 = f$ . Пусть функции  $f_1, \dots, f_k$  уже построены. Рассмотрим замкнутые непересекающиеся множества

$$A_k = \{x \in X \mid f_k(x) \leq -r_k\} \quad \text{и} \quad B_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geq r_k\}.$$

К этим множествам можно применить лемму Урысона и найти непрерывное отображение  $g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [-r_k, r_k]$ , для которого  $g_k(A_k) = \{-r_k\}$  и  $g_k(B_k) = \{r_k\}$ . На множестве  $A_k$  функции  $f_k$  и  $g_k$  принимают значения, заключенные между  $-3r_k$  и  $-r_k$ ; на множестве  $B_k$  они принимают значения, заключенные между  $r_k$  и  $3r_k$ ; во всех остальных точках множества  $X$  эти функции принимают значения, заключенные между  $-r_k$  и  $r_k$ . Положим  $f_{k+1} = f_k - g_k|_X$ . Функция  $f_{k+1}$  непрерывна на  $X$  и  $|f_{k+1}(x)| \leq 2r_k = 3r_{k+1}$  при всех  $x \in X$ .

Рассмотрим теперь построенную последовательность функций  $g_1, g_2, \dots$  на  $\mathbb{R}^n$ . По построению  $|g_k(y)| \leq r_k$  при всех  $y \in \mathbb{R}^n$ . Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$  сходится, поэтому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$  равномерно сходится на  $\mathbb{R}^n$

к некоторой непрерывной функции  $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ . При этом

$$(g_1 + \dots + g_k)|_X = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3) + \dots + (f_k - f_{k+1}) = f_1 - f_{k+1} = f - f_{k+1}.$$

Но  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{k+1}(y) = 0$  для любой точки  $y \in \mathbb{R}^n$ , поэтому  $F(x) = f(x)$  при  $x \in X$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-1} = 1. \end{aligned} \quad \square$$

*Следствие.* Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое подмножество,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда существует непрерывная функция  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ограничение которой на  $X$  совпадает с  $f$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гомеоморфизм  $g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , заданный формулой  $g(x) = \arctg(x)$ . Функция  $g(f(x))$  допускает непрерывное продолжение  $G$  на  $\mathbb{R}^n$ , причем  $|G(x)| \leq \pi/2$  при всех  $x \in \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим замкнутое множество  $A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |G(y)| = \pi/2\}$ . Ясно, что  $A \cap X = \emptyset$ , поэтому по теореме Урысона существует непрерывная функция  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , для которой  $\varphi(A) = \{0\}$  и  $\varphi(X) = \{1\}$ . Положим  $F(y) = \tg(\varphi(y)G(y))$ . Если  $x \in X$ , то  $F(x) = \tg(\arctg f(x)) = f(x)$ . Кроме того,  $\varphi(y)G(y) < \pi/2$  при всех  $y \in \mathbb{R}^n$ , поэтому функция  $F$  корректно определена.  $\square$

Теорема Титце и её следствие верны также и для отображений в  $\mathbb{R}^m$ ; для доказательства достаточно применить теорему Титце покоординатно.

Теорема Титце часто используется для построения продолжений непрерывных отображений. Вот весьма интересный пример её применения.

**Теорема 4.5.** Пусть в  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  заданы замкнутые гомеоморфные подмножества  $A \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$  и  $B \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$ . Тогда множества  $\mathbb{R}^{m+n} \setminus A$  и  $\mathbb{R}^{m+n} \setminus B$  гомеоморфны.

*Доказательство.* Пусть  $f_a: A \rightarrow B$  и  $f_b: B \rightarrow A$  — взаимно обратные гомеоморфизмы. Согласно теореме Титце их можно продолжить до отображений  $F_a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $F_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Рассмотрим отображения  $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , заданные формулами

$$\mathcal{F}_a(x, y) = (x, y - F_a(x)), \quad \mathcal{F}_b(x, y) = (x - F_b(y), y).$$

Эти отображения обратимы. Например,  $\mathcal{F}_a^{-1}(x, y) = (x, y + F_a(x))$ . Ясно также, что  $\mathcal{F}_a$  и  $\mathcal{F}_b$  отображают множество

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x \in A, y = f_a(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid y \in B, x = f_b(y)\}$$

на  $A$  и  $B$  соответственно. Поэтому  $\mathbb{R}^{m+n} \setminus A \approx \mathbb{R}^{m+n} \setminus X \approx \mathbb{R}^{m+n} \setminus B$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Множества  $(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \setminus A$  и  $(\{0\} \times \mathbb{R}^n) \setminus B$  не обязательно гомеоморфны. В качестве примера можно взять  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ , где  $S^1$  — стандартно вложенная в  $\mathbb{R}^3$  окружность, а  $K$  — трилистник. (см. рис. 117).

### 4.3. Теоремы Лебега о покрытиях

Пусть  $\mathcal{U}$  — открытое покрытие топологического пространства  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Число Лебега покрытия  $\mathcal{U}$  называют точную верхнюю грань всех таких чисел  $\delta \geq 0$ , что любое подмножество  $B \subset A$ , диаметр\*) которого меньше  $\delta$ , содержится в одном из элементов покрытия  $\mathcal{U}$  (т. е. в одном из тех открытых множеств, из которых состоит покрытие  $\mathcal{U}$ ).

**Т е о р е м а 4.6 (Лебег).** Если  $A$  — компактное подмножество  $\mathbb{R}^n$ , то для любого его открытого покрытия  $\mathcal{U}$  число Лебега строго больше нуля.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем из покрытия  $\mathcal{U}$  конечное подпокрытие  $\{U_1, \dots, U_k\}$ . Пусть  $f_i(x) = d(x, A \setminus U_i)$  и  $f = \max(f_1, \dots, f_k)$ . Функция  $f$  непрерывна. Кроме того, если  $a \in A$ , то  $f(a) > 0$ . В самом деле,  $a \in U_i$  для некоторого  $i$ , поэтому  $f_i(a) > 0$ , так как множество  $A \setminus U_i$  замкнуто. Следовательно, образ множества  $A$  при непрерывном отображении  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  представляет собой компактное множество, не содержащее точку 0. Поэтому  $d(0, f(A)) > 0$ , а значит, найдётся такое число  $\delta > 0$ , что  $f(a) > \delta$  для любой точки  $a \in A$ . Это означает, что  $f_i(a) > \delta$  для некоторого  $i$ , т. е. пересечение множества  $A$  с шаром радиуса  $\delta$  с центром  $a$  принадлежит множеству  $U_i$ . В таком случае любое множество  $B \subset A$ , диаметр которого меньше  $\delta$ , принадлежит некоторому множеству  $U_i$ .  $\square$

**З а д а ч а 4.3.** С помощью теоремы Лебега докажите, что любая непрерывная функция  $f$  на компактном множестве  $A \subset \mathbb{R}^n$  равномерно непрерывна на этом множестве.

Лебег предложил следующее определение топологической размерности компактного подмножества  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\mathcal{U}$  — конечное покрытие множества  $X$  замкнутыми множествами. Порядком покрытия  $\mathcal{U}$  назовём

---

\*) Диаметр множества называют точную верхнюю грань попарных расстояний между его точками.

наименьшее целое число  $m$ , для которого по крайней мере одна точка  $x \in X$  принадлежит  $m$  элементам покрытия  $\mathcal{U}$  и никакая точка  $x \in X$  не принадлежит более чем  $m$  элементам покрытия  $\mathcal{U}$ . Будем говорить, что *топологическая размерность* компактного подмножества  $X \subset \mathbb{R}^n$  равна  $k$ , если  $k$  — наименьшее неотрицательное целое число, обладающее следующим свойством: для любого  $\varepsilon > 0$  существует конечное покрытие множества  $X$  замкнутыми множествами диаметра меньше  $\varepsilon$ , имеющее порядок  $k + 1$ .

**Теорема 4.7 (Лебег).** *Топологическая размерность  $n$ -мерного симплекса  $\Delta^n$  равна  $n$ .*

**Доказательство** (Шпернер [122]). Сначала докажем, что если  $\mathcal{U}$  — конечное покрытие симплекса  $\Delta^n$  замкнутыми множествами достаточно малого диаметра, то порядок  $\mathcal{U}$  не меньше  $n + 1$ . Пусть  $\Delta_0^{n-1}, \dots, \Delta_n^{n-1}$  —  $(n-1)$ -мерные грани симплекса  $\Delta^n$ ,  $a_i$  — вершина симплекса  $\Delta^n$ , противолежащая грани  $\Delta_i^{n-1}$ . В топологическом пространстве  $\Delta^n$  подмножества  $\Delta^n \setminus \Delta_i^{n-1}$  являются открытыми. Ясно также, что эти множества полностью покрывают  $\Delta^n$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — число Лебега этого открытого покрытия. Покажем, что если  $\mathcal{U}$  — конечное покрытие  $\Delta^n$  замкнутыми множествами диаметра меньше  $\varepsilon$ , то порядок покрытия  $\mathcal{U}$  не меньше  $n + 1$ . Пусть  $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_m\}$ . Из того, что диаметр множества  $U_j$  меньше  $\varepsilon$ , следует, что  $U_j$  целиком лежит в некотором множестве  $\Delta^n \setminus \Delta_i^{n-1}$ , т.е.  $U_j$  не пересекает грань  $\Delta_i^{n-1}$ . Каждая вершина  $a_i$  принадлежит некоторому множеству  $U_j$ . При этом множество  $U_j$  уже не может содержать других вершин симплекса  $\Delta^n$ .

Каждому множеству  $U_i$  сопоставим грань  $\Delta_{\varphi(i)}^{n-1}$  — одну из тех граней, которую  $U_i$  не пересекает. Получим соответствие  $\varphi: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ . Для  $k = 0, \dots, n$  рассмотрим  $A_k$  — объединение тех множеств  $U_i$ , для которых  $\varphi(i) = k$ . Ясно, что  $\bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{i=0}^m U_i = \Delta^n$ ,  $a_k \in A_k$  и  $A_k \cap \Delta_k^{n-1} = \emptyset$ .

Из этих условий (и замкнутости множеств  $A_k$ ) с помощью леммы Шпернера (см. с. 92) можно вывести, что множества  $A_k$  имеют общую точку  $x$ . В самом деле, пометим все точки симплекса  $\Delta^n$  по следующему правилу: каждой точке сопоставим наименьший номер  $k$  множества  $A_k$ , которому она принадлежит. Согласно лемме Шпернера среди симплексов  $p$ -го барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^n$  есть симплекс с полным набором пометок. Выберем в нём произвольную точку  $x_p$ . Из последовательности  $\{x_p\}$  выберем сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{p_q}\}$ . Точка  $x = \lim_{q \rightarrow \infty} x_{p_q}$  принадлежит всем множествам  $A_k$ . В самом деле, каждому множеству  $A_k$  принадлежит одна из вершин симплекса, в котором мы

выбирали точку  $x_{p,q}$ , а длина ребра такого симплекса стремится к нулю при  $q \rightarrow \infty$ .

Остаётся построить пример покрытия симплекса  $\Delta^n$  замкнутыми множествами сколь угодно малого диаметра, имеющего порядок  $n + 1$ . Рассмотрим  $(m + 1)$ -е барицентрическое подразделение симплекса  $\Delta^n$ . Для каждой вершины  $m$ -го барицентрического подразделения рассмотрим множество, состоящее из содержащих ее замкнутых  $n$ -мерных симплексов  $(m + 1)$ -го барицентрического подразделения. Эти множества образуют требуемое покрытие. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть первое барицентрическое подразделение. Барицентр принадлежит  $n + 1$  множествам, а все остальные точки принадлежат меньшему числу множеств.  $\square$

В определении топологической размерности участвует метрическая величина — диаметр множеств покрытия. Тем не менее, топологическая размерность действительно является топологическим инвариантом, т. е. сохраняется при гомеоморфизмах.

**Теорема 4.8.** *Пусть  $X$  и  $Y$  — гомеоморфные компактные подмножества евклидова пространства. Тогда их топологические размерности равны.*

**Доказательство.** Пусть топологические размерности  $X$  и  $Y$  равны  $k_X$  и  $k_Y$ . По условию существует гомеоморфизм  $h: X \rightarrow Y$ . Для данного  $\varepsilon > 0$  рассмотрим покрытие пространства  $Y$  открытыми шарами диаметра  $\varepsilon$  и рассмотрим также покрытие пространства  $X$  образами этих шаров при отображении  $h$ . Пусть  $\delta$  — число Лебега этого открытого покрытия компактного пространства  $X$ . Согласно определению топологической размерности существует покрытие пространства  $X$  замкнутыми множествами  $U_1, \dots, U_m$  диаметра меньше  $\delta$ , имеющее порядок  $k_X + 1$ . Тогда  $\{h(U_1), \dots, h(U_m)\}$  — покрытие пространства  $Y$  замкнутыми множествами диаметра меньше  $\varepsilon$ , имеющее порядок  $k_X + 1$ . Таким образом,  $k_Y \leq k_X$ . Аналогично доказывается, что  $k_X \leq k_Y$ .  $\square$

Теперь мы можем доказать знаменитую *теорему Брауэра об инвариантности размерности* [43].

**Теорема 4.9 (Брауэр).** *Если  $m \neq n$ , то открытое подмножество  $U \subset \mathbb{R}^m$  не может быть гомеоморфно открытому подмножеству  $V \subset \mathbb{R}^n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $h: U \rightarrow V$  — гомеоморфизм. Множество  $U$  содержит  $m$ -мерный симплекс  $\Delta^m$ . Топологическая размерность множества  $h(\Delta^m) \subset \mathbb{R}^n$  равна  $m$ . Компактное множество  $h(\Delta^m)$  содержится в некотором симплексе  $\Delta^n$ . Покрытие симплекса  $\Delta^n$  замкнутыми множествами малого диаметра, имеющее порядок  $n$ , индуцирует покрытие



симплекса  $h(\Delta^m)$  замкнутыми множествами малого диаметра, имеющее порядок  $n$ . Поэтому  $m \leq n$ . Аналогично  $m \geq n$ .  $\square$

#### 4.4. Канторово множество

Каждое число  $x \in [0, 1]$  можно записать в виде  $x = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + \dots$ , где  $a_i = 0, 1$  или  $2$  (троичная запись числа  $x$ ). Канторовым множеством называют множество  $C \subset [0, 1]$ , состоящее из тех чисел, у которых есть троичная запись без цифр 1. Например, число  $1 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots$  входит в  $C$ .

Пусть  $C_k$  — множество чисел  $x \in [0, 1]$ , у которых есть троичная запись с цифрой 0 или 2 на  $k$ -м месте. Например,  $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ . Каждое множество  $C_k$  замкнуто и  $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ , поэтому множество  $C$  тоже замкнуто.

**Теорема 4.10.** Любое замкнутое подмножество  $A \subset C$  является ретрактом пространства  $C$ , т.е. существует непрерывное отображение  $r: C \rightarrow A$ , ограничение которого на  $A$  тождественно.

**Доказательство.** Замкнутое множество  $A \subset [0, 1]$  компактно, поэтому для любой точки  $c \in C$  существует точка  $a \in A$ , для которой  $d(c, A) = d(c, a)$ . Таких точек  $a$  не может быть больше двух. Рассмотрим сначала случай, когда для точки  $c \in C$  существуют две такие точки  $a_1$  и  $a_2$ , причем  $a_1 < a_2$ . В таком случае  $a_1 < c < a_2$ . Дополнение множества  $C$  всюду плотно, поэтому можно выбрать  $y \notin C$  так, что  $a_1 < y < c < a_2$ . Для каждой точки  $x \in C \cap [a_1, y]$  положим  $r(x) = a_1$ , а для каждой точки  $x \in C \cap (y, a_2]$  положим  $r(x) = a_2$ . Построим таким образом отображение  $r$  для всех точек  $c \in C$ , для которых  $d(c, A) = d(c, a_1) = d(c, a_2)$ . Построенное отображение определено корректно, потому что интервал  $(a_1, a_2)$  не содержит точек множества  $A$ , а значит, отрезок  $[a_1, a_2]$  для точки  $c$  и отрезок  $[a'_1, a'_2]$  для точки  $c' \neq c$  не могут пересекаться.

Предположим, что  $c \in C$  — точка, для которой отображение  $r$  пока ещё не построено. Тогда существует ровно одна точка  $a \in A$ , для которой  $d(c, A) = d(c, a)$ . Положим  $r(c) = a$ .

Для точки  $a \in A$  отображение  $r$  может определяться либо первым способом, либо вторым, но в обоих случаях  $r(a) = a$ .  $\square$

С помощью теоремы 4.10 можно доказать следующее весьма неожиданное утверждение.

**Теорема 4.11** (Александров [1]). Любое непустое компактное множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  является образом канторова множества  $C$  при некотором непрерывном отображении.

**Доказательство.** Пусть  $U_1, U_2, \dots$  — счётная база открытых множеств топологического пространства  $X$ . Для  $c \in C$  рассмотрим трюичное разложение  $0, c_1 c_2 c_3 \dots$ , не содержащее цифр 1 (оно единственно).

Точке  $c$  сопоставим множество  $P(c) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c)$ , где

$$\varphi_i(c) = \begin{cases} \bar{U}_i, & \text{если } c_i = 0; \\ X \setminus U_i, & \text{если } c_i = 2. \end{cases}$$

Легко проверить, что множество  $P(c)$  состоит не более чем из одной точки. В самом деле, пусть  $a, b \in X$  и  $a \neq b$ . Тогда существует такое  $i$ , что  $a \in U_i$  и  $b \notin \bar{U}_i$ . Если  $\varphi_i(c) = \bar{U}_i$ , то  $b \notin \varphi_i(c)$ , а если  $\varphi_i(c) = X \setminus U_i$ , то  $a \notin \varphi_i(c)$ . Поэтому множество  $P(c)$  не может одновременно содержать обе точки  $a$  и  $b$ .

Если  $P(c)$  состоит из одной точки, то положим  $g(c) = P(c)$ . Отображение  $g$  определено на множестве  $A = \left\{ c \in C \mid \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c) \neq \emptyset \right\}$ .

Легко проверить, что отображение  $g: A \rightarrow X$  сюръективно. В самом деле, для точки  $x \in X$  положим

$$c_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in U_i, \\ 2, & \text{если } x \notin U_i. \end{cases}$$

Тогда  $c = 0, c_1 c_2 \dots \in C$  и  $g(c) = x$ .

Проверим теперь, что отображение  $g$  непрерывно. Пусть заданы  $c = 0, c_1 c_2 \dots \in A$  ( $c_i \neq 1$ ) и  $\varepsilon > 0$ . Выберем множество  $U_k$  так, что  $g(c) \in U_k$  и диаметр множества  $\bar{U}_k$  меньше  $\varepsilon$ . Возьмем произвольную точку  $a = 0, a_1 a_2 \dots \in A$  ( $a_i \neq 1$ ), для которой  $|c - a| < 3^{-2k}$ . Из неравенства  $|c - a| < 3^{-2k}$  следует, что  $c_k = a_k$ . Поэтому  $g(a) \in \varphi_k(a) = \varphi_k(c) = \bar{U}_k$ . Таким образом,  $\|g(a) - g(c)\| < \varepsilon$ , а значит, отображение  $g$  непрерывно в точке  $c$ .

Покажем, наконец, что множество  $A$  замкнуто в  $C$ , т. е. множество  $C \setminus A$  открыто в  $C$ . Пусть  $c \in C \setminus A$ . Тогда  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi_i(c) = \emptyset$ , т. е.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus \varphi_i(c)) = X$ . Множества  $X \setminus \varphi_i(c)$  образуют открытое покрытие пространства  $X$ . Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, поэтому  $\bigcup_{i=1}^m (X \setminus \varphi_i(c)) = X$  для некоторого  $m \geq 1$ . В таком случае  $\bigcap_{i=1}^m \varphi_i(c) = \emptyset$ . Пусть  $a \in C$  — произвольная точка, для которой  $|c - a| < 3^{-2m}$ . Тогда  $a_i = c_i$  для  $i = 1, \dots, m$ . Поэтому  $\bigcap_{i=1}^m \varphi_i(a) = \emptyset$ , т. е.  $a \in C \setminus A$ . Это означает, что множество  $C \setminus A$  открыто.

Мы построили непрерывное отображение  $g: A \rightarrow X$ , где  $A \subset C$  — замкнутое подмножество. Согласно теореме 4.10 существует непрерывная ретракция  $r: C \rightarrow A$ . Композиция отображений  $C \xrightarrow{r} A \xrightarrow{g} X$  является требуемым отображением.  $\square$

**С л е д с т в и е** (Пеано). *Существует сюръективное отображение отрезка  $I$  на  $k$ -мерный куб  $I^k$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Сначала построим непрерывное отображение  $f: C \rightarrow I^k$ . Канторово множество  $C$  замкнуто, поэтому по теореме Титце отображение  $f$  можно продолжить до непрерывного отображения  $F: I \rightarrow I^k$ .  $\square$

## § 5. Кривые на плоскости

### 5.1. Теорема Жордана

*Жордановой кривой* называют образ  $C$  окружности  $S^1$  при непрерывном инъективном отображении  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Инъективность означает, что  $f(x_1) \neq f(x_2)$  при  $x_1 \neq x_2$ . В «Курсе анализа» [77] Жордан попытался доказать, что множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  несвязно и состоит в точности из двух линейно связных компонент (*теорема Жордана*). Его доказательство было не вполне строгим. Первое полное доказательство теоремы Жордана предложил Веблен [134].

Мы уже доказывали теорему Жордана в том случае, когда кривая  $C$  представляет собой конечнозвенную ломаную (см. с. 19). Из кусочно-линейной теоремы Жордана можно вывести общую теорему Жордана, аппроксимируя кривую  $C$  конечнозвенными ломаными. Такое доказательство приведено в [129]. Мы, следуя [126], приведём доказательство теоремы Жордана, основанное на том, что граф  $K_{3,3}$  непланарен (теорема 1.3 на с. 21; напомним, что при доказательстве этой теоремы используется лишь кусочно-линейная теорема Жордана). Сначала мы докажем, что жорданова кривая разбивает плоскость.

**Т е о р е м а 5.1.** *Если  $C$  — жорданова кривая, то множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  не является линейно связным.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Проведём к кривой  $C$  опорные прямые и выберем на них точки  $A_1$  и  $A_2$ , лежащие на кривой  $C$ . На двух дугах кривой  $C$ , заданных точками  $A_1$  и  $A_2$ , можно выбрать точки  $B_1$  и  $B_2$  так,

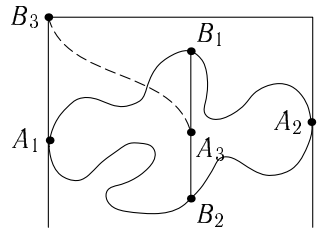


Рис. 35. Жорданова кривая и граф  $K_{3,3}$

что отрезок  $B_1B_2$  не будет пересекать кривую  $C$  (рис. 35); действительно, каждая из этих двух дуг является компактным множеством, поэтому пересечение дуги с любой прямой, параллельной опорным прямым, компактно. На отрезке  $B_1B_2$  выберем точку  $A_3$ . Если бы точки  $A_3$  и  $B_3$  можно было бы соединить путём, не пересекающим кривую  $C$ , то мы получили бы вложение графа  $K_{3,3}$  в плоскость, чего не может быть.  $\square$

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение: незамкнутая дуга кривой не разбивает плоскость.

**Теорема 5.2.** Пусть  $A$  — простая дуга на плоскости, т. е. образ отрезка  $I$  при непрерывном отображении  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Тогда множество  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  связно.

**Доказательство.** Пусть  $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ . Множество  $A$  компактно, поэтому можно выбрать положительное число  $d$  так, что расстояния от  $x$  и  $y$  до  $A$  больше  $3d$ . Отображение  $f$  равномерно непрерывно, поэтому  $A$  можно разбить на дуги  $A_1, \dots, A_k$  (дуга  $A_i$  соединяет точки  $a_i$  и  $a_{i+1}$ ) так, что расстояние от точки  $a_i$  до любой точки дуги  $A_i$  не превосходит  $d$  (здесь  $i = 1, \dots, k$ ). Пусть минимальное расстояние между точками дуг  $A_i$  и  $A_j$ , где  $1 \leq i \leq j-2 \leq k-2$ , равно  $d'$ . Ясно, что  $d' \leq d$ . Каждую дугу  $A_i$  разобьём на дуги  $A_{i1}, \dots, A_{ik_i}$  (дуга  $A_{ij}$  соединяет точки  $a_{ij}$  и  $a_{i,j+1}$ ) так, что расстояние от точки  $a_{ij}$  до любой точки дуги  $A_{ij}$  меньше  $d'/4$ . Пусть  $G_i$  — граф, образованный сторонами квадрата с центрами в точках  $a_{ij}$ ; стороны всех этих квадратов параллельны двум фиксированным прямым и длины сторон квадратов равны  $d'/2$ . Графы  $G_i$  и  $G_j$  пересекаются тогда и только тогда, когда  $|i-j| \leq 1$ .

Граф  $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$  разбивает плоскость на связные области, среди которых есть ровно одна неограниченная область  $F$ . Каждая точка дуги  $A$  принадлежит какой-то ограниченной области, поэтому  $A$  не пересекает  $F$ . Следовательно, достаточно доказать, что  $x, y \in F$ .

Предположим, что точка  $x$  принадлежит ограниченной области графа  $G$ . Граф  $G$  является 2-связным, поэтому в  $G$  найдётся цикл  $C$ , внутри которого лежит точка  $x$ . Выберем цикл  $C$  так, что он принадлежит графу  $G_i \cup G_{i+1} \cup \dots \cup G_j$ , причем разность  $j-i$  минимальна. Покажем, что в таком случае  $j-i \leq 1$ . Предположим, что  $j-i \geq 2$ . Можно считать, что число рёбер цикла  $C$ , не принадлежащих  $G_{j-1}$ , минимально. Цикл  $C$  содержит по крайней мере по одному ребру из непересекающихся графов  $G_{j-2}$  и  $G_j$  (имеются в виду ребра, не принадлежащие  $G_{j-1}$ ). Кроме того, после выбрасывания всех рёбер графа  $G_{j-1}$  нарушается связность цикла  $C$ . Это означает, что цикл  $C$  содержит по крайней мере два непересекающихся участка, проходящих по графу  $G_{j-1}$ . Эти два участка можно соединить путём  $\gamma$ , проходящим по рёбрам графа  $G_{j-1}$ . Путь  $\gamma$  разбивает

цикл  $C$  на два цикла. Точка  $x$  лежит внутри одного из этих циклов. Но у каждого из этих циклов число рёбер, не принадлежащих  $G_{j-1}$ , строго меньше, чем у цикла  $C$ . Получено противоречие.

Итак, точка  $x$  принадлежит внутренней области графа  $G_i \cup G_{i+1}$ . Но этого не может быть, так как точка  $x$  лежит вне круга радиуса  $3d$  с центром  $a_i$ , а граф  $G_i \cup G_{i+1}$  лежит внутри этого круга. Полученное противоречие означает, что точка  $x$  принадлежит неограниченной области графа  $G$ . Точка  $y$  принадлежит той же самой области, поэтому  $x$  и  $y$  можно соединить путём, лежащим в  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ .  $\square$

Мы уже доказали, что жорданова кривая разбивает плоскость. Теперь можно доказать оставшуюся часть теоремы Жордана.

*Теорема 5.3. Жорданова кривая  $C$  разбивает плоскость в точности на две линейно связные области, причем границей обеих этих областей служит кривая  $C$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\Omega$  — одна из линейно связных областей, на которые кривая  $C$  разбивает плоскость,  $c$  — произвольная точка кривой  $C$ . Если из кривой  $C$  выбросить сколь угодно малую дугу  $\delta$ , содержащую точку  $c$ , то оставшаяся дуга  $A = C \setminus \delta$  не разбивает плоскость. Поэтому точку  $x \in \Omega$  можно соединить с точкой  $y$ , лежащей в другой компоненте связности, путём  $\gamma$ , не пересекающим  $A$ . Путь  $\gamma$  должен пересекать кривую  $C$ , поэтому он пересекает дугу  $\delta$ . У пути  $\gamma$  есть участок, который соединяет точку  $x$  с точкой дуги  $\delta$  и целиком принадлежит области  $\Omega$  (за исключением точки дуги  $\delta$ ). Таким образом, граница области  $\Omega$  содержит всюду плотное подмножество кривой  $C$ , а значит, она содержит и всю кривую  $C$ , поскольку граница — замкнутое множество.

Остаётся доказать, что количество связных областей множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  не может быть больше 2. Предположим, что точки  $x_1, x_2, x_3$  принадлежат трём различным областям  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Пусть  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — попарно непересекающиеся дуги кривой  $C$ . В области  $\Omega_1$  точку  $x_1$  можно соединить путём  $\gamma_{1j}$  с некоторой точкой дуги  $\delta_j$ . При этом можно добиться, чтобы пути  $\gamma_{11}, \gamma_{12}$  и  $\gamma_{13}$  пересекались только в точке  $x_1$ . Для этого в окрестности точки пересечения эти пути нужно перестроить так, как показано на рис. 36.

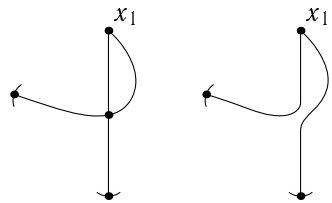


Рис. 36. Перестройка пути

Для точек  $x_2$  и  $x_3$  пути  $\gamma_{2i}$  и  $\gamma_{3i}$  определим аналогично. Добавив к путям  $\gamma_{ij}$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , части дуг  $\delta_i$ , получим вложение графа  $K_{3,3}$  в плоскость, чего не может быть.  $\square$

## 5.2. Теорема Уитни—Грауштейна

Пусть  $S^1 = \{e^{2\pi is} \mid s \in \mathbb{R}\}$  и  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — гладкая замкнутая кривая, т. е.  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ , где  $x$  и  $y$  — непрерывно дифференцируемые функции от  $s$  и  $v(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds} \neq 0$  при всех  $s \in \mathbb{R}$ . Назовем *степенью\** гладкой кривой  $\gamma$  число оборотов вектора  $v(s)$  при изменении  $s$  от 0 до 1. При этом каждый оборот против часовой стрелки считается со знаком плюс, а каждый оборот по часовой стрелке считается со знаком минус. Примеры кривых малых степеней изображены на рис. 37.

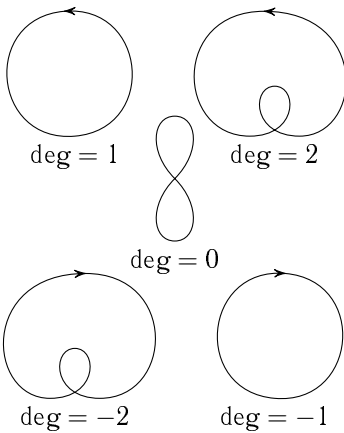


Рис. 37. Примеры кривых малых степеней

Будем говорить, что гладкие замкнутые кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  *регулярно гомотопны*, если существует семейство гладких замкнутых кривых  $\gamma_t$ , гладко зависящее от  $t \in [0, 1]$  (имеется в виду, что  $\gamma_t = \gamma_0$  при  $t = 0$  и  $\gamma_t = \gamma_1$  при  $t = 1$ ). Гладкая зависимость от  $t$  означает, что отображение  $(s, t) \mapsto \gamma_t(s)$  является непрерывно дифференцируемым отображением из  $[0, 1] \times [0, 1]$  в  $\mathbb{R}^2$ .

**Теорема 5.4 (Уитни—Грауштейн [145]).** *Кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их степени равны.*

**Доказательство.** Пусть кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  регулярно гомотопны и  $N_t$  — степень гладкой кривой  $\gamma_t$ . Ясно, что  $N_t$  — целое число, причем  $N_t$  непрерывно зависит от  $t$ . Поэтому  $N_t$  — константа и  $N_0 = N_1$ .

Предположим теперь, что  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  — гладкие замкнутые кривые, степени которых равны  $N$ . С помощью регулярной гомотопии кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  можно заменить на кривые длины 1, для которых  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = (0, 0)$  и  $\gamma'_0(0) = \gamma'_1(0) = (1, 0)$ . В таком случае можно считать, что  $s \in [0, 1]$  — натуральный параметр, т. е.  $\|\gamma'_0(s)\| = \|\gamma'_1(s)\| = 1$  при всех  $s$ .

Запишем векторы скоростей кривых  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  в виде  $v_0(s) = e^{i\varphi_0(s)}$  и  $v_1(s) = e^{i\varphi_1(s)}$ , где  $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$  и  $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = 2\pi N$ . Положим  $\varphi_t(s) = (1-t)\varphi_0(s) + t\varphi_1(s)$  и рассмотрим кривую  $\tilde{\gamma}_t$  с вектором скорости  $v_t(s) = e^{i\varphi_t(s)}$ :  $\tilde{\gamma}_t(s) = \int_0^s e^{i\varphi_t(\tau)} d\tau$ . При  $t \neq 0, 1$  кривая  $\tilde{\gamma}_t$  не обязательно

\* ) Степень гладкой замкнутой кривой — это совсем не то же самое, что степень алгебраической кривой.

замкнутая, но с помощью этой кривой можно построить замкнутую кривую  $\gamma_t(s) = \tilde{\gamma}_t(s) - s\tilde{\gamma}_t(1) = \int_0^s e^{i\varphi_t(\tau)} d\tau - s \int_0^1 e^{i\varphi_t(\tau)} d\tau$ . Нужно лишь проверить, что кривая  $\gamma_t$  гладкая, т. е.  $\frac{d}{ds}\gamma_t(1) = \frac{d}{ds}\gamma_t(0)$  и  $\frac{d}{ds}\gamma_t(s) \neq 0$ . Ясно, что  $\frac{d}{ds}\gamma_t(s) = e^{i\varphi_t(s)} - \int_0^1 e^{i\varphi_t(\tau)} d\tau = v_t(s) - \tilde{\gamma}_t(1)$ . Равенство скоростей при  $s = 0$  и при  $s = 1$  следует из того, что  $v_t(0) = v_t(1)$ , поскольку  $\varphi_t(0) = 0$  и  $\varphi_t(1) = 2\pi N$ . Для доказательства того, что  $v_t(s) \neq \tilde{\gamma}_t(1)$ , достаточно заметить, что  $\|v_t(s)\| = 1$ , а  $\|\tilde{\gamma}_t(1)\| < 1$ , поскольку  $\|\tilde{\gamma}_t(1)\| = \left| \int_0^1 e^{i\varphi_t(\tau)} d\tau \right| \leq \int_0^1 |e^{i\varphi_t(\tau)}| d\tau \leq 1$ , причем  $e^{i\varphi_t(\tau)}$  — не постоянная функция.  $\square$

Наметим ещё один подход к доказательству теоремы Уитни—Грауштейна. После малого шевеления можно считать, что кривая имеет лишь конечное число точек самопересечения. Назовём *простой петлёй* часть  $\omega$  кривой  $\gamma$ , обладающую следующими свойствами: 1)  $\omega$  начинается и кончается в точке самопересечения кривой  $\gamma$ ; 2)  $\omega$  не имеет самопересечений (но она может пересекать другие части кривой  $\gamma$ ). Легко доказать, что любая гладкая кривая с конечным (ненулевым) числом точек самопересечения имеет простую петлю. Далее, для простой петли  $\omega$  кривой  $\gamma$  существует регулярная гомотопия, при которой изменяется только  $\omega$ , причём после гомотопии мы получаем новую простую петлю  $\omega'$ , которая не пересекает  $\gamma$ . В конце концов мы получим окружность с маленькими петельками — внешними и внутренними. Эти петельки можно менять местами, протаскивая одну петлю через другую. Кроме того, несложно построить регулярную гомотопию, которая уничтожает пару петелек, одна из которых внутренняя, а другая внешняя.

**Теорема 5.5** (см. [137] и [73]). *Степень гладкой замкнутой несамопересекающейся кривой  $\gamma$  равна  $\pm 1$ .*

**Доказательство** (Хопф [73]). После регулярной гомотопии можно считать, что длина кривой  $\gamma$  равна 1 и отображение  $\gamma: S^1 = \{e^{2\pi is}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  таково, что  $\left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = 1$  при всех  $s \in [0, 1]$ . Пусть  $T$  — треугольник на плоскости с координатами  $x$  и  $y$ , заданный неравенствами  $0 \leq x \leq y \leq 1$ .

Рассмотрим отображение  $f: T \rightarrow S^1$ , заданное формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{\|\gamma(y) - \gamma(x)\|}, & \text{если } 0 < y - x < 1; \\ \gamma'(x), & \text{если } x = y; \\ -\gamma'(0), & \text{если } x = 0 \text{ и } y = 1. \end{cases}$$

(Отметим, что если  $x = y$ , то  $\gamma'(x) = \gamma'(y)$ , а если если  $x = 0$  и  $y = 1$ , то  $-\gamma'(0) = -\gamma'(1)$ .) Для накрытия  $p: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ , заданного формулой  $p(s) = e^{2\pi is}$ , существует поднятие отображения  $f$ , т. е. такое отображение  $F: T \rightarrow \mathbb{R}^1$ , что  $pF = f$ . При этом  $2\pi \deg \gamma = F(1, 1) - F(0, 0) = [F(1, 1) - F(0, 1)] + [F(0, 1) - F(0, 0)]$ .

Разность  $F(1, 1) - F(0, 1)$  соответствует углу поворота вектора  $\gamma(1) - \gamma(x) = \gamma(0) - \gamma(x) = v(x)$  при изменении  $x$  от 0 до 1 (верхняя сторона треугольника  $T$ ). Если в качестве  $\gamma(0)$  выбрать точку касания кривой  $\gamma$  с какой-либо опорной прямой (рис. 38), то этот угол поворота будет равен

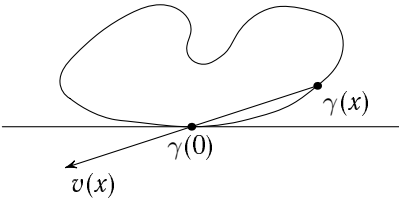


Рис. 38. Выбор точки  $\gamma(0)$

$\pm\pi$  (знак совпадает со знаком числа  $\deg \gamma$ ). Разность  $F(0, 1) - F(0, 0)$  соответствует углу поворота вектора  $\gamma(y) - \gamma(0) = -v(y)$  при изменении  $y$  от 0 до 1. Этот угол поворота тоже равен  $\pm\pi$ , причем знак снова совпадает со знаком  $\deg \gamma$ , поскольку векторы  $v$  и  $-v$  вращаются в одном направлении.  $\square$

Пусть  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — гладкая замкнутая кривая с конечным числом точек самопересечения, причем все её точки самопересечения двукратные. Выберем на кривой  $\gamma$  точку  $x_0$ , не являющуюся точкой самопересечения. Для точки самопересечения  $x_i$  с номером  $i$  определим число  $W_i$  по следующему правилу. Будем идти из точки  $x_0$  вдоль кривой  $\gamma$  в направлении, согласованном с её ориентацией. Когда мы будем первый раз проходить через точку  $x_i$ , нарисуем касательный вектор  $v_1$ , соответствующий направлению движения; когда мы будем проходить через эту точку второй раз, нарисуем второй касательный вектор  $v_2$ . Если репер  $(v_1, v_2)$  ориентирован отрицательно, то  $W_i = 1$ , а если этот репер ориентирован положительно, то  $W_i = -1$ . Числом Уитни называют число  $W(\gamma, x_0) = \sum W_i$ , где суммирование ведётся по всем точкам самопересечения кривой  $\gamma$ .

**Теорема 5.6** (Уитни [145]). *Если  $\deg \gamma$  — степень кривой  $\gamma$ , а  $W(\gamma, x_0)$  — число Уитни, то  $\deg \gamma = W(\gamma, x_0) \pm 1$ .*

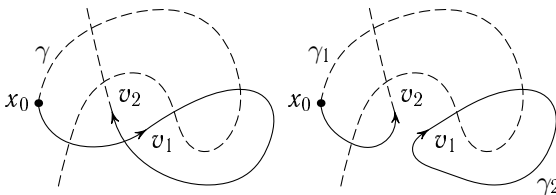


Рис. 39. Перестройка кривой  $\gamma$



**Доказательство.** Если кривая  $\gamma$  несамопересекающаяся, то можно применить теорему 5.5. Поэтому будем считать, что кривая  $\gamma$  самопересекающаяся. Выйдем из точки  $x_0$  и будем идти вдоль кривой  $\gamma$  в направлении, согласованном с ее ориентацией, до тех пор, пока не пройдем дважды через некоторую точку самопересечения (это не обязательно будет первая встретившаяся точка самопересечения кривой  $\gamma$ ). Перестроим кривую  $\gamma$  так, как показано на рис. 39. В результате получим кривую  $\gamma_1$ , на которой лежит точка  $x_0$ , и несамопересекающуюся кривую  $\gamma_2$ .

Покажем, что  $\deg \gamma - W(\gamma, x_0) = \deg \gamma_1 - W(\gamma_1, x_0)$ , т. е.  $\deg \gamma - \deg \gamma_1 = W(\gamma, x_0) - W(\gamma_1, x_0) = W_i$ , где  $W_i = \pm 1$  — число, сопоставленное перекрестку, уничтоженному при перестройке кривой. С помощью регулярной гомотопии кривую  $\gamma$  можно преобразовать так, чтобы угол между векторами  $v_1$  и  $v_2$  был сколь угодно мал. В таком случае ясно, что  $\deg \gamma = \deg \gamma_1 + \deg \gamma_0$ . Легко также проверить, что  $\deg \gamma_0 = W_i$ .  $\square$

### 5.3. Двойные точки, двойные касательные и точки перегиба

Пусть  $\gamma$  — замкнутая дифференцируемая кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , состоящая из конечного числа выпуклых дуг, не касающихся друг друга во внутренних точках. Тогда кривая  $\gamma$  имеет конечное число  $D(\gamma)$  точек самопересечения и конечное число  $F(\gamma)$  точек перегиба. Мы будем предполагать, что точки самопересечения кривой  $\gamma$  двойные, т. е. у кривой  $\gamma$  нет точек, через которые проходит более двух ветвей кривой. Мы будем также предполагать, что у кривой  $\gamma$  нет тройных касательных, т. е. любая прямая касается кривой  $\gamma$  не более чем в двух различных точках. Двойные касательные бывают двух типов: внутренние и внешние (рис. 40). Пусть  $I(\gamma)$  — количество внутренних двойных касательных,  $II(\gamma)$  — количество внешних двойных касательных.

**Теорема 5.7** (см. [53]).  $II(\gamma) - I(\gamma) = D(\gamma) + \frac{F(\gamma)}{2}$ .

**Доказательство.** Введём на кривой  $\gamma$  ориентацию, т. е. зададим направление её обхода. Для каждой точки  $a \in \gamma$  рассмотрим пря-

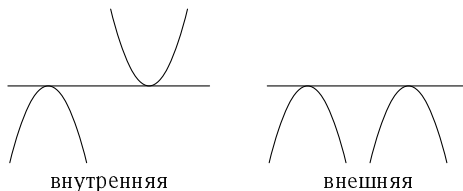


Рис. 40. Внутренняя и внешняя двойная касательная

мую  $l$ , касающуюся кривой  $\gamma$  в точке  $a$ . Точка  $a$  делит прямую  $l$  на луч  $l_+$ , направление которого совпадает с направлением обхода кривой  $\gamma$ , и луч  $l_-$ , направление которого противоположно направлению кривой  $\gamma$ . Будем двигать точку  $a$  по кривой  $\gamma$  в положительном направлении так, чтобы она совершила один полный обход кривой. Для каждого положения точки  $a$  определим  $N_+$  как число точек пересечения луча  $l_+$  с кривой  $\gamma$  (отличных от точки  $a$ ). Число  $N_-$  определим аналогично. Числа  $N_+$  и  $N_-$  изменяются лишь в тех случаях, когда точка  $a$  проходит через двойную точку или точку перегиба, а также в тех случаях, когда

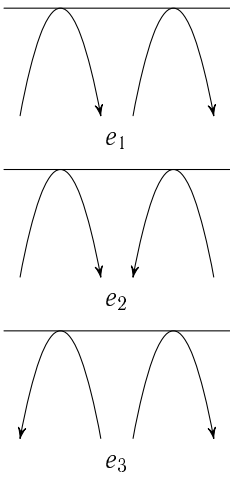


Рис. 41. Три типа внешних двойных касательных

прямая  $l$  проходит через положение двойной касательной, т.е. точка  $a$  проходит через одну из точек касания двойной касательной с кривой  $\gamma$ .

Если точка  $a$  проходит через двойную точку или точку перегиба, то  $N_+$  уменьшается на 1, а  $N_-$  увеличивается на 1.

Для ориентированной кривой внешние касательные бывают трёх типов: касательные в точках касания могут быть направлены в одну сторону, могут быть направлены навстречу друг другу, а могут быть направлены прочь друг от друга (рис. 41). Количества внешних касательных таких трёх типов обозначим  $e_1, e_2, e_3$ . Аналогично для внутренних касательных введём обозначения  $i_1, i_2, i_3$ .

Рассмотрим две точки, в которых касательная типа  $e_1$  (соответственно,  $i_1$ ) касается кривой  $\gamma$ . При прохождении одной из этих точек  $N_+$  увеличивается (соответственно, уменьшается) на 2, а при прохождении другой точки  $N_-$  уменьшается (соответственно, увеличивается) на 2.

Для типа  $e_2$  (соответственно,  $i_2$ ) при прохождении каждой из двух точек касания  $N_+$  увеличивается (соответственно, уменьшается) на 2.

Для типа  $e_3$  (соответственно,  $i_3$ ) при прохождении каждой из двух точек касания  $N_-$  уменьшается (соответственно, увеличивается) на 2.

При полном обходе кривой  $N_+$  увеличивается на  $2e_1 + 4e_2$  и уменьшается на  $2i_1 + 4i_2 + 2D(\gamma) + F(\gamma)$  (каждая двойная точка проходится два раза, а точка перегиба — один раз). При полном обходе  $N_+$  не изменяется, поэтому  $2e_1 + 4e_2 = 2i_1 + 4i_2 + 2D(\gamma) + F(\gamma)$ . Те же самые рассуждения, применённые к  $N_-$ , показывают, что  $2e_1 + 4e_3 = 2i_1 + 4i_3 + 2D(\gamma) + F(\gamma)$ . Сложив оба равенства, получим  $4(e_1 + e_2 + e_3) - 4(i_1 + i_2 + i_3) = 4D(\gamma) + 2F(\gamma)$ , т.е.  $4II(\gamma) - 4I(\gamma) = 4D(\gamma) + 2F(\gamma)$ .  $\square$

Аналогичное утверждение можно доказать и для конечнозвенных замкнутых ломаных общего положения, у которых никакие три вершины не лежат на одной прямой и никакие три звена не имеют общей точки: см. [32] и [54].

Равенство

$$II(\gamma) - I(\gamma) = D(\gamma) + \frac{F(\gamma)}{2} \quad (1)$$

является необходимым условием для того, чтобы существовала кривая  $\gamma$  с соответствующими числами двойных точек, двойных касательных и точек перегиба. Но этого условия не достаточно. Например, если  $F(\gamma) = 0$ , то кривая  $\gamma$  выпуклая, поэтому  $I(\gamma) = II(\gamma) = 0$ , а из равенства (1) следует лишь, что  $I(\gamma) = II(\gamma)$ . Если же  $F(\gamma) \neq 0$ , то равенство (1) является не только необходимым, но и достаточным условием существования кривой (см. [65]). В случае, когда  $F(\gamma) = 0$ , дополнительно должно выполняться условие  $I(\gamma) \leq D(\gamma)^2 - D(\gamma)$  и число  $I(\gamma)$  должно быть чётным (см. [103]).

## § 6. Теорема Брауэра и лемма Шпернера

### 6.1. Теорема Брауэра

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  — единичный диск (шар);

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset D^n$  — единичная сфера.

Пусть  $f: X \rightarrow X$  — некоторое отображение. Точку  $x \in X$  называют *неподвижной* точкой отображения  $f$ , если  $f(x) = x$ .

**Теорема 6.1** (Брауэр). *Любое непрерывное отображение  $f: D^n \rightarrow D^n$  имеет неподвижную точку.*

**З а м е ч а н и е.** Брауэр доказал эту теорему в работе [42]. До него утверждения, эквивалентные теореме о неподвижной точке, доказали Анри Пуанкаре [106] и латышский математик Боль [36]. Но наиболее распространённое название этой теоремы — *теорема Брауэра о неподвижной точке*.

Пусть  $A \subset X$ . Непрерывное отображение  $r: X \rightarrow A$  называют *ретракцией*, если  $r|_A = \text{id}_A$ , т. е.  $r(a) = a$  для любой точки  $a \in A$ . Если существует ретракция  $r: X \rightarrow A$ , то  $A$  называют *ретрактом* пространства  $X$ .

**З а д а ч а 6.1.** Докажите, что  $A$  — ретракт пространства  $X$  тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение  $f: A \rightarrow Y$  можно продолжить на всё  $X$ .

**Задача 6.2.** Докажите, что если любое непрерывное отображение пространства  $X$  в себя имеет неподвижную точку, то любое непрерывное отображение его ретракта  $A$  в себя тоже имеет неподвижную точку.

**Теорема 6.2.** *Не существует ретракции  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ .*

Легко проверить, что теорема Брауэра и теорема 6.2 эквивалентны. В самом деле, предположим, что  $f: D^n \rightarrow D^n$  — непрерывное отображение без неподвижных точек. Для каждой точки  $x \in D^n$  рассмотрим луч с началом  $f(x)$ , проходящий через точку  $x$ . Пусть  $r(x)$  — точка, в которой этот луч пересекает сферу  $S^{n-1}$ . Ясно, что  $r$  — ретракция диска  $D^n$  на  $S^{n-1}$ .

Предположим теперь, что  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  — ретракция. Пусть  $i: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  — отображение без неподвижных точек, например,  $i(x) = -x$ . Тогда отображение  $ir: D^n \rightarrow S^{n-1} \subset D^n$  не имеет неподвижных точек.

Теорема 6.2 эквивалентна также следующему утверждению.

**Теорема 6.3.** *Пусть  $v(x)$  — такое непрерывное векторное поле на  $D^n$ , что  $v(x) = x$  для всех  $x \in S^{n-1}$ . Тогда  $v(x) = 0$  для некоторой точки  $x \in D^n$ .*

Действительно, если  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  — ретракция, то формула  $v(x) = r(x)$  задаёт векторное поле на  $D^n$ , нигде не обращающееся в нуль. Если же  $v(x)$  — такое векторное поле на  $D^n$ , что  $v(x) = x$  для всех  $x \in S^{n-1}$  и  $v(x) \neq 0$  для  $x \in D^n$ , то отображение  $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$  является требуемой ретракцией.

Известно много разных доказательств теорем 6.1–6.3. В большинстве случаев удобнее доказывать теорему о неретрагируемости диска  $D^n$  на сферу  $S^{n-1}$ . Мы приведём три таких доказательства, ограничившись случаем гладких отображений.

Перейти к непрерывным отображениям можно с помощью аппроксимации непрерывных отображений гладкими. В самом деле, предположим, что существует непрерывная ретракция  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ . Покажем, что тогда существует гладкая ретракция  $\tilde{r}: D^n \rightarrow S^{n-1}$ . Если  $\|x\| = 1$ , то  $r(x) = x$ . Поэтому для любого  $\varepsilon_1 > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $\|r(x) - x\| \leq \varepsilon_1$  при  $1 - \delta \leq \|x\| \leq 1$ . По теореме Вейерштрасса существуют такое гладкое отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\|f(x) - (r(x) - x)\| \leq \varepsilon_1$  при  $\|x\| \leq 1$ , и такая гладкая функция  $\psi(t)$ , что  $0 \leq \psi(t) \leq 1$  при  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\psi(1) = 0$  и  $1 - \varepsilon_2 \leq \psi(t)$  при  $t^2 \leq 1 - \delta$ . Положим  $g(x) = x + \varphi(x)f(x)$ , где  $\varphi(x) = \psi(\|x\|^2)$ . Если  $\|x\| \leq 1 - \delta$ , то

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + \varphi(x)f(x)\| = \\ &= \|r(x) + \varphi(x)[f(x) - r(x) + x] + (\varphi(x) - 1)(r(x) - x)\| \geq \\ &\geq \|r(x)\| - \varphi(x)\|f(x) - r(x) + x\| - (1 - \varphi(x))\|r(x) - x\| \geq \end{aligned}$$

$$\geq 1 - 1 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdot 2 = 1 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2.$$

Если же  $1 - \delta \leq \|x\| \leq 1$ , то

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + \varphi(x)f(x)\| = \\ &= \|x + \varphi(x)[f(x) - r(x) + x] + \varphi(x)(r(x) - x)\| \geq \\ &\geq \|x\| - \varphi(x)\|f(x) - r(x) + x\| - \varphi(x)\|r(x) - x\| \geq \\ &\geq 1 - \delta - 1 \cdot \varepsilon_1 - 1 \cdot \varepsilon_1 = 1 - \delta - 2\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Если  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , то  $\delta \rightarrow 0$ . Поэтому можно считать, что  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta \leq 1/4$ . В таком случае  $\|g(x)\| \geq 1/4 > 0$  для всех  $x \in D^n$ . Если  $\|x\| = 1$ , то  $\varphi(x) = 0$  и  $g(x) = x$ . Требуемая ретракция  $\tilde{r}: D^n \rightarrow S^{n-1}$  задаётся формулой  $\tilde{r}(x) = g(x)/\|g(x)\|$ .

Здесь мы приведём три доказательства неретрагируемости диска на сферу, частично используя некоторые сведения, пока не появившиеся в этой книге (они будут доказаны позже). Вполне элементарное доказательство теоремы Брауэра, эквивалентной неретрагируемости диска на сферу, приведено на с. 93.

Первое доказательство неретрагируемости диска на сферу (Хирш [70]).

Предположим, что  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  — гладкая ретракция,  $a \in S^{n-1}$  — регулярное значение отображения  $r$ . Тогда  $r^{-1}(a)$  является объединением одномерных подмногообразий, причем граница  $r^{-1}(a)$  лежит в  $S^{n-1}$ . Множество  $r^{-1}(a)$  компактно, поскольку оно является замкнутым подмножеством компактного множества. Одномерное компактное многообразие может быть лишь окружностью или отрезком, поэтому граница  $r^{-1}(a)$  состоит из чётного числа точек. Но пересечение  $r^{-1}(a)$  и  $S^{n-1}$  состоит ровно из одной точки  $a$ . Получено противоречие.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Точно так же можно доказать, что если  $M^n$  — компактное многообразие с непустым краем  $W^{n-1}$ , то не существует ретракции  $r: M^n \rightarrow W^{n-1}$ .

Второе доказательство неретрагируемости диска на сферу.

Предположим, что  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  — гладкая ретракция. Рассмотрим дифференциальную форму  $\omega = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ . По теореме Стокса

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \omega &= \int_{r(S^{n-1})} \omega = \int_{S^{n-1}} r^* \omega = \int_{D^n} dr^* \omega = \\ &= \int_{D^n} r^* d\omega = \int_{r(D^n)} d\omega = \int_{S^{n-1}} d\omega = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, по той же самой теореме Стокса получаем

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{D^n} d\omega = \text{объем}(D^n) > 0. \quad \square$$

Третье доказательство неретрагируемости диска на сферу (см. [113]).

Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая ретракция  $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$ . Для  $x \in D^n$  и  $0 \leq t \leq 1$  положим

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x, \\ \hat{f}_t(x) &= x + tg(x) = (1-t)x + tf(x). \end{aligned}$$

Из непрерывной дифференцируемости отображения  $g$  следует, что существует положительная константа  $c$ , для которой  $\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\|$  при всех  $x, y \in D^n$ . Отображение  $\hat{f}_t$  инъективно при  $0 \leq t < 1/c$ . В самом деле, если  $\hat{f}_t(x) = \hat{f}_t(y)$ , то  $\|x - y\| = \|tg(x) - tg(y)\| \leq tc\|x - y\|$ . Поэтому при  $0 \leq t < 1/c$  получаем  $\|x - y\| = 0$ .

Частные производные отображения  $g$  равномерно ограничены, поэтому якобиан

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) = I_n + \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \quad (1)$$

при малых  $t$  обратим. Следовательно, по теореме об обратной функции  $\hat{f}_t$  при  $t \leq t_0$  отображает  $\text{int } D^n$  (внутренность диска  $D^n$ ) на некоторое открытое множество  $G_t$ . Пусть  $e \in D^n \setminus G_t$ . Соединим отрезком точку  $e$  с произвольной точкой множества  $G_t$  и рассмотрим точку  $b$ , в которой этот отрезок пересекает границу множества  $G_t$ . Множество  $\hat{f}_t(D^n)$  компактно, поэтому  $b = \hat{f}_t(x)$  для некоторой точки  $x \in D^n$ . Так как  $b \notin G_t = \hat{f}_t(\text{int } D^n)$ , то  $x \notin \text{int } D^n$ , т.е.  $x \in S^{n-1}$ . Поэтому  $b = x$  и  $e = b = x \in S^{n-1}$ . Таким образом,  $\hat{f}_t$  сюръективно отображает  $\text{int } D^n$  на  $\text{int } D^n$ . Кроме того,  $\hat{f}_t$  биективно отображает  $S^{n-1}$  на  $S^{n-1}$  и, как мы уже выяснили,  $\hat{f}_t$  инъективно отображает  $D^n$  в  $D^n$ . Поэтому  $\hat{f}_t$  биективно отображает  $D^n$  на  $D^n$  (при  $t \leq t_0$ ).

Рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int_{D^n} \det \left( \frac{\partial \hat{f}_t}{\partial x_1} \right) = \int \dots \int_{D^n} \det \left( \frac{\partial \hat{f}_t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \hat{f}_t}{\partial x_n} \right) dx_1 \dots dx_n.$$

При  $0 \leq t \leq t_0$  этот интеграл равен объему единичного шара  $D^n$ . Формула (1) показывает, что  $I(t)$  — многочлен от  $t$ . Поэтому  $I(t)$  — положительная константа при  $0 \leq t \leq 1$ .

С другой стороны,  $f_1(x) = f(x) \in S^{n-1}$ , поэтому  $f_1(x) \cdot f_1(x) = 1$ , а значит,  $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot f_1 = 0$  при  $i = 1, \dots, n$ . Векторы  $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$  лежат в одной гиперплос-

кости, поэтому они линейно зависимы и  $\det\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right) = 0$ . Но в таком случае  $I(1) = 0$ . Получено противоречие.  $\square$

Пусть  $\mathcal{F}(f)$  — множество неподвижных точек отображения  $f: D^n \rightarrow D^n$ . По теореме Брауэра это множество непусто. Ясно также, что оно замкнуто. Оказывается, что любое непустое замкнутое подмножество диска  $D^n$  может служить множеством неподвижных точек некоторого непрерывного отображения.

**Теорема 6.4** (см. [111]). *Пусть  $F \subset D^n$  — непустое замкнутое подмножество. Тогда существует непрерывное отображение  $f: D^n \rightarrow D^n$ , для которого  $\mathcal{F}(f) = F$ .*

**Доказательство.** Для каждой точки  $x \in D^n$  положим  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ . В результате получим непрерывную функцию на  $D^n$  (расстояние от точки  $x$  до замкнутого множества  $F$ ). Определим теперь отображение  $f: D^n \rightarrow D^n$  следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x - d(x, F) \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} & \text{при } x \neq x_0; \\ x_0 & \text{при } x = x_0. \end{cases}$$

Отображение  $f$  непрерывно и  $\mathcal{F}(f) = F$ .  $\square$

Из теоремы Брауэра и теоремы о неретрагируемости диска на сферу можно получить много разных следствий. Приведём несколько таких примеров.

**Теорема 6.5.** *Пусть  $f: D^n \rightarrow D^n$ , причем  $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ . Тогда:*

а) *если отображение  $f|_{S^{n-1}}$  тождественно, то  $\text{Im } f = D^n$ .*

б) *если отображение  $f|_{S^{n-1}}$  не имеет неподвижных точек, то  $\text{Im } f = D^n$ .*

**Доказательство.** Предположим, что  $\text{Im } f \neq D^n$ . Тогда существует точка  $O \in D^n \setminus \text{Im } f$ . Пусть  $r: D^n \setminus O \rightarrow S^{n-1}$  — проекция  $D^n \setminus O$  на  $S^{n-1}$  из точки  $O$ . Отображение  $r$  является ретракцией. Так как  $O \notin \text{Im } f$ , то отображение  $rf: D^n \rightarrow S^{n-1}$  корректно определено.

а) Отображение  $rf$  является ретракцией, чего не может быть.

б) По теореме Брауэра отображение  $rf: D^n \rightarrow S^{n-1} \subset D^n$  имеет неподвижную точку. Но  $\text{Im}(rf) \subset S^{n-1}$ , а на множестве  $S^{n-1}$  у отображения  $rf$  нет неподвижных точек.  $\square$

**Теорема 6.6.** *Пусть непрерывный путь  $\alpha$  соединяет точки одной пары противоположных сторон прямоугольника, а путь  $\beta$  соединяет точки другой пары противоположных сторон. Тогда если оба пути  $\alpha$  и  $\beta$  лежат внутри прямоугольника, то они пересекаются в некоторой точке.*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$  и  $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ , где  $s, t \in [0, 1]$ . Требуемое утверждение достаточно доказать для квадрата  $I^2$  на плоскости с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , заданного неравенствами  $|x_i| \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому можно считать, что  $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon$  и  $\beta_2(\varepsilon) = \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \pm 1$ .

Предположим, что  $\alpha(s) \neq \beta(t)$  при всех  $s, t \in [0, 1]$ . Пусть  $N(s, t) = \max_{i=1,2} \{|\alpha_i(s) - \beta_i(t)|\}$ . Рассмотрим отображение  $F: I^2 \rightarrow I^2$ , заданное формулой

$$F(s, t) = \frac{1}{N(s, t)} (\beta_1(t) - \alpha_1(s), \alpha_2(s) - \beta_2(t)).$$

Квадрат  $I^2$  гомеоморфен диску  $D^2$ , поэтому согласно теореме Брауэра отображение  $F$  имеет неподвижную точку  $(s_0, t_0)$ .

Образ отображения  $F$  состоит из точек вида  $(\pm 1, t)$  и  $(s, \pm 1)$ , поэтому  $s_0 = \pm 1$  или  $t_0 = \pm 1$ . Ясно, что

$$N(s, t)F(\pm 1, t) = (\beta_1(t) \mp 1, \alpha_2(\pm 1) - \beta_2(t)),$$

$$N(s, t)F(s, \pm 1) = (\beta_1(\pm 1) - \alpha_1(s), \alpha_2(s) \mp 1).$$

По условию пути  $\alpha$  и  $\beta$  лежат внутри квадрата  $I^2$ , поэтому  $|\beta_1(t)| \leq 1$  и  $|\alpha_2(s)| \leq 1$ . Следовательно, число  $\pm 1$  не может иметь тот же знак, что и число  $\beta_1(t) \mp 1$  или число  $\alpha_2(s) \mp 1$ . Приходим к противоречию, так как  $N(s, t) > 0$ .  $\square$

## 6.2. Теорема Жордана как следствие теоремы Брауэра

Теорему Жордана можно вывести из теоремы Брауэра о неподвижной точке. Мы это сделаем, следуя [90]. Напомним, что одно доказательство теоремы Жордана мы уже привели на с. 75–77.

Для доказательства теоремы Жордана нам понадобится теорема 6.6, которую мы доказывали с помощью теоремы Брауэра. Кроме того, нам понадобится теорема Титце о продолжении непрерывного отображения (теорема 4.4 на с. 68).

Предварительно заметим, что если  $C$  — жорданова кривая, то множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  имеет ровно одну неограниченную связную компоненту. Это следует из ограниченности множества  $C$ . Ясно также, что любая связная компонента множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  линейно связна и открыта.

**Шаг 1.** Множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  содержит ограниченную связную компоненту.

**Доказательство.** Множество  $C$  компактно, поэтому существуют точки  $a, b \in C$ , расстояние между которыми достигает максимума. Можно считать, что  $a = (-1, 0)$  и  $b = (1, 0)$ . Тогда прямоугольник  $R$ ,



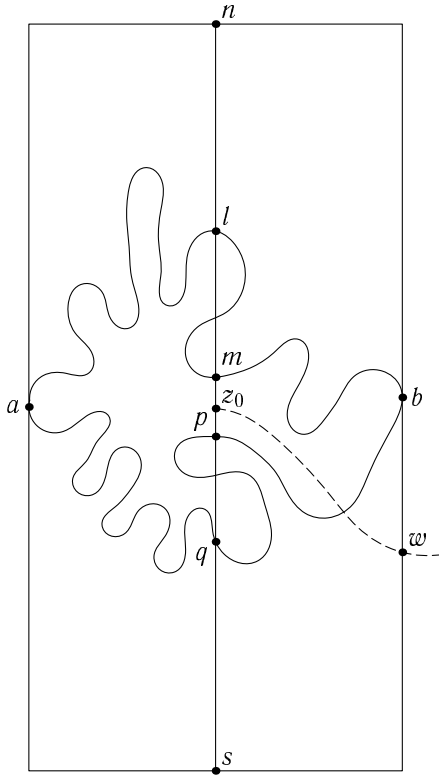


Рис. 42. Жорданова кривая в прямоугольнике

заданный неравенствами  $|x| \leq 1$  и  $|y| \leq 2$ , содержит всю кривую  $C$  и пересечение границы прямоугольника  $R$  с кривой  $C$  состоит в точности из двух точек  $a$  и  $b$  (рис. 42).

Точки  $a$  и  $b$  являются серединами двух сторон прямоугольника  $R$ . Пусть  $n$  и  $s$  — середины двух других сторон прямоугольника. Согласно теореме 6.6 отрезок  $[n, s]$  пересекает кривую  $C$ . Пусть  $l$  — ближайшая к  $n$  точка пересечения. Точки  $a$  и  $b$  делят кривую  $C$  на две дуги. Пусть  $C_n$  — та дуга, на которой лежит точка  $l$ , а  $C_s$  — другая дуга. Пусть  $m$  — самая далекая от  $n$  точка множества  $C_n \cap [n, s]$ . Тогда отрезок  $[m, s]$  пересекает дугу  $C_s$ , потому что иначе путь, идущий сначала из  $n$  в  $l$  по прямой, затем из  $l$  в  $m$  по дуге  $C_n$  и, наконец, из  $m$  в  $s$  по прямой, не пересекал бы дугу  $C_s$ , а это противоречит теореме 6.6. Пусть  $p$  — самая далекая от  $s$  точка множества  $C_s \cap [m, s]$ ,  $z_0$  — середина отрезка  $[m, p]$ .

Покажем, что связная компонента множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , содержащая точку  $z_0$ , ограничена. Предположим, что точку  $z_0$  можно соединить путём  $\gamma$  с точкой, лежащей вне прямоугольника  $R$ . Пусть  $\omega$  — первая точка границы прямоугольника  $R$ , через которую проходит путь  $\gamma$ . Если  $\omega = a$  или  $\omega = b$ , то слегка пошевелим путь  $\gamma$ , чтобы точка  $\omega$  была отлична от  $a$  и  $b$ . Для определённости будем считать, что точка  $\omega$  лежит в нижней части прямоугольника  $R$  (т. е. ближе к точке  $s$ , чем к точке  $n$ ). Рассмотрим путь из  $n$  в  $s$ , который сначала идёт из  $n$  в  $l$  по прямой, затем из  $l$  в  $m$  по дуге  $C_n$ , затем из  $m$  в  $z_0$  по прямой, затем из  $z_0$  в  $\omega$  по пути  $\gamma$  и, наконец, из  $\omega$  в  $s$  по границе прямоугольника  $R$ , не проходя при этом через  $a$  и  $b$ . Этот путь не пересекает дугу  $C_s$ , что противоречит теореме 6.6.  $\square$

**Шаг 2.** Границей каждой связной компоненты множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  служит кривая  $C$ .

**Доказательство.** Пусть  $U$  — связная компонента множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ ,  $\bar{U}$  — замыкание  $U$ ,  $\partial U = \bar{U} \setminus U$  — граница множества  $U$ . Никакая точка множества  $\partial U$  не может принадлежать другой связной компоненте  $W$ , потому что  $W$  — открытое множество и  $U \cap W = \emptyset$ . Таким образом,  $\partial U \subset C$ . Предположим, что  $\partial U \neq C$ . Тогда  $\partial U$  содержится в некоторой дуге  $A$  кривой  $C$ . Покажем, что этого не может быть.

Согласно шагу 1 множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  содержит ограниченную связную компоненту, в которой можно выбрать точку  $z_0$ . Если компонента  $U$  сама ограничена, то точку  $z_0$  выбираем в  $U$ . Пусть  $D^2$  — круг с центром  $z_0$ , содержащий кривую  $C$ ,  $S^1 = \partial D^2$  — его граничная окружность. Тогда  $S^1$  целиком лежит внутри неограниченной компоненты множества  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Дуга  $A$  гомеоморфна отрезку  $[0, 1]$ , поэтому по теореме Титце тождественное отображение  $A \rightarrow A$  можно продолжить до непрерывного отображения  $f: D^2 \rightarrow A$ . Определим теперь отображение  $g: D^2 \rightarrow D^2$  следующим образом. Если компонента  $U$  ограничена, то

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in \bar{U}; \\ z & \text{при } z \in D^2 \setminus U. \end{cases}$$

Если компонента  $U$  неограничена, то

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{при } z \in \bar{U}; \\ f(z) & \text{при } z \in D^2 \setminus U. \end{cases}$$

Пересечение замкнутых множеств  $\bar{U}$  и  $D^2 \setminus U$  содержится в множестве  $A$ , а на множестве  $A$  отображение  $f$  тождественно, поэтому отображение  $g$  непрерывно и корректно определено. Легко проверить, что точка  $z_0$  не принадлежит образу отображения  $g$  и на множестве  $S^1$  отображение  $g$

тождественно. Поэтому композиция отображения  $g$  и проекции  $D^2$  на  $S^1$  из точки  $z_0$  даёт ретракцию  $D^2$  на  $S^1$ , чего не может быть.  $\square$

**Шаг 3.** Множество  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  содержит ровно одну ограниченную связную компоненту.

**Доказательство.** Вернёмся к обозначениям, введённым на шаге 1 (см. рис. 42). Предположим, что помимо связной компоненты  $U$ , содержащей точку  $z_0$ , есть ещё одна ограниченная связная компонента  $W$ . Ясно, что  $W \subset R$ . Пусть  $q$  — самая близкая к  $s$  точка множества  $C_s \cap [n, s]$ . Рассмотрим путь  $\beta$ , который идёт из  $n$  в  $l$  по прямой, затем из  $l$  в  $m$  по дуге  $C_s$ , затем из  $m$  в  $p$  по прямой, затем из  $p$  в  $q$  по дуге  $C_s$  и, наконец, из  $q$  в  $s$  по прямой. Ясно, что путь  $\beta$  не пересекает множество  $W$  и не проходит через точки  $a$  и  $b$ . Выберем окрестности точек  $a$  и  $b$ , не пересекающиеся с путём  $\beta$ . Согласно шагу 1 замыкание множества  $W$  содержит точки  $a$  и  $b$ , поэтому в выбранных окрестностях есть точки  $a_1$  и  $b_1$ , принадлежащие  $W$ . Пройдем из точки  $a$  в  $a_1$  по прямой, затем из  $a_1$  в  $b_1$  пройдем по пути, целиком лежащим в  $W$ , и, наконец, пройдем из  $b_1$  в  $b$  по прямой. Полученный таким образом путь не пересекает путь  $\beta$ , что противоречит теореме 6.6.  $\square$

### 6.3. Лемма Шпернера

Мы уже привели три доказательства теоремы Брауэра о неподвижной точке. Известно ещё много других способов доказательства этой теоремы. Например, теорему Брауэра можно вывести из леммы Шпернера, которая имеет и много других приложений. Сам Шпернер использовал эту лемму для того, чтобы получить новое доказательство другой известной теоремы Брауэра — об инвариантности размерности. Теорема Брауэра о неподвижной точке была выведена из леммы Шпернера в статье [80].

Пусть  $P^n$  — выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$ . Разбиение  $P^n$  на  $n$ -мерные симплексы называют *триангуляцией*, если любые две  $k$ -мерные грани этих симплексов, имеющие общую внутреннюю точку, совпадают. Например, разбиение, изображённое на рис. 43, не является триангуляцией.

Пусть вершины  $k$ -мерного симплекса помечены числами  $0, 1, \dots, k$ . Будем говорить, что набор пометок симплекса *полный*, если все числа  $0, 1, \dots, k$  встречаются среди пометок его вершин (в таком случае они встречаются ровно по одному разу).

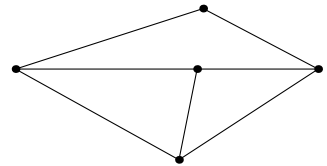


Рис. 43. Пример не триангуляции

Лемму Шпернера мы выведем из следующего утверждения, которое иногда тоже называют леммой Шпернера.

**Теорема 6.7.** *Пусть все вершины триангуляции выпуклого многогранника  $P^n$  помечены числами  $0, 1, \dots, n$ . В таком случае число симплексов триангуляции  $P^n$  с полным набором пометок нечётно тогда и только тогда, когда нечётно число симплексов триангуляции края многогранника  $P^n$  с полным набором пометок.*

**Доказательство.** Рассмотрим  $n$ -мерный симплекс, одна из граней которого является  $(n-1)$ -мерным симплексом с полным набором пометок. Если противоположная вершина помечена числом  $n$ , то у этого симплекса есть ровно одна  $(n-1)$ -мерная грань с полным набором пометок, а если противоположная вершина помечена числом от  $0$  до  $n-1$ , то таких граней ровно две. Поэтому количество  $n$ -мерных симплексов с полным набором пометок сравнимо по модулю  $2$  с количеством пар, состоящих из  $n$ -мерного симплекса и его  $(n-1)$ -мерной грани с полным набором пометок. Кроме того, каждый  $(n-1)$ -мерный симплекс с полным набором пометок, лежащий на крае многогранника  $P^n$ , принадлежит ровно одному  $n$ -мерному симплексу, а все другие  $(n-1)$ -мерные симплексы принадлежат ровно двум  $n$ -мерным симплексам. Поэтому указанное количество пар сравнимо по модулю  $2$  с количеством  $(n-1)$ -мерных симплексов триангуляции края с полным набором пометок.  $\square$

**Теорема 6.8** (лемма Шпернера [122]). *Предположим, что пометки вершин триангуляции  $n$ -мерного симплекса с полным набором пометок таковы, что если вершина триангуляции принадлежит некоторой грани исходного симплекса, то пометка этой вершины совпадает с пометкой одной из вершин грани. Тогда среди  $n$ -мерных симплексов триангуляции есть симплекс с полным набором пометок. Более того, число таких симплексов нечётно.*

**Доказательство.** Любое нечётное число отлично от нуля, поэтому достаточно доказать, что число  $n$ -мерных симплексов с полным набором пометок нечётно. Согласно теореме 6.7 это эквивалентно тому, что на крае число  $(n-1)$ -мерных симплексов с полным набором пометок нечётно. Из условия на пометки триангуляции следует, что на крае любой  $(n-1)$ -мерный симплекс с полным набором пометок принадлежит  $(n-1)$ -мерной грани исходного симплекса с полным набором пометок. Поэтому лемма Шпернера для  $n$ -мерного симплекса следует из леммы Шпернера для  $(n-1)$ -мерного симплекса. При  $n=0$  лемма Шпернера очевидна.  $\square$

Для доказательства теоремы Брауэра нам потребуются барицентрические координаты. Пусть точка  $X$  принадлежит симплексу  $A_0 \dots A_n$ . *Бари-*

центрическими координатами точки  $X$  относительно этого симплекса называют набор чисел  $(x_0, \dots, x_n)$ , где  $x_i$  — отношение объема симплекса  $XA_0 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$  к объему симплекса  $A_0 \dots A_n$ . Ясно, что числа  $x_0, \dots, x_n$  неотрицательны и их сумма равна 1. Координата  $x_i$  пропорциональна расстоянию от точки  $X$  до грани  $A_0 \dots A_{i-1}A_{i+1} \dots A_n$ , поэтому барицентрические координаты точки  $X$  однозначно задают её положение.

Доказательство теоремы Брауэра. Диск  $D^n$  гомеоморфен  $n$ -мерному симплексу  $\Delta^n$ , поэтому достаточно доказать, что любое непрерывное отображение  $f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  имеет неподвижную точку. Пометим все точки симплекса  $\Delta^n$  по следующему правилу. Пусть  $(x_0, \dots, x_n)$  — барицентрические координаты точки  $X \in \Delta^n$ ,  $(y_0, \dots, y_n)$  — барицентрические координаты её образа при отображении  $f$ . Пометим точку  $X$  числом  $j$ , где  $j$  — наименьший индекс, для которого  $y_j \leq x_j \neq 0$ . В таком случае пометки вершин любой триангуляции будут удовлетворять условию леммы Шпернера. В самом деле, если точка принадлежит грани  $A_{i_0} \dots A_{i_k}$ , то у нее отличны от нуля лишь барицентрические координаты с индексами  $i_0, \dots, i_k$ .

Пусть  $M$  — центр масс симплекса  $\Delta^n$ ,  $M_i$  — центр масс  $i$ -й грани. Разобьём симплекс  $\Delta^n$  на симплексы, вершинами каждого из которых служат точки  $M, M_i$  и ещё  $n-1$  точка  $i$ -й грани ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Такое разбиение называют *барицентрическим подразделением* симплекса  $\Delta^n$ . Если  $d$  — максимальная длина ребра симплекса  $\Delta^n$ , то длина любого ребра симплекса барицентрического подразделения не превосходит  $\frac{n}{n+1}d$ . Действительно, вершины барицентрического подразделения имеют вид

$$v_1, \quad \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}, \quad \dots, \quad \frac{v_1 + \dots + v_{n+1}}{n+1},$$

где  $v_1, \dots, v_{n+1}$  — вершины симплекса  $\Delta^n$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{v_1 + \dots + v_{p+q}}{p+q} - \frac{v_1 + \dots + v_p}{p} &= \frac{q}{p+q} \left( \frac{v_{p+1} + \dots + v_{p+q}}{q} - \frac{v_1 + \dots + v_p}{p} \right) = \\ &= \frac{q}{p+q} (a - b), \end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  — точки симплекса  $\Delta^n$ . Остаётся заметить, что

$$\frac{q}{p+q} \leq \frac{p+q-1}{p+q} = 1 - \frac{1}{p+q} \leq \frac{n}{n+1},$$

так как  $p+q \leq n+1$ .

Согласно лемме Шпернера среди  $n$ -мерных симплексов первого барицентрического подразделения есть симплекс с полным набором

пометок. Выберем в нём произвольную точку  $X_1$ . Затем рассмотрим *второе барицентрическое подразделение*, т. е. барицентрически разобьём каждый симплекс первого барицентрического подразделения. Во втором барицентрическом подразделении выберем  $n$ -мерный симплекс с полным набором пометок и выберем в нём произвольную точку  $X_2$ . Затем аналогично построим точку  $X_3$ , и т. д. Из бесконечной последовательности  $\{X_i\}$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $\{X_{i_k}\}$ . Покажем, что точка  $X = \lim_{k \rightarrow \infty} X_{i_k}$  неподвижна.

Пусть  $(x_{0k}, \dots, x_{nk})$  и  $(y_{0k}, \dots, y_{nk})$  — барицентрические координаты точки  $X_{i_k}$  и её образа,  $(x_{0k}^l, \dots, x_{nk}^l)$  и  $(y_{0k}^l, \dots, y_{nk}^l)$  — барицентрические координаты вершин симплекса, содержащего точку  $X_{i_k}$ , и их образов. Рассматриваемые симплексы имеют полный набор пометок, поэтому для любого  $j = 0, \dots, n$  неравенство  $y_{jk}^l \leq x_{jk}^l$  выполняется для некоторого  $l$ . Длина ребра симплекса с номером  $l_k$  стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{jk}^l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{jk} = x_j$ , где  $(x_0, \dots, x_n)$  — барицентрические координаты точки  $X$ . Таким образом, если  $(y_0, \dots, y_n)$  — барицентрические координаты образа точки  $X$ , то  $y_j \leq x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Но  $\sum x_j = 1 = \sum y_j$ , поэтому  $x_j = y_j$  при  $j = 0, 1, \dots, n$ . Из этого следует, что точка  $X$  неподвижна.  $\square$

Заслуживает упоминания ещё один способ доказательства леммы Шпернера, который оказался полезным и при доказательстве других комбинаторных теорем.

Конструктивное доказательство леммы Шпернера [47]. Докажем сначала требуемое утверждение для 1-мерного симплекса (отрезка). Если две соседние вершины триангуляции помечены одним и тем же числом, то одну из них можно стереть. Количество отрезков с полным набором пометок при этом не изменится. После нескольких таких операций получим разбиение отрезка с пометками 01010...101. Количество отрезков с полным набором пометок равно  $2k + 1$ , где  $k$  — количество нулей (оно же совпадает с количеством единиц).

Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для  $n$ -мерных симплексов, где  $n \geq 1$ . Для заданной триангуляции  $(n + 1)$ -мерного симплекса рассмотрим все  $n$ -мерные симплексы триангуляции с полным набором пометок. Для  $(n + 1)$ -мерных симплексов этой триангуляции возможны три ситуации:

- 0) среди пометок вершин нет одного из чисел  $0, 1, \dots, n$ ; в этом случае число  $n$ -мерных граней с полным набором пометок равно 0;
- 1) симплекс имеет полный набор пометок; в этом случае число  $n$ -мерных граней с полным набором пометок равно 1;

- 2) вершины симплекса помечены числами  $0, 1, \dots, n$ , причём одно из этих чисел встречается дважды; в этом случае число  $n$ -мерных граней с полным набором пометок равно 2.

В случае 2 проведём отрезок, соединяющий центры масс  $n$ -мерных граней с полным набором пометок. В случае 1 отметим центр масс  $n$ -мерной грани с полным набором пометок. В результате получим несколько попарно не пересекающихся ломаных (ломаная может вырождаться в отмеченную точку). Концом такой ломаной служит либо отмеченная точка (она соответствует  $(n+1)$ -мерному симплексу с полным набором пометок), либо центр масс  $n$ -мерной грани с полным набором пометок, лежащей на  $n$ -мерной грани исходного симплекса (эта грань исходного симплекса обязательно имеет полный набор пометок). Следовательно, чётность числа  $(n+1)$ -мерных симплексов с полным набором пометок совпадает с чётностью числа  $n$ -мерных граней с полным набором пометок, лежащих на грани исходного симплекса (имеющей полный набор пометок). Согласно предположению индукции последнее число нечётно.  $\square$

При конструктивном доказательстве можно проследить за ориентациями симплексов и получить следующее уточнение леммы Шпернера.

**Теорема 6.9** (см. [44]). *Пусть выполняются условия леммы Шпернера. Тогда количество симплексов с полным набором пометок, ориентация\*) которых совпадает с ориентацией исходного симплекса, ровно на 1 больше количества симплексов с полным набором пометок, ориентация которых противоположна ориентации исходного симплекса.*

**Доказательство.** Для отрезка доказательство практически то же самое: для разбиения с пометками  $01010\dots 101$  количество положительно ориентированных отрезков с полным набором пометок равно  $k+1$ , а отрицательно ориентированных равно  $k$  (здесь  $k$  — количество нулей).

Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для  $n$ -мерных симплексов, где  $n \geq 1$ . Пусть задана триангуляция  $(n+1)$ -мерного симплекса с помеченными вершинами. Для каждого  $(n+1)$ -мерного симплекса триангуляции рассмотрим все его  $n$ -мерные грани с полным набором пометок. Каждую такую грань  $\Delta^n$  пометим знаками  $+$  и  $-$  по следующему правилу. Грань  $\Delta^n$  снабжена двумя ориентациями, а именно, одна ориентация индуцирована набором пометок  $0, 1, \dots, n$ , а другая ориентация возникает как ориентация грани  $(n+1)$ -мерного симплекса, индуцированная ориентацией этого симплекса (все  $(n+1)$ -мерные симплексы ориентированы так же, как исходный симплекс). Если обе

---

\*) Имеется в виду ориентация, заданная набором пометок.

ориентации грани  $\Delta^n$  совпадают, то пометим её знаком  $+$ , а если ориентации противоположны, то пометим грань знаком  $-$ . Пусть грань  $\Delta^n$  принадлежит двум  $(n+1)$ -мерным симплексам  $\Delta_1^{n+1}$  и  $\Delta_2^{n+1}$ . Эти симплексы индуцируют на  $\Delta^n$  противоположные ориентации, а ориентация, заданная пометками  $0, 1, \dots, n$ , одна и та же для обоих симплексов  $\Delta_1^{n+1}$  и  $\Delta_2^{n+1}$ . Поэтому грани  $\Delta^n$  как грани симплексов  $\Delta_1^{n+1}$  и  $\Delta_2^{n+1}$  приписаны разные знаки. Из этого легко следует, что если мы рассмотрим такие же ломаные, как и при конструктивном доказательстве леммы Шпернера, то концами одной ломаной будут служить:

- 1) либо два противоположно ориентированных  $(n+1)$ -мерных симплекса с полными наборами пометок,
- 2) либо два противоположно ориентированных  $n$ -мерных симплекса с полными наборами пометок, принадлежащих  $n$ -мерной грани исходного симплекса с полным набором пометок,
- 3) либо один  $(n+1)$ -мерный и один  $n$ -мерный симплекс указанного выше вида, имеющие согласованные ориентации.

Поэтому разность между количеством положительно и отрицательно ориентированных  $(n+1)$ -мерных симплексов с полным набором пометок равна разности между количеством положительно и отрицательно ориентированных  $n$ -мерных симплексов с полным набором пометок, принадлежащих  $n$ -мерной грани исходного симплекса с полным набором пометок.  $\square$

## 6.4. Теорема Какутани

Теорему Брауэра можно обобщить на отображения симплекса  $\Delta^n$ , которые сопоставляют точке не точку, а некоторое подмножество симплекса. Эти отображения должны обладать определёнными свойствами. Во-первых, мы будем рассматривать только отображения  $x \mapsto \Phi(x) \subset \Delta^n$ , для которых  $\Phi(x)$  — замкнутое выпуклое множество. Во-вторых, отображение  $\Phi$  должно обладать свойством, аналогичными непрерывности. А именно, отображение  $\Phi$  должно быть *полу непрерывным сверху*. Это означает, что если  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_0$  и в каждом множестве  $\Phi(x_i)$  выбрана точка  $y_i$  так, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y_0$ , то  $y_0 \in \Phi(x_0)$ . Если  $\Phi$  — обычное отображение, т. е. для каждой точки  $x \in \Delta^n$  множество  $\Phi(x)$  состоит из одной точки, то полу непрерывность сверху эквивалентна непрерывности.

**Теорема 6.10 (Какутани [78]).** Пусть  $\Phi$  — полу непрерывное сверху отображение, которое сопоставляет каждой точке  $x \in \Delta^n$  замкнутое выпуклое подмножество  $\Phi(x) \subset \Delta^n$ . Тогда существует точка  $x_0 \in \Delta^n$ , для которой  $x_0 \in \Phi(x_0)$ .



**Доказательство.** Рассмотрим  $m$ -е барицентрическое подразделение симплекса  $\Delta^n$ , и каждой его вершине  $v_\alpha$  сопоставим некоторую точку  $\omega_\alpha \in \Phi(v_\alpha)$ . Продолжив это отображение по линейности на симплексы  $m$ -го барицентрического подразделения, получим непрерывное отображение  $\varphi_m: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ . Согласно теореме Брауэра существует точка  $x_m$ , для которой  $\varphi_m(x_m) = x_m$ . Выберем из последовательности  $\{x_m\}$  сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{m_i}\}$ . Покажем, что точка  $x_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{m_i}$  обладает требуемым свойством, т. е.  $x_0 \in \Phi(x_0)$ .

Пусть  $\Delta_m^n$  — тот из  $n$ -мерных симплексов  $m$ -го барицентрического подразделения, который содержит точку  $x_m$  (если таких симплексов несколько, то мы выбираем любой из них). Пусть, далее,  $v_{0,m}, \dots, v_{n,m}$  — вершины симплекса  $\Delta_m^n$ . Тогда  $\lim_{i \rightarrow \infty} v_{j,m_i} = x_0$  и  $x_m = \sum_{j=0}^n \lambda_{j,m} v_{j,m}$ ,

где  $\lambda_{j,m} \geq 0$  и  $\sum_{j=0}^n \lambda_{j,m} = 1$ . Положим  $\omega_{j,m} = \varphi_m(v_{j,m})$ . Из определения

отображения  $\varphi_m$  следует, что  $x_m = \varphi_m(x_m) = \sum_{j=0}^n \lambda_{j,m} \omega_{j,m}$  и, кроме того,

$\omega_{j,m} \in \Phi(v_{j,m})$ . Выражение  $\sum_{j=0}^n \lambda_{j,m} \omega_{j,m}$  можно рассматривать как набор

из  $n+1$  точек, лежащих в компактном пространстве  $I \times \Delta^n$ . Поэтому из последовательности  $\{x_{m_i}\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{x_{m'_i}\}$  так, что подпоследовательности  $\lambda_{j,m'_i}$  и  $\omega_{j,m'_i}$  сходятся для всех  $j = 0, 1,$

$\dots, n$ . Пусть  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{j,m'_i} = \lambda_j$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega_{j,m'_i} = \omega_j$ . Тогда  $\sum_{j=0}^n \lambda_j \omega_j = x_0$ . Отоб-

ражение  $\Phi$  полунепрерывно сверху, поэтому из того, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} v_{j,m'_i} = x_0$ ,  $\omega_{j,m'_i} \in \Phi(v_{j,m'_i})$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} \omega_{j,m'_i} = \omega_j$ , следует, что  $\omega_j \in \Phi(x_0)$ . По условию

множество  $\Phi(x_0)$  выпуклое. Поэтому  $x_0 = \sum_{j=0}^n \lambda_j \omega_j \in \Phi(x_0)$ , что и требовалось.  $\square$

Теорема Какутани имеет довольно много приложений, но они относятся в основном к геометрии выпуклых тел и к математической экономике, поэтому мы не будем их здесь обсуждать.

## Глава III

# Топологические пространства

## § 7. Элементы общей топологии

### 7.1. Хаусдорфовы пространства и компактные пространства

Топологическое пространство  $X$  называют *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек  $x, y \in X$  найдутся непересекающиеся окрестности  $U \ni x$  и  $V \ni y$ . Такое свойство отделимости впервые ввёл Ф. Хаусдорф в книге [22]. Простейшим примером нехаусдорфова пространства служит пространство  $X$  с *тривиальной (антидискретной)* топологией, в которой система открытых множеств состоит ровно из двух множеств:  $X$  и  $\emptyset$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что любое подпространство хаусдорфова пространства хаусдорфово.

**У п р а ж н е н и е 2.** Пусть  $X$  — хаусдорфово пространство,  $x_1, \dots, x_n$  — его различные точки. Докажите, что существуют непересекающиеся окрестности  $U_1, \dots, U_n$  точек  $x_1, \dots, x_n$ .

Нехаусдорфовы пространства (в том числе и пространства с тривиальной топологией) часто возникают как пространства орбит действия групп. Пусть  $X$  — множество,  $G$  — группа. *Действием* группы  $G$  на множестве  $X$  называют отображение  $G \times X \rightarrow X$  (паре  $(g, x)$  сопоставляется элемент  $g(x) \in X$ ), обладающее следующими свойствами:

1)  $g(h(x)) = (gh)(x)$ ;

2)  $e(x) = x$ , где  $e$  — единичный элемент группы  $G$ .

*Топологической группой* называют хаусдорфово топологическое пространство  $G$ , которое одновременно является группой, причём отображения  $(g, h) \mapsto gh$  и  $g \mapsto g^{-1}$  непрерывны. Обычно в топологии рассматривается действие топологических групп на хаусдорфовых топологических пространствах. При этом подразумевается, что действие  $G \times X \rightarrow X$  непрерывно.

Для точки  $x \in X$  множество  $G(x) = \{g(x) \in X \mid g \in G\}$  называют *орбитой* точки  $x$  относительно действия группы  $G$ .

**У п р а ж н е н и е 3.** Докажите, что орбиты  $G(x)$  и  $G(y)$  любых двух точек  $x, y \in X$  либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть  $X/G$  — множество, элементами которого служат орбиты относительно действия группы  $G$ . Сопоставляя точке  $x \in X$  её орбиту  $G(x)$ , получаем отображение  $p: X \rightarrow X/G$ . Введём на множестве  $X/G$  топологию следующим образом: множество  $U \subset X/G$  открыто тогда и только тогда, когда множество  $p^{-1}(U)$  открыто. Полученное в результате топологическое пространство  $X/G$  называют *пространством орбит*.

**Пример 1.** Пусть  $X = S^1 \times S^1$  (двумерный тор),  $G = \mathbb{R}$  и  $a$  — некоторое число. Для  $t \in G$  и  $(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \in X$  положим  $t(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = (e^{i(\varphi+t)}, e^{i(\psi+at)})$ . Если число  $a$  иррационально, то топология пространства  $X/G$  тривиальна.

**Доказательство.** При иррациональном  $a$  каждая орбита представляет собой всюду плотное множество, поэтому через любое непустое открытое подмножество тора проходят все орбиты.  $\square$

**Пример 2.** Пусть  $X = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  — множество матриц порядка  $n$  с комплексными элементами,  $G = \text{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  — группа невырожденных матриц. Для  $A \in X$  и  $B \in G$  положим  $B(A) = BAB^{-1}$ . При  $n \geq 2$  пространство  $X/G$  нехаусдорфово.

**Доказательство.** Ограничимся случаем  $n = 2$ . Матрицы  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  принадлежат разным орбитам  $O_1$  и  $O_2$ , а все матрицы  $\begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  при  $s \neq 0$  принадлежат орбите  $O_2$ . Но

$$\lim_{s \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

поэтому орбиту  $O_1$  нельзя отделить от орбиты  $O_2$ .  $\square$

Докажем теперь некоторые важнейшие свойства хаусдорфовых пространств. Предварительно заметим, что в хаусдорфовом пространстве  $X$  для любых двух различных точек  $x$  и  $y$  найдётся окрестность  $U \ni x$ , замыкание которой не содержит  $y$ . Действительно, если  $U \ni x$  и  $V \ni y$  — непересекающиеся окрестности, то  $U \subset X \setminus V$ . Множество  $X \setminus V$  замкнуто, поэтому  $\bar{U} \subset X \setminus V$ , а значит,  $\bar{U} \cap V = \emptyset$ .

**Теорема 7.1.** Пусть  $C$  — компактное подмножество хаусдорфова пространства  $X$  и  $x \in X \setminus C$ . Тогда точка  $x$  и множество  $C$  имеют непересекающиеся окрестности.

**Доказательство.** У каждой точки  $c \in C$  есть окрестность  $V$ , замыкание которой не содержит точки  $x$ . Такие окрестности покрывают компактное пространство  $C$ , поэтому можно выбрать конечное подпокрытие  $U_1, \dots, U_n$ . Положим  $V = \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Тогда  $C \subset V$  и  $x \notin \bar{V}$ , т.е.  $V$  и  $X \setminus \bar{V}$  — непересекающиеся окрестности множества  $C$  и точки  $x$ .  $\square$

*Следствие 1. Компактное подмножество  $C$  хаусдорфова пространства  $X$  замкнуто.*

*Доказательство.* Если  $x \in X \setminus C$ , то у точки  $x$  есть окрестность, не пересекающая  $C$ . Это означает, что множество  $X \setminus C$  открыто.  $\square$

*Следствие 2. У любых двух непересекающихся компактных подмножеств  $A$  и  $B$  хаусдорфова пространства  $X$  есть непересекающиеся окрестности.*

*Доказательство.* У каждой точки  $a \in A$  есть окрестность, замыкание которой не пересекается с  $B$ . В силу компактности множества  $A$  существует его конечное покрытие такими окрестностями  $U_1, \dots, U_n$ . Искомые окрестности множеств  $A$  и  $B$  — это  $V = \bigcup_{i=1}^n U_i$  и  $X \setminus \bar{V}$ .  $\square$

**Задача 7.1.** Докажите, что замкнутое подмножество  $C$  компактного пространства  $K$  компактно.

**Теорема 7.2.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства  $X$  на хаусдорфова пространство  $Y$ . Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

*Доказательство.* Образ  $Y$  компактного пространства  $X$  при непрерывном отображении  $f$  компактен, поскольку для любого открытого покрытия множества  $Y$  прообраз этого покрытия тоже является открытым покрытием. Любое замкнутое подмножество  $C$  компактного пространства  $X$  компактно, поэтому его образ  $f(C) \subset Y$  тоже компактен. В таком случае из хаусдорфовости  $Y$  следует, что  $f(C)$  — замкнутое подмножество в  $Y$ . Но  $f(C)$  — прообраз множества  $C$  при отображении  $f^{-1}$ , поэтому отображение  $f^{-1}$  непрерывно.  $\square$

**Упражнение 4.** Постройте непрерывное взаимно однозначное отображение полуоткрытого интервала  $[0, 1)$  на окружность  $S^1$ . (В условии теоремы 7.2 существенна компактность пространства  $X$ .)

**Упражнение 5.** Докажите, что непрерывное отображение отрезка на квадрат не может быть взаимно однозначным.

В обоих приведённых выше примерах нехаусдорфовых пространств орбит  $X/G$  группа  $G$  была некомпактной. Для компактных групп таких неприятностей не возникает.

**Теорема 7.3.** Если компактная группа  $G$  действует на (хаусдорфовом) пространстве  $X$ , то пространство орбит  $X/G$  хаусдорфово.

*Доказательство.* Орбита  $G(x)$  является образом компактного пространства  $G$  при непрерывном отображении  $G \rightarrow G \times \{x\} \rightarrow G(x)$ , поэтому  $G(x)$  — компактное множество. Если  $G(x)$  и  $G(y)$  — разные орбиты, то согласно теореме 7.1 у точки  $x$  есть окрестность  $U$ , замыкание которой не пересекает множество  $G(y)$ . В таком случае мно-

жества  $p(U)$  и  $(X/G) \setminus p(\bar{U})$  — непересекающиеся открытые множества, содержащие точки множества  $X/G$ , соответствующие орбитам  $G(x)$  и  $G(y)$ .  $\square$

**Задача 7.2.\*** [82] а) Докажите, что для любого топологического пространства  $X$  существуют хаусдорфово пространство  $X^H$  и непрерывное отображение  $\sigma: X \rightarrow X^H$ , обладающие следующими свойствами: если  $Y$  — хаусдорфово пространство и  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение, то существует единственное непрерывное отображение  $f^H: X^H \rightarrow Y$ , для которого  $f^H \sigma = f$ .

б) Пусть  $X/G$  — пространство орбит из примера 2 на с. 99. Докажите, что тогда  $(X/G)^H$  гомеоморфно  $\mathbb{C}^n$ .

в) Докажите, что любое непрерывное отображение  $f: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , для которого  $f(BAB^{-1}) = A$  при всех  $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , можно однозначно представить в виде  $f(A) = F(c_1(A), \dots, c_n(A))$ , где  $c_1(A), \dots, c_n(A)$  — коэффициенты многочлена  $\det(A + \lambda I)$  и  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$  — некоторая непрерывная функция.

Топологическое пространство  $X$  называют *локально компактным*, если для любой точки  $x \in X$  существует (открытая) окрестность  $U_x \ni x$ , замыкание которой компактно.

**Теорема 7.4.** Пусть  $X$  — локально компактное хаусдорфово пространство. Тогда для любого открытого множества  $U \ni x$  можно выбрать открытое множество  $U_x \ni x$  так, что множество  $U_x$  компактно и содержится в  $U$ .

**Доказательство.** Выберем открытую окрестность  $W_x \ni x$ , замыкание которой компактно, и рассмотрим компактное пространство  $K$  — замыкание пространства  $K' = \text{int}(\bar{W}_x \cap U)$ . Множество  $C = K \setminus K'$  компактно и не содержит точку  $x$ . Поэтому согласно теореме 7.1 у  $x$  и  $C$  есть непересекающиеся окрестности  $U_x$  и  $U_C$ . Множество  $U_x$  обладает всеми требуемыми свойствами.  $\square$

**Теорема 7.5.** Для любого компактного подпространства  $K$  локально компактного хаусдорфова пространства  $X$  и любого открытого в  $X$  множества  $U$ , содержащего  $K$ , можно выбрать открытое в  $X$  множество  $V$  так, что  $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$ , причём множество  $\bar{V}$  компактно.

**Доказательство.** Для каждой точки  $x \in K$  возьмём окрестность  $U_x \ni x$ , для которой  $\bar{U}_x \subset U$ , и окрестность  $W_x \ni x$ , для которой множество  $\bar{W}_x$  компактно. Множество  $\bar{V}_x$ , где  $V_x = U_x \cap W_x$ , компактно, поскольку оно является замкнутым подпространством компактного пространства  $W_x$ . Пользуясь компактностью  $K$ , выберем конечный набор точек  $x_1, \dots, x_n \in K$  так, что  $K \subset V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$ . Множество  $\bar{V} = \bar{V}_{x_1} \cup \dots \cup \bar{V}_{x_n}$  компактно и  $\bar{V} \subset \bar{U}_{x_1} \cup \dots \cup \bar{U}_{x_n} \subset U$ .  $\square$

Пусть  $X$  — хаусдорфово пространство. *Одноточечной компактификацией* пространства  $X$  называют топологическое пространство  $X^+ = X \cup \{\infty\}$ , открытыми множествами которого являются все открытые подмножества  $X$  и подмножества  $U \subset X^+$ , для которых  $X^+ \setminus U$  — компактное подмножество  $X$ . (Здесь подразумевается, что  $\infty$  — некоторая точка, не принадлежащая  $X$ .) Нужно проверить, что конечные пересечения и любые объединения открытых в  $X^+$  множеств открыты. Ясно, что пересечение с  $X$  конечного пересечения или любого объединения открытых в  $X^+$  множеств открыто в  $X$ . Предположим, что точка  $\infty$  принадлежит пересечению конечного набора открытых в  $X^+$  множеств. Тогда дополнение к пересечению этих множеств является объединением конечного набора компактных множеств, поэтому оно компактно. Предположим теперь, что точка  $\infty$  принадлежит объединению произвольного набора открытых в  $X^+$  множеств. Тогда точка  $\infty$  принадлежит некоторому множеству  $U$  из этого набора. Дополнение к объединению этих множеств является замкнутым подмножеством компактного множества  $X \setminus U$ , поэтому оно компактно. Таким образом,  $X^+$  — топологическое пространство, причём  $X$  — его подпространство.

Пусть  $\mathcal{U}$  — произвольное открытое покрытие пространства  $X^+$ . Покажем, что из  $\mathcal{U}$  можно выбрать конечное подпокрытие. Точка  $\infty$  содержится в одном из множеств  $U \in \mathcal{U}$ . Множество  $X \setminus U$  компактно, поэтому в  $\mathcal{U}$  есть конечное подпокрытие этого множества.

Покажем теперь, что если пространство  $X$  не только хаусдорфово, но ещё и локально компактно, то пространство  $X^+$  хаусдорфово. Для этого нужно проверить, что у любой точки  $x \in X$  и точки  $\infty$  есть непесекающиеся открытые окрестности. У точки  $x$  есть открытая окрестность  $V_x$ , замыкание которой компактно. Множество  $U = (X \setminus \overline{V}_x) \cup \{\infty\}$  является открытой окрестностью точки  $\infty$ , не пересекающейся с  $V_x$ .

## 7.2. Нормальные пространства

Топологическое пространство  $X$  называют *нормальным*, если любая его точка является замкнутым множеством и для любых двух замкнутых непесекающихся подмножеств  $A, B \subset X$  найдутся непесекающиеся открытые множества  $U$  и  $V$ , содержащие  $A$  и  $B$ .

Следствия 1 и 2 теоремы 7.1 показывают, что любое компактное хаусдорфово пространство нормально.

У п р а ж н е н и е 6. Докажите, что любое метризуемое пространство нормально.

Лемма Урысона, доказанная нами для пространства  $\mathbb{R}^n$  (см. с. 67), остается справедливой и для произвольного нормального пространства. Урысон доказывал её именно для нормальных пространств.

**Теорема 7.6** (лемма Урысона). Пусть  $A$  и  $B$  — непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства  $X$ . Тогда существует непрерывная функция  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , для которой  $f(A) = 0$  и  $f(B) = 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $V$  — открытое подмножество нормального топологического пространства  $X$ ,  $U$  — такое подмножество в  $X$ , что  $\bar{U} \subset V$ . Тогда существует такое открытое множество  $W$ , что  $\bar{U} \subset W \subset \bar{W} \subset V$ . Действительно, в качестве  $W$  можно взять открытое множество, которое содержит замкнутое множество  $\bar{U}$  и не пересекается с открытой окрестностью замкнутого множества  $X \setminus V$ .

Для  $U = A$  и  $V = X \setminus B$  построим открытое множество  $A_1$  так, что

$$A \subset A_1 \subset X \setminus B, \quad (1)$$

причём  $\bar{A}_1 \subset X \setminus B$ . После этого можно вставить промежуточные открытые множества  $A'_1$  и  $A_2$  так, что

$$A \subset A'_1 \subset A_1 \subset A_2 \subset X \setminus B \quad (2)$$

и замыкание каждого предыдущего множества содержится в последующем множестве.

Для последовательности множеств (1) определим функцию  $f_1: X \rightarrow [0, 1]$  следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in A; \\ 1/2 & \text{при } x \in A_1 \setminus A; \\ 1 & \text{при } x \in X \setminus A_1. \end{cases}$$

Для последовательности множеств (2) определим функцию  $f_2: X \rightarrow [0, 1]$  следующим образом:

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in A; \\ 1/4 & \text{при } x \in A'_1 \setminus A; \\ 1/2 & \text{при } x \in A_1 \setminus A'_1; \\ 3/4 & \text{при } x \in A_2 \setminus A_1; \\ 1 & \text{при } x \in X \setminus A_2. \end{cases}$$

Затем построим третью последовательность множеств, вставляя промежуточные открытые множества между соседними членами последовательности (2), и для этой последовательности множеств построим функцию  $f_3(x)$ , и т. д.

Легко убедиться, что  $f_2(x) \geq f_1(x)$ . Аналогично  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ , поэтому существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Ясно, что  $f(x) = 0$  при  $x \in A$  и  $f(x) = 1$  при  $x \in B$ . Нужно лишь доказать, что функция  $f(x)$  непрерывна.

Пусть на  $n$ -м шаге построена последовательность множеств

$$A \subset A_1 \subset \dots \subset A_r \subset X \setminus B,$$

где  $\bar{A}_i \subset A_{i+1}$ . (Этой последовательности соответствует функция  $f_n$ ). Положим  $A_0 = \text{int } A$  — внутренность множества  $A$ ,  $A_{-1} = \emptyset$  и  $A_{r+1} = X$ . Рассмотрим открытые множества  $A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$ . Ясно, что

$$X = \bigcup_{i=0}^r (A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}) \subset \bigcup_{i=0}^r (A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}),$$

поэтому открытые множества  $A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}$  покрывают всё пространство  $X$ .

На множестве  $A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}$  функция  $f_n(x)$  принимает два значения, отличающиеся на  $1/2^n$ . Ясно также, что  $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/2^k = 1/2^n$ .

Для каждой точки  $x \in X$  выберем её открытую окрестность вида  $A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}$ . Образ открытого множества  $A_{i+1} \setminus \bar{A}_{i-1}$  содержится в интервале  $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 1/2^n$ . Устремляя  $n$  к бесконечности, получаем, что функция  $f$  непрерывна.  $\square$

Из леммы Урысона можно вывести теорему Титце о продолжении непрерывных отображений.

**Теорема 7.7 (Титце).** Пусть  $Y$  — нормальное топологическое пространство и  $X \subset Y$  — замкнутое подмножество,  $f: X \rightarrow [-1, 1]$  — непрерывная функция. Тогда существует непрерывная функция  $F: Y \rightarrow [-1, 1]$ , ограничение которой на  $X$  совпадает с  $f$ .

Эта теорема доказывается точно так же, как теорема Титце для  $Y = \mathbb{R}^n$  (теорема 4.4 на с. 68). Нужно лишь заменить  $\mathbb{R}^n$  на  $Y$  и вместо леммы Урысона для  $\mathbb{R}^n$  применить лемму Урысона для нормального топологического пространства  $Y$ . Следствие теоремы 4.4 тоже остаётся верным.

### 7.3. Разбиения единицы

Пусть  $\varphi$  — непрерывная функция на топологическом пространстве  $X$ . Носителем  $\varphi$  называют замкнутое множество

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Пусть  $\{U_\alpha\}$  — открытое покрытие топологического пространства  $X$ . Разбиением единицы, подчинённым покрытию  $\{U_\alpha\}$ , называют се-



мейство непрерывных функций  $\varphi_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ , обладающее следующими свойствами:

1) семейство функций  $\varphi_\alpha$  *локально конечно*, т.е. у любой точки  $x \in X$  есть окрестность  $V(x)$ , пересекающая лишь конечное число множеств  $\text{supp}(\varphi_\alpha)$ ;

2)  $\sum \varphi_\alpha(x) = 1$  для любой точки  $x \in X$ ;

3)  $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$  для всех  $\alpha$ .

Иногда рассматривают семейства  $\{U_\alpha\}$  и  $\{\varphi_\beta\}$  с разными индексами. В таком случае предполагается, что для любого индекса  $\beta$  найдётся такой индекс  $\alpha$ , что  $\text{supp}(\varphi_\beta) \subset U_\alpha$ .

**Т е о р е м а 7.8** (Стоун [124]). Пусть  $X$  — метризуемое топологическое пространство. Тогда для любого его не более чем счётного открытого покрытия  $\{U_i\}$  существует разбиение единицы  $\{\varphi_i\}$ , подчинённое этому покрытию.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** ([93] и [56]). Рассмотрим сначала случай конечного покрытия  $U_1, \dots, U_n$ . Функции  $f_i(x) = d(x, X \setminus U_i)$  непрерывны (см. замечание на с. 66), поэтому функция  $F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$  тоже непрерывна. Каждая точка  $x \in X$  покрыта некоторым множеством  $U_i$ . В таком случае  $f_i(x) > 0$ , а значит,  $F(x) > 0$  для всех  $x \in X$ . Положим

$$g_i(x) = \max \left\{ f_i(x) - \frac{1}{n+1} F(x), 0 \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{supp}(g_i) &= \overline{\{x \mid f_i(x) > F(x)/(n+1)\}} \subset \{x \mid f_i(x) \geq F(x)/(n+1)\} \subset \\ &\subset \{x: f_i(x) \geq 0\} \subset \{x \mid f_i(x) > 0\} = U_i. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) \geq \sum_{i=1}^n \left( f_i(x) - \frac{1}{n+1} F(x) \right) = F(x) - \frac{n}{n+1} F(x) = \frac{F(x)}{n+1} > 0.$$

Чтобы построить требуемое разбиение единицы, положим  $\varphi_i(x) = g_i(x) / \left( \sum_{i=1}^n g_i(x) \right)$ .

Рассмотрим теперь случай счётного открытого покрытия  $U_0, U_1, U_2 \dots$ . На этот раз функции  $f_i: X \rightarrow [0, 2^{-i}]$  определим следующим образом:

$$f_i(x) = \min \{d(x, X \setminus U_i), 2^{-i}\}.$$

Тогда  $f_i(x) > 0$  при  $x \in U_i$  и  $f_i(x) = 0$  при  $x \notin U_i$ . Функцию  $F$  тоже определим по-другому:  $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} f_i(x)$ . Из того, что  $\{U_i\}$  — покрытие, следует, что  $F(x) > 0$  при всех  $x \in X$ . Непрерывность функции  $F(x)$  следует из того, что функция  $\sum_{i=0}^N 2^{-i} f_i(x)$  непрерывна и для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $N$  так, что  $\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} f_i(x) < \varepsilon$ , поскольку  $f_i(x) \leq 2^{-i}$ .

Положим  $g_i(x) = \max\left\{f_i(x) - \frac{1}{3}F(x), 0\right\}$ . Точно так же, как и для конечных покрытий, доказываем, что  $\text{supp}(g_i) \subset U_i$ .

Докажем, что семейство функций  $\{g_i\}$  локально конечно. Пусть  $x \in X$ . Из непрерывности функции  $F$  следует, что существует такая окрестность  $V(x)$  точки  $x$ , что для некоторого  $\varepsilon > 0$  неравенство  $F(y) > \varepsilon$  выполняется для всех  $y \in V(x)$ . Выберем  $i_0$  так, что  $2^{-i_0} < \varepsilon/3$ . Для любой точки  $y \in X$  выполняется неравенство  $f_i(y) \leq 2^{-i}$ . Поэтому если  $y \in V(x)$  и  $i \geq i_0$ , то

$$f_i(x) - \frac{1}{3}F(x) \leq 2^{-i} - \frac{\varepsilon}{3} \leq 2^{-i_0} - \frac{\varepsilon}{3} < 0,$$

а значит,  $g_i(y) = 0$ .

Докажем, наконец, что  $\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) > 0$  при всех  $x \in X$ , т. е. для любой точки  $x \in X$  найдётся такой номер  $i$ , что  $g_i(x) > 0$ . Из того, что  $f_j(x) > 0$  для некоторого  $j$  и  $f_n(x) \leq 2^{-n}$ , следует, что  $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) = f_{i_0}(x)$  для некоторого  $i_0$ , причём  $f_{i_0}(x) > 0$ . Из определения функции  $F$  видно, что

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} f_i(x) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} f_{i_0}(x) = 2f_{i_0}(x).$$

Поэтому

$$g_{i_0}(x) \geq f_{i_0}(x) - \frac{2f_{i_0}(x)}{3} = \frac{f_{i_0}(x)}{3} > 0.$$

Чтобы построить требуемое разбиение единицы, положим  $\varphi_i(x) = g_i(x) / \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)\right)$ . □

## 7.4. Паракомпактные пространства

Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  и  $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$  — открытые покрытия топологического пространства  $X$ . Будем говорить, что покрытие  $\mathcal{V}$  *вписано* в покрытие  $\mathcal{U}$ , если каждое множество  $V_\beta$  содержится в некотором множестве  $U_\alpha$ .

Покрытие  $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$  называют *локально конечным*, если у любой точки  $x \in X$  есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств  $V_\beta$ .

Топологическое пространство  $X$  называют *паракомпактным*, если оно хаусдорфово и для любого его открытого покрытия  $\mathcal{U}$  существует открытое локально конечное покрытие  $\mathcal{V}$ , вписанное в  $\mathcal{U}$ .

Важнейшее свойство паракомпактных пространств заключается в том, что *для любого открытого покрытия паракомпактного пространства существует подчинённое ему локально конечное разбиение единицы*. Это свойство паракомпактных пространств вытекает из теорем 7.9 и 7.10, которые имеют и самостоятельный интерес. Но сначала приведём пример, показывающий, что паракомпактные пространства образуют весьма широкий класс топологических пространств.

**Пример.** Любое подмножество  $X \subset \mathbb{R}^n$  (с индуцированной топологией) паракомпактно.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное открытое покрытие  $\{U_\alpha\}$  топологического пространства  $X$ . Каждому множеству  $U_\alpha$  соответствует такое открытое множество  $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , что  $U_\alpha = U'_\alpha \cap X$ .

Пусть  $X_k = \{x \in X \mid \|x\| < k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Множество  $X_k$  открыто в  $X$ , множество  $\bar{X}_k$  компактно,  $\bar{X}_k \subset X_{k+1}$  и  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ .

Рассмотрим компактное множество  $\bar{X}_k \setminus X_{k-1}$  и для каждой точки  $z \in \bar{X}_k \setminus X_{k-1}$  выберем такую открытую в  $\mathbb{R}^n$  окрестность  $V'_z$ , что  $V'_z \subset U'_\alpha$  для некоторого  $\alpha$ , а кроме того,  $V'_z \cap X = V_z \subset X_{k+1}$  и  $V_z \cap X_{k-2} = \emptyset$ . Открытые множества  $V'_z$  покрывают компактное множество  $\bar{X}_k \setminus X_{k-1}$ , поэтому существует конечный набор множеств  $V_z$ , покрывающий  $\bar{X}_k \setminus X_{k-1}$ . Объединение по  $k$  всех таких наборов — локально конечное покрытие, вписанное в покрытие  $\{U_\alpha\}$ .  $\square$

**Теорема 7.9 (Дьёдонне [51]).** *Любое паракомпактное пространство нормально.*

**Доказательство.** Сначала докажем, что паракомпактное пространство  $X$  *регулярно*, т.е. любая открытая окрестность любой точки  $x \in X$  содержит замыкание некоторой открытой окрестности точки  $x$ . Пусть  $U$  — открытая окрестность точки  $x \in X$ . Из хаусдорфовости пространства  $X$  следует, что для любой точки  $y \in X \setminus U$  существуют непересекающиеся открытые множества  $U_y \ni y$  и  $W_y \ni x$ . Множества  $U_y$  (для всех  $y \in X \setminus U$ ) вместе с множеством  $U$  образуют открытое покрытие  $\mathcal{U}$  паракомпактного пространства  $X$ , поэтому существует локально конечное открытое покрытие  $\mathcal{V}$ , вписанное в  $\mathcal{U}$ . Из локальной конечности покрытия  $\mathcal{V}$  следует, что у точки  $x$  есть окрестность  $W$ , пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия  $\mathcal{V}$ . Пусть  $V_1, \dots, V_n$  — те из них,

которые не содержатся в  $U$ . Каждое множество  $V_i$  содержится в  $U_{y_i}$ , где  $y_i \in X \setminus U$ . Положим

$$Z = W \cap W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}, \quad C = \bar{Z}.$$

Множество  $Z$  открыто и  $x \in Z$ , поскольку  $x \in W$  и  $x \in W_y$  для любой точки  $y \in X \setminus U$ . Остаётся лишь убедиться, что  $C \subset U$ . Рассмотрим для этого открытое множество  $T$ , которое является объединением всех элементов покрытия  $\mathcal{V}$ , не содержащихся в  $U$ . По построению

$$T \cap W \subset V_1 \cup \dots \cup V_n \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}.$$

Ясно также, что  $Z \subset W$ , поэтому

$$Z \cap T \subset W \cap W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n} \cap (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}).$$

По построению  $W_y \cap U_y = \emptyset$ , поэтому

$$W \cap W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n} \cap (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}) = \emptyset,$$

а значит,  $Z \cap T = \emptyset$ , т. е.  $Z \subset X \setminus T$ . Множество  $X \setminus T$  замкнуто, поэтому  $C = \bar{Z} \subset X \setminus T$ .

Любая точка множества  $X \setminus U$  принадлежит некоторому элементу покрытия  $\mathcal{V}$ , не содержащемуся в  $U$ . Поэтому  $X \setminus U \subset T$ , т. е.  $X \setminus T \subset U$  (оба эти включения эквивалентны тому, что  $X = T \cup U$ ).

Перейдём теперь непосредственно к доказательству нормальности пространства  $X$ . Пусть  $A$  и  $B$  — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства  $X$ . Любая точка  $a \in A$  содержится в открытом множестве  $X \setminus B$ , поэтому у точки  $a$  есть открытая окрестность  $Z_a$ , для которой  $C_a = \bar{Z}_a \subset X \setminus B$ . Множества  $Z_a$  (для всех  $a \in A$ ) вместе с множеством  $X \setminus A$  образуют открытое покрытие  $\mathcal{U}$  паракомпактного пространства  $X$ , поэтому существует локально конечное открытое покрытие  $\mathcal{V}$ , вписанное в  $\mathcal{U}$ . Пусть  $U$  — объединение всех элементов покрытия  $\mathcal{V}$ , не содержащихся в  $X \setminus A$ . Тогда  $U$  — открытое множество, содержащее  $A$ . Остаётся построить открытое множество  $V$ , содержащее  $B$  и не пересекающееся с  $U$ . Множество  $V$  мы построим как объединение некоторых множеств  $V_b$  для всех  $b \in B$ . А именно, для точки  $b \in B$  выберем открытую окрестность  $W_b \ni b$ , с которой пересекается лишь конечное число элементов покрытия  $\mathcal{V}$ . Пусть  $Y_1, \dots, Y_n$  — те из них, которые не содержатся в  $X \setminus A$ . По построению  $Y_i \subset Z_{a_i}$ ,  $a_i \in A$ . Положим

$$V_b = W_b \cap (X \setminus C_{a_1}) \cap \dots \cap (X \setminus C_{a_n}).$$

Множество  $V_b$  открыто и  $b \in V_b$ , поскольку  $B \subset X \setminus C_a$ . Кроме того,

$$U \cap W_b \subset Y_1 \cap \dots \cap Y_n \subset Z_{a_1} \cap \dots \cap Z_{a_n} \subset C_{a_1} \cap \dots \cap C_{a_n},$$

поэтому  $V_b \cap U = \emptyset$ . Таким образом, если  $V = \bigcup_{b \in B} V_b$ , то  $B \subset V$  и  $V \cap U = \emptyset$ .  $\square$

*З а м е ч а н и е.* Читатель, вероятно, обратил внимание, что мы дважды повторили весьма похожие рассуждения. Вместо этого можно сформулировать одно общее утверждение и, доказав его, дважды применить в разных ситуациях. Такое доказательство теоремы 7.9 приведено в [4] (гл. IX, § 4.4, предл. 4).

*Т е о р е м а 7.10.* Для любого открытого локально конечного покрытия  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  нормального пространства  $X$  существует разбиение единицы, подчинённое этому покрытию.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Сначала построим такое открытое покрытие  $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  пространства  $X$ , что  $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$  для всех  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Это построение использует трансфинитную индукцию, поэтому напомним, что такое *трансфинитная индукция* (подробности, в частности — доказательство теоремы Цермело, можно найти в [5]).

Множество  $\mathcal{A}$  называют *вполне упорядоченным*, если оно упорядочено и любое его непустое подмножество имеет «первый» элемент, предшествующий всем остальным его элементам. Согласно *теореме Цермело* любое множество  $\mathcal{A}$  можно вполне упорядочить. Предположим, что множество  $\mathcal{A}$  вполне упорядочено и свойство  $P$  таково, что если все элементы, предшествующие элементу  $\alpha \in \mathcal{A}$ , обладают свойством  $P$ , то и элемент  $\alpha$  обладает свойством  $P$  (в частности, первый элемент множества  $\mathcal{A}$  обладает свойством  $P$ ). Тогда все элементы множества  $\mathcal{A}$  обладают свойством  $P$ . Действительно, если множество элементов  $\mathcal{A}$ , не обладающих свойством  $P$ , не пусто, то в нём есть первый элемент  $\alpha_0$ . Все элементы, предшествующие элементу  $\alpha_0$ , обладают свойством  $P$ , поэтому элемент  $\alpha_0$  тоже обладает свойством  $P$ . Получено противоречие.

Предположим, что для всех  $\alpha < \alpha_0$  существуют такие открытые множества  $V_\alpha$ , что  $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$  и для всех  $\alpha_1 < \alpha_0$  множества  $V_\alpha$ ,  $\alpha \leq \alpha_1$ , вместе с множествами  $U_\alpha$ ,  $\alpha > \alpha_1$ , образуют покрытие пространства  $X$ . Требуется построить открытое множество  $V_{\alpha_0}$  так, что  $\bar{V}_{\alpha_0} \subset U_{\alpha_0}$  и множества  $V_\alpha$ ,  $\alpha \leq \alpha_0$ , вместе с множествами  $U_\alpha$ ,  $\alpha > \alpha_0$ , образуют открытое покрытие пространства  $X$ .

Прежде всего покажем, что множества  $V_\alpha$ ,  $\alpha < \alpha_0$ , вместе с множествами  $U_\alpha$ ,  $\alpha \geq \alpha_0$ , образуют покрытие пространства  $X$ . Для этого мы воспользуемся локальной конечностью покрытия  $\mathcal{U}$ . Любая точка  $x \in X$  принадлежит лишь конечному числу множеств  $U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_n}$ , поэтому среди элементов  $\beta_1, \dots, \beta_n$  можно выбрать «последний». Пусть для определённости  $\beta_n > \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Если  $\beta_n \geq \alpha_0$ , то  $x \in U_\alpha$ , где  $\alpha = \beta_n \geq \alpha_0$ . Если же  $\beta_n < \alpha_0$ , то согласно предположению множе-

ства  $V_\alpha$ ,  $\alpha \leq \beta_n$ , вместе с множествами  $U_\alpha$ ,  $\alpha > \beta_n$ , образуют покрытие множества  $X$ . Но  $x \notin U_\alpha$  при  $\alpha > \beta_n$ , поэтому  $x \in \bigcup_{\alpha \leq \beta_n} V_\alpha \subset \bigcup_{\alpha < \alpha_0} V_\alpha$ .

Итак, открытое множество  $W = \left( \bigcup_{\alpha < \alpha_0} V_\alpha \right) \cup \left( \bigcup_{\alpha > \alpha_0} U_\alpha \right)$  вместе с множеством  $U_{\alpha_0}$  покрывает всё пространство  $X$ , поэтому  $X \setminus U_{\alpha_0} \subset W$ . Замкнутые множества  $X \setminus U_{\alpha_0}$  и  $X \setminus W$  не пересекаются, поэтому из нормальности пространства  $X$  следует, что существуют непересекающиеся открытые множества  $Z \supset X \setminus U_{\alpha_0}$  и  $T \supset X \setminus W$ . Ясно, что при этом

$$X \setminus U_{\alpha_0} \subset Z \subset \bar{Z} \subset X \setminus T \subset W.$$

Положим  $V_{\alpha_0} = X \setminus \bar{Z}$ . Множество  $V_{\alpha_0}$  обладает всеми требуемыми свойствами. Действительно,  $\bar{V}_{\alpha_0} = X \setminus Z \subset U_{\alpha_0}$  и  $V_{\alpha_0} \cup W = X$ , поскольку  $\bar{Z} \subset W$ .

Перейдём теперь непосредственно к построению единицы, подчинённого покрытию  $\mathcal{U}$ . Вместо покрытия  $\mathcal{U}$  мы будем рассматривать построенное выше покрытие  $\mathcal{V}$ , для которого  $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ . Ясно, что покрытие  $\mathcal{V}$  тоже локально конечно. Из нормальности пространства  $X$  следует, что существует такое открытое множество  $W_\alpha$ , что  $\bar{V}_\alpha \subset W_\alpha \subset \bar{W}_\alpha \subset U_\alpha$ . По теореме Титце существует непрерывное отображение  $g_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ , для которого  $g_\alpha(X \setminus W_\alpha) = 0$ , т. е.  $\text{supp } g_\alpha \subset \bar{W}_\alpha \subset U_\alpha$  и  $g_\alpha(\bar{V}_\alpha) = 1$ . Множества  $V_\alpha \subset \bar{V}_\alpha$  покрывают  $X$ , поэтому  $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} g_\alpha(x) > 0$  для любой точки  $x \in X$ .

Из локальной конечности покрытия  $\mathcal{V}$  следует, что функция  $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} g_\alpha(x)$  непрерывна. Чтобы построить требуемое разбиение единицы, положим  $\varphi_\alpha(x) = g_\alpha(x) / \left( \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} g_\alpha(x) \right)$ .  $\square$

*Следствие теорем 7.9 и 7.10. Для любого открытого покрытия паракомпактного пространства  $X$  существует подчинённое ему локально конечное разбиение единицы.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  — открытое покрытие паракомпактного пространства  $X$ ,  $\mathcal{V} = \{V_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$  — локально конечное покрытие  $X$ , вписанное в  $\mathcal{U}$ . Тогда существует такое отображение  $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , что  $V_\beta \subset U_{A(\beta)}$ . Согласно теореме 7.9 пространство  $X$  нормально, поэтому согласно теореме 7.10 существует разбиение единицы  $\{\varphi_\alpha\}$ , подчинённое покрытию  $\mathcal{U}$ . Для каждого  $\alpha \in \mathcal{A}$  положим  $\psi_\alpha = \sum_{A(\beta)=\alpha} \varphi_\beta$ . Эта сумма имеет смысл и непрерывна, поскольку  $\text{supp } \varphi_\beta \subset V_\beta$  и покрытие  $\mathcal{V}$  локально конечно. Пусть  $C_\alpha = \bigcup_{A(\beta)=\alpha} \text{supp } \varphi_\beta$ .

Множество  $C_\alpha$  является объединением локально конечного семейства

замкнутых множеств, поэтому оно замкнуто. Ясно также, что  $C_\alpha \subset U_\alpha$  и  $\psi_\alpha(x) = 0$  при  $x \notin C_\alpha$ . Поэтому  $\text{supp } \psi_\alpha \subset C_\alpha \subset U_\alpha$ .

Легко проверить, что семейство множеств  $\{C_\alpha\}$  локально конечно. Действительно, для любой точки  $x \in X$  существует окрестность  $W$ , пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия  $\mathcal{V}$ ; обозначим их  $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_k}$ . Окрестность  $W$  не пересекается с  $C_\alpha$ , если  $\alpha \notin \{A(\beta_1), \dots, A(\beta_k)\}$ . Таким образом, семейства множеств  $\{\text{supp } \varphi_\beta\}$  и  $\{\text{supp } \psi_\alpha\}$  локально конечны, поэтому

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left( \sum_{A(\beta)=\alpha} \varphi_\beta(x) \right) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \varphi_\beta(x) = 1. \quad \square$$

Ранее было доказано (см. с. 105), что для любого не более чем счётного покрытия метризуемого пространства существует подчинённое ему разбиение единицы. Докажем теперь следующее несколько более сильное утверждение.

**Теорема 7.11** (Стоун [124]). *Метризуемое пространство паракомпактно.*

**Доказательство** (см. [115]). Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  — открытое покрытие метрического пространства  $X$  с метрикой  $d$ . Мы снова воспользуемся тем, что множество  $\mathcal{A}$  можно вполне упорядочить. Для  $x \in X$  и  $r > 0$  рассмотрим открытый шар  $D_{x,r} = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ . Для  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $n \in \mathbb{N}$  определим  $V_{\alpha,n}$  как объединение множеств  $D_{x,2^{-n}}$  для всех точек  $x \in X$ , удовлетворяющих следующим трём условиям:

- 1)  $D_{x,3 \cdot 2^{-n}} \subset U_\alpha$ ;
- 2)  $x \notin U_\beta$  при  $\beta < \alpha$ ;
- 3)  $x \notin V_{\beta,j}$  при  $j < n$ .

Множества  $V_{\alpha,n}$  определяются сначала для  $n = 1$  (в этом случае рассматриваются только первые два условия), затем для  $n = 2$ , и т. д.

Первым делом докажем, что множества  $V_{\alpha,n}$  покрывают всё пространство  $X$ . Для произвольной точки  $x \in X$  рассмотрим множество  $\mathcal{B} = \{\beta \in \mathcal{A} \mid x \in U_\beta\}$ . Пусть  $\alpha$  — первый элемент множества  $\mathcal{B}$ . Число  $n$  выберем так, что  $D_{x,3 \cdot 2^{-n}} \subset U_\alpha$ . Если  $x \notin V_{\beta,j}$  при  $j < n$ , то для  $x$  выполняются свойства 1–3, поэтому  $x \in V_{\alpha,n}$ . Следовательно, точка  $x$  принадлежит некоторому множеству  $V_{\beta,j}$ , где  $j \leq n$ .

Остаётся доказать, что покрытие  $\{V_{\alpha,n}\}$  локально конечно. Для точки  $x \in X$  рассмотрим множество

$$\mathcal{B} = \{\beta \in \mathcal{A} \mid x \in V_{\beta,n} \text{ для некоторого } n\}.$$

Пусть  $\alpha$  — первый элемент множества  $\mathcal{B}$  и  $x \in V_{\alpha,n}$ . Выберем  $j \in \mathbb{N}$  так, что  $D_{x,2^{-j}} \subset V_{\alpha,n}$ . Покажем, что открытое множество  $D_{x,2^{-j-n}}$  пересе-

кается лишь с конечным числом множеств  $V_{\beta,i}$ . Для этого достаточно доказать, что это множество не пересекает  $V_{\beta,i}$  при  $i \geq n + j$  и пересекает не более одного множества  $V_{\beta,i}$  при  $i < n + j$ .

Предположим сначала, что  $i \geq n + j > n$ . Множество  $V_{\beta,i}$  состоит из открытых шаров радиуса  $2^{-i}$ , центры которых удовлетворяют условиям 1–3. В частности, из свойства (3) следует, что если  $y$  — центр такого шара, то  $y \notin V_{\alpha,n}$ . Но  $D_{x,2^{-i}} \subset V_{\alpha,n}$ , поэтому  $d(x, y) \geq 2^{-i}$ . С другой стороны,  $n + j \geq j + 1$  и  $i \geq j + 1$ , поэтому  $2^{-j-n} + 2^{-i} \leq 2^{-i}$ , а значит,  $D_{x,2^{-j-n}} \cap D_{y,2^{-i}} = \emptyset$ .

Предположим теперь, что  $i < n + j$ ,  $p \in D_{x,2^{-i-n}} \cap V_{\beta,i}$  и  $q \in D_{x,2^{-j-n}} \cap V_{\gamma,i}$ , причём  $\beta \neq \gamma$ . Пусть для определённости  $\beta < \gamma$ . Чтобы прийти к противоречию, достаточно доказать, что если  $p \in V_{\beta,i}$  и  $q \in V_{\gamma,i}$ , где  $\beta < \gamma$ , то  $d(p, q) \geq 2^{-j-n+1}$ . Пусть  $y$  и  $z$  — центры шаров  $D_{y,2^{-i}}$  и  $D_{z,2^{-i}}$ , для которых  $p \in D_{y,2^{-i}} \subset V_{\beta,i}$  и  $q \in D_{z,2^{-i}} \subset V_{\gamma,i}$ . Согласно условию 1  $D_{y,3 \cdot 2^{-i}} \subset U_{\beta}$ , а согласно условию 2  $z \notin U_{\beta}$ . Поэтому  $d(y, z) \geq 3 \cdot 2^{-i}$ , а значит,

$$d(p, q) \geq d(y, z) - d(p, y) - d(q, z) \geq 3 \cdot 2^{-i} - 2^{-i} - 2^{-i} = 2^{-i} \geq 2^{-n-j+1}. \quad \square$$

## § 8. Симплициальные комплексы

Евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  является наиболее важным примером топологического пространства. Все основные классы топологических пространств (симплициальные комплексы,  $CW$ -комплексы, многообразия) строятся посредством склейки евклидовых симплексов или шаров. По чисто техническим причинам в гомотопической топологии  $CW$ -комплексы более удобны, чем симплициальные комплексы. Дело в том, что симплициальные комплексы несут слишком много геометрической информации, явно излишней для нужд топологии. Тем не менее, симплициальные комплексы представляют собой достаточно интересный и достаточно обширный класс топологических пространств. В геометрической топологии именно симплициальные комплексы наиболее удобны (по крайней мере, наиболее часто используются).

*Симплициальным комплексом*  $K$  называют набор симплексов в  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- любая грань симплекса из  $K$  принадлежит  $K$ ;
- пересечение любых двух симплексов из  $K$  является гранью каждого из них (для удобства мы полагаем, что пустое множество является гранью размерности  $-1$  любого симплекса);



— любая точка, принадлежащая одному из симплексов  $K$ , имеет окрестность, которая пересекается с конечным числом симплексов из  $K$ .

*Размерностью* комплекса  $K$  называют максимальную размерность входящих в него симплексов.

Симплициальный комплекс  $K$  называют *конечным*, если он состоит из конечного числа симплексов. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном конечные симплициальные комплексы.

Каждому симплициальному комплексу  $K$  можно сопоставить топологическое пространство  $|K|$  — объединение всех симплексов, входящих в  $K$ ; топология при этом индуцируется из  $\mathbb{R}^n$ .

На с. 93 дано определение барицентрического подразделения симплекса. Если каждый симплекс в  $K$  разбит таким образом, то мы получаем *барицентрическое подразделение* симплициального комплекса  $K$ .

З а д а ч а 8.1. Докажите, что симплексы барицентрического подразделения симплекса  $\Delta^n$  находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными наборами вершин симплекса  $\Delta^n$ .

## 8.1. Евклидовы клеточные комплексы

*Выпуклым многогранником* размерности  $k$  называют подмножество в  $\mathbb{R}^k$ , которое задано системой линейных неравенств  $Ax \leq b$  и, кроме того, содержит некоторый  $k$ -мерный шар и содержится в некотором  $k$ -мерном шаре.

*Евклидовой клеткой* размерности  $k$  называют выпуклый многогранник размерности  $k$ , расположенный в некотором  $k$ -мерном (аффинном) подпространстве в  $\mathbb{R}^n$ , где  $n \geq k$ .

*Евклидовым клеточным комплексом*  $K$  называют набор евклидовых клеток в  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- любая грань евклидовой клетки из  $K$  принадлежит  $K$ ;
- пересечение любых двух евклидовых клеток из  $K$  является гранью каждой из них;
- любая точка множества  $|K|$  имеет окрестность, которая пересекается с конечным числом евклидовых клеток из  $K$  (здесь  $|K|$  снова обозначает объединение всех клеток, входящих в  $K$ ).

Любой симплициальный комплекс является евклидовым клеточным комплексом.

Евклидов клеточный комплекс  $K'$  называют *подразделением* евклидова клеточного комплекса  $K$ , если  $|K| = |K'|$  и любая клетка из  $K'$  содержится в некоторой клетке из  $K$ .

Объединение всех клеток размерности не более  $n$  евклидова клеточного комплекса  $K$  называют  *$n$ -мерным остовом*; мы будем обозначать

его  $K^n$ . Если размерность  $K$  не меньше  $n$ , то его  $n$ -мерный остов является  $n$ -мерным евклидовым клеточным комплексом.

**Теорема 8.1.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — евклидовы клеточные комплексы, причём  $|K_1| = |K_2|$ . Тогда  $K_1$  и  $K_2$  обладают общим подразделением  $L$ .

**Доказательство.** Ясно, что пересечение двух евклидовых клеток снова будет евклидовой клеткой. Пусть  $L$  — множество всех клеток вида  $c_1 \cap c_2$ , где  $c_1$  — клетка из  $K_1$ ,  $c_2$  — клетка из  $K_2$ . Тогда  $L$  — евклидово клеточное разбиение,  $|L| = |K_1| = |K_2|$  и любая клетка  $c_1 \cap c_2$  из  $L$  принадлежит клетке  $c_1$  из  $K_1$  и клетке  $c_2$  из  $K_2$ .  $\square$

Следующее утверждение показывает, что с топологической точки зрения евклидовы клеточные комплексы не дают ничего нового по сравнению с симплициальными комплексами.

**Теорема 8.2.** Любой евклидов клеточный комплекс  $K$  обладает подразделением, которое является симплициальным комплексом.

**Доказательство.** Применим индукцию по  $n = \dim K$ . Евклидовы клетки размерности  $\leq 1$  являются симплексами, поэтому при  $n \leq 1$  утверждение очевидно. Предположим, что для  $(m-1)$ -мерного остова комплекса  $K$  уже построено подразделение  $L$ , которое является симплициальным комплексом. Выберем внутри каждой  $m$ -мерной клетки  $c^m$  комплекса  $K$  некоторую точку  $M$  и рассмотрим симплексы, одной из вершин которых служит точка  $M$ , а остальными вершинами служат вершины одного из симплексов, образующих край клетки  $c^m$ . В результате получим подразделение комплекса  $K$ , являющееся симплициальным подразделением.  $\square$

**Замечание.** В качестве точки  $M$  можно выбирать не внутреннюю точку клетки  $c^m$ , а вершину клетки  $c^m$ . Тогда построенное симплициальное разбиение будет иметь те же самые вершины, что и евклидов клеточный комплекс.

## 8.2. Симплициальные отображения

Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — симплициальные комплексы. Отображение  $f: |K_1| \rightarrow |K_2|$  называют *симплициальным*, если образ любого симплекса  $\Delta_1$  из  $K_1$  является симплексом  $\Delta_2$  из  $K_2$  и при этом ограничение отображения  $f$  на  $\Delta_1$  линейно в аффинном смысле, т. е.

$$f\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i f(v_i), \quad (1)$$

где  $v_i$  — вершины симплекса  $\Delta_1$ ,  $\sum \lambda_i = 1$  и  $\lambda_i \geq 0$ . По условию вершины комплекса  $K_1$  (т. е. 0-мерные симплексы) переходят в вершины комплекса  $K_2$ . Поэтому отображение  $f$  определяет отображение 0-мерных остовов  $f^0: K_1^0 \rightarrow K_2^0$ . Формула (1) показывает, что отображение  $f$  однозначно восстанавливается по отображению  $f^0$ . Отображение  $f^0$  обладает следующим свойством: если  $v_0, \dots, v_n$  — вершины симплекса из  $K_1$ , то  $f^0(v_0), \dots, f^0(v_n)$  — вершины симплекса из  $K_2$  (некоторые из точек  $f^0(v_0), \dots, f^0(v_n)$  могут совпадать). Отображения 0-мерных остовов, обладающие этим свойством, будем называть *допустимыми*. Каждому допустимому отображению 0-мерных остовов  $K_1^0 \rightarrow K_2^0$  соответствует симплициальное отображение  $|K_1| \rightarrow |K_2|$ . Для симплициальных отображений мы обычно будем использовать обозначение  $K_1 \rightarrow K_2$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что любое симплициальное отображение непрерывно.

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите, что образ  $k$ -мерного остова при симплициальном отображении содержится в  $k$ -мерном остове.

**Теорема 8.3.** Пусть  $f: K \rightarrow K$  — симплициальное отображение,  $\Delta'$  — некоторый симплекс барицентрического подразделения комплекса  $K$ . Тогда если  $f(\Delta') = \Delta'$ , то ограничение  $f$  на  $\Delta'$  — тождественное отображение.

**Доказательство.** Для симплекса  $\Delta'$  однозначно определён симплекс  $\Delta$  в  $K$ , который содержит  $\Delta'$  и имеет ту же самую размерность. При этом симплекс  $\Delta'$  однозначно задаёт нумерацию вершин  $\Delta$ , для которой  $v_0$  — общая вершина  $\Delta$  и  $\Delta'$ ,  $[v_0, v_1]$  — общее ребро (точнее говоря, ребро  $\Delta$ , содержащее ребро  $\Delta'$ ),  $[v_0, v_1, v_2]$  — общая грань и т. д. Наоборот, нумерация вершин  $\Delta$  однозначно задаёт соответствующий симплекс барицентрического подразделения.

Из равенства  $f(\Delta') = \Delta'$  следует, что отображение  $f$  переставляет вершины симплекса  $\Delta$ . Но если эта перестановка не тождественна, то получается другая нумерация вершин  $\Delta$ , которой соответствует другой симплекс барицентрического подразделения, т. е.  $f(\Delta') \neq \Delta'$ . Поэтому ограничение отображения  $f$  на  $\Delta \supset \Delta'$  тождественно.  $\square$

### 8.3. Абстрактные симплициальные комплексы

С точки зрения топологии интерес представляет не симплициальный комплекс  $K$ , а топологическое пространство  $|K|$ . Симплициальный комплекс задаёт не только само пространство  $|K|$ , но и его вложение в  $\mathbb{R}^n$ , а это уже излишняя информация, часто затрудняющая работу с симплициальными комплексами. Чтобы избавиться от конкретного вложения в  $\mathbb{R}^n$ , определим *абстрактный симплициальный комплекс*  $K$

как набор вершин  $\{v_\alpha\}$  и набор подмножеств этих вершин, называемых симплексами (набор из  $k+1$  вершин мы будем называть  $k$ -мерным симплексом); при этом любое подмножество вершин симплекса из  $K$  должно быть симплексом из  $K$ .

Каждому абстрактному симплицальному комплексу  $K$  можно сопоставить топологическое пространство  $|K|$  следующим образом. Каждому симплексу  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k+1}}$  сопоставим топологическое пространство, являющееся  $k$ -мерным симплексом. В дизъюнктном объединении этих топологических пространств будем считать эквивалентными соответственные точки симплекса  $v_1, \dots, v_p$  и грани  $v_1, \dots, v_p$  симплекса  $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_q$ . В полученном фактормножестве  $|K|$  топология задаётся следующим образом: множество  $U$  открыто в  $|K|$  тогда и только тогда, когда пересечение  $U$  с каждым симплексом открыто в топологии симплекса.

Пусть для абстрактного симплицального комплекса  $K$  задано взаимно однозначное отображение  $\sigma: K^0 \rightarrow L^0$ , где  $L^0$  —  $0$ -мерный остов симплицального комплекса  $L$  в  $\mathbb{R}^n$ , обладающее следующим свойством: набор вершин  $v_1, \dots, v_k$  является симплексом в  $K$  тогда и только тогда, когда в  $L$  есть симплекс с вершинами  $\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_k)$ . Такое отображение  $\sigma$  можно естественным образом продолжить до гомеоморфизма  $|K| \rightarrow |L|$ . Этот гомеоморфизм называют *реализацией* симплицального комплекса  $K$ .

**Теорема 8.4.** *Любой конечный  $n$ -мерный абстрактный симплицальный комплекс имеет реализацию в евклидовом пространстве размерности  $2n+1$ .*

**Доказательство.** Пусть  $K$  — абстрактный симплицальный комплекс с вершинами  $v_1, \dots, v_k$ . Выберем попарно различные числа  $t_1, \dots, t_k$  и рассмотрим в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  точки  $\sigma(v_i) = (t_i, t_i^2, t_i^3, \dots, t_i^{2n+1})$ , где  $i = 1, \dots, k$ . Каждому симплексу из  $K$  с вершинами  $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$  сопоставим геометрический симплекс с вершинами  $\sigma(v_{i_1}), \dots, \sigma(v_{i_m})$ . Нужно лишь проверить, что геометрические симплексы, не имеющие общих вершин, не пересекаются.

По условию размерности рассматриваемых геометрических симплексов не превосходят  $n$ , т. е. количества их вершин не превосходят  $n+1$ . Количество вершин двух таких симплексов не превосходит  $2n+2$ . Поэтому достаточно проверить, что если на кривой  $(t, t^2, t^3, \dots, t^{2n+1})$  задано не более  $2n+2$  различных точек, то они являются вершинами (невырожденного) симплекса. Если задано ровно  $2n+2$  точки, то объём рассматриваемого симплекса равен

$$\pm \frac{1}{(2n+1)!} \begin{vmatrix} 1 & \tau_1 & \dots & \tau_1^{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \tau_{2n+2} & \dots & \tau_{2n+2}^{2n+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Набор из меньшего количества точек можно произвольным образом дополнить до набора из  $2n + 2$  точек.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Про точки  $x_1, \dots, x_k$  в пространстве  $\mathbb{R}^N$  говорят, что они находятся *в общем положении*, если любые  $m + 1$  из этих точек не лежат в одном  $(m - 1)$ -мерном аффинном подпространстве при  $m \leq N$ . Чтобы построить реализацию  $n$ -мерного абстрактного симплициального комплекса (с вершинами  $v_1, \dots, v_k$ ) в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , достаточно указать точки  $x_1, \dots, x_k$  в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  в общем положении. Помимо той явной конструкции точек в общем положении, которая приведена в доказательстве теоремы 8.4, можно использовать, например, следующую конструкцию. Сначала возьмём две различные точки  $x_1$  и  $x_2$  в  $\mathbb{R}^N$ . Затем возьмём точку  $x_3$ , не лежащую на прямой  $x_1x_2$ . Затем возьмём точку  $x_4$ , не лежащую в плоскости  $x_1x_2x_3$ , и т. д. Так мы построим точки  $x_1, \dots, x_{N+1}$ . После этого проведём гиперплоскости через все наборы  $N$  построенных точек и возьмём точку  $x_{N+2}$ , не лежащую ни на одной из этих гиперплоскостей. В дальнейшем снова проводим гиперплоскости через все наборы  $N$  точек и выбираем точку, не лежащую ни на одной из этих гиперплоскостей.

Симплициальный подкомплекс  $L \subset K$  называют *полным*, если он обладает следующим свойством: на любой набор вершин комплекса  $L$ , на который натянут симплекс комплекса  $K$ , натянут также и симплекс комплекса  $L$ .

**З а д а ч а 8.2.** Докажите, что симплициальный подкомплекс  $L \subset K$  полный тогда и только тогда, когда он обладает следующим свойством: если граница симплекса комплекса  $K$  лежит в  $L$ , то и сам он лежит в  $L$ .

**З а д а ч а 8.3.** Пусть  $L \subset K$  — симплициальный подкомплекс,  $L'$  и  $K'$  — барицентрические подразделения  $L$  и  $K$ . Докажите, что подкомплекс  $L' \subset K'$  полный.

## 8.4. Симплициальные аппроксимации

Симплициальные отображения устроены гораздо проще, чем непрерывные отображения. Например, для любых двух симплициальных комплексов  $K$  и  $L$  имеется лишь конечное число симплициальных отображений  $K \rightarrow L$ . Тем не менее, любое непрерывное отображение можно приблизить симплициальным отображением. Но при этом, возможно, от комплексов  $K$  и  $L$  придётся перейти к их подразделениям. Для гомотопической топологии наиболее важно то, что любое непрерывное отображение симплициальных комплексов гомотопно некоторому симплициальному отображению. Это утверждение существенно облегчает изучение гомотопических классов отображений, но его доказательство требует определённых усилий.

Пусть  $K$  и  $L$  — симплициальные комплексы,  $f: |K| \rightarrow |L|$  — непрерывное отображение. Для каждой точки  $x \in |K|$  рассмотрим точку  $f(x) \in |L|$ . Точке  $f(x)$  соответствует ровно один симплекс из  $L$ , внутренней точкой которого она является. Будем говорить, что симплициальное отображение  $\varphi: K \rightarrow L$  является *симплициальной аппроксимацией* отображения  $f$ , если для всех  $x \in |K|$  точка  $\varphi(x)$  принадлежит симплексу, соответствующему точке  $f(x)$ .

**Теорема 8.5.** *Симплициальная аппроксимация  $\varphi$  отображения  $f$  гомотопна  $f$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f_t(x)$  — точка, делящая в отношении  $t: (1-t)$  отрезок с концами  $\varphi(x)$  и  $f(x)$ . Тогда  $f_t$  — гомотопия, связывающая отображения  $f_0 = \varphi$  и  $f_1 = f$ .  $\square$

Для работы с симплициальными аппроксимациями более удобно другое определение симплициальной аппроксимации, использующее понятие звезды. Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $\Delta$  — симплекс из  $K$ . *Звездой* симплекса  $\Delta$  называют объединение внутренностей всех симплексов из  $K$ , содержащих симплекс  $\Delta$ . *Звездой* точки  $x \in |K|$  называют звезду того симплекса из  $K$ , внутренней точкой которого является точка  $x$ . Звезду симплекса  $\Delta$  обозначают  $\text{st } \Delta$ , а звезду точки  $x$  обозначают  $\text{st } x$ .

**Теорема 8.6.** *Симплициальное отображение  $\varphi: K \rightarrow L$  является симплициальной аппроксимацией непрерывного отображения  $f: |K| \rightarrow |L|$  тогда и только тогда, когда  $f(\text{st } v) \subset \text{st } \varphi(v)$  для любой вершины  $v$  комплекса  $K$ .*

**Доказательство.** Предположим сначала, что  $\varphi$  — симплициальная аппроксимация отображения  $f$  и  $v$  — вершина комплекса  $K$ . Пусть  $x \in \text{st } v$ . Рассмотрим симплекс  $\Delta_K$  с вершиной  $v$ , внутри которого лежит точка  $x$ , и симплекс  $\Delta_L$ , внутри которого лежит точка  $f(x)$ . С одной стороны, точка  $\varphi(x)$  лежит внутри симплекса  $\varphi(\Delta_K)$  с вершиной  $\varphi(v)$ , а с другой стороны, точка  $\varphi(x)$  принадлежит симплексу  $\Delta_L$ . Поэтому  $\Delta_L \supset \varphi(\Delta_K) \ni \varphi(v)$ , а значит,  $f(x) \in \text{int } \Delta_L \subset \text{st } \varphi(v)$ .

Предположим теперь, что для любой вершины  $v$  комплекса  $K$  выполняется условие  $f(\text{st } v) \subset \text{st } \varphi(v)$ . Пусть  $x \in |K|$  и  $v_0, \dots, v_n$  — вершины симплекса  $\Delta$  из  $K$ , внутри которого лежит точка  $x$ . Тогда

$$f(x) \in f\left(\bigcap_{i=0}^n \text{st } v_i\right) \subset \bigcap_{i=0}^n f(\text{st } v_i) \subset \bigcap_{i=0}^n \text{st } \varphi(v_i) = \text{int } \varphi(\Delta).$$

Поэтому  $\varphi(\Delta)$  — это как раз тот симплекс, внутри которого лежит точка  $f(x)$ . Остаётся заметить, что  $\varphi(x) \in \varphi(\Delta)$ , поскольку  $x \in \Delta$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\varphi: K \rightarrow L$  и  $\psi: L \rightarrow M$  — симплициальные аппроксимации непрерывных отображений  $f: |K| \rightarrow |L|$  и  $g: |L| \rightarrow |M|$ . Тогда  $\psi\varphi$  — симплициальная аппроксимация отображения  $gf$ .

Пусть  $K$  — конечный симплициальный комплекс,  $K^{(n)}$  — его  $n$ -е ба-рицентрическое подразделение. Отметим, что при  $n \rightarrow \infty$  максимальный диаметр симплекса из  $K^{(n)}$  стремится к нулю (см. с. 93).

**Теорема 8.7** (о симплициальной аппроксимации). а) Пусть  $K$  и  $L$  — симплициальные комплексы, причём комплекс  $K$  конечен,  $f: |K| \rightarrow |L|$  — непрерывное отображение. Тогда для некоторого  $n \geq 0$  существует симплициальное отображение  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow L$ , являющееся симплициальной аппроксимацией отображения  $f$ .

б) Если ограничение отображения  $f$  на подкомплекс  $K_1 \subset K$  симплициально, то симплициальную аппроксимацию  $\varphi$  можно выбрать так, чтобы она совпала с  $f$  на  $K_1$ .

**Доказательство.** а) Звёзды вершин комплекса  $L$  образуют открытое покрытие топологического пространства  $|L|$ . Прообраз этого покрытия при отображении  $f$  является открытым покрытием  $\mathcal{U}$  компактного подмножества  $|K|$  евклидова пространства. Согласно теореме Лебега об открытых покрытиях (теорема 4.6 на с. 70) существует такое число  $\delta > 0$ , что любое подмножество  $B \subset |K|$ , диаметр которого меньше  $\delta$ , содержится в одном из элементов покрытия  $\mathcal{U}$ .

Выберем число  $n$  так, что диаметр любого симплекса из  $K^{(n)}$  меньше  $\delta/2$ . Симплициальное отображение  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow L$  определим следующим образом. Пусть  $v$  — вершина  $K^{(n)}$ . Тогда диаметр множества  $\text{st } v$  меньше  $\delta$ , поэтому множество  $f(\text{st } v)$  целиком принадлежит некоторому множеству вида  $\text{st } \omega$ , где  $\omega$  — вершина  $L$ . Положим  $\varphi(v) = \omega$  (если в качестве  $\omega$  можно выбрать несколько вершин, то выбираем любую из них). Мы определили отображение 0-мерных остовов. Нужно проверить, что это отображение допустимо, т. е. если  $v_1, \dots, v_k$  — вершины некоторого симплекса из  $K^{(n)}$ , то  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$  — вершины некоторого симплекса из  $L$ . Для этого мы воспользуемся тем, что вершины  $v_1, \dots, v_k$

образуют симплекс  $\Delta$  тогда и только тогда, когда  $\bigcap_{i=1}^k \text{st } v_i = \text{st } \Delta \neq \emptyset$ .

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — вершины симплекса из  $K^{(n)}$ . Тогда  $\bigcap_{i=1}^k \text{st } v_i \neq \emptyset$ , а зна-

чит,  $\bigcap_{i=1}^k f(\text{st } v_i) \neq \emptyset$ . Но  $\bigcap_{i=1}^k \text{st } \varphi(v_i) \supset \bigcap_{i=1}^k f(\text{st } v_i) \neq \emptyset$ , поэтому вершины  $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$  образуют в  $L$  некоторый симплекс.

Теорема 8.6 показывает, что симплициальное отображение  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow L$  является симплициальной аппроксимацией отображения  $f$ .

б) Пусть  $v$  — вершина  $K_1$ . Тогда  $f(v) = \omega$  — вершина  $L$ . Если разбиение  $K^{(n)}$  достаточно мелкое (т. е. число  $n$  достаточно велико), то для такого разбиения  $f(\text{st } v) \subset \text{st } \omega$ , поэтому можно положить  $\varphi(v) = \omega$ .  $\square$

С помощью теоремы о симплициальной аппроксимации можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 8.8.** *Любое непрерывное отображение  $f: S^n \rightarrow S^m$ , где  $n < m$ , гомотопнo постоянному отображению (т.е. отображению в одну точку).*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что отображение  $f$  гомотопнo отображению  $\varphi$ , которое не является сюръективным. Действительно, если  $\varphi(x) \neq \xi_0 \in S^m$  при всех  $x \in S^n$ , то

$$\varphi_t(x) = \frac{t\varphi(x) - (1-t)\xi_0}{\|t\varphi(x) - (1-t)\xi_0\|}$$

представляет собой гомотопию, связывающую отображение  $\varphi$  и постоянное отображение  $S^n \rightarrow -\xi_0 \in S^m$ .

Сферу  $S^n$  можно представить в виде симплициального комплекса  $K$ , который является  $n$ -мерным остовом  $(n+1)$ -мерного симплекса. Сферу  $S^m$  аналогично представим в виде симплициального комплекса  $L$ . Для непрерывного отображения  $f: |K| \rightarrow |L|$  существует симплициальная аппроксимация  $\varphi: K^{(N)} \rightarrow L$ . Отображение  $\varphi$  не сюръективно, потому что его образ содержится в  $n$ -мерном остове комплекса  $L$ . Отображение  $\varphi$  гомотопнo отображению  $f$  согласно теореме 8.5.  $\square$

**Пример.** Пусть  $K$  — триангуляция  $n$ -мерного симплекса  $L$  с вершинами  $v_0, v_1, \dots, v_n$ . Предположим, что вершины  $K$  помечены числами  $0, 1, \dots, n$ . Построим симплициальное отображение  $\varphi: |K| \rightarrow |L|$ , сопоставив каждой вершине  $a \in K$  вершину  $v_i$ , где  $i$  — пометка вершины  $a$ . Отображение  $\varphi$  является симплициальной аппроксимацией тождественного отображения  $|K| \rightarrow |K| = |L|$  тогда и только тогда, когда набор пометок такой, как в условии леммы Шпернера, т.е. пометка вершины  $a$ , принадлежащей некоторой грани симплекса  $L$ , совпадает с одной из вершин этой грани.

Следующая теорема выводится из леммы Шпернера (в уточнённой форме: теорема 6.9 на с. 95), но её формулировка без использования понятия симплициального отображения выглядела бы слишком неестественно.

**Теорема 8.9** (комбинаторная формула Лефшеца [85]). *Пусть  $K$  — триангуляция  $n$ -мерного симплекса  $L$ ,  $\varphi: K \rightarrow L$  — симплициальное отображение,  $\varphi_i$  — количество  $i$ -мерных симплексов  $\Delta^i \subset K$ , для которых  $\Delta^i \subset \varphi(\Delta^i)$ , с учётом знака\*). Тогда  $\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \dots + (-1)^n \varphi_n = 1$ .*

\*) Если симплексы  $\Delta^i$  и  $\varphi(\Delta^i)$  одинаково ориентированы, то берётся знак плюс, а если они ориентированы противоположно, то берётся знак минус. Отметим, что если  $\Delta^i \subset \varphi(\Delta^i)$ , то симплекс  $\varphi(\Delta^i)$  имеет ту же размерность, что и  $\Delta^i$ .



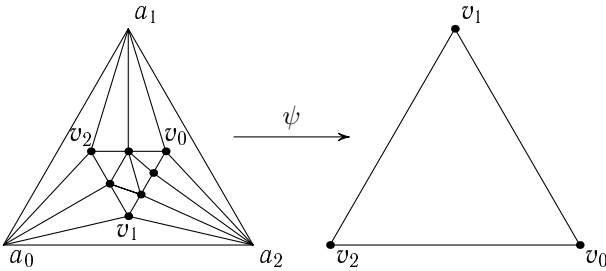


Рис. 44. Построение комплекса  $K_1$

**Доказательство.** Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_n$  — вершины симплекса  $L$ ,  $m$  — его центр масс, точка  $a_i$  выбрана так, что  $m$  лежит на отрезке  $[a_i, v_i]$  и  $|a_i m| = k|mv_i|$ , где  $k > 0$  — фиксированное число. Если  $k$  достаточно велико, то симплекс  $L = [v_0, \dots, v_n]$  лежит внутри симплекса  $[a_0, \dots, a_n]$ .

Рассмотрим симплициальный комплекс  $K_1$ , вершинами которого являются точки  $a_0, \dots, a_n$  и вершины комплекса  $K$  (напомним, что  $K$  — триангуляция  $L$ ); симплексами  $K_1$  являются симплексы  $K$  и симплексы, одной из вершин которых служит  $a_i$ , а остальными вершинами служат вершины симплекса из  $K$ , расположенного на грани  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ . Пример построения комплекса  $K_1$  при  $n = 2$  приведён на рис. 44. Определим симплициальное отображение  $\psi: K_1 \rightarrow L$  так, чтобы оно совпадало с  $\varphi$  на  $K \subset K_1$  и переводило  $a_i$  в  $v_i$ . Пометим каждую вершину  $a$  комплекса  $K_1$ , сопоставив ей номер  $i$  вершины  $v_i = \psi(a)$ . Такой набор пометок удовлетворяет лемме Шпернера, поэтому  $\psi_n = 1$ . Остаётся доказать, что  $\psi_n = \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \dots + (-1)^n \varphi_n$ .

Рассмотрим сначала для наглядности случай  $n = 2$  (рис. 45). Каждой вершине  $v_i \in K_1$ , помеченной числом  $i$ , соответствует симплекс  $[v_i, a_j, a_k]$  в  $K_1$  с полным набором пометок. Этот симплекс ориентирован положительно (т. е. так же, как и симплекс  $[a_0, a_1, a_2]$ ). Если одномерный симплекс  $[x, y]$  в  $K_1$  с пометками  $p$  и  $q$  даёт вклад в  $\varphi_1$ , то он по условию лежит на отрезке  $[v_p, v_q]$ . Ребру  $[x, y]$  соответствует симплекс  $[x, y, a_r]$ ,  $r \neq p, q$ , с полным набором пометок. Ориентация этого симплекса противоположна ориентации ребра  $[x, y]$  на ребре  $[v_p, v_q]$ , потому что ориентации симплексов  $[a_0, a_1]$  и  $[v_0, v_1]$  противоположны (эти симплексы расположены на параллельных прямых, поэтому име-

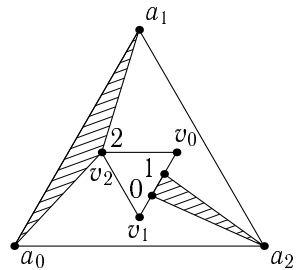


Рис. 45. Ориентации симплексов

ет смысл говорить о согласованности их ориентаций). Наконец, если симплекс  $[x, y, z]$  в  $K_1$  даёт вклад в  $\varphi_2$ , то он имеет полный набор помеченных вершин. При этом ориентации симплекса  $[x, y, z]$  относительно  $[v_0, v_1, v_2]$  и относительно  $[a_0, a_1, a_2]$  совпадают, поскольку симплексы  $[v_0, v_1, v_2]$  и  $[a_0, a_1, a_2]$  одинаково ориентированы.

Для произвольного  $n$  рассуждения аналогичны. Чередование знаков происходит из-за того, что симплексы  $[v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$  и  $[a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$  одинаково ориентированы при чётном  $k$  и противоположно ориентированы при нечётном  $k$ .  $\square$

### 8.5. Нерв покрытия

Произвольному семейству подмножеств  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  множества  $X$  можно сопоставить симплициальный комплекс  $N = N(\mathcal{U})$ , вершины  $\{v_\alpha\}$  которого находятся во взаимно однозначном соответствии с множествами  $\{U_\alpha\}$ , причём набор  $v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_k}$  является симплексом тогда и только тогда, когда  $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$ . Если  $X$  — топологическое пространство и  $\mathcal{U}$  — его покрытие (не обязательно открытое), то  $N$  называют *нервом* покрытия  $\mathcal{U}$ .

**Пример.** Пусть  $K$  — симплициальный комплекс с вершинами  $\{v_\alpha\}$ ,  $U_\alpha = \text{st } v_\alpha$  — звезда вершины  $v_\alpha$ , т.е. объединение внутренностей всех симплексов, содержащих  $v_\alpha$ . Тогда нерв покрытия  $\{U_\alpha\}$  совпадает с  $K$ .

**Доказательство.** Вершины  $v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_k}$  образуют симплекс  $\Delta^k$  тогда и только тогда, когда  $\text{st } v_{\alpha_0} \cap \dots \cap \text{st } v_{\alpha_k} = \text{st } \Delta^k \neq \emptyset$ .  $\square$

Будем называть открытое покрытие  $\mathcal{U}$  пространства  $X$  *стягиваемым*, если все непустые конечные пересечения  $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$  стягиваемы. Нерв стягиваемого покрытия несёт много информации о гомотопическом строении пространства  $X$ . Например, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8.10.** Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  — стягиваемое локально конечное покрытие паракомпактного пространства  $X$ . Тогда нерв  $N = N(\mathcal{U})$  гомотопически эквивалентен  $X$ .

**Доказательство.** Стягиваемость покрытия и паракомпактность пространства используются в разных местах доказательства. Поэтому будем считать, что  $\mathcal{U}$  — произвольное локально конечное открытое покрытие произвольного пространства  $X$ . Построим вспомогательное пространство  $X_{\mathcal{U}}$  следующим образом. Для каждого непустого пересечения  $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} = U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$  рассмотрим прямое произведение  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \times \Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^n$ , где  $\Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^n$  — симплекс с вершинами  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ . Затем в дизъюнктном объединении таких топологических пространств произведём следующую склейку: отождествим точку  $(x, y)$ , где

$x \in U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$  и  $y \in [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n] \subset \Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^n$ , с соответствующей точкой пространства  $U_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n} \times \Delta_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n}^{n-1}$ ; здесь мы пользуемся тем, что  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \subset U_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n}$ .

Шаг 1. Если пространство  $X$  паракомпактно, то  $X \sim X_{\mathcal{U}}$ .

Пусть  $p: X_{\mathcal{U}} \rightarrow X$  — отображение, индуцированное естественными проекциями  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \times \Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^n \rightarrow U_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$ . Это отображение непрерывно, поскольку покрытие  $\mathcal{U}$  открытое. Каждую точку множества  $p^{-1}(x)$  можно записать в виде суммы  $\sum_{\alpha} t_{\alpha} x_{\alpha}$ , где  $t_{\alpha} \geq 0$ ,  $\sum t_{\alpha} = 1$  и  $x_{\alpha} = x$  для  $U_{\alpha} \ni x$ .

Эта сумма конечная, поскольку покрытие локально конечное.

Из паракомпактности пространства  $X$  следует, что существует разбиение единицы  $\{\varphi_{\alpha}\}$ , подчинённое покрытию  $\{U_{\alpha}\}$ , т. е.  $\text{supp } \varphi_{\alpha} \subset U_{\alpha}$ . Построим отображение  $s: X \rightarrow X_{\mathcal{U}}$  следующим образом:  $s(x) = \sum \varphi_{\alpha}(x) x_{\alpha}$ ; здесь имеется в виду, что если  $\varphi_{\alpha}(x) = 0$ , то соответствующее слагаемое нулевое, а если  $\varphi_{\alpha}(x) \neq 0$ , то  $x \in U_{\alpha}$  и мы полагаем  $x_{\alpha} = x$ . Ясно, что  $p \circ s = \text{id}_X$ . Нужно лишь проверить, что  $s \circ p \sim \text{id}_{X_{\mathcal{U}}}$ . Пусть точка  $x$  принадлежит множествам  $U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_n}$  и не принадлежит никаким другим множествам  $U_{\alpha}$ . Тогда точки  $y = \sum t_{\alpha} x_{\alpha}$  и  $s(p(y)) = \sum \varphi_{\alpha} x_{\alpha}$  принадлежат симплексу с вершинами  $x_{\alpha_0}, \dots, x_{\alpha_n}$ . Требуемая гомотопия строится следующим образом: мы соединяем точки  $y$  и  $s(p(y))$  отрезком и равномерно подтягиваем точку  $s(p(y))$  к точке  $y$ .

Шаг 2. Если покрытие  $\mathcal{U}$  стягиваемое, то  $X_{\mathcal{U}} \sim |N(\mathcal{U})|$ .

Возьмём пространство  $X_{\mathcal{U}}$ . Сначала над каждой вершиной  $\alpha$  стянем в точку множество  $U_{\alpha}$ , затем над каждой внутренней точкой ребра  $[\alpha, \beta]$  стянем в точку множество  $U_{\alpha, \beta}$ , затем над каждой внутренней точкой симплекса  $[\alpha, \beta, \gamma]$  стянем в точку множество  $U_{\alpha, \beta, \gamma}$  и т. д. В итоге получим пространство  $|N(\mathcal{U})|$ .  $\square$

## 8.6. Псевдомногообразия

Конечный симплициальный комплекс  $K$  называют  $n$ -мерным *псевдомногообразием*, если выполняются следующие условия:

— *однородность*: каждый симплекс из  $K$  является гранью некоторого  $n$ -мерного симплекса ;

— *неразветвлённость*: каждый  $(n-1)$ -мерный симплекс из  $K$  является гранью не более чем двух  $n$ -мерных симплексов ;

— *сильная связность*: для любых двух  $n$ -мерных симплексов  $\Delta_a^n$  и  $\Delta_b^n$  найдётся последовательность симплексов  $\Delta_1^n = \Delta_a^n, \Delta_2^n, \dots, \Delta_k^n = \Delta_b^n$ , в которой соседние члены  $\Delta_i^n$  и  $\Delta_{i+1}^n$  имеют общую  $(n-1)$ -мерную грань.

Объединение всех  $(n-1)$ -мерных симплексов  $n$ -мерного псевдомногообразия  $M^n$ , которые являются гранью ровно одного  $n$ -мерного

симплекса, называют *краем* и обозначают  $\partial M^n$ . Если  $\partial M^n = \emptyset$ , то псевдомногообразие  $M^n$  называют *замкнутым*. В замкнутом псевдомногообразии  $M^n$  любой  $(n-1)$ -мерный симплекс является гранью ровно двух  $n$ -мерных симплексов.

Назовём *ориентацией* симплекса  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$  семейство всех одинаково ориентированных реперов в  $\mathbb{R}^n$  с началами в точках симплекса  $\Delta^n$ . При  $n > 0$  каждый симплекс имеет ровно две ориентации. Если симплекс снабжён ориентацией, то эту ориентацию называют *положительной*, а противоположную ориентацию называют *отрицательной*.

Ориентация симплекса  $\Delta^n$  индуцирует ориентацию его грани  $\Delta^{n-1} \subset \Delta^n$  следующим образом. Выберем в точке  $x \in \Delta^{n-1}$  положительно ориентированный репер, первые  $n-1$  векторов которого принадлежат  $\Delta^{n-1}$ , а последний вектор направлен внутрь  $\Delta^n$ . Ориентацию, заданную в  $\Delta^{n-1}$  первыми  $n-1$  векторами, будем считать положительной.

Псевдомногообразию  $M^n$  называют *ориентируемым*, если во всех его  $n$ -мерных симплексах можно выбрать ориентацию так, что любые два симплекса, имеющие общую  $(n-1)$ -мерную грань, индуцируют на ней противоположные ориентации. Из условия сильной связности следует, что если псевдомногообразие ориентируемо, то его ориентацию можно выбрать ровно двумя способами. Ориентируемое псевдомногообразие  $M^n$  с фиксированной ориентацией называют *ориентированным*.

**Пример.** Представим лист Мёбиуса в виде абстрактного симплициального комплекса с шестью вершинами (рис. 46). Реализовав этот абстрактный симплициальный комплекс в  $\mathbb{R}^5$  (это можно сделать согласно теореме 8.4 на с. 116), получим неориентируемое псевдомногообразие.

**Пример.** Пусть  $M^n \subset \mathbb{R}^m$  — псевдомногообразие (возможно, с краем). Вложим  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^{m+1}$  и выберем в  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \mathbb{R}^m$  точку  $a$ . Объединение всех отрезков вида  $[a, x]$ , где  $x \in M^n$ , является  $(n+1)$ -мерным псевдомногообразием. Его называют *надстройкой* над  $M^n$  и обозначают  $\Sigma M^n$ .

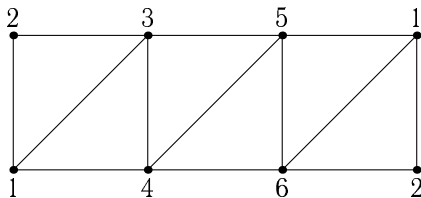


Рис. 46. Триангуляция листа Мёбиуса

**З а м е ч а н и е.** Надстройка над обычным (топологическим или гладким) замкнутым многообразием  $M^n$  может быть многообразием лишь в том случае, когда  $M^n$  — гомотопическая сфера. Таким образом, псевдомногообразия образуют более широкий класс, чем многообразия. С другой стороны, если  $M^n$  — псевдомногообразие и  $(M^n)^{n-2}$  — его  $(n-2)$ -мерный остов, то  $M^n \setminus (M^n)^{n-2}$  является многообразием, т. е. псевдомногообразие становится многообразием после выбрасывания множества коразмерности 2.

**П р и м е р.** Надстройка над 2-мерным псевдомногообразием, изображенным на рис. 47, является 3-мерным псевдомногообразием, край которого — не псевдомногообразие (не выполняется условие сильной связности).

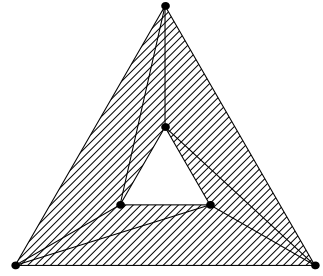


Рис. 47. Край надстройки — не псевдомногообразие

## 8.7. Степень отображения в евклидово пространство

Пусть  $M^n$  — псевдомногообразие размерности  $n$ . Будем называть отображение  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  *симплициальным*, если ограничение  $f$  на каждый симплекс является линейным отображением (в аффинном смысле). Симплициальное отображение  $M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  полностью определяется ограничением на 0-мерный остов  $(M^n)^0$ , причём любое отображение  $(M^n)^0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  продолжается до симплициального отображения  $M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Рассмотрим симплициальное отображение  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (размерности одинаковые). Назовём точку  $y \in \mathbb{R}^n$  *регулярным значением* отображения  $f$ , если точка  $y$  не принадлежит образу  $(n-1)$ -мерного остова псевдомногообразия  $M^n$ . Регулярные значения образуют в  $\mathbb{R}^n$  всюду плотное подмножество.

Пусть  $M^n$  — ориентированное псевдомногообразие,  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — симплициальное отображение и  $y$  — регулярное значение отображения  $f$ . Назовём *степенью* отображения  $f$  относительно точки  $y$  число

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x),$$

где  $\operatorname{sgn} J_f(x)$  — знак якобиана отображения  $f$  в точке  $x$ , т. е.  $\operatorname{sgn} J_f(x) = 1$ , если симплекс  $\Delta^n$ , внутри которого лежит точка  $x$ , отображается на симплекс  $f(\Delta^n) \subset \mathbb{R}^n$  с сохранением ориентации; в противном случае  $\operatorname{sgn} J_f(x) = -1$ .

**Теорема 8.11.** Пусть  $M^n$  — ориентированное псевдомногообразие,  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — симплициальное отображение,  $y_1$  и  $y_2$  — регулярные значения отображения  $f$ . Тогда если точки  $y_1$  и  $y_2$  принадлежат одной и той же компоненте связности множества  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial M^n)$ , то  $\deg(f, y_1) = \deg(f, y_2)$ .

**Доказательство.** Образ  $(n-2)$ -мерного остова псевдомногообразия  $M^n$  не разбивает  $\mathbb{R}^n$ , поскольку  $(n-2)$ -мерное подпространство в  $\mathbb{R}^n$  не разбивает  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому в  $\mathbb{R}^n$  существует конечнозвенная ломаная  $L$  с концами  $y_1$  и  $y_2$ , которая не пересекает образ  $(n-2)$ -мерного остова, не пересекает  $f(\partial M^n)$  и пересекает образ  $(n-1)$ -мерного остова лишь в конечном числе точек  $a_1, \dots, a_k$ . Множество  $f^{-1}(a_i)$  не содержит точек, принадлежащих симплексам размерности  $\leq n-2$ , поэтому множество  $f^{-1}(a_i)$  является объединением конечного числа множеств, каждое из которых либо состоит из одной внутренней точки  $(n-1)$ -мерной грани, либо представляет собой отрезок внутри  $n$ -мерной грани, соединяющий внутренние точки двух его  $(n-1)$ -мерных граней.

По условию  $f^{-1}(a_i) \cap \partial M^n = \emptyset$ , поэтому как внутренней точке  $(n-1)$ -мерного симплекса, так и отрезку внутри  $n$ -мерного симплекса соответствуют два  $n$ -мерных симплекса. Если образы этих симплексов имеют одинаковые ориентации, то при прохождении через точку  $a_i$  количество прообразов не изменяется и знаки якобианов в них тоже не изменяются: см. рис. 48 (а); при этом мы имеем в виду только прообразы, принадлежащие двум рассматриваемым симплексам. Если же образы симплексов имеют разные ориентации, то либо возникают, либо исчезают два прообраза с противоположными знаками якобиана (рис. 48 (б)). Сумма знаков якобианов при этом не изменяется.  $\square$

**Теорема 8.12.** Пусть  $M^n$  — ориентированное псевдомногообразие,  $f, g: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — симплициальные отображения, ограничения которых на  $\partial M^n$  совпадают. Предположим, что  $y$  — регулярное значение отображений  $f$  и  $g$ . Тогда  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .

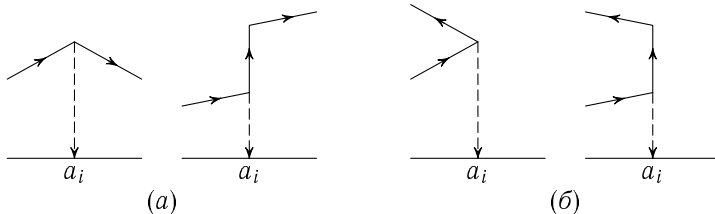


Рис. 48. Прохождение через критическое значение

**Доказательство.** Рассмотрим семейство отображений  $f_t = (1-t)f + tg$ . Ясно, что  $f_0 = f$ ,  $f_1 = g$  и ограничение отображения  $f_t$  на  $\partial M^n$  не зависит от  $t$ .

Пусть  $X$  — компонента связности множества  $\mathbb{R}^n \setminus f_t(\partial M^n)$ , содержащая точку  $y$  (множество  $X$  не зависит от  $t$ , потому что множество  $f_t(\partial M^n)$  не зависит от  $t$ ). Множество  $X$  открытое, поэтому регулярные значения отображения  $f_t$  образуют в нём всюду плотное подмножество. В частности, каждое отображение  $f_t$  имеет регулярное значение  $y_t \in X$ . Согласно теореме 8.11  $\deg(f_t, y_t)$  не зависит от выбора регулярного значения  $y_t \in X$ , поэтому можно определить функцию  $\varphi(t) = \deg(f_t, y_t)$ .

Для любого регулярного значения  $y_t \in X$  отображения  $f_t$  существует  $\varepsilon > 0$ , обладающее следующими свойствами: при всех  $\tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap [0, 1]$  точка  $y_t$  является регулярным значением отображения  $f_\tau$  и прообраз  $f_\tau^{-1}(y_t)$  при всех  $\tau$  состоит из одного и того же числа точек с одними и теми же знаками якобианов. Действительно, если  $y_t$  — внутренняя точка образа  $n$ -мерного симплекса при линейном отображении в  $\mathbb{R}^n$ , то при малом шевелении линейного отображения точка  $y_t$  останется внутренней точкой образа. Итак, функция  $\varphi(t)$  постоянна на множестве  $U_t = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap [0, 1]$ . Семейство множеств  $\{U_t\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , образует открытое покрытие отрезка  $[0, 1]$ . Выбрав из этого покрытия конечное подпокрытие, легко убедиться, что функция  $\varphi(t)$  постоянна на всём отрезке  $[0, 1]$ , поэтому  $\varphi(0) = \varphi(1)$ , т. е.  $\deg(f, y_1) = \deg(f, y_0)$ .  $\square$

С помощью теоремы 8.12 легко доказывается лемма Шпернера, причём даже в уточнённой форме (теорема 6.9 на с. 95). Основная идея доказательства ясна уже в случае 2-мерных симплексов, поэтому мы ограничимся этим случаем (подробное доказательство для  $n$ -мерных симплексов приведено в [130]). Вложим триангулированный симплекс в больший симплекс и триангулируем этот новый объект (рис. 49). При этом нужно, чтобы не появилось новых симплексов с полными наборами поме-

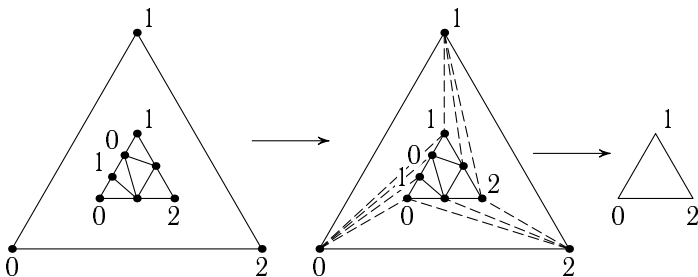


Рис. 49. Дополнительная триангуляция симплекса

ток; этого легко добиться. Большой триангулированный симплекс является ориентированным псевдомногообразием. Рассмотрим симплициальное отображение  $f$  этого псевдомногообразия на фиксированный симплекс  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$  с полным набором пометок (вершина с номером  $i$  отображается в вершину с номером  $i$ ). На крае отображение  $f$  совпадает с тождественным отображением, поэтому его степень (относительно внутренней точки симплекса  $\Delta$ ) равна 1. Но степень отображения  $f$  как раз и равна разности между количествами симплексов с полным набором пометок с положительной и отрицательной ориентациями. А по построению новых симплексов с полным набором пометок не появилось.

## 8.8. Теорема Борсука—Улама

В 1933 г. К. Борсук [38] доказал следующее утверждение, предположение о справедливости которого высказал ранее С. Улам.

**Теорема 8.13** (Борсук—Улам). *Пусть  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение. Тогда  $f(x) = f(-x)$  для некоторой точки  $x \in S^n$ .*

Точки  $x$  и  $-x$  называют *антиподами*, поэтому теорему Борсука—Улама иногда называют *теоремой об антиподах*.

Отображение  $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называют *нечётным*, или *антиподальным*, если  $g(-x) = -g(x)$ . Легко видеть, что теорема Борсука—Улама эквивалентна следующему утверждению.

**Теорема 8.14.** *Пусть  $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — нечётное отображение. Тогда  $g(x) = 0$  для некоторой точки  $x \in S^n$ .*

Действительно, если  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольное отображение, то отображение  $g(x) = f(x) - f(-x)$  нечётно, а равенство  $f(x) = f(-x)$  эквивалентно равенству  $g(x) = 0$ . Наоборот, если  $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — нечётное отображение и теорема Борсука—Улама верна, то  $g(x) = g(-x)$  для некоторой точки  $x \in S^n$ . С другой стороны,  $g(-x) = -g(x)$ , поэтому  $g(x) = 0$ .

Теорему 8.14 мы выведем из следующего утверждения.

**Теорема 8.15.** *Пусть  $h: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — отображение, ограниченное которого на  $S^{n-1} = \partial D^n$  нечётно. Тогда  $h(x) = 0$  для некоторой точки  $x \in D^n$ .*

Чтобы вывести теорему 8.14 из теоремы 8.15, нужно в качестве  $D^n$  взять сечение шара  $D^{n+1}$  (с краем  $S^n$ ) плоскостью, проходящей через центр, а в качестве  $h$  взять композицию проекции  $D^n$  на полусферу и отображения  $g$ .

**Доказательство теоремы 8.15.** Вместо  $D^n$  мы будем рассматривать  $n$ -мерный куб  $I^n$ , где  $I = [-1, 1]$ . Этот куб симметричен относительно начала координат. Предположим, что ограничение отображения



$h: I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  на  $\partial I^n$  нечётно и  $0 \notin h(I^n)$ . Множество  $h(I^n)$  компактно, поэтому оно не пересекается с некоторым шаром с центром 0. Пусть  $r$  — радиус этого шара.

Из равномерной непрерывности отображения  $h$  следует, что для достаточно мелкой триангуляции куба  $I^n$  образ любого симплекса лежит в шаре диаметра  $\varepsilon < r$ . Для каждой вершины  $v$  такой триангуляции положим  $h_\varepsilon(v) = h(v)$  и продолжим отображение  $h_\varepsilon$  на каждый симплекс по линейности. Любая точка  $x \in I^n$  принадлежит какому-то симплексу триангуляции, поэтому точки  $h(x)$  и  $h_\varepsilon(x)$  принадлежат одному и тому же шару диаметра  $\varepsilon$ , а значит,  $\|h(x) - h_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ .

Триангуляцию куба  $I^n$  можно построить так, что она будет симметрична относительно начала координат. В таком случае ограничение отображения  $h_\varepsilon(x)$  на  $\partial I^n$  нечётно. Кроме того, из неравенства  $\|h(x) - h_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$  следует, что  $0 \notin h_\varepsilon(I^n)$ .

Чтобы прийти к противоречию, достаточно построить симплициальное отображение  $\varphi: I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ограничение которого на  $\partial I^n$  совпадает с  $h_\varepsilon$  и для которого  $\deg(\varphi, 0)$  — нечётное число. Действительно, с одной стороны  $\deg(h_\varepsilon, 0) = 0$ ; с другой стороны, по теореме 8.12  $\deg(\varphi, 0) = \deg(h_\varepsilon, 0)$ .

Ясно, что если  $\varphi: I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — нечётное отображение и 0 — его регулярное значение, то  $\deg(\varphi, 0)$  — нечётное число. Действительно,  $\varphi^{-1}(0)$  состоит из точки 0 и пар вида  $(x, -x)$ , а чётность суммы  $\sum \pm 1$  зависит лишь от количества слагаемых.

Построить нечётное отображение  $\varphi$  совсем просто. Нужно взять внутренние вершины симметричной триангуляции, полученной при построении отображения  $h_\varepsilon$ , и произвольно отобразить симметричные вершины в симметричные точки  $\mathbb{R}^n$ . При этом для вершины  $v \in \partial I^n$  полагаем  $\varphi(v) = h_\varepsilon(v)$ . Затем продолжаем отображение  $\varphi$  по линейности.

Остаётся последняя чисто техническая трудность: точка 0 является вершиной триангуляции, поэтому  $0 = \varphi(0)$  — не регулярное значение. Сделать точку 0 регулярным значением можно следующим образом. Пусть  $W$  — объединение всех симплексов с вершиной 0. Можно считать, что  $W \cap \partial I^n = \emptyset$ . Для вершины  $v \in W$  положим  $\varphi(v) = v$ . Тогда  $\varphi|_W$  — тождественное отображение, поэтому оно останется симплициальным при любой триангуляции множества  $W$ . Теперь малым шевелением вершин, не принадлежащих  $\partial I^n$ , можно добиться того, что точка  $0 \in \mathbb{R}^n$  будет регулярным значением отображения  $\varphi$ .  $\square$

Приведём ещё одно утверждение, эквивалентное теореме Борсука—Улама.

**Теорема 8.16.** Пусть  $m > n \geq 1$ . Тогда не существует нечётного отображения  $f: S^m \rightarrow S^n$ .

Действительно, если  $m > n \geq 1$ , то нечётное отображение  $S^m \rightarrow S^n$  является также и нечётным отображением  $S^m \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Поэтому из теоремы Борсука—Улама следует теорема 8.16. Наоборот, по нечётному отображению  $S^m \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  легко построить нечётное отображение  $S^m \rightarrow S^{m-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Весьма простое доказательство теоремы Борсука—Улама приведено в [95]. Приведённое нами доказательство теоремы 8.15 имеет много общего с [61].

**З а д а ч а 8.4.\*** а) (лемма Такера [127]) Пусть задана такая триангуляция  $n$ -мерного куба  $I^n$ , что его граница  $\partial I^n$  триангулирована симметрично относительно центра. Предположим, что вершины этой триангуляции помечены числами  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ , причём если  $v \in \partial I^n$  — вершина триангуляции, то вершины  $v$  и  $-v$  помечены числами, сумма которых равна 0. Докажите, что тогда существуют смежные (т.е. соединённые ребром) вершины триангуляции, помеченные числами, сумма которых равна 0.

б) Докажите теорему Борсука—Улама с помощью леммы Такера.

**З а м е ч а н и е.** Чисто алгебраическое доказательство теоремы Борсука—Улама для полиномиальных отображений приведено в [16].

## 8.9. Следствия и обобщения теоремы Борсука—Улама

Из теоремы Борсука—Улама можно вывести много интересных следствий. Одно из них Борсук привёл в той самой статье [38], в которой он доказал теорему Борсука—Улама. Но ранее эту теорему уже доказали Люстерник и Шнирельман [9, с. 26].

**Т е о р е м а 8.17** (Люстерник—Шнирельман). *Пусть сфера  $S^n$  покрыта замкнутыми множествами  $F_1, \dots, F_{n+1}$ . Тогда одно из них содержит пару диаметрально противоположных точек сферы.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим через  $-F_i$  множество, симметричное  $F_i$  относительно центра сферы. Покажем, что если  $F_i \cap (-F_i) = \emptyset$  при  $i = 1, \dots, n$ , то  $F_{n+1} \cap (-F_{n+1}) \neq \emptyset$ .

Применив лемму Урысона (см. с. 67) к непересекающимся замкнутым множествам  $F_1$  и  $-F_1$ , лежащим в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , можно построить непрерывную функцию  $\varphi_1: S^n \rightarrow [0, 1]$ , для которой  $\varphi_1(F_1) = 0$  и  $\varphi_1(-F_1) = 1$  (лемма Урысона даёт функцию  $f$ , для которой  $f(F_1) = -1$  и  $f(-F_1) = 1$ ; мы полагаем  $\varphi_1 = (1 + f)/2$ ). Аналогично построим функции  $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Рассмотрим отображение  $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное формулой  $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ . Согласно теореме Борсука—Улама существует точка  $x_0 \in S^n$ , для которой  $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$ . Если  $x \in \pm F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то  $\varphi_i(x) - \varphi_i(-x) = \pm 1$ , поэтому  $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(-x)$ . Следо-

вательно,  $x_0 \notin \bigcap_{i=1}^n F_i$  и  $x_0 \notin \bigcap_{i=1}^n (-F_i) = -\bigcap_{i=1}^n F_i$ . Поэтому  $x_0 \in F_{n+1}$  и  $-x_0 \in F_{n+1}$ .  $\square$

**Теорема 8.18.** Пусть  $F_1, \dots, F_n$  — измеримые подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существует гиперплоскость, которая делит каждое множество  $F_i$  на две части одинакового объёма.

**Доказательство.** Пусть  $x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  и центр сферы  $S^{n-1}$  расположен в начале координат. Для  $c \in \mathbb{R}$  положим

$$\Pi_c(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, x) = c\}.$$

Легко проверить, что для каждого вектора  $x \in S^{n-1}$  существует единственное число  $c \in \mathbb{R}$ , для которого гиперплоскость  $\Pi_c(x)$  делит  $F_1$  на две части равного объёма. Положим  $\varphi_1(x) = c$ . Для  $x$  и  $-x$  гиперплоскость, делящая  $F_1$  пополам, одна и та же. Ясно также, что  $\Pi_{-c}(-x) = \Pi_c(x)$ , поэтому  $\varphi_1(-x) = -c$ . Аналогично определим функции  $\varphi_2, \dots, \varphi_n$  и рассмотрим отображение  $\varphi: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , заданное формулой

$$\varphi(x) = (\varphi_n(x) - \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)).$$

Ясно, что  $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ . Поэтому по теореме Борсука—Улама существует точка  $x_0 \in S^{n-1}$ , для которой  $\varphi(x_0) = 0$ , т. е.  $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = \dots = \varphi_n(x_0) = c$ . Гиперплоскость  $\Pi_c(x_0)$  обладает требуемыми свойствами.  $\square$

Легко доказать, что длина замкнутой центрально симметричной кривой на единичной сфере  $S^m$  не меньше  $2\pi$  (центрально симметричная кривая содержит две диаметрально противоположные точки, а длина любой дуги, соединяющей две диаметрально противоположные точки, не меньше  $\pi$ ). Это утверждение имеет следующее обобщение.

**Задача 8.5.\*** [34] Пусть  $S^n$  и  $S^m$  — единичные сферы,  $\varphi: S^n \rightarrow S^m$  — нечётное отображение. Докажите, что тогда  $n$ -мерный объём множества  $\varphi(S^n)$  не меньше  $n$ -мерного объёма  $S^n$ .

Из теоремы Борсука—Улама можно также вывести утверждение, которое является нелинейным обобщением известной *теоремы Радона*: «Если множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  содержит по крайней мере  $n+2$  точки, то в  $A$  можно выбрать непересекающиеся подмножества  $B$  и  $C$  так, что их выпуклые оболочки будут иметь общую точку.» При доказательстве теоремы Радона достаточно ограничиться случаем, когда  $A$  состоит ровно из  $n+2$  точек, поэтому её можно сформулировать следующим образом: «Пусть  $f: \Delta^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейное отображение. Тогда в  $\Delta^{n+1}$  можно выбрать две непересекающиеся грани, образы которых пересекаются.» Нелинейное обобщение этой теоремы заключается в том, что линейное отображение  $f$  можно заменить на произвольное непре-

рывное отображение  $f$ . А именно, справедливо следующее утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

**Задача 8.6.\*** [33] а) Пусть  $P$  — невырожденный (т. е. содержащий некоторый  $(n + 1)$ -мерный шар) выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f: \partial P \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение. Докажите, что тогда существуют непересекающиеся грани\*) многогранника  $P$ , образы которых пересекаются.

б) Докажите, что если  $f: \partial \Delta^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение и  $\Delta_1^n, \dots, \Delta_{n+2}^n$  —  $n$ -мерные грани симплекса  $\Delta^{n+1}$ , то  $\bigcap_{i=1}^{n+2} f(\Delta_i^n) \neq \emptyset$ .

## § 9. CW-комплексы

Для гомотопической топологии во многих отношениях наиболее удобны CW-комплексы, введённые Уайтхедом [140]. CW-комплексы строятся из замкнутых дисков  $D^n$  посредством склейки их краёв  $\partial D^n = S^{n-1}$ . Поэтому сначала мы обсудим общую операцию приклеивания по отображению.

### 9.1. Приклеивание по отображению

*Приклеивание* пространства  $X$  к пространству  $Y$  по отображению  $\varphi: A \rightarrow Y$ , где  $A \subset X$ , определяется следующим образом. Рассмотрим дизъюнктное объединение  $X \sqcup Y$  топологических пространств  $X$  и  $Y$ . Введём в  $X \sqcup Y$  следующее отношение эквивалентности:  $a \sim \varphi(a)$  для всех  $a \in A$ . Факторпространство по этому отношению эквивалентности обозначают  $Y \cup_{\varphi} X$ .

Естественная проекция  $Y \rightarrow Y \cup_{\varphi} X$  всегда инъективна, а естественная проекция  $X \rightarrow Y \cup_{\varphi} X$  инъективна лишь в том случае, когда отображение  $\varphi: A \rightarrow Y$  инъективно; ограничение естественной проекции на  $X \setminus A$  инъективно.

Множество  $U \subset Y \cup_{\varphi} X$  открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда открыты (замкнуты) его прообразы в  $X$  и  $Y$  при естественной проекции  $p: X \sqcup Y \rightarrow Y \cup_{\varphi} X$ .

**Пример.** Пусть  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ,  $Y = \mathbb{R}$  и  $\varphi: A \rightarrow Y$  — тождественное отображение, т. е.  $\varphi(x) = x$  для всех  $x \in A$  (рис. 50). Тогда пространство  $Y \cup_{\varphi} X$  нехаусдорфово: образы точек  $0 \in X$  и  $0 \in Y$  в  $Y \cup_{\varphi} X$  различны, но любые их окрестности пересекаются.

\*)Здесь имеются в виду не только грани максимальной размерности  $n$ , но и грани меньшей размерности.

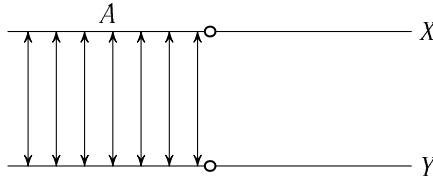


Рис. 50. Приклеивание по отображению

Нехаусдорфовость, возникшая в примере 9.1, связана с тем, что склейка производится по незамкнутому множеству.

**Теорема 9.1.** Пусть  $X$  и  $Y$  — нормальные топологические пространства,  $A \subset X$  — замкнутое подмножество и  $\varphi: A \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Тогда пространство  $Y \cup_{\varphi} X$  нормально.

**Доказательство.** Прежде всего докажем, что любая точка  $c \in Y \cup_{\varphi} X$  является замкнутым множеством. Если  $c \in p(X \setminus A)$  или  $c \in p(Y) \setminus p(A)$ , то  $p^{-1}(c)$  состоит из одной точки (лежащей в  $X$  или в  $Y$ ). Если же  $c \in p(A)$ , то прообраз  $c$  в  $Y$  состоит из одной точки  $\bar{c}$ , а прообразом  $c$  в  $X$  служит множество  $\varphi^{-1}(\bar{c})$ , которое замкнуто, потому что отображение  $\varphi$  непрерывно.

Пусть  $C_1$  и  $C_2$  — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства  $Y \cup_{\varphi} X$ . Тогда множество  $C = C_1 \cup C_2$  замкнуто и функция  $f: C \rightarrow I$ , принимающая на  $C_1$  значение 0, а на  $C_2$  значение 1, непрерывна. Поэтому достаточно доказать, что любую непрерывную функцию  $f: C \rightarrow I$ , где  $C \subset Y \cup_{\varphi} X$  — замкнутое подмножество, можно продолжить на всё пространство  $Y \cup_{\varphi} X$ .

Пусть  $C \subset Y \cup_{\varphi} X$  — замкнутое множество,  $f: C \rightarrow I$  — непрерывная функция. Рассмотрим замкнутые множества  $C_X = p^{-1}(C) \cap X$  и  $C_Y = p^{-1}(C) \cap Y$ . На этих множествах функция  $f$  определяет функции  $f_X: C_X \xrightarrow{p} C \xrightarrow{f} I$  и  $f_Y: C_Y \xrightarrow{p} C \xrightarrow{f} I$ . По теореме Титце функцию  $f_Y$  можно продолжить до функции  $F_Y: Y \rightarrow I$ . На множестве  $A$  функция  $F_Y$  определяет функцию  $f_A: A \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{F_Y} I$ . На множестве  $C_X \cap A$  непрерывные функции  $f_X$  и  $f_A$  совпадают, поэтому они определяют непрерывную функцию  $f_{XA}: C_X \cup A \rightarrow I$ .

Теперь настала пора воспользоваться замкнутостью множества  $A$ . Нам нужно продолжить функцию  $f_{XA}$ , определённую на множестве  $C_X \cup A$ , где  $C_X$  — замкнутое множество. По условию множество  $A$  замкнуто, поэтому множество  $C_X \cup A$  тоже замкнуто. По теореме Титце функцию  $f_{XA}$  можно продолжить до функции  $F_X: X \rightarrow I$ . При этом если  $x \in A$ , то  $F_X(x) = F_Y(\varphi(x))$ . Поэтому функции  $F_X$  и  $F_Y$  определяют функцию  $F$  на  $Y \cup_{\varphi} X$ . Из непрерывности функций  $F_X$  и  $F_Y$  следует непрерывность

функции  $F$ . По построению  $F|_C = f$ , т. е.  $F$  — требуемое продолжение функции  $f$ .  $\square$

## 9.2. Определение $CW$ -комплексов

Топологическое пространство  $X$  называют  $CW$ -комплексом, если  $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i$ , где  $X^0$  — дискретное пространство и пространство  $X^{i+1}$  получается посредством приклеивания к  $X^i$  дизъюнктного объединения  $(i+1)$ -мерных дисков  $\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D_{\alpha}^{i+1}$  по непрерывному отображению  $\varphi: \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} S_{\alpha}^i \rightarrow X^i$ , где  $S_{\alpha}^i = \partial D_{\alpha}^{i+1}$ . При этом должны выполняться свойства (с) и (w), которые мы сейчас сформулируем.

Назовём образы  $D_{\alpha}^{i+1}$  и  $\text{int } D_{\alpha}^{i+1}$  при естественной проекции в  $X^{i+1} \subset X$ , соответственно, *замкнутой* и *открытой клетками* размерности  $i+1$ . Свойства (с) и (w), о которых шла речь, таковы:

(с) каждая замкнутая клетка пересекает лишь конечное число открытых клеток;

(w) множество  $C \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты все пересечения  $C$  с замкнутыми клетками.

Отметим, что если число клеток конечно, то свойства (с) и (w) выполняются автоматически.

Обозначения (с) и (w) — это сокращения от «closure finite» и «weak topology».

Открытые клетки попарно не пересекаются и покрывают всё пространство  $X$ .

Пространство  $X^i$  называют  $i$ -мерным *остовом*  $CW$ -комплекса  $X$ . Если у  $CW$ -комплекса  $X$  есть клетки размерности  $n$  и нет клеток размерности более  $n$ , то  $X$  называют  $n$ -мерным  $CW$ -комплексом.

Естественную проекцию  $\chi_{\alpha}^{i+1}: D_{\alpha}^{i+1} \rightarrow X^{i+1} \subset X$  называют *характеристическим* отображением клетки.

**Пример.** Пусть  $X^0 = S^1 = \partial D^2$  — дискретный набор точек;  $X^1 = X^0$ , а  $X^2 = X$  получается приклеиванием  $D^2$  к  $X^0$  по тождественному отображению  $S^1 \rightarrow S^1$ . В таком случае для пространства  $X$  выполняется свойство (w), но не выполняется свойство (с).

**Пример.** Пусть  $S_n^1$  — окружность радиуса  $1/n$  с центром  $(0, 1/n)$ ,  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^1$  (рис. 51); топология пространства  $X$  индуцирована из  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим естественное взаимно однозначное отображение  $f: X \rightarrow Y$ , где  $Y$  —  $CW$ -комплекс с одной 0-мерной клеткой и приклеен-

ными к ней (обоими концами) клетками  $D_n^1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Отображение  $f$  не является гомеоморфизмом.

**Доказательство.** Выберем на каждой окружности  $S_n^1$  точку  $x_n$ , отличную от начала координат. Пусть  $F$  — подмножество в  $X$ , состоящее из точек  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Множество  $F$  не замкнуто, потому что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0, 0) \notin F$ . С другой стороны, множество  $f(F)$  замкнуто, потому что его пересечение с каждой замкнутой 1-мерной клеткой состоит ровно из одной точки.  $\square$

Одно из важнейших достоинств CW-комплексов состоит в том, что их непрерывные отображения можно строить индукцией по остовам, непрерывно продолжая внутрь клетки отображение, заданное на её границе. При этом обязательно получится непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  всего CW-комплекса, потому что множество  $f^{-1}(C)$  замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с любой замкнутой клеткой.

Подпространство  $A \subset X$ , где  $X$  — CW-комплекс, называют *подкомплексом*, если  $A$  замкнуто в  $X$  и является объединением некоторого семейства открытых клеток.

Приведём теперь некоторые важнейшие примеры CW-комплексов. Сфера  $S^n$  является CW-комплексом с одной 0-мерной клеткой и с одной  $n$ -мерной клеткой. На  $S^n$  можно также ввести структуру CW-комплекса с двумя клетками каждой размерности от 0 до  $n$ . Это легко сделать по индукции: к экватору  $S^{n-1} \subset S^n$  приклеивается северное полушарие и южное полушарие.

*Вещественным проективным пространством*  $\mathbb{R}P^n$  называют факторпространство  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  по следующему отношению эквивалентности:  $x \sim \lambda x$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Заменив в этом определении  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{C}$ , получим определение *комплексного проективного пространства*  $\mathbb{C}P^n$ .

Точке  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  соответствует точка  $(x_1 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ ; числа  $x_1, \dots, x_{n+1}$  называют при этом *однородными координатами* точки  $\mathbb{R}P^n$ . Для  $\mathbb{C}P^n$  обозначения аналогичны. Отображение  $(x_1 : x_2) \mapsto x_1/x_2$  является гомеоморфизмом множества  $\mathbb{R}P^1 \setminus \{(1:0)\}$  на  $\mathbb{R}^1$ , поэтому  $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ . Аналогично доказывается, что  $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ .

Чтобы ввести на  $\mathbb{R}P^n$  структуру CW-комплекса, рассмотрим отображение  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , заданное формулой

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left( x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \right).$$

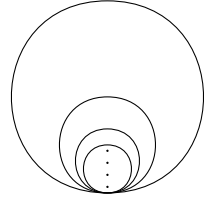


Рис. 51. Пространство, не гомеоморфное CW-комплексу

Образ границы  $S^{n-1} \subset D^n$  лежит в

$$\mathbb{R}P^{n-1} = \{(x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n : x_{n+1} = 0\}.$$

Кроме того, отображение  $f$  гомеоморфно отображает  $\text{int } D^n$  на  $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}$ ; обратное отображение имеет вид

$$(x_1 : \dots : x_{n+1}) \mapsto (\lambda^{-1}x_1x_{n+1}, \dots, \lambda^{-1}x_nx_{n+1}),$$

где  $\lambda^2 = x_{n+1}^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ ,  $\lambda > 0$ . Таким образом,  $\mathbb{R}P^n$  получается из  $\mathbb{R}P^{n-1}$  приклеиванием одной клетки размерности  $n$ .

Аналогично можно показать, что  $\mathbb{C}P^n$  получается из  $\mathbb{C}P^{n-1}$  приклеиванием одной клетки размерности  $2n$ . Будем считать, что

$$D^{2n} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq 1\}.$$

Рассмотрим отображение  $f: D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , заданное формулой

$$f(z_1, \dots, z_n) = (z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - |z_1|^2 - \dots - |z_n|^2}).$$

На  $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$  обратное отображение имеет вид

$$(z_1 : \dots : z_{n+1}) \mapsto (\lambda^{-1}z_1\bar{z}_{n+1}, \dots, \lambda^{-1}z_n\bar{z}_{n+1}),$$

где  $\lambda^2 = |z_{n+1}|^2(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$ ,  $\lambda > 0$ . Таким образом, на  $\mathbb{C}P^n$  можно ввести структуру  $CW$ -комплекса, имеющего клетки размерностей  $2i$ , где  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**З а д а ч а 9.1.** Докажите, что  $\mathbb{C}P^n$  получается из  $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$  отождествлением следующих точек  $\partial D^{2n} = S^{2n-1}$ :  $x \sim \lambda x$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ .

Те же самые конструкции, с помощью которых мы строили  $CW$ -комплексы  $S^n$ ,  $\mathbb{R}P^n$  и  $\mathbb{C}P^n$ , позволяют построить  $CW$ -комплексы  $S^\infty$ ,  $\mathbb{R}P^\infty$  и  $\mathbb{C}P^\infty$ .

**З а д а ч а 9.2.** Докажите, что пространство  $S^\infty$  стягиваемо.

$CW$ -комплексы во многом похожи на симплициальные комплексы. Можно даже доказать, что любой  $CW$ -комплекс гомотопически эквивалентен симплициальному комплексу (доказательство этого утверждения приведено, например, в [13] и в [19]). Но существуют и  $CW$ -комплексы, не гомеоморфные симплициальным комплексам. Чтобы построить пример такого  $CW$ -комплекса, рассмотрим непрерывную функцию на отрезке  $I = [0, 1]$ , заданную формулой  $f(x) = x \sin(\pi/2x)$  при  $x > 0$ ,  $f(0) = 0$  (рис. 52); образом отрезка  $I$  при отображении  $f$  служит отрезок  $[y_1, 1]$ .

Зададим отображение  $I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  формулой  $(x, y) \mapsto (x, xy, f(y))$  (рис. 53). В плоскости  $x = 1$  получаем график функции  $f$ . В плоскости  $x = c$ ,  $0 < c \leq 1$ , получаем такой же график, только сжатый в  $c$  раз



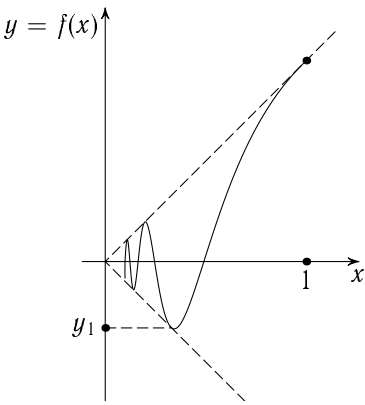


Рис. 52. График функции  $f$

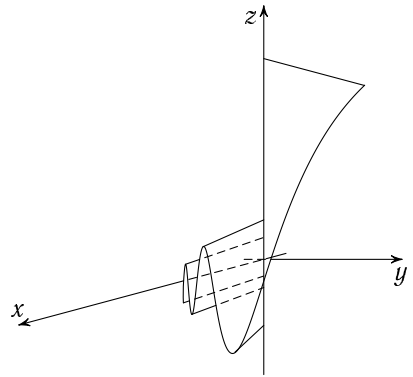


Рис. 53. График отображения квадрата

в направлении оси  $y$ . Наконец, в плоскости  $x = 0$  получаем отрезок  $(0, 0, z)$ , где  $z \in [y_1, 1]$ .

Рассмотрим CW-комплекс  $X$ , 0-мерные клетки которого — образы вершин квадрата  $I^2$  и точка  $(0, 0, y_1)$ , 1-мерные клетки — образы сторон квадрата и отрезок оси  $z$  от 0 до  $y_1$ , 2-мерная клетка — образ квадрата.

Нетрудно убедиться, что построенный CW-комплекс  $X$  не гомеоморфен никакому симплициальному комплексу, т. е.  $X$  — *нетриангулируемый* CW-комплекс. Действительно,  $X$  — компактное топологическое пространство, поэтому симплициальный комплекс, гомеоморфный  $X$ , обязан иметь конечное число вершин. С другой стороны, все точки  $(0, 0, y_i)$ , где  $y_i$  — значение функции  $f$  в точке локального максимума или минимума, обязаны быть вершинами симплициального комплекса, гомеоморфного  $X$ . Это следует из строения малых окрестностей этих точек. В двух наиболее простых случаях эти окрестности изображены на рис. 54 (а).

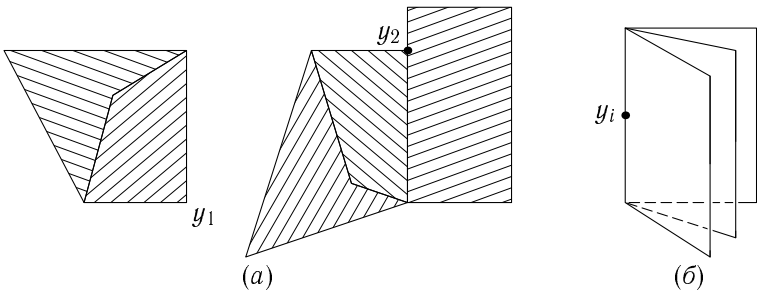


Рис. 54. Структура окрестности точки  $y_i$

В остальных случаях добавляется ещё несколько полуплоскостей; дополнительные полуплоскости изображены на рис. 54 (б).

### 9.3. Топологические свойства

$CW$ -комплексы обладают многими хорошими топологическими свойствами: любой  $CW$ -комплекс является хаусдорфовым (и даже нормальным) пространством; для  $CW$ -комплексов нет разницы между связностью и линейной связностью, любой  $CW$ -комплекс является локально стягиваемым пространством; любой  $CW$ -комплекс является паракомпактным пространством. Приступим к доказательству этих и других свойств  $CW$ -комплексов.

**Теорема 9.2.** *Любой  $CW$ -комплекс  $X$  является нормальным топологическим пространством.*

**Доказательство.** Сначала докажем, что любой остов  $X^n$  является нормальным пространством. При  $n = 0$  это утверждение очевидно: любая точка дискретного пространства  $X^0$  одновременно открыта и замкнута. Шаг индукции — теорема 9.1.

Докажем теперь нормальность пространства  $X$ . Пусть  $C \subset X$  — замкнутое подмножество,  $f: C \rightarrow I$  — непрерывная функция. Функция  $f$  задаёт на  $C \cap X^0$  функцию  $f_0$ , которую можно продолжить до функции  $F_0$  на  $X^0$ . Функции  $f$  и  $F_0$  задают на замкнутом множестве  $(C \cap X^1) \cup X^0$  функцию  $f_1$ , которую можно продолжить до функции на  $X^1$ , и т. д. В результате получим функцию  $F: X \rightarrow I$ , непрерывную на каждом остове и, в частности, на каждой замкнутой клетке. Из свойства (w) следует, что функция  $F$  непрерывна.  $\square$

**Задача 9.3.** Докажите, что любое компактное подмножество  $CW$ -комплекса пересекает лишь конечное число открытых клеток.

Для  $CW$ -комплексов нет разницы между связностью и линейной связностью, причём критерий связности  $CW$ -комплекса достаточно прост.

**Теорема 9.3.** а)  *$CW$ -комплекс  $X$  связан тогда и только тогда, когда связан его 1-мерный остов  $X^1$ .*

б)  *$CW$ -комплекс связан тогда и только тогда, когда он линейно связан.*

**Доказательство.** а) Если  $n \geq 2$ , то приклеивание  $D^n$  к остову  $X^{n-1}$  по отображению  $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  не изменяет количества компонент связности. Действительно, при  $n \geq 2$  образ  $S^{n-1}$  при непрерывном отображении связан, поэтому он целиком лежит в одной компоненте связности. Кроме того, при приклеивании  $D^n$  к связному пространству получается связанное пространство.

Ясно также, что CW-комплекс  $X$  связан, если связны его остовы  $X^n$  при  $n \geq 1$ . Если же все остовы  $X^n$  несвязны, то CW-комплекс  $X$  тоже несвязен.

б) Для 1-мерных CW-комплексов нет разницы между связностью и линейной связностью. В доказательстве утверждения а) можно заменить слово «связность» на «линейная связность», потому что при  $n \geq 2$  сфера  $S^{n-1}$  и диск  $D^n$  одновременно связны и линейно связны.  $\square$

Топологическое пространство  $X$  называют *локально стягиваемым*, если для любой точки  $x \in X$  и для любого открытого множества  $U \ni x$  существует такое стягиваемое открытое множество  $V$ , что  $x \in V \subset U$  (стягиваемость множества  $V$  означает, что тождественное отображение  $V \rightarrow V$  гомотопно постоянному отображению  $V \rightarrow x$ ). Свойство локальной стягиваемости весьма полезно в теории накрытий.

**Теорема 9.4.** *Любой CW-комплекс  $X$  является локально стягиваемым пространством.*

**Доказательство.** Построим индукцией по остовам стягиваемую окрестность  $V$  данной точки, которая удовлетворяет ещё и дополнительному условию  $\bar{V} \subset U$ .

Для любой точки  $x \in X$  однозначно определена открытая клетка  $\text{int } e_\alpha^m \approx \text{int } D_\alpha^m$ , которая содержит точку  $x$ . Множество  $\text{int } e_\alpha^m \cap U$  открыто в топологии пространства  $X^m$ . Пусть  $V_m$  — открытый шар с центром  $x$  столь малого радиуса, что  $\bar{V}_m \subset \text{int } e_\alpha^m \cap U$ ;  $f_t^m: V_m \rightarrow V_m$  — гомотопия, связывающая тождественное отображение и отображение  $V_m \rightarrow x$ .

Предположим теперь, что для некоторого  $n \geq m$  окрестность  $V_n$  в  $X^n$  и гомотопия  $f_t^n$  уже построены. Займёмся построением окрестности  $V_{n+1}$  в  $X^{n+1}$  и гомотопии  $f_t^{n+1}$ . Пусть

$\chi: D^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$  — характеристическое отображение некоторой клетки. Тогда  $\bar{V}'_n = \chi^{-1}(\bar{V}_n)$  — замкнутое подмножество в  $S^n \subset D^{n+1}$ , а  $U' = \chi^{-1}(U)$  — открытое (в топологии  $D^{n+1}$ ) подмножество  $D^{n+1}$ , причём  $\bar{V}'_n \subset U'$ , так как  $\bar{V}_n \subset U$ . Множество  $\bar{V}'_n$  компактно, поэтому для некоторого  $\varepsilon \in (0, 1)$  множество

$$\bar{V}'_{n+1} = \{tv \mid 1 - \varepsilon \leq t \leq 1, v \in \bar{V}'_n\}$$

содержится в  $U'$  (рис. 55). Множество

$$V'_{n+1} = \{tv \mid 1 - \varepsilon < t \leq 1, v \in V'_n\}$$

открыто в  $D^{n+1}$  и его замыкание совпадает с  $\bar{V}'_{n+1}$ . Легко построить гомотопию, связывающую тождественное отображение  $V'_{n+1} \rightarrow V'_{n+1}$

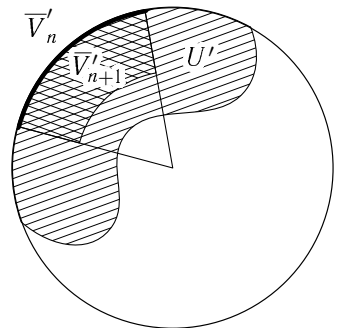


Рис. 55. Построение множества  $V'_{n+1}$

и естественную проекцию  $V'_{n+1} \rightarrow V'_n$ . Построив такие окрестности  $V'_{n+1}$  и такие гомотопии для всех  $(n+1)$ -мерных клеток, получим окрестность  $V_{n+1}$  в  $X^{n+1}$ , для которой  $\bar{V}_{n+1} \subset U$ ; кроме того, получим гомотопию, связывающую тождественное отображение  $V_{n+1} \rightarrow V_{n+1}$  с некоторым отображением  $V_{n+1} \rightarrow V_n$ , тождественным на  $V_n$ . Теперь с помощью гомотопии  $f'_i$  можно построить требуемую гомотопию  $f_i^{n+1}$ .

Множество  $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$  открыто в  $X$  и гомотопии  $f'_i$  определяют гомотопию, связывающую тождественное отображение  $V \rightarrow V$  и постоянное отображение  $V \rightarrow x$ .  $\square$

**Теорема 9.5.** *Любой CW-комплекс  $X$  является паракомпактным пространством.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  — открытое покрытие CW-комплекса  $X$ . Локально конечное покрытие  $\mathcal{V} = \{V_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ , вписанное в  $\mathcal{U}$ , мы будем строить индукцией по остовам  $X^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . А именно, на  $n$ -м шаге мы построим открытое покрытие  $\{V_{\beta,n}\}$  остова  $X^n$ ; при этом  $V_{\beta,0} \subset V_{\beta,1} \subset \dots$  и  $V_\beta = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_{\beta,n}$ . Семейство индексов  $\mathcal{B}$  тоже строится индукцией по  $n$ : на  $n$ -м шаге добавляются индексы  $\mathcal{B}_n$  (они соответствуют тем множествам  $V_{\beta,n}$ , которые нужно добавить, чтобы полностью покрыть  $X^n \setminus X^{n-1}$ ).

При  $n = 0$  положим  $\mathcal{B}_0 = X^0$ ; для  $\beta \in \mathcal{B}_0$  множество  $V_{\beta,0}$  состоит из одной точки  $\beta \in X^0$ . Для  $\beta \in \mathcal{B}_0$  выберем  $\alpha(\beta) \in \mathcal{A}$  так, что  $\beta \in U_{\alpha(\beta)}$ .

Предположим, что для некоторого  $n \geq 0$  уже построены как семейства индексов  $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_n$ , так и множества  $V_{\beta,n}$ ,  $\beta \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ . Мы построим множества  $V_{\beta,n+1}$  двух разных типов. Во-первых, для  $\beta \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$  расширим множество  $V_{\beta,n}$  до множества  $V_{\beta,n+1}$  так, чтобы множество  $V_{\beta,n+1}$  было открыто в  $X^{n+1}$  и содержалось в  $U_{\alpha(\beta)}$ . После этого часть множества  $X^{n+1} \setminus X^n$  может остаться не покрытой множествами  $V_{\beta,n+1}$ . Поэтому, чтобы полностью покрыть  $X^{n+1}$ , построим дополнительно множества  $V_{\beta,n+1}$ ,  $\beta \in \mathcal{B}_{n+1}$ , так, чтобы каждое из них содержалось в некотором множестве  $U_{\alpha(\beta)}$ . При этом подразумевается, что  $V_{\beta,0} = V_{\beta,1} = \dots = V_{\beta,n} = \emptyset$  для  $\beta \in \mathcal{B}_{n+1}$ .

Начнём с расширения множеств  $V_{\beta,n}$ . Пусть  $\chi: D^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$  — характеристическое отображение некоторой  $(n+1)$ -мерной клетки,  $V'_{\beta,n} = \chi^{-1}(V_{\beta,n})$  и  $U'_{\alpha(\beta)} = \chi^{-1}(U_{\alpha(\beta)})$ . Множество  $U' = \bigcup U'_{\alpha(\beta)}$  открыто в топологии  $D^{n+1}$ , поэтому множество  $D^{n+1} \setminus U'$  замкнуто. Кроме того,  $S^n = \partial D^{n+1} \subset U'$ . Следовательно, для некоторого  $\varepsilon \in (0, 1)$  множество  $\{tv \mid 1 - \varepsilon \leq t \leq 1, v \in S^n\}$  содержится в  $U'$ . Изменив отображение

$\chi$ , можно считать, что  $\varepsilon = 1/2$ . Положим

$$V'_{\beta, n+1} = \{tv \mid 1/2 < t \leq 1, v \in V'_{\beta, n}\}.$$

Множество  $V_{\beta, n+1}$  мы определим как объединение всех множеств  $\chi(V'_{\beta, n+1})$  для всех  $(n+1)$ -мерных клеток. Ясно, что  $V_{\beta, n} \subset V_{\beta, n+1} \subset U_{\alpha(\beta)}$  и множество  $V_{\beta, n+1}$  открыто в  $X^{n+1}$ .

Займёмся теперь построением дополнительных множеств  $V_{\beta, n+1}$ . При этом мы снова будем предполагать, что характеристическое отображение  $\chi$  изменено так, что  $\varepsilon = 1/2$ . Это означает, в частности, что если  $B = \{tv \mid 0 \leq t < 3/4, v \in S^n\}$ , то множество  $D^{n+1} \setminus B$  уже покрыто множествами  $V'_{\beta, n+1}$ , полученными при расширении множеств  $V'_{\beta, n}$ . Остаётся покрыть множество  $B$ . Открытые множества  $\text{int } \chi^{-1}(U_{\alpha})$  покрывают компактное множество  $\bar{B}$ , поэтому можно выбрать конечное множество индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  так, что множества  $\text{int } \chi^{-1}(U_{\alpha_i}), i = 1, \dots, k$ , покрывают  $\bar{B}$ . Положим  $V_{\alpha_i, n+1} = \chi(B \cap \chi^{-1}(U_{\alpha_i})), i = 1, \dots, k$ . Такие множества построим для всех  $(n+1)$ -мерных клеток.

Ясно, что  $V_{\beta} \cap X^n = V_{\beta, n}$ , поэтому  $V_{\beta}$  — открытое множество. Кроме того, если  $\beta \in \mathcal{B}_n$  и  $V_{\beta, n} \subset U_{\alpha(\beta)}$ , то  $V_{\beta} \subset U_{\alpha(\beta)}$ . Поэтому остаётся лишь доказать, что покрытие  $\mathcal{V} = \{U_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B}\}$  локально конечно. Сначала мы докажем индукцией по  $n$ , что  $\mathcal{V}_n = \{U_{\beta, n} \mid \beta \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n\}$  — локально конечное покрытие остова  $X^n$ . При  $n = 0$  это очевидно. Пусть требуемое утверждение доказано для остовов размерности  $\leq n$ . Рассмотрим произвольную точку  $x \in X^{n+1}$ . Пусть  $\chi: D^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$  — характеристическое отображение клетки, содержащее точку  $x$ .

Предположим сначала, что точка  $x$  лежит на границе  $(n+1)$ -мерной клетки  $\chi$ , т. е.  $x \in X^n$ . Тогда по предположению индукции существует открытое в  $X^n$  множество  $W_n \ni x$ , которое пересекается лишь с конечным числом множеств  $V_{\beta, n}$ . Положим

$$W'_{n+1} = \{tv \mid 3/4 < t \leq 1, v \in \chi^{-1}(W_n)\}.$$

Множество  $W'_{n+1}$  определим как объединение множеств  $\chi(W'_{n+1})$  для всех  $(n+1)$ -мерных клеток, содержащих точку  $x$ . Множество  $W'_{n+1}$  открыто в  $X^{n+1}$  и это множество не пересекается ни с одним из множеств  $V_{\beta, n+1}$ , где  $\beta \in \mathcal{B}_{n+1}$  (таким множествам соответствуют  $t < 3/4$ ).

Предположим теперь, что точка  $x$  лежит внутри  $(n+1)$ -мерной клетки  $\chi: D^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$ . Если  $x$  — центр шара, то положим  $W'_{n+1} = \{tv \mid 0 < t < 1/2, v \in S^n\}$  и  $W_{n+1} = \chi(W'_{n+1})$ ; множество  $W_{n+1}$  не пересекается ни с одним из множеств  $V_{\beta, n+1}$ , где  $\beta \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ . Если же  $x$  — не центр шара, то пусть  $x'$  — проекция точки  $x$  на  $S^n$  из центра шара. По предположению индукции существует открытое в  $X^n$  множество

$W_n \ni x'$ , пересекающееся лишь с конечным числом множеств  $V_{\beta,n}$ . Положим  $W'_{n+1} = \{tv \mid 0 < t < 1, v \in \chi^{-1}(W_n)\}$  и  $W_{n+1} = \chi(W'_{n+1})$ . Множество  $W_{n+1}$  пересекается лишь с теми множествами  $V_{\beta,n+1}$ ,  $\beta \in \mathcal{B}_0 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ , для которых  $W_n \cap V_{\beta,n} \neq \emptyset$ . По построению каждая  $(n+1)$ -мерная клетка пересекается лишь с конечным числом множеств  $V_{\beta,n+1}$  для  $\beta \in \mathcal{B}_{n+1}$ . Поэтому множество  $W_{n+1}$  пересекается лишь с конечным числом множеств  $V_{\beta,n+1}$ .

Предположим теперь, что точка  $x \in X$  лежит внутри  $n$ -мерной клетки. Описанная выше конструкция позволяет построить последовательность множеств  $W_n \subset W_{n+1} \subset \dots$ . При этом если  $m \geq n$ , то  $x \in W_m$  и множество  $W_m$  открыто в  $X^m$ . Кроме того, множество  $W_m$  пересекается лишь с теми множествами  $V_{\beta,m}$ , для которых  $W_n \cap V_{\beta,n} \neq \emptyset$ . Поэтому множество  $W = \bigcup_{m=n}^{\infty} W_m$  открыто в  $X$  и пересекается лишь с теми множествами  $V_{\beta}$ , для которых  $W_n \cap V_{\beta,n} \neq \emptyset$ . Таких множеств конечное число.  $\square$

#### 9.4. Клеточная аппроксимация

Пусть  $X$  и  $Y$  —  $CW$ -комплексы. Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *клеточным*, если  $f(X^n) \subset Y^n$ .

**Теорема 9.6** (о клеточной аппроксимации). *Пусть  $X$  и  $Y$  —  $CW$ -комплексы,  $A \subset X$  — подкомплекс (возможно,  $A = \emptyset$ ),  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение, ограничение которого на  $A$  является клеточным отображением. Тогда существует клеточное отображение  $g: X \rightarrow Y$ , гомотопное  $f$ , причём на  $A$  гомотопия неподвижна.*

**Доказательство.** Требуемое отображение  $g$  и требуемую гомотопию можно строить индукцией по размерности клетки  $\sigma_{\alpha}^n$  в  $X$ , рассматривая каждую клетку отдельно и не изменяя отображение, которое уже построено на границе клетки. Чтобы построить отображение  $g$ , достаточно рассмотреть отдельно каждую клетку  $e_{\beta}^m$  в  $Y$ , где  $m > n$ , и «выдавить» из неё образ клетки  $\sigma_{\alpha}^n$  на границу  $\partial e_{\beta}^m$  так, чтобы вне  $\text{int } e_{\beta}^m$  отображение  $f$  не изменилось. Поэтому мы ограничимся рассмотрением следующей ситуации. Заданы непрерывное отображение  $f: D^n \rightarrow Y$  и характеристическое отображение клетки  $\chi: D^m \rightarrow Y$ , где  $m > n$ ; при этом  $f(S^{n-1}) \subset Y \setminus \text{int } \chi(D^m)$ . Мы хотим построить непрерывное отображение  $g: D^n \rightarrow Y$ , обладающее следующими свойствами:

- 1) если  $f(x) \notin \text{int } \chi(D^m)$ , то  $g(x) = f(x)$ ;
- 2) отображение  $g$  гомотопно  $f$ , причём гомотопия неподвижна вне  $\text{int } \chi(D^m)$ ;
- 3)  $g(D^n) \subset Y \setminus \text{int } \chi(D^m)$ .

Шаг 1. Существует отображение  $g: D^n \rightarrow Y$ , которое обладает свойствами 1 и 2 и образу которого не принадлежит хотя бы одна точка  $y \in \text{int } \chi(D^m)$ .

Пусть  $D_\varepsilon^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$  (мы предполагаем, что  $D^m = D_1^m$ ). При  $0 < \varepsilon < 1$  шар  $D_\varepsilon^m$  гомеоморфно отображается на  $\chi(D_\varepsilon^m) \subset Y$ . Чтобы сократить обозначения, отождествим  $D_\varepsilon^m$  с  $\chi(D_\varepsilon^m) \subset Y$ . На компактном множестве  $f^{-1}(D_{3/4}^m)$  отображение  $f$  равномерно непрерывно, поэтому можно выбрать  $\delta > 0$  так, что если  $x, y \in f^{-1}(D_{3/4}^m) \subset D^n$  и  $\|x - y\| < \delta$ , то  $\|f(x) - f(y)\| < 1/4$ . Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию шара  $D^n$  (предварительно отождествив его с  $n$ -мерным симплексом), чтобы диаметр любого симплекса был меньше  $\delta$ . Тогда если образ симплекса этой триангуляции при отображении  $f$  пересекает  $S_{1/2}^{m-1} = \partial D_{1/2}^m$ , то образ этого симплекса целиком лежит в  $D_{3/4}^m \setminus D_{1/4}^m$ . Симплексы всех размерностей рассматриваемой триангуляции  $D^n$  разбиваются на три непересекающихся класса:

- образ симплекса целиком лежит вне  $S_{1/2}^{m-1}$ ;
- образ симплекса целиком лежит внутри  $S_{1/2}^{m-1}$ ;
- образ симплекса пересекает  $S_{1/2}^{m-1}$ .

Отображение  $g$  и гомотопию для каждого симплекса триангуляции будем строить отдельно. В случае а положим  $g(x) = f(x)$  для всех точек симплекса. В случае б положим  $g(v) = f(v)$  для всех вершин симплекса, а затем продолжим это отображение по линейности. Для симплекса, образ которого пересекает  $S_{1/2}^{m-1}$ , ситуация наиболее сложная, потому что на некоторых его гранях отображение уже определено (если они относятся к случаям а или б), и это отображение нужно продолжать на весь симплекс согласованным образом. Для вершин положим  $g(v) = f(v)$ . Для 1-мерной грани отображение либо уже определено, либо пока ещё нет. В последнем случае продолжим по линейности на весь симплекс отображение его концов. Если на 2-мерной грани отображение  $g$  пока ещё не определено, то определим его следующим образом. Двумерную грань  $\Delta^2$  можно покрыть отрезками вида  $[m, x]$ , где  $m$  — барицентр симплекса  $\Delta^2$ ,  $x$  — точка края  $\partial\Delta^2$ . В точке  $x$  отображение  $g$  уже определено. Положим  $g(m) = f(m)$  и продолжим отображение отрезка  $[m, x]$  по линейности (рис. 56). Затем такую же конструкцию применим к 3-мерным граням, и т. д.

Пусть  $\Delta^k$  — некоторый симплекс триангуляции  $D^n$ . Ясно, что  $g(\Delta^k)$  принадлежит выпуклой оболочке множества  $f(\Delta^k)$ . В случае в выпуклая оболочка множества  $f(\Delta^k)$  не пересекает  $D_{1/4}^m$ . Действительно, если  $y_0 \in f(\Delta^k) \cap S_{1/2}^{m-1}$ , то  $f(\Delta^k)$  лежит внутри шара радиуса  $1/4$  с центром  $y_0$ , а этот шар не пересекает  $D_{1/4}^m$ .

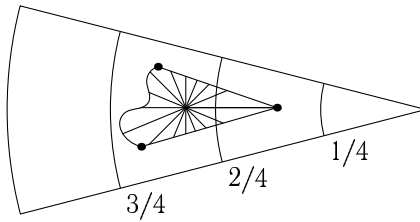


Рис. 56. Первый шаг клеточной аппроксимации

Гомотопию  $f_t$ , связывающую отображения  $f$  и  $g$ , определим следующим образом. Если  $f(x) = g(x)$ , то положим  $f_t(x) = f(x)$  при всех  $x$ . Если  $f(x) \neq g(x)$ , то обе точки  $f(x)$  и  $g(x)$  лежат внутри шара  $D^m$ ; в таком случае можно положить  $f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ .

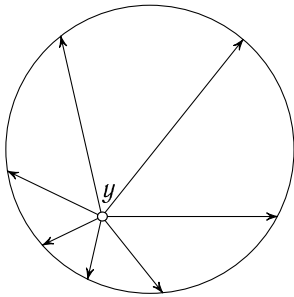


Рис. 57. Второй шаг клеточной аппроксимации

Пересечение шара  $D_{1/4}^m$  с образом отображения  $g$  содержится в объединении конечного числа аффинных плоскостей размерности  $n < m$ , поэтому в шаре  $D_{1/4}^m$  найдётся требуемая точка  $y$ , не принадлежащая образу отображения  $g$ .

**Шаг 2.** Существует отображение  $g_1: D^n \rightarrow Y$ , которое обладает всеми требуемыми свойствами 1, 2 и 3.

Согласно шагу 1 отображение  $f$  можно заменить на отображение  $g_0$ , образу которого не принадлежит некоторая точка  $y \in \text{int } \chi(D^m)$ . Рассмотрим композицию отображения  $g_0$  и проекции из точки  $y$  на границу шара (рис. 57). Полученное отображение  $g_1$  обладает свойством 3 и гомотопно  $g_0$ ; связывающая их гомотопия задаётся формулой

$g_t = (1-t)g_0 + tg_1$ .  $\square$

## 9.5. Геометрическая реализация CW-комплексов

Пусть  $X$  — CW-комплекс. Назовём непрерывное отображение  $i: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  *вложением*, если отображение  $i$  является гомеоморфизмом  $X$  на  $i(X)$ .

**Теорема 9.7.** Для любого конечного CW-комплекса  $X$  размерности  $n$  существует вложение в  $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ .

**Доказательство.** Конечный CW-комплекс  $X$  компактен, поэтому согласно теореме 7.2 (см. с. 100) любое инъективное отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}^N$  является вложением.



Применим индукцию по  $n = \dim X$ . При  $n = 0$  утверждение очевидно. Предположим, что для  $(n - 1)$ -мерного остова  $X^{n-1}$  построено вложение  $i_{n-1}: X^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ . После сдвига можно считать, что  $0 \notin i_{n-1}(X^{n-1})$ . Вложение  $i_n: X^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$  мы построим следующим образом. Для  $x \in X^{n-1}$  положим

$$i_n(x) = (i_{n-1}(x), 0, 0) \in \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}.$$

Рассмотрим теперь  $n$ -мерные клетки  $\chi_\alpha(D_\alpha^n)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ . Каждую точку диска  $D_\alpha^n$  представим в виде  $tx_\alpha$ , где  $0 \leq t \leq 1$  и  $x_\alpha \in S_\alpha^{n-1} = \partial D_\alpha^n$ , т. е.  $\|x_\alpha\| = 1$ . При этом для точки  $x_\alpha$  уже определено вложение  $i_{n-1}(\chi_\alpha(x_\alpha))$ , которое мы для краткости обозначим  $i_{n-1}(x_\alpha)$ . Для точки  $tx_\alpha \in D_\alpha^n$  положим

$$i_n(tx_\alpha) = \begin{cases} (0, tx_\alpha, \alpha) & \text{при } t \leq 1/2; \\ ((2t - 1)i_{n-1}(x_\alpha), (1 - t)x_\alpha, 2\alpha(1 - t)) & \text{при } t \geq 1/2; \end{cases}$$

при  $t = 1/2$  оба выражения совпадают.

Проверим, что отображение  $i_n$  инъективно. Пусть  $i_n(t_1x_\alpha) = i_n(t_2x_\beta)$ . При  $t_1 \leq 1/2$  и  $t_2 > 1/2$  можно воспользоваться тем, что  $i_n(x_\beta) \neq 0$ . При  $t_1, t_2 \leq 1/2$  равенства  $t_1 = t_2$ ,  $x_\alpha = x_\beta$  и  $\alpha = \beta$  очевидны. При  $t_1, t_2 \geq 1/2$  из равенства  $(1 - t_1)x_\alpha = (1 - t_2)x_\beta$  следует, что  $t_1 = t_2$  (напомним, что  $\|x_\alpha\| = \|x_\beta\| = 1$ ), поэтому  $x_\alpha = x_\beta$  и  $\alpha = \beta$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Можно получить и более точную оценку размерности: конечный  $CW$ -комплекс размерности  $n$  вкладывается в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Доказательство этого утверждения приведено в [8].

## § 10. Конструкции

Нам уже встречались некоторые конструкции, применяемые к топологическим пространствам, — прямое произведение, букет, приклеивание по отображению. Здесь мы более подробно обсудим эти и другие конструкции, а также некоторые связи между этими конструкциями. Нам будет также интересно, как нужно изменить определение конструкции, чтобы она стала *симплициальной* (или *клеточной*), т. е. чтобы при применении конструкции к симплициальным комплексам (или  $CW$ -комплексам) в результате получались симплициальные комплексы (или  $CW$ -комплексы).

### 10.1. Прямое произведение

Напомним, что если  $X$  и  $Y$  — топологические пространства, то базой топологии пространства  $X \times Y$  служат прямые произведения открытых

множеств в  $X$  и в  $Y$ . При этом обе проекции  $p_X(x, y) = x$  и  $p_Y(x, y) = y$  являются непрерывными отображениями.

Прямое произведение двух симплексов положительной размерности не является симплексом, но оно является евклидовой клеткой. Теорема 8.2 (см. с. 114) показывает, что прямое произведение двух симплексов можно триангулировать, т. е. представить в виде симплициального комплекса. Замечание после этой теоремы показывает, что при построении этого симплициального комплекса можно обойтись без добавления дополнительных вершин.

Если  $X$  и  $Y = CW$ -комплексы, то пространство  $X \times Y$  можно естественным образом разбить на клетки. А именно, рассмотрим клетки  $\varphi: (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (X^p, X^{p-1})$  и  $\psi: (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (X^q, X^{q-1})$ . Ясно, что  $D^p \times D^q \approx D^{p+q}$  и

$$S^{p+q-1} \approx \partial D^{p+q} \approx (\partial D^p \times D^q) \cup (D^p \times \partial D^q).$$

Поэтому по отображениям  $\varphi$  и  $\psi$  можно построить отображение

$$(D^{p+q}, S^{p+q-1}) \rightarrow (X^p \times Y^q, X^p \times Y^{q-1} \cup X^{p-1} \times Y^q).$$

На множестве  $X \times Y$  есть топология прямого произведения. Если  $X$  и  $Y$  — конечные  $CW$ -комплексы, то описанное выше разбиение  $X \times Y$  на клетки обладает свойствами (с) и (w), т. е.  $X \times Y$  —  $CW$ -комплекс. Но для бесконечных  $CW$ -комплексов свойство (w) может и не выполняться.

**Задача 10.1.** Пусть  $S^p \vee S^q = (S^p \times \{*\}) \cup (\{*\} \times S^q) \subset S^p \times S^q$ . Докажите, что  $S^p \times S^q / S^p \vee S^q \approx S^{p+q}$ .

## 10.2. Цилиндр, конус и надстройка

Пусть  $I = [0, 1]$ ,  $X$  — топологическое пространство. *Цилиндром* над  $X$  называют топологическое пространство  $X \times I$ .

*Конусом* над  $X$  называют факторпространство  $X \times I / (X \times \{1\})$ ; здесь имеется в виду факторизация по отношению эквивалентности  $x_1 \times \{1\} \sim \sim x_2 \times \{1\}$  для любых  $x_1, x_2 \in X$ . Конус над  $X$  обозначают  $CX$ .

*Надстройкой* над  $X$  называют факторпространство

$$\Sigma X = X \times I / (X \times \{1\} \cup X \times \{0\}) = CX / (X \times \{0\}).$$

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что  $CS^n \approx D^{n+1}$  и  $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$ .

Если  $X$  —  $CW$ -комплекс и  $A$  — его подкомплекс, то  $X/A$  —  $CW$ -комплекс. Поэтому  $CX$  и  $\Sigma X$  —  $CW$ -комплексы. Таким образом, цилиндр, конус и надстройка — клеточные конструкции.

### 10.3. Джойн

Джойном  $X * Y$  топологических пространств  $X$  и  $Y$  называют факторпространство  $X \times I \times Y$  по следующему отношению эквивалентности:  $(x_1, t_1, y_1) \sim (x_2, t_2, y_2)$ , если либо  $t_1 = t_2 = 0$  и  $x_1 = x_2$ , либо  $t_1 = t_2 = 1$  и  $y_1 = y_2$ . Джойн  $X * Y$  допускает весьма простое геометрическое описание в том случае, когда  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ , причём отрезки вида  $[x, y]$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , не имеют общих внутренних точек. Действительно, в этом случае  $X * Y$  — объединение всех отрезков  $[x, y]$ .

У п р а ж н е н и е 2. Докажите, что  $D^p * D^q \approx D^{p+q+1}$ .

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что  $D^0 * X \approx CX$  и  $S^0 * X \approx \Sigma X$ . (Здесь  $D^0$  — одна точка,  $S^0$  — две точки.)

У п р а ж н е н и е 4. Пусть  $x \in S^p$ ,  $y \in S^q$ ,  $t \in [0, 1]$ . Докажите, что отображение

$$(x, t, y) \mapsto \left( \cos \frac{\pi t}{2} x, \sin \frac{\pi t}{2} y \right)$$

является гомеоморфизмом  $S^p * S^q$  на  $S^{p+q+1}$ .

Пусть  $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q$  — точки общего положения в  $\mathbb{R}^{p+q+1}$ . Тогда джойном симплексов с вершинами  $a_0, \dots, a_p$  и  $b_0, \dots, b_q$  является симплекс с вершинами  $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q$ . Это замечание показывает, что джойн непересекающихся абстрактных симплициальных комплексов  $A$  и  $B$  состоит из симплексов вида  $\alpha \cup \beta$ , где  $\alpha$  — симплекс из  $A$ ,  $\beta$  — симплекс из  $B$ . (Напомним, что симплекс абстрактного симплициального комплекса — это просто некоторый набор вершин.)

**Т е о р е м а 10.1.** Пусть  $X, Y$  и  $Z$  — конечные симплициальные комплексы. Тогда  $(X * Y) * Z \approx X * (Y * Z)$ .

**Доказательство.** Реализуем  $X, Y$  и  $Z$  в  $\mathbb{R}^n$  так, чтобы их вершины  $\{x_\alpha\}$ ,  $\{y_\beta\}$  и  $\{z_\gamma\}$  были точками общего положения. Тогда оба пространства  $(X * Y) * Z$  и  $X * (Y * Z)$  гомеоморфны объединению всех симплексов с вершинами  $x_{i_0}, \dots, x_{i_p}, y_{j_0}, \dots, y_{j_q}, z_{k_0}, \dots, z_{k_r}$ , где  $p, q, r \geq 0$ .  $\square$

Пусть  $K$  — симплициальный комплекс,  $p \in \mathbb{N}$  и  $2 \leq j \leq p$ . Определим *взрезанный джойн*  $J_j^p(K)$  следующим образом. Рассмотрим  $p$ -кратный джойн  $J^p(K) = K * \dots * K$ ; его симплекс представляет собой упорядоченный набор  $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  симплексов из  $K$ . Выберем среди всех таких наборов те, для которых любые  $j$  симплексов попарно не пересекаются. Эти наборы и образуют симплексы комплекса  $J_j^p(K)$ .

Обозначим  $k$ -мерный остов симплекса  $\Delta^n$  через  $sk_k \Delta^n$ ; симплекс  $\Delta^n$  мы естественным образом рассматриваем как симплициальный комплекс.

Известна конструкция, основанная на взрезанном джойне  $J_2^2$ , которая позволяет свести к теореме Борсука—Улама доказательство того, что симплициальный комплекс  $\text{sk}_n \Delta^{2n+2}$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ , т. е. не существует гомеоморфизма  $\text{sk}_n \Delta^{2n+2}$  на подмножество в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Напомним, что согласно теореме 8.4 на странице 116 любой конечный  $n$ -мерный симплициальный комплекс можно вложить в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Теорему о том, что  $\text{sk}_n \Delta^{2n+2}$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ , независимо доказали ван Кампен [131] и Флорес [57]. Наше изложение следует в основном [64].

Предположим, что  $K$  — симплициальный комплекс,  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — вложение (для краткости пространство  $|K|$  мы обозначаем  $K$ ). Пусть  $CK$  — конус над  $K$ . По отображению  $f$  очевидным образом строится отображение  $\bar{f}: CK \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , ограничение которого на  $K$  взаимно однозначно и  $\bar{f}(K) \cap \bar{f}(CK \setminus K) = \emptyset$ .

Рассмотрим в  $CK \times CK$  подпространство  $\hat{K}$ , состоящее из произведений всех пар непересекающихся симплексов в  $CK$ , по крайней мере один из которых лежит в  $K$ . Легко строится гомоморфизм  $\varphi: \hat{K} \rightarrow J_2^2(K)$ . Действительно, любую точку  $\hat{K}$  можно однозначно представить в виде  $(t_1 x_1 + (1 - t_1)v, t_2 x_2 + (1 - t_2)v)$ , где  $v$  — вершина конуса  $CK$ , точки  $x_1, x_2$  лежат в непересекающихся симплексах  $\sigma_1, \sigma_2 \subset K$  и по крайней мере одно из чисел  $t_1$  и  $t_2$  равно 1. Положим

$$\varphi(t_1 x_1 + (1 - t_1)v, t_2 x_2 + (1 - t_2)v) = \begin{cases} \langle x_1, \frac{t_2}{2}, x_2 \rangle & \text{при } t_1 = 1; \\ \langle x_1, 1 - \frac{t_2}{2}, x_2 \rangle & \text{при } t_2 = 1. \end{cases}$$

На пространствах  $\hat{K}$  и  $J_2^2(K)$  есть естественные инволюции  $(a, b) \leftrightarrow (b, a)$  и  $\langle x_1, t, x_2 \rangle \leftrightarrow \langle x_2, 1 - t, x_1 \rangle$ . Гомеоморфизм  $\varphi$  коммутирует с этими инволюциями.

По отображению  $\bar{f}$  можно построить отображение  $\hat{f}: \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ , положив  $\hat{f}(a, b) = \bar{f}(a) - \bar{f}(b)$ . Это отображение антикоммутирует с инволюцией, т. е.  $\hat{f}(a, b) = -\hat{f}(b, a)$ . Кроме того  $\hat{f}(a, b) \neq 0$  для всех  $(a, b) \in \hat{K}$ . Действительно, пусть  $(a, b) \in \hat{K}$  и  $\bar{f}(a) = \bar{f}(b)$ . Тогда  $\bar{f}(a) = \bar{f}(b) \in \bar{f}(K)$ , поскольку одна из точек  $a, b$  лежит в  $K$ . Но тогда обе точки  $a, b$  лежат в  $K$ , поскольку  $\bar{f}(K) \cap \bar{f}(CK \setminus K) = \emptyset$ . Наконец,  $a = b$ , поскольку ограничение  $\bar{f}$  на  $K$  взаимно однозначно. А по условию  $a$  и  $b$  лежат в непересекающихся симплексах.

В итоге получаем, что если взрезанный джойн  $J_2^2(K)$  гомеоморфен  $S^{2n+1}$ , причём при этом гомеоморфизме естественная инволюция переходит в симметрию относительно центра сферы, то  $K$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Действительно, если бы  $K$  удалось вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ , то мы

смогли бы построить отображение  $g: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ , для которого  $g(-x) = -g(x)$  для всех  $x \in S^{2n+1}$ . А это противоречит теореме Борсука—Улама.

**Теорема 10.2.** *Пространство  $J_2^2(\text{sk}_n \Delta^{2n+2})$  гомеоморфно  $S^{2n+1}$ , причём при этом гомеоморфизме естественная инволюция переходит в симметрию относительно центра сферы.*

**Доказательство.** Для  $n=0$  доказательство непосредственно видно из рис. 58. Мы берём в качестве одного экземпляра  $\text{sk}_0 \Delta^2$  точки  $a, b, c$ ; в качестве другого экземпляра — точки  $-a, -b, -c$ . Чтобы получить взрезанный джойн, нужно соединить  $a$  с  $-b$  и  $-c$  и т. д. Легко проверить, что естественная инволюция переходит в симметрию относительно центра.

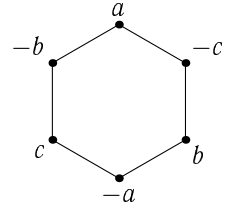


Рис. 58. Взрезанный джойн трёх точек

Для произвольного  $n$  эта конструкция обобщается следующим образом. В качестве одного экземпляра  $\text{sk}_n \Delta^{2n+2}$  возьмём  $n$ -мерный остов симплекса в  $\mathbb{R}^{2n+2}$  с вершинами  $v_0, \dots, v_{2n+2}$ . В качестве начала координат выберем центр масс симплекса. Тогда  $v_0, \dots, v_{2n+2}$  можно рассматривать как векторы, сумма которых равна нулю. В качестве второго экземпляра  $\text{sk}_n \Delta^{2n+2}$  возьмём  $n$ -мерный остов симплекса с вершинами  $-v_0, \dots, -v_{2n+2}$ .

Искомое пространство  $J_2^2(\text{sk}_n \Delta^{2n+2})$  получается следующим образом. Выберем из каждого набора  $v_0, \dots, v_{2n+2}$  и  $-v_0, \dots, -v_{2n+2}$  по  $n+1$  точке так, чтобы все выбранные точки имели попарно различные номера. Рассмотрим выпуклую оболочку выбранных точек; это будет  $(2n+1)$ -мерный симплекс. Если такие симплексы не имеют общих внутренних точек, то их объединение и есть искомое пространство.

Прежде всего отметим, что ни одна из рассматриваемых выпуклых оболочек не содержит точку  $0$ . Действительно, равенство  $\sum \lambda_i v_i = 0$  может выполняться лишь в том случае, когда все числа  $\lambda_i$  равны, а мы рассматриваем только те выпуклые оболочки, в которые не входит один из векторов  $v_i$ .

Пусть  $e$  — единичный вектор в  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Покажем, что луч  $\{\lambda e : \lambda > 0\}$  пересекает рассматриваемое множество в одной точке. После изменения нумерации векторов можно считать, что  $e = \sum \alpha_i v_i$ , где  $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{2n+2}$ . Тогда  $e = e - \alpha_{k+1} \sum v_i = \sum (\alpha_i - \alpha_{k+1}) v_i = \sum \beta_i v_i$ , где  $\beta_i \leq 0$

при  $0 \leq i \leq k$ ,  $\beta_{k+1} = 0$  и  $\beta_i \geq 0$  при  $k+2 \leq i \leq 2k+2$ . Пусть  $\beta' = -\sum_{i=0}^k \beta_i$ ,  $\beta'' = \sum_{i=k+2}^{2k+2} \beta_i$  и  $\beta = \beta' + \beta''$ ; хотя бы одно из чисел  $\beta'$  и  $\beta''$  отлично от нуля,

поскольку  $e \neq 0$ . Точка

$$\frac{\beta'}{\beta} \sum_{i=0}^k \left( -\frac{\beta_i}{\beta'} \right) (-v_i) + \frac{\beta''}{\beta} \sum_{i=k+2}^{2k+2} \frac{\beta_i}{\beta'} v_i = \frac{e}{\beta}$$

принадлежит одной из рассматриваемых выпуклых оболочек (если  $\beta' = 0$  или  $\beta'' = 0$ , то соответствующее слагаемое считается равным нулю).

После перенумерации векторов  $v_i$  точку  $y$  из рассматриваемой выпуклой оболочки можно представить в виде  $y = \sum \alpha_i v_i$ , где  $\alpha_i \leq 0$  при  $0 \leq i \leq k$ ,  $\alpha_{k+1} = 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  при  $k+2 \leq i \leq 2k+2$  и  $\sum |\alpha_i| = 1$ . Предположим, что точка  $\lambda y$ ,  $\lambda > 0$ , тоже принадлежит одной из рассматриваемых выпуклых оболочек. Тогда  $\lambda y = \sum \beta_i v_i$ , где  $\sum |\beta_i| = 1$  и среди чисел  $\beta_i$  не более  $k+1$  положительных и не более  $k+1$  отрицательных. Ясно, что

$$\sum_{i=0}^{2k+2} \left( \alpha_i - \frac{\beta_i}{\lambda} \right) v_i = y - \frac{\lambda y}{\lambda} = 0,$$

поэтому все числа  $\alpha_i - \beta_i/\lambda$  равны одному и тому же числу  $\gamma$ , т.е.  $\beta_i = \lambda(\alpha_i - \gamma)$ . Если  $\gamma > 0$ , то  $\beta_0 \leq \dots \leq \beta_{k+1} = -\lambda\gamma < 0$ , а если  $\gamma < 0$ , то  $\beta_{2k+2} \geq \dots \geq \beta_{k+1} = -\lambda\gamma > 0$ . Это противоречит тому, что среди чисел  $\beta_i$  не более  $k+1$  положительных и не более  $k+1$  отрицательных. Значит,  $\gamma = 0$ , т.е.  $\beta_i = \lambda\alpha_i$ . По условию  $\lambda > 0$  и  $\sum |\alpha_i| = \sum |\beta_i| = 1$ , поэтому  $\lambda = 1$ .

Таким образом, каждый луч  $\{\lambda e \mid \lambda > 0\}$  пересекает рассматриваемое множество ровно в одной точке. Значит, оно гомеоморфно  $S^{2n+1}$ . Кроме того, мы доказали, что представление точки в виде  $\sum \alpha_i v_i$ , где  $\sum |\alpha_i| = 1$  и среди точек  $\alpha_i$  не более  $n+1$  положительных и не более  $n+1$  отрицательных, единственно. Это означает, что рассматриваемые  $(2n+1)$ -мерные симплексы не имеют общих внутренних точек.  $\square$

Приведём ещё одно вычисление взрезанных джойнов.

**Т е о р е м а 10.3** (см. [119]).  $J_j^p(\Delta^n) \approx J^{n+1}(\text{sk}_{j-2} \Delta^{p-1})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $n=0$ , то  $\Delta^n = *$  (одна точка) и симплексы комплекса  $J_j^p(\Delta^n)$  имеют вид  $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ , где не более  $j-1$  симплексов  $\sigma_i$  состоят из одной точки, а все остальные симплексы — пустые множества. Это и есть  $\text{sk}_{j-2} \Delta^{p-1} = J^1(\text{sk}_{j-2} \Delta^{p-1})$ .

Легко проверить, что если  $A$  и  $B$  — произвольные симплицеальные комплексы, то  $J_j^p(A * B) \approx J_j^p(A) * J_j^p(B)$ . Действительно, в определении джойна все симплексы из  $A$  и  $B$  рассматриваются как различные (даже если  $A = B$ ). Ясно также, что если  $a_\alpha \cap b_\beta = \emptyset$  при всех  $\alpha$  и  $\beta$ , то пересечение множеств  $a_{k_1} \cup b_{l_1}, \dots, a_{k_j} \cup b_{l_j}$  пусто тогда и только тогда, когда  $a_{k_1} \cap \dots \cap a_{k_j} = \emptyset$  и  $b_{l_1} \cap \dots \cap b_{l_j} = \emptyset$ .

Воспользовавшись тем, что  $\Delta^n \approx J^{n+1}(\Delta^0)$ , получаем

$$J_j^p(\Delta^n) \approx J_j^p(\Delta^0 * \dots * \Delta^0) \approx J^{n+1}(J_j^p(\Delta^0)) \approx J^{n+1}(\text{sk}_{j-2} \Delta^{p-1}). \quad \square$$

Следствие 1.  $J_p^p(\Delta^n) \approx J^{n+1}(S^{p-2}) \approx S^{(n+1)(p-1)-1}$ .

Следствие 2. Пространство  $J_j^p(\Delta^n)$  гомотопически эквивалентно букету сфер размерности  $(n+1)(j-1)-1$ .

#### 10.4. Симметрическая степень

Пусть  $X$  — топологическое пространство. На топологическом пространстве  $X^n = X \times \dots \times X$  действует группа  $S_n$ :  $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . Факторпространство  $X^n$  по этому действию группы  $S_n$  называют  $n$ -й симметрической степенью пространства  $X$  и обозначают  $\text{SP}^n(X)$ .

Упражнение 5. Докажите, что  $\text{SP}^2(\mathbb{R}) \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ .

Теорема 10.4.  $\text{SP}^n(S^2) \approx \text{SP}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$ .

Доказательство. Пусть  $(a_1 : b_1), \dots, (a_n : b_n) \in \mathbb{C}P^1$  и  $\prod_{i=1}^n (a_i x - b_i y) = \sum_{k=0}^n c_k x^k y^{n-k}$ . При замене пары  $(a_i : b_i)$  на  $(\lambda a_i : \lambda b_i)$  все коэффициенты  $c_k$  умножаются на  $\lambda^n$ , поэтому формула

$$((a_1 : b_1), \dots, (a_n : b_n)) \mapsto (c_0 : \dots : c_n)$$

задаёт отображение  $\mathbb{C}P^1 \times \dots \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . При перестановке точек  $(a_1 : b_1), \dots, (a_n : b_n)$  точка  $(c_0 : \dots : c_n)$  не изменяется, поэтому получаем отображение  $h: \text{SP}^n(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ .

Над полем  $\mathbb{C}$  любой многочлен от одной переменной разлагается на линейные множители. Поэтому любой многочлен  $\sum_{k=0}^n c_k x^k y^{n-k}$ , где не все числа  $c_k$  равны нулю, можно представить в виде  $\prod_{i=1}^n (a_i x - b_i y)$ , где для всех  $i$  хотя бы одно из чисел  $a_i$  и  $b_i$  отлично от нуля. Это означает, что отображение  $h$  сюръективно. Инъективность отображения  $h$  следует из того, что коэффициенты многочлена определяют его корни с точностью до перестановки. Ясно также, что отображение  $h$  непрерывно.

Итак,  $h: \text{SP}^n(S^2) \rightarrow \mathbb{C}P^n$  — непрерывное взаимно однозначное отображение. Пространство  $\text{SP}^n(S^2)$  компактно, потому что оно является образом компактного пространства  $S^2 \times \dots \times S^2$  при непрерывном отображении. Пространство  $\mathbb{C}P^n$  хаусдорфово, потому что оно является  $CW$ -комплексом. Поэтому согласно теореме 7.2 (см. с. 100) отображение  $h$  является гомеоморфизмом.  $\square$

Теорема 10.5. а)  $SP^n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$ .

б)  $SP^n(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

Доказательство. а) Отображение  $b \mapsto (1 : b)$  задаёт вложение  $\mathbb{C}$  в  $CP^1 \approx S^2$ . Это отображение индуцирует вложение  $SP^n(\mathbb{C})$  в  $SP^n(CP^1) \approx CP^n$ . Точки  $(b_1, \dots, b_n) \in SP^n(\mathbb{C})$  сопоставляются коэффициенты многочлена  $\prod_{i=1}^n (x - b_i)$ , поэтому образ  $SP^n(\mathbb{C})$  — это  $\mathbb{C}^n \subset CP^n$ .

Гомеоморфность отображения  $SP^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$  следует из гомеоморфности отображения  $SP^n(CP^1) \rightarrow CP^n$ . (Прямое доказательство гомеоморфности отображения  $SP^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$  приведено в [67].)

б) Требуется доказать, что если  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , то коэффициенты всех многочленов вида  $\prod_{i=1}^n (x - b_i)$  образуют множество, гомеоморфное  $\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Ясно, что все корни многочлена  $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$  отличны от нуля тогда и только тогда, когда  $c_0 \neq 0$ . Поэтому все коэффициенты многочлена  $\prod_{i=1}^n (x - b_i)$ , кроме последнего, могут быть произвольными.  $\square$

Теорема 10.6.  $SP^n(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2n}$ .

Доказательство. Точке  $\mathbb{R}P^2$  можно сопоставить пару диаметрально противоположных точек сферы  $S^2$ . При стереографической проекции паре диаметрально противоположных точек сферы  $S^2$  соответствуют точки  $z$  и  $-\bar{z}^{-1}$  (или  $0$  и  $\infty$ ), т. е. точки  $(a : b)$  и  $(-\bar{b} : \bar{a})$  в  $CP^1$ .

Сопоставим неупорядоченному набору  $n$  точек  $\mathbb{R}P^2$  многочлен

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^n (a_i x - b_i y)(-\bar{b}_i x - \bar{a}_i y). \quad (1)$$

Точку  $(a_i : b_i)$  можно заменить на  $(\lambda a_i : \lambda b_i)$  или на  $(-\bar{b}_i : \bar{a}_i)$ ; при этом многочлен  $f$  умножится на  $|\lambda|^2$  или на  $-1$ . Таким образом, многочлен  $f$  определён однозначно с точностью до умножения на вещественное число, отличное от нуля.

Легко проверить, что

$$f(-\bar{y}, \bar{x}) = (-1)^n \overline{f(x, y)}. \quad (2)$$

Ясно также, что любой однородный многочлен степени  $2n$ , удовлетворяющий соотношению (2), можно представить в виде (1), потому что его корни разбиваются на пары  $(a : b)$ ,  $(-\bar{b} : \bar{a})$ .

Для многочлена  $f(x, y) = \sum_{k=-n}^n c_k x^{n-k} y^{n+k}$  соотношение (2) эквивалентно тому, что  $c_{-k} = (-1)^k \bar{c}_k$ . Таким образом, многочлен  $f(x, y)$  пол-



ностью задаётся вещественным коэффициентом  $c_0$  и комплексными коэффициентами  $c_1, \dots, c_n$ . Эти коэффициенты могут быть произвольными (единственное ограничение заключается в том, что они не могут все одновременно обращаться в нуль). Таким образом, пространство всех многочленов  $f$ , рассматриваемых с точностью до умножения на вещественное число, отличное от нуля, гомеоморфно  $\mathbb{R}P^{2n}$ .

Мы построили взаимно однозначное непрерывное отображение  $h : \mathbb{S}P^n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ . Пространство  $\mathbb{S}P^n(\mathbb{R}P^2)$  компактно, а пространство  $\mathbb{R}P^{2n}$  хаусдорфово, поэтому  $h$  — гомеоморфизм.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Интересные обсуждения свойств гомеоморфизма  $h : \mathbb{S}P^n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  содержатся в [2].

В заключение приведём без доказательства описание строения пространства  $\mathbb{S}P^n(S^1)$ . Пусть  $S^1 \widetilde{\times} D^n$  — пространство, которое получается из  $I \times D^n$  отождествлением точек  $(0, x)$  и  $(1, h(x))$ , где  $h : D^n \rightarrow D^n$  — симметрия относительно гиперплоскости, проходящей через центр шара (в качестве  $h$  можно взять любой гомеоморфизм, изменяющий ориентацию). Тогда  $\mathbb{S}P^n(S^1) \approx S^1 \times D^{n-1}$  при нечётном  $n$  и  $\mathbb{S}P^n(S^1) \approx S^1 \widetilde{\times} D^{n-1}$  при чётном  $n$ . Доказательство этого утверждения приведено в [98].

**У п р а ж н е н и е 6.** Докажите, что  $\mathbb{S}P^2(S^1)$  — лист Мёбиуса.

## Глава IV

# Двумерные поверхности. Накрытия. Расслоения. Гомотопические группы

## § 11. Двумерные поверхности

### 11.1. Основные определения

Пусть  $M^2$  — двумерное псевдомногообразие без края, у которого каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому диску  $D^2$ . В таком случае топологическое пространство  $X$ , гомеоморфное  $M^2$ , называют *замкнутой двумерной поверхностью*, или *двумерной поверхностью без края*.

**Упражнение 1.** Докажите, что двумерный симплициальный комплекс, изображённый на рис. 59, можно дополнить до замкнутого двумерного псевдомногообразия, которое не является замкнутой двумерной поверхностью.

*Двумерной поверхностью с краем* называют топологическое пространство, гомеоморфное двумерному псевдомногообразию  $M^2$ , у которого каждая точка, не принадлежащая краю, имеет окрестность, гомеоморфную открытому диску  $D^2$ , а каждая точка  $a$ , принадлежащая краю, имеет окрестность, гомеоморфную

$$D_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\},$$

причём точке  $a$  соответствует точка  $(0, 0) \in D_+^2$ .

Чтобы убедиться, что край двумерной поверхности определён корректно, нужно доказать следующее утверждение.

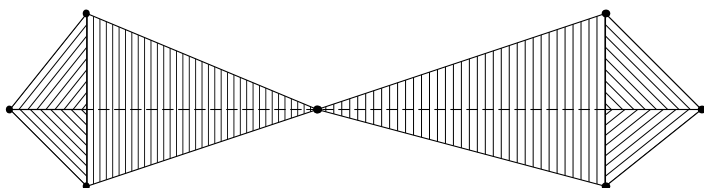


Рис. 59. Псевдомногообразие, но не поверхность

**Теорема 11.1.** Пусть  $h: M^2 \rightarrow N^2$  — гомеоморфизм псевдомногообразий, являющихся двумерными поверхностями. Тогда  $h(\partial M^2) = \partial N^2$ .

**Доказательство.** Достаточно проверить, что если  $a \in M^2 \setminus \partial M^2$ , то  $h(a) \notin \partial N^2$ . По условию точка  $a \in M^2 \setminus \partial M^2$  имеет окрестность  $U$ , гомеоморфную  $D^2$ . Предположим, что  $b = h(a) \in \partial N^2$ . Тогда точка  $b$  имеет окрестность  $V$ , гомеоморфную  $D_+^2$ , причём точка  $b$  соответствует точке  $(0, 0) \in D_+^2$ . Пусть  $W = U \cap h^{-1}(V)$  — окрестность точки  $a$ . После отождествления  $U$  с  $D^2$  и  $V$  с  $D_+^2$  можно считать, что  $h$  гомеоморфно отображает  $W \subset D^2 \subset \mathbb{R}^2$  на  $h(W) \subset D_+^2 \subset \mathbb{R}^2$ , причём  $h(0, 0) = (0, 0)$ .

При достаточно малом  $\varepsilon > 0$  открытое множество  $W$  содержит все точки  $z \in \mathbb{R}^2$ , для которых  $\|z - a\| \leq \varepsilon$ . Пусть  $S^1$  — окружность радиуса  $\varepsilon$  с центром  $a$  (рис. 60). Согласно теореме Жордана кривая  $h(S^1)$  разбивает плоскость  $\mathbb{R}^2 \supset D_+^2$  на две связные компоненты — ограниченную и неограниченную. С одной стороны, точка  $b = h(a)$  принадлежит образу круга, ограниченного  $S^1$ , а образ этого круга является ограниченной компонентой. С другой стороны, множество  $\mathbb{R}_-^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y < 0\}$  не пересекается с  $D_+^2$ , поэтому множество  $\mathbb{R}_-^2$  не пересекается с  $h(S^1)$ , а значит, точка  $b$  принадлежит неограниченной связной компоненте.  $\square$

У любой точки псевдомногообразия  $M^2$ , лежащей внутри симплекса размерности 2, есть окрестность, гомеоморфная  $D^2$ , а у любой точки, лежащей внутри симплекса размерности 1, есть окрестность, гомеоморфная  $D^2$  или  $D_+^2$ . Поэтому для того, чтобы выяснить, является ли псевдомногообразие  $M^2$  двумерной поверхностью, достаточно рассмотреть его вершины. Пусть  $v$  — вершина псевдомногообразия  $M^2$ . Ясно, что объединение всех симплексов  $M^2$  с вершиной  $v$  состоит из  $m$  множеств, устроенных так, как показано на рис. 61 (а), и  $n$  множеств, устроенных так, как показано на рис. 61 (б). После выкалывания точки  $v$  любая её достаточно малая окрестность распадается на  $n + m$  компонент связно-

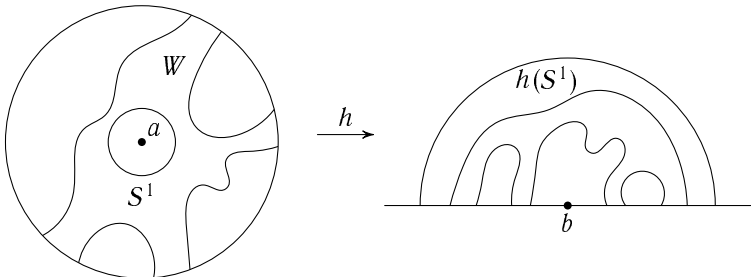


Рис. 60. Инвариантность края

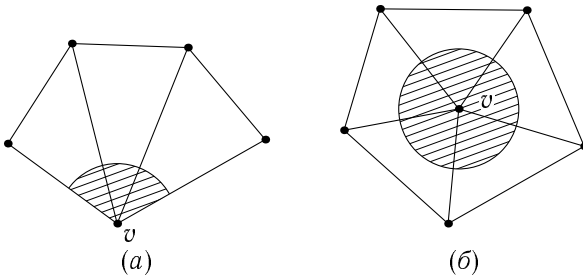


Рис. 61. Строение окрестности точки двумерной поверхности

сти. С другой стороны, выкалывание одной точки не нарушает связности множеств  $D^2$  и  $D^2_+$ . Поэтому псевдомногообразие  $M^2$  является двумерной поверхностью тогда и только тогда, когда  $m + n = 1$  для любой вершины  $v$ , т. е. объединение всех симплексов с вершиной  $v$  устроено либо так, как показано на рис. 61 (а), либо так, как показано на рис. 61 (б).

### 11.2. Приведение двумерных поверхностей к простейшему виду

Триангуляцией топологического пространства  $X$  называют гомеоморфизм  $X \rightarrow |K|$ , где  $K$  — симплицальный комплекс. Сам симплицальный комплекс  $K$  мы тоже будем называть триангуляцией пространства  $X$ .

Построить триангуляцию пространства  $X$  обычно бывает очень сложно, потому что у симплекса триангуляции не должно быть совпадающих вершин и у двух разных симплексов множества вершин должны быть разными. Например, разбиения окружности, изображённые на рис.62 (а) и (б), не являются триангуляциями. Простейшая триангуляция окружности изображена на рис. 62 (в); она содержит три вершины.

На рис. 63 изображены триангуляции простейших двумерных поверхностей (одинаковые номера вершин означают, что эти вершины отождествляются). Мы рассматриваем эти триангуляции как абстрактные сим-

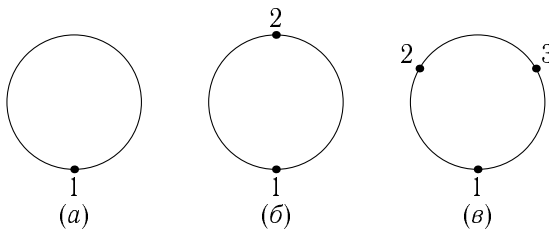


Рис. 62. Триангуляция окружности

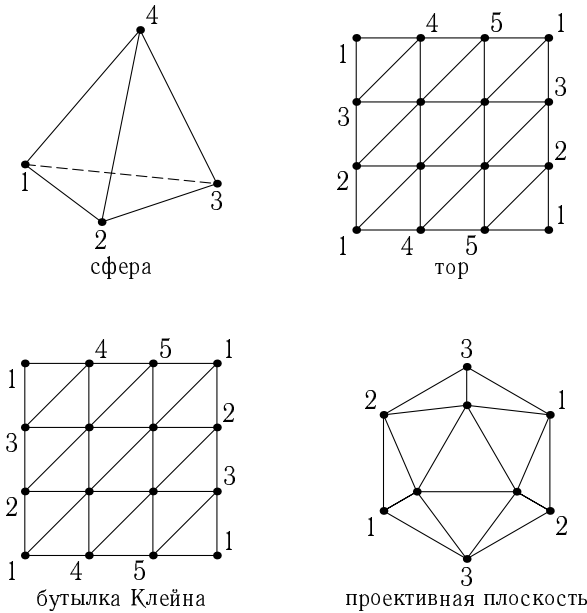


Рис. 63. Триангуляции некоторых поверхностей

плициальные комплексы, но согласно теореме 8.4 на с. 116 любой двумерный абстрактный симплициальный комплекс можно реализовать в евклидовом пространстве размерности 5.

Обратите внимание, что для проективной плоскости нельзя использовать ту же самую конструкцию, с помощью которой построены триангуляции тора и бутылки Клейна: на рис. 64 (а) заштрихованы два разных треугольника, вершины которых совпадают. Но это легко исправить, заменив в одном из угловых квадратов одну диагональ на другую, как показано на рис. 64 (б).

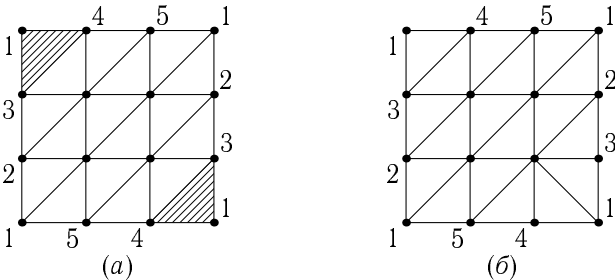


Рис. 64. Триангуляция проективной плоскости

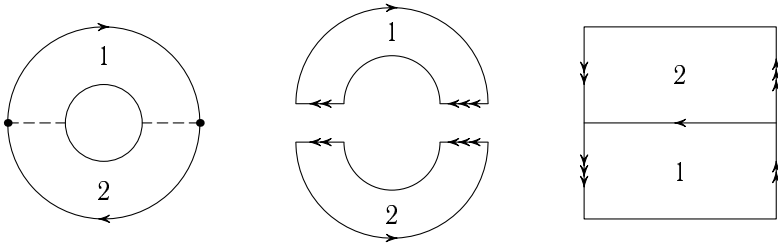


Рис. 65. Лист Мёбиуса

С помощью рис. 65 легко убедиться, что если из проективной плоскости вырезать диск  $D^2$ , то в результате получится лист Мёбиуса.

Пусть  $T^2$ ,  $K^2$  и  $P^2$  — триангуляции тора, бутылки Клейна и проективной плоскости, изображённые на рис. 63. Пусть, далее,  $p$ ,  $q$  и  $r$  — неотрицательные целые числа. Определим двумерную поверхность  $S^2 \# pT^2 \# qK^2 \# rP^2$  следующим образом. Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию сферы  $S^2$ , в которой можно выбрать  $p + q + r$  двумерных симплексов, не имеющих общих точек. Вырежем эти симплексы и  $p$  из образовавшихся треугольников отождествим с краями  $p$  экземпляров  $T^2 \setminus \Delta^2$ , где  $\Delta^2$  — один из симплексов  $T^2$ ;  $K^2$  и  $P^2$  приклеиваем аналогично. Ясно, что с точностью до гомеоморфизма полученная двумерная поверхность не зависит от триангуляции сферы  $S^2$ . Аналогично можно определить  $M^2 \# N^2$  для любых двумерных псевдомногообразий  $M^2$  и  $N^2$ . Ясно, что  $S^2 \# M^2 \approx M^2$  для любого двумерного псевдомногообразия  $M^2$ .

**Теорема 11.2.**  $S^2 \# 2P^2 \approx K^2$ .

**Доказательство.** Поверхность  $S^2 \# 2P^2$  представляет собой цилиндр  $S^2 \times I$ , к обоим концам которого приклеено по листу Мёбиуса. Бутылку Клейна  $K^2$  тоже можно представить в виде цилиндра, к краям которого приклеено два листа Мёбиуса: на рис. 66 цилиндр заштрихован. □

**Теорема 11.3.**  $T^2 \# P^2 \approx K^2 \# P^2$ .

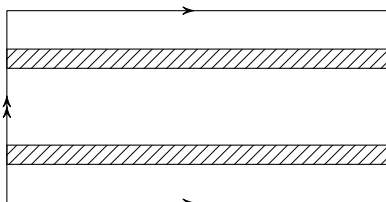


Рис. 66. Бутылка Клейна

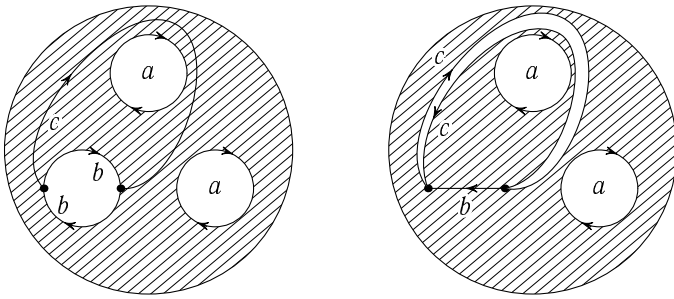


Рис. 67. Поверхности  $T^2 \# P^2$  и  $K^2 \# P^2$  гомеоморфны

**Доказательство.** Поверхности  $T^2 \# P^2$  и  $K^2 \# P^2$  изображены на рис. 67. Гомеоморфизм между этими поверхностями устанавливается разрезанием по стрелке  $c$  и склеиванием стрелок  $b$ .  $\square$

Из теорем 11.2 и 11.3 следует, что двумерная поверхность  $S^2 \# pT^2 \# \# qK^2 \# rP^2$  гомеоморфна  $S^2 \# mT^2$  или  $S^2 \# nP^2$ ; для краткости будем обозначать эти поверхности  $mT^2$  и  $nP^2$  (предполагается, что  $m > 0$  и  $n > 0$ ).

Пусть  $M^2$  — двумерное псевдомногообразие;  $v$  — число его вершин,  $e$  — число рёбер,  $f$  — число граней. *Эйлеровой характеристикой* псевдомногообразия  $M^2$  называют число  $\chi(M^2) = v - e + f$ .

**Теорема 11.4.** *Любая замкнутая двумерная поверхность  $M^2$  гомеоморфна  $mT^2$  или  $nP^2$ . Числа  $m$  и  $n$  определяются при этом соотношениями  $\chi(M^2) = 2 - 2m$  и  $\chi(M^2) = 2 - n$ .*

**Доказательство** (см. [126]). Рёбра псевдомногообразия  $M^2$  образуют граф. В этом графе мы будем последовательно уничтожать рёбра; после уничтожения ребра примыкающие к нему грани сливаются в одну область, которую мы тоже будем называть гранью. Уничтожать рёбра мы будем так, чтобы граф оставался связным и число его вершин не изменялось. При уничтожении ребра число граней либо не изменяется, либо уменьшается на 1. В конце концов остаётся максимальное дерево, которое содержит  $v$  вершин и  $v - 1$  рёбер; число граней при этом равно 1. При таких уничтожениях рёбер величина

$$\text{число вершин} - \text{число рёбер} + \text{число граней}$$

не возрастает, а в конце она оказывается равной 2, поэтому  $v - e + f \leq 2$ .

Предположим, что существует замкнутая двумерная поверхность, которая служит контрпримером к утверждению теоремы. Среди всех таких поверхностей выберем те, для которых число  $2 - v + e - f \geq 0$  минимально. Затем среди них выберем те, для которых число  $v$  минимально. На-

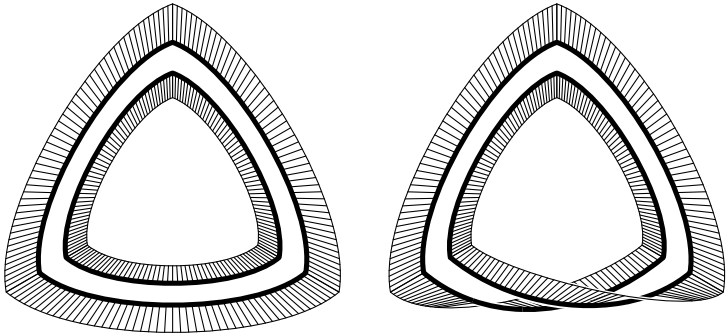


Рис. 68. Край полученной поверхности

конец, среди этих поверхностей выберем ту, для которой минимальная степень вершины минимальна. Выбранную поверхность обозначим  $M^2$ .

Пусть  $A$  — вершина  $M^2$  минимальной степени  $p$ ;  $AA_1A_2$ ,  $AA_2A_3$ ,  $\dots$ ,  $AA_pA_1$  — инцидентные с ней грани. Если  $p = 3$ , то либо  $M^2$  — поверхность тетраэдра, либо существует замкнутая двумерная поверхность  $\tilde{M}^2$ , которая получается из  $M^2$  выбрасыванием вершины  $A$  и заменой трёх её граней  $AA_1A_2$ ,  $AA_2A_3$  и  $AA_3A_1$  одной гранью  $A_1A_2A_3$ . Если  $M^2$  — поверхность тетраэдра, то  $M^2 \approx S^2$  и  $\chi(M^2) = 2$ . Таким образом, оба варианта противоречат выбору поверхности  $M^2$ , поэтому  $p \geq 4$ .

Предположим, что для некоторого  $i$  вершины  $A_i$  и  $A_{i+2}$  не соединены ребром. Тогда  $M^2$  можно преобразовать, удалив ребро  $A_iA_{i+1}$  и добавив ребро  $A_iA_{i+2}$ . В результате получим поверхность с теми же самыми числами  $2 - v + e - f$  и  $v$ , но с меньшей минимальной степенью вершины. Это противоречит выбору поверхности  $M^2$ , поэтому вершины  $A_i$  и  $A_{i+2}$  соединены ребром.

Поверхность  $M^2$  имеет рёбра  $AA_1$ ,  $A_1A_3$  и  $AA_3$ , но грани  $AA_1A_3$  у неё быть не может, поскольку  $p \geq 4$ . Разрежем  $M^2$  по  $AA_1$ ,  $A_1A_3$  и  $AA_3$ . В результате получим поверхность, краем которой служит граф с 6 рёбрами и 6 вершинами, причём каждая вершина имеет степень 2. В этом графе нет двойных рёбер, поэтому он либо состоит из двух треугольников, либо представляет собой шестиугольник (рис. 68).

Приклеим к краю полученной поверхности либо два треугольника, либо шестиугольник (предварительно триангулировав его). В результате получим двумерную поверхность  $\tilde{M}^2$ . При этом в первом случае  $\tilde{f} = f + 2$ ,  $\tilde{e} = e + 2$  и  $\tilde{v} = v + 3$ , поэтому

$$\tilde{v} - \tilde{e} + \tilde{f} = v - e + f + 2; \quad (1)$$



во втором случае

$$\bar{v} - \bar{e} + \bar{f} = v - e + f + 1. \quad (2)$$

В обоих случаях величина  $2 - v + e - f$  уменьшается при переходе от  $M^2$  к  $\bar{M}^2$ , поэтому из минимальности этой величины для  $M^2$  следует, что для  $\bar{M}^2$  утверждение теоремы верно, а значит,

$$\bar{M}^2 \approx m'T^2 \quad \text{или} \quad \bar{M}^2 \approx n'P^2. \quad (3)$$

Поверхность  $M^2$  получается из  $\bar{M}^2$  достаточно простым преобразованием. В первом случае  $M^2 \approx \bar{M}^2 \# T^2$  или  $M^2 \approx \bar{M}^2 \# K^2$  (приклеивается либо ручка, либо перекрученная ручка). Во втором случае  $M^2 \approx \bar{M}^2 \# P^2$ . Во всех случаях

$$M^2 \approx mT^2 \quad \text{или} \quad M^2 \approx nP^2. \quad (4)$$

Легко проверить, что если  $\chi(\bar{M}^2) = 2 - 2m'$  или  $\chi(\bar{M}^2) = 2 - n'$  (здесь числа  $m'$  и  $n'$  определяются равенством (3)), то  $\chi(M^2) = 2 - 2m$  или  $\chi(M^2) = 2 - n$  (здесь числа  $m$  и  $n$  определяются равенством (4)). Для этого нужно воспользоваться равенствами (1) и (2), а также тем, что  $\chi(\bar{M}^2 \# T^2) = \chi(\bar{M}^2 \# K^2) = \chi(\bar{M}^2) - 2$  и  $\chi(\bar{M}^2 \# P^2) = \chi(\bar{M}^2) - 1$ .  $\square$

### 11.3. Завершение классификации двумерных поверхностей

Чтобы завершить классификацию замкнутых двумерных поверхностей, остаётся доказать следующее утверждение.

**Т е о р е м а 11.5.** *Поверхности  $S^2$ ,  $mT^2$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и  $nP^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , попарно не гомеоморфны.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $M_1^2$  и  $M_2^2$  — замкнутые двумерные поверхности,  $h: M_1^2 \rightarrow M_2^2$  — гомеоморфизм. Покажем, что в таком случае  $\chi(M_1^2) = \chi(M_2^2)$ .

На  $M_2^2$  есть два графа, а именно, граф  $G_2$ , образованный рёбрами  $M_2^2$ , и граф  $G_1$  — образ графа, состоящего из рёбер  $M_1^2$ . Пусть  $v_1$ ,  $e_1$  и  $f_1$  — число вершин, рёбер и граней для графа  $G_1$  на поверхности  $M_2^2$ ;  $v_2$ ,  $e_2$  и  $f_2$  — аналогичные числа для графа  $G_2$ . Оставляя эти числа неизменными, граф  $G_1$  можно изменить так, чтобы он стал кусочно-линейным и его рёбра трансверсально пересекали рёбра графа  $G_2$ . Рассмотрим граф  $G = G_1 \cup G_2$ . Пусть  $v$ ,  $e$  и  $f$  — число вершин, рёбер и граней для графа  $G$  на поверхности  $M_2^2$ . Покажем, что  $v - e + f = v_2 - e_2 + f_2$ . Рассмотрим для этого произвольную грань графа  $G_2$  (т. е. 2-симплекс псевдомногообразия  $M_2^2$ ). Пусть  $v_\alpha$ ,  $e_\alpha$  и  $f_\alpha$  — число вершин, рёбер и граней графа  $G$ , принадлежащих этой грани. Согласно формуле Эйлера  $v_\alpha - e_\alpha + f_\alpha = 1$  (в формуле Эйлера вместо 1 стоит 2, но в ней учитывается ещё и неограниченная область, которая в нашем случае отсутствует). Запишем  $v_\alpha$

и  $e_\alpha$  в виде  $v_\alpha = v'_\alpha + v''_\alpha$  и  $e_\alpha = e'_\alpha + e''_\alpha$ , где  $v'_\alpha$  и  $e'_\alpha$  — число вершин и рёбер, принадлежащих краю рассматриваемой грани,  $v''_\alpha$  и  $e''_\alpha$  — число внутренних вершин и рёбер. Ясно, что  $v'_\alpha = e'_\alpha$ , поэтому  $v''_\alpha - e''_\alpha + f_\alpha = 1$ . Это означает, что если мы уничтожим все внутренние вершины, рёбра и грани, то эйлерова характеристика не изменится. А из равенства  $v'_\alpha = e'_\alpha$  следует, что можно также уничтожить все вершины, лежащие на рёбрах графа  $G_2$ ; эйлерова характеристика при этом тоже не изменится. Таким образом,  $v - e + f = v_2 - e_2 + f_2$ . Граф  $G$  можно рассматривать и как граф на поверхности  $M_1^2$ , поэтому  $v - e + f = v_1 - e_1 + f_1$ , а значит,  $v_1 - e_1 + f_1 = v_2 - e_2 + f_2$ , т. е.  $\chi(M_1^2) = \chi(M_2^2)$ .

Итак, эйлерова характеристика двумерной поверхности не зависит от выбора триангуляции, поэтому можно рассмотреть простейшие триангуляции и убедиться, что  $\chi(S^2) = 2$ ,  $\chi(T^2) = 0$  и  $\chi(P^2) = 1$ . Легко также проверить, что  $\chi(M^2 \# N^2) = \chi(M^2) + \chi(N^2) - 2$ . Следовательно,  $\chi(mT^2) = 2 - 2m$  и  $\chi(nP^2) = 2 - n$ . Одинаковые эйлеровы характеристики имеют лишь поверхности  $mT^2$  и  $2mP^2$ . Поэтому остаётся доказать, что эти поверхности не гомеоморфны (при  $m \geq 1$ ).

Поверхности  $S^2$  и  $T^2$  с простейшими триангуляциями являются ориентируемыми псевдомногообразиями, поэтому поверхность  $mT^2$  с некоторой триангуляцией является ориентируемым псевдомногообразием.

С другой стороны, поверхность  $P^2$  с простейшей триангуляцией является неориентируемым псевдомногообразием. А именно, на поверхности  $P^2$  есть замкнутый путь  $abca$ , изображённый на рис. 69 пунктиром, при обходе вдоль которого изменяется ориентация (2-симплексы с общей стороной 23 приобрели несогласованные ориентации). На поверхности  $nP^2$ ,  $n \geq 1$ , с некоторой триангуляцией есть такой же замкнутый путь (состоящий из 6 звеньев), трансверсально пересекающий рёбра 6 симплексов и изменяющий ориентацию. Это означает, что  $nP^2$  ( $n \geq 1$ ) — неориентируемое псевдомногообразие.

Остаётся лишь проверить, что понятие ориентируемости двумерной поверхности инвариантно относительно гомеоморфизмов, т. е. понятие ориентируемости двумерной поверхности можно определить, не обращаясь к триангуляциям.

Пусть  $M^2$  — замкнутая двумерная поверхность,  $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow M^2$  — некоторый путь. Покроем  $M^2$  открытыми множествами  $U_i$ , гомеоморф-

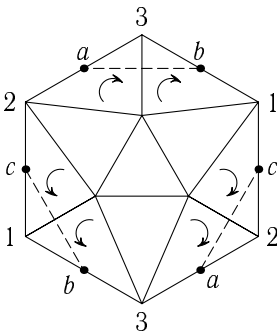


Рис. 69. Путь на проективной плоскости, меняющий ориентацию

ными  $\mathbb{R}^2$ . Задав ориентацию в одной точке  $x \in U_i$ , мы задаём тем самым ориентацию во всех точках множества  $U_i$ ; под ориентацией мы здесь подразумеваем направление обхода вокруг точки  $x$ .

Связные компоненты множеств  $\gamma^{-1}(U_i)$  образуют открытое покрытие компактного множества  $I$ . Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие  $W_1, \dots, W_n$ . Мы будем предполагать, что  $0 \in W_1$ ,  $W_j \cap W_{j+1} \neq \emptyset$  и  $1 \in W_n$ . Если в точке  $x \in \gamma(W_j)$  задана ориентация, то эту ориентацию можно распространить на все точки множества  $\gamma(W_j)$ . Учитывая, что  $\gamma(W_j) \cap \gamma(W_{j+1}) \neq \emptyset$ , эту ориентацию можно распространить и на все точки множества  $\gamma(W_{j+1})$ . Так можно перенести вдоль пути  $\gamma$  ориентацию из точки  $\gamma(0)$  в точку  $\gamma(1)$ . Результат переноса не зависит от того, какое именно конечное подпокрытие мы выбираем из покрытия  $\{\gamma^{-1}(U_i)\}$ . Действительно, отождествим одну из областей  $U_i$  с  $\mathbb{R}^2$  и рассмотрим часть кривой  $\gamma$ , расположенную в  $U_i = \mathbb{R}^2$ . Множество  $U_j \cap U_i$  представляет собой открытое подмножество в  $\mathbb{R}^2$ . Перенос ориентации вдоль связной компоненты множества  $\gamma \cap (U_j \cap U_i)$  при посредстве  $U_j$  даёт тот же самый результат, что и перенос ориентации вдоль  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^2$ .

Назовём двумерную поверхность  $M^2$  *ориентируемой*, если перенос ориентации вдоль любого замкнутого пути не изменяет ориентацию, т.е. перенесённая вдоль замкнутого пути ориентация совпадает с исходной. Ясно, что псевдомногообразие, гомеоморфное двумерной поверхности, ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируема эта поверхность. Это означает, в частности, что неориентируемое псевдомногообразие  $nP^2$  не может быть гомеоморфно ориентируемому псевдомногообразию  $mT^2$ .  $\square$

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите, что поверхности  $nT^2$  и  $mP^2$  можно получить из  $4n$ -угольника и  $2m$ -угольника, отождествляя их стороны так, как показано на рис. 70.

**З а д а ч а 11.1.** а) Докажите, что на поверхности  $nP^2$  существует замкнутая кривая  $\gamma$ , после разрезания вдоль которой поверхность становится ориентируемой.

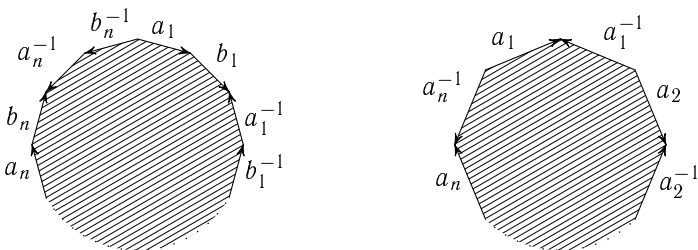


Рис. 70. Склеивание поверхностей из многоугольников

б) Докажите, что если  $n$  чётно, то окрестность кривой  $\gamma$  гомеоморфна цилиндру, а если  $n$  нечётно — то листу Мёбиуса.

**Задача 11.2.** Пусть  $M_1^2$  и  $M_2^2$  — негомеоморфные двумерные поверхности с краем. Могут ли пространства  $M_2^2 \times I$  и  $M_1^2 \times I$  быть гомеоморфными?

#### 11.4. Риманово определение рода поверхности

Риман определял род замкнутой ориентируемой двумерной поверхности  $M^2$  следующим образом. Предположим, что на поверхности  $M^2$  можно расположить  $p$  несамопересекающихся замкнутых кривых  $C_1, \dots, C_p$  так, чтобы они попарно не пересекались и множество  $M^2 \setminus (C_1 \cap \dots \cap C_p)$  было связно, но любые  $p + 1$  такие кривые разбивают  $M^2$  на части. Тогда род поверхности  $M^2$  равен  $p$ .

Покажем, что так определённое число  $p$  действительно совпадает с родом  $g$  поверхности  $M^2$ . Несложно привести пример, показывающий, что  $p \geq g$  (см. рис. 71). Остаётся доказать, что если на поверхности  $M^2$  расположены кривые  $C_1, \dots, C_p$ , не разбивающие  $M^2$  на части, то  $p \leq g$ . Проведём разрезы по кривым  $C_1, \dots, C_p$ . В результате получим связную ориентируемую поверхность, край которой содержит  $2p$  связных компонент. Заклеим каждую компоненту диском. В результате получим замкнутую ориентируемую поверхность  $\tilde{M}^2$ , эйлерова характеристика которой равна  $\chi(M^2) + 2p = 2 - 2g + 2p$ . Но  $\chi(\tilde{M}^2) \leq 2$ , поэтому  $p \leq g$ .

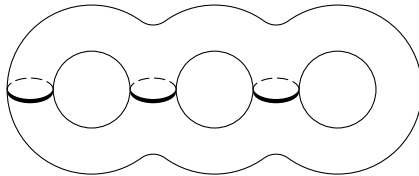


Рис. 71. Кривые на двумерной поверхности

**Задача 11.3.** Докажите, что на замкнутой неориентируемой поверхности  $nP^2$  можно расположить  $n$  попарно непересекающихся листов Мёбиуса, но нельзя расположить  $n + 1$  попарно непересекающихся листов Мёбиуса.

## § 12. Накрытия

Фундаментальную группу и накрытия мы подробно рассматривали только для одномерных комплексов, но определили их для произволь-

ных линейно связных топологических пространств. При доказательстве свойств фундаментальной группы и накрытий мы почти нигде не пользовались специальными свойствами одномерных комплексов. Исключение составляют лишь существование и единственность поднятия пути с данным началом и теорема о существовании и единственности накрытия, соответствующего данной подгруппе фундаментальной группы базы.

Для накрытий произвольных линейно связных пространств существование и единственность поднятия пути не столь очевидны, как для накрытий одномерных комплексов, но доказываются достаточно просто. Для каждой точки пути  $\gamma$  нужно выбрать окрестность, участвующую в определении накрытия. Из компактности отрезка следует, что можно выбрать конечное покрытие пути  $\gamma$  такими окрестностями. С помощью этого конечного набора окрестностей и их прообразов можно построить поднятие пути  $\gamma$  с заданным началом. Это поднятие, очевидно, единственно.

Ситуация с накрытиями, соответствующими данной подгруппе фундаментальной группы, сложнее. Приведённая в теореме 2.9 на с. 52 конструкция существенно использует структуру одномерного комплекса. Более того, для пространств общего вида соответствующая теорема неверна; она верна лишь при определённых ограничениях. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству этой теоремы, рассмотрим простейший пример — универсальное накрытие замкнутой ориентируемой двумерной поверхности.

### 12.1. Универсальные накрытия двумерных поверхностей

Напомним, что накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  называют *универсальным*, если  $\pi_1(\tilde{X}) = 0$ .

Тор  $T^2$  можно получить, отождествив точки  $(x + m, y + n)$  и  $(x, y)$  для всех пар целых чисел  $m, n$ . Поэтому универсальное накрытие тора имеет вид  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ .

Универсальное накрытие сферы с  $g$  ручками, где  $g \geq 2$ , проще всего построить с помощью геометрии Лобачевского. Рассмотрим на плоскости Лобачевского  $H^2$  правильный  $4g$ -угольник с углом  $\frac{\pi}{2g}$ . Пусть  $G$  — группа движений плоскости Лобачевского, порождённая сдвигами, при которых совмещаются пары противоположных сторон рассматриваемого  $4g$ -угольника. Образы  $4g$ -угольника под действием группы  $G$  замощают плоскость Лобачевского. Поэтому отображение  $p: H^2 \rightarrow H^2/G \approx M_g^2$  является универсальным накрытием сферы с  $g$  ручками  $M_g^2$ .

(Необходимые для этой конструкции сведения из геометрии Лобачевского можно найти в книге [18].)

Описание геометрического строения универсального накрытия поверхности  $M_g^2$  без использования геометрии Лобачевского приведено в [81].

**Задача 12.1.** а) Докажите, что универсальное накрывающее пространство плоскости  $\mathbb{R}^2$ , из которой выколото несколько точек, гомеоморфно  $\mathbb{R}^2$ .

б) Пусть  $\Delta_{ij} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}$  и  $\Sigma = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$ . Докажите, что для  $\Sigma$  универсальное накрывающее пространство гомеоморфно  $\mathbb{C}^n$ .

## 12.2. Существование накрывающего пространства с заданной фундаментальной группой

Пусть  $H$  — некоторая подгруппа в группе  $\pi_1(X, x_0)$ . Прежде чем попытаться построить накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , для которого  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$ , посмотрим, какими свойствами должно обладать пространство  $\tilde{X}$ . Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — пути в  $X$  из точки  $x_0$  в точку  $x$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  — поднятия этих путей с началом  $\tilde{x}_0$ . Пути  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  заканчиваются в одной и той же точке тогда и только тогда, когда класс петли  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  лежит в  $H$ .

Это наблюдение приводит к следующей конструкции пространства  $\tilde{X}$ . Пусть задано линейно связное пространство  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$ , и в группе  $\pi_1(X, x_0)$  задана подгруппа  $H$ . Рассмотрим множество всех путей в  $X$  с началом в точке  $x_0$ . Будем считать пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  эквивалентными, если класс петли  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  лежит в  $H$ . Точками пространства  $\tilde{X}$  будем считать классы эквивалентных путей; топология в пространстве  $\tilde{X}$  будет определена чуть позже. Проекция  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  сопоставляет пути  $\gamma$  его конец.

Из линейной связности пространства  $X$  следует, что отображение  $p$  сюръективно.

Предложенная конструкция не всегда приводит к желаемому результату. Но если пространство  $X$  *локально линейно связно* и *локально односвязно*, т. е. для любой точки  $x \in X$  и для любой окрестности  $U \ni x$  существует линейно связная односвязная окрестность  $V \subset U$ , то эта конструкция даёт нужный результат. В дальнейшем мы будем предполагать, что пространство  $X$  локально линейно связно и локально односвязно. Кроме того, под окрестностью точки пространства  $X$  будем подразумевать односвязную линейно связную окрестность. Ясно, что такие окрестности образуют базу топологии пространства  $X$ .

**Топология пространства  $\tilde{X}$ .** Чтобы определить топологию пространства  $\tilde{X}$ , достаточно задать базу открытых множеств. Пусть точка  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  и окрестность  $U \subset X$  таковы, что  $p\tilde{x} \in U$ . Точка  $\tilde{x}$  является классом эквивалентных путей. Пусть  $\gamma$  — один из путей (с началом в точке  $x_0$ ), лежащих в этом классе. Сопоставим паре  $U, x$  множество  $(U, x) \subset \tilde{X}$ , состоящее из классов эквивалентности продолжений пути  $\gamma$  путями, целиком лежащими в  $U$ . Ясно, что множество  $(U, x)$  не зависит от выбора пути  $\gamma$ . Кроме того, это множество не зависит от выбора точки  $\tilde{x}$  в следующем смысле: если  $\tilde{x}_2 \in (U, \tilde{x}_1)$ , то  $(U, \tilde{x}_2) = (U, \tilde{x}_1)$ . Чтобы доказать это, рассмотрим точки  $x_1 = p\tilde{x}_1$  и  $x_2 = p\tilde{x}_2$ . Соединим точки  $x_1$  и  $x_2$  путём  $\omega$ , лежащим

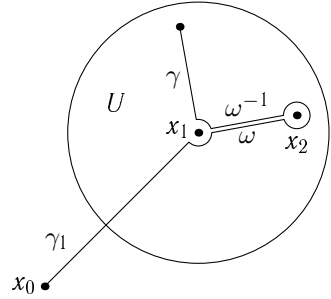


Рис. 72. Путь  $\gamma_1 \omega \omega^{-1} \gamma$

в  $U$  (рис. 72). Предположим, что  $\gamma_1 \gamma$  — продолжение пути  $\gamma_1$ , соединяющего  $x_1$  с  $x_0$ , некоторым путём  $\gamma$ , лежащим в  $U$ . Ему можно сопоставить путь  $\gamma_1 \omega \omega^{-1} \gamma$ , который является продолжением пути  $\gamma_1 \omega$ , соединяющего  $x_0$  с  $x_2$ , путём  $\omega^{-1} \gamma$ , лежащим в  $U$ . Пути  $\gamma_1 \gamma$  и  $\gamma_1 \omega \omega^{-1} \gamma$  гомотопны, поэтому сопоставление  $\gamma_1 \gamma \mapsto \gamma_1 \omega \omega^{-1} \gamma$  задаёт взаимно однозначное соответствие между  $(U, \tilde{x}_1)$  и  $(U, \tilde{x}_2)$ .

В качестве базы топологии пространства  $\tilde{X}$  выберем все множества вида  $(U, \tilde{x})$ . Нужно проверить, что непустое пересечение двух множеств базы содержит непустое множество базы. Предположим, что  $\tilde{x} \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$ , где  $\tilde{U} = (U, \tilde{x}_1)$  и  $\tilde{V} = (V, \tilde{x}_2)$ . Пусть  $W = U \cap V$  и  $\tilde{W} = (W, \tilde{x})$ . Тогда  $\tilde{W} = \tilde{U} \cap \tilde{V}$  и  $\tilde{W}$  — множество базы.

**Непрерывность проекции  $p$ .** Прообраз окрестности  $U$  (связной и односвязной) состоит из набора базисных открытых множеств, поэтому он открыт.

**Линейная связность пространства  $\tilde{X}$ .** Пусть  $\tilde{x}$  — произвольная точка пространства  $\tilde{X}$ , т. е. некоторый класс эквивалентных путей. Выберем в этом классе эквивалентности произвольный путь  $\gamma(t)$  в пространстве  $X$ . Рассмотрим семейство путей  $\gamma_s(t) = \gamma(st)$ , где  $0 \leq s, t \leq 1$ . Пути  $\gamma_s$  соответствует некоторая точка  $\tilde{x}(s) \in \tilde{X}$ . В результате получаем путь в пространстве  $\tilde{X}$ , соединяющий точки  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$  и  $\tilde{x}(1) = \tilde{x}$ .

**Проекция — локальный гомеоморфизм.** Пусть  $\bar{p}: (U, \tilde{x}) \rightarrow U$  — ограничение отображения  $p$  на множество  $(U, \tilde{x})$ , где  $U$  — связная

односвязная окрестность. Линейная связность  $U$  влечёт сюръективность отображения  $\bar{p}$ , а односвязность  $U$  влечет инъективность отображения  $\bar{p}$ . Чтобы доказать непрерывность отображения  $\bar{p}$ , рассмотрим произвольную связную односвязную окрестность  $V \subset U$ . Прообразом этой окрестности является открытое множество  $(U, \tilde{x})$ .

**Образ группы  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  при отображении  $p_*$  совпадает с  $H$ .** Пусть  $\gamma$  — петля в  $X$  с началом и концом в точке  $x_0$ ,  $\tilde{\gamma}$  — поднятие этой петли с началом в точке  $\tilde{x}_0$ . Подгруппа  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  состоит из гомотопических классов тех петель  $\gamma$ , для которых путь  $\tilde{\gamma}$  замкнут. По построению путь  $\tilde{\gamma}$  замкнут тогда и только тогда, когда класс эквивалентности пути  $\gamma$  соответствует точке  $\tilde{x}_0$ , т. е. гомотопический класс петли  $\gamma$  лежит в  $H$ .

### 12.3. Единственность накрывающего пространства с заданной фундаментальной группой

Для доказательства единственности накрывающего пространства с заданной группой  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$  не нужна локальная односвязность пространства  $X$ ; нужна лишь его локальная линейная связность. Доказательство единственности опирается на следующую лемму.

**Л е м м а.** Пусть  $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$  — накрытие,  $f: X \rightarrow Y$  — некоторое (непрерывное) отображение, причём пространство  $X$  линейно связно и локально линейно связно. Тогда если  $f_*\pi_1(X, x_0) \subset q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ , то существует единственное поднятие  $\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{Y}$  отображения  $f$  (имеется в виду, что  $q\tilde{f} = f$  и  $\tilde{f}(x_0) = \tilde{y}_0$ ).

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный путь  $\gamma$  в пространстве  $X$ , соединяющий точку  $x_0$  с некоторой точкой  $x$ . При отображении  $f$  он переходит в путь  $f\gamma$ . Пусть  $\tilde{\gamma}$  — поднятие пути  $f\gamma$  с началом в точке  $\tilde{y}_0$ . Положим  $\tilde{f}(x) = \tilde{y}$ , где  $\tilde{y}$  — конец пути  $\tilde{\gamma}$ . Нужно проверить, что  $\tilde{y}$  не зависит от выбора пути  $\gamma$ . Иными словами, если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — пути из  $x_0$  в  $x$ , а  $\omega$  — петля, составленная из путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , то поднятие петли  $f\omega$  с началом  $\tilde{y}_0$  должно быть замкнутым путём в  $\tilde{Y}$ . Это означает, что класс петли  $f\omega$  должен лежать в  $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ . Иными словами,  $f_*\pi_1(X, x_0) \subset q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ . Это выполняется по условию.

Остается доказать непрерывность отображения  $\tilde{f}$ . Для этого нам понадобится локальная линейная связность пространства  $X$ . Пусть  $x \in X$  и  $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ . Для точки  $y = q(\tilde{y})$  выберем линейно связную окрестность  $U$ , участвующую в определении накрытия. Пусть  $\tilde{U}$  — линейно связная компонента множества  $p^{-1}(U)$ , содержащая точку  $\tilde{y}$ . Из непрерывности отображения  $f$  следует, что  $f^{-1}(U)$  содержит некоторую окрестность  $V$  точки  $x$ . Пространство  $X$  локально линейно связно, поэтому можно



считать, что окрестность  $V$  линейно связна. В таком случае  $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$ , т. е.  $V \subset \tilde{f}^{-1}(\tilde{U})$ . В самом деле, любую точку  $x_1 \in V$  можно соединить с точкой  $x$  путём  $\gamma$ , лежащим в  $V$ . Образ  $f\gamma$  пути  $\gamma$  лежит в  $U$ , поэтому путь  $\tilde{f}\gamma$  поднимается до пути, целиком лежащего в  $\tilde{U}$ . Это означает, что  $\tilde{f}(y) = \tilde{y} \in \tilde{U}$ .  $\square$

С помощью этой леммы легко доказать единственность накрывающего пространства с заданной фундаментальной группой. А именно, пусть  $p_i: \tilde{X}_i \rightarrow X$  ( $i = 1, 2$ ) — накрытия линейно связного и локально линейно связного пространства  $X$ , причём  $(p_1)_*\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset (p_2)_*\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ . Тогда существует такой гомеоморфизм  $h: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ , что  $p_2h = p_1$  и  $h(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ . отображение  $h$  строится как поднятие отображения  $p_1$ , а отображение  $h^{-1}$  строится как поднятие отображения  $p_2$ .

Из доказательства леммы видно, что поднятие  $\tilde{f}$  существует и единственно для любого линейно связного пространства  $X$ . Но если  $X$  не является локально линейно связным, то отображение  $\tilde{f}$  не обязательно непрерывно. Это показывает следующий пример.

**Пример (Зиман).** Пусть топологическое пространство  $X \subset \mathbb{R}^2$  состоит из окружности, дуги  $AB$  и бесконечного набора отрезков  $I_1, I_2, \dots$ , один конец которых находится в точке  $A$ , а другой конец стремится к точке  $B$  (рис. 73). Топологические пространства  $\tilde{X}_1$  и  $\tilde{X}_2$  устроены так, как показано на том же рисунке. Накрытия  $p_i: \tilde{X}_i \rightarrow X$  устроены следующим образом. Окружность пространства  $\tilde{X}_i$  дважды обматывается вокруг окружности пространства  $X$ , отрезки отображаются изометрично, а дуги отображаются гомеоморфно. Тогда

$$(p_1)_*\pi_1(\tilde{X}_1) = (p_2)_*\pi_1(\tilde{X}_2) = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_1(X),$$

но у отображения  $p_1$  нет непрерывного поднятия  $h$ , для которого  $p_2h = p_1$ .

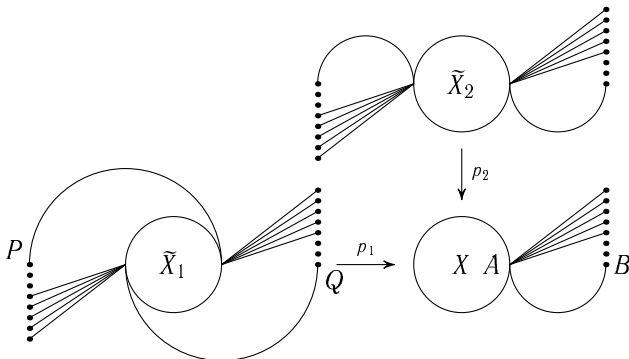


Рис. 73. Пример Зимана

В самом деле, поднятие  $h$  существует и единственно (если задан образ одной точки при отображении  $h$ ), но отображение  $h$  разрывно в точках  $P$  и  $Q$ , лежащих в  $p_1^{-1}(B)$ .

**Задача 12.2.** Докажите, что  $mn$ -листное накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  можно представить в виде композиции

$$\tilde{X} \xrightarrow{p_1} Y \xrightarrow{p_2} X,$$

где  $p_1$  — некоторое  $m$ -листное накрытие и  $p_2$  — некоторое  $n$ -листное накрытие, тогда и только тогда, когда прообраз  $p^{-1}(x)$  некоторой точки  $x \in X$  можно разбить на  $m$ -элементные множества  $I_1, \dots, I_n$  так, что для любого замкнутого пути в  $X$  все его поднятия, начинающиеся в одном и том же множестве  $I_i$ , заканчиваются в одном и том же множестве  $I_j$ .

Используя технику накрытий, с помощью теоремы Борсука—Улама можно доказать следующее утверждение, из которого сама теорема Борсука—Улама легко выводится.

**Теорема 12.1.** Пусть  $m > n \geq 1$ . Тогда не существует отображения  $g: \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , индуцирующего изоморфизм фундаментальных групп.

**Доказательство.** Пусть  $p_m: S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$  и  $p_n: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  — двулистные накрытия. Построим отображение  $f: S^m \rightarrow S^n$ , для которого  $g p_m = p_n f$ . Фиксируем точку  $x_0 \in S^m$ , выберем из двух точек множества  $p_n^{-1}g(x_0)$  одну точку  $y_0$ , соединим точку  $x_0$  с точкой  $x \in S^m$  путём  $\gamma$ , рассмотрим поднятие пути  $g p_m \gamma$  с началом  $y_0$  и положим  $g(x) = y$ , где  $y$  — конец этого поднятия. Корректность этого определения следует из того, что в  $S^m$  любая петля стягиваема, поскольку  $m \geq 2$ .

Из равенства  $g p_m = p_n f$  следует, что  $f(-x) = \pm f(x)$ . Знак выясняется следующим образом. Пусть  $\alpha_m$  и  $\alpha_n$  — образующие групп  $\pi_1(\mathbb{R}P^m)$  и  $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$  (здесь мы пользуемся тем, что  $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$  и  $\pi_1(\mathbb{R}P^m) = \mathbb{Z}_2$  при  $m \geq 2$ ). Пусть, далее,  $g_* \alpha_m = k \alpha_n$  (здесь  $k \in \mathbb{Z}_2$  при  $n \geq 2$  и  $k \in \mathbb{Z}$  при  $n = 1$ ). Тогда  $f(-x) = (-1)^k f(x)$ , поскольку  $k \alpha_n$  — образ дуги, соединяющей точки  $x$  и  $-x$ , при отображении  $g p_m$ .

Итак, если существует отображение  $g: \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , для которого  $g_* \alpha_m = \pm \alpha_n$ , то существует отображение  $f: S^m \rightarrow S^n$ , для которого  $f(-x) = -f(x)$ .  $\square$

Отметим, что если существует отображение  $f: S^m \rightarrow S^n$ , для которого  $f(-x) = -f(x)$ , то можно рассмотреть отображение  $g: \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , заданное формулой  $\{x, -x\} \mapsto \{f(x), -f(x)\}$ . Для этого отображения выполняется равенство  $g_* \alpha_m = k \alpha_n$ , где  $k$  нечётно. Если  $n \geq 2$ , то  $\alpha_n \in \mathbb{Z}_2$ , поэтому  $g_*$  — изоморфизм. Если же  $n = 1$ , то  $g_*$  является ненулевым

гомоморфизмом  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , чего не может быть. Это рассуждение даёт новое доказательство теоремы Борсука—Улама для отображений  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

## 12.4. Локальные гомеоморфизмы

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *локальным гомеоморфизмом*, если у каждой точки  $x \in X$  есть окрестность  $U$ , для которой множество  $f(U)$  открыто в  $Y$  и ограничение отображения  $f$  на  $U$  является гомеоморфизмом.

Любое накрытие является локальным гомеоморфизмом. При некоторых ограничениях верно и обратное. Мы будем рассматривать только ситуацию, соответствующую конечнолистным накрытиям. Назовём отображение  $f: X \rightarrow Y$  *собственным*, если прообраз любого компактного множества компактен.

**Теорема 12.2** (см. [71]). *Пусть  $X$  и  $Y$  — хаусдорфовы пространства, причём пространство  $Y$  линейно связно. Тогда любой сюръективный собственный локальный гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Y$  является конечнолистным накрытием.*

**Доказательство.** Пусть  $y \in Y$  — произвольная точка. Отображение  $f$  является локальным гомеоморфизмом, поэтому множество  $f^{-1}(y)$  дискретно. Из того, что отображение  $f$  собственное, следует, что множество  $f^{-1}(y)$  конечно. Пусть  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . В хаусдорфовом пространстве  $X$  для точек  $x_i$  и  $x_j$  ( $i \neq j$ ) можно выбрать непересекающиеся окрестности  $U_{ij} \ni x_i$  и  $U_{ji} \ni x_j$ . Положим  $U_i = \bigcap_{j \neq i} U_{ij}$ . Тогда  $x_i \in U_i$  и  $U_i \cap U_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

Для каждой точки  $x_i$  выберем окрестность  $V_i$ , для которой множество  $f(V_i)$  открыто в  $Y$  и ограничение отображения  $f$  на  $V_i$  является гомеоморфизмом. Окрестности  $W_i = U_i \cap V_i$  попарно не пересекаются и  $f$  гомеоморфно отображает  $W_i$  на окрестность точки  $y$ .

Положим  $W = \bigcap_{i=1}^n f(W_i)$ . Чтобы доказать, что  $f$  — накрытие, достаточно убедиться, что прообраз множества  $W$  целиком лежит в  $\bigcup_{i=1}^n f(W_i)$ .

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что число  $n$  не зависит от точки  $y$ , т. е. прообразы всех точек пространства  $Y$  содержат одно и то же число точек. Воспользуемся линейной связностью пространства  $Y$ . Пусть  $y_1, y_2 \in Y$  — произвольные точки,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$  — непрерывный путь с концами  $\gamma(0) = y_1$  и  $\gamma(1) = y_2$ . Докажем, что ограничение  $f$  на прообраз пути  $\gamma$  является накрытием. Рассмотрим компактное топологическое пространство  $\tilde{Y} = \gamma([0, 1]) \subset Y$ . Пусть  $\tilde{X} = f^{-1}(\tilde{Y})$  и  $\tilde{f}$  — ограничение отображения  $f$  на  $\tilde{X}$ . Топологические пространства  $\tilde{Y}$

и  $\tilde{X}$  хаусдорфовы и отображение  $\tilde{f}$  является сюръективным собственным локальным гомеоморфизмом. Поэтому для любой точки  $\tilde{y} \in \tilde{Y}$  можно построить открытые множества  $\tilde{W}_i$  точно так же, как строились открытые множества  $W_i$  для точки  $y \in Y$ . Положим

$$\tilde{W} = \left( \bigcap_{i=1}^n \tilde{f}(\tilde{W}_i) \right) \setminus \tilde{f} \left( \tilde{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i \right).$$

Чтобы доказать, что  $\tilde{f}$  — накрытие, достаточно проверить, что  $\tilde{W}$  — (открытая) окрестность точки  $\tilde{y}$  и  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{W}) \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i$ .

По построению  $\tilde{y} \in \bigcap_{i=1}^n \tilde{f}(\tilde{W}_i)$  и  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}) \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i$ , поэтому  $\tilde{y} \in \tilde{W}$ .

Если  $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{W}$ , то  $\tilde{x} \notin \tilde{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i$ , т. е.  $\tilde{x} \in \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i$ .

Наконец, докажем, что множество  $\tilde{W}$  открыто, т. е. множество  $\tilde{f} \left( \tilde{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i \right)$  замкнуто. Пространство  $\tilde{Y}$  компактно, а отображение  $\tilde{f}$  собственное, поэтому пространство  $\tilde{X} = \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$  компактно. Следовательно, множество  $\tilde{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i$  тоже компактно как замкнутое подмножество компактного пространства. Множество  $\tilde{f} \left( \tilde{X} \setminus \bigcup_{i=1}^n \tilde{W}_i \right)$  является компактным подмножеством хаусдорфова пространства  $\tilde{Y}$ , поэтому оно замкнуто.  $\square$

С помощью теоремы 12.2 можно получить критерий, позволяющий выяснить, в каком случае локальный гомеоморфизм является глобальным гомеоморфизмом.

**Теорема 12.3** (см. [72]). *Пусть  $X$  и  $Y$  — линейно связные хаусдорфовы пространства. Локальный гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Y$  является (глобальным) гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда отображение  $f$  собственное и гомоморфизм  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  является эпиморфизмом для некоторой точки  $x_0 \in X$ .*

**Доказательство.** В одну сторону утверждение очевидно. Докажем, что при указанных условиях локальный гомеоморфизм является гомеоморфизмом. Для этого достаточно проверить, что отображение  $f$  взаимно однозначно.

**Шаг 1.** Отображение  $f$  сюръективно.

Пусть  $y_0 \in f(X)$ ,  $y_1 \in Y$  — произвольная точка,  $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow Y$  — путь, соединяющий точки  $y_0$  и  $y_1$ . Отображение  $f$  собственное, поэтому множество  $f^{-1}(\alpha(I))$  компактно, а значит, множество  $f(X) \cap \alpha(I) =$

$= f(f^{-1}(\alpha(I)))$  замкнуто в  $\alpha(I)$ . С другой стороны, из того, что  $f$  — локальный гомеоморфизм, следует, что множество  $f(X)$  открыто в  $Y$ , а значит, множество  $f(X) \cap \alpha(I)$  открыто в  $\alpha(I)$ . Следовательно,  $f(X) \cap \alpha(I) = \alpha(I)$ . В частности,  $y_1 \in f(X)$ .

Шаг 2. Отображение  $f$  инъективно.

Согласно теореме 12.2 отображение  $f$  является накрытием. Поэтому гомоморфизм  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  мономорфен и число элементов слоя равно индексу подгруппы  $f_*\pi_1(X, x_0)$  в группе  $\pi_1(Y, f(x_0))$ . По условию отображение  $f_*$  эпиморфно. Следовательно, накрытие  $f$  однолистное, т. е.  $f$  — гомеоморфизм.  $\square$

Следствие. Пусть  $X$  и  $Y$  — линейно связные хаусдорфовы пространства, причём  $\pi_1(Y) = 0$ . В таком случае локальный гомеоморфизм  $f: X \rightarrow Y$  является (глобальным) гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда  $f$  — собственное отображение.

## § 13. Графы на поверхностях. Врезанный квадрат графа

### 13.1. Род графа

Графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$  нельзя вложить в плоскость (теорема 1.3 на с. 21). Нетрудно понять, что граф вкладывается в плоскость  $\mathbb{R}^2$  тогда и только тогда, когда он вкладывается в сферу  $S^2$ . Можно рассматривать вложения графов не только в сферу  $S^2$ , но и в другие поверхности. Например, граф  $K_6$  можно расположить на проективной плоскости  $P^2$ , а графы  $K_7$  и  $K_{4,4}$  можно расположить на торе (рис. 74).

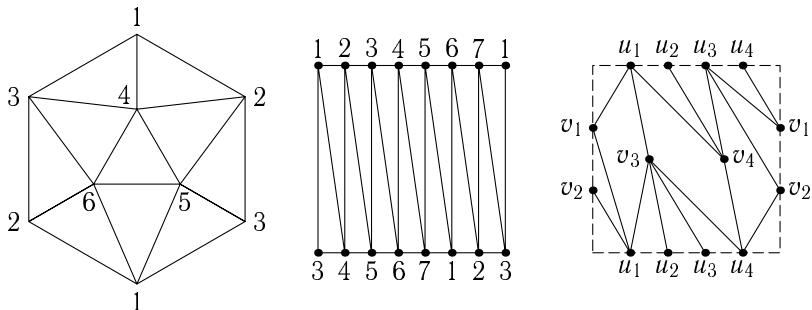


Рис. 74. Графы  $K_6$ ,  $K_7$  и  $K_{4,4}$

**Теорема 13.1** (Кёниг [83]). а) Любой конечный граф  $G$  можно вложить в некоторую замкнутую ориентируемую двумерную поверхность  $M^2$ .

б) Если граф  $G$  связан, а поверхность  $M^2$  имеет минимальный род, то каждая из областей, на которые граф  $G$  разбивает  $M^2$ , гомеоморфна диску.

**Доказательство.** а) Если допустить пересечения рёбер, то любой граф можно расположить на сфере. Устранить пересечения можно, приклеив к сфере ручки. При этом одно ребро остаётся на сфере, а другое проходит по ручке (рис. 75).

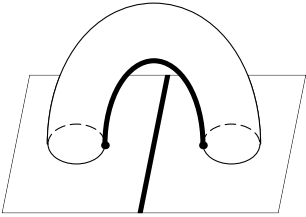


Рис. 75. Устранение пересечений рёбер

б) Достаточно рассмотреть случай, когда граф  $G$  не имеет двойных рёбер. Пусть  $U_1, \dots, U_m$  — области, на которые граф  $G$  разбивает  $M^2$ . По условию граф  $G$  связан и не имеет двойных рёбер, поэтому граница каждой из областей  $U_i$  гомеоморфна окружности. Область  $U_i$  стягиваема тогда и только тогда, когда в результате приклеивания диска  $D^2$  к  $U_i$  (по границе) получается сфера  $S^2$ . Предположим, что одна из областей  $U_i$  нестягиваема. Если мы вырежем из  $M^2$  область  $U_i$  и приклеим вместо неё  $D^2$ , то в результате граф  $G$  окажется расположенным на поверхности  $\tilde{M}^2$ , род которой строго меньше рода поверхности  $M^2$ . Это противоречит минимальности рода поверхности  $M^2$ .  $\square$

**Замечание 1.** Если граф можно расположить на ориентируемой поверхности  $M^2$ , то его можно расположить и на неориентируемой поверхности  $M^2 \# P^2$ .

**Замечание 2.** Если граф  $G$  разбивает поверхность  $M^2$  на стягиваемые области, то род поверхности  $M^2$  не обязательно минимален. Например, букет двух окружностей можно расположить требуемым образом как на сфере, так и на торе.

Минимальный род ориентируемой поверхности, на которой можно расположить граф  $G$ , называют *родом графа*. Род графа  $G$  будем обозначать  $g(G)$ .

**Теорема 13.2.** Пусть  $G$  — связный граф без петель и двойных рёбер, содержащий  $v$  вершин и  $e$  рёбер. Тогда

$$g(G) \geq \frac{e}{6} - \frac{v}{2} + 1,$$

а если граф  $G$  не содержит циклов длины 3, то

$$g(G) \geq \frac{e}{4} - \frac{v}{2} + 1.$$

**Доказательство.** Можно считать, что все области, на которые граф  $G$  разбивает поверхность  $M^2$ , стягиваемы. В таком случае  $2 - 2g(M^2) = v - e + f$ , где  $f$  — число областей, на которые граф  $G$  разбивает  $M^2$ . Если граница каждой области состоит не менее чем из  $n$  рёбер, то  $nf \leq 2e$ , поэтому

$$g(G) \geq g(M^2) \geq \frac{1}{2} \left( 2 - v + e \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \right) = \frac{n-2}{2n} e - \frac{v}{2} + 1.$$

По условию у графа  $G$  нет петель и двойных рёбер. Это означает, что  $n \geq 3$ , т. е.  $(n-2)/2n \geq 1/6$ . Если же у графа  $G$  нет ещё и циклов длины 3, то  $n \geq 4$ , т. е.  $(n-2)/2n \geq 1/4$ .  $\square$

**Пример.**  $g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$ .

**Доказательство.** Число рёбер графа  $K_n$  равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , поэтому

$$g(K_n) \geq \frac{n(n-1)}{12} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n^2 - 7n + 12}{12} = \frac{(n-3)(n-4)}{12}. \quad \square$$

**Пример.**  $g(K_{m,n}) \geq \frac{(m-2)(n-2)}{4}$ .

**Доказательство.** Число вершин графа  $K_{m,n}$  равно  $m+n$ , а число рёбер равно  $mn$ . Кроме того, у графа  $K_{m,n}$  нет циклов длины 3. Поэтому

$$g(K_{m,n}) \geq \frac{mn}{4} - \frac{m+n}{2} + 1 = \frac{(m-2)(n-2)}{4}. \quad \square$$

Доказанные нами оценки для рода графов  $K_n$  и  $K_{m,n}$  нельзя улучшить. А именно, для графа  $K_n$  (соответственно, для графа  $K_{m,n}$ ) существует вложение в ориентируемую поверхность рода, равного наименьшему целому числу, которое больше или равно  $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$  (соответственно,  $\geq \frac{(m-2)(n-2)}{4}$ ). Примеры таких вложений строятся достаточно сложно, особенно для графов  $K_n$ . Впервые такие примеры для  $K_n$  построены Рингелем и другими в [109], [110] и [94]. Примеры вложений графов  $K_{m,n}$  построены в [108]. Более современное изложение этих конструкций приведено в [63].

### 13.2. Раскраски карт

Будем говорить, что на поверхности  $M^2$  любую карту можно раскрасить в  $n$  цветов, если вершины любого графа (без петель), кото-

рый вкладывается в  $M^2$ , можно раскрасить в  $n$  цветов так, что любые две его вершины, соединённые ребром, будут разного цвета. Более наглядна задача о раскрасках двойственного графа, вершины которого соответствуют областям на поверхности  $M^2$ , а рёбра соединяют вершины, соответствующие областям, имеющим общее ребро (рис. 76).

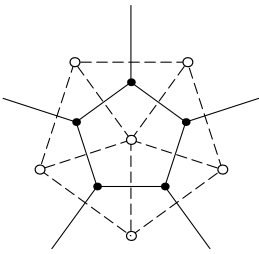


Рис. 76. Двойственный граф

Для двойственного графа получается раскраска, при которой соседние области разноцветные.

**Теорема 13.3** (Хивуд [69]). *Любую карту на замкнутой ориентируемой поверхности рода  $g > 0$  можно раскрасить в  $\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$  цветов.*

**Доказательство.** Если  $e$  — ребро графа  $G$ , то любая правильная раскраска вершин графа  $G$  является также правильной раскраской графа  $G - e$ . Поэтому проведение дополнительного ребра не может уменьшить количество цветов, которое нужно для раскраски вершин графа. Таким образом, после проведения дополнительных рёбер можно считать, что граф  $G$  разбивает поверхность  $M_g^2$  на треугольные стягиваемые области. В таком случае  $2e(G) = 3f(G)$ , поэтому из равенства  $v(G) - e(G) + f(G) = 2 - 2g$  следует, что  $e(G) = 3v(G) + 6g - 6$ . Ясно также, что сумма степеней вершин графа  $G$  равна  $2e(G)$ , поэтому степень одной из вершин не превосходит

$$\frac{2e(G)}{v(G)} = 6 + \frac{12(g-1)}{v(G)}. \quad (1)$$

Предположим, что число  $n$  таково, что у любого графа на поверхности рода  $g$  есть вершина степени не более  $n - 1$  (отметим, что число  $n = 7 + 12(g - 1)$  таким свойством обладает). Тогда индукцией по числу вершин графа легко доказывается, что любой граф на поверхности рода  $g$  можно раскрасить в  $n$  цветов. Действительно, если после выбрасывания из графа  $G$  вершины  $v$ , степень которой не превосходит  $n - 1$ , получается граф, который можно раскрасить в  $n$  цветов, то и сам граф  $G$  можно раскрасить в  $n$  цветов (для окраски вершины  $v$  остаётся по крайней мере один цвет).

Пусть  $n(g)$  — минимальное число цветов, которыми можно раскрасить любую карту на поверхности рода  $g$  (число  $n(g)$  конечно, потому что любую карту на поверхности рода  $g$  можно раскрасить в  $7 + 12(g - 1)$  цветов). Рассмотрим граф  $G$ , для которого это минимальное число  $n(g)$  реализуется и, кроме того, выполняется оценка (1). Ясно, что  $v(G) \geq n(g)$ ,



поэтому если  $g \geq 1$ , то

$$n(g) \leq 7 + \frac{12(g-1)}{v(G)} \leq 7 + \frac{12(g-1)}{n(g)}.$$

(Обратите внимание, что для сферы это неравенство неверно.) Решая неравенство  $n(g)^2 - 7n(g) \leq 12g - 12$  и учитывая неравенство  $n(g) > 0$ , получаем требуемое.  $\square$

Неравенство  $n(g)^2 - 7n(g) \leq 12g - 12$  можно переписать в виде

$$g \geq \frac{(n(g) - 3)(n(g) - 4)}{12}.$$

Это неравенство тесно связано с неравенством

$$g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

Действительно, если граф  $K_n$  вкладывается в поверхность рода  $g$ , то  $n(g) \geq n$ , поскольку для раскраски графа  $K_n$  требуется  $n$  цветов.

Примеры вложений графов  $K_n$  в ориентируемые поверхности, построенные Рингелем и другими, показывают, что

$$n(g) \geq \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil.$$

Соединив эти неравенства с неравенствами Хивуда, получим

$$n(g) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil.$$

Напомним, что в случае  $g = 0$  рассуждения Хивуда применить нельзя.

### 13.3. Взрезанный квадрат графа

*Взрезанным квадратом* симплициального комплекса  $K$  называют подпространство в  $|K \times K|$ , состоящее из всех произведений  $\Delta_\alpha^i \times \Delta_\beta^j$ , где  $\Delta_\alpha^i$  и  $\Delta_\beta^j$  — непересекающиеся симплексы в  $K$ . Взрезанный квадрат  $K$  имеет естественную структуру  $CW$ -комплекса. Количество его вершин равно  $n^2 - n$ , где  $n$  — количество вершин  $K$ .

Граф  $G$ , не имеющий петель и двойных рёбер, можно рассматривать как 1-мерный симплициальный комплекс с тем же самым множеством вершин. Поэтому для графа можно рассмотреть взрезанный квадрат. Если у графа есть пара непересекающихся рёбер, то взрезанный квадрат — 2-мерный  $CW$ -комплекс. В дальнейшем мы будем предполагать, что у графа  $G$  есть пара непересекающихся рёбер.

**Теорема 13.4.** а) *Взрезанный квадрат графа  $G$  является замкнутым двумерным псевдомногообразием (не обязательно связным) тогда и только тогда, когда после выбрасывания из графа  $G$  любой пары вершин  $v_i$  и  $v_j$ , соединённых ребром, остаётся набор циклов, т. е. из любой вершины  $v_k \notin \{v_i, v_j\}$ , выходит ровно два ребра, идущих не в вершины  $v_i$  и  $v_j$ .*

б) *Если граф  $G$  2-связен (т. е. он остаётся связным после выбрасывания любой вершины), то его взрезанный квадрат связан.*

**Доказательство.** а) Пусть из вершины  $v_k \notin \{v_i, v_j\}$  выходят рёбра  $v_k v_{p_1}, \dots, v_k v_{p_s}$ , где  $v_{p_1}, \dots, v_{p_s} \notin \{v_i, v_j\}$ . Тогда во взрезанном квадрате графа  $G$  к ребру  $v_k \times v_i v_j$  примыкают грани  $v_k v_{p_\alpha} \times v_i v_j$ ,  $\alpha = 1, \dots, s$ . Поэтому взрезанный граф является замкнутым псевдомногообразием тогда и только тогда, когда  $s = 2$  для всех троек вершин  $\{v_i, v_j, v_k\}$ .

б) Вершины  $v_i \times v_j$  и  $v_p \times v_q$  можно соединить рёбрами следующим образом. Если  $p \neq j$ , то можно сначала соединить  $v_i \times v_j$  с  $v_p \times v_j$ , а затем  $v_p \times v_j$  с  $v_p \times v_q$ . Чтобы соединить вершины  $v_i \times v_j$  и  $v_j \times v_i$ , выберем вершину  $v_k \notin \{v_i, v_j\}$  и сначала соединим  $v_i \times v_j$  с  $v_k \times v_j$ , затем  $v_k \times v_j$  с  $v_k \times v_i$ , а затем  $v_k \times v_i$  с  $v_j \times v_i$ .  $\square$

Условие теоремы 13.4 выполняется для графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Поэтому их взрезанные квадраты — связные замкнутые поверхности.

**Задача 13.1.** [120] Докажите, что взрезанный квадрат графа  $K_{3,3}$  — сфера с четырьмя ручками, а взрезанный квадрат графа  $K_5$  — сфера с шестью ручками.

**Задача 13.2.** Докажите, что взрезанный квадрат графа не может быть сферой с нечётным числом листов Мёбиуса.

## § 14. Расслоения и гомотопические группы

Понятие локально тривиального расслоения со слоем  $F$  является обобщением понятия накрытия. Для накрытия слой  $F$  дискретен, а для локально тривиального расслоения слой может быть произвольным топологическим пространством. При обсуждении свойств расслоений нам понадобится понятие гомотопической группы, которое является обобщением понятия фундаментальной группы.

### 14.1. Накрывающая гомотопия

*Локально тривиальным расслоением* называют четвёрку  $(E, B, F, p)$ , где  $E, B$  и  $F$  — топологические пространства,  $p: E \rightarrow B$  — отображение, обладающее следующими свойствами:

- у любой точки  $x \in B$  есть окрестность  $U$ , для которой  $p^{-1}(U) \approx U \times F$ ;
- гомеоморфизм  $U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$  согласован с отображением  $p$ , т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 U \times F & \xrightarrow{\quad} & p^{-1}(U) \\
 & \searrow & \swarrow p \\
 & & U
 \end{array}$$

коммутативна (здесь  $U \times F \rightarrow U$  – проекция на первый множитель).

Пространства  $E$ ,  $B$  и  $F$  называют, соответственно, *пространством расслоения*, *базой* и *слоем*; отображение  $p$  называют *проекцией*. Часто для краткости расслоением мы будем называть само отображение  $p: E \rightarrow B$ .

**Пример.** Накрытие  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  является локально тривиальным расслоением со слоем  $F = p^{-1}(x)$ ,  $x \in X$ .

**Пример.** Естественная проекция  $p: B \times F \rightarrow B$  является локально тривиальным расслоением. Это расслоение называют *тривиальным*.

Расслоения  $p_1: E_1 \rightarrow B$  и  $p_2: E_2 \rightarrow B$  называют *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм  $h: E_1 \rightarrow E_2$ , что  $p_1 = p_2 h$ . Расслоение, эквивалентное тривиальному, тоже называют *тривиальным*.

**Теорема 14.1** (Фельдбау). *Локально тривиальное расслоение над кубом  $I^k$  тривиально.*

**Доказательство.** Покажем сначала, что если куб  $I^k = I^{k-1} \times I$  разбит на два полукуба  $I_-^k = I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}]$  и  $I_+^k = I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$ , причём над каждым из них расслоение тривиально, то расслоение тривиально и над всем кубом  $I^k$ . Иными словами, если заданы гомеоморфизмы  $h_{\pm}(I_{\pm}^k) \rightarrow F \times I_{\pm}^k$ , согласованные с проекцией, то по ним можно построить гомеоморфизм  $h: p^{-1}(I^k) \rightarrow F \times I^k$ , согласованный с проекцией. Согласованность с проекцией означает, что если  $y \in p^{-1}(x)$ , то  $h(y) = (f, x)$ ,  $f \in F$ . Поэтому гомеоморфизм  $h$  задаётся семейством гомеоморфизмов  $\varphi_x: p^{-1}(x) \rightarrow F$ ,  $x \in I$ . На множестве  $p^{-1}(I_-^k)$  в качестве  $h$  можно взять  $h_-$ , т. е. мы считаем, что  $\varphi_x = \varphi_{x,-}$  при  $x \in I_-^k$ . Для точки  $a \in I_-^k \cap I_+^k = I^{k-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  заданы два гомеоморфизма  $p^{-1}(x) \rightarrow F$ , а именно,  $\varphi_{a,+}$  и  $\varphi_{a,-}$ . Рассмотрим гомеоморфизм  $\psi_a = \varphi_{a,-}(\varphi_{a,+})^{-1}: F \rightarrow F$  и с его помощью определим гомеоморфизм  $\varphi_x$  для  $x \in I_+^k$  следующим образом. Пусть  $a(x)$  – ортогональная проекция точки  $x \in I_+^k$  на перегородку  $I^{k-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ . Положим  $\varphi_x = \psi_{a(x)} \varphi_{x,+}$ . Для точки  $x = a \in I^{k-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  это определение согласовано с предыдущим, поскольку  $\psi_a \varphi_{a,+} =$

$= \varphi_{a,-}(\varphi_{a,+})^{-1}\varphi_{a,+} = \varphi_{a,-}$ . Из этого следует, что семейство гомеоморфизмов  $\varphi_x$  непрерывно зависит от  $x$ , а значит, оно задаёт гомеоморфизм  $h: p^{-1}(I^k) \rightarrow F \times I^k$ , согласованный с проекцией.

Теперь требуемое утверждение легко доказать методом от противного. Действительно, предположим, что над кубом  $I^k$  задано локально тривиальное расслоение, которое не является тривиальным. Разрежем куб  $I^k$  на два полукуба. Из доказанного выше утверждения следует, что над одним из полукубов расслоение нетривиально. Разрежем теперь его и т. д. В результате можно получить последовательность параллелепипедов, диаметры которых стремятся к нулю, причём над каждым параллелепипедом расслоение нетривиально. Более того, эта последовательность параллелепипедов сходится к некоторой точке  $x_0$ . По определению у точки  $x_0$  есть окрестность, над которой расслоение тривиально. Один из рассматриваемых параллелепипедов целиком лежит в этой окрестности, поэтому расслоение над ним тривиально. Получено противоречие.  $\square$

Пусть  $p: E \rightarrow B$  — локально тривиальное расслоение,  $f: X \rightarrow B$  — некоторое отображение. Мы будем говорить, что отображение  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  *накрывает* отображение  $f$ , или является *поднятием* отображения  $f$ , если  $p\tilde{f} = f$ .

Для расслоений выполняется свойство, во многом похожее на существование поднятия пути для накрытий. Основное отличие заключается в том, что для накрытий поднятие пути с заданным началом единственно, а для расслоений верна только теорема существования.

**Теорема 14.2** (о накрывающей гомотопии). Пусть  $p: E \rightarrow B$  — локально тривиальное расслоение,  $X$  —  $CW$ -комплекс,  $X' \subset X$  — его подкомплекс. Предположим, что заданы:

- отображение  $\tilde{h}: X \rightarrow E$ ;
- гомотопия  $H: X \times I \rightarrow B$  отображения  $h = p\tilde{h}$ ;
- гомотопия  $\tilde{H}': X' \times I \rightarrow E$ , накрывающая ограничение на  $X' \times I$  гомотопии  $H$  и продолжающая отображение  $\tilde{h}: X \times \{0\} \rightarrow E$ , ограниченное на  $X' \times \{0\}$ .

Тогда существует гомотопия  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$ , которая накрывает гомотопию  $H$  и одновременно является продолжением гомотопии  $\tilde{H}'$  и отображения  $\tilde{h}: X \times \{0\} \rightarrow E$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда расслоение тривиально, т. е.  $E = B \times F$  и  $p(b, f) = b$ . В этом случае отображение  $\tilde{H}$  задаётся покомпонентно двумя отображениями: в  $B$  и в  $F$ . Отображение в  $B$  совпадает с отображением  $H$ , поэтому остаётся построить отображение в  $F$ . Для этого достаточно применить следующее утверждение, которое бывает полезно и во многих других ситуациях.

*Лемма (Борсук). Пусть  $X$  — CW-комплекс,  $X' \subset X$  — его подкомплекс. Предположим, что задано отображение  $f: X \rightarrow Y$  и задана гомотопия  $F': X' \times I \rightarrow Y$  отображения  $f' = f|_{X'}$ . Тогда эту гомотопию можно продолжить до гомотопии отображения  $f$ .*

*Доказательство.* Применим индукцию по размерности остова. Пусть  $x_0 \in X^0$ , т.е.  $x_0$  — вершина. Если  $x_0 \in X'$ , то отображение  $\{x_0\} \times I \rightarrow Y$  задано, а если  $x_0 \notin X'$ , то  $\{x_0\} \times I$  можно отобразить в точку  $f(x_0)$ . Предположим теперь, что гомотопия продолжена на остов  $X^n$ ,  $n \geq 0$ . Тогда для каждой  $(n + 1)$ -мерной клетки получаем отображение, которое задано на  $S^n \times I$  и на  $D^{n+1} \times \{0\}$ ; это отображение нужно продолжить на  $D^{n+1} \times I$ . Для этого расположим цилиндр  $D^{n+1} \times I$  в  $\mathbb{R}^{n+2}$  и выберем точку  $O$  на оси цилиндра над его верхним основанием (рис. 77). Пусть  $x \mapsto \varphi(x)$  — проекция цилиндра из точки  $O$  на объединение боковой поверхности и нижнего основания. Для точки  $\varphi(x)$  отображение задано; точку  $x$  отобразим в ту же самую точку. □

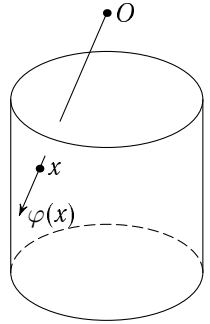


Рис. 77. Проекция цилиндра

Рассмотрим теперь случай, когда  $X = D^n$ , а расслоение  $p: E \rightarrow B$  произвольно. По условию задано отображение  $H: D^n \times I \rightarrow B$ . С помощью этого отображения можно построить индуцированное расслоение  $p_1: E_1 \rightarrow Y = D^n \times I$ , где

$$E_1 = \{(e, y) \in E \times Y \mid p(e) = H(y)\}$$

и  $p_1(x, y) = p(x)$ . Легко проверить, что индуцированное расслоение тоже является локально тривиальным. Кроме того, если на подкомплексе  $X' \subset D^n$  задана гомотопия  $\tilde{H}'$ , накрывающая  $H$ , то ей соответствует гомотопия  $\tilde{H}'_1: X' \times I \rightarrow E_1$ , заданная формулой  $\tilde{H}'_1(y) = (\tilde{H}'(y), y)$ ; равенство  $p\tilde{H}'(y) = H(y)$  следует из того, что  $\tilde{H}'$  накрывает  $H$ .

База расслоения  $p_1$  гомеоморфна  $D^{n+1}$ . Согласно теореме Фельдбау расслоение над  $D^{n+1}$  тривиально. Для тривиального расслоения существование накрывающей гомотопии  $\tilde{H}'_1: D^n \times I \rightarrow E_1$ , продолжающей гомотопию  $\tilde{H}'_1$ , уже было доказано. Требуемая накрывающая гомотопия  $\tilde{H}'$  получается как композиция отображения  $\tilde{H}'_1$  и естественной проекции  $E_1 \rightarrow E$ .

Рассмотрим, наконец, последний случай, когда расслоение  $p: E \rightarrow B$  и пара  $(X, X')$  произвольны. Применим индукцию по размерности остова. На 0-мерном остове гомотопия в некоторых точках задана, а в остальных точках её можно определить как постоянное отображение. При переходе

от  $(n - 1)$ -мерного остова к  $n$ -мерному нужно продолжить на  $D^n$  гомотопию, заданную на  $\partial D^n$ . Это мы уже научились делать.  $\square$

**Задача 14.1.** Докажите, что если  $Y \subset X$  — стягиваемый подкомплекс, то  $X/Y \sim X$ .

**Задача 14.2.** Докажите, что  $n$ -связный  $CW$ -комплекс гомотопически эквивалентен  $CW$ -комплексу, у которого есть ровно одна вершина и нет  $k$ -мерных клеток, где  $1 \leq k \leq n$ .

**Задача 14.3.** Докажите, что  $CW$ -комплекс  $X$  с одной вершиной, не имеющий  $k$ -мерных клеток, где  $1 \leq k \leq n$ ,  $n$ -связен.

**Задача 14.4.** Пусть  $A$  и  $B$  — связные  $CW$ -комплексы с отмеченными точками  $a_0$  и  $b_0$ . Докажите, что  $A * B \sim \Sigma(A \wedge B)$ , где  $A \wedge B = A \times B / A \vee B$  и  $A \vee B = (\{a_0\} \times B) \cup (A \times \{b_0\})$ .

**Задача 14.5.** Пусть  $X$  —  $n$ -связный  $CW$ -комплекс,  $Y$  —  $m$ -связный  $CW$ -комплекс (оба комплекса конечномерные). Докажите, что:

- а)  $\Sigma X$  —  $(n + 1)$ -связный комплекс;
- б)  $X \wedge Y$  —  $(n + m + 1)$ -связный комплекс;
- в)  $X * Y$  —  $(n + m + 2)$ -связный комплекс.

**Задача 14.6.** а) Докажите, что  $\Sigma(S^1 \times S^1) \sim S^2 \vee S^2 \vee S^3$ .

б) Докажите, что если  $X$  и  $Y$  —  $CW$ -комплексы, то  $\Sigma(X \times Y) \sim \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$ .

Из теоремы о накрывающей гомотопии следует, что для любого локально тривиального расслоения  $p: E \rightarrow B$  путь  $\gamma$  в базе  $B$ , идущий из точки  $a$  в точку  $b$ , индуцирует отображение слоёв  $p^{-1}(a) \rightarrow p^{-1}(b)$ , которое определено с точностью до гомотопии. Построим сначала само отображение. Введём обозначение  $F_a = p^{-1}(a)$ . Чтобы применить теорему 14.2, положим  $X = F_a$ ,  $X' = \emptyset$ ,  $\tilde{h} = \text{id}_X$  и  $H(x, t) = \gamma(t)$ . Согласно теореме 14.2 существует гомотопия  $\tilde{H}: F_a \times I \rightarrow E$ , которая накрывает гомотопию  $H$  и продолжает отображение  $\tilde{h}: F_a \times \{0\} \rightarrow E$ . Для этой гомотопии  $p\tilde{H}(x, t) = \gamma(t)$ . Значит,  $p\tilde{H}(x, 1) = \gamma(1) = b$ , т. е.  $p\tilde{H}(x, 1) \in F_b$ . Искомое отображение задаётся формулой  $x \mapsto \tilde{H}(x, 1)$ . Это отображение зависит от выбора гомотопии  $\tilde{H}$ . Покажем, что для любых двух гомотопий  $\tilde{H}_0$  и  $\tilde{H}_1$ , построенных по гомотопным путям  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ , отображения  $x \rightarrow \tilde{H}_0(x, 1)$  и  $x \rightarrow \tilde{H}_1(x, 1)$  гомотопны. Для этого снова воспользуемся теоремой 14.2. Теперь у нас есть два параметра: параметр пути  $t$  и параметр гомотопии  $\tau$ , поскольку есть семейство путей  $\gamma_\tau(t)$ . Положим  $X = F_a \times I_\tau$ ,  $X'$  — объединение  $F_a \times \{0\}$  и  $F_a \times \{1\}$ ,  $\tilde{h}(y, \tau) = y$  для всех  $\tau \in I_\tau$  и  $y \in F_a$ ,  $H(y, \tau, t) = \gamma_\tau(t)$ . Наконец,  $\tilde{H}'(y, 0, t) = H_0(y, t)$  и  $\tilde{H}'(y, 1, t) = H_1(y, t)$ . Согласно теореме 14.2 существует гомотопия  $\tilde{H}(y, \tau, t)$ , которая накрывает гомотопию  $H$  и является продолжением гомотопии  $\tilde{H}'$  и отображения  $\tilde{h}: X \times \{0\} \rightarrow E$ . Требуемая гомотопия  $G: F_a \times I_\tau \rightarrow F_b$  задаётся формулой  $G(y, \tau) = \tilde{H}(y, \tau, 1)$ .

### 14.2. Гомотопические группы

Гомотопическая группа  $\pi_n(X, x_0)$  — это обобщение фундаментальной группы  $\pi_1(X, x_0)$ . Мы сначала определим множество  $\pi_n(X, x_0)$  при  $n \geq 0$ , а затем определим на этом множестве структуру группы при  $n \geq 1$ . Фиксируем на сфере  $S^n$  отмеченную точку  $s_0$  и будем считать два отображения  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  эквивалентными, если они гомотопны (здесь имеется в виду такая гомотопия  $h_t: S^n \rightarrow X$ , что  $h_t(s_0) = x_0$  для всех  $t \in [0, 1]$ ). Множество  $\pi_n(X, x_0)$  состоит из таких классов эквивалентности. В частности, элементами множества  $\pi_0(X, x_0)$  служат компоненты линейной связности пространства  $X$ . Отображение  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  называют  $n$ -мерным сфероидом; его иногда бывает удобно представлять как отображение  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  или как отображение  $(D^n, \partial D^n) \rightarrow (X, x_0)$ . При таком представлении мы пользуемся тем, что  $I^n/\partial I^n \approx D^n/\partial D^n \approx S^n$ .

Чтобы определить на множестве  $\pi_n(X, x_0)$  структуру группы, нужно по двум отображениям  $\tilde{f}, g: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  построить отображение  $\tilde{f}g: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ . Это делается посредством конструкции, изображённой на рис. 78 вверху; на том же рисунке внизу изображена та же самая конструкция для отображений  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ .

При  $n \geq 2$  порядок, в котором берётся произведение отображений  $\tilde{f}$  и  $g$ , несуществен, поскольку отображения  $\tilde{f}g$  и  $g\tilde{f}$  гомотопны. Эту гомотопию легко построить, воспользовавшись рис. 79.

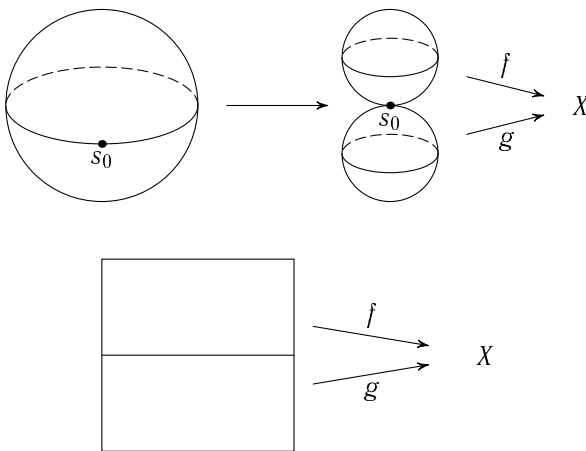


Рис. 78. Произведение сфероидов

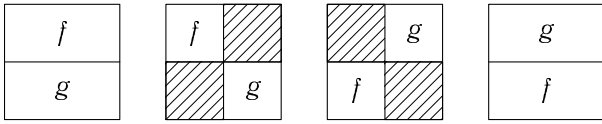
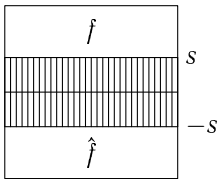


Рис. 79. Коммутативность гомотопической группы

Для отображения  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  существует такое отображение  $\hat{f}: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , что отображение  $f\hat{f}$  гомотопно постоянному. В качестве  $\hat{f}$  можно взять, например, следующее отображение. Представим куб  $I^n$  в виде  $I^n = I^{n-1} \times [-1, 1]$  и положим  $\hat{f}(x, s) = f(x, -s)$ . Тогда отображение  $f\hat{f}$  устроено так, что  $f\hat{f}(x, s) = f\hat{f}(x, -s)$  (см. рис. 80). Поэтому можно рассмотреть семейство отображений



$$g_t(x, s) = \begin{cases} f\hat{f}(x, s) & \text{при } |s| \geq t; \\ f\hat{f}(x, t) & \text{при } |s| \leq t. \end{cases}$$

Рис. 80. Обратный элемент. Ясно, что  $g_0 = f\hat{f}$  и  $g_1$  — постоянное отображение. Упражнение 1. а) Докажите, что если  $f \sim f_1$  и  $g \sim g_1$ , то  $fg \sim f_1g_1$ .

б) Докажите, что  $f(gh) \sim (fg)h$ .

При рассмотрении гомотопических групп  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ , обычно предполагается, что пространство  $X$  линейно связно. В таком случае группы  $\pi_n(X, x_0)$  и  $\pi_n(X, x_1)$  изоморфны, но этот изоморфизм не канонический: он зависит от выбора пути из  $x_0$  в  $x_1$ . Для заданного пути  $\alpha$ , соединяющего точки  $x_0$  и  $x_1$ , изоморфизм  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$  строится следующим образом. Пусть задано отображение  $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ . Рассмотрим отображение  $S^n \rightarrow S^n \vee I$ , при котором экватор переходит в  $s_0$  и каждое сечение южного полушария плоскостью, параллельной экватору, переходит в одну точку отрезка  $I$ ; при этом в качестве южного полюса выбрана отмеченная точка  $s_0$  и она переходит в свободный конец отрезка  $I$  (рис. 81). Композиция рассматриваемого отображения

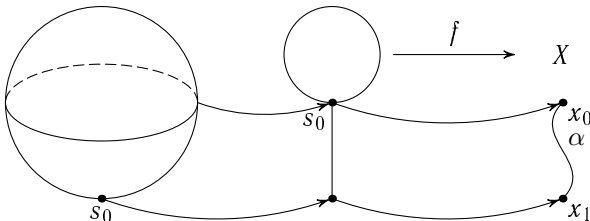


Рис. 81. Изменение отмеченной точки



и отображения  $S^n \vee I \rightarrow X$ , которое задано на  $S^n$  посредством  $f$ , а на  $I$  посредством  $\alpha$ , определяет элемент группы  $\pi_n(X, x_1)$ . Этот элемент зависит только от гомотопического класса отображения  $f$  и от гомотопического класса пути  $\alpha$  (имеется в виду гомотопия с неподвижными концами). Легко также проверить, что пути  $\alpha$  и  $\alpha^{-1}$  индуцируют взаимно обратные отображения. В частности, если  $\alpha$  — петля с началом и концом в точке  $x_0$ , то  $\alpha$  индуцирует автоморфизм группы  $\pi_n(X, x_0)$ . Этот автоморфизм зависит только от элемента группы  $\pi_1(X, x_0)$ , представленного петлёй  $\alpha$ . Если каждый элемент группы  $\pi_1(X, x_0)$  индуцирует тождественный автоморфизм группы  $\pi_n(X, x_0)$ , то пространство  $X$  называют *гомотопически  $n$ -простым*.

Если пространство  $X$  гомотопически  $n$ -просто, то группы  $\pi_n(X, x)$  для всех  $x \in X$  канонически изоморфны, поэтому можно использовать обозначение  $\pi_n(X)$ .

**З а д а ч а 14.7.** Пусть  $X$  —  $CW$ -комплекс,  $X^n$  — его  $n$ -мерный остов. Докажите, что вложение  $i: X^n \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм  $i_*: \pi_k(X^n, x_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$  при  $k < n$  и эпиморфизм при  $k = n$ .

При решении следующих двух задач нужно предполагать известным, что  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  (см. с. 256).

**З а д а ч а 14.8.** Докажите, что при  $n \geq 2$  группа  $\pi_n(S^n \vee S^1, x_0)$  является свободной абелевой группой с бесконечным (счётным) набором образующих.

**З а д а ч а 14.9.** Докажите, что пространство  $S^n \vee S^1$  не является гомотопически  $n$ -простым.

### 14.3. Точная последовательность расслоения

Пусть  $p: E \rightarrow B$  — локально тривиальное расслоение с линейно связной базой  $B$ . Выберем отмеченную точку  $b_0 \in B$ . Отображение  $p$  индуцирует гомоморфизм  $p_*: \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ , где  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ . Пусть  $i: F \rightarrow E$  — композиция гомеоморфизма  $F \approx p^{-1}(b_0)$  и вложения  $p^{-1}(b_0) \subset E$ . Отображение  $i$  индуцирует гомоморфизм  $i_*: \pi_n(F, e_0) \rightarrow \pi_n(E, e_0)$ ; слой  $F$  здесь и далее мы отождествляем с  $p^{-1}(b_0)$ .

Можно также определить третий гомоморфизм  $\partial_*: \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$ . Делается это следующим образом. Отображение  $f: (S^n, s_0) \rightarrow (B, b_0)$  можно представить как гомотопию  $\varphi_t: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (B, b_0)$ , связывающую постоянные отображения  $\varphi_0, \varphi_1: S^{n-1} \rightarrow b_0$  (рис. 82). Согласно теореме о накрывающей гомотопии существует гомотопия  $\tilde{\varphi}_t: S^{n-1} \rightarrow E$ , для которой  $\tilde{\varphi}_0(S^{n-1}) = e_0$ ,  $\tilde{\varphi}_t(s_0) = e_0$  и  $p\tilde{\varphi}_t = \varphi_t$  (рис. 83). Ясно, что  $\tilde{\varphi}_1(S^{n-1}) \subset p^{-1}(b_0) = F$ , поскольку  $\varphi_1(S^{n-1}) = b_0$ . В качестве  $\partial_* f$  мы берём гомотопический класс отображения

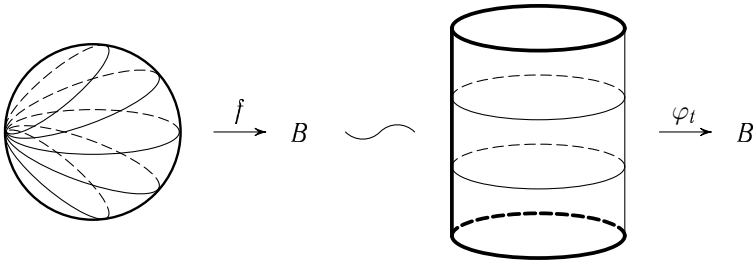


Рис. 82. Представление отображения в виде гомотопии

$\tilde{\varphi}_1: (S^{n-1}, s_0) \rightarrow (F, e_0)$ . Нужно лишь проверить, что это определение корректно, т. е. гомотопным отображениям  $\tilde{f}$  и  $\tilde{f}'$  соответствуют гомотопные отображения  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}'_1$ . Это легко сделать, применив ещё раз теорему о накрывающей гомотопии.

Напомним, что последовательность гомоморфизмов групп

$$\dots \rightarrow G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_{i-2} \rightarrow \dots$$

называют *точной*, если  $\text{Ker } \varphi_{i-1} = \text{Im } \varphi_i$ , где  $\text{Ker } \varphi_{i-1} = \{g \in G_{i-1} \mid \varphi_{i-1}(g) = 0\}$  (*ядро* гомоморфизма  $\varphi_{i-1}$ ) и  $\text{Im } \varphi_i = \{\varphi_i(g) \mid g \in G_i\}$  (*образ* гомоморфизма  $\varphi_i$ ).

Теорема 14.3. *Последовательность гомоморфизмов*

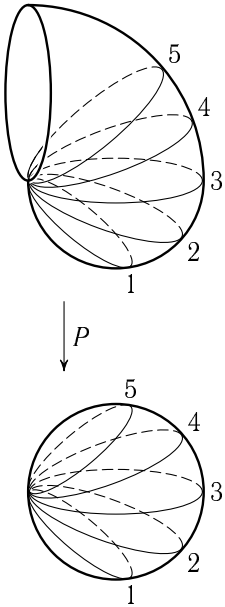
$$\dots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \dots$$

*является точной.*

**Доказательство.** Требуется доказать шесть включений типа  $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } p_*$ ,  $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } i_*$  и т.п. Каждое из этих шести включений мы докажем отдельно. В тех случаях, когда не возникает недоразумений, для краткости мы не будем упоминать об отмеченных точках и не будем различать элемент гомотопической группы и представляющий его сфероид.

Рис. 83. Поднятие гомотопии

1)  $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } p_*$ . У сфероида, лежащего в  $\text{Im } i_*$ , есть представитель  $f: S^n \rightarrow E$ , образ которого лежит в  $F$ . В таком случае  $p \circ f$  — постоянное отображение, поэтому  $f \in \text{Ker } p_*$ .



2)  $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } i_*$ . У сфероида, лежащего в  $\text{Ker } p_*$ , есть представитель  $f: S^n \rightarrow E$ , для которого сфероид  $pf: S^n \rightarrow B$  стягиваем. Для гомотопии  $H: S^n \times I \rightarrow B$ , связывающей отображение  $pf$  с постоянным отображением, существует накрывающая гомотопия  $\tilde{H}: S^n \times I \rightarrow E$ , связывающая отображение  $f$  с некоторым отображением  $f_1$ . При этом отображение  $pf_1$  постоянно, т. е. образ отображения  $f_1$  лежит в  $F$ . Это означает, что  $f_1 \in \text{Im } i_*$ .

3)  $\text{Im } p_* \subset \text{Ker } \partial_*$ . Если  $f = p\tilde{f}$ , где  $\tilde{f}: S^n \rightarrow E$  — некоторый сфероид, то сфероид  $\tilde{f}$  представлен как гомотопия  $\tilde{\varphi}_t$ . Поэтому  $\tilde{\varphi}_1$  — постоянное отображение, а значит,  $\partial_* f = 0$ .

4)  $\text{Ker } \partial_* \subset \text{Im } p_*$ . Пусть сфероид  $f: S^n \rightarrow B$  представлен как гомотопия  $\varphi_t: S^{n-1} \rightarrow B$ . Рассмотрим накрывающую гомотопию  $\tilde{\varphi}_t$  и предположим, что отображение  $\tilde{\varphi}_1: S^{n-1} \rightarrow F$  гомотопно постоянному. Пусть  $\tilde{\alpha}_t$  — гомотопия в  $F$  отображения  $\tilde{\varphi}_1$  в постоянное отображение. Рассмотрим гомотопию

$$\tilde{\psi}_t = \begin{cases} \tilde{\varphi}_{2t} & \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \tilde{\alpha}_{2t-1} & \text{при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Гомотопии  $\tilde{\psi}_t$  соответствует сфероид  $\tilde{g}: S^{n-1} \rightarrow F$ , для которого сфероид  $g = p\tilde{g}$  гомотопен  $f$ . Поэтому  $f \in \text{Im } p_*$ .

5)  $\text{Im } \partial_* \subset \text{Ker } i_*$ . Пусть сфероид  $f: S^{n+1} \rightarrow B$  представлен как гомотопия  $\varphi_t: S^n \rightarrow B$  и  $\tilde{\varphi}_t$  — поднятие этой гомотопии. Отображение  $\tilde{\varphi}_0$  постоянно, поэтому гомотопию  $\tilde{\varphi}_t$  можно рассматривать как отображение  $D^{n+1} \rightarrow B$ . Следовательно, отображение  $\tilde{\varphi}_1: S^n \rightarrow F$  гомотопно в  $E$  постоянному отображению.

6)  $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial_*$ . Пусть  $f: S^n \rightarrow F$  — сфероид, стягиваемый в  $E$ . Проекцию гомотопии сфероида  $f$  в постоянное отображение можно рассматривать как сфероид  $g: S^{n+1} \rightarrow B$ . При этом  $\partial_* g = f$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Если пространство расслоения  $E$  линейно связно, то множества  $\pi_0(E, e_0)$  и  $\pi_0(B, b_0)$  состоят из одного элемента. Множество  $\pi_0(F, e_0)$  в этом случае находится во взаимно однозначном соответствии с множеством смежных классов  $\pi_1(B, b_0)/\text{Im } p_*$  (подгруппа  $\text{Im } p_* \subset \pi_1(B, b_0)$  не обязательно нормальна, поэтому множество смежных классов может не быть группой).

**П р и м е р.**  $\pi_n(S^1) = 0$  при  $n \geq 2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим накрытие  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Любое накрытие является расслоением с дискретным слоем  $F$  и  $\pi_{n-1}(F) = 0$  при  $n \geq 2$ . Поэтому из точной последовательности расслоения следует, что  $\pi_n(S^1) = \pi_n(\mathbb{R}^1) = 0$  при  $n \geq 2$ .  $\square$

**П р и м е р.**  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$  и  $\pi_n(S^2) = \pi_n(S^3)$  при  $n \geq 3$ .

**Доказательство.** Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{C}^2$  с координатами  $z$  и  $w$  сферу  $S^3$ , заданную уравнением  $|z|^2 + |w|^2 = 1$ . На  $S^3$  действует группа  $S^1 = \{e^{i\alpha}\}$  (обе координаты  $z$  и  $w$  умножаются на  $e^{i\alpha}$ ). Факторпространство по этому действию гомеоморфно проективному пространству  $\mathbb{C}P^1$  с однородными координатами  $(z : w)$ . Покажем, что проекция  $p: S^3 \rightarrow S^3/S^1 \approx \mathbb{C}P^1$  является локально тривиальным расслоением (расслоение Хопфа).

Покроем  $\mathbb{C}P^1$  открытыми множествами  $U_1$  и  $U_2$ , которые получаются из  $\mathbb{C}P^1$  выкалыванием точек  $(1:0)$  и  $(0:1)$ . Покажем, что над каждым из этих множеств отображение  $p$  является тривиальным расслоением со слоем  $S^1$ . Каждую точку сферы  $S^3$  можно представить в виде  $(ae^{i\varphi}, be^{i\psi})$ , где  $a$  и  $b$  — неотрицательные числа, для которых выполняется равенство  $a^2 + b^2 = 1$ . В качестве гомеоморфизмов  $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1$ , согласованных с проекцией, можно взять

$$h_1(ae^{i\varphi}, be^{i\psi}) = \left(\frac{a}{b}e^{i(\varphi-\psi)}, e^{i\psi}\right), \quad h_2(ae^{i\varphi}, be^{i\psi}) = \left(\frac{b}{a}e^{i(\psi-\varphi)}, e^{i\varphi}\right).$$

Запишем точную последовательность расслоения Хопфа:

$$\dots \longrightarrow \pi_2(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3) \longrightarrow \dots$$

Мы уже знаем, что  $\pi_k(S^n) = 0$  при  $k < n$  (теорема 8.8 на с. 120). Поэтому  $\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .

Рассмотрим теперь другой участок точной последовательности расслоения Хопфа:

$$\dots \longrightarrow \pi_n(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^2) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(S^1) \longrightarrow \dots$$

Если  $n \geq 3$ , то  $\pi_n(S^1) = \pi_{n-1}(S^1) = 0$ , поэтому  $p_*: \pi_n(S^3) \rightarrow \pi_n(S^2)$  — изоморфизм.  $\square$

Обсудим теперь более подробно, как геометрически устроено расслоение Хопфа; в частности, как расположены его слои в  $S^3$ . Представим  $\mathbb{C}P^1$  в виде объединения двух замкнутых множеств  $D_1^2 \subset U_1$  и  $D_2^2 \subset U_2$ , заданных неравенствами  $a \geq b$  и  $a \leq b$ . Гомеоморфизмы  $h_i: p^{-1}(D_i^2) \rightarrow D_i^2 \times S^1$  зададим теми же самыми формулами. Пространство расслоения  $S^3$  получается в результате склейки двух полноторий  $D_1^2 \times S^1$  и  $D_2^2 \times S^1$  по гомеоморфизму их краёв. Меридиан полнотория

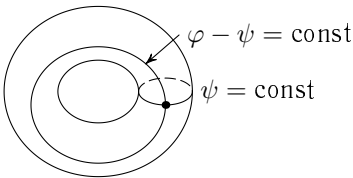


Рис. 84. Меридиан и параллель

$D_1^2 \times S^1$  задаётся уравнением  $\psi = \text{const}$ , параллель задаётся уравнением  $\varphi - \psi = \text{const}$  (рис. 84); здесь предполагается, что меридиан и параллель

расположены на крае, т. е.  $a/b = 1$ . Слой расслоения задаётся уравнениями  $\varphi - \psi = \text{const}$ ,  $a/b = \text{const}$ .

Полноторие  $D_1^2 \times S^1$  можно преобразовать так, чтобы его меридианы по-прежнему задавались уравнениями  $\psi = \text{const}$ , а параллели задавались уравнениями  $\varphi = \text{const}$ . Для этого нужно разрезать полноторие меридиональной плоскостью, а затем повернуть на  $2\pi$  верхнюю часть разреза, оставляя нижнюю часть разреза неподвижной (рис. 85). Правильно выбрав направление поворота, получим гомеоморфизм полнотория на себя, после применения которого параллели будут задаваться уравнениями  $\varphi = \text{const}$  (рис. 86). При этом слои окажутся зацепленными так, как показано на рис. 87.

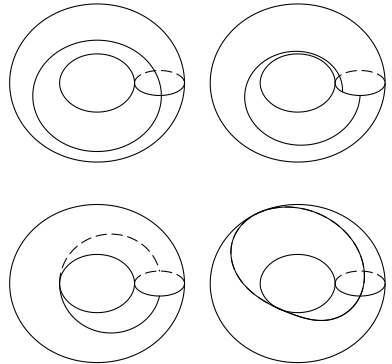


Рис. 85. Гомеоморфизм полнотория

Для второго полнотория  $D_2^2 \times S^1$  построим аналогичный гомеоморфизм. Края полноторий  $D_1^2 \times S^1$  и  $D_2^2 \times S^1$  после этого нужно склеить, отождествив точки с одинаковыми координатами  $\varphi$  и  $\psi$ . При этом меридианы одного полнотория отождествляются с параллелями другого полнотория (рис. 88).

**З а м е ч а н и е.** Для выяснения взаимного расположения слоёв расслоения Хопфа можно также воспользоваться тем, что слои представляют собой сечения сферы  $S^3$  комплексными прямыми  $\alpha z = \beta w$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

**З а д а ч а 14.10.** Рассмотрим в пространстве вещественных матриц  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  сферу, заданную уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . Докажите, что вырожденные матрицы разбивают эту сферу на два полнотория.

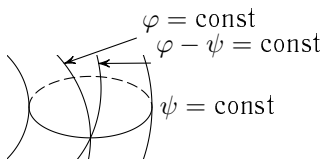


Рис. 86. Образ параллели при гомеоморфизме

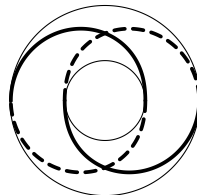


Рис. 87. Зацепление Хопфа

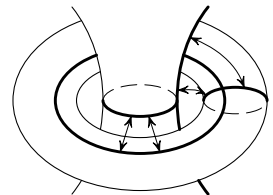


Рис. 88. Склейка полноторий

З а д а ч а 14.11. Пусть  $p: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  — расслоение Хопфа. Докажите, что  $D^4 \cup_p \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}P^2$  (здесь подразумевается, что  $S^3 = \partial D^4$ ).

З а д а ч а 14.12. Докажите, что не существует ретракции  $r: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . (Здесь подразумевается, что  $\mathbb{C}P^1$  вложено в  $\mathbb{C}P^2$  естественным образом.)

Расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$  со слоем  $S^1$  имеет многомерные обобщения. Одно из этих обобщений таково. Представим  $S^{2n+1}$  как единичную сферу в  $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$  и отождествим точки  $(\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n+1}) \in S^{2n+1}$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ . В результате получим отображение  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , которое является расслоением со слоем  $S^1$ . Кроме того, вместо комплексных чисел можно взять кватернионы  $\mathbb{H}$ . Тогда получим расслоение  $S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$  со слоем  $S^3$ . Например, при  $n = 1$  получим расслоение  $S^7 \rightarrow S^4$  со слоем  $S^3$ . Все эти расслоения тоже называют *расслоениями Хопфа*.

#### 14.4. Относительные гомотопические группы

Для пары пространств  $X \supset A$  с отмеченной точкой  $a_0 \in A$  при  $n \geq 1$  можно определить  $n$ -мерный *относительный сфероид* как отображение  $f: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (X, A, a_0)$ ; здесь имеется в виду отображение троек пространств, т. е. предполагается, что  $f(\partial D^n) \subset A$  и  $f(s_0) = a_0$ . Относительные сфероиды  $f_0$  и  $f_1$  называют *гомотопными*, если существует связывающая их гомотопия  $f_t$ , для которой  $f_t(\partial D^n) \subset A$  и  $f_t(s_0) = a_0$ .

Множество  $\pi_n(X, A, a_0)$ ,  $n \geq 1$ , состоит из классов эквивалентности  $n$ -мерных относительных сфероидов. На множестве  $\pi_1(X, A, a_0)$  нельзя задать структуру группы. Дело в том, что элементы множества  $\pi_1(X, A, a_0)$  представляются путями с началом  $a_0$  и концом  $a \in A$ . Из двух таких путей нельзя естественным образом составить путь с началом  $a_0$  (рис. 89). Хотя  $\pi_1(X, A, a_0)$  не группа, в этом множестве есть выделенный элемент — класс постоянного отображения. Этот элемент мы будем называть нулевым.

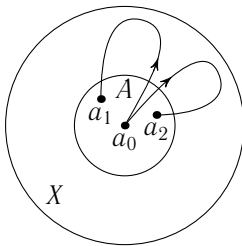


Рис. 89. Элементы множества  $\pi_1(X, A, a_0)$

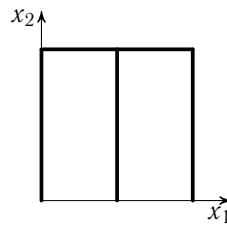


Рис. 90. Композиция относительных сфероидов

При  $n \geq 2$  на множестве  $\pi_n(X, A, a_0)$  можно задать структуру группы. Для этого удобно использовать описание относительных сфероидов как отображений куба  $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$ . Но при этом  $D^n$  мы отождествим не с самим кубом  $I^n$ , а с факторпространством  $I^n/(\partial I^n \setminus I^{n-1})$ , где  $I^{n-1}$  задаётся уравнением  $x_n = 0$ . Тогда относительный сфероид — это отображение  $f: I^n \rightarrow X$ , для которого  $f(\partial I^n) \subset A$  и  $f(\partial I^n \setminus I^{n-1}) = a_0$ .

Зададим композицию относительных сфероидов  $f, g: I^n \rightarrow X$  следующей формулой:

$$fg(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{при } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}; \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \text{при } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1. \end{cases}$$

На рис. 90 жирной линией изображено множество точек, которые отображение  $fg$  переводит в отмеченную точку  $a_0$  (для  $n = 2$ ).

При  $n = 2$  нельзя воспользоваться той конструкцией, которая применялась при доказательстве коммутативности группы  $\pi_n(X)$ , потому что относительный сфероид  $f: I^2 \rightarrow X$  не обязательно отображает  $I^1 \subset I^2$  в отмеченную точку (на рис. 90 множество  $I^1$  изображено пунктиром). Но при  $n \geq 3$  эту конструкцию можно применить, воспользовавшись тем, что относительный сфероид  $f: I^n \rightarrow X$  отображает  $\partial I^{n-1}$  в отмеченную точку.

Следующее утверждение часто используется при работе с относительными гомотопическими группами.

**Теорема 14.4.** *Относительный сфероид  $f: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (X, A, a_0)$  представляет нулевой элемент группы  $\pi_n(X, A, a_0)$  тогда и только тогда, когда существует гомотопия  $h_t$ , связывающая отображение  $h_0 = f$  с отображением  $h_1$ , для которого  $h_1(D^n) \subset A$ , и при этом образы точек  $S^{n-1}$  неподвижны при гомотопии.*

**Доказательство.** Предположим, что существует указанная гомотопия  $h_t$ . Рассмотрим гомотопию  $g_t(s) = h_1((1-t)s + ts_0)$ . Эта гомотопия связывает  $h_1$  с постоянным отображением  $D^n \rightarrow a_0$ . Условие  $g_t(S^{n-1}) \subset A$  выполняется, потому что  $h_1(D^n) \subset A$ .

Предположим теперь, что существует гомотопия  $f_t: (D^n, \partial D^n, s_0) \rightarrow (X, A, a_0)$ , связывающая отображение  $f_0 = f$  с постоянным отображением  $D^n \rightarrow a_0$ . Требуется построить гомотопию  $h_t$ , неподвижную на  $S^{n-1}$ . Положим

$$h_t(s) = \begin{cases} f_t\left(\frac{s}{1-t/2}\right) & \text{при } 0 \leq \|s\| < 1-t/2; \\ f_{2-2\|s\|}\left(\frac{s}{\|s\|}\right) & \text{при } 1-t/2 \leq \|s\| \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что  $h_0 = f_0 = f$ ;  $h_1(D^n) \subset A$ ; если  $s \in S^{n-1}$ , то  $h_t(s) = f_0(s)$ .  $\square$

Вложение  $i: A \rightarrow X$  индуцирует гомоморфизм  $i_*: \pi_n(A, a_0) \rightarrow \pi_n(X, a_0)$ . Абсолютный сфероид  $(D^n, s_0) \rightarrow (X, a_0)$  можно рассматривать как относительный сфероид  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, a_0)$ , потому что  $S^{n-1}$  отображается в  $a_0 \in A$ . При этом гомотопным абсолютным сферами соответствуют гомотопные относительные сфероиды, поэтому получаем гомоморфизм  $p_*: \pi_n(X, a_0) \rightarrow \pi_n(X, A, a_0)$ . Наконец, можно определить гомоморфизм  $\partial_*: \pi_n(X, A, a_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, a_0)$ , сопоставив относительному сфероиду  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, a_0)$  его ограничение на  $(S^{n-1}, s_0)$ ; непосредственно из определения гомотопии относительных сфероидов видно, что гомотопным относительным сферами сопоставляются гомотопные абсолютные сфероиды.

**Теорема 14.5** (точная последовательность пары). *Последовательность гомоморфизмов*

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, a_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A, a_0) \rightarrow \dots$$

*точна.*

**Доказательство.** 1)  $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } p_*$ . Согласно теореме 14.4 относительный сфероид, для которого  $f(D^n) \subset A$ , представляет нулевой элемент группы  $\pi_n(X, A, a_0)$ .

2)  $\text{Ker } p_* \subset \text{Im } i_*$ . Пусть для отображения  $f: I^n \rightarrow X$ , которое переводит  $I^{n-1}$  в  $A$  и переводит  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  в  $a_0$ , существует гомотопия  $F: I^n \times I \rightarrow X$  в классе относительных сфероидов, связывающая его с постоянным отображением в  $a_0$ . Сечение куба  $I^{n+1} = I^n \times I$  гиперплоскостью  $tx_n + (1-t)x_{n+1} = 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , гомеоморфно  $I^n$ . Рассмотрим ограничение отображения  $F$  на это сечение. В результате получим гомотопию абсолютных сфероидов. При  $t = 0$  получаем грань  $x_{n+1} = 0$ , ограничение на которую совпадает с  $f$ . При  $t = 1$  получаем грань  $x_n = 0$ , которая по условию отображается в  $A$ .

3)  $\text{Im } p_* \subset \text{Ker } \partial_*$ . Абсолютный сфероид  $f: D^n \rightarrow X$  отображает  $\partial D^n$  в  $a_0$ .

4)  $\text{Ker } \partial_* \subset \text{Im } p_*$ . Рассмотрим относительный сфероид  $f: I^n \rightarrow X$ , для которого ограничение на  $I^{n-1}$  гомотопно постоянному отображению в  $a_0$  (в классе отображений  $I^{n-1} \rightarrow A$ ). Пусть  $g_t: I^{n-1} \rightarrow A$  — гомотопия, связывающая отображение  $f|_{I^{n-1}}$  с постоянным отображением. Рассмотрим гомотопию  $\hat{f}_t: \partial I^n \rightarrow X$ , которая совпадает с  $g_t$  на  $I^{n-1}$  и отображает  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  в  $a_0$ . Согласно лемме Борсука эту гомотопию можно продолжить до гомотопии отображения  $f$ . В результате получим гомотопию в классе относительных сфероидов, которая связывает  $f$  с относительным сфероидом, отображающим  $\partial I^n$  в  $a_0$ .



5)  $\text{Im } \partial_* \subset \text{Ker } i_*$ . Если абсолютный сфероид  $f: I^{n-1} \rightarrow A$  получается из относительного сфероида  $g: I^n \rightarrow X$  ограничением на  $I^{n-1} = I^{n-1} \times \{0\} \subset I^n$ , то  $g$  можно рассматривать как гомотопию  $g_t: I^{n-1} \rightarrow X$  сфероида  $f$  в пространстве  $X$ , связывающую его с постоянным отображением.

6)  $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial_*$ . Гомотопию  $g_t: I^{n-1} \rightarrow X$  сфероида  $g_0: I^{n-1} \rightarrow A$  в сфероид  $g_t: I^{n-1} \rightarrow a_0$  можно рассматривать как относительный сфероид  $g: I^n \rightarrow X$ , ограничение которого на  $I^{n-1}$  совпадает с  $g_0$ .  $\square$

**Задача 14.13.** Докажите, что  $\pi_{n-1}(X) \cong \pi_n(CX, X)$  при  $n \geq 2$ .

Следующее утверждение показывает, что точная последовательность расслоения является частным случаем точной последовательности пары.

**Теорема 14.6.** Пусть  $p: E \rightarrow B$  — локально тривиальное расслоение,  $e_0 \in E$  — произвольная точка,  $b_0 = p(e_0)$  и  $F = p^{-1}(e_0)$ . Тогда отображение  $p_*: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  является изоморфизмом при всех  $n \geq 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{h}: D^n \rightarrow E$  — относительный сфероид, для которого абсолютный сфероид  $h = p\tilde{h}$  представляет нулевой элемент группы  $\pi_n(B, b_0)$ . Тогда существует гомотопия  $H: D^n \times I \rightarrow B$ , связывающая отображение  $h$  с постоянным отображением (в классе отображений, переводящих  $S^{n-1}$  в  $b_0$ ). Согласно теореме о накрывающей гомотопии существует гомотопия  $\tilde{H}: D^n \times I \rightarrow E$ , которая одновременно накрывает гомотопию  $H$  и продолжает гомотопию  $\tilde{H}': \{s_0\} \times I \rightarrow e_0 \in E$ . Гомотопия  $\tilde{H}$  связывает относительный сфероид  $\tilde{h}$  с постоянным отображением в классе относительных сфероидов. Поэтому  $p_*$  — мономорфизм.

Пусть  $h: S^n \rightarrow B$  — сфероид. Его можно рассматривать как гомотопию  $H: S^{n-1} \times I \rightarrow B$ , связывающую постоянные отображения  $S^{n-1} \rightarrow b_0 \in B$  (снова обратитесь к рис. 82 на с. 186). Пусть  $\tilde{H}: S^{n-1} \times I \rightarrow E$  — гомотопия, которая одновременно накрывает гомотопию  $H$  и продолжает гомотопию  $\tilde{H}': \{s_0\} \times I \rightarrow e_0 \in E$ . Гомотопию  $\tilde{H}$  можно рассматривать как относительный сфероид  $\tilde{h}: D^n \rightarrow E$  (рис. 91). При этом  $h = p\tilde{h}$ , а значит,  $p_*$  — эпиморфизм.  $\square$

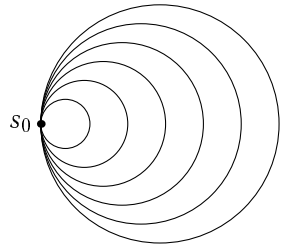


Рис. 91. Гомотопия как относительный сфероид

### 14.5. Теорема Уайтхеда

Теорема Уайтхеда утверждает, что отображение связных  $CW$ -комплексов  $X \rightarrow Y$ , индуцирующее изоморфизм всех гомотопических групп,

является гомотопической эквивалентностью. Доказательство теоремы Уайтхеда мы начнём с частного случая, когда пространство  $Y$  состоит из одной точки. В общем случае теорема Уайтхеда легко выводится из относительного варианта этого частного случая.

**Теорема 14.7.** Пусть  $X$  —  $CW$ -комплекс,  $x_0$  — его вершина. Предположим, что  $\pi_n(X, x_0) = 0$  для всех  $n \geq 0$ . Тогда  $X$  — стягиваемое пространство.

**Доказательство.** Пусть  $f_0 = \text{id}_X$  и  $f'_0$  — ограничение  $f_0$  на  $X^0$  (0-мерный остов  $X$ ). Равенство  $\pi_0(X, x_0) = 0$  означает, что для каждой вершины  $x_\alpha \in X^0$  существует путь  $\gamma_\alpha$  из  $x_\alpha$  в  $x_0$ . Формула  $F'_0(x_\alpha) = \gamma_\alpha(t)$  задаёт гомотопию, связывающую отображение  $f'_0$  с постоянным отображением  $X^0 \rightarrow x_0$ . Согласно лемме Борсука эту гомотопию можно продолжить до гомотопии  $F_0(x, t)$  всего пространства  $X$ . Эта гомотопия связывает тождественное отображение  $F_0(x, 0) = f_0(x)$  с отображением  $F_0(x, 1) = f_1(x)$ , которое переводит  $X^0$  в  $x_0$ .

Пусть  $f'_1$  — ограничение  $f_1$  на  $X^1$ . Из равенства  $\pi_1(X, x_0) = 0$  следует, что существует гомотопия  $F'_1$ , связывающая отображение  $f'_1$  с постоянным отображением  $X^1 \rightarrow x_0$ . Продолжив эту гомотопию на  $X$ , получим гомотопию  $F_1$ , связывающую отображение  $f_1$  с отображением  $f_2$ , которое переводит  $X^1$  в  $x_0$ .

Аналогично, воспользовавшись равенством  $\pi_n(X, x_0) = 0$ , можно построить гомотопию  $F_n$ , связывающую отображения  $f_n$  и  $f_{n+1}$ , причём  $f_{n+1}$  переводит  $X^n$  в  $x_0$ .

Если  $\dim X < \infty$ , то доказательство завершено. Если же  $\dim X = \infty$ , то гомотопию  $F$ , связывающую отображение  $\text{id}_X$  с отображением  $X \rightarrow x_0$ , можно построить следующим образом. Пусть при  $t_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$  отображение  $F(x, t_n)$  совпадает с  $f_n(x)$ , а между  $t_n$  и  $t_{n+1}$  отображение  $F$  устроено как  $F_n$ . Ясно, что ограничение  $F$  на  $X^n \times I$  непрерывно при всех  $n$ , поэтому отображение  $F$  непрерывно.  $\square$

Пространство  $A \subset X$  называют *деформационным ретрактом*  $X$ , если существует гомотопия  $f_t: X \rightarrow X$ ,  $t \in [0, 1]$ , обладающая следующими свойствами:  $f_t|_A = \text{id}_A$  для всех  $t$ ,  $f_0 = \text{id}_X$  и  $f_1(X) \subset A$ . Отображение  $r = f_1: X \rightarrow A$  обладает при этом следующими свойствами:  $ri = \text{id}_A$  и отображение  $ir$  гомотопно  $\text{id}_X$  (здесь  $i: A \rightarrow X$  — естественное вложение подмножества в множество). Ясно, что деформационный ретракт  $A$  пространства  $X$  гомотопически эквивалентен  $X$ . Действительно, рассмотрим отображения  $r: X \rightarrow A$  и  $i: A \rightarrow X$ . Тогда  $ir \simeq \text{id}_X$  и  $ri = \text{id}_A$ .

**Задача 14.14.** Пусть  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$ . Докажите, что пространство  $S^m \vee S^n = (S^m \times \{x_0\}) \cup (\{y_0\} \times S^n)$ , где  $x_0 \in S^m$  и  $y_0 \in S^n$ , является де-

формационным ретрактом пространства, которое получается из  $S^m \times S^n$  выкалыванием одной точки, не принадлежащей  $S^m \vee S^n$ .

Теорема 14.7 имеет следующий относительный вариант.

**Теорема 14.8.** Пусть  $X$  — линейно связный CW-комплекс,  $A$  — его подкомплекс,  $a_0$  — вершина  $A$ . Предположим, что  $\pi_n(X, A, a_0) = 0$  для всех  $n \geq 1$ . Тогда  $A$  — деформационный ретракт  $X$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $n \geq 1$  и  $g_n: X \rightarrow X$  — отображение, для которого  $g_n(X^{n-1}) \subset A$  и  $g_n|_A = \text{id}_A$ . Согласно теореме 14.4 из равенства  $\pi_n(X, A, a_0) = 0$  следует, что существует гомотопия, неподвижная на  $A$ , которая связывает отображение  $g_n|_{X^n \cup A}$  с отображением  $g'_{n+1}: X^n \cup A \rightarrow A$ . Продолжая эту гомотопию на всё пространство  $X$ , получим отображение  $g_{n+1}$ .

Отображение  $g_1$  строится следующим образом. Соединим вершину  $x_\alpha \in X^0 \setminus A^0$  путём с вершиной  $a_0$  и положим  $g'_1(x_\alpha) = a_0$ . Ясно, что отображение  $g'_1: X^0 \cup A \rightarrow X$  гомотопнo отображению  $\text{id}_{X^0 \cup A}$ . Продолжив эту гомотопию на  $X$ , получим требуемое отображение  $g_1$ .  $\square$

Теперь можно приступить непосредственно к доказательству теоремы Уайтхеда.

**Теорема 14.9 (Уайтхед).** Пусть  $X$  и  $Y$  — связные CW-комплексы,  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  — их вершины. Предположим, что отображение  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  индуцирует изоморфизмы  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  для всех  $n \geq 1$ . Тогда  $f$  — гомотопическая эквивалентность.

**Доказательство.** Пусть  $C_f$  — пространство, которое получается в результате приклеивания  $X \times I$  к  $Y$  по отображению  $X \times \{0\} = X \xrightarrow{f} Y$  (рис. 92). Пространство  $C_f$  называют *цилиндром* отображения  $f$ .

Тождественное отображение  $C_f \rightarrow C_f$  гомотопнo отображению  $g: C_f \rightarrow Y \subset C_f$ , причём гомотопия тождественна на  $Y$ . Поэтому пространства  $C_f$  и  $Y$  гомотопически эквивалентны.

Отображение  $f$  представляется в виде композиции отображений  $X \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{g} Y$ , где  $i$  — естественное вложение  $X = X \times \{1\} \rightarrow C_f$ . Гомоморфизмы  $i_* g_*$  и  $g_*$  — изоморфизмы, поэтому  $i_*$  — изоморфизм.

Запишем точную последовательность пары  $(C_f, X)$ :

$$\dots \rightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{i_*} \pi_n(C_f) \xrightarrow{p_*} \pi_n(C_f, X) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(C_f) \rightarrow \dots$$

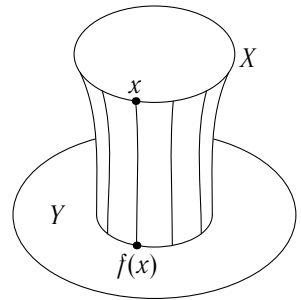


Рис. 92. Цилиндр отображения

Покажем, что  $\pi_n(C_f, X) = 0$ . Действительно,  $\text{Ker } p_* = \text{Im } i_* = \pi_n(C_f)$ , поэтому  $p_* = 0$ . Кроме того,  $\text{Im } \partial_* = \text{Ker } i_* = 0$ , поэтому  $\partial_* = 0$ , т. е.  $\pi_n(C_f, X) = \text{Ker } \partial_*$ . Но  $\text{Ker } \partial_* = \text{Im } p_* = 0$ .

Согласно теореме 14.8 пространство  $X$  является деформационным ретрактом  $C_f$ , т. е. тождественное отображение  $C_f \rightarrow C_f$  гомотопно отображению  $r: C_f \rightarrow X \subset C_f$ , причём гомотопия неподвижна на  $X$ . Положим  $f' = rj: Y \rightarrow X$ . Тогда  $f'f = rjgi \sim r(\text{id}_{C_f})i = \text{id}_X$  и  $ff' = girj \sim g(\text{id}_{C_f})j = \text{id}_Y$ .  $\square$

## Глава V

# Многообразия

### § 15. Определение и основные свойства

Топологическое пространство  $X$  со счётной базой называют *топологическим многообразием*, если оно хаусдорфово и любая точка  $x \in X$  обладает открытой окрестностью, гомеоморфной открытому множеству в  $\mathbb{R}^n$ . (Пример на с. 132 показывает, что бывают нехаусдорфовы пространства, любая точка которых обладает открытой окрестностью, гомеоморфной открытому множеству в евклидовом пространстве.)

Из теоремы Брауэра об инвариантности размерности (теорема 4.9 на с. 72) следует, что размерность локально евклидова пространства определена однозначно. Действительно, предположим, что  $U \ni x$  и  $V \ni x$  — открытые множества в  $X$ , гомеоморфные открытым подмножествам в  $\mathbb{R}^n$  и в  $\mathbb{R}^m$ , соответственно, причём  $n \neq m$ . Тогда открытое множество  $U \cap V$  гомеоморфно как открытому множеству в  $\mathbb{R}^n$ , так и открытому множеству в  $\mathbb{R}^m$ , а это противоречит теореме об инвариантности размерности.

Пусть  $M^n$  — топологическое многообразие размерности  $n$ . Пару  $(U, \varphi)$ , где  $U \subset M^n$  — связное открытое множество и  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  — гомеоморфизм на открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , будем называть *картой*, или *локальной системой координат*. Если при этом  $\varphi(x) = 0$ , то будем говорить, что  $(U, \varphi)$  — *локальная система координат с началом в точке  $x$* .

*Гладкая структура* на топологическом многообразии  $M$  — это семейство  $\mathcal{A}$  локальных систем координат  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ , обладающее следующими свойствами:

- 1) множества  $U_\alpha$  покрывают  $M$ ;
- 2) если  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , то  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$  — гладкое отображение;
- 3) семейство  $\mathcal{A}$  максимально в том смысле, что если  $(U, \varphi)$  — локальная система координат и все отображения  $\varphi_\alpha \varphi^{-1}$  и  $\varphi \varphi_\alpha^{-1}$  ( $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ ) гладкие, то  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ .

Чтобы задать гладкую структуру на  $M$ , достаточно задать произвольное семейство  $\mathcal{A}_0$  локальных систем координат, обладающее свойствами

1 и 2. Действительно, свойство 3 можно принять за определение множества локальных систем координат, которыми нужно пополнить семейство  $\mathcal{A}_0$ . Набор карт, покрывающих  $M$  и обладающих свойством 2, называют *атласом*.

Топологическое многообразие  $M$  с заданной гладкой структурой называют *гладким многообразием*, или просто *многообразием*. (Негладкие многообразия встречаются в математике гораздо реже, чем гладкие.)

**Пример.** На топологическом пространстве  $\mathbb{R}P^n$  можно ввести структуру многообразия.

**Доказательство.** Пространство  $\mathbb{R}P^n$  можно покрыть открытыми множествами  $U_i = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\}$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ . Определим гомеоморфизм  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  формулой

$$\varphi_i(x_1 : \dots : x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right).$$

Требуется доказать, что отображение  $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ , определённое на множестве  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ , является гладким. Не теряя общности, можно считать, что  $i = 1$  и  $j = 2$ . Тогда множество  $U_i \cap U_j$  задаётся неравенством  $x_1 x_2 \neq 0$ . Пусть

$$\varphi_1(x_1 : \dots : x_{n+1}) = \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_1} \right) = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_2 \varphi_1^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \varphi_2(x_1 : \dots : x_{n+1}) = \\ &= \left( \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_2} \right) = \left( \frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1} \right). \end{aligned}$$

По условию  $y_1 \neq 0$ , поэтому отображение  $\varphi_2 \varphi_1^{-1}$  гладкое.  $\square$

**Упражнение 1.** Докажите, что пространство  $\mathbb{C}P^n$  является многообразием.

## 15.1. Многообразия с краем

Чтобы получить определение *многообразия с краем*, нужно считать картами также и гомеоморфизмы  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ , где  $\varphi(U)$  — открытое подмножество в топологическом пространстве  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ .

При определении гладкой структуры на многообразии с краем мы будем предполагать, что свойство 2 таково:

2) если  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , то существуют взаимно обратные гладкие отображения  $f_{\alpha\beta}$  и  $f_{\beta\alpha}$  открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , ограничениями которых являются отображения  $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$  и  $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$ .

Пусть  $M^n$  — многообразие с краем. Будем говорить, что  $x \in M^n$  — *точка края*, если у неё есть такая карта  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$ , что

$$\varphi(x) \in \partial\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\};$$

здесь имеется в виду гладкая карта, т.е. карта из гладкой структуры. *Краем* многообразия  $M^n$  будем называть множество всех точек края. Будем говорить, что  $x \in M^n$  — *внутренняя точка*, если у неё есть такая карта  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ , что  $\varphi(U)$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ; здесь снова имеется в виду гладкая карта. Чтобы убедиться в том, что внутренняя точка многообразия не может быть точкой края, нам понадобится следующее утверждение.

**Теорема 15.1** (об обратной функции). *Пусть  $f: U \rightarrow V$  — гладкое отображение открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , причём в некоторой точке  $x \in U$  определитель матрицы Якоби  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$  отличен от нуля.*

*Тогда у точки  $x$  есть такая окрестность  $\tilde{U} \subset U$ , что множество  $f(\tilde{U})$  открыто в  $\mathbb{R}^n$  и отображение  $f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$  является гомеоморфизмом. При этом отображение  $(f|_{\tilde{U}})^{-1}$  является гладким.*

**Доказательство.** Запишем отображение  $f$  в виде  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , где  $f_1, \dots, f_n$  — функции. Пусть  $B$  — некоторое выпуклое множество, на котором определено отображение  $f$ , и  $y, z \in B$ . Рассмотрим на отрезке  $[0, 1]$  функцию  $\varphi_i(t) = f_i(ty + (1-t)z)$ . Ясно, что

$$f_i(y) - f_i(z) = \varphi_i(1) - \varphi_i(0) = \frac{d\varphi_i}{dt}(t_i) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w_i)(y_j - z_j), \quad (1)$$

где  $t_i \in (0, 1)$  и  $w_i = t_i y + (1-t_i)z \in B$ .

Рассмотрим теперь функцию от  $n^2$  переменных  $J(w_1, \dots, w_n) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w_i)\right)$ , где  $w_1, \dots, w_n \in U$ . Эта функция непрерывна и  $J(x, \dots, x) \neq 0$ . Поэтому существует такое число  $\varepsilon$ , что если точки  $w_1, \dots, w_n$  принадлежат шару  $D_{x,\varepsilon}^n$ , то  $J(w_1, \dots, w_n) \neq 0$ . Это неравенство и формула (1) показывают, что если  $y, z \in D_{x,\varepsilon}^n$  и  $y \neq z$ , то  $f(y) \neq f(z)$ . Таким образом, ограничение отображения  $f$  на компактное множество  $D_{x,\varepsilon}^n$  является взаимно однозначным отображением на некоторое множество в хаусдорфовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Такое отображение является гомеоморфизмом.

Пусть  $\tilde{U} = \text{int } D_{x,\varepsilon}^n$ . Мы уже установили, что отображение  $f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$  является гомеоморфизмом. Докажем теперь, что множество  $f(\tilde{U})$

открыто в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $u \in \tilde{U}$  — произвольная точка. Требуется доказать, что открытый шар достаточно малого радиуса с центром  $f(u)$  целиком лежит в  $f(\tilde{U})$ . На компактном множестве  $\partial D_{x,\varepsilon}^n$  функция  $\varphi(y) = \|f(y) - f(u)\|$  достигает минимума. Этот минимум положителен, поскольку  $f(u) \notin f(\partial D_{x,\varepsilon}^n)$ . Поэтому можно выбрать положительное число  $\delta$  так, что  $\|f(y) - f(u)\| > 2\delta$  для всех  $y \in \partial D_{x,\varepsilon}^n$ . Покажем, что открытый шар радиуса  $\delta$  с центром  $f(u)$  принадлежит  $f(\tilde{U})$ . Действительно, пусть  $\|f(u) - z\| < \delta$ . Тогда если  $y \in D_{x,\varepsilon}^n$ , то

$$\|f(y) - z\| \geq \|f(y) - f(u)\| - \|f(u) - z\| > 2\delta - \delta = \delta.$$

Поэтому на множестве  $D_{x,\varepsilon}^n$  гладкая функция  $\psi(w) = \|f(w) - z\|^2$  достигает минимума во внутренней точке (на границе значение этой функции больше  $\delta^2$ , а в точке  $u$  значение меньше  $\delta^2$ ). Пусть  $a$  — точка минимума функции  $\psi$  на множестве  $D_{x,\varepsilon}^n$ . Тогда

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 2 \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)(f_i(a) - z_i).$$

Как мы уже знаем, если  $a \in D_{x,\varepsilon}^n$ , то  $J(a, \dots, a) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$ . Поэтому  $z = f(a) \in f(\tilde{U})$ , что и требовалось.

Остаётся проверить последнее утверждение: отображение  $(f|_{\tilde{U}})^{-1}$  является гладким. Если  $y \in \tilde{U}$ , то  $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right) \neq 0$ , поэтому на открытом множестве  $\tilde{U}$  отображение  $f^{-1}$  имеет гладкие частные производные. Из этого следует, что отображение  $f^{-1}$  на множестве  $\tilde{U}$  гладкое.  $\square$

*С л е д с т в и е.* Точка многообразия  $M^n$  с краем является внутренней тогда и только тогда, когда она не является точкой края.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Если точка многообразия  $M^n$  одновременно является как внутренней, так и точкой края, то существуют гладкие взаимно обратные отображения  $f: U \rightarrow V$  и  $f: V \rightarrow U$  открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , причём выполняются следующие свойства:

- 1)  $0 \in U$ ,  $0 \in V$  и  $f(0) = g(0) = 0$ ;
- 2) в  $U$  есть такое открытое подмножество  $U'$ , содержащее точку  $0$ , что  $f(U') \subset \mathbb{R}_+^n$ .

Из того, что у отображения  $f$  в окрестности точки  $0$  есть гладкое обратное отображение, следует, что  $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right) \neq 0$ . Поэтому у точки  $0$  есть такая окрестность  $\tilde{U} \subset U$ , что множество  $f(\tilde{U})$  открыто в  $\mathbb{R}^n$  и отображение  $f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$  является гомеоморфизмом. Следовательно,  $f(\tilde{U} \cap U')$  — открытая  $\mathbb{R}^n$  окрестность точки  $0$ . Но это противоречит тому, что  $f(\tilde{U} \cap U') \subset f(\tilde{U}') \subset \mathbb{R}_+^n$ .  $\square$



*З а м е ч а н и е.* Можно доказать более сильное утверждение: *открытая в  $\mathbb{R}_+^n$  окрестность точки 0 не гомеоморфна открытому в  $\mathbb{R}^n$  множеству.* Для  $n = 2$  это доказано при доказательстве теоремы 11.1 на с. 155. В общем случае для доказательства этого утверждения требуется многомерный аналог теоремы Жордана.

Компактное многообразие без края называют *замкнутым*.

Подмножество  $N \subset M^n$  называют  $k$ -мерным *подмногообразием*, если для любой точки  $x \in N$  найдётся такая карта  $(U, \varphi)$ , что  $U \cap N = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \cap \varphi(U))$ , где  $\mathbb{R}^k$  стандартно вложено в  $\mathbb{R}^n$  (т. е. рассматриваются точки, последние  $n - k$  координат которых равны 0).

**У п р а ж н е н и е 2.** а) Пусть  $M^n$  — многообразие без края. Докажите, что его подмногообразие является многообразием без края.

б) Пусть  $M^n$  — многообразие с краем. Докажите, что его подмногообразие может быть либо многообразием с краем, либо многообразием без края.

**У п р а ж н е н и е 3.** Докажите, что край многообразия является многообразием без края.

**З а д а ч а 15.1.** Пусть  $M^n$  — связное многообразие,  $N^n$  — его подмногообразие (размерности многообразий одинаковые). Докажите, что если многообразие  $N^n$  замкнутое, то  $N^n = M^n$ .

## 15.2. Отображения многообразий

Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — многообразия с гладкими структурами  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  и  $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ . Отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$  называют *гладким*, если все отображения  $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1}$  являются гладкими. Отображение  $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1}$  определено на открытом множестве  $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m$ ; оно является отображением в  $\mathbb{R}^n$ .

Если  $f: M^m \rightarrow N^n$  и  $g: N^n \rightarrow M^m$  — гладкие взаимно обратные отображения, то отображение  $f$  называют *диффеоморфизмом*, а многообразия  $M^m$  и  $N^n$  называют *диффеоморфными*. Из теоремы об обратной функции следует, что если многообразия  $M^m$  и  $N^n$  диффеоморфны, то  $m = n$ .

Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение многообразий без края,  $x \in M^m$ . Выбрав локальные системы координат в точках  $x$  и  $f(x)$ , можно рассмотреть матрицу Якоби  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ . Ранг этой матрицы не зависит от выбора локальных систем координат. Этот ранг называют *рангом* отображения  $f$  в точке  $x$ ; мы будем обозначать его  $\text{rank } f(x)$ .

Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение. Если  $\text{rank } f(x) = m$ , то отображение  $f$  называют *иммерсией*, или *погружением*, в точке  $x$ ,

а если  $\text{rang } f(x) = n$ , то отображение  $f$  называют *субмерсией*. Отображение  $f$ , которое во всех точках  $x \in M^m$  является иммерсией (субмерсией), называют иммерсией (субмерсией). Отображение  $f$ , которое является погружением и гомеоморфно отображает  $M^m$  на  $f(M^m) \subset N^n$  называют *вложением*.

**Теорема 15.2.** а) *Гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$ , являющееся иммерсией в некоторой точке  $a$ , в окрестности этой точки устроено как стандартное вложение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ . Чтобы привести иммерсию локально к такому виду, достаточно изменить систему координат в образе, т. е. в окрестности точки  $f(a)$ .*

б) *Гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$ , являющееся субмерсией в некоторой точке  $a$ , в окрестности этой точки устроено как стандартная проекция  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Чтобы привести субмерсию локально к такому виду, достаточно изменить систему координат в прообразе, т. е. в окрестности точки  $a$ .*

**Доказательство.** Пусть  $(U_a, \varphi)$  и  $(V_{f(a)}, \psi)$  — локальные системы координат с началами в точках  $a \in M^m$  и  $f(a) \in N^n$ ; при этом будем считать, что  $f(U_a) \subset V_{f(a)}$ . Запишем отображение  $f$  в локальных координатах, т. е. рассмотрим отображение  $\tilde{f} = \psi f \varphi^{-1}$ . Для отображения  $\tilde{f}$  можно рассмотреть матрицу Якоби  $J = \left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(x) \right)$ . Если  $f$  — иммерсия, то ранг матрицы  $J$  в начале координат равен  $m$ , а если  $f$  — субмерсия, то ранг равен  $n$ . Поэтому для иммерсии можно выбрать  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ , а для субмерсии можно выбрать  $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, m\}$  так, что в начале координат

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_{i_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_{i_1}}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{f}_{i_m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_{i_m}}{\partial x_m} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{или} \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_{j_n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_{j_n}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Не теряя общности, будем считать, что  $i_k = k$  (соответственно,  $j_k = k$ ).

Матрицу Якоби  $J$  можно дополнить до квадратной матрицы вида  $\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  или  $\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & I \end{pmatrix}$ , где  $I$  — единичная матрица порядка  $|n - m|$ . Существует отображение  $\tilde{F}$ , матрица Якоби которого как раз и является такой матрицей. А именно, в случае иммерсии полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m}) = \\ = (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x), \tilde{f}_{m+1}(x) + y_1, \dots, \tilde{f}_n(x) + y_{n-m}), \end{aligned}$$

а в случае субмерсии полагаем

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m-n}) = (\tilde{f}(x, y), y_1, \dots, y_{m-n});$$

сокращённо эти отображения можно записать в виде  $\tilde{F}(x, y) = \tilde{f}(x) + (0, y)$  и  $\tilde{F}(x, y) = (\tilde{f}(x, y), y)$ .

В начале координат определитель матрицы Якоби отображения  $\tilde{F}$  отличен от нуля, поэтому согласно теореме об обратной функции в некоторой окрестности начала координат у отображения  $\tilde{F}$  есть гладкое обратное отображение  $\tilde{F}^{-1}$ .

В случае иммерсии заменим отображение  $\psi$  на  $\tilde{F}^{-1}\psi$  (иными словами, мы изменяем локальную систему координат в образе отображения  $f$ ). В новых локальных координатах отображение  $f$  устроено следующим образом:

$$x \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \tilde{f}(x) = \tilde{F}(x, 0) \mapsto \tilde{F}^{-1}(x, 0).$$

В случае субмерсии заменим отображение  $\varphi$  на  $\tilde{F}\varphi$  (иными словами, мы изменяем локальную систему координат в прообразе отображения  $f$ ). В новых локальных координатах отображение  $f$  устроено следующим образом:

$$(\tilde{f}(x, y), y) \mapsto \tilde{F}^{-1}(x, y) \mapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \tilde{f}(x, y),$$

т. е.  $(x', y) \mapsto x'$ , где  $x' = \tilde{f}(x, y)$ . Остаётся заметить, что в малой окрестности начала координат при фиксированном  $y$  отображение  $x \mapsto \tilde{f}(x, y)$  локально эпиморфно, поскольку определитель матрицы Якоби этого отображения отличен от нуля.  $\square$

С помощью теоремы 15.2 легко доказывается следующее утверждение.

**Теорема 15.3.** Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение,  $X^k \subset N^n$  — подмногообразие. Предположим, что отображение  $f$  является субмерсией в каждой точке множества  $f^{-1}(X^k)$ . Тогда  $f^{-1}(X^k)$  — подмногообразие в  $M^m$  размерности  $k + m - n$ .

**Доказательство.** Пусть  $a \in f^{-1}(X^k)$ . В окрестности точки  $f(a)$  можно выбрать локальные координаты  $x = (u, v)$ , где  $u \in \mathbb{R}^k$  и  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ , так, что в этой окрестности множество  $X^k$  задаётся уравнением  $v = 0$ .

В точке  $a$  отображение  $f$  является субмерсией, поэтому согласно теореме 15.2 в окрестности точки  $a$  можно выбрать локальные координаты  $(x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ , так, что в локальных координатах, выбранных в точках  $a$  и  $f(a)$ , отображение  $f$  запишется в виде  $(x, y) \mapsto x$ , т. е.  $(u, v, y) \mapsto (u, v)$ . При этом множество  $f^{-1}(X^k)$  в выбранной координатной окрестности задаётся уравнением  $v = 0$ . Следовательно, множество  $f^{-1}(X^k)$  является подмногообразием размерности  $k + m - n$ .  $\square$

С помощью теоремы 15.3 можно доказывать, что некоторые подмножества многообразия являются подмногообразиями и тем самым доказывать, что они являются многообразиями.

**Пример.** Сфера  $S^n$  является многообразием.

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , заданное формулой  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ . В любой точке множества  $f^{-1}(1)$  ранг матрицы Якоби  $J = (2x_1, \dots, 2x_{n+1})$  равен 1, поэтому множество  $f^{-1}(1) = S^n$  является подмногообразием в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  $\square$

### 15.3. Гладкие разбиения единицы

Пусть  $\{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$  — открытое покрытие многообразия  $M^n$ . Разбиение единицы  $\{\varphi_\beta, \beta \in \mathcal{B}\}$ , подчинённое этому покрытию, называют *гладким*, если все функции  $\varphi_\beta$  гладкие.

**Теорема 15.4.** а) *Для любого открытого покрытия  $\{U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$  многообразия  $M^n$  существует подчинённое ему гладкое разбиение единицы  $\{\varphi_\beta, \beta \in \mathcal{B}\}$ .*

б) *Если множество индексов  $\mathcal{A}$  не более чем счётно, то можно считать, что  $\mathcal{B} = \mathcal{A}$  и  $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$  для любого  $\alpha \in \mathcal{A}$ .*

**Доказательство.** а) Начнём с того, что построим открытые множества  $X_k \subset M^n$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) так, что множества  $\bar{X}_k$  компактны,  $\bar{X}_k \subset X_{k+1}$  и  $M^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ . Для этого рассмотрим произвольную счётную базу пространства  $M^n$  и выберем в ней те открытые множества, замыкания которых компактны. Выбранные множества обозначим  $W_1, W_2, \dots$ . Эти множества покрывают всё многообразие  $M^n$ . Действительно, у любой точки  $x \in M^n$  есть окрестность  $U(x)$ , замыкание которой компактно. Множество  $U(x)$  можно представить в виде объединения множеств базы; ясно, что замыкания всех этих множеств компактны. Поэтому  $x \in W_i$  для некоторого  $i$ .

Положим  $X_1 = W_1$ . Компактное множество  $\bar{X}_1$  покрыто открытыми множествами  $\{W_i\}$ , поэтому  $\bar{X}_1 \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_p}$ , где  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ . Положим  $X_2 = W_1 \cup W_2 \cup W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_p}$ . Множества  $X_3, X_4, \dots$  строятся аналогично.

Построим теперь открытые множества  $V_{\beta,1} \subset V_{\beta,2} \subset V_{\beta,3}$  следующим образом. Пусть  $D_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ . Для каждой точки  $z \in \bar{X}_k \setminus X_{k-1}$  выберем открытое множество  $V_{z,3}$  так, что  $V_{z,3} \subset U_\alpha$  для некоторого  $\alpha$ ,  $V_{z,3} \subset X_{k+1}$  и  $V_{z,3} \cap X_{k-2} = \emptyset$ ; кроме того, существует карта  $\psi_z: V_{z,3} \rightarrow D_3^n$ . Открытые множества  $V_{z,1} = \psi_z^{-1}(D_1^n)$  покрывают компактное множество  $\bar{X}_k \subset X_{k+1}$ , поэтому существует конечный набор множеств  $V_{z,1}$ , покрывающий  $\bar{X}_k \subset X_{k+1}$ . Рассмотрим объединение по  $k$  всех таких наборов

и обозначим полученные множества  $\{V_{\beta,1}\}$ ; рассмотрим также соответствующие им множества  $V_{\beta,2}$  и  $V_{\beta,3}$ . Отметим, что множество индексов  $\{\beta\}$  не более чем счётно; кроме того, множества  $\{V_{\beta,1}\}$  покрывают  $M^n$  и при этом покрытие  $\{V_{\beta,3}\}$  локально конечно и вписано в покрытие  $\{U_\alpha\}$ .

Легко проверить, что функция, которая равна  $e^{-1/t}$  при  $t > 0$  и 0 при  $t \leq 0$ , является гладкой. Поэтому функция

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t)} & \text{при } t < 1; \\ 0 & \text{при } t \geq 1 \end{cases}$$

тоже является гладкой, а значит, функция  $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(\|x\|^2/4)$  является гладкой функцией в  $\mathbb{R}^n$ ; эта функция положительна во всех точках открытого шара  $D_2^n$  и равна нулю вне его.

Положим

$$g_\beta(x) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(\psi_\beta(x)) & \text{для } x \in V_{\beta,3}; \\ 0 & \text{для } x \notin V_{\beta,3} \end{cases}$$

и рассмотрим функцию  $h(x) = \sum_\beta g_\beta(x)$ . Функция  $h$  гладкая, потому что покрытие  $\{V_{\beta,3}\}$  локально конечно. Множества  $\{V_{\beta,1}\}$  покрывают всё многообразие  $M^n$  и  $g_\beta(x) > 0$ , если  $x \in V_{\beta,1}$ . Поэтому  $h(x) > 0$  для любой точки  $x \in M^n$ . Функции  $\varphi_\beta = g_\beta/h$  образуют требуемое разбиение единицы, поскольку  $\text{supp } \varphi_\beta \subset V_{\beta,3} \subset U_\alpha$ .

б) Рассмотрим открытое покрытие  $U_1, U_2, \dots$ . Мы построили разбиение единицы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  так, что  $\text{supp } \varphi_i \subset U_j$  для некоторого  $j = j(i)$ . Определим  $\tilde{\varphi}_i$  как сумму тех  $\varphi_k$ , для которых  $\text{supp } \varphi_k \subset U_i$  и  $\text{supp } \varphi_k \not\subset U_j$  при  $j < i$ . Тогда каждая функция  $\varphi_k$  входит в качестве слагаемого ровно в одну функцию  $\tilde{\varphi}_i$  и  $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset U_i$ .  $\square$

## 15.4. Теорема Сарда

Чтобы сформулировать теорему Сарда, нам понадобится понятие множества меры нуль. Говорят, что множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) имеет *меру нуль*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует покрытие  $X$  счётным множеством кубов, сумма объёмов которых меньше  $\varepsilon$ . Кубы могут быть как открытыми, так и замкнутыми; вместо кубов можно брать шары или параллелепипеды. Будем считать, что в  $\mathbb{R}^0$  меру нуль имеет только пустое множество.

Пусть  $M^n$  — многообразие. Говорят, что множество  $X \subset M^n$  имеет *меру нуль*, если существует покрытие многообразия  $M^n$  счётным множеством карт  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которого каждое множество  $\varphi_i(X \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$

имеет меру нуль. Корректность этого определения вытекает из следующих двух лемм.

*Лемма 1. Объединение счётного набора множеств меры нуль в  $\mathbb{R}^n$  является множеством меры нуль.*

*Доказательство.* Пусть  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \subset \mathbb{R}^n$  и каждое множество  $X_i$  имеет меру нуль. Покроем  $X_i$  счётным множеством кубов, сумма объёмов которых меньше  $\varepsilon/2^i$ . В результате  $X$  будет покрыто счётным множеством кубов, сумма объёмов которых меньше  $\varepsilon(1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots) = \varepsilon$ .  $\square$

*Лемма 2. Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение,  $X \subset \mathbb{R}^n$  — множество меры нуль. Тогда  $f(X) \subset \mathbb{R}^n$  — множество меры нуль.*

*Доказательство.* Пространство  $\mathbb{R}^n$  можно представить в виде счётного объединения кубов, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда множество  $X$  содержится в кубе  $I^n$ . Напомним, что

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \max_{x \in [u, v]} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \|u - v\|$$

(это следует из равенства (1) на с. 199). Пусть  $K = \max_{x \in I^n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right|$ . Тогда если  $u, v \in I^n$ , то  $\|f(u) - f(v)\| \leq K\|u - v\|$ . Поэтому образ при отображении  $f$  шара радиуса  $r$ , расположенного в  $I^n$ , содержится в шаре радиуса  $Kr$ . Это означает, что если множество  $X$  покрыто шарами, сумма объёмов которых меньше  $\varepsilon$ , то множество  $f(X)$  можно покрыть шарами, сумма объёмов которых меньше  $K^n \varepsilon$ .  $\square$

*У п р а ж н е н и е 4.* а) Пусть  $m < n$  и  $M^m \subset N^n$  — подмногообразие. Докажите, что множество  $M^m \subset N^n$  имеет меру нуль.

б) Пусть  $m < n$  и  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение. Докажите, что множество  $f(M^m) \subset N^n$  имеет меру нуль.

При доказательстве теоремы Сарда нам понадобится следующее утверждение.

*Теорема 15.5 (Фубини). Пусть  $C \subset \mathbb{R}^n$  — такое компактное множество, что любое его сечение гиперплоскостью вида  $x_n = a$  имеет меру нуль. Тогда  $C$  имеет меру нуль.*

*Доказательство.* Если  $n = 1$ , то по определению  $C = \emptyset$ . Поэтому будем считать, что  $n \geq 2$ . Множество  $C$  компактно, поэтому  $C \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [a, b]$ . Для  $t \in [a, b]$  определим множество  $C_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$  следующим образом:

$$C_t \times \{t\} = C \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}) = C \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\}.$$

По условию множество  $C_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$  имеет меру нуль. Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и покроем  $C_t$  открытыми  $(n-1)$ -мерными кубами  $I_{t,1}^{n-1}, I_{t,2}^{n-1}, \dots$ , сумма объёмов которых меньше  $\varepsilon$ . Множество  $J_t^{n-1} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{t,j}^{n-1}$  открыто, поэтому множество  $C \setminus (J_t^{n-1} \times [a, b])$  замкнуто, а значит, оно компактно. Это позволяет выбрать  $\delta = \delta(t) > 0$  так, что для всех  $\tau \in (t - \delta, t + \delta) = I_t$  множество  $C_\tau$  покрыто множеством  $J_t^{n-1} \times I_t$ . Действительно, функция  $|x_n - t|$  достигает на  $C \setminus (J_t^{n-1} \times I_t)$  своего минимума  $\delta$ ; этот минимум положителен, поскольку для  $x \in C$  функция  $|x_n - t|$  обращается в нуль лишь в том случае, когда  $x \in C_t$ . Число  $\delta$  обладает требуемым свойством, так как если  $\tau \in I_t$  и  $x \in C_\tau$ , то  $|x_n - \tau| < \delta$ , поэтому  $x \notin C \setminus (J_t^{n-1} \times [a, b])$ , а значит,

$$x \in (J_t^{n-1} \times [a, b]) \cap C_\tau \subset J_t^{n-1} \times I_t.$$

Открытые множества  $I_t$  покрывают отрезок  $[a, b]$ . Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие  $I_{t_1}, \dots, I_{t_k}$  и заменим каждое открытое множество  $I_{t_i} = (\alpha, \beta)$  на отрезок  $I_i = [\alpha, \beta] \cap [a, b]$ . Кубы  $I_{t_i,j}^{n-1} \times I_i$  покрывают множество  $C$ , причём сумма их объёмов не превосходит  $\varepsilon L$ , где  $L$  — сумма длин отрезков  $I_i$ .

**Л е м м а 3.** Пусть отрезок  $I = [a, b]$  покрыт конечным числом отрезков  $I_i = [a_i, b_i] \subset I$ . Тогда существует подпокрытие, сумма длин отрезков которого меньше  $2(b - a)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Можно считать, что покрытие отрезками  $I_1, \dots, I_n$  минимально, т.е. после выбрасывания любого отрезка  $I_i$  оставшиеся отрезки уже не покрывают  $I$ . Упорядочим отрезки  $I_1, \dots, I_n$  так, что  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Тогда из минимальности следует, что  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ . Далее, из этих неравенств и минимальности следует, что  $b_k < a_{k+2}$ , поскольку иначе отрезки  $[a_k, b_k]$  и  $[a_{k+2}, b_{k+2}]$  полностью покрывали бы отрезок  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ . Следовательно, как сумма длин отрезков  $I_1, I_3, \dots$ , так и сумма длин отрезков  $I_2, I_4, \dots$  меньше  $b - a$ .  $\square$

Лемма 3 показывает, что покрытие отрезка  $[a, b]$  отрезками  $I_1, \dots, I_k$  можно выбрать так, что  $L < 2(b - a)$ . Это завершает доказательство теоремы Фубини.  $\square$

Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение. Точку  $x \in M^m$  называют *критической*, если  $\text{гапк } f(x) < \min(m, n)$ . В противном случае точку  $x$  называют *регулярной*. Точку  $y \in N^n$  называют *критическим значением*, если  $y = f(x)$ , где  $x$  — некоторая критическая точка.

**Т е о р е м а 15.6** (Сард [118]). Множество критических значений любого гладкого отображения многообразий имеет меру нуль.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Требуемое утверждение достаточно доказать для гладкого отображения  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $U \subset \mathbb{R}^m$  — открытое множе-

ство. Применим индукцию по  $m$ . При  $m = 0$  утверждение очевидно: если  $n = 0$ , то множество критических значений пусто, а если  $n \geq 1$ , то подмножество  $\mathbb{R}^n$ , состоящее из одной точки, имеет меру нуль. Будем предполагать, что теорема Сарда верна для гладких отображений  $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $V \subset \mathbb{R}^{m-1}$ .

Пусть  $C$  — множество критических точек отображения  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C_i$  — множество всех точек  $x \in U$ , в которых обращаются в нуль все частные производные отображения  $f$  порядка не выше  $i$ . Ясно, что  $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$

Шаг 1. Множество  $f(C \setminus C_1)$  имеет меру нуль.

Если  $n = 1$ , то  $C_1 = C$ . Поэтому будем считать, что  $n \geq 2$ . Пусть  $c \in C \setminus C_1$ . Тогда  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c) \neq 0$  для некоторых  $i, j$ . Можно считать, что  $i = j = 1$ . Рассмотрим отображение  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданное формулой

$$h(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x), x_2, \dots, x_m).$$

Ясно, что матрица Якоби отображения  $h$  в точке  $c$  равна  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ,

где  $I$  — единичная матрица. Поэтому в точке  $c$  к отображению  $h$  применима теорема об обратной функции. Это означает, что существует окрестность  $V$  точки  $c$ , ограничение на которую отображения  $h$  является гомеоморфизмом (рис. 93). Положим  $g = fh^{-1}$ ; тогда

$$g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, g_2(x), \dots, g_n(x)).$$

В частности,  $g$  отображает множество  $(\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap h(V)$  в  $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ; пусть  $g^t$  — ограничение отображения  $g$  на это множество. Легко проверить, что точка множества  $(\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap h(V)$  является критической

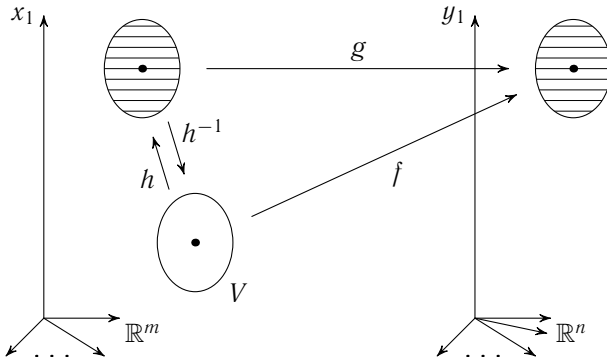


Рис. 93. Построение отображения  $g$



точкой отображения  $g^t$  тогда и только тогда, когда она является критической точкой отображения  $g$ . Действительно,

$$\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \left( \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \right) \end{pmatrix}.$$

Согласно предположению индукции множество критических точек отображения  $g^t$  имеет меру нуль в  $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Поэтому возникает желание применить теорему Фубини и показать, что мера множества  $h(V \cap C)$  равна нулю (а это означает, что мера образа множества  $V \cap C$  при отображении  $f$  равна нулю). Непосредственно применить теорему Фубини нельзя, потому что множество  $f(V \cap C)$  не компактно. Но множество  $V \cap C$  можно представить в виде объединения счётного объединения компактных множеств, поэтому множество  $f(V \cap C)$  тоже можно представить в виде объединения счётного объединения компактных множеств. К каждому из этих множеств можно применить теорему Фубини и получить желаемый результат.

Итак, у каждой точки  $c \in C \setminus C_1$  есть такая окрестность  $V$ , что множество  $f((C \setminus C_1) \cap V) \subset f(C \cap V)$  имеет меру нуль. Множество  $C \setminus C_1$  можно покрыть счётным набором таких окрестностей, поэтому мера множества  $f(C \setminus C_1)$  равна нулю.

Шаг 2. Множество  $f(C_k \setminus C_{k-1})$  имеет меру нуль при любом  $k \geq 1$ .

Доказательство аналогично шагу 1. Пусть  $c \in C_k \setminus C_{k-1}$ . Тогда  $\frac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}}(c) \neq 0$  для некоторых  $i, j_1, \dots, j_{k+1}$ . Можно считать, что  $i = j_1 = 1$ . Пусть  $\omega(x) = \frac{\partial^k f_1}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_{k+1}}}(x)$ . Тогда  $\omega(c) = 0$ , поскольку  $c \in C_k$ , и

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k+1}}}(c) \neq 0.$$

Рассмотрим отображение  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданное формулой

$$h(x_1, \dots, x_m) = (\omega(x), x_2, \dots, x_m).$$

Дальше действуем точно так же, как и на шаге 1. Здесь нужно будет воспользоваться тем, что любая точка множества

$$h((C_k \setminus C_{k+1}) \cap V) \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})$$

является критической точкой для отображения  $g$ , а значит, и для отображения  $g^t$ .

Шаг 3. Множество  $f(C_k)$  имеет меру нуль при достаточно большом  $k$  (например, при  $k > (m/n) - 1$ ).

Достаточно рассмотреть случай, когда  $U = (0, 1)^m$ , причём гладкое отображение  $f$  определено в некоторой окрестности куба  $[0, 1]^m$ . Действительно, любое открытое множество  $U$  можно покрыть счётным набором открытых кубов, обладающих таким свойством.

Пусть  $c \in C_k \cap U$ . В таком случае в разложении Тейлора для  $f(c+h)$  отсутствуют члены порядка ниже  $k+1$ . Поэтому существует такая константа  $K$ , что если  $c+h \in U$ , то  $\|f(c+h) - f(c)\| \leq K\|h\|^{k+1}$ .

Разобьём открытый куб  $U = (0, 1)^m$  на  $l^m$  кубов с ребром  $1/l$  и рассмотрим лишь те из них, которые пересекаются с  $C_k$ . Образ при отображении  $f$  любого такого куба содержится в шаре радиуса  $Kd^{k+1}$ , где  $d = \sqrt{n}/l$  — максимальное расстояние между точками куба. Поэтому множество  $f(U \cap C_k)$  можно покрыть шарами, сумма объёмов которых не превосходит  $K'l^m(d^{k+1})^n = K''l^{m-(k+1)n}$ . Если  $m < (k+1)n$ , т. е.  $k > (m/n) - 1$ , то  $\lim_{l \rightarrow \infty} l^{m-(k+1)n} = 0$ .  $\square$

## 15.5. Важный пример: многообразия Грассмана

Рассмотрим множество  $G(n, k)$ , элементами которого служат  $k$ -мерные подпространства в  $\mathbb{R}^n$ . Топология на этом множестве вводится следующим образом. Пусть  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  — линейно независимые векторы. Наборы  $(v_1, \dots, v_k)$  образуют открытое подмножество  $X$  в  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nk}$ . На множестве  $X$  топология вводится естественным образом. Множество  $G(n, k)$  получается из множества  $X$  факторизацией по следующему отношению эквивалентности: два набора векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда подпространства, порождённые векторами этих наборов, совпадают. Топология на  $G(n, k)$  вводится как топология факторпространства. Иными словами, множество  $U \subset G(n, k)$  открыто тогда и только тогда, когда открыто множество всех базисов  $k$ -мерных подпространств, входящих в  $U$ .

Факторизацию множества  $X$  можно описать и как факторизацию по действию группы  $\text{GL}_k(\mathbb{R})$ . А именно, сопоставим набору  $(v_1, \dots, v_k)$

матрицу  $\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$ , строками которой служат координаты векторов  $v_i$ . Матрице  $A \in \text{GL}_k(\mathbb{R})$  сопоставляется набор векторов  $(w_1, \dots, w_k)$ , координатами которых служат строки матрицы  $W = AV$ .

Легко проверить, что та же самая топология на  $G(n, k)$  получится и в том случае, когда рассматриваются не все наборы линейно независимых векторов, а только ортонормированные. Действительно, если набору линейно независимых векторов сопоставить набор векторов, полученных

ортогонализацией Грама—Шмидта, то такое отображение будет непрерывно.

Такой подход к определению топологии пространства  $G(n, k)$  имеет следующее преимущество: пространство  $G(n, k)$  получается как факторпространство компактного пространства по действию компактной группы  $O(k)$ . Из этого, в частности, следует, что пространство  $G(n, k)$  компактно и хаусдорфово.

По-другому доказать хаусдорфовость пространства  $G(n, k)$  можно, например, так. Фиксируем точку  $x \in \mathbb{R}^n$  и рассмотрим на  $G(n, k)$  функцию  $d_x$ , равную расстоянию от точки  $x$  до подпространства  $\Pi \in G(n, k)$ . Эта функция непрерывна. Ясно также, что если  $k$ -мерные подпространства  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  различны, то точку  $x$  можно выбрать так, что  $x \in \Pi_1$  и  $x \notin \Pi_2$ . В таком случае  $d_x(\Pi_1) = 0$  и  $d_x(\Pi_2) \neq 0$ .

**Теорема 15.7.** *Топологическое пространство  $G(n, k)$  является гомотопически эквивалентным пространству размерности  $k(n - k)$ .*

**Доказательство.** Выберем в подпространстве  $\Pi \in G(n, k)$  линейно независимые векторы  $v_1, \dots, v_k$  и рассмотрим прямоугольную матрицу  $V = V(\Pi)$ , строками которой служат координаты этих векторов. Для каждого мультииндекса  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , можно рассмотреть квадратную матрицу  $V_I$ , образованную столбцами матрицы  $V$  с номерами  $i_1, \dots, i_k$ . Из линейной независимости векторов  $v_1, \dots, v_k$  следует, что найдётся мультииндекс  $I$ , для которого  $\det V_I \neq 0$ . Рассмотрим прямоугольную матрицу  $(V_I)^{-1}V$ . Столбцы этой матрицы с номерами  $i_1, \dots, i_k$  образуют единичную матрицу порядка  $k$ .

В подпространстве  $\Pi$  можно выбрать другие линейно независимые векторы  $w_1, \dots, w_k$ . При этом  $W = AV$ , где  $A \in GL_k(\mathbb{R})$ , и  $W_I = AV_I$ . Следовательно,  $(W_I)^{-1}W = (V_I)^{-1}A^{-1}AV = (V_I)^{-1}V$ . Это означает, что прямоугольная матрица  $(V_I)^{-1}V$  зависит только от пространства  $\Pi$  и мультииндекса  $I$ ; обозначим эту матрицу  $\Pi^I$ . Для любого мультииндекса  $J$  можно рассмотреть квадратную матрицу  $\Pi_J^I$ . Выше было отмечено, что  $\Pi_J^I$  — единичная матрица. Элементы всех остальных столбцов матрицы  $\Pi_J^I$  могут быть произвольными.

Для любого мультииндекса  $I$  рассмотрим множество  $U_I \subset G(n, k)$ , состоящее из тех подпространств  $\Pi \in G(n, k)$ , для которых  $\det V_I \neq 0$ . Множества  $U_I$  покрывают всё пространство  $G(n, k)$ . Ясно также, что каждое множество  $U_I$  открыто. Действительно, если  $\det V_I \neq 0$ , то при достаточно малом изменении элементов матрицы  $V$  получается матрица  $V'$ , для которой  $\det V_I' \neq 0$ .

Сопоставим подпространству  $\Pi \in U_I$  матрицу  $\Pi^I$ , а затем этой матрице сопоставим набор из  $n - k$  её столбцов, номера которых не входят в мультииндекс  $I$ . В результате получим гомеоморфизм  $\varphi_I: U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ .

Остаётся проверить, что если  $I$  и  $J$  — два мультииндекса, то отображение  $\varphi_I \varphi_J^{-1}$ , определённое на открытом множестве  $\varphi_I(U_I \cap U_J)$ , является гладким.

Отображение  $\varphi_I \varphi_J^{-1}$  устроено следующим образом. Точке  $x \in \mathbb{R}^{k(n-k)}$  сопоставим матрицу  $\Pi^I$ , у которой  $n - k$  столбцов заполнены координатами вектора  $x$ , а остальные столбцы (соответствующие мультииндексу  $I$ ) образуют единичную матрицу. Матрице  $\Pi^I$  сопоставим матрицу  $V$ , для которой  $(V_I)^{-1}V = \Pi^I$ . Наконец, матрице  $V$  сопоставим матрицу  $\Pi^J = (V_J)^{-1}V = (V_J)^{-1}V_I \Pi^I$ . Чтобы устранить неоднозначность выбора матрицы  $V$ , будем полагать, что  $V_I$  — единичная матрица. В таком случае матрице  $X = \Pi^J$  сопоставляется матрица  $(X_J)^{-1}X$ , а затем берутся её столбцы, которые не входят в мультииндекс  $J$ . По условию на всей области определения матрица  $X_J$  невырожденная, поэтому полученное в результате отображение гладкое.  $\square$

**У п р а ж н е н и е 5.** Докажите, что сопоставление подпространству его ортогонального дополнения индуцирует диффеоморфизм  $G(n, k) \rightarrow G(n, n - k)$ .

**У п р а ж н е н и е 6.** Докажите, что  $G(n, 1) \approx \mathbb{R}P^{n-1}$ .

Если в пространстве  $\mathbb{R}^n$  фиксирован базис, то  $k$ -мерному подпространству  $\Pi$  можно сопоставить  $\binom{n}{k}$  чисел  $x_I$ , называемых *координатами Плюккера*. Это делается следующим образом. Выберем в  $\Pi$  линейно независимые векторы  $v_1, \dots, v_k$  и рассмотрим матрицу  $V$ , строками которой служат координаты этих векторов. Для каждого мультииндекса  $I$  рассмотрим число  $x_I = \det V_I$ . Количество мультииндексов равно  $\binom{n}{k}$ , поэтому получаем  $\binom{n}{k}$  чисел.

Координаты Плюккера определены однозначно с точностью до пропорциональности. Действительно, если в  $\Pi$  выбрать другой базис, то матрица  $V$  заменится на матрицу  $AV$ , где  $A \in \text{GL}_k(\mathbb{R})$ . При этом каждая координата Плюккера умножится на  $\det A$ .

**Т е о р е м а 15.8** (вложение Плюккера). *Координаты Плюккера задают вложение  $i: G(n, k) \rightarrow \mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прежде всего проверим, что  $i$  гомеоморфно отображает  $G(n, k)$  на  $i(G(n, k))$ . Для этого достаточно проверить, что отображение  $i$  инъективно, поскольку взаимно однозначное непрерывное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

Пусть  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  — переменные линейно независимые векторы,  $c_1, \dots, c_{n-k} \in \mathbb{R}^n$  — постоянные линейно независимые векторы. Рассмот-

рим квадратную матрицу  $\begin{pmatrix} V \\ C \end{pmatrix}$ , строками которой служат координаты этих векторов. Согласно теореме Лапласа

$$\det \begin{pmatrix} V \\ C \end{pmatrix} = \sum a_I \det V_I,$$

где  $a_I$  — константа, зависящая от матрицы  $C$ . Ясно также, что  $\det \begin{pmatrix} V \\ C \end{pmatrix} = 0$  тогда и только тогда, когда пересечение подпространств, порождённых векторами  $v_1, \dots, v_k$  и  $c_1, \dots, c_{n-k}$ , отлично от нуля. Таким образом, координаты Плюккера  $k$ -мерного подпространства  $\Pi$  удовлетворяют уравнению  $\sum a_I x_I = 0$  тогда и только тогда, когда пересечение  $\Pi$  с подпространством, порождённым векторами  $c_1, \dots, c_{n-k}$ , отлично от нуля. Остаётся заметить, что для двух различных  $k$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^n$  можно выбрать  $(n-k)$ -мерное подпространство так, чтобы его пересечение с одним подпространством было равно нулю, а пересечение с другим подпространством было отлично от нуля.

Проверим теперь, что  $i$  — погружение. Рассмотрим карту  $U_I$  и введём на ней координаты так, как это было объяснено выше. Чтобы избежать запутанных обозначений, ограничимся простым примером, когда  $U_I$  состоит из матриц  $\Pi^I$  вида

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & x_6 \end{pmatrix}$ . Отображение  $i$  сопоставляет

матрице  $\Pi^I$  набор определителей всех её подматриц порядка  $k=3$ . Если мы рассмотрим только подматрицы, образованные  $k-1$  столбцами единичной матрицы и ещё одним каким-то столбцом, то получим, что в карте  $U_I$  отображение  $i$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & x_5 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto (1, \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \pm x_4, \pm x_5, \pm x_6, \dots).$$

Одна из координат образа равна 1. Это означает, что образ карты  $U_I$  целиком лежит в стандартной карте проективного пространства, т. е. мы получаем отображение евклидовых пространств. Очевидно, что ранг этого отображения равен размерности многообразия  $G(n, k)$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Образ  $G(n, k)$  в  $\mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$  при вложении Плюккера можно явно задать системой уравнений, называемых *соотношениями Плюккера*. Подробности см. в [15, § 30].

Помимо многообразия  $k$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^n$  можно рассмотреть многообразие  $k$ -мерных комплексных подпространств в  $\mathbb{C}^n$ . Чтобы различать эти многообразия, мы будем говорить о *вещественных* и о *комплексных* многообразиях Грассмана. Кроме того, в вещественном случае можно рассмотреть *ориентированное многообразие Грассмана*  $G_+(n, k)$ , точками которого служат ориентированные  $k$ -мерные подпространства. В этом случае наборы векторов считаются эквивалентными лишь в том случае, когда они не только порождают одно и то же  $k$ -мерное подпространство, но и задают в нём одну и ту же ориентацию.

**У п р а ж н е н и е 7.** Докажите, что многообразии  $G_+(n, k)$  двулистно накрывает  $G(n, k)$ .

**У п р а ж н е н и е 8.** Докажите, что координаты Плюккера задают вложение  $G_+(n, k) \rightarrow S^{\binom{n}{k}-1}$ .

**З а д а ч а 15.2.** а) Докажите, что многообразии  $G_+(n, k)$  всегда ориентируемо.

б) Докажите, что вещественное многообразие Грассмана  $G(n, k)$  ориентируемо тогда и только тогда, когда  $n$  чётно.

**З а д а ч а 15.3.** Докажите, что  $G_+(4, 2) \approx S^2 \times S^2$ .

**З а д а ч а 15.4.** Докажите, что квадрика в  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , заданная уравнением  $z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0$ , диффеоморфна  $G_+(n, 2)$ . Более того, при этом диффеоморфизме комплексное сопряжение соответствует изменению ориентации плоскости.

Опишем теперь клеточное строение многообразия Грассмана. Для каждого  $k$ -мерного подпространства  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  рассмотрим последовательность чисел  $a_i = \dim(\Pi \cap \mathbb{R}^i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Здесь предполагается, что  $\mathbb{R}^i$  состоит из векторов вида  $(x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)$ . Ясно, что  $a_{i+1} = a_i$  или  $a_i + 1$ ; при этом  $a_0 = 0$  и  $a_n = k$ . Поэтому последовательности  $a_i$  можно сопоставить символ Шуберта  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ , где числа  $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n$  определяются условиями  $\dim(\Pi \cap \mathbb{R}^{\sigma_j}) = j$  и  $\dim(\Pi \cap \mathbb{R}^{\sigma_j-1}) = j - 1$ .

**Л е м м а.** Подпространство  $\Pi$  имеет символ Шуберта  $\sigma$  тогда и только тогда, когда в нём можно выбрать векторы  $v_1, \dots, v_k$  так, что матрица, строками которой служат их координаты, имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & 0 & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & 0 & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix};$$

здесь столбцы из нулей и одной единицы имеют номера  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ; элементы \* могут быть произвольными. При этом векторы  $v_1, \dots, v_k$  определены однозначно.

**Доказательство.** Одномерное пространство  $\Pi \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}$  порождено вектором  $v_1 = (x_1, \dots, x_{\sigma_1}, 0, \dots, 0)$ . Из условия  $\dim(\Pi \cap \mathbb{R}^{\sigma_1-1}) = 0$  следует, что  $x_{\sigma_1} \neq 0$ . Поэтому можно считать, что  $x_{\sigma_1} = 1$ ; в таком случае вектор  $v_1$  определён однозначно.

В двумерном пространстве  $\Pi \cap \mathbb{R}^{\sigma_2}$  вектор  $v_1$  можно дополнить до базиса вектором  $v_2 = (y_1, \dots, y_{\sigma_2}, 0, \dots, 0)$ . Из условия  $\dim(\Pi \cap \mathbb{R}^{\sigma_2-1}) = 1$  следует, что  $y_{\sigma_2} \neq 0$ . Поэтому можно считать, что  $y_{\sigma_2} = 1$ . В таком случае вектор  $v_2$  определён с точностью до замены его на вектор вида  $v_2 + \lambda v_1$ . У этого вектора координата с номером  $\sigma_1$  равна  $y_{\sigma_1} + \lambda$ . Подходящим образом выбрав  $\lambda$ , можно добиться того, что эта координата обратится в нуль. Теперь вектор  $v_2$  определён однозначно. Дальнейшие рассуждения аналогичны.  $\square$

Множество всех подпространств с заданным символом Шуберта  $\sigma$  называют *открытой клеткой Шуберта* и обозначают  $e(\sigma)$ . Множество  $e(\sigma) \subset G(n, k)$  является образом открытого шара размерности  $d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \dots + (\sigma_k - k)$  при некотором гомеоморфизме. Открытые клетки Шуберта попарно не пересекаются и покрывают всё многообразие Грассмана.

Множество  $e(\sigma)$  характеризуется тем, что в принадлежащих ему подпространствах существуют базисы  $v_1, \dots, v_k$ , для которых  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{i\sigma_i}, 0, \dots, 0)$ , где  $v_{i\sigma_i} > 0$ . Поэтому замыкание  $\overline{e(\sigma)}$  этого множества характеризуется тем, что в принадлежащих ему подпространствах существуют базисы  $v_1, \dots, v_k$ , для которых  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{i\sigma_i}, 0, \dots, 0)$ , где  $v_{i\sigma_i} \geq 0$ . Отметим, что базис  $v_1, \dots, v_k$  можно при этом считать ортонормированным.

Наша цель заключается в том, чтобы построить непрерывное отображение  $\chi_\sigma: D^{d(\sigma)} \rightarrow \overline{e(\sigma)} \subset G(n, k)$ , обладающее следующими свойствами:

- ограничение  $\chi_\sigma$  на  $\text{int } D^{d(\sigma)}$  является гомеоморфизмом на открытую клетку Шуберта  $e(\sigma)$ ;
- множество  $\chi_\sigma(\partial D^{d(\sigma)})$  содержится в объединении открытых клеток Шуберта  $e(\tau)$ , для которых  $d(\tau) < d(\sigma)$ .

Применим индукцию по  $k$ . База индукции:  $k = 1$ . В этом случае символ Шуберта  $\sigma$  состоит из одного элемента  $\sigma_1$  и  $d(\sigma) = \sigma_1 - 1$ . Множество  $\overline{e(\sigma)}$  состоит из 1-мерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами вида  $(v_{11}, \dots, v_{1\sigma_1}, 0, \dots, 0)$ , где  $v_{1\sigma_1} \geq 0$ . Определим отображение  $\chi_\sigma: D^{d(\sigma)} \rightarrow \overline{e(\sigma)}$  следующим образом. отождествим шар  $D^{d(\sigma)}$  с полусферой  $x_1^2 + \dots + x_{\sigma_1}^2 = 1$ ,  $x_{\sigma_1} \geq 0$ , и сопоставим точке  $(x_1, \dots, x_{\sigma_1})$  1-мерное подпространство, натянутое на вектор  $(x_1, \dots, x_{\sigma_1}, 0, \dots, 0)$ .

Ясно, что ограничение отображения  $\chi_\sigma$  на  $\text{int } D^{d(\sigma)}$  является гомеоморфизмом на  $e(\sigma)$  и множество  $\chi_\sigma(\partial D^{d(\sigma)})$  состоит из подпространств, натянутых на ненулевые векторы вида  $(x_1, \dots, x_{\sigma_1-1}, 0, \dots, 0)$ ; после умножения на ненулевое число любой такой вектор можно привести к виду  $(x_1, \dots, x_{\tau_1}, 0, \dots, 0)$ , где  $x_{\tau_1} = 1$  и  $\tau_1 < \sigma_1$ .

Чтобы построить отображение  $\chi_\sigma$  при  $k \geq 2$ , нам понадобится вспомогательное собственное ортогональное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$ , переводящее данный единичный вектор  $u$  в другой единичный вектор  $v$  и оставляющее на месте все векторы, ортогональные  $u$  и  $v$ . Такое преобразование  $R(u, v)$  существует при  $u \neq -v$ ; это преобразование единственно. Легко проверить, что преобразование

$$R(u, v)x = x - \frac{(u+v, x)}{1+(u, v)}(u+v) + 2(u, x)v$$

обладает требуемыми свойствами (в плоскости, натянутой на  $u$  и  $v$ , оно является вращением, поскольку переводит  $u$  в  $v$ , а  $v$  — в вектор, симметричный  $u$  относительно  $v$ ). Таким образом, точка  $R(u, v)x$  непрерывно зависит от  $u, v, x$ . Ясно также, что если  $u, v \in \Pi$ , то проекции векторов  $x$  и  $R(u, v)x$  на  $\Pi^\perp$  совпадают.

Предположим, что требуемое отображение  $\chi_\sigma: D^{d(\sigma)} \rightarrow \overline{e(\sigma)}$  построено для любого символа Шуберта  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  длины  $k$ . Рассмотрим символ Шуберта  $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+1})$  длины  $k+1$  (как обычно,  $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k < \sigma_{k+1} \leq n$ ). Вместо отображения  $\chi_{\sigma'}: D^{d(\sigma')} \rightarrow \overline{e(\sigma')}$  мы будем строить отображение (даже гомеоморфизм)  $\varphi: \overline{e(\sigma)} \times \times D^{d(\sigma')-d(\sigma)} \rightarrow \overline{e(\sigma')}$ . При этом отображение  $\chi_{\sigma'}$  является композицией отображений

$$D^{d(\sigma')} \approx D^{d(\sigma)} \times D^{d(\sigma')-d(\sigma)} \xrightarrow{\chi_\sigma \times \text{id}} \overline{e(\sigma)} \times D^{d(\sigma')-d(\sigma)} \xrightarrow{\varphi} \overline{e(\sigma')};$$

здесь  $d(\sigma') - d(\sigma) = \sigma_{k+1} - k - 1$ .

В подпространстве  $\Pi \in \overline{e(\sigma)}$  можно выбрать ортонормированный базис  $v_1, \dots, v_k$ , для которого  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{i\sigma_i}, 0, \dots, 0)$ , где  $v_{i\sigma_i} \geq 0$ . Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — канонический базис пространства  $\mathbb{R}^n$ . Положим

$$R = R(e_{\sigma_k}, v_k) \circ \dots \circ R(e_{\sigma_2}, v_2) \circ R(e_{\sigma_1}, v_1).$$

Легко проверить, что  $R e_{\sigma_i} = v_i$  для всех  $i = 1, \dots, k$ . Действительно, преобразования  $R(e_{\sigma_1}, v_1), \dots, R(e_{\sigma_{i-1}}, v_{i-1})$  оставляют вектор  $e_{\sigma_i}$  неподвижным, поскольку он ортогонален векторам  $v_1, \dots, v_{i-1}$  и  $e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_{i-1}}$ . Преобразование  $R(e_{\sigma_i}, v_i)$  переводит  $e_{\sigma_i}$  в  $v_i$ . А преобразования  $R(e_{\sigma_{i+1}}, v_{i+1}), \dots, R(e_{\sigma_k}, v_k)$  оставляют вектор  $v_i$  неподвижным, поскольку он ортогонален векторам  $v_{i+1}, \dots, v_k$  и  $e_{\sigma_{i+1}}, \dots, e_{\sigma_k}$ .



Отождествим шар  $D^{\sigma_{k+1}-k-1}$  с множеством единичных векторов  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\sigma_{k+1}}, 0, \dots, 0)$ , для которых  $\omega_{\sigma_{k+1}} \geq 0$  и  $\omega_{\sigma_i} = 0$  при  $i = 1, \dots, k$ . Отображение  $\varphi: \overline{e(\sigma)} \times D^{d(\sigma')-d(\sigma)} \rightarrow \overline{e(\sigma')}$  определим следующим образом. Точке  $(v_1, \dots, v_k, \omega)$  сопоставим точку  $(v_1, \dots, v_k, R\omega)$ . Нужно проверить, что пространство, порождённое векторами  $v_1, \dots, v_k, R\omega$ , действительно принадлежит  $\overline{e(\sigma')}$ . Векторы  $\omega$  и  $R\omega$  имеют одинаковые проекции на ортогональное дополнение пространства  $\mathbb{R}^{\sigma_k}$ , поэтому  $R\omega = (*, \dots, *, \omega_{\sigma_{k+1}}, \dots, \omega_{\sigma_{k+1}}, 0, \dots, 0)$ . Линейная независимость векторов  $v_1, \dots, v_k, R\omega$  следует из того, что  $(v_i, R\omega) = (R e_{\sigma_i}, R\omega) = (e_{\sigma_i}, \omega) = \omega_{\sigma_i} = 0$  и  $(R\omega, R\omega) = (\omega, \omega) = 1$ .

Сюръективность отображения  $\varphi$  следует из того, что обратное отображение  $\varphi^{-1}$  задаётся формулой  $\varphi^{-1}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) = (v_1, \dots, v_k, R^{-1}v_{k+1})$ . Здесь ортонормированный базис  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$  выбирается точно так же, как и для  $k$ -мерного подпространства с данным символом Шуберта; ортогональное преобразование  $R$  строится по векторам  $v_1, \dots, v_k$  точно так же, как и выше. Легко проверить, что вектор  $\omega = R^{-1}v_{k+1}$  обладает всеми требуемыми свойствами. А именно:

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1, \dots, \omega_{\sigma_{k+1}}, 0, \dots, 0), \text{ где } \omega_{\sigma_{k+1}} = v_{k+1, \sigma_{k+1}} \geq 0; \\ \omega_{\sigma_i} &= (e_{\sigma_i}, \omega) = (R e_{\sigma_i}, R\omega) = (v_i, v_{k+1}) = 0 \text{ при } i = 1, \dots, k; \\ (\omega, \omega) &= (R^{-1}v_{k+1}, R^{-1}v_{k+1}) = (v_{k+1}, v_{k+1}) = 1. \end{aligned}$$

Отображение  $\varphi^{-1}$  непрерывно, поэтому из индуктивного предположения о том, что  $\chi_\sigma$  гомеоморфно отображает  $\text{int } D^{d(\sigma)}$  на  $d(\sigma)$ , следует, что  $\chi_{\sigma'}$  гомеоморфно отображает  $\text{int } D^{d(\sigma')}$  на  $d(\sigma')$ , поскольку  $\text{int}(\overline{e(\sigma)} \times D^{d(\sigma')-d(\sigma)}) = e(\sigma) \times \text{int } D^{d(\sigma')-d(\sigma)}$ .

## § 16. Касательное пространство

Касательный вектор в точке  $x \in M^n$  легко определить в локальной системе координат, но при переходе к другой системе координат возникают некоторые трудности. Поэтому используется несколько определений касательного вектора, которые бывают полезны в разных ситуациях.

Одно из наиболее естественных определений таково. *Касательный вектор* в точке  $x \in M^n$  — это некий объект, которому в каждой локальной системе координат  $(U, \varphi)$  с началом в точке  $x$  соответствует определённый вектор  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ; при этом в локальной системе координат  $(V, \psi)$  тому же самому касательному вектору соответствует вектор  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , где

$$\omega_i = \sum \frac{\partial(\psi\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(0)v_j. \quad (1)$$

Иными словами,  $\omega$  — образ вектора  $v$  под действием матрицы Якоби отображения перехода  $\psi\varphi^{-1}$ . Корректность этого определения следует из того, что матрица Якоби композиции двух отображений является произведением матриц Якоби этих отображений.

Основной недостаток этого определения — зависимость от выбора системы координат. Чтобы получить инвариантное определение, можно поступить разными способами.

**Касательный вектор как класс эквивалентных кривых.** Вектору  $v \in \mathbb{R}^n$  можно сопоставить семейство всех гладких кривых  $\gamma: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которых  $\gamma(0) = 0$  и  $\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$ . Если  $(U, \varphi)$  — локальная система координат с началом в точке  $x \in M$ , то кривой  $\gamma(t)$  можно сопоставить кривую  $\tilde{\gamma} = \varphi^{-1}\gamma$  на многообразии  $M^n$ ; при этом  $\tilde{\gamma}(0) = x$ . Поэтому касательный вектор в точке  $x \in M$  можно определить как класс эквивалентности гладких кривых  $\tilde{\gamma}: (-1, 1) \rightarrow M^n$ , для которых  $\tilde{\gamma}(0) = x$ . Кривые  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  считаются эквивалентными, если для некоторой системы координат  $(U, \varphi)$  с началом в точке  $x$  выполняется равенство

$$\left. \frac{d(\varphi\tilde{\gamma}_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi\tilde{\gamma}_2(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Если  $(V, \psi)$  — другая система координат с началом в точке  $x$ , то

$$\left. \frac{d(\psi\tilde{\gamma}(t))_i}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\psi\varphi^{-1}\varphi\tilde{\gamma}(t))_i}{dt} \right|_{t=0} = \sum_j \frac{\partial(\psi\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(0) \left. \frac{d(\varphi\tilde{\gamma}(t))_j}{dt} \right|_{t=0}.$$

Поэтому, во-первых, эквивалентность кривых не зависит от выбора локальных координат, а во-вторых, координаты касательного вектора  $\left. \frac{d(\psi\tilde{\gamma}(t))_i}{dt} \right|_{t=0}$  при переходе к другой системе координат действительно преобразуются по требуемому закону (1).

**Касательный вектор как оператор дифференцирования.** Пусть  $(U, \varphi)$  — локальная система координат с началом в точке  $x \in M^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  и  $f$  — гладкая функция, определённая в некоторой окрестности точки  $x$ .

Функции  $f$  можно сопоставить число  $\sum_i \frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_i}(0)v_i$ , которое мы будем называть *производной функции  $f$  по направлению векторного поля  $v$* . При переходе к другой системе координат  $(V, \psi)$  вектор  $v$  заменится на вектор  $\omega$  с координатами  $\omega_i = \sum_j \frac{\partial(\psi\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(0)v_j$ , поэтому функции  $f$

в новой системе координат будет сопоставлено число

$$\sum_{i,j} \frac{\partial(f\psi^{-1})}{\partial x_i}(0) \frac{\partial(\psi\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(0) v_j = \sum_j \frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_j}(0) v_j.$$

Таким образом, число, сопоставляемое функции  $f$ , не зависит от выбора системы координат.

Касательному вектору  $v$  в точке  $x \in M^n$  мы сопоставили линейный оператор  $v: C^\infty(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  (вместо  $C^\infty(M^n)$  можно взять  $C^\infty(U)$ , где  $U$  — некоторая окрестность точки  $x$ ; число  $v(f)$  зависит только от поведения функции  $f$  в сколь угодно малой окрестности точки  $x$ ). При этом выполняются следующие свойства:

- 1)  $(\lambda v + \mu w)(f) = \lambda v(f) + \mu w(f)$ ;
- 2)  $v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f)$ .

Второе свойство следует из того, что  $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$ .

У п р а ж н е н и е 1. Выведите из свойства 2, что  $v(c) = 0$ , если  $c$  — постоянная функция.

Свойства 1 и 2 вместе с линейностью оператора  $v$  можно взять за определение линейного пространства касательных векторов в точке  $x \in M^n$ . Но при этом нужно проверить, что не появятся «лишних» операторов, т. е. если  $v: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  — линейный оператор, обладающий свойством  $v(fg) = f(0)v(g) + g(0)v(f)$ , то  $v(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) v_i$  для некоторых  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Л е м м а.** Пусть  $f \in C^\infty(U)$ , где  $U \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклая окрестность начала координат, и  $f(0) = 0$ . Тогда существуют такие функции  $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(U)$ , что  $f(x) = \sum x_i g_i(x)$  и  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Ясно, что

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum x_i \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt,$$

поэтому можно положить  $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$ . □

Из этой леммы требуемое утверждение следует очевидным образом. Действительно,  $f(x) - f(0) = \sum x_i g_i(x)$ , поэтому

$$v(f) = \sum 0 \cdot v(g_i) + \sum g_i(0) v(x_i) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) v_i,$$

где  $v_i = v(x_i)$ .

Касательные векторы в точке  $x \in M^n$  образуют линейное пространство. Это пространство называют *касательным пространством* в точке  $x$  и обозначают  $T_x M^n$ .

У п р а ж н е н и е 2. Пусть  $J = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f(0) = 0\}$ ,  $J^2 = \{\sum f_i g_i \mid f_i, g_i \in J\}$  (сумма конечная),  $(J/J^2)^*$  — пространство линейных функций на  $J/J^2$ ,  $V$  — касательное пространство в точке  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

а) Докажите, что если  $v \in V$  и  $f \in J^2$ , то  $v(f) = 0$ . Таким образом, касательному вектору  $v$  сопоставляется элемент пространства  $(J/J^2)^*$ .

б) Пусть  $l \in (J/J^2)^*$ . Положим  $v_l(f) = l(f(x) - f(0))$ . Докажите, что оператор  $v_l$  обладает свойством 2 для точки  $x = 0$ .

в) Докажите, что построенные в пп. а и б отображения  $V \rightarrow (J/J^2)^*$  и  $(J/J^2)^* \rightarrow V$  взаимно обратны.

## 16.1. Дифференциал отображения

Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение,  $v \in T_x M^m$  — касательный вектор. Тогда можно определить вектор  $df(v) \in T_{f(x)} N^n$ . Например, если вектор  $v$  задан кривой  $\gamma(t)$ , то вектор  $df(v)$  задаётся кривой  $f(\gamma(t))$ . А если вектор  $v$  задан как линейный оператор на гладких функциях, то вектор  $df(v)$  задаётся как оператор  $df(v)(\varphi) = v(\varphi f)$ ; действительно, если  $\varphi \in C^\infty(U_{f(x)})$ , то  $\varphi f \in C^\infty(V_x)$ .

Отображение  $df: T_x M^m \rightarrow T_{f(x)} N^n$  линейно; это отображение называют *дифференциалом* отображения  $f$  в точке  $x$ .

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что  $d(f \circ g) = df \circ dg$ .

Условие, что  $f$  — иммерсия (субмерсия) в точке  $x$ , эквивалентно тому, то дифференциал отображения  $f$  в точке  $x$  — мономорфное (эпиморфное) отображение. В такой форме иногда бывает удобнее проверять, что  $f$  — иммерсия (субмерсия).

П р и м е р. Рассмотрим отображение из пространства  $\mathbb{R}^{n^2}$  всех матриц порядка  $n$  в пространство  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  симметрических матриц, заданное формулой  $f(X) = X^T X$ . Тогда во всех точках множества  $f^{-1}(I_n)$ , где  $I_n$  — единичная матрица, отображение  $f$  является субмерсией. (Поэтому согласно теореме 15.3 топологическое пространство  $f^{-1}(I_n) = O(n)$  является многообразием.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть  $U \in O(n)$ , т. е.  $U^T U = I_n$ . Рассмотрим в пространстве всех матриц гладкую кривую  $\gamma(t) = U + tA$ . При отображении  $f$  она переходит в кривую  $I_n + t(UA^T + AU^T) + o(t)$ , поэтому вектор  $A$  переходит в вектор  $UA^T + (UA^T)^T$ . Ясно, что любую симметрическую матрицу можно представить в виде  $X + X^T$  и любую матрицу  $X$

можно представить в виде  $X = UA^T$ . Поэтому в точке  $U$  дифференциал отображения  $f$  эпиморфен.  $\square$

У п р а ж н е н и е 4. Докажите, что пространство унитарных матриц  $U(n)$  является многообразием.

У п р а ж н е н и е 5. Докажите, что отображение  $f: U(n) \rightarrow S^1$ , заданное формулой  $f(U) = \det(U)$ , является субмерсией. В частности,  $f^{-1}(1) = \text{SU}(n)$  — многообразие.

## 16.2. Векторные поля

На множестве  $TM^n = \bigcup_{x \in M^n} T_x M^n$  можно ввести структуру многообразия следующим образом. Пусть  $(U, \varphi)$  — локальная система координат на многообразии  $M^n$ . Сопоставим касательному вектору в точке  $x \in M^n$  пару  $(\varphi(x), v)$ , где  $v = (v_1, \dots, v_n)$  — координаты этого касательного вектора в данной системе координат. В результате получим взаимно однозначное отображение

$$T\varphi: TU = \bigcup_{x \in U} T_x M^n \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Множества  $TU$  покрывают  $TM^n$ . Потребовав, чтобы все отображения  $T\varphi$  были гомеоморфизмами, мы зададим на  $TM^n$  структуру топологического пространства. Карты  $(TU, T\varphi)$  задают на этом топологическом пространстве структуру многообразия. Многообразию  $TM^n$  называют *касательным расслоением* многообразия  $M^n$ .

З а д а ч а 16.1. Докажите, что многообразию  $TS^n$  гомеоморфно подмножеству в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^{n+1}$ , заданному уравнением  $z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1$ .

Сопоставив касательному вектору  $v \in T_x M^n$  точку  $x$ , получим проекцию  $p: TM^n \rightarrow M^n$ . При этом отображение  $p$  гладкое.

Гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$  индуцирует гладкое отображение  $df: TM^m \rightarrow TN^n$  (дифференциал отображения  $f$ ).

*Векторным полем* на многообразии  $M^n$  называют гладкое сечение проекции  $p$ , т. е. такое гладкое отображение  $s: M^n \rightarrow TM^n$ , что  $ps = \text{id}_{M^n}$ . Отображение  $s$  сопоставляет точке  $x \in M^n$  вектор  $v \in T_x M^n$ . Гладкость отображения  $s$  означает, что в любой локальной системе координат  $(U, \varphi)$  векторное поле имеет вид  $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , где  $a_i$  — гладкая функция на множестве  $\varphi(U_i)$ .

Точку  $x \in M^n$  называют *особой точкой* векторного поля  $s: M^n \rightarrow TM^n$ , если  $s(x) = 0$ .

**Пример.** На сфере  $S^{2n+1}$  существует векторное поле без особых точек.

**Доказательство.** Гладкой кривой  $\gamma(t) = x + ty + \dots$  на сфере  $S^m$  соответствует вектор  $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ , для которого выполняется равенство  $(x, y) = 0$ . Действительно, из равенства  $\|\gamma(t)\| = 1$  следует, что  $\|x\|^2 + t(x, y) + \dots = 1$ , поэтому  $(x, y) = 0$ . Размерность пространства, образованного такими векторами, совпадает с размерностью касательного пространства, поэтому любому вектору  $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ , для которого выполняется равенство  $(x, y) = 0$ , соответствует касательный вектор в точке  $x \in S^m$ .

Сфера размерности  $2n + 1$  расположена в пространстве размерности  $2n + 2$ . Это означает, что координаты вектора  $x$  можно разбить на пары:  $x = (u_1, v_1, \dots, u_{n+1}, v_{n+1})$ . Положим  $y = (-v_1, u_1, \dots, -v_{n+1}, u_{n+1})$ . В результате получим векторное поле без особых точек на сфере  $S^{2n+1}$ .  $\square$

**Задача 16.2.** Докажите, что на сфере  $S^{4n+3}$  существуют три векторных поля, линейно независимых в каждой точке  $x \in S^{4n+3}$ .

**Задача 16.3.** а) Докажите, что отображения  $f, g: S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ , заданные формулами  $f(x) = x$  и  $g(x) = -x$ , гомотопны.

б) Докажите, что отображения  $f, g: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ , заданные формулами  $f(x) = -x$  и  $g(x_0, x_1, \dots, x_{2n}) = (-x_0, x_1, \dots, x_{2n})$ , гомотопны.

**Теорема 16.1.** На сфере  $S^{2n}$  не существует векторного поля без особых точек.

**Доказательство** (см. [96]). Предположим, что  $v(x)$  — векторное поле без особых точек на сфере  $S^m$ , т. е.  $v: S^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  — такое гладкое отображение, что  $v(x) \neq 0$  и  $(x, v(x)) = 0$  для всех  $x \in S^m$ . Заменив  $v(x)$  на  $v(x)/\|v(x)\|$ , получим векторное поле, состоящее из векторов единичной длины.

Продолжим отображение  $v$  на  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ , положив  $v(rx) = rv(x)$  для  $r > 0, x \in S^m$ . Для  $t \in \mathbb{R}$  рассмотрим отображение  $f_t: \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ , заданное формулой  $f_t(x) = x + tv(x)$ . Если  $\|x\| = r$ , то  $\|f_t(x)\| = \sqrt{1+t^2}r$ , т. е.  $f(S_r^m) \subset S_{\sqrt{1+t^2}r}^m$ , где  $S_r^m$  — сфера радиуса  $r$  с центром в начале координат.

Матрица Якоби отображения  $f_t(x)$  имеет вид  $I + tJ(x)$ , где  $I$  — единичная матрица,  $J(x)$  — матрица Якоби отображения  $v(x)$ . В частности, при малых  $t$  к отображению  $f_t$  можно применить теорему об обратной функции. Поэтому при малых  $t$  множество  $f(S_r^m)$  открыто в  $S_{\sqrt{1+t^2}r}^m$ . С другой стороны, множество  $f(S_r^m)$  компактно, а значит, оно замкнуто в  $S_{\sqrt{1+t^2}r}^m$ . Из связности пространства  $S_{\sqrt{1+t^2}r}^m$  следует, что  $f(S_r^m) = S_{\sqrt{1+t^2}r}^m$ .

Пусть  $0 < a < b$ . Рассмотрим множество  $A = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid a \leq \|x\| \leq b\}$ . Если  $t$  достаточно мало, то

$$f_t(A) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sqrt{1+t^2}a \leq \|x\| \leq \sqrt{1+t^2}b\}.$$

Поэтому, в частности, отношение объёмов множеств  $f_t(A)$  и  $A$  равно  $(\sqrt{1+t^2})^{m+1}$ .

К вычислению отношения объёмов множеств  $f_t(A)$  и  $A$  можно подойти и по-другому. Прежде всего покажем, что при достаточно малых  $t$  отображение  $f_t$  на множестве  $A$  взаимно однозначно. На компактном множестве  $A$  все частные производные отображения  $v(x)$  равномерно ограничены, поэтому существует такая константа  $c$ , что  $\|v(x) - v(y)\| \leq c\|x - y\|$  для любых  $x, y \in A$ . Пусть  $x, y \in A$  и  $f_t(x) = f_t(y)$ . Тогда  $x - y = t(v(x) - v(y))$ , а значит,  $\|x - y\| \leq c|t| \cdot \|x - y\|$ . При  $|t| < c^{-1}$  получаем  $x = y$ .

Определитель матрицы Якоби отображения  $f_t(x)$  равен  $\det(I + tJ(x)) = 1 + t\sigma_1(x) + \dots + t^{m+1}\sigma_{m+1}(x)$ , где  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m+1}$  — гладкие функции. При достаточно малых  $t$  этот определитель положителен и  $f_t$  гомеоморфно отображает  $A$  на  $f_t(A)$ , поэтому объём множества  $f_t(A)$  равен  $a_0 + a_1t + \dots + a_{m+1}t^{m+1}$ , где  $a_0$  — объём множества  $A$  и

$$a_k = \int_{a \leq \|x\| \leq b} \dots \int \sigma_k(x) dx_1 \dots dx_{m+1}.$$

В итоге получаем, что  $(\sqrt{1+t^2})^{m+1}$  — многочлен от  $t$  степени  $m+1$ . Это возможно лишь в том случае, когда число  $m+1$  чётно. Но мы рассматриваем случай, когда  $m = 2n$ , т. е. число  $m+1$  нечётно.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Теорема о том, что на сфере  $S^{2n}$  не существует векторного поля без особых точек, имеет много разных доказательств. Мы сейчас привели весьма нестандартное доказательство этой теоремы. Более стандартное доказательство можно получить с помощью теоремы Пуанкаре—Хопфа (теорема 18.6 на с. 250); для этого нужно воспользоваться также теоремой 19.4 на с. 267 и примером 19.3 на с. 273.

**З а д а ч а 16.4.** а) Пусть  $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  — гладкое отображение. Докажите, что существует такая точка  $x \in S^{2n}$ , что  $f(x) = \pm x$ .

б) Пусть  $f: \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  — гладкое отображение. Докажите, что у этого отображения есть неподвижная точка.

**З а д а ч а 16.5.\*** [25] *Алгеброй с делением* называют конечномерное вещественное пространство  $K$  с билинейным умножением  $\mu: K \times K \rightarrow K$  без делителей нуля (т. е. если  $v \neq 0$  и  $w \neq 0$ , то  $\mu(v, w) \neq 0$ ) и с двусторонней единицей  $e$  (т. е.  $\mu(e, v) = v = \mu(v, e)$  для всех  $v \in K$ ). Докажите, что если  $\dim K \geq 2$ , то  $K$  содержит подалгебру, изоморфную  $\mathbb{C}$ .

### 16.3. Риманова метрика

*Риманова метрика* на многообразии  $M^n$  — это гладкое задание в касательном пространстве  $T_x M^n$  скалярного произведения  $(u, v)$ . Гладкость означает, что функция  $f: TM^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная формулой  $f(v) = (v, v)$ , является гладкой. Эквивалентное определение гладкости таково: для любых гладких векторных полей  $X$  и  $Y$  на  $M^n$  функция  $(X, Y)$  является гладкой функцией на  $M^n$ .

**Теорема 16.2.** *На любом многообразии  $M^n$  существует риманова метрика.*

**Доказательство.** Покроем  $M^n$  счётным набором карт  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  и построим гладкое разбиение единицы  $\{f_i\}$ , для которого  $\text{supp } f_i \subset U_i$ .

Для  $x \in U_i$  определим скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)_i$  в  $T_x M^n$  следующим образом. Пусть векторы  $v, w \in T_x M^n$  имеют в локальной системе координат  $(U_i, \varphi_i)$  координаты  $(v_1, \dots, v_n)$  и  $(w_1, \dots, w_n)$ . Тогда положим  $(v, w)_i = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ .

Пусть теперь  $x$  — произвольная точка  $M^n$  и  $v, w \in T_x M^n$ . Положим

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)(v, w)_i.$$

Эта сумма имеет следующий смысл: если значение  $(v, w)_i$  не определено, то  $x \notin U_i$ , а значит,  $f_i(x) = 0$ ; в таком случае мы полагаем  $f_i(x)(v, w)_i = 0$ .

При фиксированном  $x$  получается выражение вида  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$ , где  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum \lambda_i = 1$  и  $A_i$  — положительно определённая симметрическая билинейная форма. Сумма форм такого вида тоже положительно определена.  $\square$

### 16.4. Дифференциальные формы и ориентируемость

*Косасательным пространством* в точке  $x \in M^n$  называют пространство линейных функций на пространстве  $T_x M^n$ ; косасательное пространство обозначают  $T_x^* M^n$ . На множестве  $T^* M^n = \bigcup_{x \in M^n} T_x^* M^n$  структура многообразия задаётся аналогично тому, как это делается для  $TM^n$ . Действительно, пусть  $(U, \varphi)$  — локальная система координат с началом в точке  $x$ ,  $v \in T_x M^n$  и  $l \in T_x^* M^n$ . В этой локальной системе координат вектор  $v$  имеет координаты  $(v_1, \dots, v_n)$  и при этом  $l(v) = l_1 v_1 + \dots + l_n v_n$ , где числа  $l_1, \dots, l_n$  одни и те же для всех векторов. Будем считать, что  $(l_1, \dots, l_n)$  — координаты ковектора  $l$  в данной системе координат. Дальше действуем точно так же, как и для  $TM^n$ .



Гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$  индуцирует отображение касательных расслоений  $df: TM^m \rightarrow TN^n$ , которое переносит касательные векторы в том же направлении, в котором действует отображение  $f$ . Для кокасательных расслоений индуцированное отображение  $\delta f$  действует в противоположном направлении, т. е.  $\delta f: T^*N^n \rightarrow T^*M^m$ . Действительно, зададим отображение  $\delta f$  формулой  $\delta f(l)(v) = l(df(v))$ . Эта формула показывает, что если  $l \in T_{f(x)}^*N^n \subset T^*N^n$ , то  $\delta f(l) \in T_x^*M^m \subset T^*M^m$ .

Пусть  $\Lambda_x^k M^n - k$ -я внешняя степень пространства  $T_x^*M^n$ . На множестве  $\Lambda^k M^n = \bigcup_{x \in M^n} \Lambda_x^k M^n$  естественным образом вводится структура многообразия. *Дифференциальной  $k$ -формой* на многообразии  $M^n$  называют гладкое сечение канонической проекции  $p: \Lambda^k M^n \rightarrow M^n$ , т. е. такое гладкое отображение  $s: M^n \rightarrow \Lambda^k M^n$ , что  $ps = \text{id}_{M^n}$ .

В локальной системе координат форма  $\omega \in \Lambda^k M^n$  имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

где  $dx_i(v) = v_i$  ( $i$ -я координата вектора  $v$  в этой системе координат).

Многообразию  $M^n$  называют *ориентируемым*, если существует набор карт  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ , покрывающий  $M^n$  и обладающий тем свойством, что определитель матрицы Якоби отображения  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$  положителен для любых  $\alpha, \beta \in A$ . Такой набор карт будем называть *ориентирующим атласом*.

**У п р а ж н е н и е 6.** Докажите, что произведение двух ориентируемых многообразий ориентируемо.

**З а д а ч а 16.6.** Пусть  $f$  — диффеоморфизм многообразия  $M^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| < 1\}$  на себя, заданный формулой  $f(tu) = (1-t)u$ , где  $u$  — единичный вектор и  $0 < t < 1$ . Докажите, что  $f$  изменяет ориентацию.

**Т е о р е м а 16.3.** *Многообразию  $M^n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда на нём есть  $n$ -форма  $\Omega$ , не обращающаяся в нуль ни в какой точке.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим сначала, что многообразию  $M^n$  ориентируемо. Пусть  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  — ориентирующий атлас на многообразии  $M^n$ . Пространство  $n$ -форм на  $n$ -мерном многообразии одномерно; базисная форма  $\omega$  в  $\mathbb{R}^n$  имеет вид  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Рассмотрим на  $U_\alpha$  форму  $\omega_\alpha = (\delta\varphi_\alpha)\omega$ .

Если  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение, то  $(\delta f)\omega = J(x)\omega$ , где  $J(x)$  — определитель матрицы Якоби отображения  $f$ . Поэтому  $\delta(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1})\omega = \lambda\omega$ , где  $\lambda$  — положительная функция на  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Следовательно,

$\delta(\varphi_\alpha^{-1})\delta(\varphi_\beta)\omega = \lambda\omega$ , а значит,  $\omega_\beta = \delta(\varphi_\beta)\omega = \delta(\varphi_\alpha)(\lambda\omega) = \lambda_\alpha\omega_\alpha$ , где  $\lambda_\alpha(x) = \lambda(\varphi_\alpha(x))$  — положительная функция на  $U_\alpha \cap U_\beta$ .

Можно считать, что покрытие  $\{U_\alpha\}$  не более чем счётно. Пусть  $f_\alpha$  — такое разбиение единицы, подчинённое покрытию  $\{U_\alpha\}$ , что  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$  для всех  $\alpha$ . Положим  $\Omega = \sum f_\alpha\omega_\alpha$ . Ясно, что форма  $\Omega$  нигде не обращается в нуль.

Предположим теперь, что  $n$ -форма  $\Omega$  на многообразии  $M^n$  нигде не обращается в нуль. Пусть  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  — произвольный атлас,  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  — базисная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Форма  $\delta(\varphi_\alpha)\omega$ , определённая на  $U_\alpha$ , пропорциональна  $\Omega$ , поэтому  $\delta(\varphi_\alpha)\omega = \mu_\alpha\Omega$ , где  $\mu_\alpha$  — некоторая функция на  $U_\alpha$ . Функция  $\mu_\alpha$  не обращается в нуль, поэтому  $\mu_\alpha > 0$  или  $\mu_\alpha < 0$  на всём множестве  $U_\alpha$  (мы предполагаем, что множество  $U_\alpha$  связно). Если  $\mu_\alpha < 0$ , то заменим отображение  $\varphi_\alpha$  на отображение  $\psi_\alpha$ , которое является композицией отображения  $\varphi_\alpha$  и отображения  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданного формулой  $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_1, \dots)$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} \delta(\psi_\alpha)\omega &= \delta(\psi_\alpha)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \delta(\varphi_\alpha)dx_2 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = -\mu_\alpha\Omega = \nu_\alpha\Omega, \end{aligned}$$

где  $\nu_\alpha = -\mu_\alpha > 0$ .

После таких замен получаем ориентирующий атлас, так как

$$\delta(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})\omega = \delta(\varphi_\alpha^{-1})\delta(\varphi_\beta)\omega = \delta(\varphi_\alpha^{-1})(\mu_\beta\Omega) = \mu_\alpha^{-1}\mu_\beta\omega. \quad \square$$

Точно так же, как строилась риманова метрика на многообразии  $M^n$ , можно построить скалярное произведение в каждом пространстве  $\Lambda_x^n M^n$ . Пусть  $\tilde{M}^n$  — множество векторов единичной длины в  $\Lambda^n M^n$ . Пространство  $\Lambda_x^n M^n$  одномерно, поэтому из точки  $x$  выходят ровно два вектора единичной длины. Из этого следует, что естественная проекция  $p: \tilde{M}^n \rightarrow M^n$  является двулиственным накрытием. Это накрытие называют *ориентирующим накрытием* многообразия  $M^n$ , а многообразие  $\tilde{M}^n$  называют *ориентирующей накрывающей*. Происхождение такого названия проясняет следующее утверждение.

**Теорема 16.4.** а) Многообразиие  $\tilde{M}^n$  связно тогда и только тогда, когда многообразиие  $M^n$  неориентируемо.

б) Многообразиие  $\tilde{M}^n$  ориентируемо.

**Доказательство.** а) Если многообразиие  $\tilde{M}^n$  связно, то каждая компонента связности представляет собой  $n$ -форму  $\Omega$ , нигде не обращющуюся в нуль. Наоборот, если  $n$ -форма  $\Omega$  нигде не обращается в нуль, то множество точек  $\Omega(x)/\|\Omega(x)\|$  представляет собой одну из компонент связности многообразиие  $\tilde{M}^n$ .

б) Каждая точка  $x \in \tilde{M}^n$  по определению является  $n$ -формой  $\Omega(x)$  в точке  $p(x) \in M^n$ . Накрытие  $p: \tilde{M}^n \rightarrow M^n$  индуцирует изоморфизм кокасательных пространств, поэтому форму  $\Omega(x)$  можно рассматривать как форму на  $\tilde{M}^n$ .  $\square$

У п р а ж н е н и е 7. Докажите, что если  $\pi_1(M^n) = 0$ , то многообразие  $M^n$  ориентируемо.

Точки многообразия  $\tilde{M}^n$  можно рассматривать как пары

(точка  $x \in M^n$ , ориентация пространства  $T_x M^n$ ).

Поднятие пути  $\gamma \subset M^n$  в накрывающее многообразие  $\tilde{M}^n$  соответствует переносу ориентации вдоль пути  $\gamma$ . Перенос ориентации вдоль пути имеет следующий геометрический смысл. Покроем путь  $\gamma$  конечным числом карт  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  так, чтобы каждое множество  $\gamma \cap U_i$  было связно. Карта  $\varphi_i$  позволяет задать во всех пространствах  $T_x M^n$  для  $x \in U_i$  ориентации согласованным образом. Поэтому если  $[a, b] \subset \gamma \cap U_i$ , то ориентацию, заданную в точке  $a$ , можно перенести в точку  $b$ .

У п р а ж н е н и е 8. Дайте определение ориентирующего накрытия, основываясь на геометрическом определении переноса ориентации вдоль пути.

## § 17. Вложения и погружения

Вложения и погружения мы определяли для многообразий без края, поэтому будем предполагать, что рассматриваемые многообразия не имеют края. Для компактных многообразий есть достаточно простая конструкция, позволяющая вложить  $n$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Эту конструкцию мы изложим в п. 17.1. Затем с помощью вложений мы в п. 17.2 докажем, что любое замкнутое компактное многообразие триангулируемо.

Для некомпактных многообразий требуется совсем другая конструкция. Она основана на том, что если  $n \geq 2m$ , то любое гладкое отображение  $M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  можно сколь угодно малым шевелением превратить в погружение. Поэтому в п. 17.3 мы обсудим погружения многообразий, а затем в п. 17.4 докажем, что любое многообразие размерности  $n$  вкладывается в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  в качестве замкнутого подмногообразия.

Все эти теоремы о вложениях и погружениях доказал Уитни [144]. Более тонкие рассуждения, тоже принадлежащие Уитни, показывают, что любое  $n$ -мерное многообразие, где  $n \geq 2$ , можно погрузить в  $\mathbb{R}^{2n-1}$ , а любое компактное  $n$ -мерное многообразие можно вложить в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Современное изложение доказательств этих утверждений приведено в [24].

### 17.1. Вложения компактных многообразий

Здесь мы докажем, что компактное многообразие  $M^n$  можно вложить в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Конструкция состоит из двух шагов. Сначала мы докажем, что  $M^n$  можно вложить в  $\mathbb{R}^N$ , где  $N$  достаточно велико. Затем докажем, что если  $M^n$  можно вложить в  $\mathbb{R}^N$ , где  $N > 2n + 1$ , то  $M^n$  можно вложить и в  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

**Теорема 17.1.** *Компактное многообразие  $M^n$  можно вложить в  $\mathbb{R}^N$ , где  $N$  достаточно велико.*

**Доказательство.** На компактном многообразии  $M^n$  существует конечный набор карт  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , обладающий следующими свойствами:

- 1) множество  $\varphi_i(U_i)$  является открытым шаром радиуса 2 с центром в начале координат;
- 2) прообразы открытых единичных шаров при отображениях  $\varphi_i$  покрывают  $M^n$ ; эти прообразы будем обозначать  $V_i$ .

Построим гладкую функцию  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \|y\| \leq 1; \\ 0 & \text{при } \|y\| \geq 2; \end{cases}$$

кроме того,  $0 < \lambda(y) < 1$  при  $2 > \|y\| > 1$ . Для этого сначала рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ e^{-1/x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Затем положим  $\beta(t) = \alpha(x-1)\alpha(2-x)$ ; функция  $\beta$  положительна на интервале  $(1, 2)$ . Наконец, положим,

$$\gamma(\tau) = \int_{\tau}^2 \beta(t) dt \Big/ \int_1^2 \beta(t) dt$$

и  $\lambda(y) = \gamma(\|y\|)$ .

Пусть  $\lambda_i(x) = \lambda(\varphi_i(x))$ . Отображение  $\lambda_i(x)\varphi_i(x)$  определено на всём многообразии  $M^n$  (если  $x \notin U_i$ , то  $\lambda_i(x) = 0$ ). Легко проверить, что отображение  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)k}$ , заданное формулой

$$x \mapsto (\lambda_1(x), \lambda_1(x)\varphi_1(x), \dots, \lambda_k(x), \lambda_k(x)\varphi_k(x)),$$

взаимно однозначно. Действительно, пусть  $x_1 \in U_i$ . Если  $x_2 \in U_i$ , то  $\lambda_i(x_1) = \lambda_i(x_2) = 1$ , поэтому равенство  $\lambda_i(x_1)\varphi_i(x_1) = \lambda_i(x_2)\varphi_i(x_2)$  эквивалентно равенству  $\varphi_i(x_1) = \varphi_i(x_2)$ , т.е.  $x_1 = x_2$ . Если же  $x_2 \notin U_i$ , то  $\lambda_i(x_1) = 1$ , а  $\lambda_i(x_2) < 1$ .

Ограничение на  $U_i$  отображения  $x \mapsto \lambda_i(x)\varphi_i(x)$  является погружением. Действительно, если  $x \in U_i$ , то  $\lambda_i(x) = 1$ , а отображение  $x \mapsto \varphi_i(x)$  является локальным диффеоморфизмом. Поэтому отображение  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)k}$  является погружением. Остаётся заметить, что взаимно однозначное отображение компактного пространства  $M^n$  в хаусдорфово пространство  $\mathbb{R}^{(n+1)k}$  является гомеоморфизмом на свой образ.  $\square$

**Теорема 17.2.** а) Пусть  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  — погружение. Тогда если  $N > 2n$ , то композиция отображения  $f$  и проекции на некоторую гиперплоскость  $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$  является погружением.

б) Пусть  $M^n$  — компактное многообразие и  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  — вложение. Тогда если  $N > 2n + 1$ , то композиция отображения  $f$  и проекции на некоторую гиперплоскость  $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$  является вложением.

**Доказательство.** а) Ядро проекции пространства  $\mathbb{R}^N$  на гиперплоскость  $\mathbb{R}_v^{N-1}$ , ортогональную вектору  $v$ , состоит из векторов, пропорциональных  $v$ . Поэтому композиция отображения  $f$  и проекции на гиперплоскость  $\mathbb{R}_v^{N-1}$  является иммерсией в точке  $x \in M^n$  тогда и только тогда, когда вектор  $v$  не принадлежит образу отображения

$$T_x M^n \xrightarrow{df} T_{f(x)} \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N.$$

Чтобы исключить нулевой вектор, будем рассматривать  $S^{N-1}$  вместо  $\mathbb{R}^N$ . Отображение  $df$  переводит пропорциональные векторы в пропорциональные, а любой ненулевой вектор оно переводит в ненулевой вектор. Поэтому можно ввести на  $M^n$  риманову метрику и построить отображение  $g: T_1 M^n \rightarrow S^{N-1}$ , где  $T_1 M^n$  — множество касательных векторов единичной длины.

Легко проверить, что  $T_1 M^n$  — многообразие размерности  $2n - 1$ . Действительно, сопоставим касательному вектору квадрат его длины. В результате получим гладкое отображение  $T_M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , которое в точке  $1 \in \mathbb{R}$  является иммерсией. При этом  $T_1 M^n$  — прообраз точки  $1 \in \mathbb{R}$ .

Построенное нами отображение  $g$  гладкое, поэтому если  $2n - 1 < N - 1$ , то его образ имеет меру нуль. В частности, найдётся вектор  $v \in S^{N-1}$ , не принадлежащий образу отображения  $g$ . Композиция отображения  $f$  и проекции на гиперплоскость  $\mathbb{R}_v^{N-1}$  является иммерсией.

б) Мы уже доказали, что если  $N > 2n$ , то для почти всех  $v \in S^{N-1}$  композиция отображения  $f$  и проекции на гиперплоскость  $\mathbb{R}_v^{N-1}$  является иммерсией. Покажем, что если  $N > 2n + 1$ , то для почти всех  $v \in S^{N-1}$  композиция отображения  $f$  и проекции на гиперплоскость  $\mathbb{R}_v^{N-1}$  взаимно од-

нозначна. Рассмотрим для этого отображение  $g: (M^n \times M^n) \setminus \Delta \rightarrow S^{N-1}$ , заданное формулой

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}.$$

Здесь  $\Delta = \{(x, y) \in M^n \times M^n \mid x = y\}$  — диагональ. Отображение  $g$  определено корректно, поскольку если  $x \neq y$ , то  $f(x) \neq f(y)$  по условию. Размерность многообразия  $(M^n \times M^n) \setminus \Delta$  равна  $2n$ , поэтому если  $N > 2n + 1$ , то образ отображения  $g$  имеет меру нуль. Ясно также, что если вектор  $v \in S^{N-1}$  не принадлежит образу отображения  $g$ , то композиция отображения  $f$  и проекции на гиперплоскость  $\mathbb{R}_v^{N-1}$  взаимно однозначна.

Остаётся заметить, что взаимно однозначное непрерывное отображение компактного пространства  $M^n$  в хаусдорфово пространство  $\mathbb{R}_v^{N-1}$  является гомеоморфизмом на свой образ.  $\square$

## 17.2. Триангуляция замкнутого многообразия

Пусть  $M^n$  — компактное многообразие без края. Докажем, следуя [45], что  $M^n$  триангулируемо, т. е. существует гомеоморфизм  $M^n \rightarrow |K|$ , где  $K$  — некоторый симплицальный комплекс. Чтобы построить триангуляцию, вложим  $M^n$  в  $\mathbb{R}^N$ . Для точки  $x \in M^n$  в  $\mathbb{R}^N$  определены два аффинных подпространства, проходящих через точку  $x$ , а именно, касательное подпространство  $T_x M^n$  и нормальное подпространство  $N_x M^n$ , являющееся ортогональным дополнением пространства  $T_x M^n$ . Будем говорить, что сфера радиуса  $r$  с центром  $y$  касается  $M^n$  в точке  $x$ , если  $y \in N_x M^n$  и  $\|y - x\| = r$ .

**Л е м м а.** *Для замкнутого многообразия  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  можно выбрать число  $r > 0$  так, что ни одна сфера радиуса меньше  $r$ , касающаяся  $M^n$ , не содержит точек  $M^n$ , отличных от точки касания.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для начала рассмотрим ситуацию, соответствующую вложению  $M^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Пусть график гладкой функции  $y = f(x)$  пересекает окружность  $x^2 + (y - r)^2 = r^2$  в точке  $(x_0, r - \sqrt{r^2 - x_0^2})$  и при этом в начале координат график касается окружности, т. е.  $f'(0) = 0$ .

Предположим, что  $\max_{t \in [0, x]} f''(t) = C$ . Тогда  $f'(\tau) = \int_0^\tau f''(t) dt \leq C$  (при  $t \in [0, x]$ ) и

$$r - \sqrt{r^2 - x_0^2} = f(x_0) = \int_0^{x_0} f'(\tau) d\tau \leq \frac{Cx_0^2}{2}.$$

Несложные алгебраические преобразования показывают, что если  $x_0 \in (0, r]$ , то

$$\frac{r - \sqrt{r^2 - x_0^2}}{x_0^2} \geq \frac{1}{2r}, \text{ поэтому } C \geq \frac{1}{r}.$$

Это означает, что если радиус  $r$  мал, то на отрезке  $[0, r]$  есть точка, в которой вторая производная функции  $f$  велика, а именно, она не меньше  $1/r$ .

Перейдём теперь к общему случаю  $M^n \subset \mathbb{R}^N$ . Компактное многообразие  $M^n$  можно покрыть конечным числом открытых множеств  $U_i$  так, что для любой точки  $x \in U_i$  ортогональная проекция  $p_{i,x}: U_i \rightarrow T_{x_i}M^n$  является диффеоморфизмом на  $U'_{i,x} = p_{i,x}(U_i)$ , а кроме того, множество  $U_i$  является графиком гладкого отображения  $\varphi_{i,x}: U'_{i,x} \rightarrow N_{x_i}M^n$ . Если сфера радиуса  $r$ , касающаяся  $M^n$  в точке  $x \in U_i$ , пересекает  $U_i$  в точке, отличной от  $x$ , то из доказанной выше оценки  $C \geq 1/r$  следует определённая оценка для вторых частных производных отображений  $\varphi_{i,x}$ . Пользуясь этой оценкой, для каждой области  $U_i$  можно оценить снизу радиус касательной сферы, пересекающей  $U_i$ . Если радиус касательной сферы меньше минимальной из этих оценок радиусов и она касается  $M^n$  в точке  $x \in U_i$ , то она не пересекает  $U_i$ , но может пересекать  $U_j$ ,  $j \neq i$ .

Предположим, что существует последовательность сфер с радиусами  $r_1, r_2, \dots$ , которые касаются  $M^n$  в точках  $x_1, x_2, \dots$  и пересекают  $M^n$  в других точках  $y_1, y_2, \dots$  и при этом  $r_k \rightarrow 0$ . Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что  $x_1, x_2, \dots \in U_i$  и  $x_k \rightarrow x \in U_i$ . Кроме того, можно считать, что все радиусы  $r_k$  меньше упомянутой выше минимальной оценки радиуса, поэтому каждая точка  $y_k$  лежит вне  $U_i$ . При этом  $y_k \rightarrow x \in U_i$ ; с другой стороны, все предельные точки последовательности  $y_k$  принадлежат замкнутому множеству  $M^n \setminus U_i$ .  $\square$

Для каждого  $\rho > 0$  можно выбрать точки  $a_1, \dots, a_m \in M^n$  так, чтобы открытые множества

$$\sigma^n(a_k, \rho) = M^n \cap \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|a_k - y\| < \rho\}$$

покрывали  $M^n$ . Выберем число  $r$ , как в условии леммы 17.2, а затем выберем число  $\rho < r/2$  столь малым, что каждое множество  $\sigma^n(a_k, \rho)$  гомеоморфно  $\text{int } D^n$  и любая прямая, содержащая две точки множества  $\sigma^n(a_k, \rho)$ , образует с подпространством  $T_{a_k}M^n$  угол не больше  $\pi/4$ . Тогда, в частности, ортогональная проекция множества  $\sigma^n(a_k, \rho)$  на  $T_{a_k}M^n$  является гомеоморфизмом на свой образ.

Множества  $c_k^n = \{x \in M^n \mid \|x - a_k\| \leq \|x - a_i\|, i = 1, \dots, m\}$  покрывают  $M^n$ . При этом  $c_k^n \subset \sigma^n(a_k, \rho)$ , поскольку если  $x \in M^n$  и  $\|x - a_k\| > \rho$ ,

то  $\|x - a_i\| < \rho$  для некоторого  $i$ . Множество  $c_k^n$  представляет собой пересечение многообразия  $M^n$  с выпуклым подмножеством  $\mathbb{R}^N$ , заданным неравенствами  $\|x - a_k\| \leq \|x - a_i\|, i = 1, \dots, m$ . Рассмотрим гиперплоскость  $L_{ki}$ , заданную уравнением  $\|x - a_k\| = \|x - a_i\|$ . Если  $L_{ki}$  пересекает  $N_{a_k}M^n$  в некоторой точке  $y$ , то сфера радиуса  $\|y - a_k\|$  с центром  $y$  касается  $M^n$  в точке  $a_k$  и пересекает  $M^n$  в точке  $a_i$ , поэтому

$$\|y - a_k\| > r > 2\rho. \tag{1}$$

Пусть  $\tau$  — луч в пространстве  $T_{a_k}M^n$  с началом  $a_k$ . Этот луч и подпространство  $N_{a_k}M^n$  порождают полупространство  $H_\tau$  размерности  $N - n + 1$ . Полупространство  $H_\tau$  пересекает  $\sigma^n(a_k, \rho) \subset M^n$  по некоторой кривой  $\gamma$ ; проекция  $\gamma$  на  $T_{a_k}M^n$  лежит на луче  $\tau$ . Кривая  $\gamma$  пересекает по крайней мере одну из гиперплоскостей  $L_{ki}$ . Покажем, что пересечение  $\gamma$  с  $L_{ki}$  состоит ровно из одной точки, причём  $\gamma$  не касается  $L_{ki}$ .

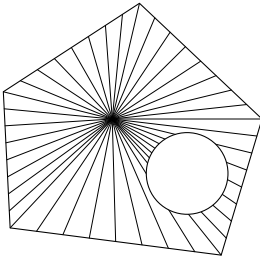


Рис. 94. «Плохое» множество  $c_k^n$

(Если бы кривая  $\gamma$  пересекала  $L_{ki}$  в двух точках, то множество  $c_k^n$  могло бы иметь такой вид, как на рис. 94.) Предположим, что  $\gamma$  касается  $L_{ki}$  или пересекает в двух точках. Пусть  $l$  — касательная или прямая, проходящая через две точки пересечения. Обе точки пересечения принадлежат  $\gamma \subset \sigma^n(a_k, \rho)$ , поэтому по условию прямая  $l$  образует с  $T_{a_k}M^n$  угол  $\alpha \leq \pi/4$  (для касательных это утверждение доказывается предельным переходом). Прямая  $l$  пересекает  $\sigma^n(a_k, \rho)$ , поэтому расстояние от точки  $a_k$  до прямой  $l$  не превосходит  $\rho$ . Учитывая, что  $\alpha \leq \pi/4$ , получаем (см. рис. 95):

$$\|a_k - y\| \leq \rho / \cos \alpha \leq \rho / \cos(\pi/4) = \sqrt{2}\rho.$$

Но это противоречит неравенству (1).

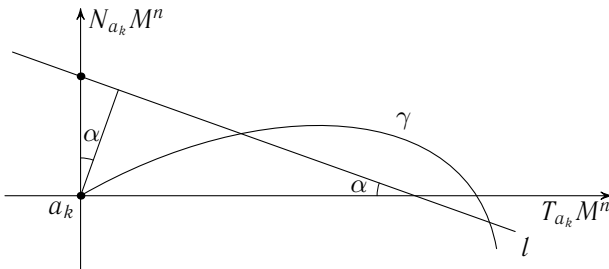


Рис. 95. Сечение полуплоскостью, принадлежащей  $H_\tau$



Таким образом, каждая кривая  $\gamma$  пересекает  $L_{ki}$  не более чем в одной точке. Это свойство позволяет построить гомеоморфизм  $c_k^n$  на выпуклый многогранник в  $T_{a_k}M^n$ , заданный теми же гиперплоскостями  $L_{ki}$ , которые задают  $c_k^n$ . (Отметим, что гиперплоскость  $L_{ki}$ , пересекающая  $c_k^n$ , не может быть параллельна  $T_{a_k}M^n$ ; иначе она пересекала бы  $N_{a_k}M^n$  в такой точке  $y$ , что  $\|a_k - y\| \leq \rho$ . Тем более, точки пересечения  $L_{ki}$  с  $c_k^n$  и с  $T_{a_k}M^n$  не могут быть расположены по разные стороны от точки  $a_k$ .) Указанный гомеоморфизм переносит на  $c_k^n$  комбинаторную структуру выпуклого многогранника, причём  $i$ -мерные грани  $c_k^n$  определяются инвариантным образом исходя из пересечений гиперплоскостей  $L_{ki}$ . После этого все множества  $c_k^n$  можно триангулировать, сначала триангулировав 2-мерные грани, затем 3-мерные и т. д.

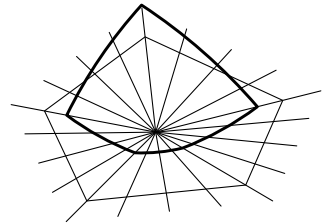


Рис. 96. Множество  $c_k^n$  и выпуклый многогранник

Триангуляцию компактного многообразия  $M^n$  с краем  $\partial M^n$  можно построить тем же самым методом. Рассмотрим для этого замкнутое компактное многообразие  $\tilde{M}^n$ , которое получается из двух экземпляров  $M^n$  отождествлением соответствующих точек краёв. Вложим  $\tilde{M}^n$  в  $\mathbb{R}^N$ . Применим лемму 17.2 к  $\tilde{M}^n$  и к  $\partial M^n$  и выберем число  $r > 0$  так, чтобы условие леммы выполнялось для обоих многообразий. Затем выберем числа  $\rho_1 < r/2$  и  $\rho_2 < r/2$  так, чтобы исходя из них можно было триангулировать  $\tilde{M}^n$  и  $\partial M^n$ , соответственно. Положим  $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$  и для этого  $\rho$  выберем сначала точки  $a_1, \dots, a_m \in \partial M^n$ , а затем эту систему точек дополним точками  $a_{m+1}, \dots, a_{m+k} \in M^n \subset \tilde{M}^n$ .

### 17.3. Погружения

Здесь мы займёмся доказательством следующего утверждения: любое многообразие  $M^n$  (не обязательно компактное) можно погрузить в  $\mathbb{R}^{2n}$ ; более того, если  $2m \leq n$ , то любое гладкое отображение  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  с любой степенью точности аппроксимируется погружением.

Первый шаг доказательства состоит в вычислении размерности множества матриц данного ранга. Пусть  $M_{n,m}$  — множество всех матриц

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$  с вещественными коэффициентами; такие матрицы

соответствуют линейным отображениям  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Множество  $M_{n,m}$

естественным образом отождествляется с  $\mathbb{R}^{mn}$ . Рассмотрим в  $M_{n,m} = \mathbb{R}^{mn}$  подмножество  $M_{n,m,k}$ , состоящее из всех матриц ранга  $k$ .

**Теорема 17.3.** *Если  $k \leq \min(m, n)$ , то  $M_{n,m,k}$  — многообразие размерности  $k(m+n-k)$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный элемент множества  $M_{n,m,k}$ . Не теряя общности, можно считать, что этот элемент имеет вид  $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ , где  $A_0$  — невырожденная матрица порядка  $k$ . Если число  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, то любая матрица  $A$  порядка  $k$ , для которой абсолютные величины всех элементов матрицы  $A - A_0$  меньше  $\varepsilon$ , является невырожденной. Легко проверить, что в таком случае

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n,m,k} \iff D = CA^{-1}B.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \operatorname{rank} \left[ \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right] = \\ &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ранг последней матрицы совпадает с рангом матрицы  $A$  тогда и только тогда, когда  $D - CA^{-1}B = 0$ .

Выберем у точки  $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \in M_{n,m,k} \subset \mathbb{R}^{mn}$  достаточно малую окрестность  $U$  и рассмотрим отображение  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ , заданное формулой

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Это отображение обратимо; обратное отображение имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & X + CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Кроме того,  $U \cap M_{n,m,k} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^{k(m+n-k)} \cap \varphi(U))$ , где подпространство  $\mathbb{R}^{k(m+n-k)} \subset \mathbb{R}^{mn}$  состоит из матриц вида  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ .  $\square$

Рассмотрим теперь локальную ситуацию, когда  $M^m$  — открытое подмножество пространства  $\mathbb{R}^m$ . Напомним, что выражение *почти все* означает *все, кроме множества меры нуль*.

**Теорема 17.4.** *Пусть  $U \subset \mathbb{R}^m$  — открытое множество,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение. Тогда если  $n \geq 2m$ , то для почти всех*

линейных отображений  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  отображение  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное формулой  $g(x) = f(x) + Ax$ , является иммерсией.

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $F_k: M_{n,m,k} \times U \rightarrow M_{n,m}$ , заданное формулой  $F_k(X, x) = X - df(x)$ . Согласно теореме 17.3 размерность многообразия  $M_{n,m,k} \times U$  равна  $k(n+m-k) + m$ . При фиксированных  $m$  и  $n$  функция  $k(n+m-k)$  монотонно возрастает при  $k < (m+n)/2 \geq 3m/2 > m$ . Поэтому если  $k \leq m-1$ , то

$$k(n+m-k) + m \leq (m-1)(n+1) + m = (2m-n) + mn - 1.$$

По условию  $2m \leq n$ , поэтому  $\dim(M_{n,m,k} \times U) < \dim M_{n,m}$ . В таком случае мера образа отображения  $F_k$  равна нулю. Это означает, что линейные отображения вида  $X - df(x)$ ,  $X \in M_{n,m,k}$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ), образуют множество меры нуль, т. е. для почти любого линейного отображения  $A$  ранг матрицы  $A + df(x)$  равен  $m$  при всех  $x \in U$ .  $\square$

Теперь мы готовы к доказательству основного утверждения.

**Теорема 17.5.** Пусть  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение и  $n \geq 2m$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое погружение  $g: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$  при всех  $x \in M^m$ .

**Доказательство.** Построим счётный набор открытых множеств  $U_{i,1} \subset U_{i,2} \subset U_{i,3}$  так, что множества  $\{U_{i,1}\}$  покрывают  $M^m$  и  $U_{i,k} = \varphi_i^{-1}(D_k^m)$ , где  $D_k^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq k\}$  и  $\varphi_i: U_{i,3} \rightarrow D_3^m \subset \mathbb{R}^m$  — гладкая карта; кроме того, покрытие  $\{U_{i,3}\}$  локально конечно. Требуемое отображение  $g$  мы будем строить последовательно, заменяя на  $i$ -м шаге отображение  $f_{i-1}$  на отображение  $f_i$  так, что:

- 1)  $\|f_i(x) - f_{i-1}(x)\| < \varepsilon/2^i$  для всех  $x \in M^m$ ;
- 2) ранг отображения  $f_i$  на множестве  $\overline{U_{i,1}}$  равен  $m$ ;
- 3) вне множества  $U_{i,2}$  отображение  $f_{i-1}$  не изменяется;

4) во всех точках множества  $C_i = \overline{U_{i,2}} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{U_{j,1}} \right)$  ранг отображения  $f_i$  равен  $m$ .

Если положить  $f_0 = f$  и  $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$ , то в результате получим требуемое отображение; гладкость отображения  $g$  следует из локальной конечности покрытия  $\{U_{i,3}\}$ .

Приступим к построению отображения  $f_i$ . Для этого нам потребуются такая гладкая функция  $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \|y\| \leq 1; \\ 0 & \text{при } \|y\| \geq 2. \end{cases}$$

(Построение такой функции описано на с. 228.) Будем искать отображение  $f_i$  вида  $f_i(x) = f_{i-1}(x) + \lambda(\varphi_i(x))A\varphi_i(x)$ . Для отображения такого

вида свойство 3 очевидным образом выполняется. Кроме того, можно работать в локальной системе координат, заданной картой  $\varphi_i: U_{i,3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Иными словами, можно считать, что  $f_i$  — отображение из  $D_3^m \subset \mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  и  $f_i(y) = f_{i-1}(y) + \lambda(y)Ay$ . Если  $x \in \overline{U_{i,1}}$ , то  $y = \varphi_i(x) \in \overline{D_1^m}$ , поэтому  $\lambda(y) = 1$ . В таком случае  $f_i(y) = f_{i-1}(y) + Ay$ . Согласно теореме 17.4 для почти всех  $A$  ранг отображения  $f_i$  во всех точках равен  $m$ . Это позволяет добиться выполнения свойств 1 и 2. Остаётся добиться выполнения свойства 4.

Множество  $C_i = \overline{U_{i,2}} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{U_{j,1}} \right)$  компактно и во всех его точках ранг отображения  $f_{i-1}$  равен  $m$ . Поэтому если все элементы матрицы  $A$  достаточно малы, то ранг отображения  $f_i(y) = f_{i-1}(y) + \lambda(y)Ay$  равен  $m$  для всех  $y \in C_i$  (функция  $a(y) = \min_{A: \text{rank } f_i(y) \leq m} \max |a_{ij}|$  достигает на множестве  $C_i$  минимума). □

### 17.4. Вложения некомпактных многообразий

Здесь мы покажем, что  $n$ -мерное многообразие можно вложить в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  в качестве замкнутого подмногообразия. Доказательство годится как для компактных, так и для некомпактных многообразий. Но для компактных многообразий мы уже привели достаточно простой способ доказательства.

Погружение  $f: M^m \rightarrow N^n$  будем называть *взаимно однозначным*, если отображение  $M^m \rightarrow f(M^m)$  взаимно однозначно. Если многообразие  $M^m$  компактно, то взаимно однозначное погружение является вложением. Но для некомпактных многообразий это неверно (см. рис. 97).

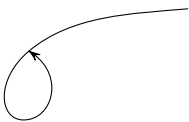


Рис. 97. Взаимно однозначное погружение, но не вложение

**Теорема 17.6.** Пусть  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  — погружение и  $n \geq 2m + 1$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое взаимно однозначное погружение  $g: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$  при всех  $x \in M^m$ .

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 17.5, требуемое отображение  $g$  будем строить последовательными приближениями. Точно так же определим открытые множества  $U_{i,1} \subset U_{i,2} \subset U_{i,3}$  и гладкую функцию  $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Дополнительно потребуем, чтобы ограничение отображения  $f$  на  $U_{i,3}$  было взаимно однозначно (погружение  $f$  локально взаимно однозначно). На этот раз отображение  $f_i$  будем искать среди отображений вида  $f_{i-1}(x) + \lambda(\varphi_i(x))v_i$ , где  $v_i \in \mathbb{R}^n$  — постоянный вектор. Мы хотим, чтобы вектор  $v_i$  был достаточно мал, а именно,  $\|v_i\| < \varepsilon/2^i$ .

Отображения  $f_i$  и  $f_{i-1}$  различаются только на компактном множестве  $U_{i,2}$ , поэтому если отображение  $f_{i-1}$  является иммерсией и вектор  $v_i$  достаточно мал, то отображение  $f_i$  тоже является иммерсией.

Равенство  $f_i(x) = f_i(y)$  эквивалентно равенству  $f_{i-1}(x) + \lambda(\varphi_i(x))v_i = f_{i-1}(y) + \lambda(\varphi_i(y))v_i$ . Если  $\lambda(\varphi_i(x)) \neq \lambda(\varphi_i(y))$ , то получим

$$v_i = -\frac{f_{i-1}(x) - f_{i-1}(y)}{\lambda(\varphi_i(x)) - \lambda(\varphi_i(y))}. \quad (1)$$

Рассмотрим в  $M^m \times M^m$  открытое подмножество  $N$ , состоящее из таких пар  $(x, y)$ , что  $\lambda(\varphi_i(x)) \neq \lambda(\varphi_i(y))$ , и рассмотрим отображение  $N \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное выражением в правой части равенства (1). Размерность многообразия  $N$  равна  $2m < n$ , поэтому образ этого отображения имеет меру нуль. Это означает, что можно выбрать сколь угодно малый вектор  $v_i$  так, что равенство (1) не будет выполняться ни при каких  $(x, y) \in N$ . В таком случае из равенства  $f_i(x) = f_i(y)$  следуют равенства  $f_{i-1}(x) = f_{i-1}(y)$  и  $\lambda(\varphi_i(x)) = \lambda(\varphi_i(y))$ . В частности, если  $x \in U_{i,1}$  и  $f_i(x) = f_i(y)$ , то  $\lambda(\varphi_i(x)) = \lambda(\varphi_i(y)) = 1$ , а значит,  $y \in U_{i,1}$ . Но ограничение отображения  $f_{i-1}$  на  $U_{i,1}$  взаимно однозначно, поэтому  $x = y$ . Эти рассуждения показывают, что ограничение отображения  $f_i$  на  $\bigcup_{j=1}^i U_{j,1}$  взаимно однозначно.  $\square$

Как мы сейчас убедимся, препятствие к тому, чтобы взаимно однозначное погружение было вложением, связано с тем, что последовательность  $\{f(x_n)\}$  может сходиться даже в том случае, когда последовательность  $\{x_n\}$  не имеет предельных точек. Множество пределов таких последовательностей  $\{f(x_n)\}$  будем обозначать  $L(f)$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Докажите, что если  $f$  — отображение компактного многообразия, то  $L(f) = \emptyset$ .

**Т е о р е м а 17.7.** *Взаимно однозначное погружение  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  является вложением тогда и только тогда, когда  $L(f) \cap f(M^m) = \emptyset$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Взаимно однозначное погружение  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  является вложением тогда и только тогда, когда отображение  $f^{-1}: f(M^m) \rightarrow M^m$  непрерывно.

Предположим сначала, что отображение  $f^{-1}$  непрерывно. Тогда если  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$  и  $y \in f(M^m)$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = f^{-1}(y)$ . Поэтому  $L(f) \cap f(M^m) = \emptyset$ .

Предположим теперь, что отображение  $f^{-1}$  не непрерывно. Тогда существует такая точка  $y \in f(M^m)$  и существует такая последовательность  $y_k \rightarrow y$ , что последовательность  $\{x_k = f^{-1}(y_k)\}$  не сходится. Последовательность  $\{x_k\}$  не может иметь предельных точек, отличных от  $x = f^{-1}(y)$ . Действительно, если  $x_{k_i} \rightarrow x' \neq x$ , то  $y_{k_i} \rightarrow f(x') \neq y$ . Поэтому из после-

довательности  $\{x_k\}$  можно выбрать подпоследовательность, не имеющую предельных точек.  $\square$

Теперь мы готовы к доказательству основного утверждения.

**Теорема 17.8.** *Для любого многообразия  $M^m$  существует вложение  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $n = 2m + 1$ . Более того, существует такое вложение, что множество  $f(M^m)$  замкнуто в  $\mathbb{R}^n$ .*

**Доказательство.** Сначала покажем, что существует гладкая функция  $f_1: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой  $L(f_1) = \emptyset$ .

Возьмём множества  $U_{i,1} \subset U_{i,2} \subset U_{i,3}$  и гладкую функцию  $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  такие же, как в доказательстве теоремы 17.5; карты  $\varphi_i: U_{i,3} \rightarrow \mathbb{R}^m$  тоже возьмём такие же. Положим  $f_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\lambda(\varphi_i(x))$ . Если  $x \in U_{i,1}$ , то  $\lambda(\varphi_i(x)) = 1$ , поэтому  $f_1(x) \geq 1$ . Из локальной конечности покрытия  $\{U_{i,3}\}$  следует, что функция  $f_1$  гладкая, поскольку если  $x \notin U_{i,3}$ , то  $\lambda(\varphi_i(x)) = 0$ .

Предположим, что последовательность  $\{x_k\}$  не имеет предельных точек. Тогда для любого натурального  $N$  можно выбрать  $k(N)$  так, что если  $k \geq k(N)$ , то  $x_k \notin \overline{U_{1,1}} \cap \dots \cap \overline{U_{N,1}}$ . В таком случае  $x_k \in U_{i,1}$ , где  $i > N$ , а значит,  $f_1(x_k) \geq i > N$ . Поэтому последовательность  $\{f_1(x_k)\}$  не имеет предельных точек.

Рассмотрим отображение  $f_2: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ , заданное формулой  $f_2(x) = (f_1(x), 0, \dots, 0)$ . Согласно теореме 17.5 для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое погружение  $f_3: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ , что  $\|f_2 - f_3\| < \varepsilon$ , а согласно теореме 17.6 существует такое взаимно однозначное погружение  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ , что  $\|f_3 - f\| < \varepsilon$ .

Покажем, что  $L(f) = \emptyset$  (для всех  $\varepsilon$ ). Предположим, что последовательность  $\{x_k\}$ ,  $x_k \in M^m$ , не имеет предельных точек. Тогда для любого натурального  $N$  можно выбрать  $k(N)$  так, что если  $k \geq k(N)$ , то  $f_1(x_k) > N$ . Поэтому из неравенства  $\|f(x_k) - f_2(x_k)\| < 2\varepsilon$  следует, что последовательность  $\{f(x_k)\}$  не имеет предела.

Остаётся проверить, что множество  $f(M^m)$  замкнуто. Это вытекает из следующей леммы.

**Лемма.** *Множество  $f(M^m)$  замкнуто в  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда  $L(f) \subset f(M^m)$ .*

**Доказательство.** Предположим сначала, что множество  $f(M^m)$  замкнуто и  $y \in L(f)$ . Тогда  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ , где  $x_k \in M^m$ , а значит,  $y \in f(M^m)$ .

Предположим теперь, что  $L(f) \subset f(M^m)$ . Пусть точка  $y$  принадлежит замыканию множества  $f(M^m)$ . Тогда существует такая последовательность точек  $\{x_k\}$ ,  $x_k \in M^m$ , что  $f(x_k) \rightarrow y$ . Если  $y$  последовательности  $\{x_k\}$  есть предельная точка  $x$ , то существует последовательность  $x_{k_i} \rightarrow x$ .

Поэтому  $y = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i}) = f(x) \in f(M^m)$ . Если же у последовательности  $\{x_k\}$  нет предельных точек, то  $y \in L(f) \subset f(M^m)$ .  $\square$

Для построенного нами вложения  $f$  множество  $L(f)$  пусто, поэтому множество  $f(M^m)$  замкнуто.  $\square$

## 17.5. Невозможность некоторых вложений

Здесь мы докажем, что замкнутое неориентируемое многообразие размерности  $n$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . При доказательстве используются достаточно очевидные свойства трансверсальности и общего положения, которые мы не будем строго доказывать. Дадим лишь определение трансверсальности.

Пусть  $X$  и  $Y$  — гладкие многообразия,  $W \subset Y$  — подмногообразие. Говорят, что гладкое отображение  $f: X \rightarrow Y$  *трансверсально* подмногообразию  $W$  в точке  $x \in X$ , если выполняется одно из следующих свойств:

- а)  $f(x) \notin W$ ;
- б)  $f(x) \in W$  и  $T_{f(x)}W + (df)_x(T_xX) = T_{f(x)}Y$ .

Если отображение  $f$  трансверсально  $W$  во всех точках  $x \in X$ , то говорят, что  $f$  *трансверсально*  $W$ .

**Пример.** Если  $\dim X + \dim W < \dim Y$ , то  $f: X \rightarrow Y$  трансверсально  $W$  тогда и только тогда, когда  $f(X) \cap W = \emptyset$ .

**Теорема 17.9.** Пусть  $M^n$  — многообразие без края (не обязательно компактное),  $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$  — такое вложение, что  $f(M^n)$  — замкнутое множество. Тогда если многообразие  $N^{n+1}$  односвязно, то многообразие  $M^n$  ориентируемо.

**Доказательство** (см. [117]). Предположим, что многообразие  $M^n$  неориентируемо. Пусть  $\gamma$  — кривая на  $M^n$ , при обходе вдоль которой изменяется ориентация. Тогда при обходе вдоль  $\gamma$  вектор нормали к  $M^n$  изменяет направление. Если длина переносимого вдоль  $\gamma$  нормального к  $M^n$  вектора постоянна и достаточно мала, то его конец описывает кривую, не пересекающую  $M^n$ . С помощью этой незамкнутой кривой легко построить замкнутую гладкую кривую  $\tilde{\gamma}$ , трансверсально пересекающую  $M^n$  в одной точке. Покажем, что на самом деле такой кривой быть не может.

Стягивание кривой  $\tilde{\gamma}$  в пространстве  $N^{n+1}$  задаёт отображение  $g: D^2 \rightarrow N^{n+1}$ , ограничение которого на  $\partial D^2$  совпадает с  $\tilde{\gamma}$ . Отображение  $g$  можно считать гладким. Слегка пошевелив  $f$  и  $g$ , приведём  $f(M^n)$  и  $g(D^2)$  в общее положение. При  $n \geq 3$  в общем положении диск  $g(D^2)$  несамопересекающийся, поэтому пересечение  $f(M^n)$  и  $g(D^2)$  состоит из замкнутых кривых и дуг кривых, концы которых — разные точки кривой  $\tilde{\gamma}$ ; при этом кривые и дуги несамопересекающиеся и попарно не пересе-

кающиеся. При  $n = 2$  самопересечения диска могут не устраняться при малом шевелении. Но малым шевелением можно добиться, чтобы точки самопересечения были только двойные и тройные; при этом двойные точки самопересечения заматают некоторые кривые, а тройные точки изолированные. В общем положении  $f(M^n)$  не проходит через тройные точки самопересечения диска  $g(D^2)$ . В таком случае пересечение  $f(M^n)$  и  $g(D^2)$  снова состоит из замкнутых кривых и дуг кривых, но теперь эти кривые могут трансверсально пересекаться и иметь трансверсальные точки самопересечения. Но число точек пересечения этих кривых с кривой  $\tilde{\gamma}$  снова чётно. А только это нам и нужно, чтобы прийти к противоречию, поскольку  $M^n$  пересекает  $\tilde{\gamma}$  ровно в одной точке.  $\square$

*С л е д с т в и е. Замкнутое неориентируемое многообразие размерности  $n$  нельзя вложить в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Воспользовавшись тем, что замкнутая двумерная поверхность, вложенная в  $S^3$ , ориентируема, можно получить полное описание всех замкнутых двумерных поверхностей, которые можно вложить в  $\mathbb{R}P^3$ . Ясно, что в  $\mathbb{R}P^3$  можно вложить  $\mathbb{R}P^2$ . К поверхности  $\mathbb{R}P^2$ , вложенной в  $\mathbb{R}P^3$ , можно приклеить любое количество ручек. Так можно построить вложение в  $\mathbb{R}P^3$  любой замкнутой неориентируемой поверхности с нечётной эйлеровой характеристикой.

*Т е о р е м а 17.10 (см. [40]). Замкнутую неориентируемую двумерную поверхность с чётной эйлеровой характеристикой нельзя вложить в  $\mathbb{R}P^3$ .*

*Д о к а з а т е л ь с т в о* (см. [49]). Предположим, что  $M^2$  — замкнутая неориентируемая поверхность, вложенная в  $\mathbb{R}P^3$ . Мы хотим доказать, что эйлерова характеристика  $\chi(M^2)$  нечётна. Пусть  $\sigma: S^3 \rightarrow S^3$  — антиподальная инволюция, т. е.  $\sigma(x) = -x$ ,  $p: S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3 = S^3/\sigma$  — естественная проекция. Фиксируем в  $S^3$  экваториальную сферу  $S^2$ , а в  $\mathbb{R}P^3$  фиксируем  $\mathbb{R}P^2 = p(S^2)$ . Слегка пошевелив  $M^2$ , будем считать, что  $M^2$  пересекает  $\mathbb{R}P^2$  трансверсально. Если  $M^2 \cap \mathbb{R}P^2$  несвязно, то, приклеив к  $M^2$  несколько ручек, можно построить новую двумерную поверхность  $N^2$ , для которой  $N^2 \cap \mathbb{R}P^2$  связно. Ясно, что поверхность  $N^2$  неориентируемая и  $\chi(M^2) \equiv \chi(N^2) \pmod{2}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $M^2 \cap \mathbb{R}P^2$  связно.

Покажем, что в таком случае  $p^{-1}(M^2) \cap S^2$  тоже связно. Поверхность  $p^{-1}(M^2)$  вложена в  $S^3$ , поэтому она ориентируемая (следствие теоремы 17.9). При факторизации  $p^{-1}(M^2)$  по антиподальной инволюции  $\sigma$  получается неориентируемая двумерная поверхность, поэтому ограничение  $\sigma$  на  $p^{-1}(M^2)$  обращает ориентацию. С другой стороны,  $\sigma$  сохраняет ориентацию сферы  $S^3$ . Поэтому  $\sigma$  не может переводить связную компоненту  $S^3 \setminus p^{-1}(M^2)$  в себя. Каждая связная компонента  $S^2 \setminus p^{-1}(M^2)$  ле-



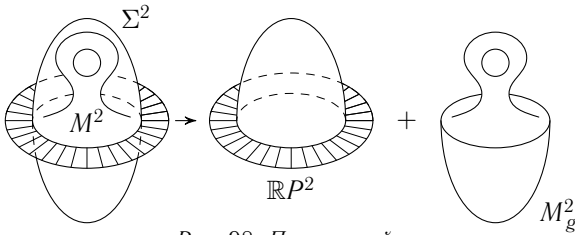


Рис. 98. Перестройка

жит в связной компоненте  $S^3 \setminus p^{-1}(M^2)$ , поэтому  $\sigma$  не может переводить связную компоненту  $S^2 \setminus p^{-1}(M^2)$  в себя. Значит, количество связных компонент  $S^2 \setminus p^{-1}(M^2)$  чётно.

По условию  $M^2 \cap \mathbb{R}P^2$  связно. Поэтому  $p^{-1}(M^2) \cap S^2$  состоит из одной или двух компонент связности, т. е.  $S^2 \setminus p^{-1}(M^2)$  состоит из двух или трёх компонент связности. Но мы доказали, что количество компонент связности  $S^2 \setminus p^{-1}(M^2)$  чётно. Поэтому  $S^2 \setminus p^{-1}(M^2)$  состоит из двух компонент связности. Значит,  $p^{-1}(M^2) \cap S^2$  связно, т. е.  $p^{-1}(M^2) \cap S^2 \approx S^1$ .

Далее нам будет удобнее считать, что  $\mathbb{R}P^3$  получено из  $D^3$  отождествлением диаметрально противоположных точек сферы  $S^2 = \partial D^3$ . Теперь ограничение отображения  $p: D^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  на  $D^3 \setminus S^2$  — гомеоморфизм, а ограничение  $p$  на  $S^2$  по-прежнему является двулистным накрытием. Пусть  $D^3 = D_R^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq R\}$ . Можно выбрать  $\varepsilon > 0$  так, что пересечение замыкания  $D_R^3 \setminus D_{R-\varepsilon}^3$  с  $M^2$  гомеоморфно произведению  $p^{-1}(M^2) \cap S^2$  на отрезок  $[R - \varepsilon, R]$ , т. е. гомеоморфно цилиндру  $S^1 \times I$ . В  $\mathbb{R}P^3$  этот цилиндр превращается в лист Мёбиуса.

Пусть  $\Sigma^2$  — сфера  $\partial D_{R-\varepsilon}^3$ ; она пересекает  $M^2$  по окружности. Разрежем  $\Sigma^2$  и  $M^2$  по этой окружности и склеим из полученных четырёх кусков две замкнутые поверхности (рис. 98). А именно, приклеим одну половину сферы  $\Sigma^2$  к листу Мёбиуса; в результате получится  $\mathbb{R}P^2$ . Другую половину сферы  $\Sigma^2$  приклеим к оставшейся части  $M^2$ . В результате получится ориентируемая поверхность, поскольку она вложена в  $D^3$  (мы снова пользуемся следствием теоремы 17.9). Пусть эта поверхность имеет  $g$  ручек. Тогда  $\chi(M^2) + \chi(\Sigma^2) = \chi(\mathbb{R}P^2) + 2 - 2g$ , а значит,  $\chi(M^2) \equiv \chi(\mathbb{R}P^2) \equiv 1 \pmod{2}$ .  $\square$

## § 18. Степень отображения

### 18.1. Степень гладкого отображения

Пусть  $f: M^n \rightarrow N^n$  — гладкое отображение многообразий одной и той же размерности  $n$ . Мы будем предполагать, что многообразия  $M^n$  и  $N^n$

замкнутые, ориентируемые и их ориентации фиксированы. Из теоремы Сарда следует, что у отображения  $f$  есть регулярное значение  $y \in N^n$ . Пусть  $x \in f^{-1}(y)$ . Отображение  $df(x): T_x M^m \rightarrow T_y N^n$  является изоморфизмом, поэтому можно выбрать в точках  $x$  и  $y$  локальные координаты, ориентации которых согласованы с ориентациями многообразий  $M^m$  и  $N^n$ , и рассмотреть число  $\text{sgn} J_f(x)$  — знак якобиана отображения  $f$  в точке  $x$ . Назовём *степенью* отображения  $f$  относительно точки  $y$  число

$$\text{deg}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn} J_f(x).$$

Эта сумма имеет смысл, потому что множество  $f^{-1}(y)$  конечно. Действительно, предположим, что множество  $f^{-1}(y)$  содержит бесконечно много различных точек. Из компактности многообразия  $M^m$  следует, что существует последовательность попарно различных точек  $x_i \in f^{-1}(y)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , сходящаяся к точке  $x_0$ . Тогда  $f(x_0) = y$  и по теореме об обратной функции у точки  $x_0$  есть окрестность  $U$ , гомеоморфно отображающаяся на окрестность точки  $y$ . В частности,  $(U \setminus \{x_0\}) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ . Приходим к противоречию.

Мы предполагаем, что если множество  $f^{-1}(y)$  пусто, то  $\text{deg}(f, y) = 0$ .

**Пример.** Пусть  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Рассмотрим отображение  $f: S^1 \rightarrow S^1$ , заданное формулой  $f(z) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Если  $n \neq 0$ , то  $\text{deg}(f, \omega) = n$  для любой точки  $\omega \in S^1$ . (Если  $n = 0$ , то нужно исключить нерегулярную точку  $\omega = 1$ .)

Пусть  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  — гладкие отображения. Будем говорить, что отображения  $f$  и  $g$  *гладко гомотопны*, если существует такое гладкое отображение  $F: M^m \times I \rightarrow N^n$ , что  $F(x, 0) = f(x)$  и  $F(x, 1) = g(x)$  для всех  $x \in M^m$ .

**Теорема 18.1.** Пусть  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  — гладко гомотопные отображения замкнутых ориентированных многообразий,  $y \in N^n$  — регулярное значение для обоих отображений. Тогда  $\text{deg}(f, y) = \text{deg}(g, y)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Для точек  $x_1, \dots, x_k$  выберем попарно не пересекающиеся окрестности  $U_1, \dots, U_k$ , диффеоморфно отображающиеся на окрестности  $V_1, \dots, V_k$  точки  $y$ . Рассмотрим множество  $V = \bigcap V_i \setminus f(M \setminus \bigcup U_i)$ . Это множество открыто и содержит точку  $y$ . Прообраз каждой точки  $y' \in V$  состоит ровно из  $k$  точек  $x'_1, \dots, x'_k$ , причём  $\text{sgn} J_f(x'_i) = \text{sgn} J_f(x_i)$ . Поэтому  $\text{deg}(f, y) = \text{deg}(f, y')$ . Построим аналогичную окрестность точки  $y$  для отображения  $g$  и рассмотрим пересечение этих двух окрестностей. В результате получим такое открытое множество  $W \ni y$ , что любая точка  $z \in W$  явля-

ется регулярной точкой отображений  $f$  и  $g$ , причём  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$  и  $\deg(g, y) = \deg(g, z)$ .

Из теоремы Сарда следует, что отображение  $F: M^n \times I \rightarrow N^n$  имеет в открытом множестве  $W$  некоторое регулярное значение  $z$ . Покажем, что  $\deg(f, z) = \deg(g, z)$ . Согласно теореме 15.3 (см. с. 203) множество  $F^{-1}(z)$  является 1-мерным подмногообразием в  $M^n \times I$ . Связные компоненты этого множества являются либо окружностями, либо отрезками; при этом концы отрезков принадлежат либо одному из множеств  $M^n \times \{0\}$  и  $M^n \times \{1\}$ , либо разным множествам (рис. 99). Многообразию  $F^{-1}(z)$  можно ориентировать следующим образом. Сначала ориентируем многообразие  $M^n \times I$ . Затем выберем положительно ориентированные локальные системы координат в точках  $w \in F^{-1}(z)$  и  $z$  так, чтобы отображение  $F$  в этих локальных координатах имело

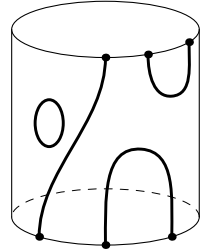


Рис. 99. Многообразию  $F^{-1}(z)$

вид  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ . Требуемая ориентация многообразия  $F^{-1}(z)$  в точке  $w$  задаётся направлением координаты  $x_{n+1}$ .

Нас будут интересовать только те связные компоненты многообразия  $F^{-1}(z)$ , которые являются отрезками. Если концы такого ориентированного отрезка принадлежат обоим множествам  $M^n \times \{0\}$  и  $M^n \times \{1\}$ , то ориентации в концах отрезка имеют один и тот же знак по отношению к ориентации отрезка  $I$ , а если концы принадлежат одному и тому же множеству, то ориентации в концах имеют разные знаки (рис. 100). Знаки якобианов отображений  $f = F|_{M^n \times \{0\}}$  и  $g = F|_{M^n \times \{1\}}$  в точке  $w \in F^{-1}(z)$  полностью определяются знаком ориентации многообразия  $F^{-1}(z)$  в точке  $w$  по отношению к ориентации отрезка  $I$ . Поэтому концам ориентированного отрезка соответствуют либо две точки с одинаковыми знаками якобиана, относящиеся к обоим отображениям  $f$  и  $g$ , либо две точки с разными знаками якобиана, относящиеся к одному и тому же отображению ( $f$  или  $g$ ). Из этого следует, что  $\deg(f, z) = \deg(g, z)$ .  $\square$

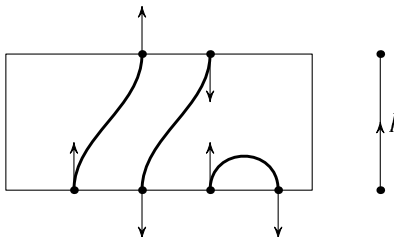


Рис. 100. Ориентация многообразия  $F^{-1}(z)$

Рассмотрим ориентированное многообразие  $W^{n+1} = M^n \times I$ . Ориентация многообразия  $W^{n+1}$  индуцирует противоположные ориентации многообразий  $M^n \times \{0\}$  и  $M^n \times \{1\}$ . Поэтому теорема 18.1 является частным случаем следующего утверждения.

**Теорема 18.2.** Пусть  $W^{n+1}$  — компактное ориентированное многообразие с краем  $\partial W^{n+1}$  (снабжённым индуцированной ориентацией),  $N^n$  — замкнутое ориентированное многообразие,  $f: W^{n+1} \rightarrow N^n$  — гладкое отображение,  $y$  — регулярное значение отображения  $f|_{\partial W^{n+1}}$ . Тогда  $\deg(f|_{\partial W^{n+1}}, y) = 0$ .

Теорема 18.2 доказывается точно так же, как и теорема 18.1. Отметим, что ориентируемость многообразия  $W^{n+1}$  существенна. Рассмотрим, например, проекцию листа Мёбиуса на его серединную окружность. Степень ограничения этого отображения на край отлична от нуля: она равна  $\pm 2$ . Но если рассматривать степень по модулю 2, то теорема 18.2 будет верна и для неориентируемого многообразия  $W^{n+1}$ .

**Теорема 18.3.** Пусть  $f: M^n \rightarrow N^n$  — гладкое отображение замкнутых ориентированных многообразий, причём многообразие  $N^n$  связно. Тогда если  $x, y \in N^n$  — регулярные значения отображения  $f$ , то  $\deg(f, y) = \deg(f, x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $h: N^n \rightarrow N^n$  — диффеоморфизм. Точка  $x \in N^n$  является регулярным значением отображения  $f$  тогда и только тогда, когда точка  $h(x)$  является регулярным значением отображения  $hf$ . Если диффеоморфизм  $h$  сохраняет ориентацию, то непосредственно из определения степени видно, что  $\deg(f, x) = \deg(hf, h(x))$ . Поэтому достаточно доказать, что существует диффеоморфизм  $h: N^n \rightarrow N^n$ , обладающий следующими свойствами:

- а)  $h$  сохраняет ориентацию;
- б)  $h(x) = y$ ;
- в) отображение  $hf$  гладко гомотопно  $f$ .

Действительно, точка  $y$  является регулярным значением гомотопных отображений  $f$  и  $hf$ , поэтому  $\deg(hf, y) = \deg(f, y)$ .

Диффеоморфизмы  $h_0$  и  $h_1$  называют *изотопными*, если они гладко гомотопны, причём все промежуточные отображения  $h_t$  тоже являются диффеоморфизмами. Ясно, что любой диффеоморфизм (ориентируемого многообразия), изотопный тождественному диффеоморфизму, сохраняет ориентацию. Поэтому остаётся доказать следующее утверждение.

**Лемма** (об однородности многообразий). Пусть  $N^n$  — связное многообразие без края. Тогда для любых двух точек  $x, y \in N^n$  существует диффеоморфизм  $h: N^n \rightarrow N^n$ , который изотопен тождественному и переводит  $x$  в  $y$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — такая гладкая функция, что  $\lambda(x) > 0$  при  $\|x\| < 1$  и  $\lambda(x) = 0$  при  $\|x\| \geq 1$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение  $\frac{dx}{dt} = \lambda(x)c$ , где  $c \in \mathbb{R}^n$  — фиксированный вектор. Пусть  $F_t(x)$  — решение этого дифференциального уравнения с начальным условием  $F_0(x) = x$ . Ясно, что  $F_{t+s} = F_t \circ F_s$ , поэтому  $F_t$  — диффеоморфизм, изотопный тождественному. Отображение  $F_t$  оставляет неподвижными все точки вне единичного шара и сдвигает все точки внутри единичного шара в направлении вектора  $c$ . Пусть  $\|x\| < 1$  и  $\|y\| < 1$ . Положим  $c = y - x$ . Тогда для некоторого  $t > 0$  диффеоморфизм  $F_t$  переводит  $x$  в  $y$  и оставляет неподвижными все точки вне единичного шара.

Та же самая конструкция позволяет построить требуемый диффеоморфизм  $h: N^n \rightarrow N^n$  в том случае, когда точки  $x, y \in N^n$  принадлежат одной карте  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\varphi(U)$  — открытый единичный шар.

Будем считать точки  $x, y \in N^n$  эквивалентными, если существует диффеоморфизм, который изотопен тождественному и переводит  $x$  в  $y$ . Предыдущие рассуждения показывают, что классы эквивалентности — открытые множества. Но связное многообразие  $N^n$  нельзя нетривиальным образом представить в виде объединения попарно не пересекающихся открытых множеств. Это означает, что класс эквивалентности ровно один.  $\square$

Теорема 18.3 показывает, что если  $N^n$  — связное многообразие (и оба многообразия  $M^n$  и  $N^n$  замкнутые ориентированные), то можно говорить о степени  $\deg f$  гладкого отображения  $f: M^n \rightarrow N^n$ , поскольку  $\deg(f, x)$  не зависит от выбора регулярного значения  $x$ .

**З а м е ч а н и е.** Для замкнутых, но не обязательно ориентируемых многообразий  $M^n$  и  $N^n$  можно рассмотреть *степень по модулю два* (для неориентируемых многообразий нельзя определить знак якобиана, но  $-1 \equiv 1 \pmod{2}$ ). Для такой степени теоремы 18.1, 18.2 и 18.3 остаются справедливыми.

**З а д а ч а 18.1.** Пусть  $M^2$  — сфера с  $g$  ручками, где  $g \geq 1$ . Докажите, что степень любого гладкого отображения  $f: S^2 \rightarrow M^2$  равна нулю.

**З а д а ч а 18.2.** Докажите, что  $\deg(fg) = (\deg f)(\deg g)$ .

**З а д а ч а 18.3.** Пусть  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ . Докажите, что отображение  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , заданное формулой  $z \mapsto P(z)$ , продолжается до гладкого отображения  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . Вычислите степень этого отображения.

**З а д а ч а 18.4.** Пусть  $R(z)$  — несократимое отношение двух многочленов, степени которых равны  $m$  и  $n$ . Докажите, что отображение, заданное формулой  $z \mapsto R(z)$ , продолжается до гладкого отображения  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . Вычислите степень этого отображения.

**Задача 18.5.** Сопоставим отображению  $f: S^n \rightarrow S^n$  отображение  $\Sigma f: \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n$ , отображая  $S^n \times \{t\}$  в  $S^n \times \{t\}$  посредством  $f$  для всех  $t$ . Докажите, что  $\deg f = \deg \Sigma f$ .

**Задача 18.6.** Пусть  $S^{2n-1}$  — единичная сфера в пространстве  $\mathbb{C}^n$  с координатами  $(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})$ . Вычислите степень отображения  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ , заданного формулой

$$(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n}) \mapsto (r_1 e^{ik_1\varphi_1}, \dots, r_n e^{ik_n\varphi_n}),$$

где  $k_1, \dots, k_n$  — целые числа.

**Задача 18.7.** Отображение  $f: \text{SO}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ ,  $n \geq 2$ , задано формулой  $f(A) = A^2$ . Гомотопно ли это отображение тождественному?

## 18.2. Индекс особой точки векторного поля

Пусть  $M^n$  — многообразие без края,  $v: M^n \rightarrow TM^n$  — гладкое векторное поле на  $M^n$ . Точку  $x \in M^n$  называют *особой точкой* векторного поля  $v$ , если  $v(x) = 0$ . Особую точку  $x$  называют *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек.

Пусть  $U$  — открытое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое векторное поле с изолированной особой точкой  $x_0 \in U$ . При достаточно малом  $r > 0$  шар  $\|x - x_0\| \leq r$  не содержит других особых точек. Рассмотрим отображение сферы  $\|x - x_0\| = r$  в единичную сферу, заданное формулой  $x \mapsto v(x)/\|v(x)\|$ . Степень этого отображения называют *индексом* особой точки  $x_0$ . Ясно, что индекс — целое число, непрерывно зависящее от  $r$  (предполагается, что шар  $\|x - x_0\| \leq r$  не содержит других особых точек); поэтому индекс не зависит от  $r$ .

Индекс изолированной особой точки  $x_0 \in M^n$  векторного поля  $v$  можно определить следующим образом. Рассмотрим гладкую карту  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $x_0 \in U$  и  $\varphi$  — гомеоморфизм на всё пространство  $\mathbb{R}^n$ . Векторное поле  $v$  индуцирует на  $\mathbb{R}^n$  векторное поле  $d\varphi(v)$  с изолированной особой точкой  $\varphi(x_0)$ . Индекс особой точки  $\varphi(x_0)$  векторного поля  $d\varphi(v)$  мы и назовём индексом особой точки  $x_0$  векторного поля  $v$ .

Такое определение требует проверки корректности. А именно, если  $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — другая\*) карта, то нужно убедиться, что индекс особой точки  $\psi(x_0)$  векторного поля  $d\psi(v)$  равен индексу особой точки  $\varphi(x_0)$  векторного поля  $d\varphi(v)$ . Рассмотрим диффеоморфизм  $f = \psi\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и положим  $y = \varphi(x)$ ,  $\omega(y) = d\varphi(v(x))$  и  $y_0 = \varphi(x_0)$ . Требуется доказать следующее утверждение.

\*) Мы предполагаем, что область  $U$  та же самая. Действительно, индекс определяется поведением векторного поля  $v$  в сколь угодно малой окрестности точки  $x_0$ , поэтому от выбора области  $U$  индекс зависеть не может.

*Лемма 1.* Пусть  $y_0$  — изолированная особая точка векторного поля  $\omega$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — диффеоморфизм. Тогда индекс особой точки  $y_0$  векторного поля  $\omega$  равен индексу особой точки  $f(x_0)$  векторного поля  $df(\omega)$ .

При доказательстве леммы 1 мы отдельно рассмотрим диффеоморфизмы, сохраняющие ориентацию, и диффеоморфизмы, изменяющие ориентацию. В первом случае доказательство легко получить с помощью следующего утверждения.

*Лемма 2.* Любой диффеоморфизм  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сохраняющий ориентацию, изотопен тождественному диффеоморфизму.

*Доказательство.* Для любого  $a \in \mathbb{R}^n$  отображение  $x \mapsto a + f(x)$  является диффеоморфизмом. Поэтому при всех  $t$  отображение  $f_t(x) = (t-1)f(0) + f(x)$  является диффеоморфизмом. При этом  $f_1 = f$  и  $f_0(0) = 0$ . Таким образом, можно считать, что  $f(0) = 0$ . Тогда согласно лемме на с. 219 отображение  $f$  можно представить в виде  $f(x) = \sum x_i g_i(x)$ , где  $g_1, \dots, g_n$  — гладкие отображения, причём  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ . Положим

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \dots + x_n g_n(tx).$$

В результате получим изотопию, связывающую отображение  $f$  и линейное преобразование

$$F(x, 0) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(0).$$

Остаётся доказать, что линейное преобразование, сохраняющее ориентацию, изотопно тождественному преобразованию. Матрицу с положительным определителем можно представить в виде  $SU$ , где  $S$  — симметрическая положительно определённая матрица,  $U$  — ортогональная матрица с положительным определителем. Для преобразования  $S$  можно выбрать базис, в котором его матрица имеет диагональный вид с положительными элементами на диагонали. Для преобразования  $U$  можно выбрать базис, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид с элементами 1 и  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  на диагонали. Изотопия преобразований  $S$  и  $U$  в тождественные преобразования строится очевидным образом.  $\square$

Перейдём к доказательству леммы 1. Предположим сначала, что диффеоморфизм  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  сохраняет ориентацию. Пусть  $f_t$  — изотопия, связывающая отображение  $f$  и тождественное отображение. Индекс особой точки  $f_t(y_0)$  векторного поля  $df_t(\omega)$  не зависит от  $t$ , поэтому

индекс при  $t = 1$  равен индексу при  $t = 0$ . Но это как раз и есть требуемое утверждение.

Предположим теперь, что диффеоморфизм  $f$  изменяет ориентацию. Пусть  $s(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$  — симметрия относительно гиперплоскости  $x_1 = 0$ . Тогда диффеоморфизм  $sf$  сохраняет ориентацию. Поэтому достаточно убедиться, что индексы векторных полей  $w$  и  $ds(w)$  в точках  $x_0$  и  $s(x_0)$  совпадают. Если  $w(x) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , то

$$ds(w(s(x))) = (-w_1, w_2, \dots, w_n) = sw(x).$$

Поэтому отображению  $W: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , заданному формулой  $W(x) = w(x)/\|w(x)\|$ , соответствует отображение  $W' = sWs^{-1}$ . При этом  $\deg s = -1$  и  $\deg W' = (\deg s)^2 \deg W = \deg W$ .

**З а д а ч а 18.8** (Пуанкаре). Предположим, что интегральные траектории векторного поля  $v$  на плоскости касаются некоторой окружности  $C$  в  $i$  точках внутренним образом и в  $e$  точках внешним образом, причём внутри  $C$  расположена единственная особая точка. Докажите, что индекс этой особой точки равен  $1 + (i - e)/2$ .

**З а д а ч а 18.9.** Пусть  $f$  — гладкая функция на плоскости. Докажите, что индекс изолированной особой точки векторного поля  $v = \text{grad } f$  может принимать значения  $1, 0, -1, -2, \dots$  и не может принимать других значений.

Предположим, что многообразие  $M^n$  вложено в  $\mathbb{R}^N$  и  $\varphi: U \rightarrow M^n \subset \mathbb{R}^N$  — диффеоморфизм области  $U \subset \mathbb{R}^n$  на область  $\varphi(U) \subset M^n$ . Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ . Тогда векторы  $e_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$  образуют базис пространства  $T_{\varphi(x)}M^n$ , поэтому  $v(\varphi(x)) = \sum v_i(x)e_i(x)$ , где  $v_i$  — гладкие функции. Вектор  $e_j(x)$  задаётся кривой  $\varphi(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n)$ . Отображение  $v$  переводит её в кривую  $\sum v_i(\dots, x_j + t, \dots)e_i(\dots, x_j + t, \dots)$ . Касательный вектор к этой кривой равен

$$\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)e_i(x) + \sum_i v_i(x) \frac{\partial e_i}{\partial x_j}(x).$$

В частности, если  $\varphi(x)$  — особая точка векторного поля  $v$ , то этот касательный вектор лежит в пространстве, порождённом векторами  $e_1(x), \dots, e_n(x)$ . Это означает, что отображение  $dv$  переводит касательное пространство в особой точке векторного поля  $v$  само в себя.

Особую точку  $y$  векторного поля  $v$  называют *невырожденной*, если линейный оператор  $dv: T_y M^n \rightarrow T_y M^n$  невырожден.

**Т е о р е м а 18.4.** *Невырожденная особая точка  $y$  векторного поля  $v$  является изолированной и её индекс равен  $\pm 1$ ; знак индекса совпадает со знаком определителя оператора  $dv: T_y M^n \rightarrow T_y M^n$ .*



**Доказательство.** Выберем локальные координаты с началом в точке  $y$  и будем рассматривать  $v$  как отображение из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ . По условию в начале координат якобиан этого отображения не равен нулю, поэтому по теореме об обратной функции существует окрестность  $U$  начала координат, которая диффеоморфно отображается на свой образ. (Из этого, в частности, следует, что особая точка в  $U$  ровно одна.) отождествив окрестность  $U$  и её образ с  $\mathbb{R}^n$ , получим диффеоморфизм  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда  $\det(dv) > 0$ . Согласно лемме 2 на с. 247 диффеоморфизм  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , сохраняющий ориентацию, изотопен тождественному диффеоморфизму. В таком случае индекс особой точки равен 1. Если же диффеоморфизм  $v$  изменяет ориентацию, то он изотопен симметрии относительно гиперплоскости. Степень отображения  $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  в таком случае равна  $-1$ , поэтому индекс особой точки тоже равен  $-1$ .  $\square$

Одно из важнейших свойств векторных полей на замкнутых многообразиях заключается в том, что сумма индексов особых точек постоянна. Для доказательства этого нам потребуется следующее утверждение, которое используется и при доказательстве многих других теорем.

**Теорема 18.5** (о трубчатой окрестности). *Пусть  $M^n$  — замкнутое многообразие,  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — произвольное вложение. Пусть, далее,  $M_\varepsilon$  — множество точек  $\mathbb{R}^m$ , удалённых от  $f(M^n)$  не более чем на  $\varepsilon$ . Тогда число  $\varepsilon > 0$  можно выбрать так, что каждая точка  $y \in M_\varepsilon$  однозначно представляется в виде  $y = x + \xi$ , где  $x \in M^n$  и  $\xi \perp T_x M^n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $N$  — множество пар  $(x, \xi)$ , где  $x \in M^n$  и  $\xi$  — вектор, ортогональный  $T_x M^n \subset \mathbb{R}^m$ . На множестве  $N$  можно ввести структуру многообразия размерности  $m$  следующим образом. Введём на многообразии  $M^n$  локальные координаты  $(u_1, \dots, u_n)$  и в каждой точке  $x$  этой локальной системы координат выберем ортонормированную систему векторов  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n}$ , ортогональных  $T_x M^n$ ; мы предполагаем, что вектор  $\varepsilon_i$  гладко зависит от  $x$ . Паре  $(x, \xi)$  сопоставим набор координат  $(u_1, \dots, u_n, \xi_1, \dots, \xi_{m-n})$ , где  $\xi = \xi_1 \varepsilon_1 + \dots + \xi_{m-n} \varepsilon_{m-n}$ . В этих координатах отображение, заданное формулой  $(x, \xi) \mapsto x + \xi$ , имеет вид  $(u_1, \dots, u_n, \xi_1, \dots, \xi_{m-n}) \mapsto x(u_1, \dots, u_n) + \xi_1 \varepsilon_1 + \dots + \xi_{m-n} \varepsilon_{m-n} \in \mathbb{R}^m$ , где  $x(u_1, \dots, u_n) \in M^n \subset \mathbb{R}^m$  — точка многообразия, имеющая локальные координаты  $(u_1, \dots, u_n)$ . Матрица Якоби этого отображения равна

$$\left( e_1 + \sum \xi_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_1}, \dots, e_n + \sum \xi_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_n}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n} \right),$$

где  $e_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — векторы, образующие базис пространства

$T_x M^n$ . В этой записи матрицы Якоби подразумевается, что каждый вектор записывается как столбец его координат.

Векторы  $e_1, \dots, e_n$  образуют базис пространства  $T_x M^n$ , а векторы  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n}$  образуют базис ортогонального дополнения этого пространства. Поэтому при  $\xi = 0$  отображение  $(x, \xi) \mapsto x + \xi$  локально взаимно однозначно. Компактность многообразия  $M^n$  позволяет выбрать  $\varepsilon > 0$  так, что ограничение отображения  $F$  на множество  $N_\varepsilon = \{(x, \xi) \in N \mid \|\xi\| \leq \varepsilon\}$  взаимно однозначно. Отображение  $F_\varepsilon: N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^m$  является взаимно однозначным погружением компактного многообразия, поэтому  $F_\varepsilon$  — вложение. В частности,  $M_\varepsilon = F_\varepsilon(N_\varepsilon)$  — компактное многообразие с краем. При этом каждая точка  $y \in M_\varepsilon$  однозначно представляется в виде  $y = x + \xi$ , где  $x \in M^n$  и  $\xi \perp T_x M^n$ .  $\square$

**Теорема 18.6** (Пуанкаре—Хопф). *Сумма индексов особых точек для всех векторных полей с изолированными особыми точками на замкнутом многообразии  $M^n$  одна и та же.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное вложение  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Предположим сначала, что  $v$  — векторное поле на  $M^n$  с невырожденными особыми точками (случай вырожденных особых точек мы обсудим в конце доказательства). Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 18.5. Продолжим векторное поле  $v$  на  $M_\varepsilon$  следующим образом. Представим точку  $y \in M_\varepsilon$  в виде  $y = x + \xi$  и положим  $\bar{v}(y) = v(x) + \xi$ . Ясно, что  $v(x) \perp \xi$  и  $\xi = 0$  тогда и только тогда, когда  $y \in M^n$ . Поэтому векторное поле  $\bar{v}$  имеет те же самые особые точки, что и векторное поле  $v$ . Теорема 18.4 показывает, что индексы особых точек векторного поля  $\bar{v}$  такие же, как и для особых точек векторного поля  $v$  (оператор  $d\bar{v}$  получается из  $dv$  добавлением в качестве прямого слагаемого тождественного отображения).

**Лемма.** *Сумма индексов особых точек векторного поля  $\bar{v}$  равна степени отображения  $\partial M_\varepsilon \rightarrow S^{m-1}$ , заданного формулой  $y = x + \xi \mapsto \xi$ . В частности, эта сумма не зависит от  $\bar{v}$ .*

**Доказательство.** Касательное пространство  $T_y(\partial M_\varepsilon)$ , где  $y = x + \xi$ , представляет собой гиперплоскость, ортогональную вектору  $\xi$ . Вектор  $v(x)$  лежит в этой гиперплоскости, поэтому  $(\bar{v}(y), \xi) = (\xi, \xi) > 0$ . Для  $t \in [0, 1]$  и  $y \in \partial M_\varepsilon$  положим  $\omega_t(y) = t\bar{v}(y) + (1-t)\xi$ . Тогда  $(\omega_t(y), \xi) = t(\bar{v}(y), \xi) + (1-t)(\xi, \xi) > 0$ ; в частности,  $\omega_t(y) \neq 0$ . Следовательно, степень отображения  $\partial M_\varepsilon \rightarrow S^{m-1}$ , заданного формулой  $y \mapsto \omega_t(y)/\|\omega_t(y)\|$ , не зависит от  $t$ . Таким образом, нужно доказать, что степень отображения  $\partial M_\varepsilon \rightarrow S^{m-1}$ , заданного формулой

$$y \mapsto \bar{v}(y)/\|\bar{v}(y)\|, \quad (1)$$

равна сумме индексов особых точек векторного поля  $\bar{v}(y)$ .

Вырежем из многообразия  $M_\varepsilon$  шары  $D_1^m, \dots, D_k^m$  малого радиуса, содержащие особые точки. В результате получим многообразие  $M'_\varepsilon$  с краем  $\partial M_\varepsilon \cup S_1^{m-1} \cup \dots \cup S_k^{m-1}$ . При этом ориентация сферы  $S_i^{m-1}$ , индуцированной ориентацией многообразия  $M'_\varepsilon$ , противоположна ориентации, индуцированной ориентацией шара  $D_i^m$ . Это означает, что если сфера  $S_i^{m-1}$  ориентирована как край многообразия  $M'_\varepsilon$ , то степень отображения  $S_i^{m-1} \rightarrow S_i^{m-1}$ , заданного формулой (1), равна индексу  $i$ -й особой точки, взятому с противоположным знаком.

Формула (1) задаёт гладкое отображение многообразия  $M'_\varepsilon$ , поэтому согласно теореме 18.2 степень ограничения этого отображения на край равна нулю. Следовательно, степень отображения  $\partial M_\varepsilon \rightarrow S^{m-1}$  равна сумме степеней отображений  $S_i^{m-1} \rightarrow S_i^{m-1}$ , взятых с противоположными знаками, т. е. она равна сумме индексов особых точек.  $\square$

Нам осталось рассмотреть случай, когда у векторного поля  $v$  есть вырожденные особые точки. Мы будем изменять  $v$  только в малых окрестностях вырожденных особых точек, поэтому можно считать, что  $v$  — векторное поле на открытом множестве в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $y_0$  — изолированная вырожденная особая точка векторного поля  $v$ ,  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$  — гладкая функция, равная 1 на открытом множестве  $U \ni y_0$  и равная 0 вне открытого множества  $V$ . Будем предполагать, что множество  $V$  достаточно мало, а именно, его замыкание  $\bar{V}$  не содержит особых точек, отличных от  $y_0$ . Пусть, далее,  $v_0$  — регулярное значение отображения  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Положим  $v'(y) = v(y) - \lambda(y)v_0$ . На компактном множестве  $\bar{V} \setminus U$  функция  $\|v(y)\|$  достигает минимума  $\delta > 0$ . Регулярное значение  $v_0$  можно выбрать так, что  $\|v_0\| < \delta$  (действительно, множество  $v(U)$  содержит вектор  $v(y_0) = 0$ ). В таком случае  $v'(y) \neq 0$  для всех  $y \in \bar{V} \setminus U$ . Если  $y \in U$ , то  $\lambda(y) = 1$  и  $v'(y) = v(y) - v_0$ . Поэтому особые точки векторного поля  $v'$ , расположенные в  $U$ , — это прообразы регулярного значения  $v_0$  отображения  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; все эти особые точки невырожденные.

Остаётся заметить, что как индекс особой точки  $y_0$  векторного поля  $v$ , так и сумма индексов особых точек векторного поля  $v'$ , расположенных в  $U$ , равны степени отображения  $\partial U \rightarrow S^{n-1}$ , заданного формулой  $y \mapsto v(y)/\|v(y)\|$ .  $\square$

**Пример.** Сумма индексов любого векторного поля (с изолированными особыми точками) на сфере с  $g$  ручками равна  $2 - 2g$ .

**Доказательство.** На сфере с  $g$  ручками можно построить векторное поле с двумя особыми точками индекса 1 и  $2g$  особыми точками индекса  $-1$  (рис. 101).  $\square$

**Теорема 18.7.** Пусть  $M^n$  и  $N^n$  — замкнутые многообразия,  $p: M^n \rightarrow N^n$  — гладкое  $k$ -листное накрытие. Тогда если сумма ин-

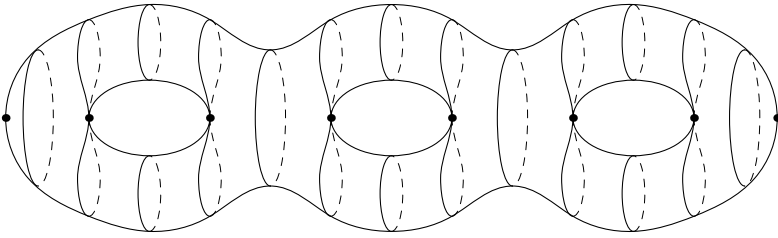


Рис. 101. Траектории векторного поля на сфере с  $g$  ручками

дексов векторного поля на  $N^n$  равна  $\chi$ , то сумма индексов векторного поля на  $M^n$  равна  $k\chi$ .

**Доказательство.** Пусть  $v$  — векторное поле на  $N^n$ . Накрытие  $p$  является локальным диффеоморфизмом, поэтому на  $M^n$  можно построить векторное поле  $\bar{v} = d(p^{-1})(v)$ ; здесь имеется в виду, что вектор  $\bar{v}(y)$  равен  $d(p^{-1})(v(p(y)))$ , где  $p^{-1}$  — отображение, обратное проекции окрестности точки  $y$  на окрестность точки  $p(y)$ .

Каждой особой точке векторного поля  $v$  соответствуют  $k$  особых точек векторного поля  $\bar{v}$  с тем же самым индексом. □

**Следствие.** Сумма индексов векторного поля на неориентируемой поверхности  $nP^2$  равна  $2 - n$ .

**Доказательство.** Ориентирующей накрывающей поверхности  $nP^2$  является поверхность  $(n - 1)T^2$ . □

**Замечание.** Следующая конструкция даёт построение векторного поля индекса  $\chi(M^2)$  непосредственно по триангуляции двумерной поверхности  $M^2$ .

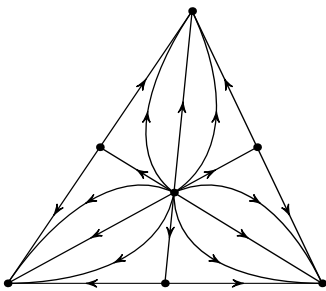


Рис. 102. Построение векторного поля по триангуляции

Возьмём барицентрическое подразделение данной триангуляции и на 1-мерном остове барицентрического подразделения построим векторное поле так, чтобы оно выходило из вершин, соответствующих центрам граней, и входило во все вершины исходной триангуляции. Это векторное поле можно продолжить до векторного поля на  $M^2$  (рис. 102). Особыми точками этого векторного поля являются только вершины барицентрического подразделения. Особые точки, соответствующие вершинам и граням, имеют индекс 1, а особые точки, соответствующие рёбрам, имеют индекс  $-1$ . Эта конструкция обобщается и на  $n$ -мерные многообразия. При этом на 1-мерном остове барицентрического

Особыми точками этого векторного поля являются только вершины барицентрического подразделения. Особые точки, соответствующие вершинам и граням, имеют индекс 1, а особые точки, соответствующие рёбрам, имеют индекс  $-1$ . Эта конструкция обобщается и на  $n$ -мерные многообразия. При этом на 1-мерном остове барицентрического

подразделения векторное поле строится так, чтобы оно было направлено из центров  $k$ -мерных граней в центры  $l$ -мерных граней при  $k > l$ .

**Теорема 18.8.** *Сумма индексов векторного поля на замкнутом многообразии нечётной размерности равна нулю.*

**Доказательство.** Согласно теореме Пуанкаре—Хопфа суммы индексов особых точек векторных полей  $v$  и  $-v$  равны. Поэтому достаточно доказать, что если степень отображения  $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  равна  $d$ , то степень отображения  $-f$  равна  $(-1)^n d$ . Иными словами, степень отображения  $x \mapsto -x$  равна  $(-1)^n$ . Но это отображение является композицией  $n$  отображений вида

$$(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots) \mapsto (\dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots),$$

каждое из которых имеет степень  $-1$ . □

### 18.3. Теорема Хопфа

Мы уже доказывали, что если отображения  $f, g: M^n \rightarrow N^n$  гладко гомотопны, то  $\deg f = \deg g$  (это следует из теорем 18.1 и 18.3). Хопф [74] доказал, что если  $N^n = S^n$ , то верно и обратное.

**Теорема 18.9 (Хопф).** *Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентированное связное многообразие.*

а) *Если степени гладких отображений  $f, g: M^n \rightarrow S^n$  равны, то эти отображения гомотопны.*

б) *Для любого целого числа  $t$  существует гладкое отображение  $f: M^n \rightarrow S^n$  степени  $t$ .*

**Доказательство.** а) Многие из приводимых ниже рассуждений годятся только в случае, когда  $n \geq 2$ ; при  $n = 1$  рассуждения требуют некоторых изменений, хотя не очень существенных. Но ситуация с отображениями  $S^1 \rightarrow S^1$  достаточно проста, поэтому мы будем предполагать, что  $n \geq 2$ .

Сначала мы рассмотрим наиболее простой случай, когда для некоторой регулярной точки  $y_0 \in S^n$  множества  $f^{-1}(y_0)$  и  $g^{-1}(y_0)$  состоят из  $|\deg f| = |\deg g|$  элементов.

Отображение  $g$  гомотопно такому отображению  $g_1$ , что  $f^{-1}(y_0) = g_1^{-1}(y_0)$ ; при этом знаки якобианов отображений  $f$  и  $g_1$  во всех образах точки  $y_0$  совпадают. Действительно, достаточно доказать, что если  $\{a_1, \dots, a_k\}$  и  $\{b_1, \dots, b_k\}$  — наборы попарно различных точек связного многообразия  $M^n$  без края, то существует диффеоморфизм этого многообразия на себя, который изотопен тождественному и переводит  $b_i$  в  $a_i$ . Диффеоморфизм, переводящий  $b_1$  в  $a_1$ , существует согласно лемме об однородности многообразий (лемма на с. 244). Затем из  $M^n$  можно

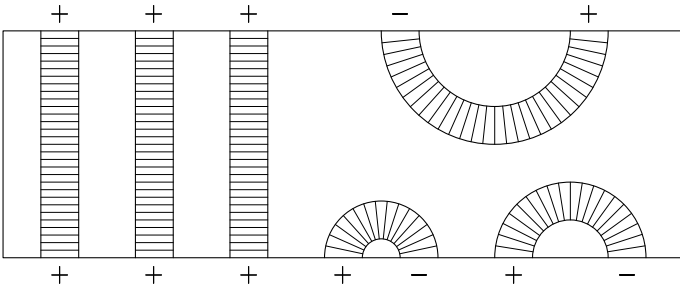


Рис. 103. Уничтожение прообразов с разными знаками якобиана

выколоть точку  $a_1$  и снова применить к полученному связному (при  $n \geq 2$ ) многообразию лемму об однородности многообразий и т. д.

В дальнейшем будем считать, что  $f^{-1}(y_0) = g^{-1}(y_0) = \{a_1, \dots, a_k\}$  и во всех точках  $a_1, \dots, a_k$  знак якобиана отображений  $f$  и  $g$  один и тот же. Выберем попарно не пересекающиеся окрестности  $U_i \ni a_i$ .

Множество  $f\left(M^n \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i\right)$  не содержит точку  $y_0$ , поэтому отображение  $f$  гомотопно отображению  $f_1$ , для которого выполняются следующие свойства:

- $f_1\left(M^n \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i\right) = y_1$ , где  $y_1$  – точка сферы  $S^n$ , диаметрально противоположная точке  $y_0$ ;
- отображение  $f_1$  совпадает с  $f$  на некоторой окрестности  $V_i \subset U_i$  каждой точки  $a_i$ .

Если окрестность  $V_i$  достаточно мала, то ограничение на неё отображения  $f$  является диффеоморфизмом. Поэтому после дополнительной гомотопии из отображения  $f_1$  можно построить отображение  $f_2$ , которое диффеоморфно отображению  $V_i \approx \mathbb{R}^n$  на  $S^n \setminus \{y_1\} \approx \mathbb{R}^n$ . Из леммы 2 на с. 247 следует, что два диффеоморфизма  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которые либо оба сохраняют, либо оба изменяют ориентацию, изотопны. Поэтому отображения  $f$  и  $g$  гомотопны.

Чтобы завершить доказательство, остаётся рассмотреть случай, когда в прообразе точки  $y_0$  есть точки с разными знаками якобианов. Гомотопия в этом случае строится следующим образом. В  $M^n \times I$  есть трубочки  $U_i \times I$ , на которых отображение в  $S^n$  задано предыдущей конструкцией. Аналогичными трубочками можно соединить пары прообразов точки  $y_0$  (одного и того же отображения  $f$  или  $g$ ) с разными знаками якобианов (рис. 103). Несложно добиться того, чтобы все трубочки попарно не пересекались (при  $n \geq 2$  это очевидно). На новых трубочках отображение

в  $S^n$  строится той же самой конструкцией, что и на старых. Дополнение ко всем трубочкам отображается в одну точку  $y_1$ .

б) Выберем попарно не пересекающиеся открытые множества  $U_1, \dots, U_{|m|} \subset M^n$  и отображим их диффеоморфно на  $S^n \setminus \{y_1\}$ , где  $y_1$  — фиксированная точка. Эти диффеоморфизмы выберем так, чтобы знаки их якобианов совпадали со знаком числа  $m$ . Оставшуюся часть многообразия  $M^n$  отображим в точку  $y_1$  (если  $m = 0$ , то всё многообразие  $M^n$  отображается в точку  $y_1$ ).  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Для симплициальных отображений ориентированных псевдомногообразий тоже можно определить степень и доказать теорему, аналогичную теореме Хопфа для гладких отображений многообразий. Доказательство такой теоремы приведено в [107].

**З а д а ч а 18.10.** Докажите, что если  $M^n$  — замкнутое неориентируемое связное многообразие, то гладкие отображения  $f, g: M^n \rightarrow S^n$  гомотопны тогда и только тогда, когда их степени по модулю 2 равны.

## 18.4. Аппроксимации непрерывных отображений

Непрерывное отображение замкнутых многообразий  $M^m \rightarrow N^n$  можно с любой точностью приблизить гладким отображением. Здесь мы обсудим одно из возможных доказательств этого утверждения, которое использует вложение  $N^n$  в евклидово пространство. Другой подход обсуждается в [23].

Начнём с аппроксимации отображений  $M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Отображение в  $\mathbb{R}^n$  можно аппроксимировать по координатно, поэтому достаточно рассмотреть случай  $n = 1$ .

**Т е о р е м а 18.10.** Пусть  $M^m$  — замкнутое многообразие,  $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся гладкая функция  $g: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$  при всех  $x \in M^m$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для каждой точки  $x \in M^m$  можно выбрать открытую окрестность  $U_x$  так, что  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  для всех  $y \in U_x$ . Выберем множества  $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$  так, чтобы они покрывали  $M^m$ , и рассмотрим гладкое разбиение единицы  $\{\lambda_i\}$ , подчинённое этому покрытию. Положим  $g(x) = f(x_1)\lambda_1(x) + \dots + f(x_k)\lambda_k(x)$ . Из тождества  $\sum \lambda_i(x) = 1$  следует, что

$$f(x) - g(x) = f(x) - \sum f(x_i)\lambda_i(x) = \sum \lambda_i(x)(f(x) - f(x_i)).$$

Если  $x \notin U_{x_i}$ , то  $\lambda_i(x) = 0$ . Если же  $x \in U_{x_i}$ , то  $|f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon$ . В обоих случаях  $|\lambda_i(x)(f(x) - f(x_i))| \leq \varepsilon\lambda_i(x)$ , поэтому  $|f(x) - g(x)| \leq \sum \varepsilon\lambda_i(x) = \varepsilon$ .  $\square$

С помощью теоремы о трубчатой окрестности (теорема 18.5 на с. 249) гладкая аппроксимация отображения  $f: M^m \rightarrow N^n$  строится следующим образом. Пусть  $g_1: M^m \rightarrow N^n \subset \mathbb{R}^N$  — гладкое отображение, для которого  $\|g_1(x) - f(x)\| < \varepsilon$ , причём для  $\varepsilon$  выполняется теорема о трубчатой окрестности. Тогда  $g_1(x) = g(x) + \xi(x)$ , где  $g(x) \in N^n$ ,  $\xi(x) \perp T_{g(x)}N^n$  и  $\|\xi(x)\| \leq \varepsilon$ . Здесь  $g: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение и  $\|g(x) - f(x)\| \leq \|g_1(x) - f(x)\| + \|\xi(x)\| < 2\varepsilon$ .

**Теорема 18.11.** Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — замкнутые многообразия. Тогда: а) любое непрерывное отображение  $f: M^m \rightarrow N^n$  гомотопнo гладкому отображению  $g: M^m \rightarrow N^n$ ; б) любая пара гладких гомотопных отображений  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  гладко гомотопна.

**Доказательство.** а) Рассмотрим вложение  $N^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  и выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы выполнялась теорема о трубчатой окрестности. Пусть  $g: M^m \rightarrow N^n \subset \mathbb{R}^N$  — гладкое отображение, для которого  $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ . Тогда отрезок с концами  $f(x)$  и  $g(x)$  целиком лежит в трубчатой окрестности. Выберем на этом отрезке точку, делящую его в отношении  $t : (1 - t)$ , и спроецируем эту точку ортогонально на  $N^n$ .

б) Из двух экземпляров отрезка  $[0, 1]$  можно склеить окружность  $S^1$ . Это позволяет рассмотреть гомотопию отображений  $f$  и  $g$  как отображение  $M^m \times S^1 \rightarrow N^n$ . Аппроксимируем это непрерывное отображение гладким. В результате получим гладкую гомотопию, связывающую отображения  $f_1$  и  $g_1$ , где  $f_1$  и  $g_1$  — аппроксимации отображений  $f$  и  $g$ . Остаётся проверить, что отображения  $f$  и  $f_1$  (и отображения  $g$  и  $g_1$ ) гладко гомотопны. Для этого можно воспользоваться той же самой конструкцией, что и в а).  $\square$

При работе с гомотопическими группами нужно рассматривать отображения, которые переводят отмеченную точку в отмеченную точку. Перейти к таким отображениям от произвольных гладких аппроксимаций можно с помощью леммы об однородности многообразий (см. с. 244). Из доказательства этой леммы видно, что если точка  $y$  лежит в малой окрестности точки  $y_0$ , то диффеоморфизм  $N^n \rightarrow N^n$ , переводящий  $y$  в  $y_0$ , можно построить так, чтобы он гладко зависел от  $y$ . Поэтому от гладкой аппроксимации гомотопии  $H: M^m \times I \rightarrow N^n$ , для которой  $H(x_0, t) = y_0$ , можно перейти к гладкой гомотопии  $H'$ , для которой  $H'(x_0, t) = y_0$ .

Теперь из теоремы Хопфа можно вывести, что  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  при  $n \geq 2$ . Нужно доказать, что если отображения  $f, g: S^n \rightarrow S^n$ , для которых  $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ , гомотопны, то они гомотопны и в классе отображений, переводящих  $x_0$  в  $y_0$ . Требуемая гомотопия строится следующим образом. Предыдущие рассуждения показывают, что отображения  $f$  и  $g$  и связывающую их гомотопию  $H$  можно считать гладкими. Тогда путь  $H(x_0, t)$



содержится в некотором открытом стягиваемом множестве  $U \subset S^n$  (при  $n = 1$  это неверно). Пусть  $F(x, t)$  — гомотопия в классе отображений, переводящих  $y_0$  в  $y_0$ , связывающая тождественное отображение  $S^n \rightarrow S^n$  с отображением, переводящим  $U$  в  $y_0$ . Гомотопии  $\varphi_t(x) = F(f(x), t)$  и  $\psi_t(x) = F(g(x), t)$  связывают отображения  $f$  и  $g$  с отображениями  $f'$  и  $g'$ , а гомотопия  $H'(x, t) = F(H(x, t), 1)$  связывает отображения  $f'$  и  $g'$ .

**Задача 18.11.** Докажите, что если сумма индексов векторного поля на замкнутом многообразии  $M^n$  равна 0, то на  $M^n$  есть векторное поле без особых точек.

Пусть  $PM^n$  — пространство ненулевых касательных векторов к многообразию  $M^n$ , профакторизованное по отношению эквивалентности  $v \sim \lambda v$ , где  $\lambda$  — ненулевое число;  $p: PM^n \rightarrow M^n$  — естественная проекция. На  $PM^n$  есть естественная структура многообразия. Гладкое сечение проекции  $p$  называют *полем направлений* на многообразии  $M^n$ . Иными словами, если на  $M^n$  задано поле направлений, то в каждой точке  $x \in M^n$  задано 1-мерное подпространство в  $T_x M^n$ , и эти подпространства гладко зависят от  $x$ .

**Задача 18.12.** Докажите, что на замкнутом многообразии  $M^n$  поле направлений существует тогда и только тогда, когда на  $M^n$  существует векторное поле без особых точек.

## 18.5. Конструкция Понтрягина

Из теоремы Хопфа можно извлечь интерпретацию элементов группы  $\pi_n(S^n)$  на языке оснащённых многообразий. Конструкция Понтрягина обобщает эту интерпретацию на группы  $\pi_{n+k}(S^n)$ , где  $k \geq 0$  и  $n \geq 2$ .

Гладкое замкнутое подмногообразие  $M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$  называют *оснащённым*, если в каждой точке  $x \in M^k$  задан ортонормированный набор векторов  $v_1(x), \dots, v_n(x)$ , ортогональных  $T_x M^k$ ; при этом каждый вектор  $v_i(x)$  гладко зависит от  $x$ . Многообразию  $M^k$  не обязательно связно; оно может состоять из нескольких связных компонент одной и той же размерности  $k$ . Пустое множество мы считаем оснащённым многообразием любой размерности  $k$ .

Два оснащённых многообразия  $M_0^k$  и  $M_1^k$  называют *оснащённо кобордантными*, если в  $\mathbb{R}^{n+k+1}$  существует подмногообразие  $W^{k+1}$ , обладающее следующими свойствами:

- $W^{k+1}$  расположено в полосе  $0 \leq x_{n+k+1} \leq 1$ ;
- край  $W^{k+1}$  состоит из  $M_0^k$  и  $M_1^k$ , причём эти многообразия расположены, соответственно, на гиперплоскостях  $x_{n+k+1} = 0$  и  $x_{n+k+1} = 1$ ;
- $W^{k+1}$  подходит к этим гиперплоскостям ортогонально;

г) на  $W^{k+1}$  задано гладкое семейство ортонормированных наборов векторов, продолжающее те семейства, которые заданы на  $M_0^k$  и  $M_1^k$ .

Множество классов оснащённо кобордантных многообразий размерности  $k$  в  $\mathbb{R}^{n+k}$  обозначают  $\Omega_{\text{fr}}^k(n+k)$ . На множестве  $\Omega_{\text{fr}}^k(n+k)$  можно задать структуру абелевой группы. Чтобы сложить два элемента этой группы, нужно выбрать их представителей, расположенных в разных полупространствах  $\mathbb{R}_+^{n+k}$  и  $\mathbb{R}_-^{n+k}$ , и рассмотреть их объединение. Нулевым элементом служит класс, содержащий пустое множество. Чтобы получить обратный элемент, нужно изменить ориентацию ортонормированного базиса (например, заменить вектор  $v_1(x)$  на  $-v_1(x)$ ). Доказательство того, что при этом действительно получается обратный элемент, проводится так же, как уничтожаются прообразы с разными знаками якобиана при доказательстве теоремы Хопфа.

Оснащённое 0-мерное подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$  представляет собой набор  $m_+$  точек, в которых заданы положительно ориентированные базисы, и  $m_-$  точек, в которых заданы отрицательно ориентированные базисы. Класс этого оснащённого многообразия в  $\Omega_{\text{fr}}^0(n)$  задаётся числом  $m_+ - m_-$ . Теорема Хопфа устанавливает изоморфизм  $\Omega_{\text{fr}}^0(n) \cong \pi_n(S^n)$  при  $n \geq 2$ . (Точнее говоря, изоморфизм есть и при  $n = 1$ , но для  $n = 1$  не годятся те рассуждения, которые используются при  $n \geq 2$ .)

**Теорема 18.12** (Понтрягин). *При  $k \geq 0$  и  $n \geq 2$  группа  $\Omega_{\text{fr}}^k(n+k)$  изоморфна  $\pi_{n+k}(S^n)$ .*

**Доказательство.** Оснащённому многообразию  $M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$  можно сопоставить отображение  $f: S^{n+k} \rightarrow S^n$  следующим образом. Согласно теореме о трубчатой окрестности (теорема 18.5 на с. 249) можно выбрать  $\varepsilon > 0$  так, что отображение  $M^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ , заданное формулой  $(x, a) \mapsto x + \sum a_i v_i(x)$ , при  $\|a\| < \varepsilon$  является гомеоморфизмом  $M^k \times D_\varepsilon^n$  на  $\varepsilon$ -окрестность  $M^k$  в  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Пусть  $x_0 \in S^{n+k}$  и  $y_0 \in S^n$  — отмеченные точки. отождествим  $S^{n+k} \setminus \{x_0\}$  с  $\mathbb{R}^{n+k}$ , а  $S^n \setminus \{y_0\}$  с  $D_\varepsilon^n$ . Отобразим все точки  $\mathbb{R}^{n+k}$ , не принадлежащие  $\varepsilon$ -окрестности  $M^k$ , в  $y_0$ , а  $\varepsilon$ -окрестность  $M^k$  отождествим с  $M^k \times D_\varepsilon^n$  и спроецируем на  $D_\varepsilon^n = S^n \setminus \{y_0\}$ .

Если  $M_0^k$  и  $M_1^k$  — оснащённо кобордантные многообразия, то аналогичная конструкция позволяет по многообразию  $W^{k+1}$  построить отображение  $S^{n+k} \times I \rightarrow S^n$ , которое представляет собой гомотопию, связывающую отображения  $f_0, f_1: S^{n+k} \rightarrow S^n$ .

Сопоставим теперь отображению  $f: S^{n+k} \rightarrow S^n$  оснащённое подмногообразие  $M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ . Прежде всего заменим непрерывное отображение  $f$  на гомотопное ему гладкое отображение  $g$ . Выберем регулярное значение  $y_1 \in S^k$ , отличное от отмеченной точки  $y_0 = g(x_0)$ . Положим  $M^k = g^{-1}(y_1)$ . Оснащение  $M^k$  зададим следующим образом. Фиксируем в точке  $y_1 \in \mathbb{R}^n = S^n \setminus \{y_0\}$  ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  и выбо-

рем в качестве  $v_i(x)$  тот нормальный к  $M^k$  в точке  $x$  вектор, для которого  $dg(v_i(x)) = e_i$ . Точно так же, как это делалось для степени, можно доказать, что гладко гомотопные отображения определяют оснащённое кобордантные многообразия и класс эквивалентности многообразия  $M^k$  не зависит от выбора регулярной точки  $y_1$ .

Построенные отображения групп  $\Omega_{\text{fr}}^k(n+k)$  и  $\pi_{n+k}(S^n)$  взаимно обратны и сохраняют групповые операции.  $\square$

З а д а ч а 18.13. Докажите, что расслоение Хопфа  $p: S^3 \rightarrow S^2$  является образующей группы  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , и опишите соответствующее оснащённое многообразие в  $\Omega_{\text{fr}}^1(3)$ .

## 18.6. Гомотопически эквивалентные линзовые пространства

Пусть  $p > 1$  — натуральное число, а числа  $q_1, \dots, q_n$ , где  $n \geq 2$ , взаимно просты с  $p$ . Зададим на единичной сфере  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  действие группы  $\mathbb{Z}_p$  следующим образом. Пусть  $\sigma$  — образующая группы  $\mathbb{Z}_p$ . Тогда

$$\sigma(z_1, \dots, z_n) = (\exp(2\pi i q_1/p)z_1, \dots, \exp(2\pi i q_n/p)z_n).$$

Это действие не имеет неподвижных точек, поэтому фактор по этому действию является многообразием. Это многообразие обозначают  $L_p(q_1, \dots, q_n)$  и называют *линзовым пространством*.

Отображение  $\pi: S^{2n-1} \rightarrow L_p(q_1, \dots, q_n)$  является  $p$ -листным накрытием с группой автоморфизмов  $\mathbb{Z}_p$ . Поэтому  $\pi_1(L_p(q_1, \dots, q_n)) = \mathbb{Z}_p$ .

Если число  $k$  взаимно просто с  $p$ , то  $L_p(q_1, \dots, q_n) = L_p(kq_1, \dots, kq_n)$ , поскольку в группе  $\mathbb{Z}_p$  элемент  $k\sigma$ , где  $\sigma$  — образующая, тоже является образующей. Для  $n = 2$  (т. е. для трёхмерных многообразий) получаем, что  $L_p(q_1, q_2) = L_p(1, q_1^{-1}q_2)$ , т. е. любое трёхмерное линзовое пространство имеет вид  $L_p(1, q)$ . В топологии трёхмерных многообразий вместо обозначения  $L_p(1, q)$  обычно используется обозначение  $L(p, q)$ .

**Т е о р е м а 18.13.** Пусть линзовые пространства  $L_p(q_1, \dots, q_n)$  и  $L_p(q'_1, \dots, q'_n)$  таковы, что  $q_1 \dots q_n \equiv \pm k^n q'_1 \dots q'_n \pmod{p}$  для некоторого целого числа  $k$ . Тогда эти линзовые пространства гомотопически эквивалентны.

**Доказательство.** Ясно, что число  $k$  взаимно просто с  $p$ . Поэтому  $L_p(q'_1, \dots, q'_n) = L_p(kq'_1, \dots, kq'_n) = L_p(q''_1, \dots, q''_n)$ , где  $q''_1 \dots q''_n = k^n q'_1 \dots q'_n$ . Таким образом, нужно доказать, что если  $q_1 \dots q_n \equiv \pm k^n q'_1 \dots q'_n \pmod{p}$ , то  $L_p(q_1, \dots, q_n) \sim L_p(q''_1, \dots, q''_n)$ . Для упрощения обозначений будем считать, что  $q''_j = q'_j$ .

Выберем числа  $k_j$  так, что  $k_j q_j \equiv q'_j \pmod{p}$ , и рассмотрим отображение  $\tilde{f}: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ , заданное формулой

$$\tilde{f}(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n}) = (r_1 e^{ik_1\varphi_1}, \dots, r_n e^{ik_n\varphi_n}).$$

Согласно задаче 18.6 степень отображения  $\tilde{f}$  равна  $k_1 \dots k_n$ . Условие  $k_j q_j \equiv q'_j \pmod{p}$  означает, что отображение  $\tilde{f}$  индуцирует отображение факторпространств  $f: L \rightarrow L'$ , где  $L = L_p(q_1, \dots, q_n)$  и  $L' = L_p(q'_1, \dots, q'_n)$ . Действительно, отображение  $\tilde{f}$  переводит точку с координатами  $r_j e^{i\varphi_j} e^{(2\pi i q_j p)}$  в точку с координатами  $r_j e^{ik_j \varphi_j} e^{(2\pi i q'_j p)}$ , поскольку  $k_j q_j \equiv q'_j \pmod{p}$ . Таким образом, точки, эквивалентные относительно отображения  $\sigma$ , переходят в точки, эквивалентные относительно отображения  $\sigma'$ .

Степень отображения  $f$  равна степени отображения  $\tilde{f}$ , т. е.  $\deg f = k_1 \dots k_n$ .

Построим композицию отображений

$$L \rightarrow L \vee S^{2n-1} \xrightarrow{\text{id} \vee (\deg=d)} L \vee S^{2n-1} \xrightarrow{f \vee \pi'} L'$$

следующим образом. Чтобы построить первое отображение, выберем в  $L$  малый шар и стянем его границу в точку. Второе отображение тождественно на  $L$ , а на  $S^{2n-1}$  оно является отображением  $S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  степени  $d$ . Третье отображение устроено на  $L$  как  $f$ , а на  $S^{2n-1}$  оно устроено как каноническая проекция  $\pi': S^{2n-1} \rightarrow L'$ . Пусть  $g: L \rightarrow L'$  — композиция этих отображений. Непосредственно из определения степени отображения видно, что  $\deg g = \deg f + dp = k_1 \dots k_n + dp$ . Но  $k_1 \dots k_n \equiv q'_1 q_1^{-1} \dots q'_n q_n^{-1} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ , поэтому  $d$  можно выбрать так, что  $\deg g = \pm 1$ . В дальнейшем будем считать, что  $d$  выбрано именно так.

Аналогично можно построить отображение  $g': L' \rightarrow L$ . Покажем, что эти отображения являются требуемыми гомотопическими эквивалентностями. Согласно теореме Уайтхеда (теорема 14.9 на с. 195) для этого достаточно проверить, что гомоморфизм  $g_*: \pi_n(L) \rightarrow \pi_n(L')$  является изоморфизмом при всех  $n \geq 1$ . Сфера  $S^{2n-1}$  односвязна, поэтому при  $n = 1$  достаточно проверить, что отображение  $f_*: \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(L')$  является изоморфизмом. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^{2n-1} & \xrightarrow{\tilde{f}'} & S^{2n-1} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ L & \xrightarrow{f} & L' & \xrightarrow{f} & L. \end{array}$$

Непосредственно из определений видно, что отображение  $\tilde{f}'\tilde{f}$  тождественно, поэтому отображение  $f'f$  тоже тождественно. Из этого следует, что  $f_*: \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(L')$  — изоморфизм.

Пусть теперь  $n \geq 2$ . Используя универсальность накрытия  $\pi: S^{2n-1} \rightarrow L$ , построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & S^{2n-1} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ L & \xrightarrow{f} & L'. \end{array}$$

Отображение  $\tilde{g}$ , как и отображение  $g$ , имеет степень  $\pm 1$ . Поэтому из теоремы Хопфа следует, что отображение  $\tilde{g}$  гомотопно либо тождественному отображению, либо симметрии относительно экваториальной гиперплоскости. Значит, отображение  $\tilde{g}_*: \pi_n(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_n(S^{2n-1})$  является изоморфизмом для всех  $n$ . При  $n \geq 2$  отображения  $\pi_*: \pi_n(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_n(L)$  и  $\pi'_*: \pi_n(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_n(L')$  являются изоморфизмами, поэтому отображение  $g_*: \pi_n(L) \rightarrow \pi_n(L')$  тоже изоморфизм.  $\square$

Для трёхмерных линзовых пространств  $L(p, q)$  формулировка теоремы 18.13 выглядит следующим образом.

**Т е о р е м а 18.14.** *Линзовые пространства  $L(p, q)$  и  $L(p, q')$ , для которых  $q \equiv \pm k^2 q' \pmod{p}$ , гомотопически эквивалентны.*

Действительно,  $L(p, q) = L_p(1, q)$ , т. е.  $q_1 = 1$  и  $q_2 = q$ . Поэтому равенства  $q \equiv \pm k^2 q'$  и  $q_1 q_2 = \pm k^2 q'_1 q'_2$  эквивалентны.

## § 19. Теория Морса

### 19.1. Функции Морса

Пусть  $M^n$  — многообразие без края и  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Точка  $x \in M^n$  является критической тогда и только тогда, когда  $\text{rank } f(x) = 0$ , т. е. отображение  $df: T_x M^n \rightarrow \mathbb{R}$  нулевое. В локальных координатах  $(x_1, \dots, x_n)$  это означает, что  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$  при  $i = 1, \dots, n$ .

Критическую точку  $x$  функции  $f$  называют *невыврожденной*, если матрица Гессе, или *гессиан*,  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$  невырожденная. Это определение не зависит от выбора локальных координат, поскольку при переходе к другим локальным координатам  $(y_1, \dots, y_n)$  гессиан преобразуется

следующим образом:

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} (x) \right) = J^T \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right) J,$$

где  $J = \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)$ .

Гладкую функцию  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  называют *функцией Морса*, если все её критические точки невырожденные.

Напомним, что индекс квадратичной формы  $\sum a_{ij} x_i x_j$ , заданной симметрической матрицей  $(a_{ij})$ , определяется следующим образом. Заменой переменных (над полем  $\mathbb{R}$ ) квадратичную форму можно привести к виду  $-y_1^2 - \dots - y_q^2 + y_{q+1}^2 + \dots + y_n^2$ . В таком случае *индексом* квадратичной формы называют число  $q$ . Индекс квадратичной формы можно также определить как максимальную размерность подпространства, на котором форма отрицательно определена.

*Индексом* невырожденной критической точки  $x$  функции  $f$  называют индекс гессиана функции  $f$  в точке  $x$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Пусть  $f(x) = -x_1^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Докажите, что точка  $x_0 = (0, \dots, 0)$  является критической, причём её индекс равен  $q$ .

**Т е о р е м а 19.1** (лемма Морса). *В окрестности невырожденной критической точки индекса  $q$  существуют такие локальные координаты с началом в критической точке, что в этих координатах функция  $f$  имеет вид  $f(x_1, \dots, x_n) = f(0) - x_1^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Можно считать, что  $f(0) = 0$  и локальные координаты представляют собой выпуклую окрестность в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда согласно лемме на с. 219 существуют такие гладкие функции  $g_1, \dots, g_n$ , что  $f(x) = \sum x_i g_i(x)$  и  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ . По условию точка 0 критическая, т.е.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ . Ещё раз применив ту же самую лемму, получим

$f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}(x)$ , где  $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ , т.е.  $(h_{ij}(0))$  — гессиан функции  $f$  в критической точке. После замены  $h_{ij}(x)$  на  $\frac{1}{2}(h_{ij}(x) + h_{ji}(x))$  можно считать, что матрица  $h_{ij}(x)$  симметрическая, а после линейной замены координат можно считать, что  $h_{11}(0) \neq 0$ . Уменьшив при необходимости координатную окрестность, можно считать, что  $h_{11}(x)/h_{11}(0) > 0$  для всех  $x$  из координатной окрестности. Положим

$$y_1 = x_1 + \frac{h_{12}(x)}{h_{11}(x)} x_2 + \dots + \frac{h_{1n}(x)}{h_{11}(x)} x_n, \quad y_i = x_i \text{ при } i \geq 2.$$

Согласно теореме об обратной функции отображение  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$  является диффеоморфизмом (возможно, в ещё меньшей координатной окрестности). Легко проверить, что

$$\sum x_i x_j h_{ij}(x) = h_{11}(x) y_1^2 + \sum_{i,j \geq 2} y_i y_j \tilde{h}_{ij}(x).$$

Сделаем замену  $z_1 = y_1 \sqrt{|h_{11}(x)|}$ ,  $z_i = y_i$  при  $i \geq 2$ , а затем аналогичные преобразования применим к квадратичной форме от  $n-1$  переменной и т. д.  $\square$

*С л е д с т в и е.* *Невырожденная критическая точка является изолированной критической точкой.*

Докажем теперь, что на любом многообразии существуют функции Морса. Мы приведём два разных доказательства, каждое из которых имеет свои преимущества. Первое доказательство показывает, что любую гладкую функцию малым шевелением можно превратить в функцию Морса; под малым шевелением здесь подразумевается малое шевеление первой и второй производной. Второе доказательство конструктивно. Кроме того, оно показывает, что существуют функции Морса  $f$ , для которых все множества  $\{x \in M^n \mid f(x) \leq c\}$  компактны; для некомпактных многообразий это свойство бывает полезно.

**Т е о р е м а 19.2.** *На любом многообразии  $M^n$  существует функция Морса.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о 1.** Пусть  $g: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная гладкая функция (например, постоянная). Функцию Морса  $f$  мы будем строить, последовательно изменяя функцию  $g$ , как это уже делалось при доказательстве теоремы 17.5 (см. с. 235). Области  $U_{i,1} \subset U_{i,2} \subset U_{i,3}$ , карты  $\varphi_i: U_{i,3} \rightarrow \mathbb{R}^n$  и функцию  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  мы определим так же, как в доказательстве этой теоремы. Изменить функцию  $g$  так, чтобы у новой функции не было вырожденных критических точек в области  $U_{i,1}$ , можно с помощью следующего утверждения.

**Л е м м а 1.** *Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество и  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Тогда для почти всех линейных функций  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  функция  $f + A$  имеет только невырожденные критические точки.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим отображение  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное формулой

$$F(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Точка  $x_0$  является критической точкой отображения  $F$  тогда и только тогда, когда гессиан функции  $f$  в точке  $x_0$  является вырожденной матрицей.

Поэтому условие, что функция  $f(x) - a_1x_1 - \dots - a_nx_n$  имеет вырожденную критическую точку  $x_0$ , эквивалентно тому, что  $F(x_0) = (a_1, \dots, a_n)$  и  $x_0$  — критическая точка отображения  $F$ , т. е.  $(a_1, \dots, a_n)$  — образ критической точки отображения  $F$ . Остаётся воспользоваться теоремой Сарда.  $\square$

Из леммы 1 следует, что если  $g_{i-1}$  — гладкая функция на многообразии  $M^n$ , то существует линейная функция  $A(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  со сколь угодно малыми коэффициентами  $a_i$ , для которой функция  $g_i(y) = g_{i-1}(y) + \lambda(\varphi_i(y))A(\varphi_i(y))$  не имеет вырожденных критических точек на множестве  $\overline{U_{i,1}}$  (лемму 1 нужно применить к множеству  $U = U_{i,2} \supset \overline{U_{i,1}}$ ; отметим, что  $\lambda(\varphi_i(y)) = 1$  для всех точек  $y \in \overline{U_{i,1}}$ ).

Мы научились исправлять функцию  $g_{i-1}$  на множестве  $U_{i,1}$ . Остаётся научиться делать это так, чтобы не портить достигнутого ранее. А именно, пусть функция  $g_{i-1}$  не имеет вырожденных критических точек на множестве  $\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{U_{j,1}}$ ; мы хотим, чтобы функция  $g_i$  тоже не имела вырожденных критических точек на этом множестве. Функция  $g_{i-1}$  изменяется только на компактном множестве  $\overline{U_{i,2}}$ ; при этом на компактном множестве  $\overline{U_{i,2}} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{U_{j,1}} \right)$  у неё нет вырожденных критических точек.

*Лемма 2.* Пусть  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции на открытом множестве  $U \subset \mathbb{R}^n$ , причём функция  $f$  не имеет вырожденных критических точек на компактном множестве  $K \subset U$ . Тогда существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что если все первые и вторые производные функции  $f - g$  во всех точках множества  $K$  по модулю меньше  $\varepsilon$ , то функция  $g$  не имеет на  $K$  вырожденных критических точек.

*Доказательство.* Функция

$$F = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + \left[ \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right]^2$$

обращается в нуль только в вырожденных критических точках функции  $f$ , поэтому на компактном множестве  $K$  функция  $F$  достигает положительного минимума  $\delta$ . Если число  $\varepsilon$  достаточно мало, то

$$\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 - \sum \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 < \delta/2$$

и

$$\left[ \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right]^2 - \left[ \det \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right]^2 < \delta/2,$$



поэтому

$$\sum \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + \left[ \det \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right]^2 > 0,$$

а значит, функция  $g$  не имеет на  $K$  вырожденных критических точек.  $\square$

Если числа  $a_1, \dots, a_n$  достаточно малы, то все первые и вторые производные функции  $\lambda(x)(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$  тоже малы. Поэтому требуемую функцию  $g_i$  можно построить, воспользовавшись леммой 2.

**Доказательство 2.** Вложим многообразие  $M^n$  в  $\mathbb{R}^m$ , фиксируем точку  $a \in \mathbb{R}^m$  и положим  $f(x) = \|x - a\|^2$  для  $x \in M^n$ . Пусть  $u_1, \dots, u_n$  — локальные координаты на многообразии  $M^n$  и  $x_i(u_1, \dots, u_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — координаты точки  $(u_1, \dots, u_n)$  в  $\mathbb{R}^m$ . Функции  $x_i$  гладкие, поэтому функция  $f$  тоже гладкая. Наша цель — выбрать точку  $a$  так, чтобы все критические точки функции  $f$  были невырожденными.

Ясно, что  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2(x_i - a_i)$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{ij}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_i} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = 2 \sum_{k=1}^m (x_k - a_k) \frac{\partial x_k}{\partial u_i}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} &= \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_l}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i \partial u_j} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j} + (x_k - a_k) \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i \partial u_j} \right). \end{aligned}$$

Векторы  $e_i = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial u_i} \right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , образуют базис касательного пространства  $T_x M^n$ , поэтому точка  $x \in M^n$  является критической точкой функции  $f$  тогда и только тогда, когда вектор  $\xi = x - a$  ортогонален пространству  $T_x M^n$ . Эта критическая точка вырожденная тогда и только тогда, когда матрица с элементами  $g_{ij} + (\xi, l_{ij})$ , где  $g_{ij} = (e_i, e_j)$  и  $l_{ij} = \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_j}, \dots, \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_i \partial u_j} \right)$ , вырожденная. Здесь  $g_{ij}$  и  $l_{ij}$  зависят от точки  $x \in M^n$  (и от локальной системы координат).

На с. 250 мы уже рассматривали  $m$ -мерное многообразие  $N$ , состоящее из пар  $(x, \xi)$ , где  $x \in M^n$  и  $\xi$  — вектор, ортогональный  $T_x M^n \subset \mathbb{R}^m$ . Покажем, что точка  $(x, \xi) \in N$  является критической точкой отображения  $(x, \xi) \mapsto x - \xi \in \mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда матрица с элементами  $g_{ij} + (\xi, l_{ij})$  вырожденная. Из этого следует, что функция  $f(x) = \|x - a\|^2$  на многообразии  $M^n$  имеет вырожденную критическую точку тогда и только тогда, когда  $a$  — критическое значение отображения  $(x, \xi) \mapsto x - \xi$ . По-

этому согласно теореме Сарда для почти всех  $a \in \mathbb{R}^m$  функция  $f(x) = \|x - a\|^2$  является функцией Морса.

Матрицу Якоби отображения  $(x, \xi) \mapsto x + \xi$  мы уже вычисляли (см. с. 249); для отображения  $(x, \xi) \mapsto x - \xi$  аналогичные вычисления показывают, что его матрица Якоби  $J$  равна

$$\left( e_1 + \sum \xi_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_1}, \dots, e_n + \sum \xi_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_n}, -\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_{m-n} \right).$$

Векторы  $e_1, \dots, e_n$  образуют базис пространства  $T_x M^n$ , а векторы  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n}$  образуют базис ортогонального дополнения этого пространства. Следовательно, матрица  $A = (e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-n})$  невырожденная, а значит, ранг матрицы  $J$  равен рангу матрицы

$$A^T J = \begin{pmatrix} \left( g_{ij} - \left( e_i, \sum \xi_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_j} \right) \right) & 0 \\ * & I_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Остаётся проверить, что  $-\left( e_i, \sum \xi_k \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_j} \right) = (\xi, l_{ij})$ , где  $l_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$ . Требуемое равенство эквивалентно равенству  $\left( \varepsilon_k, \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \right) = -\left( \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial u_j}, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right)$ , т. е.  $\frac{\partial}{\partial u_j} \left( \varepsilon_k, \frac{\partial x}{\partial u_i} \right) = 0$ . Но векторы  $\varepsilon_k$  и  $\frac{\partial x}{\partial u_i} = e_i$  ортогональны, поэтому  $(\varepsilon_k, e_i) = 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Если многообразие  $M^n$  вложено в  $\mathbb{R}^m$  как замкнутое подмножество, то функция  $f(x) = \|x - a\|^2$  обладает тем свойством, что все множества  $\{x \in M^n \mid f(x) \leq c\}$  компактны.

Функцию Морса  $f$  называют *правильной*, если все её значения во всех критических точках попарно различны.

**Т е о р е м а 19.3.** *На любом замкнутом многообразии  $M^n$  существует правильная функция Морса.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — критические точки функции Морса  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Выберем попарно не пересекающиеся окрестности  $U_i \ni x_i$  и в них выберем открытые подмножества  $V_i \ni x_i$  так, что существуют гладкие функции  $\varphi_i: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , равные 1 на множестве  $V_i$  и равные 0 вне множества  $U_i$ . Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) + \varepsilon_1 \varphi_1(x) + \dots + \varepsilon_k \varphi_k(x)$ . На компактном множестве  $\bar{U}_i \setminus V_i$  функция  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|^2$  достигает положительного минимума, поэтому если  $\varepsilon_i$  достаточно мало, то функция  $g(x)$  не имеет критических точек, принадлежащих  $\bar{U}_i \setminus V_i$ . Функция  $g$  будет правильной функцией Морса, если числа  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  достаточно малы и все числа  $g(x_i) = f(x_i) + \varepsilon_i$  попарно различны.  $\square$

## 19.2. Градиентные векторные поля и приклеивание ручек

Пусть  $f$  — гладкая функция на многообразии  $M^n$ . Если на  $M^n$  задана риманова метрика, то по функции  $f$  можно построить *градиентное векторное поле*  $\text{grad } f$ , которое характеризуется следующим свойством: для любого гладкого векторного поля  $v$  на многообразии  $M^n$  выполняется равенство  $(\text{grad } f, v) = v(f)$ , где  $v(f)$  — производная функции  $f$  по направлению векторного поля  $v$ . Если  $M^n = \mathbb{R}^n$  и риманова метрика задаётся каноническим скалярным произведением, то  $\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ .

Из этого легко вывести, что особые точки векторного поля  $\text{grad } f$  соответствуют критическим точкам функции  $f$ , причём невырожденные особые точки соответствуют невырожденным критическим точкам.

**Теорема 19.4.** *Для любой римановой метрики индекс невырожденной особой точки  $x_0$  векторного поля  $\text{grad } f$  равен  $(-1)^i$ , где  $i$  — индекс критической точки  $x_0$  функции  $f$ .*

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что индекс особой точки векторного поля  $\text{grad } f$  не зависит от выбора римановой метрики. Пусть  $(v, \omega)_0$  и  $(v, \omega)_1$  — две римановы метрики на многообразии  $M^n$ . Тогда формула  $(v, \omega)_t = t(v, \omega)_0 + (1-t)(v, \omega)_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , определяет непрерывное семейство римановых метрик. Индекс особой точки векторного поля  $\text{grad } f$  (определённого относительно соответствующей римановой метрики) непрерывно зависит от  $t$  и является целым числом, поэтому от  $t$  индекс не зависит.

Для функции  $f(x) = -x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с каноническим скалярным произведением векторное поле  $\text{grad } f$  имеет вид  $2(-x_1, \dots, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . В начале координат это векторное поле имеет особую точку индекса  $(-1)^i$  (см. доказательство теоремы 18.8 на с. 253).  $\square$

**Следствие.** *Пусть  $f$  — функция Морса на замкнутом многообразии  $M^n$ . Тогда альтернированная сумма  $\sum_{i=1}^n (-1)^i c_i$ , где  $c_i$  — количество критических точек индекса  $i$ , не зависит от выбора функции  $f$ .*

**Доказательство.** Указанная альтернированная сумма равна сумме индексов особых точек векторного поля  $\text{grad } f$ , а сумма индексов особых точек для любого векторного поля на данном замкнутом многообразии одна и та же.  $\square$

Топологическое строение замкнутого многообразия  $M^n$  во многом определяется набором индексов критических точек правильной функции Морса  $f$ . Ниже мы приведём точные формулировки. Основные изучаемые

объекты — множества  $M_a = \{x \in M^n \mid f(x) \leq a\}$  и поверхности уровня  $f^{-1}(a)$ . Изучаются их перестройки при прохождении через критическое значение. Отметим, что если  $a$  не является критическим значением, то  $M_a$  — многообразие.

**Теорема 19.5.** *Предположим, что на отрезке  $[a, b]$  нет критических значений функции Морса  $f$  на замкнутом многообразии  $M^n$ . Тогда многообразия  $M_a$  и  $M_b$  диффеоморфны; в частности, поверхности уровня  $f^{-1}(a)$  и  $f^{-1}(b)$  диффеоморфны. Кроме того, многообразие  $f^{-1}([a, b])$  диффеоморфно  $f^{-1}(a) \times [a, b]$ .*

**Доказательство.** Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что на отрезке  $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$  нет критических значений функции  $f$ . Пусть  $\lambda(s)$  — гладкая функция, равная 1 при  $s \in [a, b]$  и равная 0 при  $s \notin [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ . Если  $f(x) \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ , то можно определить векторное поле  $\text{grad } f / \|\text{grad } f\|$  (мы предполагаем, что на многообразии  $M^n$  задана риманова метрика). С помощью функции  $\lambda$  на всём многообразии  $M^n$  можно определить векторное поле

$$v(x) = \frac{\lambda(f(x)) \text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}.$$

При этом  $v(x) = 0$ , если  $f(x) \notin [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ .

Гладкое векторное поле  $v$  на компактном многообразии  $M^n$  определяет интегральные кривые  $\gamma(x, t)$ , для которых  $\gamma(x, 0) = x$  и  $\frac{\partial \gamma(x, t)}{\partial t} = v(\gamma(x, t))$ . Последнее равенство означает, что касательный вектор в точке  $\gamma(x, t)$  кривой  $\gamma(x, t + \tau)$  равен  $v(\gamma(x, t))$ . Иными словами, если  $g: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная гладкая функция, то в точке  $x \in M^n$  оператор  $v$  сопоставляет функции  $g$  число  $\left. \frac{\partial g(\gamma(x, t))}{\partial t} \right|_{t=0}$ . Таким образом,

$$\left. \frac{\partial g(\gamma(x, t))}{\partial t} \right|_{t=0} = v(g) = (v, \text{grad } g).$$

Возьмём в качестве  $g$  исходную функцию  $f$ . Тогда получим, что если  $f(x) \in [a, b]$ , то

$$\left. \frac{\partial f(\gamma(x, t))}{\partial t} \right|_{t=0} = \left( \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|^2}, \text{grad } f \right) = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим отображение  $\varphi_t: M^n \rightarrow M^n$ , заданное формулой  $\varphi_t(x) = \gamma(x, t)$ . Отображение  $\varphi_t$  обладает следующими двумя свойствами:  $\varphi_0 = \text{id}_{M^n}$  и  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \varphi_s$ . Следовательно,  $\varphi_t$  — диффеоморфизм. Формула (1) показывает, что  $\varphi_{b-a}(M_a) = M_b$ .

Диффеоморфизм многообразия  $f^{-1}(a) \times [a, b]$  на многообразии  $f^{-1}([a, b])$  задаётся формулой  $(x, t) \mapsto \gamma(x, t - a)$ .  $\square$

С помощью теоремы 19.5 можно выяснить, как топологически устроено замкнутое многообразие в том случае, когда на нём существует функция Морса ровно с двумя критическими точками (максимумом и минимумом).

**Теорема 19.6.** *Предположим, что на замкнутом многообразии  $M^n$  существует функция Морса  $f$ , имеющая ровно две критические точки. Тогда многообразие  $M^n$  гомеоморфно\*)  $S^n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  — максимальное и минимальное значения функции  $f$ . Согласно лемме Морса существует локальная система координат с началом в точке максимума, в которой функция  $f$  имеет вид  $f(x_1, \dots, x_n) = f_{\max} - x_1^2 - \dots - x_n^2$ . Поэтому можно выбрать  $\varepsilon > 0$  так, что поверхность уровня  $f^{-1}(f_{\max} - \varepsilon)$  диффеоморфна  $S^{n-1}$ , а неравенство  $f(x) \geq f_{\max} - \varepsilon$  определяет многообразие, диффеоморфное  $D^n$ . Будем предполагать, что число  $\varepsilon$  выбрано так, что аналогичные свойства выполняются и для точки минимума.

Между точками  $f_{\min} + \varepsilon$  и  $f_{\max} - \varepsilon$  нет критических значений функции  $f$ , поэтому согласно теореме 19.5 прообраз отрезка  $[f_{\min} + \varepsilon, f_{\max} - \varepsilon]$  диффеоморфен  $S^{n-1} \times I$ . Поэтому многообразие  $M^n$  получается из  $S^{n-1} \times I$  приклеиванием двух экземпляров  $D^n$  по некоторым диффеоморфизмам краёв  $\varphi_1: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  и  $\varphi_2: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Несложно показать, что такое многообразие гомеоморфно  $S^n$ . Действительно, если  $\varphi_1 = \varphi_2 = \text{id}_{S^{n-1}}$ , то это очевидно. Поэтому остаётся убедиться, что диффеоморфизм  $\varphi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  можно продолжить до гомеоморфизма  $\Phi: D^n \rightarrow D^n$ . Для  $x \in D^n$  положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} x\varphi(x/\|x\|) & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

В точке 0 отображение  $\Phi$  непрерывно, но не дифференцируемо. □

Рассмотрим теперь случай, когда между поверхностями уровня  $f^{-1}(a)$  и  $f^{-1}(b)$  расположена ровно одна критическая точка.

**Теорема 19.7.** *Предположим, что  $x_0$  — невырожденная критическая точка индекса  $i$  гладкой функции  $f$  и на отрезке  $[a, b] = [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$  нет образов других критических точек. Тогда пространство  $M_b$  гомотопически эквивалентно пространству, полученному из  $M_a$  приклеиванием шара  $D^i$  по отображению  $\partial D^i \rightarrow M_a$ .*

**Доказательство.** Теорема 19.5 показывает, что число  $\varepsilon$  можно считать сколь угодно малым: если мы не проходим через критическое значение функции  $f$ , то строение многообразий  $M_a$  и  $M_b$  не изменяется.

\*) Милнор [10] показал, что многообразие  $M^n$  может быть не диффеоморфно  $S^n$ .

Воспользуемся леммой Морса и выберем локальные координаты с началом в точке  $x_0$  так, что в этих координатах  $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_0) - x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2$ . В выбранной локальной системе координат пересечение поверхности уровня  $f(x) = f(x_0) - \varepsilon$  с линейным подпространством, порождённым первыми  $i$  координатами, представляет собой  $i$ -мерный шар  $x_1^2 + \dots + x_i^2 \leq \varepsilon$ ; обозначим его  $D_\varepsilon^i$ . Координаты точек поверхности  $f(x) = f(x_0) + \varepsilon$ , проецирующихся на этот шар, удовлетворяют неравенству  $x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq 2\varepsilon$ ; обозначим соответствующий  $(n - i)$ -мерный шар  $D_{2\varepsilon}^{n-i}$  (на рис. 104 изображён случай  $n = 2; i = 1$ ). Мы предполагаем, что  $\varepsilon$  столь мало, что множество  $D_\varepsilon^i \times D_{2\varepsilon}^{n-i}$  целиком лежит в выбранной координатной окрестности  $U \ni x_0$ .

Мы будем строить деформационную ретракцию  $r: M_b \rightarrow A$ , где  $A = M_a \cup D_\varepsilon^i$  (при этом  $M_a \cap D_\varepsilon^i = \partial D_\varepsilon^i$ ). Чтобы упростить обозначения, будем записывать координаты  $(x_1, \dots, x_n)$  в виде  $(x_-, x_+)$ , где  $x_- = (x_1, \dots, x_i)$  и  $x_+ = (x_{i+1}, \dots, x_n)$ . На множестве  $D_\varepsilon^i \times D_{2\varepsilon}^{n-i} \cap M_b$  отображение  $r$  устроено следующим образом. Пусть векторное поле  $u$  в точке  $(x_-, x_+) \in D_\varepsilon^i \times D_{2\varepsilon}^{n-i} \cap M_b$  равно  $(0, -x_+)$ . Отобразим точку  $x$  в конец замыкания интегральной кривой векторного поля  $u$ , проходящей через точку  $x$  (рис. 104).

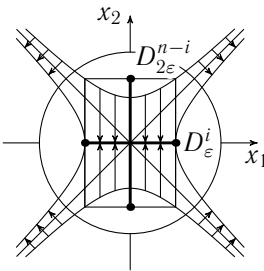


Рис. 104. Деформационная ретракция

Вне координатной окрестности  $U$  отображение  $r$  можно построить аналогично с помощью векторного поля  $v(x) = -\frac{1}{2} \text{grad } f(x)$ . Отметим, что если  $x \in U$ , то  $v(x) = (x_-, -x_+)$ .

Чтобы определить отображение  $r$  на всём множестве  $M_b$ , нужно построить векторное поле, которое совпадает с  $u$  на  $D_\varepsilon^i \times D_{2\varepsilon}^{n-i}$  и совпадает с  $v$  вне  $U$ . Пусть  $\lambda: M^n \rightarrow [0, 1]$  — гладкая функция, равная 0 на  $D_\varepsilon^i \times D_{2\varepsilon}^{n-i}$  и равная 1 вне  $U$ . Для  $x \in U$  положим  $\omega(x) = (\lambda(x)x_-, -x_+)$ ; для  $x \notin U$  положим  $\omega(x) = v(x)$ . Интегральные кривые векторного поля  $\omega$  обладают тем свойством, что абсолютные величины координат  $x_+$  убывают, поэтому все интегральные кривые попадают на поверхность уровня  $f(x) = f(x_0) - \varepsilon$  (имеются в виду интегральные кривые, выходящие из точек множества  $M_b$ , расположенных вне  $M_a$  и вне  $D_\varepsilon^i \times D_{2\varepsilon}^{n-i}$ ).

Гомотопия, связывающая отображения  $\text{id}_{M_b}$  и  $r: M_b \rightarrow A \subset M_b$ , строится следующим образом. Для каждой точки  $x \in M_b$  мы рассматриваем отрезок интегральной траектории от  $x$  до  $r(x)$  и делим эту кривую в отношении  $t : (1 - t)$ . □

Из теорем 19.5 и 19.7 можно вывести следующее важное утверждение, связывающее индексы критических точек функции Морса и строение многообразия как  $CW$ -комплекса.

**Теорема 19.8.** Пусть  $f$  — функция Морса на замкнутом многообразии  $M^n$ , имеющая  $c_i$  критических точек индекса  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда  $M^n$  гомотопически эквивалентно  $CW$ -комплексу, имеющему  $c_i$  клеток размерности  $i$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_0$  — критическая точка индекса  $i$ , причём на отрезке  $[a, b] = [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$  нет других критических точек. Достаточно доказать, что если пространство  $M_a$  гомотопически эквивалентно  $CW$ -комплексу  $X$ , то пространство  $M_b$  гомотопически эквивалентно пространству  $X \cup_\chi D^i$ , где  $\chi: S^{i-1} \rightarrow X$  — клеточное отображение.

Согласно теореме 19.7 пространство  $M_b$  гомотопически эквивалентно  $M_a \cup_\varphi D^i$ , где  $\varphi: S^{i-1} \rightarrow M_a$  — некоторое отображение. Пусть  $h: M_a \rightarrow X$  — гомотопическая эквивалентность. Выберем в качестве  $\chi$  клеточную аппроксимацию отображения  $h\varphi: S^{i-1} \rightarrow X$ . Остаётся доказать следующие два утверждения (в обозначениях  $M_a$  заменено на  $Y$ ).

**Лемма.** а) Если отображения  $\chi_0, \chi_1: S^{i-1} \rightarrow X$  гомотопны, то пространства  $X \cup_{\chi_0} D^i$  и  $X \cup_{\chi_1} D^i$  гомотопически эквивалентны.

б) Если  $\varphi: S^{i-1} \rightarrow Y$  — некоторое отображение и  $h: Y \rightarrow X$  — гомотопическая эквивалентность, то пространства  $Y \cup_\varphi D^i$  и  $X \cup_{h\varphi} D^i$  гомотопически эквивалентны.

**Доказательство.** а) Пусть  $\chi_t$  — гомотопия, связывающая  $\chi_0$  и  $\chi_1$ . Определим отображение  $\alpha: X_0 = X \cup_{\chi_0} D^i \rightarrow X \cup_{\chi_1} D^i = X_1$  следующим образом. При  $x \in X$  положим  $\alpha(x) = x$ . В пространстве  $X_0$  точки  $u \in S^{i-1}$  и  $\chi_0(u)$  отождествлены, поэтому должно выполняться равенство  $\alpha(u) = \alpha(\chi_0(u)) = \chi_0(u)$ . При  $t \in [0, 1/2]$  и  $u \in S^{i-1}$  положим  $\alpha(tu) = 2tu$ . В пространстве  $X_1$  точки  $u \in S^{i-1}$  и  $\chi_1(u)$  отождествлены, поэтому должно выполняться равенство  $\alpha(u/2) = u = \chi_1(u)$ . Чтобы согласовать равенства  $\alpha(u/2) = \chi_1(u)$  и  $\alpha(u) = \chi_0(u)$ , при  $t \in [1/2, 1]$  и  $u \in S^{i-1}$  положим  $\alpha(tu) = \chi_{2-2t}(u)$ .

Отображение  $\beta: X_1 \rightarrow X_0$  определяется аналогично. В этом случае нужно согласовать равенства  $\beta(u/2) = \chi_0(u)$  и  $\beta(u) = \chi_1(u)$ , поэтому при  $t \in [1/2, 1]$  и  $u \in S^{i-1}$  полагаем  $\beta(tu) = \chi_{2t-1}(u)$ .

Остаётся проверить, что  $\beta\alpha \sim \text{id}_{X_0}$  и  $\alpha\beta \sim \text{id}_{X_1}$ . Непосредственные вычисления показывают, что

$$\beta(\alpha(tu)) = \begin{cases} 4tu & \text{при } t \in [0, 1/4]; \\ \chi_{4t-1}(u) & \text{при } t \in [1/4, 1/2]; \\ \chi_{2-2t}(u) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Неформально гомотопию этого отображения в тождественное отображение можно описать так. Мы равномерно растягиваем отрезок  $[0, 1/4]$  до отрезка  $[0, 1]$ , оставляя на этом отрезке отображение линейным. Одновременно на остающемся отрезке отображение  $\chi_{k(t)}$  заменяем на  $\chi_{(1-s)k(t)}$ ,  $s \in [0, 1]$  (в концах отрезка задано отображение  $\chi_0$ ; именно его мы хотим получить при  $s = 1$ ).

Для отображения  $\alpha\beta$  рассуждения аналогичны.

б) Пусть  $g: X \rightarrow Y$  — отображение, гомотопически обратное  $h$ . Определим отображения  $H: Y \cup_{\varphi} D^i \rightarrow X \cup_{h\varphi} D^i$  и  $G: X \cup_{h\varphi} D^i \rightarrow Y \cup_{gh\varphi} D^i$  следующими условиями:  $H|_Y = h$ ,  $H|_{D^i} = \text{id}_{D^i}$  и  $G|_X = g$ ,  $G|_{D^i} = \text{id}_{D^i}$ .

Из того, что  $gh \sim \text{id}_Y$ , следует, что  $gh\varphi \sim \varphi$ . Поэтому согласно доказанному выше утверждению а) существует гомотопическая эквивалентность  $\alpha: Y \cup_{gh\varphi} D^i \rightarrow Y \cup_{\varphi} D^i$ . Покажем, что отображение  $\alpha GH$  гомотопно тождественному. Непосредственно из конструкций отображений  $\alpha$ ,  $G$  и  $H$  видно, что  $\alpha GH(y) = y$  при  $y \in Y$  и

$$\alpha GH(tu) = \begin{cases} 2tu & \text{при } t \in [0, 1/2], u \in S^{i-1}; \\ \chi_{2-2t}\varphi(u) & \text{при } t \in [1/2, 1], u \in S^{i-1}; \end{cases}$$

здесь  $\chi_t$  — гомотопия, связывающая отображения  $gh$  и  $\text{id}_Y$ .

Гомотопия отображения  $\alpha GH$  в тождественное отображение строится в основном так же, как это делалось в а). Главное отличие заключается в том, что теперь нет ограничений на то, куда отображается правый конец отрезка  $[0, 1]$ . Поэтому в качестве отображения остающегося отрезка (имеется в виду отрезок, остающийся после растяжения отрезка  $[0, 1/2]$ ) можно взять первоначальное отображение некоторой левой части отрезка. Формально это отображение описывается так:

$$\psi_s(tu) = \begin{cases} \frac{2}{1+s}tu & \text{при } t \in \left[0, \frac{1+s}{2}\right], u \in S^{i-1}; \\ \chi_{2-2t+s}\varphi(u) & \text{при } t \in \left[\frac{1+s}{2}, 1\right], u \in S^{i-1}; \end{cases}$$

выбор линейной функции  $2 - 2t + s$  связан с тем, что она равна 1 при  $t = \frac{1+s}{2}$ .

Итак,  $\alpha GH \sim \text{id}$ . Аналогично доказывается, что  $\beta HG \sim \text{id}$ , где  $\beta$  — отображение, гомотопически обратное  $\alpha$ . Следовательно,

$$GH\alpha \sim \beta\alpha(GH\alpha) = \beta(\alpha GH)\alpha \sim \beta\alpha \sim \text{id}.$$

Далее получаем

$$H\alpha G \sim (\beta HG)H\alpha G = \beta H(GH\alpha)G \sim \beta HG \sim \text{id}.$$



Условия  $GH\alpha \sim \text{id}$  и  $H\alpha G \sim \text{id}$  означают, что отображения  $H$  и  $\alpha G$  гомотопически обратны; в частности,  $H$  — гомотопическая эквивалентность.  $\square$

**Задача 19.1.** а) Предположим, что подкомплекс  $Y$  стягиваем в  $CW$ -комплексе  $X$ , т. е. вложение  $Y \rightarrow X$  гомотопно постоянному отображению. Докажите, что тогда  $X/Y \sim X \vee \Sigma Y$ .

б) Пусть сфера  $S^m$  канонически вложена в  $S^n$ , причём  $m < n$ . Докажите, что  $S^n/S^m \sim S^n \vee S^{m+1}$ .

### 19.3. Примеры функций Морса

**Тор.** Тор  $T^n$  мы будем представлять как факторпространство  $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ . Тогда гладкие функции на торе  $T^n$  — это гладкие функции от  $n$  переменных, имеющие период  $2\pi$  по каждой переменной.

**Пример.** Пусть  $c_1, \dots, c_n$  — действительные числа. Функция  $f(x_1, \dots, x_n) = c_1 \sin x_1 + \dots + c_n \sin x_n$  является функцией Морса на  $T^n$  тогда и только тогда, когда  $c_1, \dots, c_n \neq 0$ . Эта функция имеет  $\binom{n}{k}$  критических точек индекса  $k$ .

**Доказательство.** Равенства  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$  означают, что  $c_1 \cos x_1 = \dots = c_n \cos x_n = 0$ . Если  $c_i \neq 0$ , то  $x_i = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ . Ясно также, что если  $c_i = 0$ , то у функции  $f$  есть неизолированные критические точки. Если же  $c_1, \dots, c_n \neq 0$ , то в критической точке

$$\left( \frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \text{diag}(-c_1 \sin x_1, \dots, -c_n \sin x_n) = \text{diag}(\varepsilon_1 c_1, \dots, \varepsilon_n c_n),$$

где  $x_i = -\varepsilon_i \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ . Индекс этой критической точки равен количеству тех  $i$ , для которых  $\varepsilon_i c_i < 0$ . Критическая точка индекса  $k$  задаётся указанием  $k$  номеров  $i$ , для которых  $\varepsilon_i c_i < 0$ .  $\square$

Отметим, что если  $S^1$  представить в виде  $CW$ -комплекса с одной 0-мерной клеткой и одной 1-мерной, то тор  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  будет представлен в виде  $CW$ -комплекса, имеющего  $\binom{n}{k}$  клеток размерности  $k$ . Рассмотренная в примере 19.3 функция Морса задаёт именно это разбиение тора на клетки.

**Сфера.** Сферу  $S^n$  мы будем представлять как подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ , заданное уравнением  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ .

**Пример.** Функция  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$  является функцией Морса на  $S^n$  с двумя критическими точками индекса 0 и  $n$ .

**Доказательство.** Сферу  $S^n$  можно покрыть  $2(n+1)$  картами, каждая из которых задаётся неравенством  $x_i > 0$  или  $x_i < 0$ ; локальными

координатами для этой карты служат  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ . Если  $i \neq n+1$ , то на соответствующей карте функция  $f$  гладкая и не имеет критических точек. На карте  $x_{n+1} > 0$  функция  $f$  имеет вид  $\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$ ; здесь  $x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1$  и имеется в виду положительное значение корня.

Несложные вычисления показывают, что  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$  только в точке  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ ; в этой точке матрица  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$  равна  $-I_n$ . Таким образом, точка  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$  имеет индекс  $n$ .

Аналогичные вычисления для карты  $x_{n+1} < 0$  показывают, что в точке  $(0, \dots, 0, -1)$  гессиан равен  $I_n$ , т. е. эта точка имеет индекс 0.  $\square$

**Пример.** Пусть  $c_1, \dots, c_{n+1}$  — действительные числа. Функция  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c_1 x_1^2 + \dots + c_{n+1} x_{n+1}^2$  является функцией Морса на  $S^n$  тогда и только тогда, когда числа  $c_1, \dots, c_{n+1}$  попарно различны. Эта функция Морса имеет по две критические точки каждого из индексов  $0, 1, 2, \dots, n$ .

**Доказательство.** На картах  $x_{n+1} > 0$  и  $x_{n+1} < 0$  функция  $f$  имеет один и тот же вид, а именно,

$$\begin{aligned} f &= c_1 x_1^2 + \dots + c_n x_n^2 + c_{n+1}(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2) = \\ &= (c_1 - c_{n+1})x_1^2 + \dots + (c_n - c_{n+1})x_n^2 + c_{n+1}. \end{aligned}$$

Такая функция имеет единственную критическую точку  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ . Эта критическая точка невырожденная тогда и только тогда, когда все числа  $c_1, \dots, c_n$  отличны от  $c_{n+1}$ ; индекс невырожденной критической точки равен количеству чисел  $c_1, \dots, c_n$ , меньших  $c_{n+1}$ . Точке  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$  на картах  $x_{n+1} > 0$  и  $x_{n+1} < 0$  соответствуют точки  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (0, \dots, 0, \pm 1) \in S^n$ .

Аналогичные вычисления можно провести и для остальных карт  $x_i > 0$  и  $x_i < 0$ . Все критические точки окажутся невырожденными только тогда, когда все числа  $c_1, \dots, c_{n+1}$  попарно различны. Ясно также, что для каждого  $k = 0, 1, \dots, n$  найдётся ровно один номер  $i$ , для которого  $k$  из чисел  $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_{n+1}$  меньше  $c_i$ .  $\square$

**Вещественное проективное пространство.** Вещественное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  мы будем представлять как многообразие, которое получается из сферы  $S^n$  отождествлением точек  $x$  и  $-x$ .

Пусть  $f$  — функция Морса на  $S^n$ , обладающая тем свойством, что  $f(-x) = f(x)$ . Тогда функцию  $f$  можно рассматривать и как функцию на  $\mathbb{R}P^n$ , причём она тоже будет функцией Морса. При этом каждой

критической точке на  $\mathbb{R}P^n$  соответствуют две критические точки на  $S^n$  с тем же самым индексом.

Функция  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c_1 x_1^2 + \dots + c_{n+1} x_{n+1}^2$  обладает требуемым свойством, поэтому справедливо следующее утверждение.

**Пример.** Функция  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c_1 x_1^2 + \dots + c_{n+1} x_{n+1}^2$  является функцией Морса на  $\mathbb{R}P^n$  тогда и только тогда, когда числа  $c_1, \dots, c_{n+1}$  попарно различны. Эта функция Морса имеет по одной критической точке каждого из индексов  $0, 1, 2, \dots, n$ .

**Комплексное проективное пространство.** Точки комплексного проективного пространства  $\mathbb{C}P^n$  мы будем задавать однородными координатами  $(z_1 : \dots : z_n)$ .

**Пример.** Пусть  $c_1, \dots, c_{n+1}$  — попарно различные действительные числа. Тогда функция

$$f(z_1 : \dots : z_{n+1}) = \frac{c_1 |z_1|^2 + \dots + c_{n+1} |z_{n+1}|^2}{|z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2}$$

является функцией Морса на  $\mathbb{C}P^n$ . Эта функция Морса имеет по одной критической точке каждого из индексов  $0, 2, \dots, 2n$ .

**Доказательство.** Многообразие  $\mathbb{C}P^n$  можно покрыть  $n+1$  картами, каждая из которых задаётся условием  $z_k \neq 0$ . Для карты  $z_{n+1} \neq 0$  в качестве локальных координат можно взять  $\omega_k = z_k/z_{n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$  (здесь подразумевается, что комплексной координате  $\omega_k$  соответствуют две вещественные координаты). В этих локальных координатах функция  $f$  имеет вид

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{c_1 |\omega_1|^2 + \dots + c_n |\omega_n|^2 + c_{n+1}}{|\omega_1|^2 + \dots + |\omega_n|^2 + 1}.$$

Удобнее перейти к координатам  $u_k = \omega_k / \sqrt{\|\omega\|^2 + 1}$ , где  $\|\omega\|^2 = |\omega_1|^2 + \dots + |\omega_n|^2$ . Воспользовавшись тем, что

$$\frac{1}{\|\omega\|^2 + 1} = 1 - \frac{\|\omega\|^2}{\|\omega\|^2 + 1} = 1 - |u_1|^2 - \dots - |u_n|^2,$$

получим

$$f(u_1, \dots, u_n) = (c_1 - c_{n+1})|u_1|^2 + \dots + (c_n - c_{n+1})|u_n|^2 + c_{n+1}.$$

При этом  $u_k = x_k + iy_k$  и  $|u_k|^2 = x_k^2 + y_k^2$ .

Рассуждения завершаются точно так же, как в примере 19.3. В комплексном случае индексы критических точек удваиваются по сравнению с вещественным случаем, поскольку  $|u_k|^2 = x_k^2 + y_k^2$ .  $\square$

**Многообразия  $SO(n)$  и  $U(n)$ .** Мы построим функции Морса на  $SO(n)$  и  $U(n)$ , следуя [7]. Предварительно выясним, как устроено касательное пространство к  $SO(n)$  и  $U(n)$  в точке  $X$ , где  $XX^* = I_n$  — единичная матрица,  $X^* = \bar{X}^T$  (в вещественном случае комплексное сопряжение можно опустить). Если  $\xi$  — касательный вектор, то матрица  $X + t\xi$  с точностью до членов порядка  $t$  должна удовлетворять соотношению  $(X + t\xi)(X^* + t\xi^*) = I_n$ , поэтому  $\xi X^* + X\xi^* = 0$ . В точке  $X = I_n$  это условие принимает вид  $\xi + \xi^* = 0$ , т. е. матрица  $\xi$  косоэрмитова (кососимметрическая в вещественном случае). Размерности пространств кососимметрических и косоэрмитовых матриц легко вычисляются; они совпадают с размерностями  $SO(n)$  и  $U(n)$ . Ясно также, что для матрицы  $\bar{\xi} = \xi X$  равенство  $\bar{\xi} X^* + X \bar{\xi}^* = 0$  эквивалентно равенству  $\xi + \xi^* = 0$ . Значит, любая матрица  $\xi$ , для которой  $\xi X^* + X\xi^* = 0$ , лежит в касательном пространстве.

*Л е м м а.* Пусть  $\eta$  — матрица порядка  $n$ , которую мы рассматриваем как вектор в  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Введём в пространстве матриц скалярное произведение  $(A, B) = \text{tr}(AB^*)$ . Тогда ортогональная проекция вектора  $\eta$  на касательное пространство к  $SO(n)$  или  $U(n)$  в точке  $X$  равна  $\frac{1}{2}(\eta - X\eta^*X)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда  $X = I_n$ . В этом случае ортогональное дополнение к косоэрмитовым (кососимметрическим) матрицам состоит из эрмитовых (косоэрмитовых) матриц. Поэтому матрицу  $\eta$  нужно записать в виде суммы эрмитовой и косоэрмитовой матрицы:  $\eta = \frac{1}{2}(\eta + \eta^*) + \frac{1}{2}(\eta - \eta^*)$ . Матрица  $\frac{1}{2}(\eta - \eta^*)$  — проекция  $\eta$  на касательное пространство, а матрица  $\frac{1}{2}(\eta + \eta^*)$  — проекция  $\eta$  на ортогональное дополнение к касательному пространству.

Для произвольной точки  $X$  можно поступить следующим образом. Сначала перенесём вектор  $\eta$  в точку  $I_n$ :  $\eta \mapsto \eta X^{-1} = \eta X^*$ . Затем для вектора  $\eta X^*$  найдём проекцию на касательное пространство. Она равна  $\frac{1}{2}(\eta X^* - X\eta^*)$ . Наконец, вернёмся в исходное касательное пространство:  $\frac{1}{2}(\eta X^* - X\eta^*) \mapsto \frac{1}{2}(\eta X^* - X\eta^*)X = \frac{1}{2}(\eta - X\eta^*X)$ .  $\square$

*Пример.* Рассмотрим на  $SO(n)$  или  $U(n)$  функцию  $f_A(X) = \text{Re tr}(AX)$ , где  $A$  — фиксированная матрица. Точка  $X$  является критической точкой этой функции тогда и только тогда, когда  $A^* = XAX$ .

*Доказательство.* Пусть  $a_{pq} = \alpha_{pq} + i\beta_{pq}$  и  $x_{pq} = u_{pq} + iv_{pq}$ . Тогда  $f_A(X) = \sum_{pq} (\alpha_{pq}u_{qp} - \beta_{pq}v_{qp})$ , поэтому  $\text{grad } f = A^*$  — постоянная матрица.

Критические точки — это те точки, для которых проекция вектора  $\text{grad } f$  на касательное пространство нулевая. Согласно лемме 19.3 эта проекция равна  $\frac{1}{2}(A^* - XAX)$ .  $\square$

**Пример.** Пусть  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ , где  $0 \leq a_1 < \dots < a_n$ . Тогда  $f_A(X)$  — функция Морса на  $\text{SO}(n)$  или  $\text{U}(n)$ .

**Доказательство.** Согласно примеру 19.3 точка  $X$  критическая тогда и только тогда, когда  $A = XAX$ . В таком случае  $A = (XAX)^* = X^{-1}AX^{-1}$ . Поэтому  $A^2 = (XAX)(X^{-1}AX^{-1}) = XA^2X^{-1}$ , т.е. матрицы  $A^2$  и  $X$  коммутируют. При этом  $A$  — диагональная матрица с различными собственными значениями. Следовательно,  $X$  — диагональная матрица (см. [15, задача 39.1, а]). По условию матрица  $X$  унитарная, поэтому  $X = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ ; в вещественном случае произведение диагональных элементов равно 1.

Мы нашли критические точки функции  $f_A$ . Теперь нужно проверить, что все они невырожденные.

Пусть  $\xi$  — касательный вектор в точке  $I_n$ , т.е.  $\xi^* + \xi = 0$ ,  $X_0 = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$ , — критическая точка. Рассмотрим отображение  $\xi \mapsto X_0 e^\xi$ , и в качестве локальных координат в окрестности точки  $X_0$  выберем наддиагональные и диагональные элементы матрицы  $\xi$ . В этих координатах

$$\begin{aligned} f_A(X) - f_A(X_0) &= \text{Re tr } A(X - X_0) = \text{Re tr } AX_0(e^\xi - I_n) = \\ &= \text{Re tr } AX_0 \left( \xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \dots \right) = \\ &= \text{Re} \left( \sum_p a_p \varepsilon_p \xi_{pp} + \frac{1}{2} \sum_p a_p \varepsilon_p \xi_{pj} \xi_{jp} + \dots \right). \end{aligned}$$

Числа  $\xi_{pp}$  чисто мнимые, поэтому вещественная часть первой суммы равна нулю. Кроме того,  $\xi_{pj} = -\bar{\xi}_{jp}$ , поэтому во второй сумме все числа вещественные и  $f_A(X) - f_A(X_0) = - \sum_{1 \leq p < q \leq n} (a_p \varepsilon_p + a_q \varepsilon_q) |\xi_{pq}|^2 + \dots$

По условию  $a_q > a_p \geq 0$  при  $q > p$ , поэтому  $\text{sgn}(a_p \varepsilon_p + a_q \varepsilon_q) = \text{sgn}(a_q \varepsilon_q)$  при  $q \geq p$ . Значит, если  $p \leq q$ , то  $|\xi_{pq}|^2$  входит со знаком, противоположным знаку  $\varepsilon_q$ . В частности, в квадратичной части  $f_A(X)$  присутствуют квадраты всех координат.  $\square$

**Многообразия Грассмана.** Мы будем пользоваться обозначениями, введёнными в п. 15.5, и доказанными там свойствами многообразий Грассмана. Особенно важен для нас будет символ Шуберта

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ , где  $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_k \leq n$ , и связанное с ним число  $d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \dots + (\sigma_k - k)$ , равное размерности открытой клетки Шуберта  $e(\sigma)$ .

Символ Шуберта — это специальное название мультииндекса, которое употребляется при описании клеточной структуры многообразия Грассмана. Каждому символу Шуберта  $\sigma$  соответствует координата Плюккера  $x_\sigma$ . Набор координат Плюккера подпространства  $\Pi \in G(n, k)$  представляет собой точку проективного пространства  $\mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$ . Пусть  $e_\sigma$  — точка этого проективного пространства, соответствующая оси  $\sigma$ , т.е.  $e_\sigma = (0:0:\dots:0:1:0:\dots:0)$ , где единица стоит на месте, соответствующем мультииндексу  $\sigma$ . Ясно, что точка  $e_\sigma$  принадлежит образу открытой клетки Шуберта  $e(\sigma)$ .

**Пример.** Пусть  $f(x) = \sum c_\sigma x_\sigma^2$ ,  $c_\sigma \in \mathbb{R}$ , — функция на  $\mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$  (предполагается, что  $\sum x_\sigma^2 = 1$ ),  $i: G(n, k) \rightarrow \mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$  — вложение Плюккера. Тогда числа  $c_\sigma$  можно выбрать так, что функция  $fi$  будет функцией Морса на  $G(n, k)$  с критическими точками  $i^{-1}(e_\sigma)$  индекса  $d(\sigma)$ . (Выбор чисел  $c_\sigma$  конструктивный; он будет описан в процессе доказательства.)

**Доказательство.** Если числа  $c_\sigma$  попарно различны, то согласно примеру 19.3 функция  $f$  является функцией Морса на  $\mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$  с критическими точками  $e_\sigma$ . Поэтому все точки  $i^{-1}(e_\sigma)$  являются критическими для функции  $fi$ . Выясним, как устроена функция  $fi$  в окрестности точки  $i^{-1}(e_\sigma)$ .

Мультииндексу  $\sigma$  соответствует карта  $U_\sigma$  на многообразии  $G(n, k)$ , причём точка  $i^{-1}(e_\sigma)$  является началом координат. Вложение Плюккера в этих локальных координатах устроено следующим образом. Координата Плюккера  $x_\tau$  равна определителю матрицы, образованной столбцами  $\tau_1, \dots, \tau_k$  матрицы, у которой столбцы  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  образуют единичную матрицу, а остальные столбцы заполнены числами  $y_1, \dots, y_{k(n-k)}$ . Ясно, что  $x_\tau$  — однородный многочлен от переменных  $y_1, \dots, y_{k(n-k)}$ , степень которого равна количеству столбцов  $\tau_1, \dots, \tau_k$ , отличных от столбцов  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  (при этом  $x_\sigma = 1$ ). При вычислении гессиана функции  $\sum \frac{c_\tau x_\tau^2}{x_\sigma^2}$  в начале координат нас интересуют только линейные многочлены  $x_\tau$ . Будем называть символы Шуберта  $\sigma$  и  $\tau$  (длины  $k$ ) *соседними*, если они имеют ровно  $k-1$  общий элемент. Легко проверить, что если  $\sigma$  и  $\tau$  — соседние символы Шуберта, то  $x_\tau = \pm y_i$ . При этом каждому индексу  $i$  соответствует ровно один символ Шуберта  $\tau(i)$ , соседний с  $\sigma$ .

В начале координат функция  $f$  принимает значение  $c_\sigma$ . При этом

$$f(y) - c_\sigma = \frac{c_\sigma + \sum c_\tau x_\tau^2(y)}{1 + \sum x_\tau^2(y)} - c_\sigma = \frac{\sum (c_\tau - c_\sigma) x_\tau^2(y)}{1 + \sum x_\tau^2(y)}.$$

Следовательно, квадратичная форма, аппроксимирующая  $f(y) - c_\sigma$ , равна  $\sum_{i=1}^{k(n-k)} (c_{\tau(i)} - c_\sigma) x_{\tau(i)}^2(y)$ ; здесь в суммировании участвуют только символы Шуберта  $\tau(i)$ , соседние с  $\sigma$ . Если все числа  $c_\tau$  попарно различны, то критическая точка  $i^{-1}(e_\sigma)$  невырожденная; её индекс равен количеству символов Шуберта  $\tau(i)$ , соседних с  $\sigma$ , для которых  $c_{\tau(i)} < c_\sigma$ .

Упорядочим символы Шуберта следующим образом: будем считать, что  $\tau < \sigma$ , если  $\tau_k = \sigma_k$ ,  $\tau_{k-1} = \sigma_{k-1}$ , ...,  $\tau_{i+1} = \sigma_{i+1}$ ,  $\tau_i < \sigma_i$ . Константы  $c_\tau$  выберем так, что  $c_\tau < c_\sigma$  при  $\tau < \sigma$ . Легко проверить, что для символа Шуберта  $\sigma$  количество соседних с ним символов Шуберта  $\tau$ , которые меньше  $\sigma$ , равно  $d(\sigma)$ . Действительно, выбросим из символа Шуберта  $\sigma$  элемент  $\sigma_i$ . Чтобы получить символ Шуберта, который меньше  $\sigma$ , можно добавить любое натуральное число, меньшее  $\sigma_i$  и отличное от  $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ ; количество таких чисел равно  $\sigma_i - i$ .

Итак, при указанном выборе чисел  $c_\sigma$  точка  $i^{-1}(e_\sigma)$  является невырожденной критической точкой индекса  $d(\sigma)$ . Остаётся проверить, что у функции  $fi$  нет других критических точек.

Рассмотрим произвольное  $k$ -мерное подпространство  $\Pi$ ; пусть  $\sigma$  — его символ Шуберта. Выберем в  $\Pi$  базис  $v_1, \dots, v_k$ , где  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{i\sigma_i-1}, 1, 0, \dots, 0)$  и  $v_{i\sigma_j} = 0$  при  $j < i$ . Будем говорить, что вектор  $v_i$  имеет ненулевую координату, если  $v_{is} \neq 0$  для некоторого  $s < \sigma_i$  (координату  $v_{i\sigma_i} = 1$  мы не учитываем). Мы предполагаем, что  $\Pi \neq i^{-1}(e_\sigma)$ , т. е. хотя бы один из векторов  $v_1, \dots, v_k$  имеет ненулевую координату. Обозначим этот вектор  $v_i$ ; для дальнейших целей удобно выбрать номер  $i$  максимально возможным.

Рассмотрим подпространство  $\Pi_t$ , порождённое векторами  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$  и вектором

$$v_i(t) = ((1+t)v_{i1}, \dots, (1+t)v_{i\sigma_i-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Ясно, что если  $\Pi$  — критическая точка функции  $fi$ , то  $t = 0$  — критическая точка функции  $\varphi(t) = fi(\Pi_t)$ , поэтому достаточно проверить, что  $\varphi'(0) \neq 0$ .

Пусть  $V(t)$  — матрица, строками которой служат координаты векторов  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_i(t), v_{i+1}, \dots, v_k$ ;  $V_\tau(t)$  — матрица, образованная столбцами  $\tau_1, \dots, \tau_k$  матрицы  $V(t)$ . Для подпространства  $\Pi_t$  координата Плюккера  $x_\tau(t)$  равна  $\det V_\tau(t)$ .

Согласно определению  $\varphi(t) = \sum_{\tau} c_{\tau} x_{\tau}^2(t) / \sum_{\tau} x_{\tau}^2(t)$ , поэтому

$$\varphi'(0) = \frac{\left( \sum_{\rho} c_{\rho} x'_{\rho} x_{\rho} \right) \left( \sum_{\tau} x_{\tau}^2 \right) - \left( \sum_{\rho} c_{\rho} x_{\rho}^2 \right) \left( \sum_{\tau} x'_{\tau} x_{\tau} \right)}{\left( \sum_{\tau} x_{\tau}^2 \right)^2},$$

где  $x_{\tau} = x_{\tau}(0)$  и  $x'_{\tau} = x'_{\tau}(0)$ .

Ситуация наиболее проста в случае  $i = k$ . В этом случае в зависимости от  $\tau_k$  структура матрицы  $V_{\tau}(t)$  следующая.

Если  $\tau_k < \sigma_k$ , то последняя строка матрицы  $V_{\tau}(t)$  получается из последней строки матрицы  $V(t)$  умножением всех элементов на  $1 + t$ . В этом случае  $x_{\tau}(t) = (1 + t)x_{\tau}(0)$  и  $x'_{\tau}(t) = x'_{\tau}(0)$ .

Если  $\tau_k = \sigma_k$ , то последний столбец матрицы  $V_{\tau}(t)$  состоит из элементов  $0, \dots, 0, 1$ . В этом случае  $x_{\tau}(t) = \text{const}$  и  $x'_{\tau}(t) = 0$ .

Если  $\tau_k > \sigma_k$ , то последний столбец матрицы  $V_{\tau}(t)$  нулевой. В этом случае  $x_{\tau}(t) = 0$ .

Таким образом,  $x'_{\tau} \neq 0$  лишь при  $\tau_k < \sigma_k$  и  $x_{\rho} \neq 0$  лишь при  $\rho_k \leq \sigma_k$ . Поэтому если мы запишем символы Шуберта  $\tau$  и  $\rho$  в виде  $\tau = \bar{\tau}, \tau_k$  и  $\rho = \bar{\rho}, \rho_k$  (здесь  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\rho}$  — символы Шуберта меньшей длины), то ненулевые члены числителя выражения для  $\varphi'(0)$  примут вид

$$\left( \sum_{\bar{\rho}, \rho_k < \sigma_k} c_{\bar{\rho}, \rho_k} x_{\bar{\rho}, \rho_k}^2 \right) \left( \sum_{\bar{\tau}, \tau_k < \sigma_k} x_{\bar{\tau}, \tau_k}^2 + \sum_{\bar{\tau}} x_{\bar{\tau}, \sigma_k}^2 \right) - \left( \sum_{\bar{\rho}, \rho_k < \sigma_k} c_{\bar{\rho}, \rho_k} x_{\bar{\rho}, \rho_k}^2 + \sum_{\bar{\tau}} c_{\bar{\tau}, \sigma_k} x_{\bar{\tau}, \sigma_k}^2 \right) \left( \sum_{\bar{\tau}, \tau_k < \sigma_k} x_{\bar{\tau}, \tau_k}^2 \right).$$

После сокращения общей части  $\sum_{\substack{\bar{\rho}, \rho_k < \sigma_k; \\ \bar{\tau}, \tau_k < \sigma_k}} c_{\bar{\rho}, \rho_k} x_{\bar{\rho}, \rho_k}^2 x_{\bar{\tau}, \tau_k}^2$  остаётся

$$\sum_{\bar{\rho}, \rho_k < \sigma_k; \bar{\tau}} (c_{\bar{\rho}, \rho_k} - c_{\bar{\tau}, \sigma_k}) x_{\bar{\rho}, \rho_k}^2 x_{\bar{\tau}, \sigma_k}^2.$$

Константы  $c_{\sigma}$  выбраны так, что из условия  $\rho_k < \sigma_k$  следует, что  $c_{\bar{\rho}, \rho_k} < c_{\bar{\tau}, \sigma_k}$ . Поэтому из равенства  $\varphi'(0) = 0$  следует, что  $x_{\bar{\rho}, \rho_k}^2 x_{\bar{\tau}, \sigma_k}^2 = 0$  для всех  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\rho}, \rho_k < \sigma_k$ . Но если  $\bar{\tau}, \sigma_k = \sigma$ , то  $x_{\bar{\tau}, \sigma_k} = x_{\sigma} = 1$ . Поэтому  $x_{\bar{\rho}, \rho_k} = 0$  для всех  $\bar{\rho}, \rho_k < \sigma_k$ . С другой стороны, если символ Шуберта  $\rho$  состоит из элементов  $j$  и  $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ , то  $x_{\rho} = \pm v_{kj}$ , а по условию одно из чисел  $v_{kj}$ ,  $j < \sigma_k$ , отлично от нуля. Приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь случай, когда  $i < k$ . Напомним, что для удобства мы выбрали номер  $i$  максимальным, т. е. вектор  $v_i$  имеет ненулевую координату, а векторы  $v_{i+1}, \dots, v_k$  имеют нулевые координаты (координаты



$v_{j\sigma_j} = 1$  мы не учитываем). При таком условии  $x_\tau(t) \neq 0$  лишь в том случае, когда  $\tau_i \leq \sigma_i$ ,  $\tau_{i+1} = \sigma_{i+1}$ , ...,  $\tau_k = \sigma_k$ , а  $x'_\tau(t) \neq 0$  лишь в том случае, когда  $\tau_i < \sigma_i$ ,  $\tau_{i+1} = \sigma_{i+1}$ , ...,  $\tau_k = \sigma_k$ ; при этом  $x'_\tau(0) = x_\tau(0)$ . Запишем символ Шуберта

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_k) = (\tau_1, \dots, \tau_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_k)$$

в виде  $\bar{\tau}, \tau_i$ , где  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1})$ ; общую часть  $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_k$  мы игнорируем. В таких обозначениях ненулевые члены числителя выражения для  $\varphi'(0)$  принимают почти такой же вид, как и раньше; единственная разница заключается в том, что неравенства  $\tau_k < \sigma_k$  и  $\rho_k < \sigma_k$  нужно заменить на  $\tau_i < \sigma_i$  и  $\rho_i < \sigma_i$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Первая явная конструкция функции Морса на многообразии Грассмана приведена в [146]. Наше изложение следует [66]; см также [26]. Более простое построение функции Морса на многообразии Грассмана приведено в [7], но оно использует свойства коммутатора векторных полей.

## Глава VI

### Фундаментальная группа

В п.2.1 мы дали определение фундаментальной группы  $\pi_1(X, x_0)$  произвольного линейно связного пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0$ . Там же доказаны основные свойства фундаментальной группы, которыми мы будем здесь пользоваться при вычислении фундаментальных групп некоторых конкретных топологических пространств.

#### § 20. $CW$ -комплексы

Точно так же, как доказывалась теорема 2.1 на с. 42, можно доказать, что *любой конечный связный  $CW$ -комплекс гомотопически эквивалентен  $CW$ -комплексу с единственной вершиной (0-мерной клеткой)  $e^0$* . В дальнейшем при вычислении фундаментальной группы  $CW$ -комплекса  $X$  мы будем предполагать, что у него ровно одна вершина  $e^0$ . Мы будем также предполагать, что  $e^0$  — отмеченная точка (при изменении отмеченной точки фундаментальная группа заменяется на изоморфную группу; изоморфизм индуцирован отображением  $\omega \mapsto \alpha^{-1}\omega\alpha$ , где  $\alpha$  — путь из одной отмеченной точки в другую).

#### 20.1. Основная теорема

Если клеточное строение пространства  $X$  задано явно, то его фундаментальная группа легко вычисляется. А именно, 1-мерные клетки соответствуют образующим группы, а 2-мерные клетки соответствуют соотношениям. Поясним это подробнее. Одномерный остов  $X^1$  представляет собой букет окружностей, поэтому  $\pi_1(X^1, e^0)$  — свободная группа с образующими  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , где  $k$  — количество 1-мерных клеток в  $X$ . Характеристическое отображение 2-мерной клетки  $\chi_i^2: D^2 \rightarrow X$  индуцирует отображение  $\beta_i: \partial D^2 \rightarrow X^1 \subset X$ . Выберем в  $S^1$  произвольную отмеченную точку  $s$ . Отображению  $\beta_i$  соответствует элемент фундаментальной группы  $\pi_1(X^1, \beta_i(s))$ . Этому элементу можно сопоставить элемент группы  $\pi_1(X^1, e^0)$ , выбрав путь из  $\beta_i(s)$  в  $e^0$ . Таким образом,  $i$ -й двумерной

клетке мы сопоставили элемент группы  $\pi_1(X^1, e^0)$ . Обозначим его тоже  $\beta_i$ ; элемент  $\beta_i$  определён с точностью до сопряжения. Легко проверить, что отображению  $\beta_i: S^1 \rightarrow X$  соответствует единичный элемент группы  $\pi_1(X, \beta_i(s))$ . Требуемая гомотопия изображена на рис. 105.

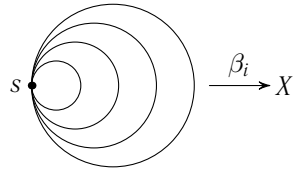


Рис. 105. Гомотопия

При естественном вложении  $X^1 \rightarrow X$  отображающие  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \pi_1(X^1, e^0)$  переходят в элементы  $a_1, \dots, a_k \in \pi_1(X, e^0)$ . Элемент  $\beta_i$  представляет собой некоторое слово в алфавите  $\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_k^{\pm 1}$ . Соответствующее ему слово  $b_i$  в алфавите  $a_1^{\pm 1}, \dots, a_k^{\pm 1}$  является единичным элементом группы  $\pi_1(X, e^0)$ , т.е. мы получаем соотношение  $b_i = 1$ , где  $b_i$  — некоторое слово в алфавите  $a_1^{\pm 1}, \dots, a_k^{\pm 1}$ . Соотношения  $b_i = 1$  и  $ab_i a^{-1} = 1$  эквивалентны, поэтому неоднозначность выбора элемента  $\beta_i$  с этой точки зрения несущественна.

**Теорема 20.1.** *Группа  $\pi_1(X, e^0)$  порождена элементами  $a_1, \dots, a_k$  и любое соотношение в этой группе сводится к соотношениям  $b_1, \dots, b_l$ . (Это означает, что если слову  $\beta$  в алфавите  $\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_k^{\pm 1}$  соответствует слово  $b$  в алфавите  $a_1^{\pm 1}, \dots, a_k^{\pm 1}$ , представляющее единичный элемент группы  $\pi_1(X, e^0)$ , то  $\beta \in N$ , где  $N$  — минимальная нормальная подгруппа в  $\pi_1(X^1, e^0)$ , содержащая элементы  $\beta_1, \dots, \beta_l$ .)*

**Доказательство.** Представим  $S^1$  в виде  $CW$ -комплекса с одной 0-мерной клеткой и одной 1-мерной клеткой; 0-мерную клетку будем считать отмеченной точкой  $s$ . Согласно теореме о клеточной аппроксимации любое непрерывное отображение  $(S^1, s) \rightarrow (X, e^0)$  гомотопнo клеточному отображению  $(S^1, s) \rightarrow (X^1, e^0)$ . Поэтому вложение  $X^1 \rightarrow X$  индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп  $\pi_1(X^1, e^0) \rightarrow \pi_1(X, e^0)$ , т.е. элементы  $a_1, \dots, a_k$  порождают группу  $\pi_1(X, e^0)$ .

Та же самая теорема о клеточной аппроксимации показывает, что вложение  $X^2 \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Действительно, вложение  $X^1 \rightarrow X$  индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп, поэтому достаточно проверить, что если две петли в  $X^1$  (с началом  $e^0$ ) гомотопны в пространстве  $X$ , то они гомотопны и в пространстве  $X^2$ . Гомотопия в пространстве  $X$  двух петель в  $X^1$  представляет собой отображение  $H: I^2 \rightarrow X$ . Представим квадрат  $I^2$  как  $CW$ -комплекс с 4 вершинами, 4 рёбрами и одной 2-мерной клеткой. Ограничение отображения  $H$  на  $\partial I^2$  является клеточным, поэтому отображение  $H$  гомотопнo клеточному отображению  $H': I^2 \rightarrow X^2$ , причём гомотопия неподвижна на  $\partial I^2$ . Отображение  $H'$  является искомой гомотопией в пространстве  $X^2$ .

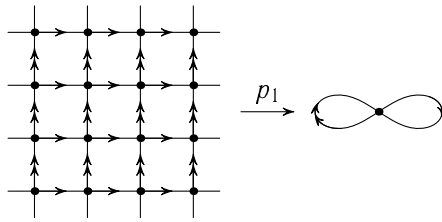


Рис. 106. Накрытие  $p_1$

Остаётся проверить, что ядром гомоморфизма  $\pi_1(X^1, e^0) \rightarrow \pi_1(X^2, e^0)$ , индуцированного вложением  $X^1 \rightarrow X^2$ , служит группа  $N$ . Рассмотрим накрытие  $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ , соответствующее подгруппе  $N \subset \pi_1(X^1, e_0)$ ; это означает, что  $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}^1, \tilde{e}_0) = N$ , где  $\tilde{e}_0 \in p^{-1}(e_0)$ . Например, если  $X^2$  — тор, а  $X^1$  — его 1-мерный остов (букет двух окружностей), то накрытие  $p_1$  устроено так, как показано на рис. 106.

Группа  $N$  нормальная, поэтому накрытие  $p_1$  регулярное. Согласно определению накрытия  $p_1$  поднятие каждой петли  $\beta_i: (S^1, s) \rightarrow (X^1, e^0)$  с началом  $\tilde{e}^0$  замкнуто. Из регулярности накрытия  $p_1$  следует, что любое поднятие  $\tilde{\beta}_{ij}$  петли  $\beta_i$  с началом  $\tilde{e}_j^0 \in p_1^{-1}(e^0)$  тоже замкнуто. Поэтому  $\tilde{\beta}_{ij}$  можно рассматривать как характеристическое отображение  $\tilde{\beta}_{ij}: \partial D_j^1 \rightarrow \tilde{X}^1$ . Приклеив к  $\tilde{X}^1$  посредством отображений  $\tilde{\beta}_{ij}$  2-мерные клетки, получим  $CW$ -комплекс  $\tilde{X}^2$ . При этом накрытие  $p_1$  можно продолжить до накрытия  $p_2: \tilde{X}^2 \rightarrow X^2$ .

Рассмотрим произвольную петлю  $\omega: (S^1, s) \rightarrow (X^1, e^0)$ , стягиваемую в  $X^2$ . Из стягиваемости петли  $\omega$  следует, что её поднятие в  $\tilde{X}^2$  замкнуто; при этом поднятие петли  $\omega$  целиком лежит в  $\tilde{X}^1$ . Поэтому петля  $\omega$  является проекцией петли в  $\tilde{X}^1$  с началом  $\tilde{e}^0$ . Следовательно, петля  $\omega$  представляет элемент группы  $N$ , что и требовалось.  $\square$

**С л е д с т в и е.** *Группа  $\pi_1(X, e^0)$  изоморфна  $\pi_1(X^2, e^0)$ , т.е. фундаментальная группа  $CW$ -комплекса полностью определяется 2-мерным остовом.*

### 20.2. Некоторые примеры

**П р и м е р.**  $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Двумерным остовом  $\mathbb{C}P^n$  служит  $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ .  $\square$

**П р и м е р.** Группа  $\pi_1(nT^2)$  порождена образующими  $a_1, b_1, \dots, a_n,$

$b_n$ , связанными единственным соотношением  $\prod_{i=1}^n (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обратитесь к рис. 70 на с. 163.  $\square$

**Пример.** Группа  $\pi_1(nP^2)$  порождена образующими  $a_1, \dots, a_n$ , связанными единственным соотношением  $a_1^2 \dots a_n^2 = 1$ .

Мы уже доказывали, что поверхности  $S^2, T^2, 2T^2, \dots, P^2, 2P^2, \dots$  попарно не гомеоморфны (теорема 11.5 на с. 161). С помощью фундаментальной группы это доказывается совсем просто. Напомним, что *коммутантом* группы  $G$  называют группу  $G'$ , состоящую из произведений элементов вида  $aba^{-1}b^{-1}$ , где  $a, b \in G$ . Тождество

$$xaba^{-1}b^{-1}\gamma x^{-1} = xax^{-1}a^{-1}a(xb)a^{-1}(xb)^{-1}x\gamma x^{-1}$$

показывает, что подгруппа  $G' \subset G$  нормальна. Ясно также, что факторгруппа  $G/G'$  коммутативна.

**У п р а ж н е н и е 1.** а) Докажите, что если  $G = \pi_1(nT^2)$ , то  $G/G' \cong \mathbb{Z}^{2n}$ .

б) Докажите, что если  $G = \pi_1(nP^2)$ , то  $G/G' \cong \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ .

Легко проверить, что группы  $\mathbb{Z}^{n_1} \oplus \mathbb{Z}_2^{\varepsilon_1}$  и  $\mathbb{Z}^{n_2} \oplus \mathbb{Z}_2^{\varepsilon_2}$ , где  $\varepsilon_i = 0$  или 1, изоморфны тогда и только тогда, когда  $n_1 = n_2$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ .

**З а д а ч а 20.1.** а) Докажите, что любая подгруппа конечного индекса группы  $\pi_1(nT^2)$  изоморфна  $\pi_1(mT^2)$  для некоторого  $m$  и при этом  $m - 1$  делится на  $n - 1$ .

б) Докажите, что любая подгруппа конечного индекса группы  $\pi_1(nP^2)$  изоморфна либо  $\pi_1(mP^2)$ , где  $m - 2$  делится на  $n - 2$ , либо  $\pi_1(mT^2)$ , где  $2(m - 1)$  делится на  $n - 2$ .

**Пример.** Фундаментальная группа поверхности  $nT^2$ , из которой вырезано  $k \geq 1$  дисков, является свободной группой ранга  $2n + k - 1$ .

**Доказательство.** Фундаментальная группа рассматриваемого пространства порождена образующими  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  и  $c_1, \dots, c_k$ , связанными единственным соотношением

$$c_1 \dots c_k \prod_{i=1}^n (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1$$

(рис. 107). Элемент  $c_k$  выражается через остальные элементы, между которыми уже нет никаких соотношений.  $\square$

**С л е д с т в и е.** Поверхность  $nT^2$ , из которой вырезано  $k \geq 1$  дисков, гомотопически эквивалентна букету  $2n + k - 1$  окружностей. (Это легко также доказать непосредственно, построив деформационную ретракцию.)

**Пример.** Фундаментальная группа поверхности  $nP^2$ , из которой вырезано  $k \geq 1$  дисков, является свободной группой ранга  $n + k - 1$ .

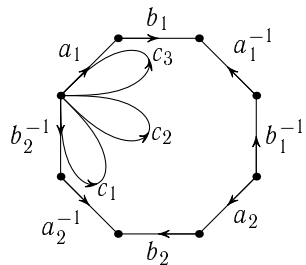


Рис. 107. Сфера с ручками, из которой вырезаны диски

Используя свойства фундаментальной группы, можно получить ещё одно доказательство того, что окружность  $S^1 = \partial D^2$  не является ретрактом диска  $D^2$ . А именно, предположим, что существует ретракция  $r: D^2 \rightarrow S^1$ . Тогда композиция отображений  $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$  является тождественным отображением, поэтому оно индуцирует тождественный гомоморфизм фундаментальных групп. Но композиция отображений  $\pi_1(A) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A)$  не может быть тождественным отображением, поскольку  $\pi_1(A) = \mathbb{Z}$  и  $\pi_1(X) = 0$ .

Более тонкие алгебраические рассуждения позволяют доказать следующие утверждения. Напомним, что на с. 85 доказано общее утверждение о том, что край компактного многообразия не может быть его ретрактом.

**Задача 20.2.** Пусть  $X$  — лист Мёбиуса,  $A$  — его край. Докажите, что  $A$  не является ретрактом пространства  $X$ .

**Задача 20.3.** а) Пусть  $X$  — тор  $T^2$ , из которого вырезан открытый диск  $D^2$ . Докажите, что  $A = \partial D^2$  не является ретрактом пространства  $X$ .

б) Докажите аналогичное утверждение, заменив  $T^2$  на сферу с  $g$  ручками.

**Задача 20.4.** Пусть  $X$  — замкнутая неориентируемая поверхность, из которой вырезан открытый диск  $D^2$ . Докажите, что  $A = \partial D^2$  не является ретрактом пространства  $X$ .

Разберём теперь более сложный пример вычисления фундаментальной группы. При этом основная трудность связана с описанием клеточной структуры пространства.

**Пример** (см. [59]). Пусть  $M_g^3$  — многообразие единичных касательных векторов к сфере с  $g$  ручками. Тогда группа  $\pi_1(M_g^3)$  порождена образующими  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c$ , которые связаны следующими соотношениями:  $a_i c = c a_i$ ,  $b_i c = c b_i$  и  $\prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = c^{2-2g}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим на многообразии  $M_g^2 = gT^2$  произвольное векторное поле с изолированными особыми точками. Можно считать, что все особые точки лежат внутри диска  $D^2 \subset M_g^2$ . Сумма индексов особых точек векторного поля на поверхности  $M_g^2$  равна  $2 - 2g$ , поэтому степень отображения  $\partial D^2 \rightarrow S^1$ , заданного формулой  $x \mapsto v(x)/\|v(x)\|$ , равна  $2 - 2g$ . Отображение  $\partial D^2 \rightarrow S^1$  гомотопно любому другому отображению той же самой степени. Эту гомотопию можно представить как векторное поле на кольце  $D^2 \setminus D_\varepsilon^2$ , где  $D_\varepsilon^2$  — концентрический с  $D^2$  диск. В результате можно построить векторное поле на  $M_g^2 \setminus D_\varepsilon^2$ , состоящее из векторов единичной длины; при этом

можно считать, что на  $\partial D^2$  векторное поле имеет следующий вид: при прохождении некоторой малой дуги вектор  $v(x)$  совершает  $2 - 2g$  оборотов, а вне этой дуги векторное поле постоянно. Продолжим это векторное поле внутрь  $D_\epsilon^2$  по радиусам (в центре диска векторное поле не определено).

С помощью построенного векторного поля  $v$  зададим характеристические отображения в  $M_g^3$  клеток размерности 1 и 2 следующим образом. Представим двумерную поверхность  $M_g^2$  посредством  $4g$ -угольника со склеенными сторонами. Мы будем предполагать, что центр диска  $D_\epsilon^2$  соответствует вершинам этого многоугольника и дуга окружности  $\partial D_\epsilon^2$ , вне которой векторное поле  $v$  постоянно, целиком расположена внутри одного из углов этого многоугольника (рис. 108).

Пусть  $v_0$  — постоянное значение векторного поля  $v$  вне указанной дуги. В качестве 0-мерной клетки  $M_g^3$  выберем пару (центр диска  $D_\epsilon^2$ , вектор  $v_0$ ). В качестве открытых 1-мерных клеток выберем следующие множества:

- пары (центр диска  $D_\epsilon^2$ , произвольный единичный вектор  $w \neq v_0$ );
- пары (точка  $x$ , вектор  $v(x)$ ), где точка  $x$  лежит внутри  $i$ -й стороны  $4g$ -угольника.

Ясно, что при продолжении по непрерывности соответствующих характеристических отображений  $(0, 1) \rightarrow M_g^3$  концы отрезка  $[0, 1]$  отображаются как раз в 0-мерную клетку.

Займёмся теперь построением 2-мерных клеток. Отобразим гомеоморфно внутренность  $4g$ -угольника на внутренность  $(4g + 1)$ -угольника,

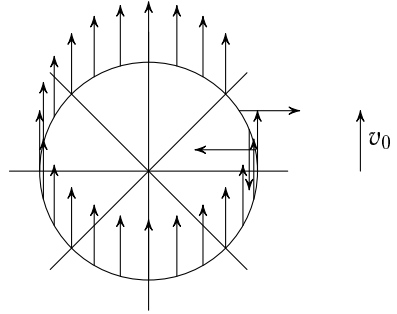


Рис. 108. Векторное поле

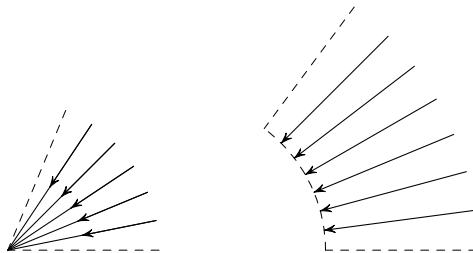


Рис. 109. Раздутие

«раздув» одну вершину (рис. 109); здесь имеется в виду вершина, соответствующая дуге, на которой векторное поле не постоянно. Замыкание  $(4g + 1)$ -угольника естественным образом отображается в  $M_g^3$  с помощью векторного поля  $v$ . А именно, все вершины отображаются в 0-мерную клетку; каждая внутренняя точка  $x$  отображается в пару  $(x, v(x))$ ; каждой точке «раздутой» стороны соответствует однозначно определённый предельный касательный вектор в центре диска  $D_\varepsilon^2$ ; остальные стороны отображаются на соответствующие 1-мерные клетки.

Помимо этой 2-мерной клетки рассмотрим ещё 2-мерные клетки, состоящие из всех единичных векторов в точках одной из сторон  $4g$ -угольника.

Легко проверить, что дополнение к объединению всех замкнутых 2-мерных клеток представляет собой открытую 3-мерную клетку. Действительно, дополнение состоит из единичных касательных векторов во внутренних точках  $4g$ -угольника, причём в каждой точке  $x$  берутся все векторы, отличные от  $v(x)$ . Такое множество гомеоморфно прямому произведению открытого  $4g$ -угольника на  $(0, 1)$ .

Образующие  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  соответствуют сторонам  $4g$ -угольника. Образующая  $c$  соответствует 1-мерной клетке над центром диска  $D_\varepsilon^2$ . Соотношение  $\prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = c^{2-2g}$  задаётся  $(4g + 1)$ -угольной клеткой (степень отображения «раздутой» стороны на 1-мерную клетку  $c$  равна  $2 - 2g$ ). Соотношения  $a_i c a_i^{-1} c^{-1} = 1$  и  $b_i c b_i^{-1} c^{-1} = 1$  задаются  $4$ -угольными клетками.  $\square$

**З а д а ч а 20.5.** Докажите, что  $M_0^3 \approx \mathbb{R}P^3$ . (Здесь  $M_0^3$  — многообразие единичных касательных векторов к  $S^2$ .)

### 20.3. Фундаментальная группа пространства $SO(n)$

При вычислении фундаментальной группы не обязательно выяснять клеточное строение данного пространства. Часто бывает достаточно рассмотреть точную последовательность некоторого расслоения.

**Пример.**  $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$  при  $n \geq 3$ . Образующей группы  $\pi_1(SO(n))$  служат вращения вокруг фиксированной оси.

**Доказательство.** Фиксируем в  $\mathbb{R}^{n+1}$  единичный вектор  $e$  и рассмотрим отображение  $SO(n+1) \rightarrow S^n$ , которое сопоставляет матрице  $A$  вектор  $Ae$ . Это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем  $SO(n)$ . Запишем точную последовательность этого расслоения:

$$\pi_2(S^n) \rightarrow \pi_1(SO(n)) \rightarrow \pi_1(SO(n+1)) \rightarrow \pi_1(S^n).$$



Если  $n \geq 3$ , то  $\pi_2(S^n) = \pi_1(S^n) = 0$ , поэтому  $\pi_1(\text{SO}(n)) \cong \pi_1(\text{SO}(n+1))$ . Кроме того,  $\text{SO}(3) \approx \mathbb{R}P^3$  (см. решение задачи 20.5) и  $\pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$ .

Если мы представим  $\mathbb{R}P^3$  как шар  $D^3$  с отождествлёнными диаметрально противоположными точками края, то при гомеоморфизме  $\text{SO}(3) \approx \mathbb{R}P^3$  вращения вокруг фиксированной оси переходят в некоторый диаметр этого шара. Диаметр шара  $D^3$  соответствует ненулевому элементу группы  $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$ , поскольку для накрытия  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  поднятие этого пути незамкнуто. При вложении  $\text{SO}(n) \rightarrow \text{SO}(n+1)$  вращения вокруг фиксированной оси переходят во вращения вокруг фиксированной оси, а образующая фундаментальной группы переходит в образующую фундаментальной группы.  $\square$

**Теорема Какутани.** Используя то, что  $\pi_1(\text{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$ , можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 20.2** (Какутани [79]). Пусть  $S^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \|u\| = 1\}$  и  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывное отображение. Тогда в  $\mathbb{R}^3$  можно выбрать ортонормированный базис  $u_1, u_2, u_3$  так, что  $f(u_1) = f(u_2) = f(u_3)$ .

**Доказательство.** Фиксируем ортонормированный базис  $e_1, e_2, e_3$  и рассмотрим отображение  $\varphi: \text{SO}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданное формулой  $\varphi(A) = (f(Ae_1), f(Ae_2), f(Ae_3))$ . Требуется доказать, что хотя бы одна точка  $\varphi(A)$  лежит на прямой  $l$ , заданной уравнением  $x = y = z$ . Предположим, что  $\varphi(\text{SO}(3))$  не пересекает эту прямую. Пусть  $\psi$  — композиция отображения  $\varphi$  и проекции на плоскость  $x + y + z = 0$  (эта плоскость ортогональна прямой  $l$ ). Согласно предположению начало координат не принадлежит образу отображения  $\psi$ , поэтому можно рассмотреть композицию отображения  $\psi$  и проекции из начала координат на единичную окружность  $S^1$  на данной плоскости. В результате получим отображение  $\bar{\psi}: \text{SO}(3) \rightarrow S^1$ . Рассмотрим ограничение отображения  $\bar{\psi}$  на подгруппу  $S^1 \rightarrow \text{SO}(3)$ , состоящую из поворотов вокруг прямой  $l$ .

Выясним, как устроена кривая  $\psi(S^1)$ . Пусть  $t$  — параметр на окружности  $S^1$  (угол поворота вокруг оси  $l$ ). При повороте на угол  $t = 2\pi/3$  векторы  $e_1, e_2, e_3$  переходят в  $e_2, e_3, e_1$ . На плоскости  $x + y + z = 0$  этому соответствует преобразование  $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$ . Легко убедиться, что это преобразование — поворот на угол  $2\pi/3$ . Действительно, косинус угла между векторами  $(x, y, z)$  и  $(y, z, x)$ , где  $z = -x - y$ , равен  $\frac{xy - (x+y)^2}{x^2 + y^2 - (x+y)^2} = -\frac{1}{2}$ . Поэтому кривая  $\psi(S^1)$  устроена следующим образом. При изменении  $t$  от 0 до  $2\pi/3$  она идёт из точки  $(x_0, y_0, z_0)$  в точку  $(y_0, z_0, x_0)$ . Следующий участок кривой, для  $t$  от  $2\pi/3$  до  $4\pi/3$ , получается из предыдущего поворотом на угол  $2\pi/3$ . Оставшаяся часть кривой получается ещё одним поворотом на угол  $2\pi/3$ . Кривая  $\bar{\psi}(S^1)$  устроена

аналогично. При изменении  $t$  от 0 до  $2\pi/3$  точка  $\bar{\psi}(t)$  поворачивается на угол  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ , где  $k$  — некоторое целое число. Поэтому при изменении  $t$  от 0 до  $2\pi$  точка  $\bar{\psi}(t)$  поворачивается на угол  $2\pi(3k+1) \neq 0$ . Это означает, что отображение  $\bar{\psi}: \text{SO}(3) \rightarrow S^1$  индуцирует ненулевой гомоморфизм  $\pi_1(\text{SO}(3)) \rightarrow \pi_1(S^1)$ . Но любой гомоморфизм  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$  нулевой.  $\square$

**С л е д с т в и е.** *Вокруг любого ограниченного выпуклого замкнутого множества  $K$  в  $\mathbb{R}^3$  можно описать куб.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для каждого единичного вектора  $u \in \mathbb{R}^3$  рассмотрим две опорные плоскости тела  $K$ , ортогональные  $u$ . Пусть  $f(u)$  — расстояние между этими опорными плоскостями. Применяя к  $f$  теорему Какутани, получаем требуемое.  $\square$

**Спинорная группа.** Если  $n \geq 3$ , то  $\pi_1(\text{SO}(n)) = \mathbb{Z}_2$ . Это означает, что  $\text{SO}(n)$  двулистно накрывается некоторым односвязным многообразием. Это многообразие обозначают  $\text{Spin}(n)$ . Оно, как и  $\text{SO}(n)$ , является группой. Группу  $\text{Spin}(n)$ , которую называют *спинорной группой*, можно построить следующим образом.

*Алгеброй Клиффорда  $C_n$*  называют ассоциативную алгебру с единицей, порождённую образующими  $e_1, \dots, e_n$ , которые удовлетворяют соотношениям  $e_i^2 = -1$  и  $e_i e_j + e_j e_i = 0$  при  $i \neq j$ . Пусть  $\mathbb{R}^n$  — линейное подпространство в  $C_n$ , натянутое на векторы  $e_1, \dots, e_n$ . Легко проверить, что  $(\sum x_i e_i)^2 = -\sum x_i^2$ , поэтому все ненулевые элементы  $\mathbb{R}^n \subset C_n$  обратимы. В частности, обратимы все элементы единичной сферы  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset C_n$ . В мультипликативной группе обратимых элементов  $C_n$  элементы единичной сферы  $S^{n-1}$  порождают некоторую подгруппу; эту подгруппу обозначают  $\text{pin}(n)$ . Группа  $\text{Spin}(n)$  — это некоторая часть группы  $\text{pin}(n)$ . Чтобы описать, какая именно часть, нам понадобится разложение линейного пространства  $C_n$  в прямую сумму  $C_n^0 \oplus C_n^1$ , где пространство  $C_n^i$  порождено произведениями вида  $e_{j_1} \dots e_{j_{2k+i}}$ ; пересечение пространств  $C_n^0$  и  $C_n^1$  состоит только из нуля, потому что применение соотношений  $e_i^2 = -1$  и  $e_i e_j + e_j e_i = 0$  не может изменить чётность числа образующих, входящих в произведение. Группа  $\text{Spin}(n)$  — это та часть группы  $\text{pin}(n)$ , которая лежит в  $C_n^0$ . По-другому можно сказать так: группа  $\text{Spin}(n)$  состоит из произведений  $u_1 u_2 \dots u_{2k}$ , где  $u_i \in S^{n-1}$ .

Для построения гомоморфизма  $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ , являющегося двулистным накрытием, нам потребуется инволютивный антиизоморфизм алгебры  $C_n$ , заданный формулой  $e_{i_1} \dots e_{i_k} \mapsto e_{i_k} \dots e_{i_1}$ ; при таком отображении элементы  $e_i^2$  и  $e_i e_j + e_j e_i$  остаются неподвижными, поэтому мы действительно получаем отображение алгебры  $C_n$  в себя. Это отображение мы будем обозначать  $u \mapsto u^*$ . Ясно, что  $(u^*)^* = u$  и  $(uv)^* = v^* u^*$ .

Сопоставим каждому элементу  $u \in \text{pin}(n)$  отображение  $\varphi(u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданное формулой  $\varphi(u)x = uxu^*$ . Прежде всего нужно проверить, что элемент  $uxu^*$  действительно лежит в  $\mathbb{R}^n$ , т.е. представляется в виде линейной комбинации элементов  $e_1, \dots, e_n$ . Достаточно рассмотреть случай, когда  $u \in S^{n-1}$ . Пусть  $u = \sum u_i e_i$  и  $x = \sum x_i e_i$ . Тогда  $ux = -\sum u_i x_i + \sum_{i \neq j} u_i x_j e_i e_j$ . В произведении  $uxu^* = ux$  есть часть, лежащая в  $\mathbb{R}^n$  по очевидным причинам. Оставшаяся часть имеет вид  $\sum u_i x_j u_k e_i e_j e_k$ , где суммирование ведётся по тройкам попарно различных чисел. Но  $e_i e_j e_k = -e_k e_j e_i$ , поэтому указанная сумма равна нулю.

Проверим, далее, что  $\varphi(u)$  — ортогональное преобразование. Прежде всего заметим, что если  $u = u_1 \dots u_k$ , где  $u_i \in S^{n-1}$ , то  $u^* u = uu^* = (-1)^k$ . Кроме того, как мы уже говорили,  $(\sum x_i e_i)^2 = -\sum x_i^2 = -\|x\|^2$ . Поэтому  $\|\varphi(u)x\|^2 = -uxu^* uxu^* = -(-1)^k ux^2 u^* = (-1)^k \|x\|^2 uu^* = \|x\|^2$ .

**Теорема 20.3.** *Отображение  $\varphi: \text{pin}(n) \rightarrow O(n)$  является эпиморфизмом групп. При этом  $\varphi^{-1}(SO(n)) = \text{Spin}(n)$  и  $\text{Ker } \varphi|_{\text{Spin}(n)} = \{1, -1\}$ .*

**Доказательство.** Ясно, что  $\varphi(uv)x = uvx(uv)^* = uvxu^* u^* = \varphi(u)\varphi(v)x$ . Поэтому  $\varphi$  — гомоморфизм групп.

Покажем, что если  $u \in S^{n-1}$ , то  $\varphi(u)$  — симметрия относительно гиперплоскости, ортогональной вектору  $u$ . Представим  $x$  в виде  $\lambda u + \omega$ , где  $\omega \perp u$ . Нужно проверить, что  $\varphi(u)x = -\lambda u + \omega$ . Но  $\varphi(u)x = u(\lambda u + \omega)u^* = u\lambda uu^* + u\omega u^* = -\lambda u + u\omega u^*$ . Остаётся проверить, что  $u\omega u^* = \omega$  (в рассматриваемом случае  $u^* = u$ ). Если  $\sum u_i \omega_i = 0$  и  $\sum u_i^2 = 1$ , то  $u\omega u = \sum_{i,j} u_i \omega_j u_i e_i e_j e_i = \sum_{i,j} u_i^2 \omega_j e_j = \sum \omega_j e_j = \omega$ . Любое ортогональное

преобразование можно представить в виде композиции симметрий относительно гиперплоскостей, поэтому  $\varphi$  — эпиморфизм. Ясно также, что ортогональное преобразование сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда оно является композицией чётного числа симметрий относительно гиперплоскостей. Поэтому  $\varphi^{-1}(SO(n)) = \text{Spin}(n)$ .

Предположим, что  $u \in \text{Spin}(n)$  и  $\varphi(u)x = x$  для всех  $x$ . Тогда, в частности,  $ue_i u^* = e_i$ , поэтому  $ue_i u^* u = e_i u$ . Но  $u^* u = 1$  для  $u \in \text{Spin}(n)$ . Значит,  $ue_i = e_i u$ . Наоборот, если  $ue_i = e_i u$  для всех  $i$  и  $u \in \text{Spin}(n)$ , то  $\varphi(u)x = x$  для всех  $x$ . Несложно проверить, что если  $u = \sum a_{i_1 \dots i_{2k}} e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}$ , то  $e_i u e_i^{-1} = -e_i u e_i = \sum (-1)^{\varepsilon(i)} a_{i_1 \dots i_{2k}} e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}$ , где  $\varepsilon(i) = 0$ , если  $i \notin \{i_1, \dots, i_{2k}\}$ , и  $\varepsilon(i) = 1$ , если  $i \in \{i_1, \dots, i_{2k}\}$ . Поэтому для элемента  $u \in C_n^0$  равенство  $e_i u = u e_i$  выполняется для всех  $i$  тогда и только тогда, когда  $u = \lambda \cdot 1$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Следовательно,  $\text{Ker } \varphi|_{\text{Spin}(n)} = \{1, -1\}$ .  $\square$

Итак, группа  $\text{Spin}(n)$  двулистно накрывает  $SO(n)$ . Остаётся проверить, что это накрытие нетривиальное, т.е. пространство  $\text{Spin}(n)$  связно.

Для этого достаточно проверить, что в  $\text{Spin}(n)$  есть путь, соединяющий точки 1 и  $-1$ . Этот путь можно задать формулой

$$(e_1 \cos t + e_2 \sin t)(e_1 \cos t - e_2 \sin t) = -\cos 2t - e_1 e_2 \sin 2t,$$

где  $t \in [0, \pi/2]$ .

## § 21. Теорема Зейферта—ван Кампена

### 21.1. Эквивалентные формулировки

Предположим, что линейно связное топологическое пространство  $X$  является объединением линейно связных множеств  $U_1$  и  $U_2$ , причём множество  $U_1 \cap U_2$  тоже линейно связно. Выберем точку  $x_0 \in U_1 \cap U_2$  и рассмотрим фундаментальные группы  $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ ,  $\pi_1(U_1, x_0)$  и  $\pi_1(U_2, x_0)$ . Предположим, что эти группы заданы наборами образующих  $S, S_1, S_2$  и соотношений  $R, R_1, R_2$ . Для краткости будем одинаково обозначать отображение топологических пространств и индуцированное им отображение фундаментальных групп. При вложении  $\psi_i: U_i \rightarrow X$  элемент  $s_i \in S_i$  в элемент  $\psi_i s_i \in \pi_1(X, x_0)$ , поэтому в  $\pi_1(X, x_0)$  можно рассмотреть наборы элементов (алфавиты)  $\psi_1 S_1$  и  $\psi_2 S_2$ ; при этом каждый элемент образа отображения  $\psi_i: \pi_1(U_i, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  можно записать в алфавите  $\psi_i S_i$ . Возьмём теперь элемент  $s \in S$  и рассмотрим его образ в  $\pi_1(U_i, x_0)$  при вложении  $\varphi_i: U_1 \cap U_2 \rightarrow U_i$ . Элемент  $\varphi_i s$  можно записать в алфавите  $S_i$ , а элемент  $\psi_i \varphi_i s$  можно записать в алфавите  $\psi_i S_i$ . При этом в группе  $\pi_1(X, x_0)$  выполняется соотношение  $\psi_1 \varphi_1 s = \psi_2 \varphi_2 s$ , поскольку  $\psi_1 \varphi_1 = \psi_2 \varphi_2$  (обе композиции задают одно и то же отображение — вложение  $U_1 \cap U_2$  в  $X$ ).

Итак, в группе  $\pi_1(X, x_0)$  есть элементы  $\psi_1 S_1$  и  $\psi_2 S_2$ , причём эти элементы связаны соотношениями  $\psi_1 R_1, \psi_2 R_2$  и  $\psi_1 \varphi_1 s = \psi_2 \varphi_2 s, s \in S$ . Рассмотрим группу  $G$ , порождённую образующими  $\psi_1 S_1, \psi_2 S_2$  и соотношениями  $\psi_1 R_1, \psi_2 R_2$  и  $\psi_1 \varphi_1 s = \psi_2 \varphi_2 s, s \in S$ . Естественно ожидать, что группа  $G$  изоморфна  $\pi_1(X, x_0)$ . Если не накладывать никаких ограничений (кроме линейной связности), то это утверждение неверно; соответствующий пример

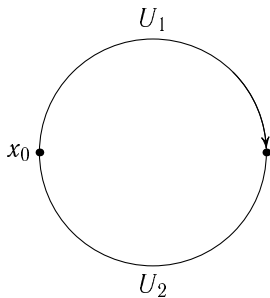


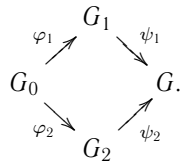
Рис. 110. Контрпример

можно построить для  $X = S^1$  (см. рис. 110). Но если на рассматриваемые пространства наложены некоторые ограничения, то это утверждение верно. Например, в 1931 г. Зейферт [121] доказал, что оно верно в случае, когда  $U_1$  и  $U_2$  — подкомплексы симплициального комплекса, а в 1933 г.

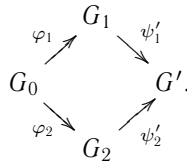
ван Кампен [133] доказал, что оно верно в случае, когда  $U_1$  и  $U_2$  открыты в  $X$ .

Теорема Зейферта (для  $CW$ -комплексов) очевидным образом следует из теоремы 20.1 на с. 283, но при одном дополнительном предположении: в качестве образующих фундаментальных групп выбраны 1-мерные клетки, а в качестве соотношений выбраны 2-мерные клетки. Поэтому, прежде чем двигаться дальше, дадим инвариантное определение группы  $G$ , не зависящее от выбора систем образующих и соотношений.

Пусть  $G_0, G_1, G_2$  — группы, заданные наборами образующих  $S, S_1, S_2$  и соотношений  $R, R_1, R_2$ . Для группы  $G$  задана коммутативная диаграмма гомоморфизмов

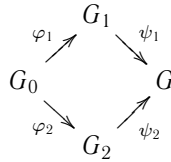


Предположим, что для некоторой группы  $G'$  задана коммутативная диаграмма гомоморфизмов



Покажем, что в таком случае существует единственный гомоморфизм  $\sigma: G \rightarrow G'$ , для которого  $\sigma\psi_i = \psi'_i$ . Пусть  $F$  — свободная группа с образующими  $\psi_1 S_1$  и  $\psi_2 S_2$ ;  $N$  — минимальная нормальная подгруппа  $F$ , содержащая слова  $\psi_1 R_1, \psi_2 R_2$  и  $\psi_1 \varphi_1 s (\psi_2 \varphi_2 s)^{-1}, s \in S$ . Для элемента  $s_i \in S_i$  положим  $\bar{\sigma}\psi_i s_i = \psi'_i s_i$ . Любое отображение образующих свободной группы  $F$  в произвольную группу однозначно продолжается до гомоморфизма, поэтому получаем гомоморфизм  $\bar{\sigma}: F \rightarrow G'$ . Если  $\bar{\sigma}(N) = 1$ , то гомоморфизм  $\bar{\sigma}$  индуцирует гомоморфизм  $\sigma: G \rightarrow G'$ , для которого  $\sigma\psi_i = \psi'_i$ . Поэтому нужно лишь проверить, что  $\bar{\sigma}(N) = 1$  (единственность гомоморфизма  $\sigma$  следует из того, что элементы  $\psi_1 S_1$  и  $\psi_2 S_2$  порождают группу  $G$ ). Если  $r_i \in R_i$ , то  $\bar{\sigma}\psi_i r_i = \psi'_i r_i = 1$ , поскольку слово  $r_i$  представляет единичный элемент группы  $G_i$ . Если  $s \in S$ , то  $\bar{\sigma}\psi_i \varphi_i s = \psi'_i \varphi_i s$ , поэтому из равенства  $\psi'_1 \varphi_1 = \psi'_2 \varphi_2$  следует, что  $\bar{\sigma}\psi_1 \varphi_1 s = \bar{\sigma}\psi_2 \varphi_2 s$ .

Рассмотрим всевозможные коммутативные диаграммы гомоморфизмов

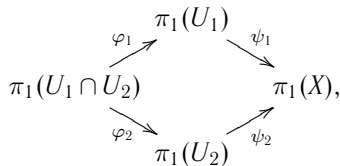


с фиксированными гомоморфизмами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Группу  $G$ , входящую в такую диаграмму, называют *амальгамой* групп  $G_1$  и  $G_2$  по отношению к группе  $G_0$  (и гомоморфизмам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ), если выполняется упомянутое выше универсальное свойство: для любой другой группы  $G'$ , входящей в аналогичную коммутативную диаграмму, существует единственный гомоморфизм  $\sigma: G \rightarrow G'$ , для которого  $\sigma\psi_i = \psi'_i$ . Чтобы получить инвариантное определение группы  $G$ , остаётся проверить, что амальгама определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Пусть  $G$  и  $G'$  — две амальгамы по отношению к одним и тем же группам. Тогда существуют гомоморфизмы  $\sigma: G \rightarrow G'$  и  $\sigma': G' \rightarrow G$ , для которых  $\sigma\psi_i = \psi'_i$  и  $\sigma'\psi'_i = \psi_i$ . Рассмотрим гомоморфизм  $\sigma'\sigma: G \rightarrow G$ . Он обладает следующим свойством:  $\sigma'\sigma\psi_i = \sigma'\psi'_i = \psi_i$ . По условию гомоморфизм  $G \rightarrow G$ , обладающий таким свойством, единствен. С другой стороны, тождественный гомоморфизм таким свойством обладает, поэтому  $\sigma'\sigma = \text{id}_G$ . Аналогично  $\sigma\sigma' = \text{id}_{G'}$ , а значит,  $\sigma$  — изоморфизм групп.

## 21.2. Доказательство

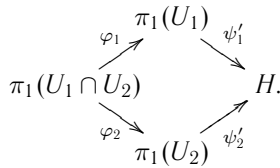
**Теорема 21.1** (ван Кампен). Пусть  $U_1$  и  $U_2$  — открытые линейно связные подмножества пространства  $X = U_1 \cup U_2$ , причём множество  $U_1 \cap U_2$  тоже линейно связно. Рассмотрим коммутативную диаграмму



индуцированную вложениями (все фундаментальные группы берутся с одной и той же отмеченной точкой  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ ). Тогда группа  $\pi_1(X)$  является амальгамой групп  $\pi_1(U_1)$  и  $\pi_1(U_2)$  по отношению к группе  $\pi_1(U_1 \cap U_2)$  и гомоморфизмам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Теорему ван Кампена удобнее доказывать в терминах образующих и соотношений, а не в терминах амальгам; выше мы объяснили, что обе формулировки эквивалентны.

До к а з а т е л ь с т в о (см. [50]). Рассмотрим коммутативную диаграмму



Требуется доказать, что существует единственный гомоморфизм  $\sigma: \pi_1(X) \rightarrow H$ , для которого  $\sigma\psi_i = \psi'_i$ . Единственность гомоморфизма  $\sigma$  легко выводится из следующего утверждения.

Ша г 1 (образующие). Образы групп  $\pi_1(U_1)$  и  $\pi_2(U_2)$  при гомоморфизмах  $\psi_1$  и  $\psi_2$  порождают группу  $\pi_1(X)$ .

Рассмотрим произвольную петлю  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  с началом и концом в точке  $x_0$ . Отрезок  $[0, 1]$  покрыт двумя открытыми множествами  $\alpha^{-1}(U_1)$  и  $\alpha^{-1}(U_2)$ . Пусть  $\delta$  — число Лебега этого покрытия. Выберем на отрезке  $[0, 1]$  точки  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1$  так, что  $t_{k+1} - t_k < \delta$ . Тогда образ каждого отрезка  $[t_k, t_{k+1}]$  целиком лежит в одном из множеств  $U_1$  или  $U_2$ . Петля  $\alpha$  представляет собой композицию путей (не обязательно замкнутых)  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ , где  $\alpha_k$  — ограничение отображения  $\alpha$  на отрезок  $[t_k, t_{k+1}]$ . Чтобы представить  $\alpha$  в виде композиции петель, соединим каждую точку  $\alpha(t_k) \in U_i$  с точкой  $x_0$  путём  $\beta_k$ , целиком лежащим в  $U_i$ ; при этом если  $\alpha(t_k) \in U_1 \cap U_2$ , то путь  $\beta_k$  должен целиком лежать в  $U_1 \cap U_2$ . В таком случае, если путь  $\alpha_k$  целиком лежит в  $U_i$ , то петля  $\beta_k^{-1}\alpha_k\beta_{k+1}$  тоже целиком лежит в  $U_i$ , поэтому класс петли  $\beta_k^{-1}\alpha_k\beta_{k+1}$  лежит в образе группы  $\pi_1(U_i)$  при гомоморфизме  $\psi_i$ . При этом петля  $\alpha$  представляет собой композицию петель  $\alpha_1\beta_2, \beta_2^{-1}\alpha_3\beta_3, \dots, \beta_{n-1}^{-1}\alpha_n\beta_n, \beta_n^{-1}\alpha_n$ .

Единственность гомоморфизма  $\sigma$  теперь легко доказывается. Действительно, представим элемент  $\alpha \in \pi_1(X)$  в виде  $\alpha = \prod_{k=1}^n \psi_{i(k)}\gamma_k$ , где  $\gamma_k \in \pi_1(U_{i(k)})$ . Из равенства  $\sigma\psi_i = \psi'_i$  следует, что  $\sigma\psi_{i(k)}\gamma_k = \psi'_{i(k)}\gamma_k$ . Поэтому

$$\sigma\alpha = \prod_{k=1}^n \psi'_{i(k)}\gamma_k. \tag{1}$$

Формула (1) полностью определяет гомоморфизм  $\sigma$ . Остаётся лишь проверить, что это определение корректно, т. е.  $\alpha = \prod_{k=1}^n \psi'_{i(k)} \gamma_k$  зависит

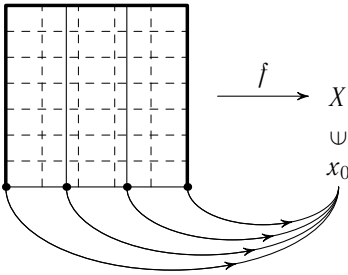


Рис. 111. Отображение квадрата

лишь от  $\alpha$  и не зависит от представления  $\alpha = \prod_{k=1}^n \psi_{i(k)} \gamma_k$ . Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

**Шаг 2** (соотношения). Если  $\gamma_k \in \pi_1(U_{i(k)})$  и  $\prod_{k=1}^n \psi_{i(k)} \gamma_k = 1$ , то  $\prod_{k=1}^n \psi'_{i(k)} \gamma_k = 1$ .

Равенство  $\prod_{k=1}^n \psi_{i(k)} \gamma_k = 1$  означает, что существует отображение  $f: I^2 \rightarrow X$ , обладающее следующими свойствами:

- ограничение отображения  $f$  на нижнюю сторону квадрата  $I^2$  представляет класс петли  $\prod_{k=1}^n \psi_{i(k)} \gamma_k$ ;
- отображение  $f$  переводит остальные стороны квадрата  $I^2$  в отмеченную точку  $x_0$  (рис. 111).

Пусть  $\delta$  — число Лебега покрытия квадрата  $I^2$  открытыми множествами  $f^{-1}(U_1)$  и  $f^{-1}(U_2)$ . Разобьём  $I^2$  на прямоугольники вертикальными и горизонтальными отрезками так, чтобы длина диагонали каждого прямоугольника была меньше  $\delta$ . При этом в набор таких отрезков мы включим все вертикальные отрезки, делящие нижнюю сторону квадрата на  $n$  равных отрезков (предполагается, что каждый из этих равных отрезков соответствует одному из путей  $\gamma_i$ ; в частности, концы этих отрезков отображаются в отмеченную точку  $x_0$ ).

По построению каждый прямоугольник целиком отображается в  $U_1$  или в  $U_2$ . Пусть  $a$  — вершина одного из прямоугольников. Соединим точку  $f(a)$  с отмеченной точкой  $x_0$  путём  $\omega_a$ . При этом будем предполагать, что если  $a \in U_i$ , то  $\omega_a \subset U_i$  (в частности, если  $a \in U_1 \cap U_2$ , то  $\omega_a \subset U_1 \cap U_2$ ), а если  $a = x_0$ , то  $\omega_a = x_0$  (постоянный путь).

Рассмотрим один из прямоугольников разбиения. Пусть  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{41}$  — его стороны (рис. 112). Легко проверить, что в пространстве  $X$  петля  $\beta_{12}\beta_{23}\beta_{34}\beta_{41}$ , где  $\beta_{pq} = \omega_p^{-1} f(\alpha_{pq}) \omega_q$ , стягиваема. Для этого нужно убедиться, что соответствующее отображение  $S^1 \rightarrow X$  можно продолжить до отображения  $D^2 \rightarrow X$ . Требуемое отображение  $D^2 \rightarrow X$  можно построить следующим образом. Сначала отображим  $D^2$  на прямоугольник с отрезками, выходящими из его вершин (рис. 113). На пря-



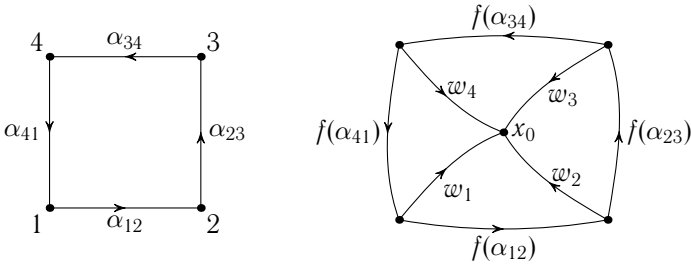


Рис. 112. Прямоугольник разбиения и его образ

моугольнике задано отображение  $f$ , а отрезки отображаются в  $X$  посредством  $\omega_p$ .

Элемент группы  $\pi_1(X)$ , представленный петлёй  $\beta_{pq}$ , обозначим тоже  $\beta_{pq}$ . По построению петля  $\beta_{pq}$  целиком лежит в  $U_1$  или в  $U_2$ , поэтому  $\beta_{pq} = \psi_i \beta_i$ , где  $\beta_i \in \pi_1(U_i)$ . Положим  $\beta'_{pq} = \psi'_i \beta_i \in H$ . Нужно проверить корректность такого определения. Действительно, петля  $\beta_{pq}$  может лежать в  $U_1 \cap U_2$ . Тогда  $\beta_{pq} = \psi_1 \beta_1 = \psi_2 \beta_2$ , где  $\beta_1 = \varphi_1 \beta$  и  $\beta_2 = \varphi_2 \beta$  для некоторого  $\beta \in \pi_1(U_1 \cap U_2)$ . Требуется доказать, что в таком случае  $\psi'_1 \beta_1 = \psi'_2 \beta_2$ . Но по условию  $\psi'_1 \varphi_1 = \psi'_2 \varphi_2$ ; следовательно,  $\psi'_1 \beta_1 = \psi'_1 \varphi_1 \beta = \psi'_2 \varphi_2 \beta = \psi'_2 \beta_2$ .

По построению в одном из множеств  $U_1$  или  $U_2$  целиком лежит не только петля  $\beta_{pq}$ , но и все четыре петли  $\beta_{12}, \beta_{23}, \beta_{34}, \beta_{41}$ , поэтому  $\beta_{pq} = \psi_i \delta_{pq}$ , где  $\delta_{pq} \in \pi_1(U_i)$ , причём  $i$  одно и то же для всех четырёх петель. Стягиваемость петли  $\delta_{12}\delta_{23}\delta_{34}\delta_{41}$  доказывается точно так же, как и стягиваемость петли  $\beta_{12}\beta_{23}\beta_{34}\beta_{41}$ ; нужно лишь заменить  $X$  на  $U_i$ . Следовательно,

$$\beta'_{12}\beta'_{23}\beta'_{34}\beta'_{41} = (\psi'_1 \delta_{12})(\psi'_2 \delta_{23})(\psi'_3 \delta_{34})(\psi'_4 \delta_{41}) = \psi'_i (\delta_{12}\delta_{23}\delta_{34}\delta_{41}) = \psi'_i (1) = 1.$$

Подведём итоги. Каждой из (ориентированных) сторон прямоугольников, на которые разбит квадрат  $I^2$ , мы сопоставили элемент группы  $H$ , причём для элементов, соответствующих сторонам одного прямоугольника, выполняется соотношение  $\beta'_{12}\beta'_{23}\beta'_{34}\beta'_{41} = 1$ . Требуется до-

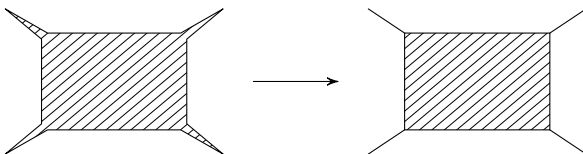


Рис. 113. Отображение диска

казать, что произведение элементов группы  $H$ , соответствующих нижней стороне квадрата, равно 1. Обозначим это произведение  $\Pi_0$  (рис. 114).

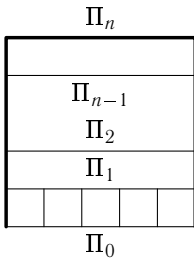


Рис. 114. Произведения  $\Pi_i$

Рассмотрим произведение всех соотношений вида  $\beta'_{12}\beta'_{23}\beta'_{34}\beta'_{41} = 1$  для прямоугольников, непосредственно примыкающих к нижней стороне квадрата. Это произведение нужно записывать так, чтобы общие стороны прямоугольников входили в него с противоположными ориентациями. При таком условии в результате получим  $\Pi_0 = \Pi_1$ , где  $\Pi_1$  — произведение элементов группы  $H$ , соответствующих второму снизу горизонтальному отрезку. (Элементы, соответствующие двум крайним вертикальным сторонам, не уничтожаются, но эти стороны целиком отображаются в отмеченную точку  $x_0$ , поэтому им соответствует единичный элемент группы.) Затем аналогично получаем  $\Pi_1 = \Pi_2, \dots, \Pi_{n-1} = \Pi_n$ . Но весь верхний горизонтальный отрезок отображается в отмеченную точку  $x_0$ , поэтому  $\Pi_n = 1$ .  $\square$

**С л е д с т в и е.** Если  $n \geq 3$ , то  $\pi_1(M^n) \cong \pi_1(M^n \setminus \{x\})$ , где  $x$  — произвольная точка многообразия  $M^n$ .

**З а м е ч а н и е.** Это утверждение можно доказать и без использования теоремы ван Кампена. Действительно, рассмотрим триангуляцию  $K$  многообразия  $M^n$ . Можно считать, что точка  $x$  лежит внутри симплекса  $\Delta^n$  триангуляции  $K$ . Тогда пространство  $M^n \setminus \{x\}$  гомотопически эквивалентно симплициальному комплексу, который получается из  $K$  удалением симплекса  $\Delta^n$ . Если  $n \geq 3$ , то 2-мерный остов не изменяется при удалении  $n$ -мерного симплекса.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем в качестве  $U_1$  окрестность точки  $x$ , гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$ ; в качестве отмеченной точки пространств  $M^n$  и  $M^n \setminus \{x\}$  выберем произвольную точку множества  $U_1 \setminus \{x\}$ . Множество  $\{x\}$  замкнуто, поэтому множество  $U_2 = M^n \setminus \{x\}$  открыто. Ясно, что  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \sim S^{n-1}$ . По условию  $n \geq 3$ , поэтому  $\pi_1(U_1 \cap U_2) = 1$ . Кроме того,  $\pi_1(U_1) = 1$ . Следовательно, группы  $\pi_1(M^n)$  и  $\pi_1(M^n \setminus \{x\})$  задаются одним и тем же набором образующих и соотношений.  $\square$

### 21.3. Группа узла

*Узлом* называют образ окружности при непрерывном отображении  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , а *группой узла*  $K$  называют группу  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0)$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$  — произвольная точка. Узел  $K$  называют *полигональным*, если отображение  $f$  кусочно линейно зависит от параметра  $\varphi$  на окруж-

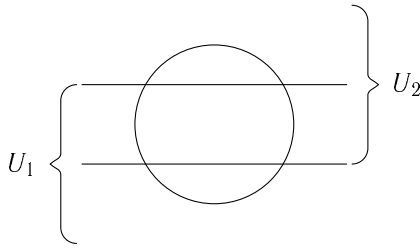


Рис. 115. Множества  $U_1$  и  $U_2$

ности  $S^1 = \{e^{i\varphi}\}$ . Узел  $K$  называют *гладким*, если отображение  $f$  гладкое и  $\text{grad } f = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)$  нигде не обращается в нуль.

Здесь мы займёмся вычислением группы полигонального (или гладкого) узла  $K$  с помощью теоремы ван Кампена. Чтобы освоиться с использованием теоремы ван Кампена, рассмотрим сначала простейший пример — вычислим группу *тривиального* узла  $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ ; здесь подразумевается, что  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  — обычная окружность.

**Пример.**  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) = \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Выберем в качестве  $U_1$  и  $U_2$  открытые подмножества  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ , схематично изображённые на рис. 115. Ясно, что  $U_1 \cap U_2 \sim S^1 \vee S^1$  и  $U_i \sim S^1$ . Выберем в группе  $\pi_1(U_1 \cap U_2)$  образующие  $a$  и  $b$ , а в группах  $\pi_1(U_1)$  и  $\pi_1(U_2)$  выберем образующие  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , как показано на рис. 116; на образующие  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  не наложено никаких соотношений. При гомоморфизме  $\varphi_i: \pi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \pi_1(U_i)$  оба элемента  $a$  и  $b$  переходят в один и тот же элемент  $\alpha_i$ . Поэтому группа  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$  порождена образующими  $\psi_1\alpha_1$  и  $\psi_2\alpha_2$ , связанными соотношением  $\psi_1\alpha_1 = \psi_2\alpha_2$ . В итоге получаем группу с одной образующей  $\alpha$ , на которую не наложено никаких соотношений.  $\square$

**Задача 21.1.** Докажите, что  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \vee S^1$ .

Для любого гладкого узла можно выбрать плоскость так, что для проекции узла на эту плоскость выполняются следующие условия:

- проекция любой касательной к узлу не вырождается в точку;

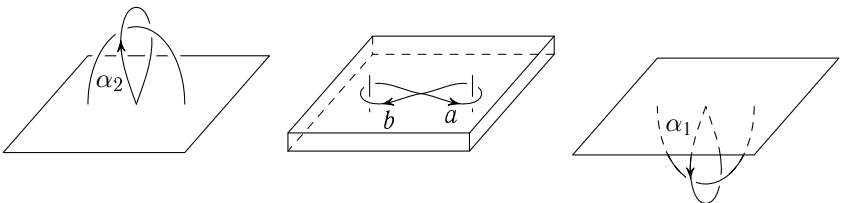


Рис. 116. Выбор образующих

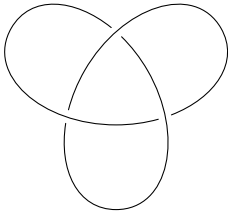


Рис. 117. Диаграмма узла

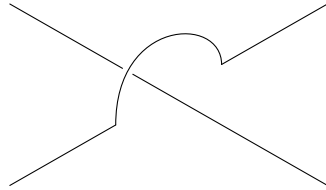


Рис. 118. Окрестность перекрёстка

— ни в какую точку не проецируется более двух различных точек узла;  
 — множество *перекрёстков* (точек плоскости, в которые проецируются две различные точки узла) конечно и проекции касательных к узлу в двух точках, соответствующих перекрёстку, не совпадают.

Для полигонального узла тоже можно выбрать плоскость проекции, обладающую аналогичными свойствами. При этом аналогом касательных к гладкому узлу являются прямые, содержащие звенья полигонального узла.

*Диаграммой* узла называют его проекцию на плоскость, для которой выполняются указанные выше условия. При этом на перекрёстках должно быть показано, какая ветвь узла проходит сверху, а какая снизу (рис. 117).

Рассмотрим вместо узла  $K$  узел  $K'$ , который совпадает с диаграммой узла  $K$  всюду, кроме малых окрестностей перекрёстков, а на перекрёстках одна из ветвей проходит сверху, а другая остаётся в плоскости диаграммы (рис. 118). Ясно, что группы узлов  $K$  и  $K'$  изоморфны, поскольку пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus K'$  гомотопически эквивалентны. При вычислении группы узла мы будем предполагать, что он расположен в пространстве именно так, как узел  $K'$ . Мы ограничимся одним простым примером — вычислим группу *трилистника*, изображённого на рис. 117. Но группу любого узла можно вычислить тем же самым способом.

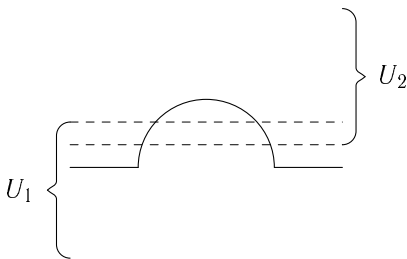


Рис. 119. Множества  $U_1$  и  $U_2$

Пример. Группа трилистника порождена образующими  $x$  и  $y$ , связанными соотношением  $yx = yxy$ .

**Доказательство.** В качестве  $U_1$  и  $U_2$  выберем открытые подмножества  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ , схематично изображённые на рис. 119. Множество  $U_i$  получается из полупространства выбрасыванием  $n$  дуг, где  $n$  — количество

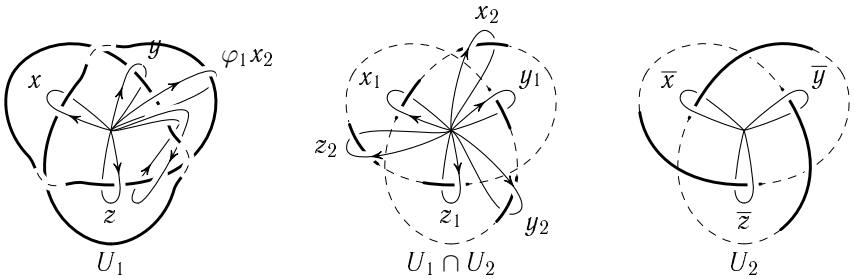


Рис. 120. Образующие фундаментальных групп

перекрёстков диаграммы узла. Легко проверить, что проекции этих дуг на плоскость диаграммы узла попарно не пересекаются, поэтому  $U_i$  гомотопически эквивалентно букету  $n$  окружностей. Ясно также, что  $U_1 \cap U_2$  гомотопически эквивалентно букету  $2n$  окружностей.

Выберем образующие фундаментальных групп  $\pi_1(U_1)$ ,  $\pi_1(U_1 \cap U_2)$  и  $\pi_1(U_2)$  так, как это показано на рис. 120 (на этом рисунке для группы  $\pi_1(U_1)$  помимо образующих изображена петля  $\varphi_1 x_2$  и гомотопная ей петля). Ясно, что  $\varphi_1 x_1 = x$ . Обратившись к рис. 120, можно убедиться, что  $\varphi_1 x_2 = yzy^{-1}$ . С пространством  $U_2$  ситуация проще:  $\varphi_1 x_1 = \varphi_1 x_2 = \bar{x}$ . Поэтому  $\psi_1 x = \psi_1 \bar{x}$  и  $\psi_1 (yzy^{-1}) = \psi_1 \bar{x}$ . В итоге получаем, что группа трилистника порождена образующими  $x, y$  и  $z$ , связанными соотношениями  $x = yzy^{-1}$ ,  $y = zxz^{-1}$  и  $z = xux^{-1}$ . Последнее соотношение позволяет выразить  $z$  через  $x$  и  $y$ . Подстановка этого выражения в любое из первых двух соотношений даёт одно и то же выражение, а именно,  $uxu = xux$ .  $\square$

Аналогичные рассуждения позволяют доказать следующее утверждение.

**Теорема 21.2.** *Рассмотрим диаграмму узла  $K$  и каждой дуге диаграммы сопоставим одну образующую (эти образующие будем обозначать стрелками, расположенными под диаграммой; изменение направления стрелки соответствует замене элемента  $a$  на  $a^{-1}$ ). Каждому перекрёстку сопоставим соотношение вида  $x = yzy^{-1}$  (см. рис. 121). Тогда группа, заданная такими образующими и соотношениями, изоморфна группе узла  $K$ .*

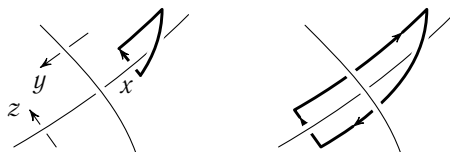


Рис. 121. Соотношение для перекрёстка

*С л е д с т в и е.* *Факторгруппа группы узла по её коммутанту изоморфна  $\mathbb{Z}$ .*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Если  $yz = zy$ , то  $x = yzy^{-1} = z$ . Остаётся заметить, что если для каждого перекрёстка соединить дуги  $x$  и  $z$ , то в результате получим связную кривую.  $\square$

Одно из применений группы узла связано с тем, что она позволяет в некоторых случаях доказать, что пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — узлы, не гомеоморфны.

*П р и м е р.* Если  $K$  — трилистник, то пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ .

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $G$  — группа трилистника. Как мы выяснили, она задаётся образующими  $x$  и  $y$ , связанными соотношением  $xux = yxy$ . Легко проверить, что в симметрической группе  $S_3$  элементы (12) и (23) удовлетворяют соотношению

$$(12)(23)(12) = (13) = (23)(12)(23).$$

Следовательно, существует гомоморфизм  $h: G \rightarrow S_3$ , для которого  $h(x) = (12)$  и  $h(y) = (23)$ . В образе этого гомоморфизма лежат транспозиции (12), (23) и (13), поэтому  $h$  — эпиморфизм. Но группа  $S_3$  неабелева, поэтому группа  $G$  тоже неабелева. В частности,  $G \neq \mathbb{Z}$ .  $\square$

*З а д а ч а 21.2.* Пусть  $p$  и  $q$  — взаимно простые числа,  $K$  — *тори-ческий узел* типа  $(p, q)$ , т. е. замкнутая кривая на стандартно вложенном торе, равномерно обвивающая его  $p$  раз в направлении меридиана и  $q$  раз в направлении параллели. Докажите, что группа узла  $K$  задана образующими  $x$  и  $y$ , связанными соотношением  $x^p = y^q$ .

## 21.4. Рогатая сфера Александра

*Рогатая сфера Александра* — это граница множества  $X \subset \mathbb{R}^3$ , которое гомеоморфно шару  $D^3$  и для которого пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus X$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^3 \setminus D^3$ . Множество  $X$  строится следующим образом. Пусть  $B_0$  — стандартный шар  $D^3$ . Приклеим к  $B_0$  ручку  $D^2 \times I$  (рис. 122); в результате получим  $X_0$ . Перерезав приклеенную ручку, получим диск  $B_1$ . К образовавшимся разрезам приклеим две ручки, зацепив их друг за друга (рис. 123). В результате получим  $X_1$ . Перерезав обе приклеенные ручки, получим диск  $B_2$ . С каждой перерезанной ручкой поступаем так же, как и раньше, т. е. приклеиваем к  $B_2$  две пары зацепленных ручек. В результате получаем  $X_2$  и т. д. Мы предполагаем, что  $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ , т. е. каждый раз вырезается цилиндр  $D^2 \times I$  и приклеиваемые ручки располагаются в вырезанной области.

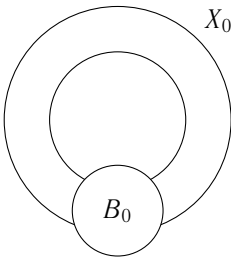


Рис. 122. Построение пространства  $X_0$

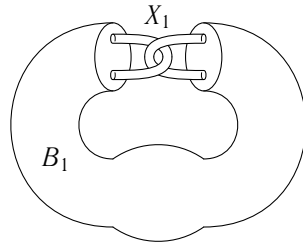


Рис. 123. Построение пространства  $X_1$

Эти построения можно выполнять так, чтобы существовали гомеоморфизмы  $h_n: B_n \rightarrow B_{n+1}$ , для которых  $\|x - h_n(x)\| \leq 1/2^n$ . Тогда существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \circ h_{n-1} \circ \dots \circ h_0 = h$ , причём отображение  $h$  непрерывно. Ясно также, что отображение  $h: B_0 \rightarrow h(B_0)$  взаимно однозначно, поэтому  $h$  — гомеоморфизм (теорема 7.2 на с. 100). Следовательно, пространство  $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = h(B_0)$  гомеоморфно шару  $D^3$ .

Займёмся теперь вычислением фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$ . Пусть  $Y_n = \mathbb{R}^3 \setminus X_n$ . Тогда  $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus X = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ . Ясно, что  $\pi_1(Y_0) = \mathbb{Z}$ , поскольку  $X_0$  — стандартно вложенное в  $\mathbb{R}^3$  полноторие. Покажем, что  $\pi_1(Y_1) = F_2$  — свободная группа с двумя образующими  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , причём включение  $Y_0 \rightarrow Y_1$  индуцирует мономорфизм  $\pi_1(Y_0) \rightarrow \pi_1(Y_1)$ , переводящий образующую  $\alpha$  группы  $\pi_1(Y_0)$  в коммутатор  $[\alpha_1, \alpha_2]$ .

Представим  $Y_1$  в виде объединения  $Y_0 \cup A$ , где пространство  $A$  изображено на рис. 124. Точнее говоря, чтобы применять теорему ван Кампена, вместо  $Y_0$  нужно было бы взять  $Y'_0 = Y_0 \cup Z$ , где  $Z$  — малая окрестность цилиндра  $S^1 \times I$  — боковой поверхности множества  $A$ . Но в рассматриваемой ситуации с гомотопической точки зрения это несущественно. Легко видеть, что пространство  $A$  (шар, из которого вырезаны две зацепленные

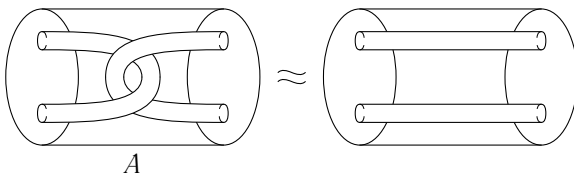
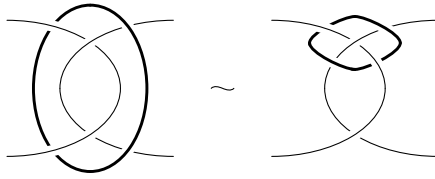


Рис. 124. Шар с двумя вырезанными трубочками

Рис. 125. Гомотопия петли  $\alpha$ 

ручки) гомеоморфно шару, из которого вырезаны две прямолинейные ручки. Поэтому фундаментальная группа  $\pi_1(A)$  является свободной группой с двумя образующими  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , представленными петлями, накинутыми на вырезанные ручки.

Образующая группы  $\pi_1(Y_0)$  представлена петлёй  $\alpha$ , которая накинута на вырезанные ручки так, как это показано на рис. 125. Эта петля гомотопна композиции петель  $\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$ . Следовательно, группа  $\pi_1(Y_1)$  порождена образующими  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые связаны соотношением  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$ .

Аналогичным образом можно получить  $Y_{n+1}$  из  $Y_n$ , приклеив  $2^n$  экземпляров множества  $A$ . В результате по индукции получим, что  $\pi_1(Y_{n+1})$  — свободная группа с  $2^{n+1}$  образующими, причём гомоморфизм  $\pi_1(Y_n) \rightarrow \pi_1(Y_{n+1})$ , индуцированный включением  $Y_n \rightarrow Y_{n+1}$ , является мономорфизмом.

Любая петля в  $\mathbb{R}^3 \setminus B$  компактна, поэтому она лежит в некотором множестве  $Y_n$ . Образ гомотопии двух петель тоже является компактным множеством. Поэтому группа  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B)$  изоморфна группе  $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_1(Y_n)$ .

Фундаментальная группа пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus D^3$  тривиальна, а группа  $G$  содержит, например, свободную группу с двумя образующими. Поэтому пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus X$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^3 \setminus D^3$ .

Обратите внимание, что фактор группы  $G$  по её коммутанту тривиален, поскольку каждая образующая является коммутатором двух других образующих.

## § 22. Фундаментальная группа дополнения алгебраической кривой

Плоская алгебраическая кривая  $C$  — это подмножество в  $\mathbb{C}P^2$ , заданное уравнением  $P(x, y, z) = 0$ , где  $P$  — однородный многочлен степени  $n \geq 1$ ; число  $n$  называют *степенью* кривой  $C$ . Кривую  $C$  называют *приводимой*, если  $P = P_1P_2$ , где  $P_1$  и  $P_2$  — однородные многочлены по-



ложительной степени. Точку кривой  $C$  называют *особой*, если в этой точке  $\text{grad } P = 0$ .

Вычислению группы  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$  посвящено много работ, первыми из которых были [147], [148], [149] и [132].

Мы начнём с разбора нескольких примеров, в которых  $C$  является объединением комплексных прямых в  $\mathbb{C}P^2$ . Это соответствует ситуации, когда многочлен  $P$  раскладывается на линейные множители.

### 22.1. Дополнение к набору комплексных прямых

Здесь мы займёмся вычислением группы  $\pi_1\left(\mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n l_i\right)$ , где  $l_1, \dots, l_n$  — комплексные прямые в  $\mathbb{C}P^2$ . Эта группа зависит не только от количества прямых, но и от их расположения. Мы рассмотрим несколько примеров расположения прямых. Отметим, что после выбрасывания одной прямой  $\mathbb{C}P^2$  превращается в  $\mathbb{C}^2$ , поэтому

$$\mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n l_i \approx \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \hat{l}_i,$$

где  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P^2 \setminus l_n$  и  $\hat{l}_i = l_i \cap \mathbb{C}^2$ . Таким образом, вычисление фундаментальной группы дополнения  $n$  прямых в  $\mathbb{C}P^2$  сводится к вычислению фундаментальной группы дополнения  $n - 1$  (комплексных) прямых в  $\mathbb{C}^2$ .

**Пример.** Если все прямые  $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{C}P^2$  проходят через одну точку, то  $\pi_1\left(\mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n l_i\right) = F_{n-1}$  (свободная группа с  $n - 1$  образующей).

**Доказательство.** В пространстве  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P^2 \setminus l_n$  прямые  $\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_{n-1}$  не пересекаются, поэтому можно выбрать комплексные координаты  $z$  и  $w$  так, что  $\hat{l}_i = \{(z, w) \mid w = c_i\}$ , где  $c_i$  — константа. Поэтому

$$\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \hat{l}_i \sim \mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_{n-1}\} \sim \bigvee_{i=1}^{n-1} S_i^1. \quad \square$$

**Пример.** Если прямые  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{C}P^2$  пересекаются в трёх различных точках, то  $\pi_1\left(\mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup_{i=1}^3 l_i\right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** В пространстве  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P^2 \setminus l_3$  прямые  $\hat{l}_1$  и  $\hat{l}_2$  пересекаются в некоторой точке, поэтому можно выбрать комплексные координаты  $z$  и  $w$  так, что эти прямые задаются уравнениями  $z = 0$  и  $w = 0$ . Начало координат не принадлежит  $\mathbb{C}^2 \setminus (\hat{l}_1 \cup \hat{l}_2)$ , поэтому с помощью проекции на  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  вдоль

вещественных лучей в  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ , проходящих через начало координат, можно показать, что пространство  $\mathbb{C}^2 \setminus (\hat{l}_1 \cup \hat{l}_2)$  гомотопически эквивалентно  $S^3 \cap (\mathbb{C}^2 \setminus (\hat{l}_1 \cup \hat{l}_2))$ . Последнее пространство представляет собой сферу  $S^3$ , из которой выброшены две окружности, заданные в  $S^3$  уравнениями  $z = 0$  и  $w = 0$ .

Выкалывание одной точки из многообразия размерности 3 не изменяет его фундаментальную группу (см. с. 298). Поэтому из  $S^3$  можно выколоть одну точку и перейти к пространству  $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2)$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — окружности. (Если  $K_1, \dots, K_n$  — попарно не пересекающиеся образы окружности при гомеоморфизмах  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , то множество  $K_1 \cup \dots \cup K_n \subset \mathbb{R}^3$  называют *n*-компонентным *зацеплением*.) Фундаментальная группа пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2)$  вычисляется точно так же, как вычисляется фундаментальная группа узла (см. пример на с. 300). Чтобы выяснить, как устроена диаграмма зацепления  $K_1 \cup K_2$ , рассмотрим стереографическую проекцию сферы  $S^3$  на подпространство  $\text{Re } w = 0$  из точки  $(0, 1)$ . Проекция окружности  $K_1$  представляет собой окружность в плоскости  $\text{Im } w = 0$  с центром в начале координат, а проекция окружности  $K_2$  представляет собой прямую  $z = 0$ . Поэтому диаграмма зацепления  $K_1 \cup K_2$  устроена так, как показано на рис. 126. Группа  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2))$  порождена образующими  $a$  и  $b$ , связанными соотношением  $b = aba^{-1}$ , т. е.  $ab = ba$  (второй перекрёсток даёт то же самое соотношение). □

Поясним теперь геометрически, как возникает соотношение  $ab = ba$  при обходе вокруг точки пересечения двух комплексных прямых. Элемент  $a$  задаётся единичной окружностью в плоскости  $w = w_0$ , а элемент  $b$  задаётся единичной окружностью в плоскости  $z = z_0$ . Будем обходить окружность  $b$ , перенося при этом окружность  $a$  параллельно (рис. 127). Формально это можно описать так. Будем считать, что  $z_0 = w_0 = 1$ . Пусть точка  $x(t) = (1, e^{it})$  равномерно движется по окружности  $b$ . В момент

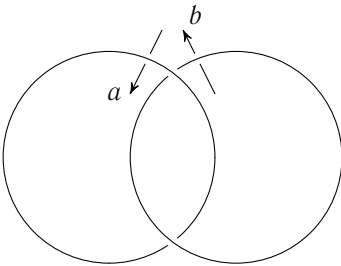


Рис. 126. Диаграмма зацепления  $K_1 \cup K_2$

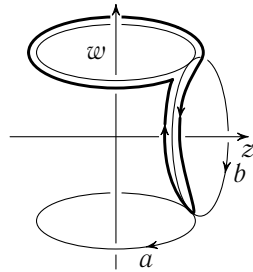


Рис. 127. Обход вокруг точки пересечения двух комплексных прямых

времени  $t$  рассмотрим петлю, которая сначала идёт от точки  $x_0 = (1, 1)$  до точки  $x(t)$ , затем проходит по окружности  $(e^{is}, e^{it})$ ,  $t = \text{const}$ , а после этого возвращается из  $x(t)$  в  $x_0$ . После полного обхода окружности  $b$  (т. е. при  $t = 2\pi$ ) получим петлю  $bab^{-1}$ ; эта петля гомотопна исходной петле  $a$ .

**Задача 22.1.** Пусть  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  — зацепление, диаграмма которого состоит из  $n$  непересекающихся окружностей (тривиальное  $n$ -компонентное зацепление). Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus L$  гомотопически эквивалентно букету  $n$  экземпляров пространства  $S^2 \vee S^1$ .

**Задача 22.2.** Пусть  $L = K_1 \cup K_2$  — зацепление, диаграмма которого изображена на рис. 126. Докажите, что  $\mathbb{R}^3 \setminus L \sim T^2 \vee S^2$ .

**Пример.** Пусть  $\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n$  — попарно различные прямые в  $\mathbb{C}^2$ , проходящие через начало координат. Тогда группа  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \bigcap_{i=1}^n \hat{l}_i)$  порождена образующими  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , связанными соотношениями

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n = \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1 = \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 = \dots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}.$$

**Доказательство.** Случай  $n = 2$  разобран в примере 22.1. Мы ограничимся разбором случаев  $n = 3$  и 4. Так же, как и в примере 22.1, вычисление требуемой фундаментальной группы сводится к вычислению групп зацеплений, изображённых на рис. 128 (все окружности попарно зацеплены).

При  $n = 3$  внутренние перекрёстки дают соотношения  $b_i = a_{i+2} a_i a_{i+2}^{-1}$ , а внешние перекрёстки дают соотношения  $a_i = a_{i+1} b_i a_{i+1}^{-1}$ . С помощью первых соотношений выражаем образующие  $b_1, b_2, b_3$  через  $a_1, a_2, a_3$ , а затем подставляем полученные выражения во вторые соотношения. В результате получаем, что искомая группа порождена образующими  $a_1, a_2$  и  $a_3$ , связанными соотношениями  $a_1 a_2 a_3 = a_2 a_3 a_1 = a_3 a_1 a_2$ .

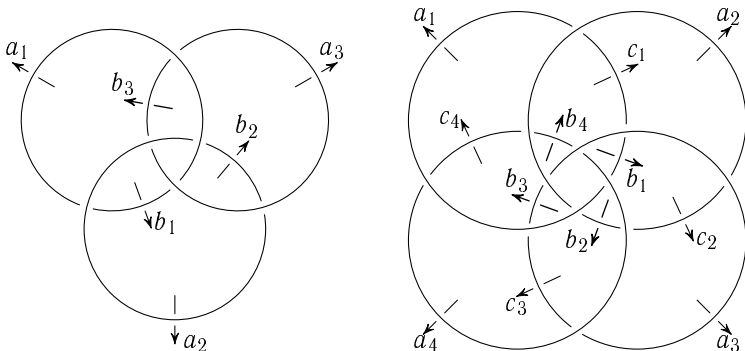


Рис. 128. Диаграммы двух зацеплений

При  $n = 4$  получаем соотношения  $b_i = a_{i+1}a_i a_{i+1}^{-1}$ ,  $c_i = a_{i+2}b_i a_{i+2}^{-1}$  и  $a_i = a_{i-1}c_i a_{i-1}^{-1}$ . Сначала выразим образующие  $\{b_i\}$  через  $\{a_i\}$ ; затем с помощью этих формул выразим  $\{c_i\}$  через  $\{a_i\}$ . Наконец, подставим полученные выражения в соотношения  $a_i = a_{i-1}c_i a_{i-1}^{-1}$ . В результате получим соотношения  $a_1 a_4 a_3 a_2 = a_4 a_3 a_2 a_1 = a_3 a_2 a_1 a_4 = a_2 a_1 a_4 a_3$ . Остаётся положить  $\alpha_1 = a_1$ ,  $\alpha_2 = a_4$ ,  $\alpha_3 = a_3$  и  $\alpha_4 = a_2$ .  $\square$

## 22.2. Теорема ван Кампена

В 1929 г. Зариский опубликовал статью [147], в которой предложил способ вычисления группы  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ . Вскоре он обнаружил, что это доказательство использует одно предположение, которое он не умеет доказывать (если бесконечная группа задана конечным набором образующих и соотношений, то пересечение всех её подгрупп конечного индекса состоит только из единичного элемента). В 1951 г. выяснилось, что это предположение неверно.

Другой способ вычисления группы  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$  предложил ван Кампен [132]. Доказанная им теорема о строении группы  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$  тесно связана с другой его теоремой, которую мы уже обсуждали (теорема 21.1 на с. 294). Обе эти теоремы ван Кампена были опубликованы в двух соседних статьях в одном и том же номере журнала.

Наше изложение теоремы ван Кампена о группе  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$  во многом следует работе [46].

Пусть кривая  $C$  задана уравнением  $P = 0$ , где  $P = P_1 P_2$ . Пусть, далее,  $C_1$  и  $C_2$  — кривые, заданные уравнениями  $P_1 = 0$  и  $P_2 = 0$ . Из равенства  $\text{grad } P = P_1 \text{ grad } P_2 + P_2 \text{ grad } P_1$  следует, что особыми точками кривой  $C$  являются точки пересечения кривых  $C_1$  и  $C_2$  и особые точки кривых  $C_1$  и  $C_2$ .

Мы будем предполагать, что кривая  $C$  степени  $n$  задана уравнением  $P = 0$ , где  $P = P_1 \dots P_k$  и все многочлены  $P_i$  неприводимы и попарно различны. Пусть  $C_i$  — кривая, заданная уравнением  $P_i = 0$ . Особыми точками кривой  $C$  служат особые точки кривых  $C_i$  и точки попарного пересечения этих кривых.

Пусть  $x_0 \in \mathbb{C}P^2 \setminus C$  — отмеченная точка. Покажем, что почти все прямые, проходящие через точку  $x_0$ , пересекают кривую  $C$  ровно в  $n$  различных точках (выражение «почти все» здесь означает «все, кроме конечного числа»). Точек попарного пересечения кривых  $C_1, \dots, C_k$  конечное число, поэтому достаточно рассмотреть прямые, не проходящие через эти точки. Прямая, не проходящая через точки пересечения кривых  $C_1, \dots, C_k$ , пересекает кривую  $C$  в  $n$  точках тогда и только тогда, когда она пересекает каждую кривую  $C_i$  в  $n_i$  точках, где  $n_i$  — степень кривой  $C_i$ .

Поэтому требуемое утверждение достаточно доказать для неприводимой кривой  $C_i$ . Прямая пересекает кривую  $C_i$  менее чем в  $n_i$  точках, если она касается кривой  $C_i$  или проходит через её особую точку. Из данной точки к неприводимой кривой  $C_i$  можно провести конечное число касательных (их количество не превосходит степени двойственной кривой  $C_i^*$ ). Количество особых точек неприводимой кривой тоже конечно.

Выберем прямую  $l$ , проходящую через точку  $x_0$  и пересекающую кривую  $C$  ровно в  $n$  различных точках. Затем выберем на прямой  $l$  точку  $a$ , которая отлична от  $x_0$  и не лежит на кривой  $C$ . Через точку  $a$  проведём все прямые  $l_0, l_1, \dots, l_s$ , которые пересекают кривую  $C$  менее чем в  $n$  различных точках. Точку  $a$  мы выберем так, чтобы на каждой из прямых  $l_0, l_1, \dots, l_s$  лежала ровно одна особая точка или точка касания. Наконец, через точку  $x_0$  проведём прямую  $t$ , отличную от прямой  $l$ , и рассмотрим точки  $a_0, a_1, \dots, a_s$ , в которых прямые  $l_0, \dots, l_s$  пересекают прямую  $t$  (рис. 129). Прямую  $t$  мы выберем так, чтобы она не проходила через точки пересечения кривой  $C$  с прямыми  $l_i$ , т.е. так, чтобы точки  $a_i$  не лежали на кривой  $C$ .

Положим  $E = \mathbb{C}P^2 \setminus (C \cap l_0 \cap \dots \cap l_s)$  и  $B = t \setminus \{a_0, \dots, a_s\}$ . Проекция из точки  $a$  на прямую  $t$  индуцирует отображение  $p: E \rightarrow B$ .

*Л е м м а.* *Отображение  $p: E \rightarrow B$  является локально тривиальным расслоением со слоем  $F$ , гомеоморфным  $\mathbb{C}$  без  $n$  точек.*

*Доказательство.* Покажем, что для любой точки  $x \in B$  найдётся такое открытое множество  $U \ni x$ , что отображение  $p$  над  $U$  является тривиальным расслоением. Выберем на прямой  $t$  произвольную точку  $x' \neq x$  и выбросим из  $\mathbb{C}P^2$  прямую  $ax'$ . На оставшемся множестве, гомеоморфном  $\mathbb{C}^2$ , в качестве координатных осей выберем прямую  $t$  и одну из прямых в  $\mathbb{C}P^2$ , проходящих через точку  $a$ . В таких координатах проек-

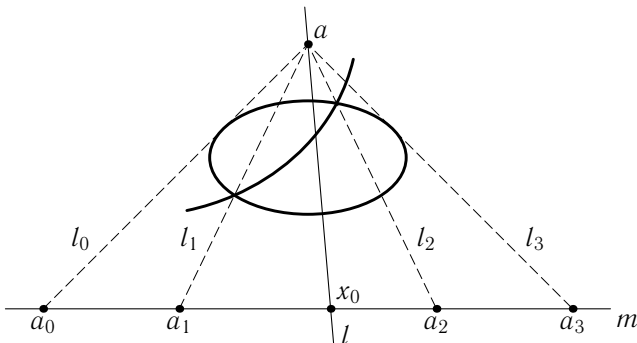


Рис. 129. Проекция кривой  $C$  на прямую  $t$

ция из точки  $a$  на прямую  $m$  имеет вид  $(z, \omega) \mapsto (z, 0)$ . Если окрестность  $U \subset B$  достаточно мала, то над ней ветви кривой  $C$  достаточно хорошо приближаются прямыми  $\omega = \alpha_i z + \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Прямых  $z = \text{const}$  здесь нет, потому что мы исключили касательные к кривой  $C$ . Точек пересечения прямых  $\omega_i = \alpha_i z + \beta_i$  над достаточно малой областью  $U$  нет, потому что над ней нет особых точек кривой  $C$ . Поэтому ветви кривой  $C$  над малой областью  $U \subset B$  достаточно хорошо приближаются прямыми  $\omega = c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . «Достаточно хорошо» означает, в частности, что множество  $p^{-1}(U)$  гомеоморфно  $U \times (\mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_n\})$ , причём гомеоморфизм согласован с отображением  $p$ .  $\square$

Пространство  $B = m \setminus \{a_0, \dots, a_s\}$  гомотопически эквивалентно букету  $s$  окружностей. Образующими группы  $\pi_1(B, x_0)$  служат петли  $h_1, \dots, h_s$ , каждая из которых охватывает ровно одну из точек  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ ; между этими образующими нет никаких соотношений, но если добавить петлю  $h_0$ , охватывающую точку  $a_0$ , то возникает соотношение  $h_0 h_1 \dots h_s = 1$ .

В качестве образующих группы  $\pi_1(F, x_0)$  выберем петли  $g_1, \dots, g_n$ , каждая из которых охватывает ровно одну из точек, выколотых из  $C$ . Более того, для дальнейших целей нам потребуется, чтобы композиция этих петель в  $\mathbb{C}P^1$  была гомотопна петле, охватывающей точку  $a$  (слой  $F$  представляет собой комплексную проективную прямую  $\mathbb{C}P^1$ , из которой выколоты точка  $a$  и  $n$  точек пересечения этой прямой с кривой  $C$ ). Такой выбор образующих означает, что после добавления точки  $a$  возникает соотношение  $g_1 \dots g_n = 1$ .

Чтобы вычислить группу  $\pi_1(E, x_0)$ , воспользуемся точной последовательностью расслоения

$$\pi_2(B, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(F, x_0).$$

Слой  $F$  связан, поэтому  $\pi_0(F, x_0) = 1$ . Кроме того, пространство  $B$  гомотопически эквивалентно букету окружностей, а универсальное накрывающее пространство букета окружностей стягиваемо. Поэтому  $\pi_2(B, x_0) = 1$ . В результате получаем

$$1 \rightarrow \pi_1(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, x_0) \rightarrow 1.$$

Группа  $\pi_1(F, x_0)$ , порождённая свободными образующими  $g_1, \dots, g_n$ , мономорфно отображается в  $\pi_1(E, x_0)$ . Поэтому можно отождествить группу  $\pi_1(F, x_0)$  с подгруппой  $G = i_* \pi_1(F, x_0) \subset \pi_1(E, x_0)$ . Группа  $\pi_1(B, x_0)$  порождена свободными образующими  $h_1, \dots, h_s$ . В рассматриваемой ситуации пространство  $B$  содержится в  $E$ , поэтому в  $\pi_1(E, x_0)$  можно выбрать элементы, представленные теми же самыми петлями, что и эле-

менты  $h_1, \dots, h_s$  группы  $\pi_1(B, x_0)$ ; для этих элементов группы  $\pi_1(E, x_0)$  мы будем использовать те же самые обозначения.

Вычисление группы  $\pi_1(E, x_0)$  существенно облегчается тем, что группа  $\pi_1(B, x_0)$  свободная. Действительно, для свободной группы любое отображение свободных образующих в некоторую группу (однозначно) продолжается до гомоморфизма групп. Поэтому существует единственный гомоморфизм  $\varphi: \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(E, x_0)$ , для которого  $\varphi(h_i) = h_i$ . Подгруппа  $H = \varphi\pi_1(B, x_0) \subset \pi_1(E, x_0)$  изоморфна  $\pi_1(B, x_0)$ , поскольку  $p_*\varphi = \text{id}_{\pi_1(B, x_0)}$  и  $\varphi p_*|_H = \text{id}_H$ .

Каждый элемент  $\omega \in \pi_1(E, x_0)$  однозначно представляется в виде  $\omega = gh$ , где  $g \in G$  и  $h \in H$ . А именно,  $h = p_*(\omega)$  и  $g = \omega^{-1}h$ . Кроме того,

$$(gh)(g'h') = (ghg'h^{-1})hh', \text{ где } hg'h^{-1} \in G.$$

Поэтому группа  $\pi_1(E, x_0)$  полностью определяется группами  $G$  и  $H$  и следующим действием группы  $H$  на  $G$ :  $h(g) = hgh^{-1} \in G$ . Следовательно, группа  $\pi_1(E, x_0)$  задаётся образующими  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_s$  и соотношениями  $h_j g_i h_j^{-1} = \psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$ , где  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$  — выражение элемента  $h_j g_i h_j^{-1} \in G$  через образующие  $g_1, \dots, g_n$ .

Мы вычислили группу  $\pi_1(E, x_0)$ . Следующий шаг — вычисление группы  $\pi_1(E', x_0)$ , где

$$E' = \mathbb{C}P^2 \setminus (C \cup l_0) = E \cup (E' \cap (l_1 \cup \dots \cup l_s)).$$

Множество  $E' \cap (l_1 \cup \dots \cup l_s)$  является подмногообразием коразмерности 2 многообразия  $E'$ , поэтому вложение  $E \rightarrow E'$  индуцирует эпиморфизм  $\pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(E', x_0)$ . Действительно, любая петля в  $E'$  гомотопна петле, не пересекающей  $l_1, \dots, l_s$ . Следовательно, группа  $\pi_1(E', x_0)$  задаётся теми же самыми образующими  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_s$ , но к прежним соотношениям могут добавиться новые соотношения. Например, в  $E'$  петля  $h_i$  стягиваема (рис. 130), поэтому получаем новые соотношения  $h_i = 1, i = 1, \dots, s$ . Покажем, что никаких других новых соотношений не возникает. Рассмотрим в  $E'$

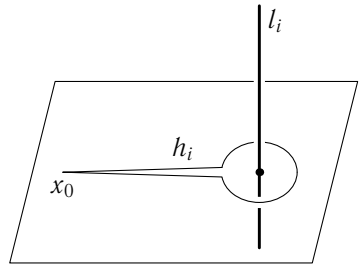


Рис. 130. Стягиваемая петля

произвольную гомотопию некоторой петли  $\gamma$  в постоянную петлю  $x_0$ . Можно считать, что петля  $\gamma$  гладкая и не пересекает прямых  $l_1, \dots, l_s$ . Сначала заменим рассматриваемую гомотопию гладкой гомотопией, а затем слегка пошевелим гладкую гомотопию так, чтобы для полученной гомотопии  $\Psi$  точки  $a_1, \dots, a_s$  не были бы критическими

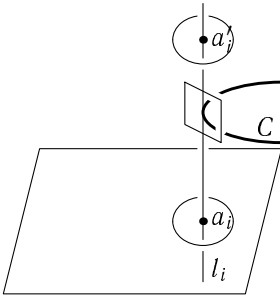


Рис. 131. Стандартная петля

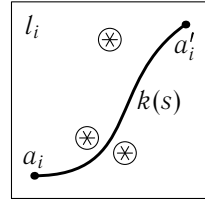


Рис. 132. Путь из  $a_i$  в  $a'_i$

точками отображения  $p\Psi$ , где  $p$  — проекция из точки  $a$  на прямую  $m$ . Отображение  $\Psi: I^2 \rightarrow E'$  обладает следующим свойством: прообраз множества  $l_1 \cup \dots \cup l_s$  состоит из конечного числа внутренних точек квадрата  $I^2$  (граничные точки квадрата отображаются в точку  $x_0$  или в другие точки петли  $\gamma$ ; все эти точки не лежат на прямых  $l_1, \dots, l_s$ ).

Основная трудность связана с тем, что произвольную петлю в  $U \setminus l_i$ , где  $U$  — достаточно малая окрестность точки  $a'_i \in l_i \setminus C$ , нужно посредством гомотопии в пространстве  $E$  заменить на стандартную петлю, лежащую на окружности с центром  $a_i$ , расположенной на комплексной прямой  $m \setminus \{a_0\}$  (рис. 131); здесь пока подразумевается гомотопия петель в классе всех отображений  $S^1 \rightarrow E$ , т.е. образ отмеченной точки при гомотопии может сдвигаться. Для построения такой гомотопии рассмотрим путь  $k(s)$  на комплексной прямой  $l_i \setminus \{a\}$ , соединяющий точки  $a'_i$  и  $a_i$  и не проходящий через точки  $l_i \cap C$  (рис. 132). Требуемая гомотопия строится следующим образом. В пространстве  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P^2 \setminus l_0$  проекция из точки  $a$  на комплексную прямую  $m \setminus \{a_0\}$  в некоторых координатах имеет вид  $(z, w) \mapsto (z, 0)$ . При этом  $a_i = (z_0, 0)$  и  $a'_i = (z_0, w_0)$ . Петля в  $U \setminus l_i$ , заданная формулой  $\gamma'(t) = (z(t), w(t))$ , гомотопна петле  $\gamma''(t) = (z(t), w_0)$ . Предположим, что петля  $\gamma''$  достаточно мала, а минимальное расстояние  $\rho$  от пути  $k(s)$  до точек  $l_i \cap C$  достаточно велико, а именно,  $\rho > \max |z(t) - z_0|$ . Тогда формула  $\gamma_s(t) = (z(t), k(s))$  задаёт гомотопию в пространстве  $E$  петли  $\gamma_0 = \gamma''$  в петлю  $\gamma_1$ , целиком лежащую на комплексной прямой  $m \setminus \{a_0\}$ . При этом петля  $\gamma_1$  расположена в малой окрестности точки  $a_i$  и не проходит через эту точку. Такая петля гомотопна петле, расположенной на окружности с центром  $a_i$ .

От гомотопности в классе всех петель можно следующим образом перейти к гомотопности в классе петель с фиксированной начальной точкой  $x_0$ . Пусть  $\gamma_s(t)$  — гомотопия петли  $\gamma_0(t)$  в петлю  $\gamma_1(t)$ ,  $\mu(\tau)$  — путь



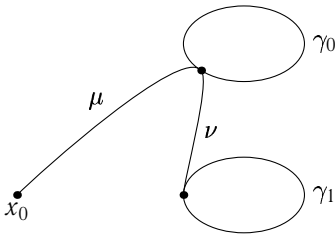


Рис. 133. Гомотопные петли

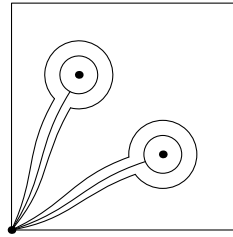


Рис. 134. Построение гомотопии

из точки  $x_0$  в точку  $\gamma_0(0)$ ,  $\nu(s) = \gamma_s(0)$  — путь из точки  $\gamma_0(0)$  в точку  $\gamma_1(0)$ . Тогда петли  $\mu\gamma_0\mu^{-1}$  и  $\mu\nu\gamma_1\nu^{-1}\mu^{-1}$  гомотопны (рис. 133).

Вернёмся к гомотопии  $\Psi$ , построенной на с. 311. В пространстве  $E$  петля  $\gamma$ , стягиваемая в пространстве  $E'$ , гомотопна петле  $\prod \mu_k \gamma_k \mu_k^{-1}$ , где  $\gamma_k$  — петля в малой окрестности точки прямой  $l_{i(k)}$ ; построение этой гомотопии ясно из рис. 134. На языке заданий групп образующими и соотношениями это означает, что слово, представляющее единичный элемент группы  $\pi_1(E', x_0)$ , можно привести к виду  $\prod \mu_k \gamma_k \mu_k^{-1}$ , пользуясь только соотношениями между элементами группы  $\pi_1(E, x_0)$ ; здесь мы предполагаем, что обе группы заданы одними и теми же образующими (указанными ранее). Выше было показано, что петля  $\mu_k \gamma_k \mu_k^{-1}$  гомотопна в  $E$  петле  $\mu'_k h'_{i(k)} (\mu'_k)^{-1}$ , где  $h_{i(k)}$  — петля, входящая в набор образующих  $h_1, \dots, h_s$ ,  $r$  — некоторое целое число. Это означает, что слово  $\mu_k \gamma_k \mu_k^{-1}$  можно привести к виду  $\mu'_k h'_{i(k)} (\mu'_k)^{-1}$ , пользуясь только соотношениями между образующими группы  $\pi_1(E, x_0)$ . Наконец, из соотношения  $h_{i(k)} = 1$  следует, что  $\mu'_k h'_{i(k)} (\mu'_k)^{-1} = 1$ . Это означает, что если слово  $\gamma$  представляет единичный элемент группы  $\pi_1(E', x_0)$ , то равенство  $\gamma = 1$  следует из соотношений между элементами группы  $\pi_1(E, x_0)$  и соотношений  $h_1 = 1, \dots, h_s = 1$ .

Последний шаг — вычисление группы  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C)$ , где  $\mathbb{C}P^2 \setminus C = E' \cup (l_0 \setminus C)$ . Как мы уже упоминали (см. с. 310), после добавления точки  $a \in l_0 \setminus C$  возникает соотношение  $g_1 \dots g_n = 1$ . Те же самые рассуждения, что и на предыдущем шаге, показывают, что никаких других соотношений не возникает.

Сформулируем теперь окончательный результат. Напомним, что определение  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$  дано на с. 311.

**Теорема 22.1** (ван Кампен [132]). Пусть  $C$  — кривая степени  $n$  в  $\mathbb{C}P^2$ ,  $a \in \mathbb{C}P^2 \setminus C$  — некоторая точка,  $l_0, l_1, \dots, l_s$  — прямые, каждая из которых проходит через точку  $a$  и либо касается кривой  $C$  в одной точке, либо проходит через одну особую точку кривой  $C$ . Тогда группа  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C, x_0)$  задаётся образующими

$g_1, \dots, g_n$  и  $ns + 1$  соотношениями  $g_1 \dots g_n = 1$ ,  $g_i = \psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

### 22.3. Применения теоремы ван Кампена

Теорема ван Кампена даёт алгоритм вычисления группы  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C, x_0)$ . Наибольшую сложность при пользовании этим алгоритмом представляет вычисление выражений  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$ . Поэтому мы начнём с того, что более подробно обсудим геометрический смысл выражения  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$ .

Напомним определение элемента  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n) \in \pi_1(F, x_0)$ , где  $F$  — слой над точкой  $x_0$ . Слой  $F$  представляет собой  $\mathbb{C}$  без  $n$  точек. Пусть  $g_1, \dots, g_n$  — петли, каждая из которых обходит вокруг одной из этих точек (в одном и том же направлении). База  $B$  представляет собой  $\mathbb{C}$  без  $s$  точек; петли  $h_1, \dots, h_s$  получаются аналогично. Петля  $h_j g_i h_j^{-1}$  гомотопна петле, расположенной в слое  $F$ . Запись элемента  $h_j g_i h_j^{-1}$  в алфавите  $g_1, \dots, g_n$  — это и есть  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$ . Гомотопию петли  $h_j g_i h_j^{-1}$  можно представить следующим образом (см. рис. 135). Мы берём петлю  $g_i$  и проносим её вдоль петли  $h_j$  (так, чтобы для каждой точки петли  $h_j$  получалась петля в слое над этой точкой). После обхода вокруг точки  $a_j$  мы возвращаемся в слой над точкой  $x_0$  и получаем петлю в этом слое. Эта новая петля и есть  $\psi_{ij}(g_1, \dots, g_n)$ .

**Пример.** Пусть  $C_2$  — невырожденная коника в  $\mathbb{C}P^2$  (например, её можно задать уравнением  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ ). Тогда  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_2) = \mathbb{Z}_2$ .

**Доказательство.** Из любой точки  $a \notin C_2$  к конике  $C_2$  можно провести ровно две касательные (рис. 136). Группа  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_2)$  порождена образующими  $g_1$  и  $g_2$ , связанными соотношениями  $g_1 g_2 = 1$  и  $g_i = \psi_{i1}(g_1, g_2)$ ,  $i = 1, 2$ .

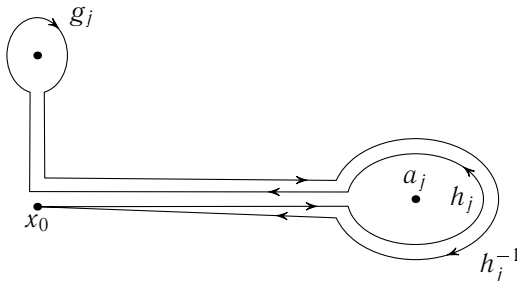


Рис. 135. Гомотопия петли  $h_j g_i h_j^{-1}$

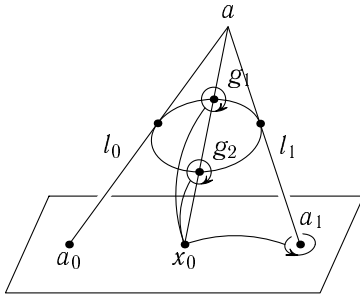


Рис. 136. Касательные к конике

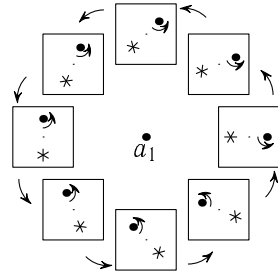


Рис. 137. Обход вокруг начала координат

Вместо того чтобы рассматривать обход вокруг касательной к конике можно рассмотреть более простую ситуацию: обход вокруг комплексной прямой  $z = 0$ , касающейся кривой  $z = \omega^2$  в  $\mathbb{C}^2$ . Если  $z = e^{i\varphi}$ , то  $\omega = \pm e^{i\varphi/2}$ , поэтому при обходе вокруг начала координат в вещественной плоскости  $\omega = 0$  ветви функции  $\omega(z)$  переставляются, но ориентация петель в вещественной плоскости  $z = \text{const}$  при этом сохраняются (рис. 137). Это означает, что  $\psi_{11}(g_1, g_2) = g_2$  и  $\psi_{21}(g_1, g_2) = g_1$ , т. е.  $g_1 = g_2$ . □

**Пример.** Пусть  $C_n$  — кривая в  $\mathbb{C}P^2$ , заданная уравнением  $z_1^n + z_2^n + z_3^n = 0$ . Тогда  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_n) = \mathbb{Z}_n$ .

**Доказательство.** В  $\mathbb{C}P^2$  проекция на вещественную плоскость  $z_3 = 0$  из точки  $a = (0 : 0 : 1)$  задаётся формулой  $(z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_1 : z_2 : 0)$ . Количество прообразов точки  $(z_1 : z_2 : 0)$ , лежащих на кривой  $C_n$ , равно  $n$  тогда и только тогда, когда  $z_1^n + z_2^n \neq 0$ . Точки, для которых  $z_1 : z_2 = -\varepsilon_k$ , где  $\varepsilon_k^n = 1$ , соответствуют касательным, но не простым, а  $n$ -кратным (в точке касания сливаются  $n$  ветвей). Обход вокруг  $n$ -кратной касательной устроен так же, как обход вокруг начала координат в плоскости  $\omega = 0$  для алгебраической функции  $\omega(z)$ , где  $z = \omega^n$ . Такой обход приводит к повороту вещественной плоскости  $z = 0$  на угол  $2\pi/n$ . При этом ветви циклически переставляются и в результате получается соотношения  $g_1 = g_2, g_2 = g_3, \dots, g_{n-1} = g_n, g_n = g_1$ . Кроме того, есть соотношение  $g_1 g_2 \dots g_n = 1$ . Таким образом, получаем группу с образующей  $g$  и соотношением  $g^n = 1$ . □

**Задача 22.3.\*** [102] Пусть  $p$  и  $q$  — взаимно простые числа, причём  $p \geq 2$  и  $q \geq 2$ . Рассмотрим в  $\mathbb{C}P^2$  кривую  $C_{p,q}$ , заданную уравнением

$$(z_1^p + z_2^p)^q + (z_1^q + z_2^q)^p = 0.$$

Докажите, что группа  $\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_{p,q})$  задаётся двумя образующими  $a$  и  $b$  и соотношениями  $a^p = 1$  и  $b^q = 1$ .

## Решения и указания

**0.1.** Множество  $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1}$  состоит из точек  $(x_1, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ , для которых  $x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1$  и  $x_1^2 + \dots + x_{n+m}^2 = 1$ . Сопоставим точке  $(x_1, \dots, x_{n+m}) \in S^{n+m-1} \setminus S^{n-1}$  точку  $(y_1, \dots, y_{n+m})$ , где  $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n, y_{n+1} = x_{n+1}/a, \dots, y_{n+m} = x_{n+m}/a$  и  $a = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}$ . Ясно, что

$$y_{n+1}^2 + \dots + y_{n+m}^2 = \frac{x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+m}^2}{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} = 1,$$

поэтому мы получаем гомеоморфизм  $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1} \rightarrow D^n \times S^{m-1}$ , где  $D^n$  — открытый единичный шар; он гомеоморфен  $\mathbb{R}^n$ .

**0.2.** Рассмотрим функцию  $F: K \rightarrow \mathbb{R}$ , заданную формулой  $F(x) = \rho(x, f(x))$ . Эта функция на компакте достигает минимума в некоторой точке  $x_0$ . Если  $F(x_0) = 0$ , то  $x_0$  — неподвижная точка. Предположим, что  $F(x_0) = d > 0$ . Тогда  $F(f(x_0)) = \rho(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho(x_0, f(x_0)) = d$ . Приходим к противоречию.

**1.1.** Да, можно. Требуемые вложения изображены на рис. 138.

**1.2.** Выберем прямую, не параллельную ни одной из прямых, соединяющих вершину одного цикла с вершиной другого цикла. Один из циклов будем сдвигать параллельно этой прямой. Индекс пересечения при этом не изменяется. Действительно, из каждой вершины цикла выходят ровно два ребра, поэтому при прохождении вершины через ребро число точек пересечения изменяется на  $\pm 2$ , а значит, остаток от деления на 2 не изменяется.

Если цикл сдвинуть достаточно далеко, то циклы не будут пересекаться. В таком случае индекс пересечения равен 0.

**1.3. а)** Предположим сначала, что вершины графа фиксированы, а изменяется лишь расположение рёбер. Два положения одного и того же ребра образуют цикл. Согласно задаче 1.2 индекс пересечения этого цикла с циклом, образован-

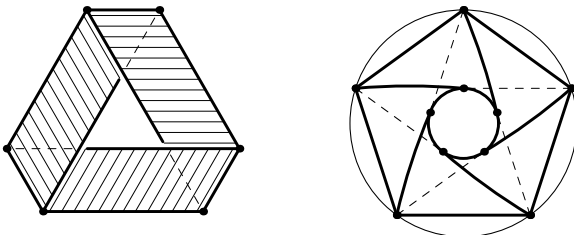


Рис. 138. Вложения графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$

ным несмежными рёбрами, равен 0. Поэтому индекс самопересечения не зависит от расположения одного ребра, а значит, и от расположения всех других рёбер.

От расположения вершин индекс самопересечения тоже не зависит, поскольку можно построить гомеоморфизм плоскости, переводящий данные  $n$  точек в любые другие  $n$  точек.

б) Графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$  обладают свойством, сформулированным в условии задачи б), поэтому их индекс самопересечения не зависит от их расположения на плоскости. Значит, индекс самопересечения можно посчитать для произвольной картинке. Он для обоих графов оказывается равным 1. В частности, всегда есть точка самопересечения.

1.4. а) Достаточно доказать, что в графе  $G$  любой цикл  $C$  имеет чётную длину. Цикл  $C$  содержит внутри себя несколько граней. Выбросим одну внутреннюю грань цикла  $C$ , имеющую с циклом  $C$  общее ребро. В результате участок цикла  $C$ , состоящий из  $n_1$  рёбер, заменится на участок, состоящий из  $n_2$  рёбер, где  $n_1 + n_2$  — число сторон выброшенной грани, т. е. чётное число. Поэтому при указанном преобразовании чётность длины цикла не изменится. После нескольких таких преобразований получим цикл, ограничивающий одну грань. Длина такого цикла чётна.

б) Выберем в каждой области по одной точке и соединим рёбрами те точки, которые лежат в областях, граничащих по некоторой дуге. В результате получим граф  $G$ , все грани которого содержат чётное число рёбер. (Грани соответствуют точкам самопересечения кривой  $\gamma$ ;  $k$ -кратной точке самопересечения соответствует грань, содержащая  $2k$  рёбер.)

1.5. Для графа  $K_5$  любая грань должна содержать не менее 3 рёбер, поэтому  $e \leq 3v - 6$ , но  $e = 10$  и  $v = 5$ . Для графа  $K_{3,3}$  любая грань должна содержать не менее 4 рёбер, поэтому  $e \leq 2v - 4$ , но  $e = 9$  и  $v = 6$ .

2.1. Требуемая гомотопия задаётся формулой

$$h_t(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

где  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

2.2. Достаточно доказать, что в рассматриваемых пространствах каждую матрицу можно соединить путём с единичной матрицей  $I_n$ . Для а) и б) требуемая конструкция содержится в доказательстве леммы об однородности многообразий (см. с. 244). Для унитарных матриц можно воспользоваться тем, что любая унитарная матрица в некотором ортонормированном базисе диагональна с элементами вида  $e^{i\varphi}$  на диагонали. Требуемый путь задаётся в этом базисе матрицами с диагональными элементами  $e^{i\varphi t}$ ,  $t \in [0, 1]$ . Для пространства  $SU(n)$  годится та же самая конструкция, поскольку если  $e^{i\varphi_1} \dots e^{i\varphi_n} = 1$ , то  $e^{i\varphi_1 t} \dots e^{i\varphi_n t} = 1$ .

2.3. а) Предположим, что число листов накрытия  $p: K_n \rightarrow G$  равно  $2m$ . В таком случае прообраз любой вершины  $v$  графа  $G$  состоит из  $2m$  вершин  $v_1, \dots, v_{2m}$  и эти вершины порождают в  $K_n$  граф  $K_{2m}$ , содержащий  $m(2m - 1)$  рёбер. Каждое из этих рёбер проецируется в петлю с началом и концом в точке  $v$ . Пусть в ре-



Рис. 139. Накрытие с группой автоморфизмов  $\mathbb{Z}$

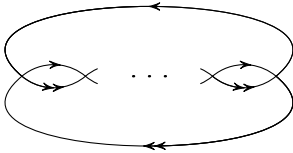


Рис. 140. Накрытие с группой автоморфизмов  $\mathbb{Z}_n$

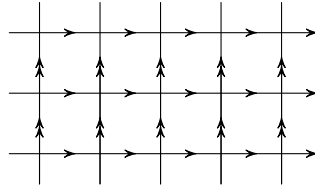


Рис. 141. Накрытие с группой автоморфизмов  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

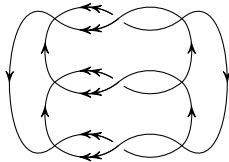


Рис. 142. Накрытие с группой автоморфизмов  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$

зультате получается  $l$  таких петель. Прообраз каждой такой петли состоит из  $2m$  рёбер, поэтому  $2ml = m(2m - 1)$ , т. е.  $l = (2m - 1)/2$ , чего не может быть.

б) Накрытие  $p: K_{2m+1} \rightarrow G$ , где граф  $G$  состоит из одной вершины и  $m$  петель, обладает требуемыми свойствами.

2.4. Предположим, что отображение  $f$  гомотопно нулю. Пусть  $x_0 \in S^1$  — фиксированная точка и  $y_0 = f(x_0)$ . Рассмотрим петлю  $\omega(t) = x_0 \exp(2\pi it)$  с началом  $x_0$ . Отображение  $f$  переводит эту петлю в стягиваемую петлю  $\tilde{\omega}(t)$ . Фиксируем точку  $z_0 \in \mathbb{R}$ , для которой  $\exp(2\pi iz_0) = y_0$ , и рассмотрим путь  $\Omega(t)$  — поднятые пути  $\tilde{\omega}(t)$  с началом  $z_0$ . Петля  $\tilde{\omega}(t)$  стягиваема, поэтому путь  $\Omega(t)$  замкнут. Это означает, что формула  $f_2(\omega(t)) = \Omega(t)$  корректно задает отображение  $f_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Остается положить  $f_1(t) = \exp(2\pi it)$ .

2.5. Требуемые накрытия изображены на рис. 139–142; на всех этих рисунках, кроме первого, изображено только накрываемое пространство.

2.6. Рассмотрим букет  $\text{rk } G$  окружностей, т. е. 1-мерный комплекс с одной вершиной и  $\text{rk } G$  рёбрами. Затем построим накрытие этого комплекса, соответствующее подгруппе  $H$ . Группа  $H$  изоморфна фундаментальной группе накрываемого пространства  $\tilde{X}$ . Пространство  $\tilde{X}$  гомеоморфно букету окружностей, поэтому группа  $H$  свободная.

Рассматриваемое накрытие  $k$ -листно, поэтому  $\tilde{X}$  имеет  $k$  вершин и  $k(\text{rk } G)$  рёбер. Максимальное дерево в  $\tilde{X}$  содержит  $k - 1$  рёбер, поэтому после стяги-

вания максимального дерева в точку получаем 1-мерный комплекс, состоящий из одной вершины и  $k(\text{rk } G) - (k - 1) = (\text{rk } G - 1)k + 1$  рёбер. Это число и есть ранг группы  $H$ .

2.7. Чтобы построить мономорфизм  $F_n \rightarrow F_2$ , достаточно построить накрытие с базой  $S_a^1 \vee S_b^1$  и накрывающим пространством, гомотопически эквивалентным  $S_1^1 \vee \dots \vee S_n^1$ . Это накрытие можно построить, например, так. Разместим окружности  $S_2^1, \dots, S_n^1$  на  $S_1^1$  равномерно (рис. 143); полученное пространство гомотопически эквивалентно  $S_1^1 \vee \dots \vee S_n^1$ . Окружность  $S_1^1$  отобразим  $(n - 1)$ -листно на  $S_a^1$ , а остальные окружности  $S_2^1, \dots, S_n^1$  тождественно отобразим на  $S_b^1$ .

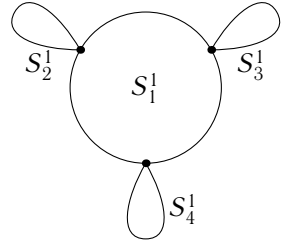


Рис. 143. Накрывающее пространство

На алгебраическом языке отображение  $F_n \rightarrow F_2$  выглядит следующим образом. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — образующие группы  $F_n$ ,  $a$  и  $b$  — образующие группы  $F_2$ . Тогда  $x_1 \mapsto a^{n-1}$ ,  $x_2 \mapsto b$ ,  $x_3 \mapsto aba^{-1}$ ,  $x_4 \mapsto a^2ba^{-2}$ ,  $\dots$ ,  $x_n \mapsto a^{n-2}ba^{n-2}$ . Для группы  $F_\infty$  отображение следующее:  $x_k \mapsto a^kba^{-k}$ .

4.1. Нет, не верно. Пусть, например,  $A = \{0\}$ ,  $B = [0, 1]$  и  $C = \{1\}$ . Тогда  $d(A, B) = d(B, C) = 0$  и  $d(A, C) = 1$ .

4.2. Пусть  $d_H(A, B) = \beta$  и  $d_H(B, C) = \gamma$ . Тогда для точки  $a \in A$  можно выбрать точку  $b \in B$  так, что  $\|a - b\| \leq \beta + \varepsilon$  (для любого  $\varepsilon > 0$ ). Для точки  $b \in B$  можно выбрать точку  $c \in C$  так, что  $\|b - c\| \leq \gamma + \varepsilon$ . Поэтому  $\|a - c\| \leq \beta + \gamma + 2\varepsilon$ . Аналогично для точки  $c \in C$  можно выбрать точку  $a \in A$  так, что  $\|a - c\| \leq \beta + \gamma + 2\varepsilon$ .

4.3. Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Для каждой точки  $x \in f(A)$  рассмотрим множество  $U_x = A \cap f^{-1}(D_{x, \varepsilon/2}^n)$ , где  $D_{x, \varepsilon/2}^n$  — открытый шар радиуса  $\varepsilon/2$  с центром  $x$ . Эти множества образуют открытое покрытие топологического пространства  $A$ . Пусть  $\delta > 0$  — число Лебега этого покрытия. Тогда если  $a_1, a_2 \in A$  и  $|a_1 - a_2| < \delta$ , то  $a_1, a_2 \in U_x$  для некоторой точки  $x$ . В таком случае точки  $f(a_1)$  и  $f(a_2)$  лежат в открытом шаре радиуса  $\varepsilon/2$  с центром  $x$ , поэтому  $|f(a_1) - f(a_2)| < \varepsilon$ .

6.1. Пусть  $r: A \rightarrow X$  — ретракция,  $f: A \rightarrow Y$  — произвольное непрерывное отображение. Тогда  $fr$  — продолжение отображения  $f$  на  $X$ . С другой стороны, если любое непрерывное отображение  $f: A \rightarrow Y$  можно продолжить на  $X$ , то, в частности, отображение  $\text{id}_A: A \rightarrow A$  можно продолжить до отображения  $r: A \rightarrow X$ . Это и есть требуемая ретракция.

6.2. Пусть  $f: A \rightarrow A$  — произвольное непрерывное отображение. Согласно задаче 6.1 это отображение можно продолжить до отображения  $F: X \rightarrow A \subset X$ . По условию отображение  $F$  имеет неподвижную точку  $x_0$ . При этом  $x_0 = F(x_0) \in A$  и  $f(x_0) = F(x_0) = x_0$ .

7.1. Пусть  $\{U_\alpha\}$  — открытое покрытие множества  $C$ ;  $U'_\alpha$  — открытое множество в  $K$ , для которого  $U_\alpha = U'_\alpha \cap C$ . Множества  $U'_\alpha$  вместе с открытым множеством  $U = K \setminus C$  покрывают  $K$ . Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие  $U'_1, \dots, U'_n, U$ . Ясно, что множества  $U_1, \dots, U_n$  покрывают  $C$ .

7.2. а) Введём на пространстве  $X$  следующее отношение эквивалентности:  $x_1 \sim x_2$ , если образы точек  $x_1$  и  $x_2$  при любом непрерывном отображении  $X$  в хаусдорфово пространство совпадают. Тогда  $X^H = X/\sim$  и  $\sigma$  — естественная проекция  $X$  на  $X/\sim$ .

б) Рассмотрим сюръективное отображение  $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ , которое сопоставляет матрице  $A$  коэффициенты многочлена  $\det(A + \lambda I)$ , где  $I$  — единичная матрица. Это отображение постоянно на орбитах, поэтому оно индуцирует отображение  $c: X/G \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Отображению  $c$  соответствует сюръективное отображение  $c^H: (X/G)^H \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

Если матрицы  $A$  и  $B$  диагональные, то  $c^H(A) = c^H(B)$  тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  принадлежат одной и той же орбите.

В любой орбите можно выбрать верхнюю треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\Delta_m = \text{diag}(1, m, m^2, \dots, m^{n-1})$  — диагональная матрица. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m A \Delta_m^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Из хаусдорфовости пространства  $(X/G)^H$  следует, что матрицы  $A$  и  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  представляют в нём одну и ту же точку.

в) Отображение  $f$  индуцирует отображение  $\bar{f}: X/G \rightarrow \mathbb{C}$ . Отображению  $\bar{f}$  соответствует отображение  $F: (X/G)^H = \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

8.1. Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_n$  — упорядоченный набор вершин симплекса  $\Delta^n$ . Ему соответствует симплекс барицентрического подразделения, который в барицентрических координатах задаётся неравенствами  $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$ . Этот симплекс имеет следующие вершины:  $v_0$ , барицентр  $[v_0, v_1]$ , барицентр  $[v_0, v_1, v_2]$ , ...

8.2. Полный подкомплекс, очевидно, обладает указанным свойством. Предположим теперь, что любой симплекс комплекса  $K$ , граница которого лежит в  $L$ , сам лежит в  $L$ . Пусть все вершины некоторого симплекса комплекса  $K$  лежат в  $L$ . Тогда все его рёбра лежат в  $L$ . Поэтому все его 2-мерные грани тоже лежат в  $L$  и т. д.

8.3. Симплекс  $\Delta^n$  комплекса  $K'$  однозначно задаётся набором симплексов  $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n$  комплекса  $K$  (вершины  $\Delta^n$  являются барицентрами этих симплексов). Предположим, что все вершины симплекса  $\Delta^n$  лежат в  $L'$ . Тогда, в частности, барицентр симплекса  $\sigma_n$  лежит в  $L'$ . Это означает, что сам симплекс  $\sigma_n$  лежит в  $L$ . Симплекс  $\Delta^n$  является одним из симплексов барицентрического подразделения симплекса  $\sigma_n$ , поэтому он лежит в  $L'$ .

8.4. а) [139] Мы будем предполагать, что  $I = [-1, 1]$ . Тогда  $\partial I^n$  состоит из таких точек  $(x_1, \dots, x_n)$ , что  $|x_i| \leq 1$  для всех  $i$  и  $x_i = \pm 1$  для некоторого  $i$ . Положим

$$(I^n)_+^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_i = +1 \text{ для некоторого } i\}.$$



Легко проверить, что  $\partial((I^n)_+^{n-1})$  состоит из таких точек  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ , что  $x_i = +1$  и  $x_j = -1$ . Определим  $(I^n)_+^{n-2}$  как объединение  $(n-2)$ -мерных граней куба, заданных соотношениями  $x_i = +1$  и  $x_j = -1$  для  $i < j$ . Аналогично определим  $(I^n)_+^{n-j}$  как объединение  $(n-j)$ -мерных граней куба, заданных соотношениями  $x_{a_1} = +1, x_{a_2} = -1, x_{a_2} = +1, \dots, x_{a_j} = (-1)^{j+1}$  для некоторых  $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_j \leq n$ . Легко проверить, что  $\partial((I^n)_+^{n-j}) = (I^n)_+^{n-j-1} \cup \cup (-I^n)_+^{n-j-1}$ .

Пусть  $S_k(i_0, i_1, \dots, i_k)$  — количество  $k$ -мерных симплексов с пометками  $i_0, \dots, i_k$ , принадлежащих  $(I^n)_+^k$ . Выведем соотношение между  $S_1(i, j)$  и  $S_0(i)$ , посчитав двумя разными способами число  $N(i)$  — количество пар, состоящих из 1-мерного симплекса, принадлежащего  $(I^n)_+^1$ , и его вершины с пометкой  $i \geq 1$ . Рассмотрим сначала сумму по 1-мерным симплексам, принадлежащим  $(I^n)_+^1$ . В результате получим

$$N(i) = 2S_1(i, i) + S_1(i, -i) + \sum_{j \neq i, j \geq 1} (S_1(i, j) + S_1(i, -j)); \tag{1}$$

при этом  $S_1(i, -i) = 0$  по условию. Рассмотрим теперь сумму по вершинам триангуляции, принадлежащим  $(I^n)_+^1$ . В результате получим

$$N(i) = 2K + S_0(i) + S_0(-i), \tag{2}$$

где  $K$  — количество внутренних вершин  $(I^n)_+^1$  с пометкой  $i$ . Действительно, граница  $(I^n)_+^1$  состоит из  $(I^n)_+^0$  и  $-(I^n)_+^0$ ; при этом если вершина  $v \in (I^n)_+^0$  имеет пометку  $k$ , то вершина  $-v \in -(I^n)_+^0$  имеет пометку  $-k$ . Сравнивая равенства (1) и (2) и суммируя по  $i$  от 1 до  $n$ , получаем

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (S_1(i, -j) + S_1(-i, j)) \equiv \sum_{i=1}^n (S_0(i) + S_0(-i)) \pmod{2};$$

слагаемые вида  $S_1(i, j)$  уничтожились, потому что каждое такое слагаемое встречается дважды: сначала в выражении для  $i$ , а затем в выражении для  $j$ . Ясно также, что  $\sum (S_0(i) + S_0(-i)) = 1$ , поскольку  $(I^n)_+^0$  состоит из одной точки  $(+1, -1, +1, \dots)$ .

В дальнейшем будем производить вычисления по модулю 2. Подсчитаем в  $(I^n)_+^2$  количество пар, состоящих из 2-мерного симплекса и его 1-мерной грани с метками  $i$  и  $-j$ , где  $1 \leq i < j$ . Сначала рассмотрим сумму по 2-мерным симплексам. В результате получим (по модулю 2)

$$\sum_{k \neq i, j, k \geq 1} (S_2(i, -j, k) + S_2(i, -j, -k)).$$

Рассматривая сумму по 1-мерным симплексам с метками  $i$  и  $-j$ , получим

$$S_1(i, -j) + S_1(-i, j);$$

здесь снова внутренние 1-симплексы по модулю 2 взаимно уничтожаются и остаются только граничные симплексы. Приравняем полученные выражения и про-

суммируем по всем парам  $i < j$ . После приведения по модулю 2 получим

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_0 < i_1 < i_2} (S_2(i_0, -i_1, i_2) + S_2(-i_0, i_1, -i_2)) &= \sum_{1 \leq i < j} (S_1(i, -j) + S_1(-i, j)) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} (S_0(i) + S_0(-i)) = 1. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления можно продолжить дальше и получить

$$S_{n-1}(1, -2, \dots, \pm n) + S_{n-1}(-1, 2, \dots, \mp n) \equiv 1 \pmod{2}. \quad (3)$$

При доказательстве каждый раз нужно использовать то, что если числа  $i_a$  и  $i_{a+1}$  одного знака, то выражение  $S_k(i_0, \dots, i_a, i_{a+1}, \dots, i_k)$  встречается дважды.

Чтобы прийти к противоречию, вычислим во всём кубе  $I^n$  количество пар, состоящих из  $n$ -мерного симплекса и его  $(n-1)$ -мерной грани с метками  $1, -2, 3, \dots, \pm n$ . Противоположная этой грани вершина не может иметь меток  $-1, 2, -3, \dots, \mp n$ , потому что иначе было бы ребро с метками  $i$  и  $-i$ . Таким образом, ровно одна из меток  $1, -2, 3, \dots, \pm n$  встречается дважды. Поэтому рассматриваемое количество пар чётно (мы вычисляем количество пар, суммируя по  $n$ -мерным симплексам). С другой стороны, вычисляя то же самое количество пар, суммируя по  $(n-1)$ -мерным симплексам с метками  $1, -2, 3, \dots, \pm n$ , получим выражение, стоящее в левой части сравнения (3). Приходим к противоречию.

б) Предположим, что существует непрерывное отображение  $f: I^n \rightarrow \partial I^n$ , переводящее антиподальные точки  $\partial I^n$  в антиподальные точки. Рассмотрим столь мелкую триангуляцию  $I^n$ , симметричную на  $\partial I^n$ , что если  $v_1$  и  $v_2$  — смежные вершины триангуляции, то  $\|f(v_1) - f(v_2)\| < 2$ ; в частности, образы смежных вершин триангуляции не могут лежать на противоположных гранях куба. Пометим вершины триангуляции числами  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$  следующим образом: точке  $v \in I^n$  сопоставим номер грани, которой принадлежит точка  $f(v)$ ; при этом подразумевается, что противоположные грани имеют номера  $i$  и  $-i$ . Согласно лемме Такера существуют смежные вершины триангуляции, имеющие номера  $i$  и  $-i$ . Приходим к противоречию.

**8.5.** Из теоремы Борсука—Улама следует, что  $n \leq m$ . Пусть  $\Pi$  — произвольное  $(m+1-n)$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^{m+1} \supset S^m$ . Покажем, что множество  $\Pi \cap \varphi(S^n)$  содержит по крайней мере две точки. Пусть  $\Pi^\perp$  — ортогональное дополнение к пространству  $\Pi$ ,  $p: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \Pi^\perp$  — ортогональная проекция. Тогда отображение  $p \circ \varphi: S^n \rightarrow \Pi^\perp \cong \mathbb{R}^n$  нечётно, поэтому по теореме Борсука—Улама существует точка  $x \in S^n$ , для которой  $p(\varphi(x)) = 0$ , т. е.  $\varphi(x) \in \Pi$ . В таком случае  $\varphi(-x) = -\varphi(x) \in \Pi$ , причём  $\varphi(x) \neq 0$ , так как  $\varphi(x) \in S^m$ .

Почти все  $(m+1-n)$ -мерные линейные подпространства в  $\mathbb{R}^m$  пересекают фиксированное  $(n+1)$ -мерное линейное подпространство по прямой, т. е. они пересекают стандартно вложенную в  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m$  сферу  $S^n$  ровно в двух точках. Таким образом, для почти всех  $(m+1-n)$ -мерных подпространств число точек пересечения с  $\varphi(S^n)$  не меньше, чем с  $S^n$ . Из этого следует, что  $n$ -мерный объём  $\varphi(S^n)$  не меньше, чем  $n$ -мерный объём  $S^n$ . Для доказательства этого утверждения нужно ввести на множестве  $G_{m+1-n}(\mathbb{R}^m)$  всех  $(m+1-n)$ -мерных

линейных подпространств в  $\mathbb{R}^m$  инвариантную меру  $\mu$  и для каждого множества  $X \subset S^m$  рассмотреть интеграл  $\int_{G_{m+1-n}(\mathbb{R}^m)} |X \cap \Pi| d\mu$ . Если для множества  $X$  определён  $n$ -мерный объём, то этот интеграл конечен и пропорционален  $n$ -мерному объёму множества  $X$ .

**8.6. а)** Непосредственное применение теоремы Борсука — Улама не приводит к желаемому результату, потому что противоположно направленные лучи, выходящие из внутренней точки многогранника  $P$ , могут пересекать  $\partial P$  в точках, принадлежащих пересекающимся граням. Предварительно многогранник  $P$  нужно симметризовать. А именно, рассмотрим множество

$$Q = \{x = z - \omega \mid z, \omega \in P\}.$$

Ясно, что  $Q$  — выпуклый многогранник, симметричный относительно начала координат.

Определим отображение  $h: Q \rightarrow P$  следующим образом. Пусть  $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$  и  $z' = (z'_1, \dots, z'_{n+1})$ . Будем считать, что  $z > z'$ , если  $z_1 = z'_1, \dots, z_{k-1} = z'_{k-1}$  и  $z_k > z'_k$  (возможно  $k = 1$ ). Положим

$$h(x) = \max \{z \mid x = z - \omega, \text{ где } z, \omega \in P\}.$$

Геометрически отображение  $h$  можно описать так. Если  $x = z - \omega$ , то  $z = x + \omega \in x + P$ , поэтому  $h(x)$  — максимальная точка множества  $P \cap (x + P)$ . При этом максимальная точка находится следующим образом: сначала находим точки с максимальной координатой  $z_1$ , затем среди них находим точки с максимальной координатой  $z_2$ , и т. д.

Легко проверить, что  $x = h(x) - h(-x)$ . Действительно, если  $x = h(x) - \omega_0$ , то  $\omega_0 = h(x) - x \in P \cap (x + P) - x = (-x + P) \cap P$ . При этом из того, что  $h(x)$  — максимальная точка множества  $P \cap (x + P)$ , следует, что  $\omega_0$  — максимальная точка множества  $(-x + P) \cap P$ .

Докажем теперь, что отображение  $h$  непрерывно. Пусть  $x_n \in Q$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in Q$ . Представим  $x_n$  в виде  $x_n = z_n - \omega_n$ , где  $z_n = h(x_n)$ . Пусть  $z_{n_i}$  — произвольная сходящаяся подпоследовательность. Тогда подпоследовательность  $\omega_{n_i}$  тоже сходящаяся. Положим  $z = \lim_{i \rightarrow \infty} z_{n_i}$  и  $\omega = \lim_{i \rightarrow \infty} \omega_{n_i}$ . Тогда  $x = z - \omega$ , поэтому  $z \leq h(x)$ . Предположим, что  $z < h(x)$ . Рассмотрим точки  $z' = z_{n_i} + \varepsilon(h(x) - z)$  и  $\omega' = \omega_{n_i} + \varepsilon(h(-x) - \omega)$ , где  $\varepsilon > 0$ . Из того, что  $h(x) - h(-x) = x = z - \omega$ , следует, что  $z' - \omega' = z_{n_i} - \omega_{n_i} = x_{n_i}$ . Ясно также, что  $z > z_{n_i}$ , так как  $h(x) - z > 0$  и  $\varepsilon > 0$ . Покажем, что числа  $\varepsilon > 0$  и  $n_i$  можно выбрать так, что  $z', \omega' \in P$ . Для точки  $z \in P$  можно выбрать  $\delta > 0$  так, что если  $\|z - v\| \leq \delta$  и точка  $v$  лежит на луче, выходящем из точки  $z$  и идущем в точку  $t \in P$ , то  $v \in P$ . Пусть  $C_\delta$  — множество всех таких точек  $v$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что  $\varepsilon \|h(x) - z\| \leq \delta/2$ , а  $n_i$  выберем так, что  $\|z_{n_i} - z\| \leq \delta/2$ . Тогда точки  $z_{n_i}$  и  $z + \varepsilon(h(x) - z)$  принадлежат  $C_{\delta/2}$ . Из выпуклости множества  $C_{\delta/2}$  следует, что середина отрезка с концами в этих точках тоже принадлежит  $C_{\delta/2}$ , поэтому  $z' = z_{n_i} + \varepsilon(h(x) - z) \in C_\delta \subset P$ . Аналогично получаем  $\omega' \in P$ . Но если  $z', \omega' \in P$  и  $z' - \omega' = x_{n_i}$ , то  $z' \leq h(x_{n_i}) = z_{n_i}$ , что противоречит

неравенству  $z' > z_{n_i}$ . Полученное противоречие показывает, что  $z = h(x)$ . Таким образом, любая сходящаяся подпоследовательность последовательности  $z_n$  сходится к  $h(x)$ . Из компактности множества  $P$ , содержащего точки  $z_n$ , следует, что вне сколь угодно малой окрестности точки  $h(x)$  может лежать лишь конечное число точек  $z_n$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = h(x)$ , т. е. отображение  $h$  непрерывно.

Пусть  $a \neq 0$  — произвольный вектор и  $\max_{x \in Q}(a, x) = (a, x_0)$ . Из равенства  $x_0 = h(x_0) - h(-x_0)$  следует, что

$$\begin{aligned} (a, h(x_0)) + (-a, h(-x_0)) &= (a, x_0) = \max_{x \in Q}(a, x) = \\ &= \max_{z, \omega \in P}(a, z - \omega) = \max_{z \in P}(a, z) - \max_{\omega \in P}(-a, \omega). \end{aligned}$$

Поэтому  $(a, h(x_0)) = \max_{z \in P}(a, z)$  и  $(-a, h(-x_0)) = \max_{\omega \in P}(-a, \omega)$ . Это означает, что точки  $h(x_0)$  и  $h(-x_0)$  принадлежат двум различным опорным гиперплоскостям многогранника  $P$ . В частности, точки  $h(x_0)$  и  $h(-x_0)$  принадлежат непересекающимся граням многогранника  $P$ .

Теперь уже можно применить теорему Борсука—Улама к отображению  $g(x) = f(h(x))$ . В результате получим, что существует точка  $x_0 \in \partial Q$ , для которой  $g(x_0) = g(-x_0)$ . Точка  $x_0$  принадлежит некоторой опорной плоскости многогранника  $Q$ , поэтому существует вектор  $a \neq 0$ , для которого  $\max_{x \in Q}(a, x) = (a, x_0)$ .

В таком случае точки  $z = h(x_0)$  и  $\omega = h(-x_0)$  принадлежат непересекающимся граням многогранника  $P$  и

$$f(z) = f(h(x_0)) = g(x_0) = g(-x_0) = f(h(-x_0)) = f(\omega),$$

что и требовалось.

б) Пусть  $B$  и  $C$  — непересекающиеся грани симплекса  $\Delta^{n+1}$ , для которых  $f(B) \cap f(C) \neq \emptyset$ . Грани  $\Delta_i^n$  не принадлежит лишь одна вершина симплекса  $\Delta^{n+1}$ . Эта вершина не может одновременно принадлежать граням  $B$  и  $C$ , поэтому  $B \subset \Delta_i^n$  или  $C \subset \Delta_i^n$  (или  $B, C \subset \Delta_i^n$ ), а значит,  $f(\Delta_i^n) \supset f(B) \cap f(C)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Если отображение  $f: \partial \Delta^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  линейно, то утверждение задачи б) — это частный случай *теоремы Хелли*. Но это как раз тот частный случай, который является шагом индукции при доказательстве теоремы Хелли по индукции. Поэтому он, по сути дела, эквивалентен теореме Хелли.

**З а м е ч а н и е 2.** Другое решение задачи 8.6 и её обобщение приведено в [87].

**9.1.** Рассмотрим характеристическое отображение  $f: D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , определённое на с. 136. Его ограничение на  $\text{int } D^{2n}$  является гомеоморфизмом  $\text{int } D^{2n}$  на  $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ . Ясно также, что при указанном отождествлении точек сферы  $S^{2n-1}$  из неё получается  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

**9.2.** Можно считать, что  $S^\infty$  состоит из точек  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ , у которых лишь конечное число ненулевых координат и  $\sum x_i^2 = 1$ . Пусть  $\varphi(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$  и  $h_t(x) = (1-t)x + t\varphi(x)$ . Легко проверить, что  $h_t(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ . Поэтому формула  $x \mapsto h_t(x)/\|h_t(x)\|$  задаёт гомотопию, связываю-

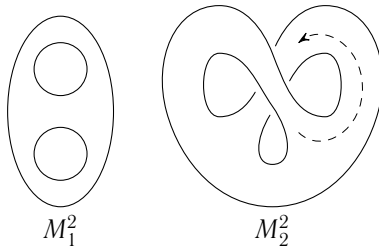


Рис. 144. Поверхности  $M_1^2$  и  $M_2^2$

щую тождественное отображение  $\text{id}_{S^\infty}$  с отображением  $\varphi|_{S^\infty}$ . Пусть, далее,  $g_t(x) = (1-t)\varphi(x) + (t, 0, 0, \dots)$ . Тогда снова  $g_t(x) \neq 0$  при  $x \neq 0$ . Поэтому формула  $x \mapsto g_t(x)/\|g_t(x)\|$  задаёт гомотопию, связывающую отображение  $\varphi|_{S^\infty}$  с постоянным отображением в точку  $(1, 0, 0, \dots)$ .

**9.3.** Если данное компактное множество  $K$  пересекает открытую клетку  $\text{int } e_\alpha^n$ , то выберем одну точку  $x_\alpha^n \in K \cap \text{int } e_\alpha^n$ . Требуется доказать, что множество  $T = \{x_\alpha^n\}$  конечно.

Из свойства (с) следует, что любая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток, поэтому пересечение любого подмножества  $T' \subset T$  с любой замкнутой клеткой состоит из конечного числа точек, а значит, оно замкнуто. Теперь из свойства (w) следует, что любое подмножество  $T' \subset T$  замкнуто, а значит,  $T$  дискретно. С другой стороны, множество  $T$  компактно как замкнутое подмножество компактного пространства. Остаётся заметить, что дискретное компактное множество конечно.

**10.1.** Сферу  $S^n$  можно представить как  $CW$ -комплекс с одной 0-мерной клеткой и одной  $n$ -мерной клеткой. Поэтому  $S^p \times S^q$  можно представить как  $CW$ -комплекс с клетками размерностей 0,  $p$ ,  $q$  и  $p+q$ . Клетки размерностей 0,  $p$  и  $q$  образуют подкомплекс  $S^p \vee S^q$ . После стягивания этого подкомплекса в точку получается  $CW$ -комплекс с клетками размерностей 0 и  $p+q$ , т.е.  $(p+q)$ -мерная сфера.

**11.1.** а) Если  $n$  чётно, то  $nP^2 \approx \frac{n-2}{2}T^2 \# 2P^2$ , а если  $n$  нечётно, то  $nP^2 \approx \frac{n-1}{2}T^2 \# P^2$ . Поэтому достаточно рассмотреть поверхности  $2P^2$  и  $P^2$ , для которых требуемые кривые строятся очевидным образом.

б) Нужно доказать, что если после разрезания по замкнутой кривой поверхность  $nP^2$  становится ориентируемой, то в случае чётного  $n$  край полученной поверхности состоит из двух компонент, а в случае нечётного  $n$  — из одной. При таком разрезании эйлерова характеристика поверхности не изменяется. Если край состоит из двух компонент, то можно приклеить ручку  $S^1 \times I$ , а если край состоит из одной компоненты, то можно приклеить диск  $D^2$ . В обоих случаях в результате получится замкнутая ориентируемая поверхность (имеющая чётную эйлерову характеристику). В первом случае эйлерова характеристика не изменяется, а во втором она увеличивается на 1.

**11.2.** Да, могут. Поверхности  $M_1^2$  и  $M_2^2$ , изображённые на рис. 144, не гомеоморфны, поскольку край поверхности  $M_1^2$  состоит из трёх связных компонент, а край поверхности  $M_2^2$  связан. Пространства  $M_2^2 \times I$  и  $M_1^2 \times I$  гомеоморфны, потому что «ручку» можно перетащить по пунктирной линии.

**11.3.** Поверхность  $nP^2$  можно представить как сферу  $S^2$ , из которой вырезано  $n$  дисков и вместо них вклеено  $n$  листов Мёбиуса; эти листы Мёбиуса попарно не пересекаются.

Предположим, что на поверхности  $nP^2$  размещено  $p$  непересекающихся листов Мёбиуса. Проведём разрезы по краям этих листов Мёбиуса, а затем к этим разрезам приклеим диски. В результате получим замкнутую поверхность  $M^2$ , эйлерова характеристика которой равна  $\chi(nP^2) + p = 2 - n + p$ . Но  $\chi(M^2) \leq 2$ , поэтому  $k \leq n$ .

**12.1.** а) Универсальное накрытие плоскости с двумя выколотыми точками устроено так, как показано на рис. 145. Ясно, что универсальное накрывающее пространство гомеоморфно плоскости.

Для плоскости с произвольным (конечным) числом выколотых точек доказательство аналогично.

б) Пусть  $f_{a_1 \dots a_n}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  — универсальное накрытие. Рассмотрим отображение  $(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$ , где

$$z_1 = \omega_1, \quad z_2 = f_{z_1} \omega_2, \quad z_3 = f_{z_1 z_2} \omega_3, \quad z_4 = f_{z_1 z_2 z_3} \omega_4, \quad \dots$$

Это отображение является накрытием  $\mathbb{C}^n \rightarrow \Sigma$ .

**12.2.** Если накрытие  $p$  можно представить в требуемом виде  $p = p_2 p_1$ , то множества  $I_1 = p_1^{-1}(y_1), \dots, I_n = p_1^{-1}(y_n)$ , где  $\{y_1, \dots, y_n\} = p_2^{-1}(x)$ , искомые. В самом деле, если  $\gamma$  — замкнутый путь в  $X$ , то его поднятие в  $Y$  соединяет некоторые точки  $y_i$  и  $y_j$ . Поэтому поднятие пути  $\gamma$  в  $\tilde{X}$  соединяет точки множеств  $I_i$  и  $I_j$ .

Предположим теперь, что  $I_1 = \{t_{11}, \dots, t_{1m}\}, \dots, I_n = \{t_{n1}, \dots, t_{nm}\}$  — разбиение множества  $p^{-1}(x)$ , обладающее указанными свойствами. Пусть  $x_1 \in X$  — произвольная точка,  $\gamma$  — путь из  $x$  в  $x_1$ ,  $J_k$  — множество концов поднятий пути  $\gamma$  с началом в  $I_k$ . Нумерация множеств  $J_k$  зависит от выбора пути  $\gamma$ , но сам набор

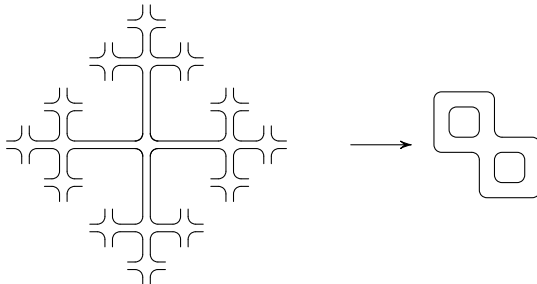


Рис. 145. Универсальное накрытие плоскости без двух точек

этих множеств не зависит от выбора пути  $\gamma$ . В самом деле, предположим, что одно поднятие пути  $\gamma'$  с началом в  $I_k$  заканчивается в  $J_k$ , а другое заканчивается в  $J_l$ , где  $l \neq k$ . Тогда одно поднятие замкнутого пути  $\gamma'\gamma^{-1}$  с началом в  $I_k$  заканчивается в  $I_k$ , а другое заканчивается в  $I_l$ , где  $l \neq k$ . Этого не может быть.

Отобразим все точки каждого множества  $J_k$  в одну точку. В результате получим накрытие  $p_1: \tilde{X} \rightarrow Y$ . Накрытие  $p_2$  строится теперь очевидным образом.

**13.1.** Эйлерова характеристика взрезанных квадратов графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$  легко вычисляется. Все грани четырёхугольные, причём каждое ребро принадлежит ровно двум граням. Поэтому  $2e = 4f$ . Количество вершин  $v$  равно  $n^2 - n$ , где  $n$  — количество вершин графа. Поэтому  $v = 30$  для взрезанного квадрата графа  $K_{3,3}$  и  $v = 20$  для взрезанного квадрата графа  $K_5$ . Количество граней  $f$  равно количеству упорядоченных пар непересекающихся рёбер. Поэтому  $f = 36$  для взрезанного квадрата графа  $K_{3,3}$  и  $f = 30$  для взрезанного квадрата графа  $K_5$ .

Остаётся проверить, что взрезанные квадраты графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$  ориентируемы. Это можно непосредственно проверить, но такая проверка довольно утомительна, потому что одна поверхность склеивается из 36 четырёхугольных граней, а вторая из 30. Этой проверки можно избежать, воспользовавшись следующими соображениями. Взрезанный квадрат графа естественным образом вкладывается в его взрезанный джойн.

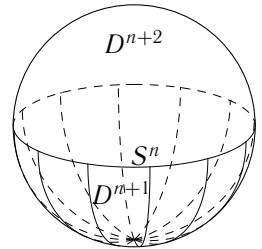


Рис. 146. Вложение взрезанного квадрата во взрезанный джойн

Действительно, паре несмежных рёбер во взрезанном джойне соответствует тетраэдр, в во взрезанном квадрате — параллелограмм; этот параллелограмм можно рассматривать как сечение тетраэдра (рис. 146). Взрезанные джойны графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$  гомеоморфны  $S^3$ . Для графа  $K_5$  это — частный случай (при  $n = 1$ ) теоремы 10.2 на с. 149. Для графа  $K_{3,3}$  это легко выводится из того, что взрезанный джойн джойна — это то же самое, что джойн взрезанных джойнов (см. доказательство теоремы 10.3 на с. 150). Действительно, граф  $K_{3,3}$  — это джойн  $sk_0 \Delta^2 * sk_0 \Delta^2$ , поэтому  $J_2^2(K_{3,3}) = J_2^2(sk_0 \Delta^2 * sk_0 \Delta^2) = J_2^2(sk_0 \Delta^2) * J_2^2(sk_0 \Delta^2) \approx S^1 * S^1 \approx S^3$ , поскольку  $J_2^2(sk_0 \Delta^2) \approx S^1$ .

Итак, взрезанные квадраты графов  $K_{3,3}$  и  $K_5$  вкладываются в  $S^3$ . А замкнутые неориентируемые поверхности в  $S^3$  не вкладываются (следствие теоремы 17.9 на с. 239).

**13.2.** На взрезанном квадрате есть инволюция без неподвижных точек, соответствующая отображению  $\Delta_\alpha^i \times \Delta_\beta^j \rightarrow \Delta_\beta^j \times \Delta_\alpha^i$ . Неподвижных точек у этой инволюции нет, потому что симплексы  $\Delta_\alpha^i$  и  $\Delta_\beta^j$  не пересекаются.

Если на двумерной поверхности есть инволюция без неподвижных точек, то её эйлерова характеристика чётна.

**14.1.** Отображение  $id_Y$  гомотопно отображению  $Y \rightarrow y_0$ . Зададим на  $X$  отображение  $f_0 = id_X$ , а на  $Y$  зададим гомотопию, связывающую отображения  $id_Y$

и  $Y \rightarrow y_0$ . Построим гомотопию  $f_t$  данного отображения, продолжающую данную гомотопию. В результате получим отображение  $f_1: X \rightarrow X$ , которое гомотопно отображению  $\text{id}_X$ , причём  $f_1(Y) = y_0$ . Это отображение индуцирует отображение  $q: X/Y \rightarrow X$ , для которого  $qp = f_1$ , где  $p: X \rightarrow X/Y$  — каноническая проекция. Итак,  $qp = f_1 \sim \text{id}_X$ . Поэтому остаётся проверить, что  $pq \sim \text{id}_Y$ . По построению  $f_t(Y) \subset Y$ . Значит, отображение  $f_t$  определяет отображение  $g_t: X/Y \rightarrow X/Y$ . При этом  $g_0 = \text{id}_Y$  и  $g_1 = pq$ .

**14.2.** По индукции можно считать, что у  $n$ -связного  $CW$ -комплекса  $X$  есть ровно одна вершина и нет  $k$ -мерных клеток, где  $1 \leq k \leq n - 1$  (при  $n = 0$  никаких предварительных предположений мы не делаем). Нужно «уничтожить»  $n$ -мерные клетки  $X$ . Пусть  $\varphi: S^n \rightarrow X$  — характеристическое отображение некоторой  $n$ -мерной клетки комплекса  $X$ . Из  $n$ -связности  $X$  следует, что отображение  $\varphi$  можно продолжить до отображения  $\bar{\varphi}: D^{n+1} \rightarrow X$ . (При  $n = 0$  мы предполагаем, что  $\varphi: S^0 \rightarrow X$  отображает одну точку  $S^0$  в фиксированную вершину  $x_0$ , а другую точку — в данную вершину  $x_i$  комплекса  $X$ ; тогда  $\bar{\varphi}$  — путь из вершины  $x_0$  в данную вершину  $x_i$ .) Будем считать, что  $S^n$  — экватор сферы  $S^{n+1} = \partial D^{n+2}$ , а  $D^{n+1}$  — половина сферы  $S^{n+1}$  (рис. 147). Тогда можно приклеить  $D^{n+1}$  к  $X$  по отображению  $\bar{\varphi}$ . В результате получим  $CW$ -комплекс  $X \cup Y$ , гомотопически эквивалентный  $X$  (для  $n = 0$  на рис. 148 комплекс  $Y$  заштрихован). В  $Y$  есть стягиваемый подкомплекс  $Y'$ , соответствующий «верхним» полусферам  $D^{n+1}$  (на рис. 148 этот подкомплекс выделен жирными линиями). Согласно задаче 14.1  $(X \cup Y)/Y' \sim X \cup Y \sim X$ . Ясно также, что  $CW$ -комплекс  $(X \cup Y)/Y'$  не имеет  $n$ -мерных клеток (и клеток меньших положительных размерностей). При  $n = 0$  эта конструкция приводит к тому, что мы получаем  $CW$ -комплекс с одной вершиной.

**14.3.** Согласно теореме о клеточной аппроксимации любое отображение  $S^n \rightarrow X$  гомотопно отображению  $S^n \rightarrow X^n \subset X$ , а в данном случае  $n$ -мерный остов  $X^n$  состоит из одной точки.

**14.4.** Пространство  $\Sigma(A \wedge B)$  получается из  $A * B$  стягиванием в одну точку двух конусов  $CA$  и  $CB$  с общей образующей  $\{a_0\} \times \{b_0\} \times I$  (рис. 149). Ясно, что пространство  $CA \cup CB$  стягиваемо (сначала можно стянуть в точку один конус, а потом другой). Поэтому согласно задаче 14.1  $A * B \sim A * B / (CA \cup CB) \approx \Sigma(A \wedge B)$ .

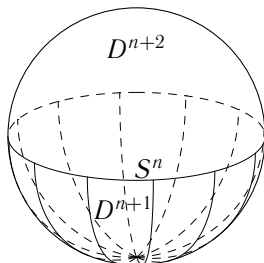


Рис. 147. Диск  $D^{n+1}$

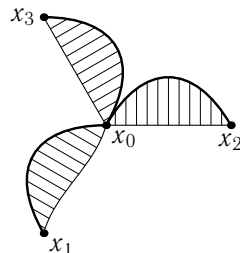


Рис. 148. Комплекс  $Y$



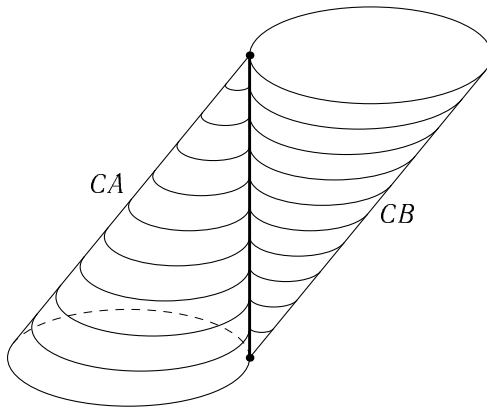


Рис. 149. Два конуса

14.5. а) Согласно задаче 14.2  $X \sim X'$ , где  $X'$  —  $CW$ -комплекс с одной вершиной  $x_0$  и без  $k$ -мерных клеток, где  $1 \leq k \leq n$ . Ясно также, что  $\Sigma X \sim \Sigma X'$ . В комплексе  $\Sigma X / \Sigma x_0 \sim \Sigma X'$  нет клеток размерностей от 1 до  $n + 1$ . Поэтому согласно задаче 14.3 он  $(n + 1)$ -связен.

б) Можно считать, что  $X$  и  $Y$  не имеют клеток положительных размерностей, не превосходящих  $n$  и  $m$ . Тогда клетки положительной размерности  $CW$ -комплекса  $X \times Y$ , не лежащие в  $X \vee Y$ , являются произведениями клеток  $\sigma^p \times \sigma^q$ , где  $p \geq n + 1$  и  $q \geq m + 1$ ; после факторизации  $X \times Y$  по  $X \vee Y$  помимо 0-мерной клетки остаются только такие клетки. Значит,  $X \wedge Y$  не имеет  $k$ -мерных клеток, где  $1 \leq k \leq n + m + 1$ .

в) Согласно задаче 14.4  $X * Y \sim \Sigma(X \wedge Y)$ . Остаётся воспользоваться задачами а) и б).

14.6. Задача а) является частным случаем задачи б). Будем решать сразу задачу б).

Джойн  $X * Y$  содержит выделенные подпространства  $X$  и  $Y$ ; приклеим к ним  $CX$  и  $CY$ . Если каждый из конусов  $CX$  и  $CY$  стянуть в точку, то в результате получим  $\Sigma(X \times Y)$ . Эти конусы — стягиваемые подпространства, поэтому  $X * Y \cup CX \cup CY \sim \Sigma(X \times Y)$ .

Пусть  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  — отмеченные точки. Рассмотрим в  $X * Y$  подпространство  $Z$ , состоящее из  $\{x_0\} * Y$  и  $X * \{y_0\}$ . Пространство  $Z$  стягиваемо, поскольку после стягивания в  $Z$  отрезка  $[x_0, y_0]$  в точку получается пространство, гомотопически эквивалентное букету двух конусов. Ясно также, что если в пространстве  $X * Y \cup CX \cup CY$  стянуть в точку подпространство  $Z$ , то в результате получится  $\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$ .

14.7. По теореме о клеточной аппроксимации любое отображение  $S^k \rightarrow X$ ,  $k \leq n$ , гомотопно отображению  $S^k \rightarrow X^n \subset X$ , причём можно считать, что в процессе гомотопии точка  $x_0 \in X^n$  неподвижна. При  $k \leq n - 1$  отображение  $S^k \times I \rightarrow X$ , которое представляет собой гомотопию, связывающую два отображения

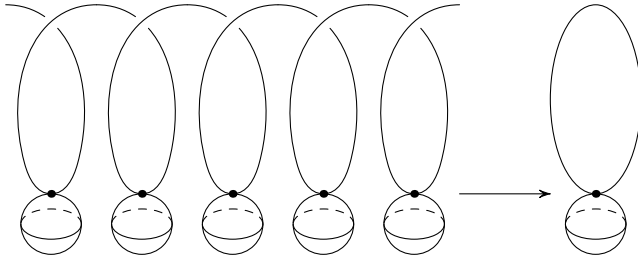


Рис. 150. Универсальное накрывающее пространство

$f_0, f_1: S^k \rightarrow X$ , гомотопию отображению  $S^k \times I \rightarrow X^n \subset X$ , причём при  $t = 0$  и  $1$  это отображение совпадает с  $f_0$  и с  $f_1$ .

**14.8.** При  $n \geq 2$  универсальное накрывающее пространство для  $S^n \vee S^1$  представляет собой прямую  $\mathbb{R}$ , к которой в точках с целочисленными координатами приклеены  $n$ -мерные сферы (рис. 150). Это пространство гомотопически эквивалентно букету счётного множества  $n$ -мерных сфер.

При  $n \geq 2$  гомотопические группы размерности  $n$  базы накрытия и накрывающего пространства изоморфны.

**14.9.** Группа  $\pi_n(S^n \vee S^1, x_0)$  является свободной группой со счётным набором образующих  $\alpha_k, k \in \mathbb{Z}$ . Под действием образующей фундаментальной группы  $\pi_1(S^n \vee S^1, x_0)$  элемент  $\alpha_k$  переходит в  $\alpha_{k \pm 1}$ , т. е. действие нетривиально.

**14.10.** Сделаем замену переменных  $x_1 = u_1 + u_2, x_4 = u_1 - u_2, x_2 = u_3 + u_4, x_3 = u_3 - u_4$ . Эта замена переменных задаёт гомеоморфизм рассматриваемой сферы на сферу  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \frac{1}{2}$ . При этом уравнение  $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$  переходит в уравнение  $u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 = 0$ , т. е.  $u_1^2 + u_4^2 = u_2^2 + u_3^2$ .

**14.11.** На с. 136 объясняется, что  $\mathbb{C}P^2$  получается посредством приклеивания  $D^4 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1\}$  к  $\mathbb{C}P^1 = \{(z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}P^1 \mid z_3 = 0\}$  по отображению  $f: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , заданному формулой  $f(z_1, z_2) = (z_1 : z_2)$ . Но отображение  $f$  совпадает с  $p$ .

**14.12.** Из задачи 14.11 следует, что ретракции  $r: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  соответствует отображение  $\bar{r}: D^4 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , для которого  $\bar{r}(x) = p(x)$  при  $x \in S^3$ . Поэтому  $\bar{r}$  — продолжение на  $D^4$  отображения  $p$ , т. е. отображение  $p$  гомотопно постоянному. Но отображение  $p$  индуцирует изоморфизм  $p_*: \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2)$ , где  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$  (см. с. 256), поэтому оно не может быть гомотопно постоянному.

**14.13.** Требуемый изоморфизм следует из точной последовательности пары

$$\pi_n(CX) \rightarrow \pi_n(CX, X) \rightarrow \pi_{n-1}(X) \rightarrow \pi_{n-1}(CX),$$

поскольку конус  $CX$  — стягиваемое пространство.

**14.14.** Представим  $S^m$  и  $S^n$  как  $I^m/\partial I^m$  и  $I^n/\partial I^n$ . Тогда  $S^m \times S^n$  представляется как куб  $I^{n+m}$ , у которого некоторые точки границы  $\partial I^{n+m}$  отождествляются; при отождествлении этих точек из  $\partial I^{n+m}$  получается  $S^m \vee S^n$ . Пусть  $a \in I^{n+m} \setminus \partial I^{n+m}$ . Деформационная ретракция  $I^{n+m} \setminus \{a\}$  на  $\partial I^{n+m}$  строится

очевидным образом. Она даёт деформационную ретракцию  $S^m \times S^n$  с выколотой точкой на  $S^m \vee S^n$ .

**15.1.** Множество  $N^n \subset M^n$  одновременно замкнуто (поскольку  $N^n$  компактно) и открыто (поскольку  $N^n$  не имеет края и размерность многообразия  $N^n$  равна размерности многообразия  $M^n$ ). Поэтому оно совпадает с  $M^n$ .

**15.2.** а) Многообразию  $G_+(n, 1)$  диффеоморфно  $S^{n-1}$ , а  $G_+(3, 2) \approx G_+(3, 1)$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $k \geq 2$  и  $n \geq 4$ . Вычислим  $\pi_1(G(n, k))$  с помощью теоремы 20.1. Нас интересует только 2-мерный остов  $G(n, k)$ .

В 2-мерный остов входят клетки Шуберта следующих видов:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 1 \end{pmatrix}$ ; здесь предполагается, что остальная часть

матрицы состоит из нулей и единиц, поэтому она нас не интересует. Покажем, что обе 2-мерные клетки приклеиваются к 1-мерной клетке точно так же, как

в  $\mathbb{R}P^2$ . При  $x, y \rightarrow \infty$  получаем  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x/y & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y/x & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y/x & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях диаметрально противоположные точки границы 2-мерной клетки приклеиваются к одной и той же точке 1-мерной клетки.

Таким образом, группа  $\pi_1(G(n, k))$  задаётся одной образующей  $\alpha$ , которая удовлетворяет соотношению  $\alpha^2 = 1$  (обе 2-мерные клетки задают одно и то же соотношение). Значит,  $\pi_1(G(n, k)) = \mathbb{Z}_2$ .

Пространство  $G_+(n, k)$  двулистно покрывает  $G(n, k)$ , поэтому  $\pi_1(G_+(n, k)) = 0$ . Из этого следует ориентируемость  $G_+(n, k)$ .

б) При  $k < n$  любые  $k$  ортонормированных векторов в  $\mathbb{R}^n$  можно перевести в любые другие  $k$  ортонормированных векторов в  $\mathbb{R}^n$  преобразованием из  $SO(n)$ , поэтому группа  $SO(n)$  транзитивно действует на  $G(n, k)$ , т.е. любое  $k$ -мерное подпространство  $\Pi^k$  в  $\mathbb{R}^n$  можно перевести в любое другое  $k$ -мерное подпространство преобразованием из  $SO(n)$ .

Стационарная подгруппа каждой точки  $\Pi^k \in G(n, k)$ , состоящая из преобразований, переводящих  $\Pi^k$  в себя, изоморфна  $(O(k) \times O(n-k)) \cap SO(n)$ . Действительно, любое ортогональное преобразование, переводящее  $\Pi^k$  в себя, представляет собой прямую сумму ортогонального преобразования  $\Pi^k$  и ортогонального преобразования  $(\Pi^k)^\perp$ .

Выберем в точке  $\Pi^k \in G(n, k)$  ориентацию и попытаемся разнести её на всём многообразии  $G(n, k)$  посредством действия группы  $SO(n)$ . Это удастся сделать, если под действием всей стационарной подгруппы ориентация в точке  $\Pi^k$  не изменяется.

Пусть  $U_1 \in O(k)$  и  $U_2 \in O(n-k)$ . Пара матриц  $(U_1, U_2)$  действует на матрицу  $(I_k, X)$ , где  $I_k$  — единичная матрица порядка  $k$ ,  $X$  — матрица размером  $k \times (n-k)$ , следующим образом:  $(I_k, X) \mapsto (U_1, XU_2) \sim (I_k, U_1^{-1}XU_2)$ . Поэтому в пространстве, координатами которого служат элементы матрицы  $X$ , получаем отображение

$X \mapsto U_1^{-1} X U_2$ . Это отображение задаётся матрицей  $U_2^T \otimes (U_1^{-1})^T = A$ , определитель которой равен  $(\det U_2)^k (\det U_1^{-1})^{n-k}$  (см. [15, с. 172]).

Мы рассматриваем случай, когда матрица  $U_1 \oplus U_2$  лежит в  $SO(n)$ , т. е. её определитель равен 1. Это означает, что  $\det U_1 = \det U_2 = \pm 1$ . Если  $\det U_1 = \det U_2 = 1$ , то  $\det A = 1$ . Если же  $\det U_1 = \det U_2 = -1$ , то  $\det A = (-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n$ . Поэтому в случае чётного  $n$  стационарная подгруппа сохраняет ориентацию, а в случае нечётного  $n$  часть стационарной подгруппы изменяет ориентацию. В случае нечётного  $n$  теперь легко построить петлю, при обходе вдоль которой ориентация изменяется. А именно, возьмём в связной группе  $SO(n)$  путь  $\gamma(t)$  из точки  $I_n$  в точку  $U_1 \oplus U_2$ , где  $U_1 \in O(k)$  и  $U_2 \in O(n-k)$  — матрицы с определителем  $-1$ . Этому пути соответствует петля  $\gamma(t)\Pi^k$  в  $G(n, k)$ . При обходе вдоль этой петли ориентация изменяется.

**15.3.** Сопоставим паре векторов  $(v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14})$  и  $(v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24})$  шесть чисел  $x_{ij} = \begin{vmatrix} v_{1i} & v_{1j} \\ v_{2i} & v_{2j} \end{vmatrix}$ ,  $i < j$ . Эти числа — координаты Пюккера плоскости, натянутой на данные векторы. Они связаны единственным соотношением Пюккера:

$$x_{12}x_{34} - x_{23}x_{14} + x_{13}x_{24} = 0. \quad (1)$$

Поэтому нужно доказать, что пересечение гиперповерхности (1) с 5-мерной сферой  $\sum x_{ij}^2 = 1$  диффеоморфно  $S^2 \times S^2$ .

Введём новые координаты  $y_1, \dots, y_6$  следующим образом:  $2x_{12} = y_1 + y_4$ ,  $2x_{34} = y_1 - y_4$ ,  $2x_{23} = y_2 + y_5$ ,  $2x_{14} = y_2 - y_5$ ,  $2x_{13} = y_3 + y_6$ ,  $2x_{24} = y_3 - y_6$ . В этих координатах уравнение (1) запишется в виде  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_4^2 + y_5^2 + y_6^2$ , а уравнение 5-мерной сферы запишется в виде  $\sum y_k^2 = 2$ . Полученная система уравнений эквивалентна следующей:  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ ,  $y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 1$ . Эта система уравнений задаёт  $S^2 \times S^2$ .

**15.4.** Пусть  $\Pi^2 \in G_+(n, 2)$  — ориентированная плоскость в  $\mathbb{R}^n$ . Выберем в ней векторы  $v_1$  и  $v_2$  так, что  $|v_1| = |v_2|$ ,  $v_1 \perp v_2$  и базис  $v_1, v_2$  положительно ориентирован. Если плоскость  $\Pi^2$  отождествить с  $\mathbb{C}$ , то пара  $v_1, v_2$  определена с точностью до умножения на ненулевое комплексное число.

Сопоставим паре векторов  $v_1, v_2$  вектор  $v_1 + iv_2$  в  $\mathbb{C}^n$ , а затем сопоставим этому вектору соответствующую ему точку в  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Так мы получим взаимно однозначное отображение  $G_+(n, 2)$  на некоторое подмножество в  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Покажем, что это множество и есть квадрика, заданная уравнением  $z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0$ .

Пусть  $v_1 = (x_1, \dots, x_n)$  и  $v_2 = (y_1, \dots, y_n)$ . Тогда  $\sum (x_k + iy_k)^2 = \sum x_k^2 - \sum y_k^2 + 2i \sum x_k y_k = 0$ , т. е. точка  $v_1 + iv_2$  принадлежит указанной квадрике. Наоборот, если  $z_k = x_k + iy_k$  и  $\sum z_k^2 = 0$ , то векторы  $v_1 = (x_1, \dots, x_n)$  и  $v_2 = (y_1, \dots, y_n)$  имеют равную длину и ортогональны.

Комплексное сопряжение соответствует замене базиса  $v_1, v_2$  на базис  $v_1, -v_2$ . В результате получается та же плоскость, но с противоположной ориентацией.

**16.1.** Точка  $TS^n$  задаётся парой векторов  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ , для которых  $(x, x) = 1$  и  $(x, y) = 0$ . Сопоставим этой паре векторов точку  $x(\sqrt{1 + \|y\|^2}) + iy \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

Пусть  $z_k = x_k(\sqrt{1 + \|y\|^2}) + iy_k$ . Тогда

$$\sum x_k(\sqrt{1 + \|y\|^2} + iy_k)^2 = (1 + \|y\|^2) \sum x_k^2 + 2i\sqrt{1 + \|y\|^2} \sum x_k y_k - \sum y_k^2 = 1,$$

поскольку  $\sum x_k^2 = 1$  и  $\sum x_k y_k = 0$ .

Наоборот, возьмём точку  $u + iv \in \mathbb{C}^{n+1}$ , для которой  $\sum (u_k + iv_k)^2 = 1$ , т. е.  $\|u\|^2 - \|v\|^2 = 1$  и  $(u, v) = 0$ . Сопоставим точке  $u + iv$  пару векторов  $x = \frac{u}{\sqrt{1 + \|v\|^2}}$  и  $y = v$ . Тогда  $\|x\|^2 = \frac{\|u\|^2}{1 + \|v\|^2} = 1$  и  $(x, y) = 0$ .

**16.2.** Пусть  $v_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ . Положим  $v_1 = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ ,  $v_2 = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$  и  $v_3 = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$ . Тогда  $(v_i, v_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Из этого следует, что  $v_1, v_2, v_3$  — попарно ортогональные единичные векторы, касательные к  $S^3$  в точке  $v_0$ .

На  $S^{4n+3}$  три линейно независимых векторных поля строятся аналогично: координаты разбиваются на  $n + 1$  четвёрку, с каждой из которых производятся те же самые операции.

**16.3.** а) Пусть  $v(x)$  — векторное поле без особых точек на  $S^{2n+1}$ . Можно считать, что  $\|v(x)\| = 1$ . Положим  $H(t, x) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)v(x)$ . Тогда  $\|H(t, x)\| = 1$ , т. е.  $H(t, x) \in S^{2n+1}$ . При этом  $H(0, x) = f(x)$  и  $H(1, x) = g(x)$ .

б) Пусть  $x_{2k+1}(t) = x_{2k+1} \cos \pi t + x_{2k+2} \sin \pi t$  и  $x_{2k+2}(t) = x_{2k+1} \sin \pi t + x_{2k+2} \cos \pi t$ . Положим  $H(t, x) = (-x_0, x_1(t), \dots, x_{2n}(t))$ . Тогда  $H(0, x) = g(x)$  и  $H(1, x) = f(x)$ .

**16.4.** а) Рассмотрим проекцию вектора  $f(x)$  на касательное пространство в точке  $x \in S^{2n}$ . Если  $f(x) \neq \pm x$  для всех  $x$ , то в результате получим векторное поле на  $S^{2n}$  без особых точек, чего не может быть.

б) Точку  $x \in \mathbb{R}P^{2n}$  можно рассматривать как пару точек  $\pm x \in S^{2n}$ . Сопоставим каждой из точек  $\pm x$  пару точек  $\pm f(x)$ . В результате получим либо два отображения  $\tilde{f}_{1,2}: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  (при этом  $\tilde{f}_2 = -\tilde{f}_1$ ), либо одно отображение  $\tilde{f}: S^{2n} \rightarrow \tilde{S}^{2n}$ , где пространство  $\tilde{S}^{2n}$  двулистно накрывает  $S^{2n}$ . Второй вариант невозможен, поскольку  $\pi_1(S^{2n}) = 0$ .

Если отображение  $f$  не имеет неподвижных точек, то отображение  $\tilde{f}_1$  обладает тем свойством, что  $\tilde{f}_1(x) \neq \pm x$  для всех  $x \in S^{2n}$ . Согласно задаче а) таких отображений нет.

**16.5.** [105] Можно считать, что  $K$ , как линейное пространство, отождествлено с  $\mathbb{R}^n$ . Прежде всего докажем, что число  $n$  чётно. Соединим в  $\mathbb{R}^n$  точки  $e$  и  $-e$  путём  $\gamma(t)$ , не проходящим через 0. Каждой точке  $\gamma(t)$  этого пути соответствует невырожденное линейное преобразование  $A_{\gamma(t)}: x \mapsto \mu(x, \gamma(t))$ . Точкам  $e$  и  $-e$  соответствуют линейные преобразования  $I_n$  и  $-I_n$ , причём  $\det I_n = 1$  и  $\det(-I_n) = (-1)^n$ . Предположим, что  $n$  нечётно. Тогда  $\det(-I_n) = -1$ . С другой стороны,  $\det(A_{\gamma(t)}) \neq 0$  для всех  $t$ . Поэтому если в начальной точке пути  $\det(A_{\gamma(t)}) > 0$ , то в конечной точке пути тоже  $\det(A_{\gamma(t)}) > 0$ . Получено противоречие.

Каждому вектору  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  можно сопоставить вектор  $f(v) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , для которого  $\mu(v, f(v)) = e$ . При этом  $v = \alpha e \Leftrightarrow f(v) = \beta e$ . Таким образом,  $f$  — го-

меоморфизм  $\mathbb{R}^n \setminus \{te\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , на себя. Далее,  $f$  переводит луч  $tv$ ,  $t > 0$ , в луч  $tf(v)$ ,  $t > 0$ , поскольку  $f(tv) = t^{-1}f(v)$  при  $t \neq 0$ . Поэтому можно рассмотреть отображение  $\tilde{f}: S^{n-1} \setminus \{\pm e\} \rightarrow S^{n-1} \setminus \{\pm e\}$ , которое переводит точку  $v$  в точку пересечения луча  $tf(v)$ ,  $t > 0$ , со сферой  $S^{n-1}$ . Наконец, перейдём к отображению  $g: S^{n-2} \rightarrow S^{n-2}$ , которое переводит точку  $v$  в точку пересечения сферы  $S^{n-2}$ , состоящей из единичных векторов, ортогональных  $e$ , с большой окружностью, проходящей через точки  $\pm e$  и  $\tilde{f}(v)$ .

Число  $n-2$  чётно, поэтому согласно задаче 16.4  $g(v) = \pm v$  для некоторой точки  $v \in S^{n-2}$ . Это означает, что  $f(v) = \alpha v + \beta e$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha \neq 0$ . Согласно определению  $e = \mu(v, f(v)) = \mu(v, \alpha v + \beta e) = \alpha \mu(v, v) + \beta v$ , поэтому  $\mu(v, v) = \alpha^{-1}e - \alpha^{-1}\beta v$ . Таким образом, подпространство, натянутое на векторы  $e$  и  $v$ , является подалгеброй. Эта подалгебра ассоциативна, коммутативна, имеет двустороннюю единицу и не имеет делителей нуля, т. е. она является полем. Но любое поле, которое как вещественное пространство имеет размерность 2, изоморфно  $\mathbb{C}$ .

**16.6.** В малой окрестности любой точки сферы  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| = 1/2\}$  отображение  $f$  (с точностью до линейных членов) выглядит как симметрия относительно гиперплоскости, касательной к  $S^{n-1}$  в данной точке.

**18.1.** Отображение  $f$  гомотопно постоянному отображению, потому что  $\pi_2(M^2) = 0$ . Из этого следует, что  $\deg f = 0$ .

**18.2.** Пусть  $x_0$  — регулярное значение отображения  $f$   $g$ ,  $f^{-1}(x_0) = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $g^{-1}(a_i) = \{b_{i1}, \dots, b_{i\ell(i)}\}$ ,  $\varepsilon_i = \text{sgn } J_f(a_i)$ ,  $\varepsilon_{ij} = \text{sgn } J_g(b_{ij})$ . Тогда  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k = \deg f$  и  $\varepsilon_{i1} + \dots + \varepsilon_{i\ell(i)} = \deg g$  для всех  $i = 1, \dots, k$ . Поэтому  $\deg(fg) = \sum \varepsilon_i \varepsilon_{ij} = \sum \varepsilon_i (\deg g) = (\deg f)(\deg g)$ .

**18.3.** Пусть  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ . Отображение  $z \mapsto P(z)$  продолжается до отображения  $\hat{P}: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , заданного формулой

$$(z : \omega) \mapsto (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \omega + \dots + a_0 \omega^n : \omega^n).$$

Пусть  $(u_0 : 1)$  — регулярное значение отображения  $\hat{P}$ . Степень отображения  $\hat{P}$  вычисляется следующим образом. Сначала нужно взять прообразы точки  $(u_0 : 1)$ , т. е. такие точки  $z_0, \dots, z_k$ , что  $P(z_j) = u_0$ . Регулярность означает, что  $P(z_j) \neq 0$ . Поэтому у многочлена  $P(z) - u_0$  нет кратных корней, т. е.  $k = n$ . Затем в каждой точке  $z_j$  нужно вычислить знак якобиана отображения  $z \mapsto P(z)$ . Если  $P'(z_j) = a + bi$ , то матрица Якоби этого отображения в точке  $z_j$  равна  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

Её определитель равен  $a^2 + b^2 > 0$ , поэтому якобиан во всех точках  $z_1, \dots, z_n$  положителен. Значит, степень отображения равна  $n$ .

**18.4.** Пусть  $R(z) = P(t)/Q(t)$ , где  $\deg P = m$  и  $\deg Q = n$ . Тогда гладкое отображение  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  задаётся формулой

$$(z : \omega) \mapsto (\omega^{m+n} P(z/\omega) : \omega^{m+n} Q(z/\omega)).$$

Как и в задаче 18.3, во всех прообразах регулярного значения якобиан положителен, поэтому нужно лишь найти число прообразов. В общем положении число корней уравнения  $P(z) = cQ(z)$  равно  $\max\{m, n\}$ .

**18.5.** Будем рассматривать  $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$  как гладкое многообразие. Рассмотрим в  $S^{n+1}$  экваториальную сферу  $S^n = S^n \times \{1/2\}$  и выберем на ней регулярное значение  $x_0$  отображения  $f$ ; оно является также и регулярным значением отображения  $\Sigma f$ . Более того, если  $J$  — матрица Якоби отображения  $f$  в точке  $y_0 \in f^{-1}(x_0)$ , то  $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица Якоби отображения  $\Sigma f$ .

**18.6.** Покажем, что  $\deg f = k_1 \dots k_n$ . Если одно из чисел  $k_1, \dots, k_n$  равно нулю, то это очевидно. В дальнейшем будем считать, что  $k_1 \dots k_n \neq 0$ . Прообраз точки  $(r_1 e^{i\psi_1}, \dots, r_n e^{i\psi_n})$  состоит из  $|k_1 \dots k_n|$  точек

$$\left( r_1 e^{i(\psi_1 + 2\pi l_1)/k_1}, \dots, r_n e^{i(\psi_n + 2\pi l_n)/k_n} \right),$$

где  $0 \leq l_i \leq |k_i| - 1$ . Ясно также, что знак якобиана отображения  $f$  совпадает со знаком числа  $k_1 \dots k_n$ .

**18.7.** Равенство  $f(-A) = f(A)$  показывает, что степень отображения  $f$  чётна. Поэтому отображение  $f$  не гомотопно тождественному.

**18.8.** Можно считать, что  $C$  — единичная окружность. Вместо векторного поля  $v$  на  $C$  удобнее рассматривать векторное поле  $\omega$ , которое получается при повороте вектора  $v$  в точке  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  на угол  $-\varphi$ . Например, если векторное поле  $v$  касается  $C$ , то векторное поле  $\omega$  имеет постоянное направление — под углом  $\pm 90^\circ$ . Ясно, что  $\text{ind } v = \text{ind } \omega + 1$ , поэтому нужно доказать, что  $2 \text{ind } \omega = i - e$ .

Точки касания окружности  $C$  с интегральными траекториями соответствуют векторам  $\omega$ , направленным под углом  $\pm 90^\circ$ . Легко проверить, что в точке внешнего касания вектор  $\omega$  вращается в противоположном направлении по отношению к направлению обхода окружности. Это означает, что в этой точке якобиан отрицателен. В точке внутреннего касания якобиан положителен. Точки внешнего и внутреннего касания являются прообразами двух точек, соответствующих направлениям  $\pm 90^\circ$ . Поэтому для одной точки количество прообразов (с учётом знака) равно  $(i - e)/2$ .

**18.11.** Случай  $n = 1$  очевиден, поэтому будем считать, что  $n \geq 2$ . Рассмотрим на  $M^n$  векторное поле  $v$  с невырожденными особыми точками. Особые точки можно разбить на пары, состоящие из точек с индексами разного знака. Покажем, как можно уменьшить на 2 число особых точек (если они есть). Возьмём две особые точки  $x_+$  и  $x_-$  с индексами 1 и  $-1$ . Соединим их путём  $\gamma$ , не проходящим через другие особые точки. Пусть  $\gamma_\varepsilon = \varepsilon$ -окрестность пути  $\gamma$ . Если  $\varepsilon$  достаточно мало, то  $\gamma_\varepsilon \approx D^n$  и  $\gamma_\varepsilon$  не содержит особых точек, кроме  $x_+$  и  $x_-$ . Можно считать, что множество  $\gamma_\varepsilon$  покрыто одной картой и все векторы  $v(x)$ ,  $x \in \partial\gamma_\varepsilon$ , имеют единичную длину. Рассмотрим отображение  $\partial\gamma_\varepsilon \rightarrow S^{n-1}$ , заданное формулой  $x \mapsto v(x)$ . Степень этого отображения равна сумме индексов особых точек  $x_+$  и  $x_-$ , т.е. она равна нулю. Значит, отображение  $\partial\gamma_\varepsilon \rightarrow S^{n-1}$  гомотопно постоянному отображению. Эту гомотопию можно рассматривать как векторное поле  $\omega$  на  $\gamma_\varepsilon$ , которое состоит из векторов единичной длины и на  $\partial\gamma_\varepsilon$  совпадает с исходным векторным полем  $v$ . Поэтому можно рассмотреть векторное поле, которое совпадает с  $v$  вне  $\gamma_\varepsilon$  и с  $\omega$  на  $\gamma_\varepsilon$ . Это векторное поле имеет на 2

особые точки меньше, чем  $v$ . Повторяя такую конструкцию, можно уничтожить все особые точки.

**18.12.** Ясно, что если на  $M^n$  есть векторное поле без особых точек, то на  $M^n$  есть и поле направлений. Предположим, что на  $M^n$  есть поле направлений. Введём на  $M^n$  риманову метрику и в каждом выделенном 1-мерном подпространстве возьмём оба вектора единичной длины. Множество всех таких векторов является замкнутым многообразием  $\tilde{M}^n$ , которое 2-листно накрывает  $M^n$  и на котором задано векторное поле без особых точек. (Многообразие  $\tilde{M}^n$  либо связно, либо состоит из двух связных компонент, диффеоморфных  $M^n$ .) Пусть  $\chi$  — сумма индексов особых точек векторного поля на  $M^n$ . Согласно теореме 18.7 на с. 251 сумма индексов особых точек векторного поля на  $\tilde{M}^n$  равна  $2\chi$ . Но на  $\tilde{M}^n$  есть векторное поле без особых точек, поэтому  $2\chi = 0$ , а значит,  $\chi = 0$ . Теперь задача 18.11 показывает, что на  $M^n$  есть векторное поле без особых точек.

**18.13.** В примере 14.3 на с. 187 показано, что расслоение Хопфа  $p: S^3 \rightarrow S^2$  является образующей группы  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ . Чтобы описать соответствующее оснащённое многообразие в  $\Omega_{\text{fr}}^1(3)$ , рассмотрим на сфере  $S^2$  две близкие точки. Их прообразы — две окружности, образующие зацепление Хопфа. Поэтому соответствующее оснащённое многообразие представляет собой окружность  $S^1$  со следующим оснащением. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  зацепление Хопфа, одной из компонент которого является наша окружность  $S^1$  (мы предполагаем, что окружность  $S^1$  стандартно вложена в  $\mathbb{R}^3$ , а вторая компонента зацепления Хопфа лежит на границе  $\varepsilon$ -окрестности  $S^1$ , причём каждый ортогональный к  $S^1$  круг радиуса  $\varepsilon$  пересекает вторую компоненту ровно в одной точке). Конец вектора  $e_1$  оснащения перемещается по второй компоненте зацепления Хопфа ( $\|e_1\| = \varepsilon$ ); вектор  $e_2$  оснащения лежит в нормальной к  $S^1$  плоскости и ортогонален вектору  $e_1$ .

**19.1.** а) Из стягиваемости конуса  $CY$  следует, что  $X/Y = (X \cup CY)/CY \sim X \cup CY$  для любого подкомплекса  $Y \subset X$ . Несложно убедиться, что в доказательстве леммы 19.2 можно заменить  $S^{i-1}$  на  $Y$ , а  $D^i$  на  $CY$ . Поэтому если отображения  $f, g: Y \rightarrow X$  гомотопны, то  $X \cup_f CY \sim X \cup_g CY$ . По условию вложение  $f: Y \rightarrow X$  гомотопно постоянному отображению  $g: Y \rightarrow x_0 \in X$ . Но  $X \cup_f CY = X \cup CY$ , а  $X \cup_g CY = X \vee \Sigma Y$ .

б) Экваториальная сфера  $S^k$  стягиваема в  $S^{k+1}$ . Поэтому при  $n > m$  сфера  $S^m$ , канонически вложенная в  $S^n$ , стягиваема в  $S^n$ . Остаётся воспользоваться задачей а).

**20.2.** Легко видеть, что отображение  $i_*: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$  задаётся формулой  $a \mapsto 2a$ , где  $a$  — образующая групп  $\pi_1(A)$  и  $\pi_1(X)$ . Поэтому отображение  $r_*i_*$  не может быть тождественным.

**20.3.** а) Из стандартного представления тора  $T^2$  посредством склейки сторон квадрата видно, что отображение  $i_*: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$  задаётся формулой  $a \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , где  $a$  — образующая группы  $\pi_1(A)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — образующие свободной группы  $\pi_1(X)$ . Таким образом, для коммутантов фундаментальных групп получаем нулевое отображение. Поэтому отображение  $r_*i_*$  не может быть тождественным.



б) В этом случае отображение  $i_*: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$  задаётся формулой  $a \mapsto \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$ . Отображение коммутантов тоже нулевое.

**20.4.** Отображение коммутантов, индуцированное отображением  $i_*: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ , имеет вид  $a \mapsto 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_g$ . Поэтому отображение  $r_* i_*$  не может быть тождественным.

**20.5.** Касательный вектор в точке  $x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ортогонален вектору  $x$ . Поэтому точка многообразия  $M_0^3$  представляет собой упорядоченную пару ортогональных векторов  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$  единичной длины. Эта пара однозначно дополняется до положительно ориентированного ортонормированного базиса  $e_1, e_2, e_3$ . Поэтому  $M_0^3 \approx \text{SO}(3)$ .

Гомеоморфизм  $\text{SO}(3) \approx \mathbb{R}P^3$  устанавливается следующим образом. Любое преобразование из  $\text{SO}(3)$  имеет собственный вектор, поэтому он является поворотом на угол  $\varphi$  вокруг оси  $l$ , проходящей через начало координат. Каждому вектору  $e_3 \in \mathbb{R}^3$  длины  $\varphi$ , где  $0 < \varphi \leq \pi$ , можно сопоставить поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $e_3$ ; направление вращения при этом выбирается так, чтобы базис  $e_1, e_2, e_3$ , где  $e_1$  — вектор, ортогональный  $e_3$ , а  $e_2$  — образ вектора  $e_1$  при данном повороте, был положительно ориентирован. Нулевому вектору сопоставим тождественное преобразование. Так устанавливается соответствие между точками шара  $D^3$  радиуса  $\pi$  и преобразованиями из  $\text{SO}(3)$ . Но при этом каждые две диаметрально противоположные точки шара соответствуют одному и тому же преобразованию.

**21.1.** Пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  гомотопически эквивалентно  $S^2 \cup I$ , где  $I$  — диаметр сферы  $S^2$ . Пусть  $I_1$  — дуга на сфере, соединяющая концы диаметра  $I$ . Тогда  $S^2 \cup I \sim (S^2 \cup I)/I_1 \sim S^2 \vee S^1$ .

**22.1.** Пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus L$  гомотопически эквивалентно букету  $n$  экземпляров пространства  $D^3 \setminus S^1$ , где  $S^1 \subset D^3$  — стандартно вложенная окружность (тривиальный узел). Согласно задаче 21.1  $D^3 \setminus S^1 \sim S^2 \vee S^1$ .

**22.2.** При обсуждении свойств расслоения Хопфа мы получили представление сферы  $S^3$  в виде объединения двух полноторий  $T_1 = D_1^2 \times S^1$  и  $T_2 = D_2^2 \times S^1$ . При этом окружности  $\{0\} \times S^1$ , лежащие в этих полноториях, образуют рассматриваемое зацепление. Учитывая, что  $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus *$ , получаем, что пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus L$  получается выбрасыванием из полнотория  $T_1$  окружности  $\{0\} \times S^1$  и ещё одной точки. Такое пространство гомотопически эквивалентно  $T^2 \vee S^2$ .

## Литература

1. Alexandroff P. S. Über stetige Abbildungen kompakter Räume. // *Math. Ann.* 96 (1927), 555–571.
2. Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1997.
3. Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Вып. 3. М.: Наука, 1975.
5. ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. Васильев В. А. Введение в топологию. М.: Фазис, 1997.
7. Веселов А. П., Дынников И. А. Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса. // *Алгебра и анализ.* Т. 8, Вып. 3. (1996), 78–103.
8. Гуревич У., Волман Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
9. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. М.: Госиздат, 1930.
10. Милнор Дж. О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере // *Математика.* Сб. перев. 1959 Т. 1, Вып. 3. с. 35–42.
11. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
12. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972.
13. Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств. М.: Наука, 1985.
14. Прасолов В. В. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
15. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
16. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2000.
17. Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
18. Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.
19. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
20. Urysohn P. S. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen // *Math. Ann.* 1925. Bd. 94. S. 262–295.
21. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
22. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
23. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.

24. Adachi M. Embeddings and immersions. Providence: AMS. 1993.
25. Albert A. A. Non-associative algebras // *Ann. Math.* 1942. V. 43. P. 685–707.
26. Alexander J. C. Morse functions on Grassmanians // *Illinois J. Math.* 1971. V. 15. P. 672–681.
27. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging // *Illinois J. Math.* 1977. V. 21. P. 429–490.
28. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable // Providence: AMS. (Contemp. Math. 1989. V. 98.)
29. Appel K., Haken W., Koch J. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility // *Illinois J. Math.* 1977. V. 21. P. 491–567.
30. Archdeacon D., Širáň J. Characterizing planarity using theta graphs // *J. Graph Theory* 1998. V. 27. P. 17–20.
31. Balinski M. L. On the graph structure of convex polyhedra in  $n$ -space // *Pacific J. Math.* 1961. V. 11. P. 431–434.
32. Banchoff T. F. Global geometry of polygons. I: The theorem of Fabricius-Bjerre // *Proc. AMS.* 1974. V. 45. P. 237–241.
33. Bajmóczy E. G., Bárány I. On a common generalization of Borsuk's theorem and Radon's theorem // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1979. V. 34. P. 347–350.
34. Bárány I., Lovász L. Borsuk's theorem and the number of facets of centrally symmetric polytopes // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1982. V. 40. P. 323–329.
35. Barnette D. W., Grünbaum B. On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs. // In: *Lecture Notes in Math.* V. 110. Springer, 1969. P. 27–40.
36. Bohl P. Über die Bewegung eines mechanisches Systems in die Nähe einer Gleichgewichtslage // *J. Reine Angew. Math.* 1904. V. 127. P. 279–286.
37. Bondy J. A., Murty U. S. R. Graph theory with applications. London, Macmillan: 1976.
38. Borsuk K. Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre // *Fund. Math.* 1933. V. 20. P. 177–190.
39. Bott R. Two new combinatorial invariants for polyhedra // *Portugaliae Math.* 1952. V. 11. P. 35–40.
40. Bredon G. E., Wood J. W. Non-orientable surfaces in orientable 3-manifolds // *Invent. Math.* 1969. V. 7. P. 83–110.
41. Breitenbach J. R. A criterion for the planarity of a graph // *J. Graph Theory* 1986. V. 10. P. 529–532.
42. Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // *Math. Ann.* 1912. Bd. 71. S. 97–115.
43. Brouwer L. E. J. Über den natürlichen Dimensionsbegriff // *J. Reine Angew. Math.* 1913. Bd. 142. S. 146–152.
44. Brown A. B., Cairns S. S. Strengthening of Sperner's lemma applied to homology theory // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 1961. V. 47. P. 113–114.

45. Cairns S. S. A simple triangulation method for smooth manifolds // Bull. AMS. 1961. V. 67. P. 389–390.
46. Cheniot D. Le theoreme de van Kampen sur le groupe fondamental du complementaire d'une courbe algebrique projective plane. In: Lecture Notes in Math. 1974. V. 409. P. 394–417.
47. Cohen D. I. A. On the Sperner lemma // J. Combinatorial Theory 1967. V. 2. P. 585–587.
48. Conway J. H., Gordon C. McA. Knots and links in spatial graphs // J. Graph Theory 1983. V. 7. P. 445–453.
49. Creighton J. H. C. An elementary proof of the classification of surfaces in the projective 3-space // Proc. AMS. 1978. V. 72. P. 191–192.
50. Crowell R. H. On the van Kampen theorem // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 43–50.
51. Dieudonné J. Une généralization des espace compact // J. Math. Pures Appl. 1944. V. 23. P. 65–76.
52. Engelking R. Dimension theory. North-Holland Pub. Company, 1978.
53. Fabricius-Bjerre Fr. On the double tangents of plane closed curves // Math. Scand. 1962. V. 11. P. 113–116.
54. Fabricius-Bjerre Fr. A proof of a relation between the numbers of singularities of a closed polygon // J. Geom. 1979. V. 13. P. 126–132.
55. Fáry I. On stright line representation of planar graph // Acta Sci. Math. (Szeged). 1948. V. 11. P. 229–233.
56. Fathi A. Partitions of unity for countable covers // Amer. Math. Monthly. 1997. V. 104. P. 720–723.
57. Flores A. Über die Existenz  $n$ -dimensionaler Komplexe, die nicht in den  $R_{2n}$  topologisch einbettbar sind // Ergeb. Math. Kolloq. 1932/33. Bd. 5. S. 17–24.
58. Flores A. Über  $n$ -dimensionale Komplexe, die im  $R_{2n+1}$  absolut selbstverschlungen sind // Ergeb. Math. Kolloq. 1933/34. Bd. 6. S. 4–6.
59. Freudenthal H. Die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit der Tangentialrichtungen einer geschlossenen Fläche // Fund. Math. 1962. V. 50. P. 537–538.
60. Fritsch R., Piccini R. A. Cellular structures in topology. Cambridge: CUP, 1990.
61. Gęba K., Granas A. A proof of the Borsuk antipodal theorem // J. Math. Analysis Appl. 1983. V. 96. P. 203–208.
62. Gramain A. Le théorème de van Kampen // Cahiers Top. et Geom. Diff. Categoriqes 1992. V. 33. P. 237–250.
63. Gross J. L., Tucker Th. W. Topological graph theory. New York: John Wiley, 1987.
64. Grünbaum B. Imbeddings of Simplicial Complexes // Comment. Math. Helv. 1969. V. 44. P. 502–513.
65. Halpern B. An inequality for double tangents // Proc. AMS. 1979. V. 76. P. 133–139.

66. H a n g a n T h. A Morse function on Grassmann manifolds // J. Diff. Geom. 1968. V. 2. P. 363–367.
67. H a r r i s G., M a r t i n C. The roots of a polynomial vary continuously as a function of the coefficients // Proc. AMS. 1987. V. 100. P. 390–392.
68. H a t c h e r A. Algebraic topology. Cambridge: CUP, 2002.
69. H e a w o o d P. J. Map colour theorem // Quart. J. Math. 1890. V. 24. P. 332–338.
70. H i r s h M. W. A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary // Proc. AMS. 1963. V. 14. P. 364–365.
71. H o C h u n g - W u A note on proper maps // Proc. AMS. 1975. V. 51. P. 237–241.
72. H o C h u n g - W u When are immersions diffeomorphisms? // Canadian Math. Bull. 1981. V. 24. P. 491–492.
73. H o p f E. Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven // Comp. Math. 1935. Bd. 2. S. 50–62.
74. H o p f H. Abbildungsklassen  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten // Math. Ann. 1927. Bd. 96. S. 209–224.
75. H u S. - T. Elements of general topology. San Francisco: Holden-Day, 1964.
76. J ä n i c h K. Topology. New York: Springer, 1980.
77. J o r d a n C. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Gauthier–Villars, Paris, 1887. Vol. 3, 587–594.
78. K a k u t a n i S h. A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 457–459.
79. K a k u t a n i S h. A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in  $\mathbb{R}^n$  // Ann. Math. 1942. V. 43. P. 739–741.
80. K n a s t e r B., K u r a t o w s k i C., M a z u r k i e w i c z C. Ein Beweis des Fixpunktesatzes für  $n$ -dimensionale Simplexe // Fund. Math. 1929. Bd. 14. S. 132–137.
81. K n u t s o n G. W. A note on the universal covering space of a surface // Amer. Math. Monthly 1971. V. 78. P. 505–509.
82. K o c h R. Matrix invariants // Amer. Math. Monthly 1984. V. 91. P. 573–575.
83. K ö n i g D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
84. K u r a t o w s k i K. Sur le problème des courbes gauches en topologie // Fund. Math. 1930. V. 15. P. 271–283.
85. L e e S h. - N. A combinatorial Lefschetz fixed-point theorem // J. Combinatorial Theory, Ser. A. 1992. V. 61. 123–129.
86. L e i g h t o n F. T h. Finite common coverings of graphs // J. Combinatorial Theory, Ser. B 1982. V. 33 231–238.
87. L o v á s z L., S c h r i j v e r A. A Borsuk theorem for antipodal links and spectral characterization of linklessly embeddable graphs // Proc. AMS. 1998. V. 126. P. 1275–1285.
88. M a c L a n e S. A combinatorial condition for planar graphs // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 22–32.

89. Maehara H. Why is  $P^2$  not embedable in  $\mathbb{R}^3$ ? // Amer. Math. Monthly. 1993. V. 100. P. 862–864.
90. Maehara R. The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem // Amer. Math. Monthly 1984. V. 91. P. 641–643.
91. Makarychev Yu. A short proof of Kuratovski's graph planarity criterion // J. Graph Theory 1997. V. 25. P. 129–131.
92. Marx M. L. The Gauss realizability problem // Proc. AMS. 1969. V. 22. P. 610–613.
93. Mather M. Paracompactness and partitions of unity. PhD thesis, Cambridge Univ., 1965.
94. Mayer J. Le problème des regions voisines sur les surfaces closed orientables // J. Comb. Theory 1969. V. 6. P. 177–195.
95. Meyerson M. D., Wright A. H. A new and constructive proof of the Borsuk–Ulam theorem // Proc. AMS. 1979. V. 73. P. 134–136.
96. Milnor J. Analytic proof of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed point theorem // Amer. Math. Monthly. 1978. V. 85. P. 521–524.
97. Moise E. M. Geometric topology in dimension 2 and 3. New York: Springer, 1977.
98. Morton H. R. Symmetric products of the circle // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 349–352.
99. Naber G. L. Topological methods in Euclidean spaces. Cambridge: CUP, 1980.
100. Nash - Williams C. St. J. A., Tutte W. T. More proofs of Menger's theorem // J. Graph Theory 1977. V. 1. P. 13–17.
101. Negami S. Polynomial invariants of graphs // Trans. AMS. 1987. V. 299. P. 601–622.
102. Oka M. Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups // Math. Ann. 1975. V. 218. P. 55–65.
103. Ozawa T. On Halpern's conjecture for closed plane curves // Proc. AMS. 1984. V. 92. P. 554–560.
104. Parsons T. D. On planar graphs // Amer. Math. Monthly. 1971. V. 78. P. 176–178.
105. Petro J. Real division algebras of dimension  $> 1$  contains  $\mathbb{C}$  // Amer. Math. Monthly 1987. V. 94. P. 445–449.
106. Poincaré H. Sur les courbes définies par les équations différentielles IV // J. Math. Pures et Appl. 1886. V. 2. P. 151–217.
107. Prüfer M. Complementary pivoting and the Hopf degree theorem // J. Math. Analysis Appl. 1981. V. 84. P. 133–149.
108. Ringel G. Das Geschlecht des vollständiger paaren Graphen // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1965. Bd. 28. S. 139–150.
109. Ringel G., Youngs J. W. T. Solution of the Heawood map-coloring problem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1968. V. 60. P. 438–445.
110. Ringel G., Youngs J. W. T. Remarks on the Heawood conjecture. // In: Proof Techniques in Graph Theory. New York: Academic Press, 1969.

111. Robbins H. Some complements to Brouwer's fixed point theorem // Israel J. Math. 1967. V. 5. P. 225–226.
112. Robertson N., Sanders D.P., Seymour P.D., Thomas R. The four-colour theorem // J. Comb. Theory, Ser. B, 1997. V. 70. P. 2–44.
113. Rogers C.A. A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem // Amer. Math. Monthly 1980. V. 87. P. 525–527.
114. Rotman J.J. An introduction to algebraic topology. New York: Springer, 1988.
115. Rudin M.E. A new proof that metric spaces are paracompact // Proc. AMS. 1969. V. 20 P. 603.
116. Sachs H. On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs—an open problem. // In: Lecture Notes Math. 1982. V. 1018. P. 231–240.
117. Samelson H. Orientability of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$  // Proc. AMS. 1969. V. 22. P. 301–302.
118. Sard A. The measure of the critical points of differentiable maps // Bull. AMS. 1942. V. 48. P. 883–890.
119. Sarkaria K. S. A generalized Kneser conjecture // J. Comb. Theory. Series B, 1990. V. 49. P. 236–240.
120. Sarkaria K. S. A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion // Israel J. Math. 1991. V. 73. P. 79–89.
121. Seifert H. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume // Ber. Sächs. Akad. Wiss. 1931. V. 83. P. 26–66.
122. Sperner E. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionzahl und des Gebietes // Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 1928. Bd. 6. S. 265–272.
123. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen. In: Enzykl. Math. Wiss., Bd. 3 (Geometrie) Part 3 AB 12 1922. S 1–139.
124. Stone A.H. Paracompactness and product spaces // Bull. AMS. 1948. V. 54. P. 977–982.
125. Thomassen C. Kuratowski's theorem // J. Graph Theory. 1981. V. 5. P. 225–241.
126. Thomassen C. The Jordan–Schönflies theorem and the classification of surfaces // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99. P. 116–130.
127. Tucker A.W. Some topological properties of disk and sphere. In: Proc. First Canadian Math. Congress. 1945. 285–309.
128. Tutte W.T. A contribution to the theory of chromatic polynomials // Canadian J. Math. 1954. V. 6. P. 80–91.
129. Tverberg H. A proof of the Jordan curve theorem // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. P. 34–38.
130. Van C.L. Topological degree and the Sperner lemma // J. Optimiz. Theory Appl. 1982. V. 37. P. 371–377.
131. van Kampen E. Komplexe in euklidischen Räumen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1932. V. 9. P. 72–78, 152–153.

132. van Kampen E. On the fundamental group of an algebraic curve // Amer. J. Math. 1933. V. 55. P. 255–260.
133. van Kampen E. On the connection between the fundamental groups of some related spaces // Amer. J. Math. 1933. V. 55. P. 261–267.
134. Veblen O. Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs // Trans. AMS. 1905. V. 6. P. 83–98.
135. Wagner K. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem // Jahresberichte Deutsch Math. Verein. 1936. Bd. 46. S. 26–32.
136. Wang Zh. On Bott polynomials // J. Knot Theory and its Ramifications 1994. V. 3. P. 537–546.
137. Watson G. N. A problem in analysis situs // Proc. London Math. Soc. 1916. V. 15. P. 227–242.
138. Weil A. Sur le théorèmes de de Rham // Comment. Math. Helv. 1952. V. 26. P. 119–145.
139. Weiss B. A combinatorial proof of the Borsuk–Ulam antipodal point theorem // Israel J. Math. 1989. V. 66. P. 364–368.
140. Whitehead J. H. C. Combinatorial homotopy I // Bull. AMS. 1949. V. 55. P. 213–245.
141. Whitney H. Nonseparable and planar graphs // Trans. AMS. 1932. V. 34. P. 339–362.
142. Whitney H. The coloring of graphs // Ann. Math. 1932. V. 33. P. 687–718.
143. Whitney H. A set of topological invariants for graphs // Amer. J. Math. 1933. V. 55. P. 231–235.
144. Whitney H. Differentiable manifolds // Ann. Math. 1936. V. 45. P. 645–680.
145. Whitney H. On regular closed curves in the plane // Comp. Math. 1937. V. 4. P. 276–284.
146. Wu W. T. On critical sections of convex bodies // Sci. Sinica 1965. V. 14. P. 1721–1728.
147. Zariski O. On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve // Amer. J. Math. 1929. V. 51. P. 305–328.
148. Zariski O. Algebraic surfaces. Berlin: Springer, 1935.
149. Zariski O. On the Poincaré group of rational plane curves // Amer. J. Math. 1936. V. 58. P. 607–619.



## Предметный указатель

$CW$ -комплекс 134  
—  $n$ -мерный 134  
— нетриангулируемый 137  
 $k$ -связный граф 32  
 $n$ -листное накрытие 46  
 $n$ -мерный  $CW$ -комплекс 134  
1-мерный комплекс 17

### А

абстрактный симплициальный комплекс 115  
автоморфизм накрытия 49  
алгебра Клиффорда 290  
— с делением 223  
алгебраическая кривая плоская 304  
— — приводимая 304  
Александера рогатая сфера 302  
Александрова теорема 73  
амальгама 294  
антидискретная топология 98  
антиподальное отображение 128  
антиподы 128  
аппроксимация клеточная 142  
— симплициальная 118  
атлас 198  
— ориентирующий 225

### Б

база накрытия 46  
— расслоения 179  
— топологии 13  
Балинского теорема 34  
барицентрические координаты 93  
барицентрическое подразделение 93,  
113  
— — второе 94

Борсука лемма 181  
Борсука—Улама теорема 128, 170  
Ботта—Уитни многочлен 62  
Брауэра теорема о неподвижной точке  
83  
— — об инвариантности размерности  
72  
букет 42

### В

ван Кампена теорема 294  
вектор касательный 217  
векторного поля особая точка 221  
— — — невырожденная 248  
векторное поле 221  
— — градиентное 267  
вершины графа 17  
вещественное многообразие Грассмана  
214  
— проективное пространство 135  
взаимно однозначное погружение 236  
взрезанный джойн 147  
— квадрат 177  
вложение 144, 202  
— Плюккера 212  
внутренняя точка многообразия 199  
вписанное покрытие 106  
вполне упорядоченное множество 109  
второе барицентрическое подразделение 94  
выпуклый многогранник 113

### Г

Гессе матрица 261  
гессиан 261  
гладкая гомотопия 242

- гладкая структура 197  
 гладкий узел 299  
 гладкое многообразие 198  
 — отображение 201  
 — разбиение единицы 204  
 гомеоморфизм 14  
 — локальный 171  
 гомеоморфные пространства 14  
 гомотопическая группа 183  
 гомотопически  $n$ -простое пространство 185  
 — эквивалентные пространства 42  
 гомотопия 41  
 — гладкая 242  
 гомотопное нулю отображение 41  
 гомотопные относительные сфероида 190  
 — отображения 41  
 градиентное векторное поле 267  
 грань планарного графа 18, 27  
 граф 17  
 —  $k$ -связный 32  
 — планарный 17  
 — полный 20  
 — связный 17  
 графа взрезанный квадрат 177  
 — инвариант 58  
 — — полиномиальный 58  
 — род 174  
 графы двойственные 26  
 — изоморфные 58  
 группа автоморфизмов накрытия 49  
 — гомотопическая 183  
 —, заданная образующими и соотношениями 54  
 — свободная 51  
 — спинорная 290  
 — топологическая 98  
 — узла 298  
 — фундаментальная 44
- Д**
- двойное ребро 17  
 двойственные графы 26
- двумерная поверхность без края 154  
 — — замкнутая 154  
 — — с краем 154  
 действие группы 98  
 дерево 28  
 — максимальное 43  
 деформационный ретракт 194  
 джойн 147  
 — взрезанный 147  
 диагональ 230  
 диаграмма узла 300  
 диаметр множества 70  
 дискретная топология 14  
 дискретное пространство 14  
 диффеоморфизм 201  
 диффеоморфные многообразия 201  
 дифференциал отображения 220, 221  
 дифференциальная форма 225  
 дихроматический многочлен 64  
 допустимое отображение 115
- Е**
- евклидов клеточный комплекс 113  
 евклидова клетка 113
- Ж**
- Жордана теорема 75, 88  
 — — кусочно-линейная 19  
 жорданова кривая 75
- З**
- замкнутая двумерная поверхность 154  
 — клетка 134  
 замкнутое многообразие 201  
 — множество 13  
 — псевдомногообразии 124  
 зацепление 306  
 — тривиальное 307  
 звезда симплекса 118  
 — точки 118  
 Зейферта—ван Кампена теорема 294  
 Зимана пример 169  
 значение критическое 207  
 — регулярное 125

**И**

- изолированная особая точка 246
- изоморфные графы 58
- изотопные диффеоморфизмы 244
- иммерсия 201
- инвариант графа 58
  - Татта 64
- индекс квадратичной формы 262
  - критической точки 262
  - особой точки 246
  - пересечения двух графов 21
  - самопересечения графа 21
- индукция трансфинитная 109
- индуцированная топология 13
- индуцированное расслоение 181

**К**

- Какутани теорема 96, 289
- канторово множество 73
- карта 197
- касательное пространство 220
  - расслоение 221
- касательный вектор 217
- квадрат взрезанный 177
- Кёнига теорема 174
- клетка 0-мерная 17
  - 1-мерная 17
  - евклидова 113
  - замкнутая 134
  - открытая 134
  - Шуберта открытая 215
- клетки отображение характеристическое 134
- клеточная аппроксимация 142
  - конструкция 145
- клеточное отображение 142
- клеточный комплекс евклидов 113
- Клиффорда алгебра 290
- кобордантные многообразия 257
- кокасательное пространство 224
- комбинаторная формула Лефшеца 120
- коммутант 285
- компактификация одноточечная 102
- компактное пространство 15

- комплекс 1-мерный 17
  - клеточный евклидов 113
  - симплициальный 112
- комплексное многообразие Грассмана 214
  - проективное пространство 135
- конечный симплициальный комплекс 113
- конструкция клеточная 145
  - Понтрягина 258
  - симплициальная 145
- конус 146
- координаты барицентрические 93
  - однородные 135
  - Плюккера 212
- край многообразия 199
  - псевдомногообразия 124
- кривая алгебраическая плоская 304
  - жорданова 75
- кривые регулярно гомотопные 78
- критическая точка 207
  - невырожденная 261
- критическое значение 207
- Куратовского теорема 21
- кусочно-линейная теорема Жордана 19

**Л**

- Лебега теорема о замкнутых покрытиях 71
  - об открытых покрытиях 70
  - число 70
- лемма Борсука 181
  - Морса 262
  - об однородности многообразий 244
- Такера 130
- Урысона 67, 103
- Шпернера 92, 120, 127
- Лефшеца формула комбинаторная 120
- линейно связное пространство 42
- линзовое пространство 259
- локальная система координат 197
- локально компактное пространство 101

локально конечное покрытие 107  
 — стягиваемое пространство 139  
 — тривиальное расслоение 178  
 локальный гомеоморфизм 171  
 Люстерника—Шнирельмана теорема 130

**М**

максимальное дерево 43  
 максимальный планарный граф 18  
 матрица Гессе 261  
 Менгера—Уитни теорема 32  
 меры нуль множество 205  
 метризуемое пространство 15  
 метрика риманова 224  
 метрическое пространство 15  
 многогранник выпуклый 113  
 многообразии 198  
 — внутренняя точка 199  
 — гладкое 198  
 — Грассмана вещественное 214  
 — — комплексное 214  
 — — ориентированное 214  
 — замкнутое 201  
 — ориентируемое 225  
 — оснащённое 257  
 — с краем 198  
 — топологическое 197  
 многообразия диффеоморфные 201  
 — край 199  
 — оснащённо кобордантные 257  
 многочлен Ботта—Уитни 62  
 — дихроматический 64  
 — Татта 65  
 — хроматический 59  
 множество вполне упорядоченное 109  
 — замкнутое 13  
 — канторова 73  
 — меры нуль 205  
 — открытое 13  
 Морса лемма 262  
 — функция 262  
 мост 65

**Н**

надстройка 124, 146  
 накрывающая ориентирующая 226  
 накрывающее отображение 180  
 — пространство 46  
 — — универсальное 54  
 накрытие 46  
 — ориентирующее 226  
 — регулярное 48  
 — универсальное 54, 165  
 —  $n$ -листное 46  
 накрытия автоморфизм 49  
 — группа автоморфизмов 49  
 направлений поле 257  
 начало локальной системой координат 197  
 невырожденная критическая точка 261  
 — особая точка векторного поля 248  
 независимые пути 32  
 неподвижная точка 83  
 непрерывное отображение 13  
 неравенство треугольника 15  
 неразветвлённость 123  
 нерв покрытия 122  
 нетриангулируемый  $CW$ -комплекс 137  
 нечётное отображение 128  
 нормальное пространство 102  
 носитель функции 104

**О**

образ гомоморфизма 186  
 общее положение 117  
 однородность 123  
 однородные координаты 135  
 односвязное пространство 45  
 одноточечная компактификация 102  
 окрестность точки 13  
 орбит пространство 99  
 орбита 98  
 ориентация отрицательная 124  
 — положительная 124  
 — симплекса 124  
 ориентированное многообразие Грассмана 214

- ориентированное псевдомногообразии 124
  - ориентируемая поверхность 163
  - ориентируемое многообразие 225
    - псевдомногообразии 124
  - ориентирующая накрывающая 226
  - ориентирующее накрытие 226
  - ориентирующий атлас 225
  - оснащённо кобордантные многообразия 257
  - оснащённое многообразие 257
  - особая точка алгебраической кривой 305
    - — векторного поля 221, 246
    - — — невырожденная 248
    - — изолированная 246
  - особой точки индекс 246
  - остов  $SW$ -комплекса 134
    - комплекса 113
  - открытая клетка 134
    - — Шуберта 215
  - открытое множество 13
  - относительные сфериды гомотопные 190
  - относительный сфероид 190
  - отображение антиподальное 128
    - гладкое 201
    - гомотопное нулю 41
    - допустимое 115
    - клеточное 142
    - накрывающее 180
    - непрерывное 13
    - нечётное 128
    - симплициальное 114, 125
    - собственное 171
    - трансверсальное 239
    - характеристическое 134
  - отображения гомотопные 41
    - степень 125
  - отрицательная ориентация 124
- П**
- паракомпактное пространство 107
  - пары точная последовательность 192
  - Пеано теорема 75
  - перекрёсток 300
  - петля 17, 44
  - планарный граф 17
    - — максимальный 18
  - плоская алгебраическая кривая 304
  - Плюккера вложение 212
    - координаты 212
    - соотношения 213
  - поверхность двумерная без края 154
    - — замкнутая 154
    - — с краем 154
    - ориентируемая 163
  - погружение 201
    - взаимно однозначное 236
  - подкомплекс 135
    - полный 117
  - подмногообразии 201
  - поднятие отображения 180
    - пути 47
  - подразделение барицентрическое 113
    - евклидова клеточного комплекса 113
  - покрытие вписанное 106
    - локально конечное 107
    - стягиваемое 122
  - поле направлений 257
  - полигональный узел 298
  - полиномиальный инвариант графа 58
  - полный граф 20
    - набор пометок симплекса 91
    - подкомплекс 117
  - положительная ориентация 124
  - полунепрерывность сверху 96
  - Понтрягина конструкция 258
    - теорема 258
  - порядок покрытия 70
  - последовательность точная 186
  - правильная функция Морса 266
  - приводимая алгебраическая кривая 304
  - приклеивание по отображению 132
  - пример Зимана 169

- проективное пространство вещественное 135  
 — — комплексное 135  
 производная функции по направлению векторного поля 218  
 пространства гомеоморфные 14  
 — гомотопически эквивалентные 42  
 пространство гомотопически  $n$ -простое 185  
 — дискретное 14  
 — касательное 220  
 — кокасательное 224  
 — компактное 15  
 — линейно связное 42  
 — линзовое 259  
 — локально компактное 101  
 — — стягиваемое 139  
 — метризуемое 15  
 — метрическое 15  
 — накрывающее 46  
 — нормальное 102  
 — односвязное 45  
 — орбит 99  
 — паракомпактное 107  
 — расслоения 179  
 — регулярное 107  
 — связное 15  
 — со счётной базой 13  
 — стягиваемое 42  
 — топологическое 13  
 — хаусдорфово 98  
 прямого произведения топология 15  
 псевдомногообразии 123  
 — замкнутое 124  
 — ориентированное 124  
 — ориентируемое 124  
 псевдомногообразия край 124  
 Пуанкаре—Хопфа теорема 250  
 пути независимые 32
- Р**
- Радона теорема 131  
 разбиение единицы 104  
 — — гладкое 204
- размерность симплициального комплекса 113  
 — топологическая 71  
 ранг гладкого отображения 201  
 — свободной группы 51  
 расслоение индуцированное 181  
 — касательное 221  
 — локально тривиальное 178  
 — тривиальное 179  
 — Хопфа 188, 190  
 расслоения точная последовательность 185, 193  
 расстояние 15  
 — между множествами 66  
 — от точки до множества 66  
 — по Хаусдорфу 67  
 реализация абстрактного симплициального комплекса 116  
 ребро графа 17  
 — двойное 17  
 регулярная точка 207  
 регулярно гомотопные кривые 78  
 регулярное значение 125  
 — накрытие 48  
 — пространство 107  
 ретракт 83  
 — деформационный 194  
 ретракция 83  
 риманова метрика 224  
 рогатая сфера Александра 302  
 род графа 174
- С**
- Сарда теорема 207  
 свободная группа 51  
 связное пространство 15  
 связность сильная 123  
 связный граф 17  
 сильная связность 123  
 символ Шуберта 214  
 символы Шуберта соседние 278  
 симметрическая степень 151  
 симплекса ориентация 124  
 симплициальная аппроксимация 118

- конструкция 145
  - симплициальное отображение 114, 125
  - симплициальный комплекс 112
    - — абстрактный 115
    - — конечный 113
  - система координат локальная 197
  - слой накрытия 46
    - расслоения 179
  - собственное отображение 171
  - соотношения Плюккера 213
  - соседние символы Шуберта 278
  - спинорная группа 290
  - степень алгебраической кривой 304
    - вершины графа 17
    - гладкой замкнутой кривой 78
    - отображения 125, 242
    - — по модулю 2 245
    - симметрическая 151
  - Стоуна теорема 105, 111
  - структура гладкая 197
  - стягиваемое покрытие 122
    - пространство 42
  - субмерсия 202
  - сфероид 183
    - относительный 190
- Т**
- Такера лемма 130
  - Татта инвариант 64
    - многочлен 65
  - теорема Александрова 73
    - Балинского 34
    - Борсука—Улама 128, 170
    - Брауэра о неподвижной точке 83
    - — об инвариантности размерности 72
    - ван Кампена 294
    - Жордана 75, 88
    - — кусочно-линейная 19
    - Зейферта—ван Кампена 294
    - Какутани 96, 289
    - Кёнига 174
    - Куратовского 21
    - Лебега о замкнутых покрытиях 71
    - — об открытых покрытиях 70
    - Люстерника—Шнирельмана 130
    - теорема Менгера—Уитни 32
    - о клеточной аппроксимации 142
    - о накрывающей гомотопии 180
    - о пяти красках 28
    - о симплициальной аппроксимации 119
    - о трубчатой окрестности 249
    - о четырёх красках 29
    - об антиподах 128
    - об обратной функции 199
    - Пеано 75
    - Понтрягина 258
    - Пуанкаре—Хопфа 250
    - Радона 131
    - Сарда 207
    - Стоуна 105, 111
    - Титце 68, 104
    - Уайтхеда 195
    - Фельдбау 179
    - Фубини 206
    - Хелли 324
    - Хивуда 176
    - Хопфа 253
    - Цермело 109
    - Штейница 35
    - Титце теорема 68, 104
    - топологическая группа 98
      - размерность 71
    - топологическое многообразие 197
      - пространство 13
    - топологическая антидискретная 98
      - дискретная 14
      - индуцированная 13
      - — метрикой 15
      - прямого произведения 15
      - тривиальная 98
    - торический узел 302
    - точка края многообразия 199
      - критическая 207
      - неподвижная 83
      - особая алгебраической кривой 305
      - регулярная 207

точки в общем положении 117  
 точная последовательность 186  
 — — пары 192  
 — — расслоения 185, 193  
 трансверсальное отображение 239  
 трансфинитная индукция 109  
 треугольника неравенство 15  
 триангуляция 91, 230  
 — топологического пространства 156  
 тривиальная топология 98  
 тривиальное зацепление 307  
 — расслоение 179  
 тривиальный узел 299  
 трилистник 300

**У**

узел 298  
 — гладкий 299  
 — полигональный 298  
 — торический 302  
 — тривиальный 299  
 узла группа 298  
 — диаграмма 300  
 Уитни число 80  
 универсальное накрывающее пространство 54  
 — покрытие 54, 165  
 Урысона лемма 67, 103

**Ф**

факторпространство 16  
 Фельдбау теорема 179  
 форма дифференциальная 225  
 формула Лефшеца комбинаторная 120  
 — Эйлера для выпуклых многогранников 27  
 — — для планарных графов 28  
 Фубини теорема 206

фундаментальная группа 44  
 функция Морса 262  
 — — правильная 266

**Х**

характеристика эйлера 159  
 характеристическое отображение 134  
 Хаусдорфа расстояние 67  
 хаусдорфово пространство 98  
 Хелли теорема 324  
 Хивуда теорема 176  
 Хопфа расслоение 188, 190  
 — теорема 253  
 хроматический многочлен 59

**Ц**

Цермело теорема 109  
 цикл 17  
 цилиндр 146  
 — отображения 195

**Ч**

число Лебега 70  
 — Уитни 80

**Ш**

Шпернера лемма 92, 120, 127  
 Штейница теорема 35  
 Шуберта клетка открытая 215  
 — символ 214  
 — символы соседние 278

**Э**

Эйлера формула для выпуклых многогранников 27  
 — — для планарных графов 28  
 эйлера характеристика 159

**Я**

ядро гомоморфизма 186