В.В. Власов, С.П. Коновалов, С.В. Курочкин

Задачи по

ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Введение

Издание представляет собой сборник задач по курсу Функциональный анализ (Анализ III), который читается на 3-м курсе факультета прикладной математики и экономики МФТИ. Материал задач охватывает все разделы курса. При отборе задач авторы ставили цель показать, как работают и применяются фундаментальные понятия и факты функционального анализа, выявить взаимосвязи между ними. При этом ставилось требование сохранить небольшой объём пособия, поэтому в него включены задачи, принципиально важные для усвоения курса. Технических упражнений задачник практически не содержит.

Некоторые задачи, представленные в пособии, заимствованы из источников, указанных в списке литературы.

Авторы надеются, что предлагаемый задачник окажется полезным для студентов и аспирантов, желающих углубить свои знания в области функционального анализа.

Авторы считают приятным долгом выразить благодарность своим коллегам по кафедре высшей математики МФТИ: члену-корреспонденту РАО, профессору Г.Н. Яковлеву, по инициативе и при поддержке которого был составлен этот задачник, М.В. Балашову и Р.В. Константинову, любезно предоставивших ряд своих задач, и А.В. Полозову за помощь в подготовке текста.

О терминологии и обозначениях

Принятые в пособии термины и обозначения в основном соответствуют [1], [10]. Некоторые из них поясняются ниже.

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$C[0,1]$ — пространство непрерывных функций, определённых на отрезке $[a,b]$, снабжённое нормой $\|f\|_C = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$;
$\mathcal{R}[0,1]$ — множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[0;1]$;
l_p — пространство последовательностей с нормой $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$, $1 \leqslant p < +\infty$;
l_∞ — пространство ограниченных последовательностей;
$L_p[a,b]$ — пространство измеримых и суммируемых в степени p $(1 \leqslant p < \infty)$ функций с нормой $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$;
$\mathbb{B}_1(0)$ — замкнутый шар в нормированном пространстве, с центром в точке $x = 0$ и радиуса 1;
$f_n \rightrightarrows f$ — равномерная сходимость последовательности функций;
$\dim E$ — размерность линейного пространства E;
$\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y;
$\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A;
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$ — фрактальная (аппроксимативная) размерность компакта, где $N(\varepsilon)$ — число элементов в наименьшей ε-сети.

1. Метрические и топологические пространства

1. Доказать, что произвольное открытое подмножество прямой можно представить в виде объединения не более чем счетного числа попарно не пересекающихся интервалов (возможно бесконечных).
2. Доказать, что произвольное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа шаров рационального радиуса с центрами в точках с рациональными координатами.
3. Является ли открытым в пространстве $C[a,b]$ множество
$$\{f \in C[a,b] : 0 < f(x) < 1 \quad \forall\, x \in [a,b]\}?$$
4. Является ли открытым в пространстве l_∞ множество
$$\{x \in l_\infty : 0 < x_k < 1, k = 1,2,\ldots\}?$$
(Здесь $x = (x_1,x_2,\ldots)$).
5. Пусть A — подмножество метрического пространства (X,ρ). Доказать, что функция $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \rho(x,A) = \inf\limits_{y\in A} \rho(x,y)$ непрерывна.
6. Описать все множества в метрическом пространстве, которые могут быть множеством нулей некоторой непрерывной функции?
7. Пусть A, B — замкнутые, непересекающиеся подмножества метрического пространства X. Доказать, что на X существует непрерывная функция f такая, что $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$.
8. Доказать, что множество $\{\sin(n), n = 1,2,\ldots\}$ всюду плотно в $[-1,1]$.
9. Исследовать пространство $C[a,b]$: доказать, что оно полно, сепарабельно, связно.
10. Доказать, что отрезок и окружность не гомеоморфны.
11. Доказать, что на вещественной прямой связными множествами являются только промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы, включая бесконечные).
12. Разместить в единичном шаре пространства l_2 счётное число шаров радиуса $1/10$.
13. Доказать, что пространство основных функций $D(\mathbb{R}^1)$ неметризуемо.

14. Пусть $M = \{x \in l_1 : x \in \mathbb{Q}\}$. Является ли множество M счётным?

2. Полные метрические пространства

1. Доказать, что множество вещественных чисел является пополнением множества рациональных чисел.
2. Доказать, что пространства $l_p (1 \leqslant p < \infty)$ — сепарабельные полные метрические пространства, а пространство l_∞ — полное, но не сепарабельное.
3. Доказать, что если в пространстве $C[a,b]$ рассмотреть метрику $\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$, то в ней оно будет неполно.
4. Доказать, что всякая равномерно непрерывная функция на метрическом пространстве однозначно продолжается до непрерывной функции на его пополнении, и что это продолжение равномерно непрерывно.
5. При помощи принципа сжимающих отображений найти достаточное условие на параметр λ, при котором уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$
имеет единственное решение $\varphi \in C[a,b]$. (Здесь $f \in C[a,b]$, $K \in C([a,b]^2)$).
6. Найти пополнение метрического пространства, состоящего из непрерывных финитных на числовой оси функций с метрикой
$$\rho(x,y) = \max_t |x(t) - y(t)|.$$
7. Существует ли числовая функция, непрерывная в рациональных и разрывная в иррациональных точках отрезка $[0,1]$?

3. Компактные метрические пространства

1. Доказать, что компакты в $\mathbb{R}^n$ — это замкнутые ограниченные множества.
2. Пусть M — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что $\rho(x,M) = \inf\limits_{z\in M} \rho(x,z)$ достигается в некоторой точке $z \in M$. Показать, что в произвольном метрическом пространстве (например, для $M \subset l_2$) это, вообще говоря, не так.
3. Исследовать канторово множество на отрезке: найти его мощ-

ность, меру, установить его замкнутость, компактность, нигде не плотность, найти фрактальную размерность.

4. Пусть X — метрическое пространство, обладающее тем свойством, что любая непрерывная на нем функция ограничена. Доказать, что X — компакт.
5. Найти фрактальную размерность графика функции $y = \sin(1/x)$, $0 < x \leqslant 1$.
6. Доказать, что компактное метрическое пространство имеет конечный диаметр.
7. Компактен ли единичный шар в l_2?
8. Доказать, что компактное метрическое пространство сепарабельно.
9. Доказать, что компактное подмножество метрического пространства замкнуто.
10. Доказать, что компакт нельзя изометрично отобразить на свое собственное подмножество.
11. Доказать, что множество M в l_2 компактно $\Leftrightarrow$ оно замкнуто, ограничено и
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall x \in M \quad \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon.$$
(Здесь $x = (x_1,x_2,\ldots)$).
12. Пусть E — компактное метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$. Пусть $f : E \to E$, причем $\rho(f(x),f(y)) < \rho(x,y)$ для всех $x \neq y$. Доказать, что f имеет неподвижную точку. Верно ли, что неподвижная точка единственна? Верно ли, что f — сжимающее отображение?
13. Доказать, что множество $\{f \in C^1[0,1] : \|f\|_C + \|f'\|_C = 1\}$ предкомпактно в $C[0,1]$. Является ли это множество предкомпактным в $C[0,1]$?

4. Нормированные и топологические векторные пространства

1. Доказать, что нормированное пространство полно $\iff$ в нем всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.
2. Доказать, что две нормы, определенные на одном и том же линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из норм следует ее сходимость по другой норме.
3. В пространстве $C[a,b]$ рассматривается множество M, состоящее из многочленов $p(x)$ степени $\leqslant 10$, удовлетворяющих условию $\int_a^b |p(x)|\,dx \leqslant 10$. Компактно ли множество M?
4. Найти крайние точки замкнутого единичного шара в пространствах l_2, l_1, $C[a,b]$, c_0.
5. Доказать, что выпуклая оболочка компактного множества в $\mathbb{R}^n$ также будет компактным множеством.
6. Доказать, что непустое выпуклое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно k-мерному шару, $k \leqslant n$.
7. Пусть B_1 и B_2 — шары в нормированном пространстве с радиусами соответственно r_1 и r_2. Доказать, что если $B_1 \subset B_2$, то $r_1 \leqslant r_2$.
8. Пусть $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров в банаховом пространстве. Доказать, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$.
9. Описать множества в $\mathbb{R}^n$, которые могут служить замкнутым единичным шаром для некоторой нормы в $\mathbb{R}^n$.
10. Пусть L — конечномерное подпространство нормированного пространства X. Доказать, что для любого $x \in X$ в L найдется элемент наилучшего приближения.
11. Верно ли, что система функций $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ является
    а) полной в $C[0,1]$;
    б) базисом в $C[0,1]$?
12. В каких пространствах l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c_0, c система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $e_k(n) = \delta_{kn}$ является базисом. Существует ли базис в пространстве c?
13. Является ли пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|^1$, где $\|f\|^1 = |f(0)| + \|f'\|_C$ для любой функции $f \in C^1[0,1]$, банаховым?

5. Геометрия гильбертова пространства

1. Доказать, что норма пространства $C[a,b]$ не может порождаться никаким скалярным произведением.
2. а) Доказать, что любая последовательность вложенных непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в гильбертовом пространстве имеет непустое пересечение.

   б) Показать, что последовательность вложенных непустых замкнутых выпуклых ограниченных множеств в банаховом пространстве может иметь пустое пересечение.
3. Привести пример последовательности вложенных ограниченных замкнутых множеств из l_2, имеющих пустое пересечение.
4. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H, причем $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - g_k\|^2 < \infty$. Доказать, что $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в H.
5. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — последовательности в гильбертовом пространстве, причем $\|x_n\| \leqslant 1$, $\|y_n\| \leqslant 1$, $(x_n,y_n) \to 1$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$.
6. Доказать, что гильбертово пространство строго выпукло (т.е. его единичная сфера не содержит отрезков положительной длины).
7. Исследовать ««гильбертов кирпич»»: доказать, что это замкнутое множество без внутренних точек; выяснить, является ли он поглощающим множеством, к каким его точкам можно провести опорную гиперплоскость.
8. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис подпространства $L \subset H$. Доказать, что $\forall\, x \in H \quad \rho^2(x,L) = \frac{G(x,e_1,\ldots,e_n)}{G(e_1,\ldots,e_n)}$, где $G(a_1, \ldots, a_n)$ — определитель Грама.

6. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах

1. Пусть X и Y — конечномерные нормированные пространства. Доказать, что любой линейный оператор из X в Y непрерывен.
2. Оператор в $\mathbb{R}^n_p$ задан матрицей A. Выразить норму оператора через коэффициенты матрицы в случаях $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Доказать неравенство $\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_1 \|A\|_\infty$.
3. Пусть E_1 и E_2 — нормированные пространства, $A : E_1 \to E_2$

— линейный оператор. Верно ли, что A непрерывен, если
а) $\dim E_1 < \infty$; б) $\dim E_1 = \infty$?

4. Доказать, что оператор, отображающий линейное нормированное пространство X в фактор-пространство X/L (L — линейное пространство, замкнутое по норме X) и ставящий в соответствие элементу $x \in X$ содержащий его класс смежности, является линейным ограниченным оператором.
5. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ — ограниченный линейный оператор, определённый на всей H. Доказать, что
$$\|A\| = \sup_{\substack{x,y \in H \\ x \neq 0,\, y \neq 0}} \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|\,\|y\|}.$$
6. Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы:
   а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$;
   б) $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$,
   $(Ax)(t) = \int_{-1}^t x(s)\,ds - \int_0^1 sx(s)\,ds$;
   в) $A : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = x(\sqrt{t})$;
   г) $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $\quad (Ax)(t) = t\int_0^1 x(s)\,ds$.
7. Будет ли ограниченным оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ $(Ax)(t) = \frac{dx}{dt}$ с областью определения L — линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций?
8. а) Доказать, что оператор $D = \frac{d}{dx} : C^1[a,b] \to C[a,b]$ непрерывен.
   б) Доказать тождество $(xDx)^n u = x^n D^n(x^n u)$, $u \in C^n[a,b]$.
9. Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Доказать, что если последовательность λ_n ограничена, то равенства $Ae_n = \lambda_n e_n$ определяют ограниченный линейный оператор $A : H \to H$, определённый на всём H, причём $\|A\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$.
10. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Всегда ли равенства
    а) $\|x\|_1 = \|Ax\|$; б) $\|x\|_2 = \|x\| + \|Ax\|$
    задают в X норму? Будет ли X в этой норме банаховым пространством?
11. Пусть H — гильбертово пространство, $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $A_n x \to Ax$ на всех элементах $x \in L$, где L — линейное подпростран-

ство, всюду плотное в X. Следует ли отсюда, что $A_n x \to Ax$ на всех $x \in X$?

12. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства. Пусть последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E_1,E_2)$ такова, что для любого $x \in E_1$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в E_2. Доказать, что существует $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$ такой, что $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ для любого $x \in \mathbb{E}_1$. Доказать, что $\|A\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$. Можно ли последнее неравенство заменить равенством?
13. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$; $A_n x \to Ax$ на любом элементе $x \in X$. Доказать, что если $x_n \to x$, то $A_n x_n \to Ax$.
14. Пусть L_1,L_2 — замкнутые линейные подпространства гильбертова пространства, P_1,P_2 — ортогональные проекторы соответственно на L_1,L_2, $\delta(L_1,L_2) = \|P_1 - P_2\|$. Доказать, что
    а) $\delta \leqslant 1$;
    б) $\delta < 1 \Rightarrow L_1$ и L_2 имеют одинаковую размерность.
15. Пусть P_t, $t \in [0,1]$ — однопараметрическое семейство проекторов в гильбертовом пространстве, непрерывно (в смысле нормы оператора) зависящих от параметра t. Доказать, что все P_t имеют одинаковый ранг (т.е. размерность образа).
16. Пусть E_1, E_2 — нормированные пространства, причем $\dim E_2 < \infty$. Пусть $A : E_1 \to E_2$ — линейное отображение. Доказать, что A непрерывно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A$ замкнуто. Верно ли это утверждение в случае $\dim E_2 = \infty$?
17. Пусть E — линейное пространство, f — ненулевой линейный функционал на E. Доказать, что существует $x \in E$ такой, что $E = \operatorname{Ker} f \oplus [x]$.
18. Пусть E — линейное пространство, $f : E \to \mathbb{R}$ — функционал, удовлетворяющий свойствам:
    а) $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$;
    б) $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
    в) $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ для всех $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
    г) множество $\{x \in E : f(x) \leqslant 1\}$ выпукло.

    Доказать, что f является нормой в пространстве E.
19. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, множество $\mathcal{A} \subset \subset \mathcal{L}(E_1,E_2)$. Доказать, что множество $\mathcal{A}$ равностепенно непре-

рывно тогда и только тогда, когда существует $M > 0$ такое, что $\|A\| \leqslant M$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

20. Пусть оператор $I : l_1 \to l_2$ реализует естественное вложение l_1 в l_2. Доказать, что $I \in \mathcal{L}(l_1,l_2)$, но не имеет ограниченного обратного. Является ли пространство l_1 с l_2-нормой банаховым?
21. Пусть оператор $I : L_2[0,1] \to L_1[0,1]$ реализует естественное вложение $L_2[0,1]$ в $L_1[0,1]$. Доказать, что $I \in \mathcal{L}(L_2[0,1],L_1[0,1])$, но не имеет ограниченного обратного. Является ли пространство $L_2[0,1]$ с $L_1[0,1]$-нормой банаховым?
22. Доказать, что последовательность операторов $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{L}(C[0,1])$, $(A_nf)(x) = f(x^{1+\frac{1}{n}})$ поточечно сходится к I. Верно ли, что A_n сходится к I по операторной норме?
23. В пространстве l_2 для элемента $x = (x_1,x_2,\ldots) \in l_2$ определим последовательности операторов:

$$A_nx = \left(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n},\ldots\right);$$

$$B_nx = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},x_{n+1},x_{n+2},\ldots\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Являются ли эти последовательности сходящимися
а) поточечно; б) по операторной норме?
24. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^s x(s)\,ds$$

и последовательность операторов $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(A_nx)(t) = \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}\right) x(s)\,ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сходится ли последовательность A_n к A? Каков характер сходимости?
25. Доказать, что если $\forall\, x \in l_2$ $(x_1y_1,x_2y_2,\ldots) \in l_1$, то $y \in l_2$.
26. Доказать, что
   а) тригонометрическая система не является базисом в пространстве $CP[-\pi,\pi]$;
   б) система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ не является базисом в $L_2[0,1]$.

27. Назовём операторной экспонентой e^A оператор вида: $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ($A^0 = I$ — тождественный оператор).

    Доказать, что если X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$, то оператор $e^A \in \mathcal{L}(X)$, $\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}$. Чему равно e^I?
28. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$. Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится в $\mathcal{L}(X)$ тогда и только тогда, когда для некоторого натурального k выполняется неравенство $\|A^k\| < 1$.
29. Пусть A_n — оператор кусочно-линейной интерполяции в $C[a,b]$ по n равноотстоящим узлам. Исследовать последовательность $\{A_n\}$ на сходимость (по норме и поточечную).
30. Пусть оператор U определён всюду в комплексном гильбертовом пространстве H и отображает его на все H. Он называется *унитарным*, если для любых $x,y \in H$ выполняется равенство $(Ux,Uy) = (x,y)$. Доказать, что
    а) унитарный оператор линеен и ограничен;
    б) унитарный оператор имеет обратный, который также унитарен;
    в) произведение двух унитарных операторов есть унитарный оператор.

7. Обратный оператор, спектр, резольвента

1. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что $\sigma(A^n) = \{\lambda^n | \lambda \in \sigma(A)\}$.
2. Пусть X — линейное пространство, $A : X \to X$ — линейный оператор, удовлетворяющий при некоторых $\lambda_k \in \mathbb{R}$ соотношению $I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_n A^n = \theta$ (θ — нулевой, I — тождественный оператор). Доказать, что A^{-1} существует.
3. Доказать, что оператор $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \frac{dx}{dt}$$

    имеет правый, но не имеет левого обратного.
4. В пространстве $C^1[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ и оператор $A : L \to C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = \frac{dx}{dt} + a(t)x(t); \quad a(t) \in C[0,1].$$

    Доказать, что A имеет ограниченный обратный.

5. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

Что представляет собой множество значений оператора A? Существует ли оператор A^{-1}, определённый на множестве значений и ограничен ли он?

6. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds + x(t).$$

Доказать, что A имеет ограниченный обратный на всём $C[0,1]$ и найти A^{-1}.

7. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

Найти спектр и резольвенту оператора A.

8. Доказать, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds$$

непрерывно обратим и найти A^{-1}.

9. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы операторов
   а) $(Ax)(t) = x(-t)$;
   б) $(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)\,ds$.

   Имеют ли эти операторы непрерывный спектр? Построить резольвенты на множестве регулярных значений каждого оператора.

10. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$. Найти точечный и непрерывный спектры оператора A и построить резольвенту на множестве регулярных значений.

11. В пространстве $C[0,2\pi]$ рассмотрим оператор $(Ax)(t) = e^{it}x(t)$. Доказать, что спектр A есть множество $\{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$, причём ни одна точка спектра не является собственным числом.

12. Найти спектр и резольвенту оператора $A \in \mathcal{L}(L_2(-1,1))$

$$(Af)(x) = \int_0^1 (1+xt)f(t)\,dt.$$

13. Какие множества на комплексной плоскости могут являться спектром некоторого ограниченного оператора в l_2?
14. Найти спектр и собственные значения оператора умножения на фиксированную непрерывную функцию в пространстве $C[a,b]$.
15. Найти спектр оператора $A \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$

$$(Af)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)\,dy}{1+(x-y)^2}.$$

8. Мера и интеграл Лебега

1. Доказать, что $C[a,b]$ плотно в $L_1[a,b]$.
2. Пусть f_n — последовательность измеримых функций на $[a,b]$. Сравнить сходимости: в среднем, среднем квадратичном, почти всюду.
3. Доказать, что из интегрируемости по Риману функции, заданной на отрезке, следует ее интегрируемость по Лебегу.
4. Доказать с помощью теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2} = \delta(x).$$

5. Доказать, что все открытые и все замкнутые множества на плоскости измеримы по Лебегу.
6. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция, определённая на вещественной оси. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и известно, что $\mu(A) = 0$. Доказать, что $\mu\left(f(A)\right) = 0$.
7. Применить теорему Егорова к последовательности функций $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0,1]$.
8. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — рациональные числа на отрезке $[0,1]$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x-r_n|^{1/2}}$$

сходится почти всюду на $[0,1]$.
9. Пусть функции $f_n \in \mathcal{R}[0,1]$, причем $f_n \rightrightarrows f$ на $[0,1]$ при $n \to \to \infty$. Доказать, что $f \in \mathcal{R}[0,1]$, причем справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.
10. Пусть M — множество вещественных кусочно-постоянных на отрезке $[0,1]$ функций. Пусть множество N является замыка-

нием множества M в смысле равномерной сходимости на $[0,1]$. Верно ли, что $N \subset \mathcal{R}[0,1]$, $N = \mathcal{R}[0,1]$?

11. Доказать, что $L_p[0,1] \subset L_q[0,1]$, $l_p \supset l_q$ для всех $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$.
12. Пусть последовательность $\{f_n\}$ измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций поточечно сходится к f, причем существует $M > 0$ такое, что $|f_n(t)| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и почти всех $t \in [0,1]$. Доказать, что $\int_0^x (f_n(t) - f(t))\, dt \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$.
13. Пусть функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. Пусть задана последовательность измеримых подмножеств $\{A_n\}$ отрезка $[0,1]$, $\mu A_n \to 1$ при $n \to \infty$, такая, что f интегрируема по Лебегу на каждом A_n. Пусть существует $M > 0$ такое, что
$$\int_{A_n} |f(t)|\, dt \leqslant M$$
для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что f интегрируема по Лебегу на $[0,1]$, причем существует
$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt.$$
14. Пусть f_n и f — измеримые по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функции. Верно ли, что f_n сходится к f почти всюду на $[0,1]$ тогда и только тогда, когда f_n сходится к f по мере?
15. Пусть f_n — последовательность измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций, причем существует $M > 0$ такое, что $|f_n(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $g(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ является измеримой по Лебегу на отрезке $[0,1]$.
16. Доказать, что $L_\infty[0,1]$ и l_∞ несепарабельны, а $L_1[0,1]$ и l_1 нерефлексивны.
17. Привести пример множества $A \subset [0,1]$ такого, что
    а) $\mu A = 0$, но A второй категории;
    б) $\mu A = 1$, но A первой категории.

9. Сопряжённое пространство, теорема Хана–Банаха, теорема Рисса–Фреше

1. Доказать, что $l_p^* \cong l_q$ $(1 < p < \infty,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, $l_1^* \cong l_\infty$, $c_0^* \cong l_1$, $c^* \cong l_1$. Верно ли, что $l_\infty^* \cong l_1$?
2. Пусть E — нормированное пространство, f, f_1,…,f_n — ли-

нейные функционалы на E. Доказать, что следующие свойства эквивалентны:

а) существуют скаляры $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ такие, что $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$;

б) существует $M > 0$ такое, что $\|f\| \leqslant M \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|f_i\|$;

в) $f(x) = 0$ для всех $x \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$.

3. Пусть L — замкнутое линейное подпространство нормированного пространства X и $y \in X$, $y \notin L$. Доказать, что найдется функционал f на X такой, что $f|_L \equiv 0$, $f(y) = 1$ и $\|f\| = 1/\rho(y,L)$.
4. Привести пример функционала в пространстве $C[a,b]$, не достигающего своей нормы.
5. Доказать, что непрерывный линейный функционал f в нормированном пространстве X достигает своей нормы тогда и только тогда, когда для некоторого (и тогда для любого) элемента $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ существует элемент наилучшего приближения в $\operatorname{Ker} f$.
6. Рассмотреть следующие два множества в $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x,y,z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, z^2 \leqslant xy\},$$
$$B = \{(x,y,z) : x = 0, z = 1\}.$$

Показать, что оба они выпуклы, замкнуты, не пересекаются и одно из них имеет непустую внутренность. Существует ли функционал f на $\mathbb{R}^3$ такой, что $\forall\, u \in A$, $\forall\, v \in B \quad f(u) < f(v)$?

7. Пусть E — банахово пространство, $\{x_n\} \subset E$ и $\sup\limits_n |f(x_n)| < \infty$ $\forall\, f \in E^*$. Доказать, что $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$.
8. Пусть $M = \{x \in l_1 : \sum_{n=1}^\infty x_{2n} = 0\}$, функционал f на многообразии M задан формулой $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_{2n-1}$. Привести примеры различных продолжений f до функционала $\tilde{f} \in l_1^*$ с сохранением нормы.
9. Пусть $L \subset H$ — линейное многогобразие в гильбертовом пространстве, f — линейный непрерывный функционал на L. Доказать, что $\exists!\tilde{f} \in H^* : \tilde{f}|_L = f$, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.
10. Доказать, что взятие интеграла Римана от непрерывной функции на отрезке $[a,b]$ есть непрерывный линейный функционал на $C[a,b]$.

11. Найти норму функционала φ на пространстве $C[a,b]$:
$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
(g — фиксированная непрерывная функция). Исследовать вопрос о том, когда норма достигается.
12. Пусть M — подмножество нормированного пространства X. Известно, что для любого $f \in X^*$ $\sup\limits_{x\in M} |f(x)| < \infty$. Доказать, что $\sup\limits_{x\in M} \|x\| < \infty$.
13. Пусть E — нормированное пространство, $M \subset E$ — линейное многообразие, всюду плотное в пространстве E. Пусть $f \in E^*$. Определим множество $N = M \cap \operatorname{Ker} f$. Доказать, что N всюду плотно в $\operatorname{Ker} f$.
14. Пусть E — банахово пространство, причем E^* сепарабельно. Доказать, что E сепарабельно. Верно ли обратное?
15. Является ли $L_1[0,1]$ ($C[0,1]$) евклидовым пространством? Имеет ли крайние точки единичный шар из $L_1[0,1]$ ($C[0,1]$)? Является ли пространство $L_1[0,1]$ ($C[0,1]$) сопряжённым к некоторому банахову пространству?
16. Пусть E — банахово пространство, множество $A \subset E$ выпукло и замкнуто. Для любого $f \in \mathbb{E}^*$ определим $\sigma_A(f) = \sup\limits_{x\in A} f(x)$. Доказать, что
$$A = \{x \in E : f(x) \leqslant \sigma_A(f) \quad \forall\, f \in E^*\}.$$

10. Слабая и слабая* сходимость

1. Найти замыкание единичной сферы пространства l_2 в смысле слабой сходимости.
2. Будет ли гильбертово (произвольное банахово) пространство полным в смысле слабой сходимости?
3. Пусть $f_n(x) = \sin nx$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. Доказать, что f_n в $L_2[-\pi,\pi]$ сходится слабо, но не сильно.
4. Пусть множество $M \subset L_2[-\pi,\pi]$ состоит из функций вида $f_{m,n}(x) = \sin mx + m \sin nx$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. Доказать, что первое слабое секвенциальное замыкание M не совпадает со вторым.
5. Сходится ли слабо последовательность $\sin(nx)$ в пространстве $C[a,b]$?

6. Доказать, что в конечномерных нормированных пространствах слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме.
7. Доказать, что из слабой сходимости последовательности элементов пространства l_1 следует ее сходимость по норме.
8. Пусть H — гильбертово пространство, $\|x_n - x\| \to 0$, $y_n \overset{\text{сл.}}{\to} y$. Доказать, что $(x_n,y_n) \to (x,y)$. Можно ли условие $\|x_n - x\| \to 0$ заменить более слабым $x_n \overset{\text{сл.}}{\to} x$?
9. Пусть последовательность x_n гильбертова пространства H слабо сходится к x, причем $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Верно ли это утверждение для произвольного банахова пространства?
10. Пусть E — банахово пространство, последовательность $\{x_n\} \subset \subset \overline{\mathbb{B}}_1(0)$ и слабо сходится к x. Доказать, что $x \in \overline{\mathbb{B}}_1(0)$.
11. Пусть E — банахово пространство, последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x. Доказать, что $\|x\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.
12. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset l_1$, причем $x_n(k) \to x(k)$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Верно ли, что $x \in l_1$? Если справедливо последнее включение, верно ли, что x_n сходится к x слабо?
13. Пусть последовательность $\{f_n\} \subset L_1[0,1]$. Верно ли, что f_n сходится поточечно на $[0,1]$ тогда и только тогда, когда сходится слабо?
14. Пусть $U = \{f \in L_1[0,1] : |f(t)| \leqslant 1 \text{ п. в. } t \in [0,1]\}$. Доказать, что U слабо секвенциально компактно в $L_1[0,1]$.

11. Сопряжённые операторы. Самосопряжённые операторы

1. Найти сопряжённый к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если
   а) $(Ax)(t) = \int_0^1 tx(s)\,ds$;
   б) $(Ax)(t) = \int_0^t sx(s)\,ds$.
2. Пусть H — вещественное гильбертово пространство; $x_k \in H$, $a_k \in \mathbb{R}(k = \overline{1,n})$. Доказать, что

$$\sup_{\sum a_k^2 \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left(\sum_{k=1}^n (x,x_k)^2 \right)^{1/2}.$$

3. В пространстве l_2 для $x = (x_1,x_2,\ldots) \in l_2$ положим $A_n x =$

$= (x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$. Найти A_n^* и выяснить, являются ли последовательности A_n и A_n^* сходящимися поточечно?

4. Доказать, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$
$$(Ax)(t) = \int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds$$
есть самосопряжённый и неотрицательный.
5. Пусть A — самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H. Доказать, что
   а) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |(Ax,x)|$;
   б) $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |(Ax,y)|$.
6. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$. Доказать, что оператор $(I + AA^*)^{-1}$ существует.
7. Пусть A — самосопряжённый неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H. Доказать, что оператор $(I + A)^{-1}$ существует.
8. В пространстве $\mathbb{R}^2$ оператор A переводит $x = \binom{x_1}{x_2}$ в $Ax = \binom{2x_1+3x_2}{3x_1+5x_2}$. Доказать, что $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ — самосопряжённый и неотрицательный. Найти $\sqrt{A}$.
9. $A \in \mathcal{L}(l_2) : Ax = (0,x^1,x^2,\ldots)$. Найти $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$.
10. Пусть E — банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(L_2[0,1],E)$. Пусть $\Im A^* \supset C[0,1]$. Найти $\operatorname{Ker} A$.
11. Пусть H — гильбертово пространство, оператор $A : H \to H$ линеен и $(Ax,y) = (x,Ay)$ для всех $x,y \in H$. Доказать, что $A \in \mathcal{L}(H)$.
12. Пусть E_1 и E_2 — нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, причем существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2,E_1)$. Доказать, что существует $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E_1^*,E_2^*)$, причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
13. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряжённый оператор. Доказать, что $\|A^n\| = \|A\|^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.
14. Пусть E — рефлексивное банахово пространство и $A \in \mathcal{L}(E)$. Доказать, что $A^{**} = A$.
15. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряжённый оператор. Доказать, что $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$. Верно ли, что $\sigma(A) = \operatorname{cl}\Big(\sigma_P(A)\Big)$?

12. Компактные операторы

1. Оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ определяется равенством
$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)x(t_k),$$
где $K(t,s)$ непрерывна при $0 \leqslant s,\, t \leqslant 1$, $\varphi_k(t) \in C[0,1]$, $t_k \in [0,1]$. Доказать, что A — компактен.
2. Доказать, что любой оператор $A \in \mathcal{L}(H)$, где H — гильбертово пространство, является поточечным пределом последовательности компактных операторов.
3. Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, Y — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(H,Y)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ сходится. Доказать, что A — компактен.
4. Доказать, что область значений компактного оператора сепарабельна.
5. Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, A — компактный оператор, действующий из H в H. Доказать, что $Ae_n \to 0$.
6. Доказать, что любой линейный непрерывный оператор, действующий из l_2 в l_1 — компактен.
7. Может ли оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$
$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$
где $K(t,s)$ непрерывна при $0 \leqslant s,\, t \leqslant 1$, иметь ограниченный обратный?
8. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$ и существует $c > 0$ такое, что для любого $x \in X$ $\;\|Ax\| \geqslant c\|x\|$. Может ли оператор A быть компактным?
9. Пусть A — диагональный оператор в l_2: $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$.
   а) Доказать, что $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$.
   б) Доказать, что A компактен $\Leftrightarrow \lambda_n \to 0$.
10. Является ли преобразование Фурье $Ff(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy$ компактным оператором в случае
   а) $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$,
   б) $F : L_1(\mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R})$.
11. Пусть E — банахово, H — гильбертово пространства. Пусть $A \in \mathcal{L}(E,H)$ — компактный оператор. Доказать, что су-

ществует последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E,H)$ такая, что $\dim \Im A_n < \infty$ для всех n, а $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$.

12. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $A \in \in \mathcal{L}(H)$ — компактный самосопряжённый оператор. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует подпространство $\Gamma_\varepsilon \subset H$ конечной коразмерности такое, что оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ является неотрицательно определенным на Γ_ε.
13. Пусть $A \in \mathcal{L}(l_2)$, причем $(Ax)(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x(k)$, где $\sum_{n,k} |a_{nk}|^2 < \infty$. Найти сопряженный оператор A^*. Является ли A компактным оператором?
14. Пусть E — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ — компактный оператор. Доказать, что для любого $\lambda \neq 0$ подпространство $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ конечномерно, а $\Im(A - \lambda I)$ замкнуто. Доказать, что существует последовательность x_n такая, что $\|x_n\| = 1$, а $\|Ax_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.
15. Пусть $K(\cdot,\cdot) \in C([0,1] \times [0,1])$. Пусть оператор $A : C[0,1] \to \to C[0,1]$ определен следующим образом: $(Af)(x) = = \int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt$ для любых $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$. Доказать, что $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$, оценить сверху $\|A\|$. Является ли A компактным оператором?
16. Пусть $K(\cdot,\cdot) \in L_2([0,1] \times [0,1])$. Пусть оператор $A : L_2[0,1] \to \to L_2[0,1]$ определен следующим образом: $(Af)(x) = = \int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt$ для любых $f \in L_2[0,1]$, $x \in [0,1]$. Доказать, что $A \in \mathcal{L}(L_2[0,1])$, вычислить $\|A\|$. Является ли A компактным оператором?
17. Пусть множество $M \subset C^1[0,1]$ является подпространством в $C[0,1]$. Доказать, что $\dim M < \infty$.
18. Найти норму оператора Вольтерра
$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{в } \mathcal{L}(L_2[0,1]).$$
19. Будет ли оператор $\frac{d}{dx} : C^1[0,1] \to C[0,1]$ компактным? Доказать, что оператор $\frac{d}{dx} : C^2[0,1] \to C[0,1]$ является компактным.
20. Доказать, что оператор $A \in \mathcal{L}(C[0,1]) : (Af)(x) = f(x^2)$ не является компактным.

13. Элементы нелинейного анализа: дифференцирование

1. Найти производную Фреше функционала $f : H \to \mathbb{R}$, если
   а) $f(x) = \|Ax\|^2$, где $a \in L(H)$,
   б) $x \in H = L_2[0,1]$, $f(x) = \left(\int_0^1 x(t)\,dt\right)^2$.
2. Исследовать функционал $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ такой, что $F(f) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ на дифференцируемость по Гато, по Фреше.

14. Элементы нелинейного анализа: теоремы о неподвижных точках

1. Привести пример непрерывного отображения замкнутого единичного шара пространства l_2 в себя, не имеющего неподвижной точки.
2. Пусть $A = (a_{ij})$ — $n \times n$-матрица, $a_{ij} > 0$, $i,j = 1,\ldots,n$. Доказать, что у A имеется собственный вектор $x = (x^1,\ldots,x^n)$, у которого все $x^i > 0$.
3. Доказать, что краевая задача
   $$y'' + \lambda \sin y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$
   имеет решение $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall\, f \in C[0,1]$.
4. Имеется игра двух лиц с нулевой суммой (X,Y,K), где X,Y — выпуклые компакты в банаховом пространстве, $K(x,y)$ — непрерывная на $X \times Y$ функция, вогнутая по x и выпуклая по y. Доказать, что у такой игры существуют оптимальные стратегии.
5. Свести к интегральному уравнению задачу $y'' = y^2 + kx^2$, $y(0) = y(1) = 0$, вычислив функцию Грина оператора $(-y'')$. При каких значениях k последовательность в модифицированном методе Ньютона сходится в пространстве $C[0,1]$ при начальном приближении $y_0 \equiv 0$?

15. Исследовательские задачи

1. В пространстве l_2 рассмотрим оператор A, переводящий элемент $x = (x_1,x_2,\ldots) \in l_2$ в элемент $Ax = (\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\ldots)$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$.
   а) Доказать, что A — линейный.

б) При каких условиях на λ_n оператор A будет ограниченным оператором, действующим из l_2 в l_2?

в) Найти $\|A\|$.

г) Всегда ли найдётся $x \in l_2$, $x \neq 0$, такой, что $\|Ax\| = \|A\|\,\|x\|$?

д) При каких условиях на последовательность λ_n существует обратный оператор A^{-1}?

е) При каких условиях на λ_n обратный оператор A^{-1} будет ограничен?

ж) Найти спектр оператора A (при условии его ограниченности).

з) На множестве регулярных значений оператора A построить резольвенту.

2. Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если величина

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$$

конечна. Доказать, что

а) величина $\|A\|_2$ не зависит от выбора базиса в H.

б) $\|A\| \leqslant \|A\|_2$;

в) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$;

г) величина $\|A\|_2$, определённая на класс операторов Гильберта–Шмидта, является нормой;

д) в пространстве $\mathcal{L}(H)$ операторы Гильберта–Шмидта образуют линейное многообразие;

е) равенство

$$(A,B) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n,Be_n)$$

задаёт на классе операторов Гильберта–Шмидта скалярное произведение;

ж) операторы Гильберта–Шмидта образуют банахово пространство относительно $\|A\|_2$;

з) всякий оператор Гильберта–Шмидта вполне непрерывен;

и) оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $K(t,s) \in L_2[0,1] \times L_2[0,1]$, есть оператор Гильберта–Шмидта;

к) если A — оператор Гильберта–Шмидта и $B \in \mathcal{L}(H)$, то AB и BA — оператор Гильберта–Шмидта и при этом $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2\|B\|$, $\|BA\|_2 \leqslant \|A\|_2\|B\|$.

л) при каком условии на последовательность $\lambda_n \in \mathbb{R}$ оператор $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ будет оператором Гильберта–Шмидта?

м) в пространстве l_2 построить вполне непрерывный оператор, не являющийся оператором Гильберта–Шмидта.

3. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *ядерным*, если он представим в виде $A = BC$, где B, C — операторы Гильберта–Шмидта. Доказать, что если A — ядерный оператор, то

   а) A — оператор Гильберта–Шмидта и, следовательно, вполне непрерывный оператор;

   б) AD и DA, где $D \in \mathcal{L}(H)$ — ядерные операторы;

   в) A^* — ядерный оператор;

   г) для любого ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в H ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n, e_n)$ абсолютно сходится;

   д) в пространстве l_2 привести пример ядерного оператора и оператора Гильберта–Шмидта, не являющегося ядерным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.
2. *Хатсон В., Пим Д.* Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
4. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988.
5. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1989.
6. *Треногин В.А., Писаревский В.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984.
7. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1. – Харьков: Вища школа, 1977.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1977.
9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
10. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ