УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

Ю.А. Самарский

“ 15 ” декабря 2002 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по курсу	Теория функций комплексного переменного
по направлению	511600
факультет	ФПФЭ
кафедра	высшей математики
курс	2
семестр	4
экзамен	4 семестр
лекции	48 часов
семинарские занятия	32 часа
самостоятельная работа	4 часа в неделю
всего часов	80

Программу составил

Е.С.Половинкин, доктор ф.-м.н., профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 4 декабря 2002 г.

Заведующий кафедрой Г.Н. Яковлев

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывные функции.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной (голоморфной) в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви многозначных функций $\{\sqrt[n]{z}\}$ и $\operatorname{Ln} z$.
4. Интегрирование по комплексному переменному. Интегральная теорема Коши для регулярных функций. Интегральная формула Коши (интеграл Коши). Интеграл типа Коши, его регулярность.
5. Существование первообразной для функции, регулярной в односвязной области. Формула Ньютона–Лейбница. Теорема Мореры.
6. Степенной ряд, первая теорема Абеля, радиус и круг сходимости. Ряд Тейлора для регулярной функции. Теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
7. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение регулярной функции в ряд Лорана, его единственность и неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема единственности для регулярных функций.
8. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Нахождение особой точки по главной части ряда Лорана.
9. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Лемма Жордана.

10. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление, логарифмическое свойство и свойство устойчивости. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} z$ и $\{\sqrt[n]{z}\}$ в односвязной области, не содержащей нуля. Условия существования и общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.
11. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сохоцкого–Вейерштрасса и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.
12. Мероморфные функции. Теорема о разложении в сумму элементарных дробей мероморфной функции (в общем случае, т.е. когда ее полюсы могут иметь любой порядок). Формула для $\operatorname{ctg} z$.
13. Понятия об аналитическом продолжении элементов друг в друга с помощью конечной цепочки элементов и вдоль контура, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие об аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии. Примеры аналитических функций $\operatorname{Ln} z$ и $\{\sqrt[n]{z}\}$. Римановы поверхности этих функций.
14. Особые точки аналитических функций, точки ветвления. Теорема Коши–Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
15. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры. Лемма о стирании пунктира.

16. Лемма об открытости. Однолистность и многолистность в малом. Принцип сохранения области. Принцип максимума модуля регулярной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
17. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной плоскости.
18. Дробно-линейные функции и их свойства: конформность в расширенной комплексной плоскости, групповое, о прямых и окружностях, о симметричных точках.
19. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и принцип соответствия границ (без доказательства).
20. Принцип симметрии при конформных отображениях.
21. Задача Дирихле на плоскости (классическая и общая). Теорема единственности решения общей задачи Дирихле для ограниченной области. Теоремы существования решения общей задачи Дирихле в круге и в конформно эквивалентной кругу области. Интеграл Пуассона для круга. Интеграл Пуассона для полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е.С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: МФТИ, 1999.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 1987.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
4. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.:

Наука, 1982, 1989.
5. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – 10-е изд., и последующие. – М.: Наука.
6. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969, 1972, 1984.

З А Д А Н И Я

ЛИТЕРАТУРА

Евграфов М.А., Бежанов К.В., Сидоров Ю.В., Федорюк В.М., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972.

Задачи, отмеченные (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 марта)

I. Комплексные числа

1.04 (2,4); 1.06 (6,7,9); 1.13 (7,9); 1.21 (1,7); 1.58 (6,7).

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

5.11(2); 5.22(2,4); 5.25 (1); 5.26 (1); 5.28 (4,8); 6.06 (1,4).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

8.01 (4,5); 8.11; 8.30 (2,4); 8.51 (1,3).

IV. Ряд Тейлора

11.03 (1,4); 11.05 (3,5); 11.06 (1); 11.07 (1,5).

V. Теорема единственности

13.03 (2,7); 13.17 (2,5).

VI. Ряд Лорана

20.01 (2); 20.02; 20.08 (2,4); 20.09 (2,7);

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1+i)$ функцию

$$f(z)=\frac{(1+3i)z}{z^2-(1-3i)z-3i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=2$. Указать границы кольца сходимости.

2* Рациональная функция f разложена в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}(n+1)\,3^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2}{4^n}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)z^n.$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z=-3$. Указать границы кольца сходимости полученного ряда.

VII. Особые точки однозначного характера

19.08 (2,3,4,7);

Найти и исследовать все особые точки функций:

а) $e^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{z}}$; б) $\dfrac{z^3}{\sin\dfrac{z}{z+1}}$;

в) $\dfrac{z^2-\sin^2 z}{(e^{iz}-1)^4}$; г) $\dfrac{e^{\cos\frac{\pi i}{2z}}-1}{i+\operatorname{sh}\dfrac{3\pi z}{2}}$;

д) $\dfrac{z^2-4}{(\cos\pi z-1)z^2}\,e^{\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{z}}}$.

3. Пусть регулярная в кольце $G=\{z\,|\,0<|z|<1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A>0$ и $\alpha\in(0,1)$, при которых справедливо неравенство

$$|f(z)|\leqslant\frac{A}{|z|^\alpha},\quad\forall z\in G.$$

Какой точкой является точка 0 для функции f?

4* Для любой ли функции f, регулярной в кольце $G = \{z \,|\, 0 < |z| < 1\}$, можно указать регулярную в кольце G функцию $g \not\equiv 0$ такую, что

$$\lim_{z\to 0}(f(z)g(z)) = 0?$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 31 марта–5 апреля)

VIII. Вычеты и вычисления интегралов

1. Найти конечные особые точки и вычислить в них вычеты функции

$$f(z) = \left(1 + \frac{i}{z}\right) e^{\frac{1}{z+i}}.$$

2. Вычислить интегралы: 22.01 (1,5); 22.02 (2,4,9); 28.03 (2,4); 28.05 (1,3); 28.07 (4,5); 28.09 (2); 28.15 (2).

а) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z\,dz}{e^{1/z} + e^{1/2z}}$, б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx$, в) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

IX. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

17.07 (3); 17.08 (3), 18.03(3), 20.14.

3. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(2-z)$ в плоскости с разрезом по кривой $z = 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi$, и лучу $z = -2i+t$, $t \geqslant 0$, такая, что $\operatorname{Im} h(-3) = 0$. Вычислить $h(-2-0)$, $h(-2+0)$,$h(2+i)$, $h'(0)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -1$ по степеням $(z+1)$. Найти радиус сходимости этого ряда. Нарисовать наибольшую область, в которой ряд сходится к функции $h(z)$.

4. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\{\sqrt{z^2+16}\}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $|z-3| = 5$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, такая, что $g(-3) = 5$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням z и найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда и ее производную в точке $z = -3$.

5* Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\{\sqrt[3]{z(3i-z)^2}\}$ в плоскости с разрезом по двум прямолинейным отрезкам $[0,3]$ и $[3,3i]$ такая, что $g(2i) = \sqrt[3]{2}i$. Найти $g(1+i0)$, $g(1-i0)$. Разложить функцию $g(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-3i)$ в окрестности точки $z = \infty$ и найти наибольшую область, в которой полученный ряд Лорана сходится к функции $g(z)$.

X. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

22.04 (3,5); 22.05(3); 28.22 (2); 28.25 (9,12,15); 28.29(1,13).

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь $\{\sqrt{z^2-4}\}$ в плоскости с разрезом по полуокружности $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, причём главная часть ряда Лорана $g(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

7* Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\frac{z+i}{2-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i,2]$ такая, что $h(0) = \ln\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\pi i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 h(z)}{z+2} dz.$$

XI. Особые точки аналитических функций

Найти и исследовать особые точки аналитических функций:

1) $\sqrt{z^2-1}$; 2)* $\sqrt[3]{1-z^2}$; 3) $\dfrac{1}{\pi i+\ln z}$; 4) $\ln\dfrac{z-1}{z+1}$.

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 5–10 мая)

XII. Разложение в ряды простейших дробей

27.08(1,4)

XIII. Принцип аргумента и теорема Руше

23.09 (1,7); 23.12.

XIV. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

9.10(3); 9.16(6); 9.17(1).

XV. Конформные отображения

35.06 (2); 35.07 (1); 35.08 (7,11); 35.09 (1); 35.14 (рис. 40, 42, 44, 48, 49); 35.22 (рис. 55, 60, 64); 35.23 (рис. 69, 71); 35.29 (рис. 79, 83, 86, 88, 90, 91).

1. Найти конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ с разрезом $\{0<x\leqslant 1,\ y=0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$, переводящее три точки граничной кривой $\{i\sqrt{3};1;-2i\sqrt{2}\}$ соответственно в точки $\{0;1;2\}$.

XVI. Принцип симметрии

36.06 (рис. 105, 107); 36.07; 36.08*; 36.09(рис.117)*.

XVII. Задача Дирихле

2. Решить задачу Дирихле

$$\Delta u=0,\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0;\ u\Big|_{\substack{\operatorname{Im} z=0,\\ |\operatorname{Re} z|<1}}=0,\ u\Big|_{\substack{|z|=1,\\ \operatorname{Im} z>0}}=1.$$

Задания составил Е.С. Половинкин, д.ф.-м.н., профессор

Усл.печ.л. 0,6 Тираж экз.