УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю.А. Самарский
18 июня 2004 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по курсу Теория функций комплексного переменного

по направлению 511600

факультеты ФРТК, ФАКИ

кафедра высшей математики

курс III

семестр 5 Экзамен 5 семестр

лекции – 51 час

семинарские занятия – 34 часа Самостоятельная работа – 3 часа в неделю

Всего часов 85

Программу составил

К.А. Бежанов, д.ф.-м.н., профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 7 апреля 2004 г.

Заведующий кафедрой Г.Н. Яковлев

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Функции, регулярные в области. Сопряженные гармонические функции. Дифференцирование сложной функции. Теорема об обратной функции (невырожденный случай).
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Отображение, конформное в точке. Отображение конформное в области. Конформная инвариантность гармонических функций. Элементарные функции и задаваемые ими отображения.
4. Понятие о регулярных ветвях многозначной функции. Многозначные функции $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$, их регулярные ветви и римановы поверхности.
5. Интегрирование по комплексному переменному. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши (интеграл Коши). Интеграл типа Коши. Дифференцирование интеграла типа Коши.
6. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Равномерно сходящиеся ряды регулярных функций. Теоремы Вейерштрасса.
7. Ряд Тейлора. Теорема единственности для регулярных функций. Ряд Лорана. Понятие об аналитическом продолжении.
8. Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема Лиувилля для целых функций. Теорема Сохоцкого. Теорема Пикара (без доказательства).
9. Существование первообразной у регулярной функции в односвязной области. Формула Ньютона–Лейбница. Теорема Морера. Лемма о стирании пунктира. Выделение регулярных ветвей многозначной функции

$\sqrt{z^2-1}$ и ее риманова поверхность.

10. Теория вычетов. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
11. Приращение аргумента вдоль кривой. Многозначные функции $\mathrm{Ln}\, f(z)$, $\sqrt[n]{f(z)}$ и их регулярные ветви.
12. Мероморфные функции. Разложение мероморфной функции в сумму элементарных дробей. Формула для $\mathrm{ctg}\, z$.
13. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
14. Понятие об аналитическом продолжении вдоль цепочки областей и вдоль кривой. Понятие об аналитической функции. Теорема о монодромии (без доказательства). Особые точки аналитических функций. Точки ветвления. Теорема Коши–Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
15. Теорема об обратной функции (вырожденный случай). Принцип сохранения области. Принцип максимума модуля регулярных функций.
16. Конформное отображение в расширенной комплексной плоскости. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (без доказательства). Принцип взаимно однозначного соответствия. Принцип соответствия границ (без доказательства).
17. Дробно-линейные функции и их свойства.
18. Функция Жуковского и ее свойства.
19. Принцип симметрии.
20. Гармонические функции двух переменных. Теорема о среднем. Принцип максимума и минимума гармонических функций. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга. Существование решения. Интеграл Пуассона для полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 1987.
2. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
3. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982, 1989.
4. *Половинкин Е.С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: МФТИ, 1999;   2003.
5. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969, 1972, 1984.

З А Д А Н И Я

ЛИТЕРАТУРА

Евграфов М. А., Бежанов К. В., Сидоров Ю. В., Федорюк В. М., Шабунин М. И. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972.

Задачи, отмеченные (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 27 сентября–2 октября)

I. Комплексные числа

1.04 (4,5);   1.06 (4,6);   1.13 (3,7,10);   1.21 (1,7);   1.58 (2,6).

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

5.25 (1);   5.26 (2);   5.28 (2,5);   6.06 (1,6).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции. Геометрические свойства

8.01 (5,6);   8.09 (2);   8.11;   8.30 (1,4);   8.31 (3);   8.51 (2,5*); 9.16 (2);   9.17 (2).

IV. Ряд Тейлора

11.03 (2); 11.05 (2); 11.07 (3,5).

V. Теорема единственности

13.03 (2,3); 13.17 (2,3).

VI. Ряд Лорана

20.01 (2); 20.06 (2,4); 20.09 (2,3); 20.16 (1,2).

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z-2$ функцию

$$f(z) = \frac{2z-3+2i}{z^2-(1+2i)z+2i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Указать границы кольца сходимости.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 ноября)

VII. Особые точки однозначного характера

19.08 (1,3,5,7).

2. Найти и исследовать все особые точки функций:

1) $\dfrac{e^{\sin z}}{\operatorname{sh}\frac{1}{z}}$; 2) $\dfrac{z^3}{\sin\frac{z}{z+1}}$; 3) $\dfrac{e^{\operatorname{ctg}\pi z}\cdot\cos\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(\operatorname{ch} z+1)}$;

4) $\dfrac{z^2+4\pi^2}{1-e^{3z}}\cos\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$; 5) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{z}}{\sin z+1}$.

VIII. Регулярные ветви многозначных функций

3. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[4]{z}$ в плоскости с разрезом по лучу $[0,+\infty)$ такая, что $F(1+i0)=1$. Найти $F(1-i0)$, $F(-16)$, $F'(-16)$ и $F''(-16)$.

4. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(z+3)$ плоскости с разрезом по кривой $\gamma_1=\{z : z = 3e^{it},\ -\pi\leqslant t\leqslant\pi/2\}$ и лучу $\gamma_2=\{z : z=3i-t,\ t\geqslant 0\}$ такая, что $\operatorname{Im}F(4)=2\pi$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=2$ по степеням $(z-2)$. Найти радиус сходимости этого ряда и указать, в каком наибольшем круге $|z-2|<R$ значения

ряда совпадают с $F(z)$. Нарисовать также наибольшую область, в которой ряд сходится к функции $F(z)$.

5. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{z(2-z)^2}$ в плоскости с разрезом по отрезку [0,2] такая, что $F(1+ +i0) = 1$. Найти $F(1-i0)$, $F(-3)$ и $F'(-3)$. Разложить $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

20.13, 20.14.

6*. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(z^2+1)$ в плоскости с разрезом по лучу мнимой оси $[-i, +i\infty)$, причем $\operatorname{Im} F\left(-\dfrac{1}{5}\right) = 0$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда $S(z)$ в точке $z = -\dfrac{1}{5}$.

7*. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{9-z^2}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $\gamma = \{z : |z- -4i| = 5, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, причем $F(4i) = 5$. Разложить $F(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = =\infty$ и найти область сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда $S(z)$ в точке $z = 4i$.

IX. Вычисление интегралов с помощью вычетов

22.01 (5); 22.02 (4); 22.04 (1); 28.03 (2); 28.05 (2); 28.07 (1,4); 28.09 (3); 28.15 (1); 28.22 (2,4*); 28.25 (4,13,14); 28.29 (1,2,13).

8. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\operatorname{tg}\frac{2}{z}}{\pi z^2 - 8z}\,dz$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}$.

в)* $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{\sin z^{12}\,dz}{z\left(z^{12}+\frac{1}{4}\right)}$. г)* $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z-\pi}{\operatorname{tg} 2z + \operatorname{ctg} 3z}\,dz$.

9. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции

$\sqrt[4]{z-2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $\gamma_1 = \{z : 1 \leqslant x \leqslant 2,\ y = 0\}$ и лучу $\gamma_2 = \{z : x = 1,\ 0 \leqslant y < +\infty\}$ такая, что $F(-2) = 1 - i$.
Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-15|=4} \frac{(z+2)(F(z)-2)}{(z-18)^2}\, dz.$$

10. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2i-z}{z+1}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z : |z| = 2, -\pi \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $\gamma_2 = \{z : z = x,\ -2 \leqslant x \leqslant -1\}$ такая, что $F(0) = \ln 2 - i\dfrac{3\pi}{2}$.
Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{zF(z)}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{z}}\, dz.$$

11. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{z^2(i-z)}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z : \left|z + \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{3}{2},\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\right\}$, $\gamma_2 = \{z : |z+i| = 1,\ \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ такая, что $F(-i) = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.
Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{F(z)}{1 + e^{2/z}}\, dz.$$

12* Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{2z-8}$ в плоскости с разрезом по лучу $\{z : x = 4,\ -\infty < y \leqslant 0\}$, такая, что $F(8) = -1 - i\sqrt{3}$.
Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-2|=3/2} \frac{dz}{F(z) - z + 2}\, .$$

13*. Пусть $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{2-iz}{z-1}$ в плоскости с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z : |z| = 1, 0 \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2\}$, $\gamma_2 = \{z : \mathrm{Re}\, z = 0, \ -2 < \mathrm{Im}\, z \leqslant -1\}$ такая, что $\mathrm{Im}\, F(\infty) = 3\pi/2$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{F(z)}{\sin^3 z}\, dz.$$

X. Особые точки аналитических функций

14. Найти особые точки следующих аналитических функций и определить их характер.

а) $\sqrt{z^2-1}$; б) $\mathrm{Ln}(z^2-1)$; в) $\sqrt[3]{1-z^2}$; г) $\dfrac{1}{\mathrm{Ln}\, z - i\pi}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{z}+1}$; е) $\cos\sqrt{z}$; ж)* $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{z\sqrt{z}}$;

XI. Принцип аргумента. Теорема Руше

23.09 (7), 23.12.

XII. Разложение в ряды простейших дробей

27.08 (4*).

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 6–11 декабря)

XIII. Конформные отображения

35.06 (1); 35.07 (2); 35.08 (2); 35.16 (11).

15. Найти конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом $\{z : x = 0, 0 < y \leqslant 2\}$ на верхнюю полуплоскость, переводящее точку $z = i\sqrt{5}$ в точку $w = 1 + i$, а точку граничной кривой $z = -\sqrt{5}$ в точку $w = 1$.

35.09 (1)*; 35.14 (40,42,44,48,49); 35.22 (55,59,64,65); 35.29 (80,85,87,88,90,91).

XIV. Принцип симметрии

36.06 (105,110); 36.07; 36.08; 36.09 (117*); 36.11*.

XV. Задача Дирихле

16. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad z \in D,$$
$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{|z|=1} = 1,$$
$$D = \{z : |z| < 1, \quad y > 0\}.$$

Задания составили: К.А. Бежанов, д.ф.-м.н., профессор,
В.М. Ипатова, к.ф.-м.н., доцент