УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

________________ Ю.А. Самарский

16 июня 2003 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по курсу Теория функций комплексного переменного

по направлению 511600

факультет ФОПФ, ФПМЭ, ФМБФ, ФФКЭ

кафедра высшей математики

курс III

семестр 5 экзамен 5 семестр

лекции 51 час

семинарские занятия 34 часа самостоятельная работа 3 часа в неделю

всего часов 85

Программу составили:

Е.С. Половинкин, д.ф.-м.н., профессор
М.И. Карлов, к.ф.-м.н, ст.препод.

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2003 г.

Заведующий кафедрой ________________ Г.Н. Яковлев

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывные функции.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной (голоморфной) в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви многозначных функций $\{\sqrt[n]{z}\}$ и $\operatorname{Ln} z$.
4. Интегрирование по комплексному переменному. Интегральная теорема Коши для регулярных функций. Интегральная формула Коши (интеграл Коши). Интеграл типа Коши, его регулярность.
5. Существование первообразной для функции, регулярной в односвязной области. Формула Ньютона–Лейбница. Теорема Мореры.
6. Степенные ряды, первая теорема Абеля, радиус и круг сходимости. Ряд Тейлора для регулярной функции. Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
7. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение регулярной функции в ряд Лорана, его единственность и неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема единственности для регулярных функций.
8. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация . Нахождение особой точки по главной части ряда Лорана.

9. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
10. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление, логарифмическое свойство и свойство устойчивости. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} z$ и $\{\sqrt[n]{z}\}$ в односвязной области, не содержащей нуля. Условия существования и общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.
11. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сохоцкого–Вейерштрасса и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.
12. Мероморфные функции. Теорема о разложении в сумму элементарных дробей мероморфной функции (в общем случае, т.е. когда ее полюсы могут иметь любой порядок). Формула для $\operatorname{ctg} z$.
13. Понятия об аналитическом продолжении элементов друг в друга с помощью конечной цепочки элементов и вдоль контура, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие об аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии (без доказательства). Примеры аналитических функций $\operatorname{Ln} z$ и $\{\sqrt[n]{z}\}$.
14. Особые точки аналитических функций, точки ветвления. Теорема Коши–Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
15. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры. Лемма о стирании пунктира.
16. Лемма об открытости. Однолистность и многолистность

в малом. Принцип сохранения области. Принцип максимума модуля регулярной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции.

17. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной области.
18. Дробно-линейные функции и их свойства: конформность в расширенной комплексной плоскости, групповое, о прямых и окружностях, о симметричных точках.
19. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и принцип соответствия границ (без доказательства).
20. Принцип симметрии при конформных отображениях.
21. Задача Дирихле на плоскости (классическая и общая). Теорема единственности решения общей задачи Дирихле для ограниченной области. Теоремы существования решения общей задачи Дирихле в круге и в конформно эквивалентной кругу области. Интеграл Пуассона для круга. Интеграл Пуассона для полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е.С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: МФТИ, 1999.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 1987.
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
4. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука,

1982, 1989.
5. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – 10-е изд., и последующие. – М.: Наука.
6. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969, 1972, 1984.

З А Д А Н И Я

ЛИТЕРАТУРА

Номера задач указаны по книге: *Евграфов М.А., Бежанов К.В., Сидоров Ю.В., Федорюк В.М., Шабунин М.И.* Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972.

Задачи, отмеченные (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–27 сентября)

I. Комплексные числа

1.04(1,5); 1.06(6,8,9); 1.13(7,9); 1.21(3,7); 1.58(6,7).

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

5.11(4); 5.22(2,3); 5.25(3); 5.26(3); 5.28(2,5); 6.06(3,6).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

8.01(5); 8.11; 8.30(2,4); 8.51(1,2).

IV. Ряд Тейлора

11.03(2,5); 11.05(3,5); 11.06(1); 11.07(3,5).

V. Теорема единственности

13.03(3,7); 13.17(2,5).

VI. Ряд Лорана

20.01(2); 20.02; 20.08(2,6); 20.09(2,6).

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1+i)$ функцию

$$f(z)=\frac{(1+3i)z}{z^2-(1-3i)z-3i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=2$.

Указать границы кольца сходимости.

VII. Особые точки однозначного характера

19.08(2,4,5,7);

2. Найти и исследовать все особые точки функций:

а) $e^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{z}}$;

б) $\dfrac{z^3}{\sin\dfrac{z}{z+1}}$;

в) $\dfrac{z^2-\sin^2 z}{(e^{iz}-1)^4}$;

г) $\dfrac{e^{\cos\frac{\pi i}{2z}}-1}{i+\operatorname{sh}\dfrac{3\pi z}{2}}$;

д) $\dfrac{z^2-4}{(\cos\pi z-1)z^2}\,e^{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{z}}}$;

е)* $\dfrac{e^{\frac{1}{\operatorname{ch}2z}}(\pi z+\pi-1)}{1+\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right)}$.

3. Пусть регулярная в кольце $G=\{z\,|\,0<|z|<1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A{>}0$ и $\alpha\in$ $\in(0{,}1)$, при которых справедливо неравенство

$$|f(z)|\leqslant\frac{A}{|z|^{\alpha}}\,,\quad\forall z\in G.$$

Какой точкой является точка 0 для функции f ?

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 ноября)

VIII. Вычеты и вычисления интегралов

1. Найти конечные особые точки и вычислить в них вычеты

функции
$$f(z)=\left(1+\frac{i}{z}\right)e^{\dfrac{1}{z+i}}.$$

2. Вычислить интегралы: 22.01(3,5); 22.02(1,9); 28.03(3,4); 28.05(6); 28.07(3,6); 28.09(2); 28.15(2).

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{z\,dz}{e^{1/z}+e^{1/2z}};$ б) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{7}{2}}\frac{z}{z^2-9}\operatorname{ch}\frac{3z}{z-4}\,dx.$

IX. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

17.07(3); 17.08(5), 18.03(3), 20.14.

3. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(2-z)$ в плоскости с разрезом по кривой $z=2e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant\dfrac{3}{2}\pi$, и лучу $z=-2i+t$, $t\geqslant 0$, такая, что $\operatorname{Im}h(-3)=$ $=0$. Вычислить $h(-2-0)$, $h(-2+0)$, $h(2+i)$, $h'(0)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=-1$ по степеням $(z+1)$. Найти радиус сходимости этого ряда. Нарисовать наибольшую область, в которой ряд сходится к функции $h(z)$.

4. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\{\sqrt{z^2+16}\}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $|z-3|=5$, $\operatorname{Re}z\leqslant 0$, такая, что $g(-3)=5$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням z и найти радиус сходимости. Вычислить сумму ряда и ее производную в точке $z=-3$.

X. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

22.04(3,5); 22.05(2); 28.22(3); 28.25(9,12,14); 28.29(2,13).

5. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь $\{\sqrt{z^2-4}\}$ в плоскости с разрезом по полуокружности $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, причём главная часть ряда Лорана $g(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z} \,.$$

6. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} \dfrac{z+i}{2-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-i,2]$ такая, что $h(0) = \ln \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\pi i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 h(z)}{z+2} dz.$$

XI. Особые точки аналитических функций

7. Найти и исследовать особые точки аналитических функций:

а) $\sqrt{z^2-1}$; б) $\sqrt[3]{1-z^2}$; в) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$; г) $\ln \dfrac{z-1}{z+1}$;

д)* $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{z}}$.

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 декабря)

XII. Принцип аргумента и теорема Руше

23.09(2,7); 23.12.

XIII. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

9.10(3); 9.16(4); 9.17(2).

XIV. Конформные отображения

35.06(2); 35.07(1); 35.08(2,12); 35.09(1); 35.14(рис. 39, 42, 43, 48, 49); 35.22(рис. 58, 60, 64); 35.23(рис. 69, 71); 35.29(рис. 77, 82, 87, 88, 90, 91).

1. Найти конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ с разрезом $\{0 < x \leqslant 1, y = 0\}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, переводящее три точки граничной кривой $\{i\sqrt{3};1;-2i\sqrt{2}\}$ соответственно в точки $\{0;1;2\}$.

Задания составили: Е.С.Половинкин, д.ф.-м.н., профессор,
М.И. Карлов, к.ф.-м.н, ст.препод.