УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

______________ Ю.А. Самарский

16 июня 2003 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по курсу Теория функций комплексного переменного

по направлению 511600

факультет ФАЛТ

кафедра высшей математики

курс III

семестр 5 экзамен 5 семестр

лекции 51 час

семинарские занятия 34 часа самостоятельная работа 3 часа в неделю

всего часов 85

Программу составил

Л.П. Купцов, к.ф.-м.н., доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2003 г.

Заведующий кафедрой ______________ Г.Н. Яковлев

1. Комплексные числа и действия с ними. Расширенная плоскость. Сфера Римана. Предел последовательности. Непрерывные функции комплексной переменной.
2. Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Формула Коши–Адамара. Почленное дифференцирование степенного ряда.
3. Дифференцирование по комплексной переменной. Условия Коши–Римана. Регулярные (голоморфные) функции.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Однолистные функции. Теорема об обратном отображении. Конформность в точке и в области. Конформные отображения.
5. Элементарные функции и задаваемые ими отображения: $az + b$, z^n, e^z, тригонометрические и гиперболические функции, дробно-линейная функция, функция Жуковского.
6. Многозначные функции. Функции $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции, общая степенная функция и их римановы поверхности. Непрерывные и регулярные ветви многозначной функции.
7. Криволинейные интегралы. Основные свойства. Первообразная. Её существование. Формула Ньютона–Лейбница. Почленное интегрирование степенного ряда.
8. Интегральная теорема Коши и её обобщения.
9. Интегральная формула Коши. Дифференцирование интеграла Коши. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Оценка Коши. Теорема Лиувилля. Интеграл типа Коши.
10. Теорема Морера. Лемма о стирании пунктира.
11. Равномерно сходящиеся последовательности и ряды регу-

лярных функций. Теоремы Вейерштрасса о регулярности предельной функции.

12. Ряд Тейлора. Теорема о разложении регулярной функции в ряд Тейлора. Единственность. Теорема Коши–Адамара о существовании особой точки на границе круга сходимости.
13. Ряд Лорана. Теорема о разложении регулярной (в кольце) функции в ряд Лорана. Единственность.
14. Изолированные особые точки однозначного характера. Классификация. Теоремы Сохоцкого и Пикара. Целые и мероморфные функции.
15. Теорема единственности. Аналитическое продолжение. Полная аналитическая функция. Теорема о монодромии и её применения в задаче о выделении регулярных ветвей. Особые точки аналитической функции. Точки ветвления.
16. Вычет. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета в случае полюса. Вычет в бесконечно удалённой точке. Вычисление определённых интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Функции матричного аргумента.
17. Метод расширяющихся контуров Коши–Пуанкаре: разложение мероморфной функции в сумму простейших дробей, разложение целой функции в бесконечное произведение; суммирование рядов.
18. Логарифмический вычет. Теорема о числе нулей и полюсов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
19. Основные принципы теории конформных отображений: сохранение области, максимума модуля, соответствия границ, симметрии.
20. Плоское векторное поле. Условия несжимаемости и отсутствия вихрей. Комплексный потенциал. Особенности век-

торного поля: источник, вихрь, диполь. Постановка задачи обтекания. Условия на теле и на бесконечности. Циркуляционное обтекание цилиндра. Профили Жуковского–Чаплыгина. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей. Условия нормировки и единственность.

21. Гармонические функции двух переменных. Свойства среднего. Принцип максимума и минимума. Задача Дирихле. Единственность. Функция Грина. Интегралы Пуассона для круга и полуплоскости. Задача Неймана. Необходимое условие разрешимости. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле.
22. Интеграл Христоффеля–Шварца.
23. Метод перевала.
24. Преобразование Лапласа. Основные свойства. Формула обращения. Первая и вторая теоремы разложения. Применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982, 1989.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 1987.
3. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979.
4. *Фукс Б.А., Шабат Б.В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – 3-е изд. – М.: Наука, 1964.

Дополнительная

5. *Федорюк М.В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977.

6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1973.

З А Д А Н И Я

ЛИТЕРАТУРА

Номера задач указаны по книге: *Евграфов М. А., Бежанов К. В., Сидоров Ю. В., Федорюк В. М., Шабунин М. И.* Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–27 сентября)

I. Комплексные числа

1.05;   1.06(6,9);   1.14(2,5);   1.25(2);   1.33.

1. Изобразите на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ все корни уравнения $z^3 = -11 - 2i$.

2. Правильный пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Вычислите произведение $AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE$.

3. На единичной окружности $|z| = 1$ взяты две точки a и b и в них проведены касательные к окружности. Найдите комплексную координату точки пересечения этих касательных.

4. На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ дана точка $3 + 5i$. Найдите вещественное число x и чисто мнимое число iy такие, что треугольник с вершинами $\{x; 3+5i; iy\}$ является правильным.

II. Последовательности, ряды.

2.16;   2.20(1);   6.06(1,6).

III. Элементарные функции

5.10(10); 5.11(7,10); 5.25(1,3); 5.28(2); 5.29.

IV. Дифференцирование ФКП

8.01(2,5); 8.30(1,4); 8.31(4); 8.51(1).

5. Найдите на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ все точки, в которых дифференцируема функция $f(z) = 2y - i(2x + y^2)$. Вычислите в этих точках значения $f'(z)$. Найдите регулярную функцию, значения производной которой в точках дифференцируемости функции $f(z)$ совпадают с соответствующими значениями производной $f'(z)$.

V. Геометрический смысл производной

9.09(1,4); 9.16(1); 9.17(1).

VI. Интегрирование ФКП

10.23(3.6).

6. Вычислите интеграл $\int_C e^{iz}\,dz$, где C — кусок параболы $\{0 \leqslant x \leqslant 1, y = x^2\}$, двумя способами: а) используя первообразную; б) используя параметризацию C. Сравните результаты.

7. Вычислите интеграл $\int_C \frac{dz}{z}$ двумя способами:

а) по окружности $|z| = R$; б) по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Сравните результаты.

8. Вычислите интегралы $\int_0^{\infty} e^{aix^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}dx$, используя равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a > 0,\ b \in \mathbb{C})$.

VII. Степенной ряд

6.08(1,2); 6.30(1).

VIII. Ряды Тейлора и Лорана

11.02(2); 11.03(1); 11.04(4); 11.05(3); 11.07(1,5); 11.11(2,6); 11.14; 11.17(2); 20.01(1,6); 20.08(2); 20.11; 20.16(3,6).

IX. Изолированные особые точки

9. Найдите и исследуйте все особые точки функций:

$$\frac{z^5}{(z^2+1)^2}, \quad \frac{z+\pi i}{1+e^z}, \quad \frac{6\,\mathrm{Sh}\,z-6z-z^3}{(e^z-1)^6}, \quad e^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{z}},$$

$$\frac{e^z+1}{z^2-\pi iz+6\pi^2}, \quad \frac{\operatorname{Sin} z}{z^3+\pi z^2}.$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 ноября)

X. Регулярные ветви многозначных функций

16.06(1,5); 16.12; 16.13; 16.15(2,4); 17.08(1); 17.10(2); 17.27; 17.30.

1. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции z^a в области D. Докажите, что в D справедливы равенства $f'(z) = \dfrac{af(z)}{z}$, $f''(z) = \dfrac{a(a-1)f(z)}{z^2}$.

2. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}(-z+3)$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по кривой $z = 3e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$, и лучу $z = -3i + t$, $t \geqslant 0$, такая, что $\mathrm{Im}\, f(-4) = 2\pi$. Вычислите $f(2)$, $f(3+2i)$, $f'(-5)$, $f'(0)$. Разложите $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=-2$ по степеням $z+2$, найдите радиус сходимости полученного ряда, и укажите, в каком наибольшем круге $|z+2|<R$ значения ряда совпадают с $f(z)$.

XI. Теорема единственности. Аналитическое продолжение

13.03(1,3); 24.06(1).

3. Докажите, что функции $f_0(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ и $f_k(z)=i\,\pi(1+$ $+\,2k)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-2)^n}{n}$, где k — произвольное целое число, являются аналитическим продолжением друг друга.

4. Функция $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$ разложена в ряд Тейлора в окрестности точки z_0, $|z_0|<1$. При каких значениях z_0 это разложение позволяет аналитически продолжить $f(z)$?

XII. Вычеты и их применения

21.02(8,14); 21.01(1,4); 22.02(2,7,14); 22.04(1,5,8); 22.05(1,7); 28.03(3); 28.07(7,12); 28.09(1); 28,11(1)*; 28.15(8а,8б*); 28.22(12); 28.25(14); 28.29(3).

5. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{|2z-1+i|=2}\frac{z\,dz}{\operatorname{Cos}\pi z-\operatorname{Ch}\pi z}$.

6. Представьте ВЫЧ $\dfrac{\operatorname{Sin}\frac{1}{z}}{1+z^2}$ в точке $z=0$:

а) в виде ряда; б) в конечном виде.

Сравните результаты.

7. Вычислите матричные функции $f(A)$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(A) = e^{tA}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(A) = \dfrac{\operatorname{Sh} t\sqrt{A}}{\sqrt{A}}$.

8. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} = 4y, \\ \ddot{y} = -x + 4y; \end{cases}$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 декабря)

XIII. Теорема Руше

23.03(4,7); 23.09(1,3); 23.12.

1. Сколько корней имеет уравнение $5z^3 - 3z^2 - 3z + 3 = 0$ в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$?

XIV. Разложения в ряды простейших дробей

27.08(1,4).

2. Разложите на простейшие дроби функцию $\dfrac{1}{e^z - 1}$.

XV. Конформные отображения

32.01(1,7); 33.19(1,3); 35.04(2); 35.19(2).

XVI. Принцип симметрии

36.06(107,112); 37.46(144,151).

XVII. Задача Дирихле

3. Постройте функции Грина задачи Дирихле для областей:

а) D — полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < 1, -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty\}$;

б) D — угол $\left\{0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

в) D — полукруг $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$.

4. Постройте интегральное представление решения $u(x,y)$ задачи Дирихле через граничные данные для области D:

а) D — полоса (см. 20.а);

б) D — угол $\left\{0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

XVIII. Метод перевала

5. Найдите главный член асимптотики при $\lambda \to +\infty$ следующих интегралов:

$$\int\limits_{-2-4i}^{1+2i} \operatorname{Cos} z \cdot e^{i\lambda z^2}\,dz; \quad \int\limits_{-2i}^{2i} e^{\lambda(z^2-2z)}\,dz; \quad \int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{Cos}(\lambda \sin z - nz)\,dz.$$

XIX. Плоское векторное поле

38.05(3,5); 38.23(6); 39.55(1,4).

XX. Преобразование Лапласа

6. Пользуясь второй теоремой разложения, найдите оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$:

а) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-1)^2(p^2+1)}$;

б) $F(p) = (pE - A)^{-1}$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x + 9y + e^{2t}, \\ \ddot{y} = -x + 5y + \sin t \end{cases}$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Задания составил Л.П. Купцов, к.ф.-м.н., доцент