Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет

А.В. Шаповалов

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ФИЗИКУ

Учебное пособие

Томск 2002

УДК 517.946

Шаповалов А.В. Введение в нелинейную физику. Учебное пособие. – Томск: Изд. ТПУ. 2002 – 129 с.

Настоящее учебное пособие приготовлено на основе курса лекций, который автор читает на протяжении ряда лет на физическом факультете в Томском государственном университете.

В пособии рассмотрен небольшой набор тем, получивших широкое распространение в научной литературе и оказавших значительное влияние на развитие нелинейной физики и математики. Каждая тема содержит то или иное явление, с которым обычно ассоциируется представление о наиболее характерных особенностях проявления нелинейности.

Для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по специальности "физика".

Печатается по постановлению Редакционно-издательского
совета Томского политехнического университета

Рецензенты:

Кистенев Ю.В.	заведующий кафедрой физики Сибирского медицинского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор
Бордовицын В.А.	профессор кафедры теоретической физики Томского государственного университета доктор физико-математических наук, профессор

Учебное пособие выполнено при финансовой поддержке
Министерства образования РФ, грант No E 00-1.0-126.

Темплан 2001

© Томский политехнический университет, 2002

1 Введение

В данном курсе изучаются нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие различные физические нелинейные процессы и явления.

Дифференциальное уравнение в частных производных в общем случае можно записать следующим образом. Обозначим $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ — вещественное n- мерное пространство, $x_i \in \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^1$– множество вещественных чисел, $i = \overline{1,n}$. Пусть $u(x)$ — вещественная функция. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных порядка r имеет вид

$$F(x, u(x), \partial u(x)/\partial x_i, \partial^2 u(x)/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}, \ldots \\ \ldots, \partial^r u(x)/\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_r}) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь F — вещественная функция указанных аргументов. (Для определенности все функции будем считать вещественными и дифференцируемыми класса $\mathbb{C}^\infty$).

Уравнение (1.1) линейно, если для него выполняется *принцип суперпозиции* решений: если $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два решения уравнения (1.1), тогда их линейная комбинация $\alpha_1 u_1(x)+\ \alpha_2 u_2(x)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$ также является решением этого уравнения. Методы исследования линейных уравнений во многом основаны на этом принципе.

Для нелинейных уравнений принцип суперпозиции решений не выполняется. Нелинейные явления оказываются более сложными и разнообразными и требуют специальных методов анализа.

Исследование нелинейных процессов и их моделей выявило ряд характерных нелинейных явлений. К ним, в частности, относится нелинейное распространение тепла с режимом обострения, образование ударных волн в нелинейной среде, образование уединенных волн (солитонов) в нелинейной среде с дисперсией. Некоторые нелинейные процессы приводят к стохастизации и турбулентности; в конденсированных средах возникают явления сверхпроводимости, сверхтекучести, фазовые переходы. Распространение оптического импульса в нелинейной среде может приводить к ряду специфических нелинейно - оптических эффектов, таких как самофокусировка, двойное лучепреломление, сверхизлучение и др.

Нелинейные системы изучаются также в химии, биологии, экологии, экономике.

Изучение нелинейных систем показало, что некоторые нелинейные системы различной природы могут иметь одно и то же математическое описание. Это наблюдение позволяет сформулировать общую стратегию изучения нелинейных явлений на основе формулировки некоторого сравнительно небольшого набора базовых моделей нелинейных систем и изучать нелинейные явления на основе анализа этих моделей.

Теория нелинейных уравнений находит приложения во всех основных разделах современной физики: в теории тяготения, квантовой теории поля, теории конденсированного состояния вещества, теории плазмы, нелинейной оптики, гидро- и газодинамики. Для изучения такого разнообразия нелинейных явлений требуются различные подходы и методы, их невозможно описать в рамках единой теории. Мы рассмотрим некоторые из этих явлений. В исследованиях нелинейных уравнений оказывается полезным опыт линейной теории.

Наиболее глубоко разработана теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающая важнейшие физические процессы и системы. Эти уравнения составляют предмет изучения стандартных курсов математической физики. В основе линейной теории лежит классификация, относящая данное уравнение к гиперболическому, эллиптическому или параболическому типу. Тип уравнения определяет особенности поведения его решения. Уравнения каждого типа описывают свой круг физических явлений: уравнение гиперболического типа описывает волновые процессы, уравнение параболического типа — распространение тепла и диффузионные процессы, уравнение эллиптического типа описывает стационарные явления различной физической природы. Для уравнений каждого типа сформулированы задачи с начальными и граничными условиями и исследованы вопросы существования и единственности решения.

Для нелинейных уравнений аналогичная классификация также представляет определенный интерес, но имеет свои особенности, которые будут рассмотрены ниже. Общая постановка задач с начальными и граничными условиями для нелинейных уравнений также соответствует задачам в линейной теории. Принципиальные различия возникают в методах решения задач и в свойствах решений, что определяет различия в протекании линейных и нелинейных процессов.

2 Классификация линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка

2.1 Канонические формы и классификация

Рассмотрим особенности классификации нелинейных уравнений на примере квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, которое записывается в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{2.1}$$

Здесь пространство независимых переменных двумерно, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u_x = \partial u/\partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$ и т.д., a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от x, y, u, u_x, u_y. Уравнение (2.1) линейно относительно старших производных, если a_{11}, a_{22}, a_{12} зависят от (x, y) и не зависят от u, u_x, u_y.

Линейное относительно старших производных уравнение (2.1) линейно, если

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + b_3u,$$

где b_1, b_2, b_3 зависят только от x, y. Введя оператор

$$L(u) = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}, \tag{2.2}$$

запишем уравнение (2.1) в виде

$$L(u) + F = 0. \tag{2.3}$$

Поставим задачу о приведении оператора (2.2) и, тем самым, уравнения (2.1), (2.3) к простейшему (каноническому) виду обратимым преобразованием координат

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{2.4}$$

для которого якобиан

$$\mathcal{D} = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0. \tag{2.5}$$

Обозначим через $u(\xi, \eta)$ функцию $u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, в которую переходит $u(x, y)$ после замены (2.4), и запишем уравнение (2.3) в новых переменных в виде

$$L(u) + \bar{F} = 0, \tag{2.6}$$

где

$$L(u) = \bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\eta\xi} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta}, \tag{2.7}$$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2, \tag{2.8}$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_y\psi_y, \tag{2.9}$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2. \tag{2.10}$$

Функция $\bar{F}$ не содержит вторых производных функции u. Кроме того

$$\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}^2 = \mathcal{D}^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2). \tag{2.11}$$

Классификация квазилинейного уравнения (2.1) проводится таким же образом, как и в линейном случае. Уравнению (2.1), или эквивалентно (2.2), (2.3), можно поставить в соответствие квадратичную форму

$$Q(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2. \tag{2.12}$$

Тип уравнения (2.1) и, соответственно, оператора (2.2) определяется знаком дискриминанта

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{2.13}$$

Различают три типа линейных операторов L вида (2.3), соответственно, уравнения (2.1):

$$\begin{array}{ll} \text{(I) гиперболический, если} & \Delta < 0, \\ \text{(II) параболический, если} & \Delta = 0, \\ \text{(III) эллиптический, если} & \Delta > 0. \end{array} \tag{2.14}$$

Тип уравнения определяется характером кривой второго порядка

$$Q(l, m) = 1 \tag{2.15}$$

на плоскости l, m при фиксированных значениях x, y. Эта кривая может быть гиперболой, эллипсом, параболой, соответственно. Тип уравнения определяет некоторые общие свойства его решений. Так как a_{ij} зависит от точки координатного пространства, $M = M(x, y)$, то тип уравнения может изменяться в различных точках пространства. В квазилинейном случае тип пространства зависит также и от u, u_x, u_y. Переход к канонической форме осуществляется выбором функций φ, ψ (2.4). Условия, определяющие вид функций φ, ψ, имеют следующий вид, в соответствии с типом уравнения (2.1):

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \bar{a}_{11} = -\bar{a}_{22}, \quad \text{или} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0, \\ \text{(II)} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0, \\ \text{(III)} \quad \bar{a}_{22} = \bar{a}_{12} = 0. \end{array} \tag{2.16}$$

Соответственно, оператор L в уравнении (2.3) примет вид

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad L(u) = \bar{a}_{11}(u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) + \ldots, \\ \qquad \text{или} \quad L(u) = u_{\xi\eta} + \ldots, \\ \text{(II)} \quad L(u) = \bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + \ldots, \\ \text{(III)} \quad L(u) = \bar{a}_{22}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \ldots, \end{array}$$

где точками обозначены члены, содержащие производные не выше первого порядка, они не влияют на тип уравнения. Как видно из приведенных выражений, постановка задачи о классификации квазилинейного уравнения аналогична линейному случаю.

Специфику классификации квазилинейного уравнения рассмотрим на примере уравнения гиперболического типа. Определим вид функций φ, ψ, подчинив коэффициенты преобразованного уравнения условию

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0.$$

Тогда уравнения (2.8) – (2.10) приводят к характеристическому уравнению

$$Q = a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0 \tag{2.17}$$

для отношений производных

$$\lambda_1 = \varphi_x/\varphi_y, \qquad \lambda_2 = \psi_x/\psi_y. \tag{2.18}$$

Здесь для определенности предположено, что $a_{11} \neq 0$. В гиперболическом случае, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, уравнение (2.17) имеет два различных вещественных корня λ_1, λ_2,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \tfrac{2}{a_{11}}\sqrt{-\Delta},$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12} \pm \sqrt{-\Delta}\right). \tag{2.19}$$

Функции φ, ψ определяются системой дифференциальных уравнений (2.18):

$$\varphi_x - \lambda_1\varphi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2\psi_y = 0. \tag{2.20}$$

Эта пара линейных уравнений первого порядка относительно функций φ, ψ определяет два семейства кривых (характеристик), которые неявно задаются следующими выражениями:

$$\varphi(x, y, u) = \text{const}, \qquad \psi(x, y, u) = \text{const}$$

и являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} + \lambda_1 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} + \lambda_2 = 0. \tag{2.21}$$

Роль классификации в линейной теории уравнения (2.1) весьма существенна. Приведение к каноническому виду упрощает как постановку задачи для уравнения (2.1), так и ее решение. Поскольку наиболее сложной частью задачи является решение системы (2.21), которая сравнительно проста, фактическое нахождение характеристик и приведение уравнения (2.1) к канонической форме всегда возможно.

Для нелинейного уравнения (2.1) система (2.21) неопределенна, так как в ее коэффициенты $\lambda_{1,2}$ через функции a_{ij} входит переменная u, для которой требуется дополнительное уравнение. Если коэффициенты a_{ij} зависят также и от u_x, u_y, то систему (2.21) следует дополнить уравнениями на u_x, u_y. Это еще более усложняет поиск характеристик и часто делает фактическое их нахождение невозможным.

Классификация нелинейного уравнения (2.1) может быть эффективно проведена лишь в специальных случаях. Например, если решение $u = u(x, y)$ уже найдено и требуется исследовать особенности его поведения. Тогда переход к канонической форме можно провести так же, как в линейном случае, подставив решение $u(x, y)$ в функции a_{ij}. Нетрудно видеть, что тип уравнения может зависеть от вида конкретного решения.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1 *Пусть уравнение (2.1) имеет вид*

$$L(u) = -uu_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{2.22}$$

Квадратичная форма (2.12)

$$Q = -ul^2 + m^2 \tag{2.23}$$

при $u(x, y) < 0$ определяет эллипс (2.15). В этом случае $\Delta = -u(x, y) > 0$ и уравнение (2.22) имеет эллиптический тип. При $u(x, y) > 0$ соотношения (2.15), (2.23) определяют гиперболу, $\Delta = -u < 0$, и уравнение (2.22) имеет гиперболический тип.

Пример 2 *Определим тип уравнения*

$$L(u) = uu_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0 \tag{2.24}$$

на плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в области, ограниченной квадратом

$$0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4, \tag{2.25}$$

для решения $u(x, y) = x + y$.
Для данного решения $\Delta = u(x, y) + 4 = x + y - 4 < 0$ в треугольнике $0 \le x \le 4$, $0 \le y < 4 - x$ (Рис.2.1, a), в котором, следовательно, уравнение (2.24) имеет гиперболический тип. В треугольнике $0 \le x \le 4$, $4 - x < y \le 4$ (Рис.2.1, b) $\Delta = x + y - 4 > 0$ и уравнение (2.24) имеет эллиптический тип.

В эллиптическом случае для уравнения (2.1) общего вида, когда $\Delta > 0$, характеристическое уравнение (2.17) имеет два комплексно сопряженных корня λ_1, λ_2. Тогда вещественные характеристические величины $\rho = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, $\sigma = (\lambda_1 - \lambda_2)/2i$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} = a_{11}\rho_x^2 + 2a_{12}\rho_x\rho_y + a_{22}\rho_y^2 = \\ = a_{11}\sigma_x^2 + 2a_{12}\sigma_x\sigma_y + 22\sigma_y^2 = \bar{a}_{22}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\bar{a_{12}} = a_{11}\rho_x\sigma_x + a_{12}(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + a_{22}\rho_y\sigma_y = 0. \tag{2.27}$$

Переход к канонической форме проводится аналогично гиперболическому случаю: для заданной функции $u = u(x, y)$ характеристические координаты находятся так же, как в линейной теории. Такова же ситуация и для уравнения (2.1) параболического типа.

Разумеется, особый интерес представляет переход к канонической форме, когда решение $u(x, y)$ не задано. Рассмотрим упрощенную ситуацию, когда коэффициенты a_{ij} уравнения (2.1) зависят от u и не зависят от u_x, u_y. Тогда характеристическую систему (2.21) следует дополнить еще одним уравнением.

Этим дополнительным недостающим уравнением, которое следует присоединить к (2.20) в гиперболическом случае или к (2.26), (2.27) в эллиптическом, будет служить само уравнение (2.1).

Чтобы исключить явную зависимость от u в уравнениях (2.18), (2.26), (2.27), вместо того чтобы считать характеристические переменные ξ, η функциями независимых переменных x, y, $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, как это имеет место в линейной теории, будем, напротив, рассматривать u, x, y как функции независимых переменных ξ, η, т.е. $u = u(\xi, \eta)$, $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$.

Геометрически такой подход означает, что мы ищем интегральную поверхность уравнения (2.1) не в асимметричной форме $u = u(x, y)$, а в симметричном параметрическом виде, когда u, x, y являются функциями характеристических параметров ξ, η. Значение уравнений (2.1), (2.20) в гиперболическом случае и (2.1), (2.26), (2.27) в эллиптическом случае состоит в том, что канонический вид будет иметь вся система, а не одно уравнение (2.1).

Положим

$$\xi = \xi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \tag{2.28}$$
$$\eta = \eta(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \tag{2.29}$$
$$u = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)). \tag{2.30}$$

Чтобы получить соответствующие уравнения, необходимо перейти от производных по переменным x, y к производным по переменным ξ, η. С этой целью воспользуемся формулами дифференцирования обратной функции. Для этого формулы (2.28) – (2.30) продифференцируем по ξ, η. Получим

$$\begin{aligned} \xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi &= 1, \quad \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi = 0, \\ \xi_x x_\eta + \xi_y y_\eta &= 0, \quad \eta_x x_\eta + \eta_y y_\eta = 1, \\ u_\xi = u_x x_\xi + u_y y_\xi&, \quad u_\eta = u_x x_\eta + u_y y_\eta. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Здесь и далее нижний индекс обозначает соответствующую частную производную, например, $\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Разрешая систему (2.31), находим

$$\begin{aligned} \xi_x &= D y_\eta, \quad \eta_x = -D y_\xi, \\ \xi_y &= -D x_\eta, \quad \eta_y = D x_\xi, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где

$$D \equiv (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}. \tag{2.33}$$

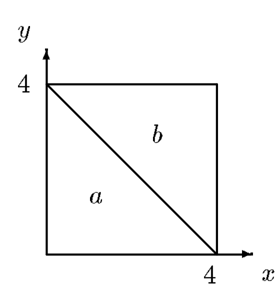

Рис. 2.1:

С помощью выражений (2.32), (2.33) запишем формулы перехода от частных производных по x, y к частным производным по ξ, η:

$$\begin{aligned} u_x &= \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta = -D(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi), \\ u_y &= \xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta = D(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Удобно ввести следующее обозначение для якобиана двух функций $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$:

$$\{f, g\} \equiv f_\xi g_\eta - f_\eta g_\xi = \det \begin{pmatrix} f_\xi & g_\xi \\ f_\eta & g_\eta \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Нетрудно проверить справедливость следующих свойств якобиана для произвольных функций f, g, h и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad \text{антисимметричность}, \tag{2.36}$$

$$\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\} \quad \text{линейность}, \tag{2.37}$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad \text{тождество Якоби}. \tag{2.38}$$

Обозначим

$$\{f, \} = f_\xi \partial_\eta - f_\eta \partial_\xi \tag{2.39}$$

так, что $\{f, \}g = \{f, g\}$. Здесь ∂_η обозначает оператор частной производной, $\partial_\eta = \partial/\partial\eta$. Выражение $\{f, \}$ можно рассматривать как линейный дифференциальный оператор, для которого справедливо правило Лейбница

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \tag{2.40}$$

В этих обозначениях формулы (2.34) примут вид

$$\begin{aligned} u_x &= -D\{y, u\}, \\ u_y &= D\{x, u\}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Для вторых производных, учитывая (2.33), находим

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -D^3\{y, \{x, y\}\}\{y, u\} + D^2\{y, \{y, u\}\}, \\ u_{yy} &= -D^3\{x, \{x, y\}\}\{x, u\} + D^2\{x, \{x, u\}\}, \\ u_{xy} &= D^3\{x, \{x, y\}\}\{y, u\} - D^2\{x, \{y, u\}\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Подставим выражение (2.42) в (2.1) и получим

$$\begin{aligned} &-D^3(a_{11}\{y, \{x, y\}\}\{y, u\} + a_{22}\{x, \{x, y\}\}\{x, u\} - \\ &\quad - 2a_{12}\{x, \{x, y\}\}\{y, u\}) + \\ &+ D^2(a_{11}\{y, \{y, u\}\} + a_{22}\{x, \{x, u\}\} - \\ &\quad - 2a_{12}\{x, \{y, u\}\}) + F = 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Принимая во внимание

$$\begin{aligned} \{y, \{x, y\}\} &= y_\xi(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_{,\eta} - y_\eta(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_{,\xi}; \\ \{x, \{x, y\}\} &= x_\xi(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_{,\eta} - x_\eta(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_{,\xi}; \\ \{y, \{y, u\}\} &= y_\xi(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi)_{,\eta} - y_\eta(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi)_{,\xi}; \\ \{x, \{x, u\}\} &= x_\xi(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi)_{,\eta} - x_\eta(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi)_{,\xi}; \\ \{x, \{y, u\}\} &= x_\xi(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi)_{,\eta} - x_\eta(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi)_{,\eta}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

запишем уравнение (2.43) в виде

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + \tilde{a}_{22}u_{\eta\eta} + 2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{b}_{11}x_{\xi\xi} + \\ + \tilde{b}_{22}x_{\eta\eta} + 2\tilde{b}_{12}x_{\xi\eta} + \tilde{c}_{11}y_{\xi\xi} + \tilde{c}_{22}y_{\eta\eta} + \\ + 2\tilde{c}_{12}y_{\xi\eta} + F = 0.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Здесь

$$\tilde{a}_{11} = D^2(a_{11}y_\eta^2 - 2a_{12}x_\eta y_\eta + a_{22}x_\eta^2), \tag{2.46}$$

$$\tilde{a}_{22} = D^2(a_{11}y_\xi^2 - 2a_{12}y_\xi x_\xi +_{22} x_\xi^2), \tag{2.47}$$

$$2\tilde{a}_{12} = -D^2(a_{11}y_\xi y_\eta + a_{22}x_\xi x_\eta - a_{12}(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)), \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{11} = D^3(a_{11}y_\eta^2\{y,u\} + a_{22}x_\eta y_\eta\{x,u\} - 2a_{12}x_\eta y_\eta\{y,u\} - \\ - a_{22}x_\eta u_\eta(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi));\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{22} = D^3(a_{11}y_\xi^2\{y,u\} + a_{22}\{x,u\}x_\xi y_\xi - 2a_{12}\{y,u\}x_\xi y_\xi - \\ - a_{22}x_\xi u_\xi(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi));\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}2\tilde{b}_{12} = -D^3(a_{22}\{x,u\}(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) - 2a_{12}\{y,u\}(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) - \\ - a_{22}(x_\xi u_\eta + x_\eta u_\xi)(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + \\ + a_{11}\{y,u\}(y_\xi y_\eta + y_\xi y_\eta));\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{11} = -D^3(a_{11}\{y,u\}x_\eta y_\eta + a_{22}\{x,u\}x_\eta^2 + \\ + \{x,y\}(a_{11}y_\eta u_\eta - 2a_{12}x_\eta u_\eta));\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{22} = -D^3(a_{11}\{y,u\}x_\xi y_\xi + a_{22}\{x,u\}x_\xi^2 - \\ - 2a_{12}\{y,u\}x_\xi^2 + (a_{11}y_\xi u_\xi - 2a_{12}x_\xi u_\xi)\{x,y\});\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{12} = D^3(a_{11}\{y,u\}(x_\eta y_\xi + x_\xi y_\eta) + 2a_{22}\{x,u\}x_\xi x_\eta - \\ - 4a_{12}\{y,u\}x_\xi x_\eta + a_{11}(y_\xi u_\eta + y_\eta u_\xi)\{x,y\} - \\ - 2a_{12}(x_\xi u_\eta + x_\eta u_\xi)\{x,y\});\end{aligned} \tag{2.54}$$

Далее будем рассматривать для определенности уравнение гиперболического типа, для которого (2.13), (2.14) $-\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. В соответствии с (2.4), (2.20) положим

$$y_\eta = -\lambda_1 x_\eta, \quad y_\xi = -\lambda_2 x_\xi. \tag{2.55}$$

Подставляя (2.55) в (2.46), находим

$$\tilde{a}_{11} = D^2(a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1 + a_{22})x_\eta^2.$$

Полагая, в соответствии с (2.19),

$$\lambda_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12} + \sqrt{-\Delta}), \tag{2.56}$$

получим

$$\tilde{a}_{11} = 0. \tag{2.57}$$

Аналогично, выбирая

$$\lambda_2 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12} - \sqrt{-\Delta}), \tag{2.58}$$

получим

$$\tilde{a}_{22} = D^2(a_{11}\lambda_2^2 + 2a_{12}\lambda_2 + a_{22})x_\xi^2 = 0. \tag{2.59}$$

Далее подставим (2.55), (2.56), (2.58) в (2.48) – (2.54) и найдем остальные коэффициенты уравнения (2.45) в координатах (ξ, η).

Нетрудно видеть, что

$$2\tilde{a}_{12} = 4\frac{D^2}{a_{11}}(-\Delta)x_\xi x_\eta. \tag{2.60}$$

Вычислим подробно коэффициент $\tilde{b}_{11}$:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{11} = D^3[a_{11}y_\eta^2(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi) + a_{22}x_\eta y_\eta(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi) - \\ - 2a_{12}x_\eta y_\eta(y_\xi u_\eta - y_\eta u_\xi) - a_{22}x_\eta u_\eta(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)].\end{aligned} \tag{2.61}$$

Подставим в это выражение (2.55), получим

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{11} = D^3[a_{11}\lambda_1^2 x_\eta^2(-\lambda_2 x_\xi u_\eta + \lambda_1 x_\eta u_\xi) - \\ - a_{22}x_\eta^2\lambda_1(x_\xi u_\eta - x_\eta u_\xi) + 2a_{12}x_\eta^2\lambda_1(-\lambda_2 x_\xi u_\eta + \lambda_1 x_\eta u_\xi) - \\ - a_{22}x_\eta^2 u_\eta x_\xi(-\lambda_1 + \lambda_2)] = D^3[-x_\eta^2 x_\xi u_\eta(a_{11}\lambda_1^2\lambda_2 + \\ + a_{22}\lambda_1 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}(-\lambda_1 + \lambda_2)) + \\ + x_\eta^3 u_\xi(\lambda_1^3 a_{11} + a_{22}\lambda_1 + 2a_{12}\lambda_1^2)].\end{aligned} \tag{2.62}$$

Принимая во внимание (2.56), получим

$$\tilde{b}_{11} = 0. \tag{2.63}$$

Аналогично

$$\tilde{b}_{22} = 0, \tag{2.64}$$

$$2\tilde{b}_{12} = 4D^3\frac{\{y,u\}}{a_{11}}(-\Delta)^2 x_\xi x_\eta, \tag{2.65}$$

$$\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22} = 0, \quad 2\tilde{c}_{12} = 4D^3\frac{\{u,x\}}{a_{11}}(-\Delta)^2 x_\xi x_\eta. \tag{2.66}$$

Воспользуемся соотношением

$$D^{-1} = \{x,y\} = x_\xi x_\eta(-\lambda_1 + \lambda_2) = -2\frac{x_\xi x_\eta}{a_{11}}\sqrt{-\Delta} \tag{2.67}$$

и запишем коэффициенты (2.60), (2.65), (2.66) следующим образом:

$$\begin{aligned}2\tilde{a}_{12} &= -2\sqrt{-\Delta}D^2\{x,y\}, \\ 2\tilde{b}_{12} &= -2\sqrt{-\Delta}D^2\{y,u\}, \\ 2\tilde{c}_{12} &= -2\sqrt{-\Delta}D^2\{u,x\}.\end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij}$ в (2.45), находим, что уравнение (2.1) в переменных ξ, η принимает вид

$$\begin{aligned}-2\sqrt{\Delta}D^2\{x,y\}u_{\xi\eta} - 2\sqrt{-\Delta}D^2\{y,u\}x_{\xi\eta} - \\ - 2\sqrt{-\Delta}D^2\{u,x\}y_{\xi\eta} + F = 0,\end{aligned}$$

или

$$\{x,y\}u_{\xi\eta} + \{y,u\}x_{\xi\eta} + \{u,x\}y_{\xi\eta} = \frac{F}{2\sqrt{-\Delta}}\{x,y\}^2. \tag{2.68}$$

Уравнению (2.68) можно придать иную форму, введя вектор $\vec{w}$ с координатами (x,y,u). Нетрудно проверить, что уравнение (2.68) эквивалентно уравнению

$$\vec{w}_{\xi\eta}\cdot(\vec{w}_\xi \times \vec{w}_\eta) = \frac{F}{2\sqrt{-\Delta}}\{x,y\}^2 = \frac{F}{\sqrt{-\Delta}}(\vec{k}\cdot(\vec{w}_\xi \times \vec{w}_\eta))^2,$$

где $\vec{k} = (0,0,1)$.

Таким образом, гиперболическое уравнение (2.1) общего вида представлено в виде системы (2.19), (2.20), (2.68). В уравнении (2.68), и тем самым во всей системе, присутствуют лишь смешанные производные $x_{\xi\eta}$, $y_{\xi\eta}$, $u_{\xi\eta}$ искомых функций $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, $u(\xi,\eta)$. В этом смысле уравнения (2.19), (2.20), (2.68) можно рассматривать как каноническую форму гиперболического уравнения (2.1). Как нетрудно видеть, по сравнению с линейным уравнением (2.1) приведение нелинейного уравнения (2.1) к каноническому виду существенно усложняется. В линейном случае характеристики находятся независимо от решения уравнения u из сравнительно простой системы (2.19), (2.20). В нелинейном случае характеристики находятся вместе с решением u уравнения (2.1). Поэтому классификацию в нелинейном случае не следует рассматривать как подход, упрощающий процедуру нахождения решения уравнения.

2.2 Характеристики и классификация нелинейных дифференциальных уравнений

Классификацию линейных и квазилинейных уравнений, рассмотренных в п.2.1, можно распространить на нелинейные уравнения более общего вида, отправляясь от понятия характеристик.

Основную идею классификации рассмотрим на примере квазилинейного уравнения второго порядка вида (2.1)

$$F(u(x,y)) = a_{11}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + \\ + a_{22}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \tag{2.69}$$

В общем случае при интегрировании дифференциальных уравнений в решении появляются произвольные функции. Выясним, какие дополнительные условия следует присоединить к уравнению, чтобы оно имело единственное решение. Эти дополнительные условия называют *данными Коши*, или *условиями Коши*.

Рассмотрим в пространстве независимых переменных R^2 кривую Γ, заданную в неявной форме

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0. \tag{2.70}$$

Разрешив уравнение (2.70) относительно y, получим

$$y = y(x). \tag{2.71}$$

Функцию u на кривой Γ обозначим через

$$u|_\Gamma = u(x, y(x)) = u_0(x). \tag{2.72}$$

Продифференцируем (2.70), (2.72) по x, и, с учетом (2.71), получим

$$\varphi_x + y'(x)\varphi_y = 0, \tag{2.73}$$

$$u_x + u_y y'(x) = u_0'(x). \tag{2.74}$$

Здесь штрихом обозначена производная по x. Выражения (2.73), (2.74) можно записать в виде:

$$u_y = \lambda(x,y)u_x + v, \quad v = -\lambda u_0'(x), \tag{2.75}$$

$$\lambda = \frac{\varphi_y}{\varphi_x}. \tag{2.76}$$

Здесь для определенности принято $\varphi_x \neq 0$.

Обозначим координаты некоторой точки на кривой Γ через $(\bar{x},\bar{y})$, а координаты точки N в некоторой окрестности (полосе) кривой Γ через (x,y), тогда

$$x = \bar{x} + \Delta x, \quad y = \bar{y} + \Delta y. \tag{2.77}$$

Задача состоит в том, чтобы по уравнению (2.69) и данным Коши найти единственное решение в точке N. Представим решение уравнения (2.69) в точке N в виде ряда Тейлора

$$u(x,y) = u(\bar{x},\bar{y}) + u_x(\bar{x},\bar{y})\Delta x + u_y(\bar{x},\bar{y})\Delta y + \frac{1}{2}(u_{xx}(\bar{x},\bar{y})\Delta x^2 + \\ + 2u_{xy}(\bar{x},\bar{y})\Delta x\Delta y + u_{yy}(\bar{x},\bar{y})\Delta y^2) + \ldots. \tag{2.78}$$

Ряд (2.78) будет определен, если найти все производные от функции $u(x,y)$ в точке $(\bar{x},\bar{y})$ на кривой Γ. Формула (2.75) выражает $u_y|_\Gamma$ через $u_x|_\Gamma$. Поскольку производная $u_x|_\Gamma$ не определяется из каких-либо условий, ее следует задать дополнительно вместе с функцией $u|_\Gamma$ (2.72). Таким образом, в данные Коши для уравнения (2.69) следует включить условие (2.72) и

$$u_x|_\Gamma = u_1(x). \tag{2.79}$$

Продифференцируем (2.75), (2.79) по x, получим

$$u_{xy} = \lambda u_{xx} + \ldots. \tag{2.80}$$

$$u_{yy} = \lambda^2 u_{xx} + \ldots. \tag{2.81}$$

Здесь точками обозначены члены, зависящие от функций $u(x,y)$, φ и их производных первого порядка. Таким образом, с помощью данных Коши находятся производные u_{xy}, u_{yy} на кривой Γ. Величину $u_{xx}|_\Gamma$ найдем из уравнения (2.69) в предположении, что функция $u|_\Gamma$ должна удовлетворять уравнению (2.69). Подставим (2.80), (2.81) в (2.69), получим

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}(\lambda u_{xx} + \ldots) + a_{22}(\lambda^2 u_{xx} + \ldots) + \\ + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \tag{2.82}$$

Или

$$u_{xx}(a_{11} + 2a_{12}\lambda + a_{22}\lambda^2) + \tilde{f} = 0, \tag{2.83}$$

здесь $\tilde{f}$ — функция от $\bar{x}$, $\bar{y}$, u, $u_x(\bar{x},\bar{y})$, $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ и производных от φ. Величину $\tilde{f}$ можно считать известной.

Выражение

$$Q(\lambda) = a_{11} + 2a_{12}\lambda + a_{22}\lambda^2 \tag{2.84}$$

есть, по определению, *характеристическая форма* уравнения (2.69). Если $Q(\lambda) \neq 0$, то из (2.83) определяется вторая производная u_{xx} и вместе с ней u_{xy}, u_{yy}. Дифференцируя полученные выражения, найдем высшие производные и, тем самым, можем построить ряд Тэйлора (2.78). Таким образом, данными Коши, то есть дополнительными условиями, которые обеспечивают единственное решение уравнения (2.69), является задание на кривой Γ функции u и ее первой u_x.

Величина $Q(\lambda)$ определяется кривой Γ (2.69) и коэффициентами при старших производных a_{ij}, $i,j = 1,2$ уравнения (2.69).

Кривая Γ, для которой $Q(\lambda) \neq 0$, называется *свободной*. На свободной кривой данные Коши, то есть функцию u и ее производную u_x, можно задавать произвольно.

Предположим, что уравнение

$$Q(\lambda) = 0 \tag{2.85}$$

имеет вещественное решение $\lambda = \lambda^*$, здесь λ^* комплексно сопряжено с λ.

В этом случае можно определить специальный вид кривой Γ, называемой характеристической кривой, или *характеристикой*.

Чтобы сформулировать определение, запишем выражение (2.76) в виде

$$\varphi_y - \lambda\varphi_x = 0. \tag{2.86}$$

При заданном λ (2.86) представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, определяющее функцию φ. Тогда характеристическая кривая Γ, согласно определению, задается условием (2.70), в котором функция $\varphi(x, y)$ есть решение уравнения (2.86) при $\lambda = \lambda^*$.

На характеристике производная u_{xx} не может быть найдена из условия (2.83), так как коэффициент при u_{xx} обращается в нуль. Таким образом, на характеристике данные Коши не могут быть заданы произвольно. Понятие характеристики приводит к классификации уравнения (2.69), совпадающей с классификацией линейного и квазилинейного уравнения (2.1), построенной на основе приведения уравнения к каноническому виду.

Если уравнение (2.85) не имеет вещественных решений, то уравнение (2.69) имеет эллиптический тип. Эллиптическому типу соответствует положительный дискриминант $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Если уравнение (2.85) имеет два действительных отличных от нуля различных корня, то уравнение называется гиперболическим. Очевидно, для гиперболического типа $\Delta < 0$. В случае кратного вещественного корня тип уравнения (2.69) — параболический.

2.3 Система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными

Понятие характеристики позволяет классифицировать системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим квазилинейную систему уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными

$$F_j(u) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ji}u_x^i + b_{ji}u_y^i) + d_j = 0. \tag{2.87}$$

Здесь $u^i(x, y)$ есть неизвестная вектор - функция; матрицы a_{ij}, b_{ij} и вектор - функция d_i зависят от вектор - функции u^i и независимых переменных (x, y). Мы рассматриваем частный случай системы первого порядка, когда число компонент вектор - функции u равно числу уравнений в системе (2.87). Кроме того, дополнительно предположим, что $\det b_{ij} \neq 0$.

Зададим в пространстве независимых переменных $(x, y) \in R^2$ кривую Γ уравнениями (2.70), (2.71),

$$\varphi(x, y) = 0, \quad y = y(x). \tag{2.88}$$

Обозначим вектор - функцию $u^i(x, y)$ на кривой Γ через

$$u|_\Gamma^i(x, y) = u^{i'}(x, y(x)) = u_0^i(x). \tag{2.89}$$

Исследуем вопрос о существовании и единственности решения системы (2.87) с данными Коши (2.88), (2.89).

Аналогично (2.74), (2.75) находим

$$u_y^i = \lambda u_x^i + v^i, \quad v^i = -\lambda(u_0^i(x)), \tag{2.90}$$

$\lambda = \varphi_x/\varphi_y$. Подставим (2.90) в систему (2.87), получим

$$F_j(u) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ji} + \lambda b_{ji})u_x^i + \ldots = 0, \tag{2.91}$$

где точками обозначено выражение $d^j - \sum_{i=1}^m b^{ji}v^i$, определяемое условиями Коши (2.88), (2.89) на кривой Γ, которое будем считать известным. Производная u_y^i определяется через производную u_x^i и данные Коши из (2.90). Для построения решения системы (2.87) в виде ряда Тэйлора аналогичного (2.78) необходимо и достаточно найти производную u_x^i. Она однозначно определяется из (2.91), если

$$Q(\lambda) = \det(a_{ji} + \lambda b_{ji}) \neq 0. \tag{2.92}$$

Определитель (2.92) называется *характеристическим определителем* системы (2.87).

Если для данной кривой Г определитель (2.92) отличен от нуля, $Q(\lambda) \neq 0$, то кривая Г называется *свободной* для системы (2.89).

Решение системы (2.87) с данными Коши (2.89), (2.91) на свободной кривой Г единственно. Кривая Г, для которой

$$Q(\lambda) = 0, \tag{2.93}$$

называется характеристической кривой для системы (2.87).

Будем рассматривать (2.93) как уравнение относительно λ. Если для данной системы (2.87) уравнение не имеет вещественных решений, то система (2.87) называется эллиптической. Если (2.93) имеет m различных вещественных решений, то система (2.87) называется *вполне гиперболической*. На характеристической кривой Г, как и в случае одного дифференциального уравнения, данные Коши (2.89) для системы (2.87) не могут быть заданы произвольно.

Пусть $\lambda = \bar{\lambda}$ есть некоторое вещественное решение уравнения (2.93). Тогда существует отличный от нуля вектор $l = (l^i)$, такой, что

$$\sum_{i=1}^{m} l^j (a_{ji} + \lambda b_{ji}) = 0. \tag{2.94}$$

Соотношение (2.94) позволяет записать систему (2.87) в так называемом характеристическом каноническом виде

$$\sum_{i,j} l^i b_{ji} (u_y^i - u_x^i) + \sum_j l^j d_j = 0. \tag{2.95}$$

Здесь все неизвестные функции u^i дифференцируются по направлению характеристической кривой. Подчеркнем, что в нелинейном случае классификация проводится для конкретного решения, что позволяет выяснить некоторые его свойства. Однако, переход к каноническому виду в общем случае для нелинейного уравнения может оказаться затруднительным.

В качестве примера проведем классификацию линейной системы

$$\begin{aligned} u_x + u_y + \alpha v_x - u = 0, \\ v_x - u_y - v_y + u_x = 0. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Здесь α -параметр. В соответствии с обозначениями (2.87), имеем

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$\det(a_{ij} + \lambda b_{ij}) = \det \begin{pmatrix} 1+\lambda & \alpha \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} == -\lambda^2 + \lambda\alpha - \alpha + 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \alpha - 1$, $\lambda_2 = 1$. Следовательно, при $\alpha \neq 2$ система (2.96) — гиперболическая, а при $\alpha = 2$ — параболическая.

2.4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. В каком случае такое уравнение будет квазилинейным?

2. В каком случае линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными имеет гиперболический тип? Каков критерий гиперболичности аналогичного квазилинейного уравнения?

3. Какой канонический вид имеет параболическое, гиперболическое, эллиптическое линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными? Совпадает ли канонический тип эллиптического линейного и квазилинейного уравнения?

4. Дайте определение характеристик линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. В чем различие характеристик уравнений различных типов?

5. Как найти характеристики гиперболического квазилинейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого при вторых производных зависят от независимых переменных и искомой функции? Чем эта задача отличается от аналогичной задачи в линейном случае?

6. Является ли классификация квазилинейного уравнения второго порядка столь же эффективным методом исследования, как и в случае аналогичного линейного уравнения?

7. Каков канонический вид гиперболического квазилинейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого при вторых производных зависят от независимых переменных и искомой функции?

8. Какие условия называются данными Коши для дифференциального уравнения второго порядка? Каков смысл данных Коши?

9. Что такое данные Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка?

10. Дайте определение свободной кривой и характеристической кривой для дифференциального уравнения второго порядка.

11. Дайте определение свободной кривой и характеристической кривой для дифференциального уравнения второго порядка.

12. Запишите выражение для характеристического определителя квазилинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Какой вид имеет характеристическое уравнение?

13. Как определяется тип квазилинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, исходя из характеристического уравнения?

3 Нелинейное уравнение теплопроводности

3.1 Введение

Термодинамические свойства неравновесных систем характеризуются полем температуры $u(\vec{r}, t)$ в каждый момент времени t. Обозначим через l среднюю длину свободного пробега частиц среды, τ — среднее время свободного пробега, v — среднюю скорость движения частиц в среде. Понятие температуры имеет смысл в условиях локального термодинамического равновесия, то есть при

$$l \ll u/|\nabla u|, \qquad \tau \ll u/u_t. \tag{3.1}$$

Здесь $u/|\nabla u|$, u/u_t — характерная длина и время изменения температуры в среде, соответственно.

Неоднородность температурного поля порождает тепловые потоки, которые являются важнейшей составляющей физических процессов в сплошной среде. В основу теории распространения тепла положен фундаментальный результат, который носит название *закона Фурье*:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla u. \tag{3.2}$$

Здесь $\vec{q}$ — тепловой поток, κ — коэффициент теплопроводности. Например, для идеального газа, состоящего из твердых сферических молекул, кинетическая теория газов дает следующее выражение:

$$\kappa = \frac{1}{3}\rho c_V v l. \tag{3.3}$$

Здесь ρ — плотность газа, c_V — теплоемкость единицы массы газа при постоянном объеме V. Отклонение от закона Фурье, в котором $\kappa = const$, может возникнуть при больших значениях $|\nabla u|$, например, в результате воздействия на вещество сильных ударных волн, мощного лазерного излучения, пучков заряженных частиц высокой энергии. При низких температурах, когда перенос тепла осуществляется не только посредством межатомных столкновений, но и за счет излучения, закон Фурье (3.2) также нарушается.

Для описания таких явлений используют аппроксимационные формулы, например:

$$\kappa = \kappa_0 u^a \rho^b. \tag{3.4}$$

Параметры a, b зависят от механизмов переноса энергии в среде. Изменение плотности тепловой энергии в бесконечно малом объеме в окрестности точки с координатами $\vec{r}(x, y, z)$ в интервале времени $(t, t + dt)$

$$\delta Q = \frac{\partial Q(\vec{r}, t)}{\partial t} dt \tag{3.5}$$

запишем в виде

$$\delta Q = \rho c_V \delta u = \rho c_V \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} dt. \tag{3.6}$$

Здесь ρ — плотность среды, c_V — удельная теплоемкость среды. Баланс тепловой энергии в физически бесконечно малом объеме в окрестности точки $\vec{r}$ в момент времени t записывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{q} = F, \tag{3.7}$$

где F — объемная плотность источников (удельная мощность тепловых источников). Подставляя в (3.7) закон Фурье (3.2) и учитывая соотношения (3.5), (3.6), получим уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$\rho c_V \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa \nabla u) + F. \tag{3.8}$$

Если величины c_V, ρ, κ постоянны, уравнение (3.8) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{3.9}$$

где $a^2 = \kappa/(c_V \rho)$ — коэффициент температуропроводности, $f = F/(c_V \rho)$. Приведем для примера решение одномерной задачи о мгновенном плоском источнике тепла. Пусть в момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ на единице площади выделяется энергия $E_0 = \rho c_V Q_0, u(x,0) = 0$ при $x \neq 0$. Задача о влиянии мгновенного теплового источника имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = Q_0 \delta(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. В теории распространения тепла в линейной среде[1] решение этой задачи представлено в виде

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \cdot e^{-x^2/(4a^2 t)}. \tag{3.11}$$

Из условия (3.11), в частности, делается вывод о бесконечной скорости распространения тепловых возмущений.

В условиях, когда параметры среды ρ, c_V, κ или мощность источников F зависят от температуры, уравнение теплопроводности (3.8) становится квазилинейным:

$$\rho(u) c_V \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa(u) \nabla u) + F(\vec{r}, t, u). \tag{3.12}$$

Задачу с нелинейностью, входящей непосредственно в уравнение, будем называть задачей с *внутренней* нелинейностью.

Нелинейные задачи теплопроводности могут также возникать вследствие нелинейных граничных условий. Такая задача называется задачей с *внешней* нелинейностью.

Нелинейное граничное условие на поверхности S тела может иметь вид $\partial u/\partial n = Q(u, \vec{r}, t)$, где точка $\vec{r} \in S$.

Такое условие возникает, например, если отвод энергии с поверхности тела осуществляет излучение. Тогда, по закону Стефана–Больцмана $-k\partial u/\partial n = \varepsilon_0 \sigma_0 u^4$, где ε_0 – степень черноты тела, σ_0 – постоянная Стефана.

Другой пример внутренней нелинейности дает условие обтекания поверхности тела средой, при котором происходит конвективный теплообмен. Обозначим температуру поверхности через u^*. По закону Ньютона плотность теплового потока пропорциональна разности температур, $(\vec{q}\vec{n}) = \alpha(u - u^*)$, причем коэффициент теплообмена α может зависеть от температуры u.

Нелинейной задачей теплопроводности является также задача с фазовым переходом, таким, как плавление, испарение, кристаллизация. В этой задаче появляется поверхность Σ раздела фаз — фронт фазового перехода. Баланс тепла на движущемся фронте фазового перехода с температурой u^* записывается в виде $u_1(\vec{r}) = u_2(\vec{r}) = u^*$, $\vec{r} \in \Sigma$ и, кроме того, в виде

$$\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right)_{\vec{r} \in \Sigma} = q^* \rho v, \tag{3.13}$$

где k_1, k_2 — коэффициенты теплопроводности фаз среды, q^* — удельная массовая теплота фазового перехода, v — мгновенная скорость перемещения фронта в направлении нормали к Σ. Условие (3.13) называется *условием Стефана.* Так как скорость v неизвестна, то условие (3.13) нелинейно.

Получение условия (3.13) на границе раздела двух сред 1 и 2, разделенных плоскостью Σ, иллюстрирует Рис. 3.1.

[1]Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999. — 798 с. С. 231.

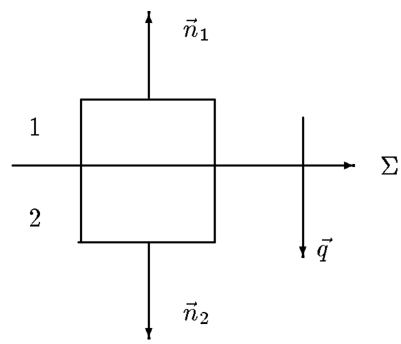

Рис. 3.1:

3.2 Задача Стефана о фазовом переходе

Рассмотрим полупространство $x > 0$, занятое твердой средой. При $t < 0$ температура всех слоев тела одинакова и равна $u_0 < u^*$, где u^* – температура плавления твердой фазы. Не уменьшая общности, можно положить $u^* = 0$. С момента $t = 0$ на границе $x = 0$ поддерживается постоянная температура $u_c > u^* = 0$ выше температуры плавления. Тогда при $t > 0$ вблизи граничной поверхности возникает слой жидкой фазы, толщина которого увеличивается с течением времени. Обозначим через $x = \xi(t)$ координату границы раздела твердой и жидкой фаз. Фронт плавления движется со скоростью $v = d\xi(t)/dt$ в сторону твердой фазы, $\xi(0) = 0$. Постановка задачи проиллюстрирована на Рис. 3.2.

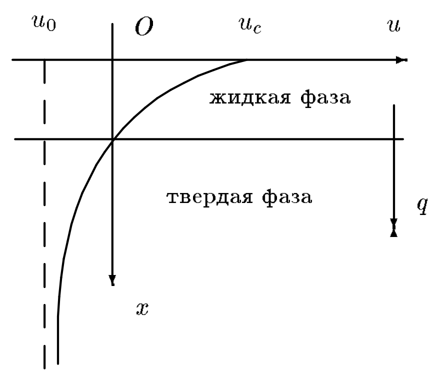

Рис. 3.2:

Считая, что свойства среды изменяются скачком при фазовом переходе, запишем уравнение теплопроводности для каждой из двух фаз

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty. \tag{3.15}$$

Здесь a_1^2, a_2^2 – коэффициенты температуропроводности жидкой и твердой фазы, соответственно. В начальный момент времени существует только твердая фаза, поэтому начальное условие задачи записывается в виде

$$u_2(x, 0) = u_0 = \text{const}, \quad x > 0. \tag{3.16}$$

Граничные условия задачи имеют вид

а) на границах области

$$u_1 = u_c = \text{const} > 0, \quad x = 0, \tag{3.17}$$

$$u_2 \to u_0 = \text{const} < 0, \quad x \to \infty; \tag{3.18}$$

б) на фронте фазового перехода

$$u_1|_{x=\xi-0} = u_2|_{x=\xi+0} = 0, \tag{3.19}$$

$$+k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi-0} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi+0} = -\rho_1 q^* \frac{d\xi}{dt}, \tag{3.20}$$

где q^* – скрытая теплота плавления, отнесенная к единице массы жидкой фазы. Знак $(-)$ в формуле (3.20) указывает на поглощение тепла при плавлении.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.21}$$

в областях (3.14), (3.15) инвариантно относительно преобразования растяжения независимых переменных

$$t \to t' = \lambda^2 t, \quad x \to x' = \lambda x, \quad u' = u, \tag{3.22}$$

где λ — произвольный вещественный параметр.

Симметрия относительно преобразований растяжения позволяет находить так называемые автомодельные решения. Рассмотрим это понятие более подробно и приведем соответствующие определения для уравнения (3.21).

Пусть преобразование растяжения

$$x' = \lambda \cdot x, \quad t' = \lambda^p \cdot t, \quad u' = \lambda^q \cdot u \tag{3.23}$$

оставляет уравнение (3.21) инвариантным. Здесь λ — параметр, p, q — заданные числа. Преобразования вида (3.23) называют также масштабными (скейлинговыми), автомодельными.

Нетрудно убедиться, что комбинации переменных x, t, u

$$\eta = \frac{x}{t^{1/p}}, \quad \frac{u}{t^{q/p}} \tag{3.24}$$

инвариантны относительно преобразования (3.23).

Функция $\eta(x,t)$, инвариантная относительно преобразования (3.23), называется *автомодельной переменной*.

Уравнение (3.21), обладающее автомодельной симметрией, имеет частные решения вида

$$u(x,t) = t^{q/p} \cdot \Theta(\eta), \tag{3.25}$$

где функция $\Theta(\eta)$ подлежит определению из уравнения (3.21). Принципиальным моментом является то, что подстановка выражения (3.25) в уравнение (3.21) (которое является уравнением в частных производных) приводит его к *обыкновенному* дифференциальному уравнению, определяющему функцию $\Theta(\eta)$, что является значительно более простой задачей.

Возвращаясь к преобразованию (3.22), находим автомодельную переменную для уравнения теплопроводности (3.21) как

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{3.26}$$

В соответствии с (3.25) будем искать автомодельные решения уравнений теплопроводности в каждой из областей (3.14), (3.15), положив, $u_{1,2} = u_{1,2}(\eta)$. Тогда уравнения (3.14), (3.15) примут вид обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_i^2 \frac{d^2 u_i}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta \frac{du_i}{d\eta} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.27}$$

Обозначив $w_i = du_i/d\eta$, из уравнения (3.27) получим

$$\frac{1}{w_i}\frac{dw_i}{d\eta} = -\frac{1}{2a_i^2}\eta. \tag{3.28}$$

Интегрирование уравнения (3.28) дает

$$w_i(\eta) = \tilde{B}_i \exp(-\eta^2/(4a_i^2)), \tag{3.29}$$

где $\tilde{B}_i$ — постоянная интегрирования. Подставляя в (3.29) $w_i = du_i/d\eta$ и интегрируя, находим общее решение уравнения (3.27)

$$u_i(\eta) = A_i + \tilde{B} \int_0^\eta \exp(-\xi^2/(4a_i^2))d\xi = A_i + B_i \Phi\Big(\frac{\eta}{2a_i}\Big).$$

Здесь

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad A_i, B_i = \text{const}.$$

Специальная функция $\Phi(z) \equiv \text{erf}(z)$ называется интегралом ошибок. Свойства функции $\Phi(z)$ можно найти в соответствующей справочной литературе по специальным функциям[2].

В частности, $\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 1$. Для малых z

$$\Phi(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(z - \frac{z^3}{1! \cdot 3} + \frac{z^5}{2! \cdot 5} + \ldots\Big),$$

а при больших z

$$\Phi(z) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z}\Big(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z^2)^3} + \ldots\Big).$$

Подставляя сюда выражение (3.26), запишем найденные решения в виде

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= A_1 + B_1 \Phi\Big(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\Big), \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t), \\ u_2(x,t) &= A_2 + B_2 \Phi\Big(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\Big), \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Подчиним решение (3.30) граничным условиям. Условия (3.17), (3.18) дают

$$A_1 = u_c, \quad A_2 + B_2 = u_0, \tag{3.31}$$

причем условие (3.16) также выполнено. На фронте фазового перехода при $x = \xi(t)$ из (3.30) имеем

$$A_1 + B_1 \Phi\Big(\frac{\xi(t)}{2a_1\sqrt{t}}\Big) = 0, \tag{3.32}$$

$$A_2 + B_2 \Phi\Big(\frac{\xi(t)}{2a_2\sqrt{t}}\Big) = 0. \tag{3.33}$$

Каждое из этих условий может быть выполнено при любых t и постоянных A_i, B_i лишь при условии

$$\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}} = \alpha = \text{const}.$$

Таким образом, закон движения фронта фазового перехода имеет вид

$$\xi(t) = \alpha\sqrt{t}, \tag{3.34}$$

а скорость движения фронта

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}, \tag{3.35}$$

[2] Янке Е., Эмде., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. С. 68.

которая уменьшается со временем по мере увеличения области расплавленной фазы. Из (3.31), (3.32), (3.33),(3.34) найдем постоянные интегрирования A_i, B_i в решении (3.30).

$$A_1 = u_c, \quad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi(\alpha/2a_1)}, \tag{3.36}$$

$$A_2 = \frac{u_0\Phi(\alpha/2a_2)}{\Phi(\alpha/2a_2)-1}, \quad B_2 = \frac{u_0}{1-\Phi(\alpha/2a_2)}. \tag{3.37}$$

Константу α определим из условия Стефана (3.20) на фронте фазового перехода. Принимая во внимание соотношение

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2},$$

а также (3.26), (3.34), (3.36), (3.37), запишем условие (3.20) в виде

$$k_1\frac{u_c}{a_1}\frac{e^{-\alpha^2/(4a_1^2)}}{\Phi(\alpha/2a_1)} + k_2\frac{u_0 e^{-\alpha^2/(4a_2^2)}}{a_2[1-\Phi(\alpha/2a_2)]} = \rho_1 q^*\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3.38}$$

Можно показать, что существует единственное положительное решение α этого трансцендентного уравнения.

В частном случае, когда начальная температура слоев твердой фазы равна температуре фазового перехода, $u_0 = 0$, из (3.36), (3.37) следует

$$A_1 = u_c, \quad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi(\alpha/2a_1)}, \quad A_2 = B_2 = 0.$$

В этом случае уравнение (3.38) принимает простой вид

$$\beta\Phi(\beta)e^{\beta^2} = N, \tag{3.39}$$

где $\beta = \alpha/2a_1$, $N = u_c c_1/(q^*\sqrt{\pi})$. Здесь учтено выражение для коэффициента температуропроводности $a^2 = k/\rho c_V$, через c_1 обозначена теплопроводность жидкой фазы.

Решение трансцендентного уравнения (3.39) можно найти численным методом или графически.

При малых β имеем: $e^{\beta^2} \approx 1$, $\Phi(\beta) \approx 2\beta/\sqrt{\pi}$, из (3.39) следует $2\beta^2/\sqrt{\pi} = N$. Подставляя сюда $\beta = \alpha/2a_1$, находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{2u_c c_1 a_1^2}{q^*}}.$$

3.3 Распространение тепла в нелинейной среде

Распространение тепла от мгновенного сосредоточенного источника

В качестве примера задачи с внутренней нелинейностью рассмотрим распространение тепла от мгновенного сосредоточенного источника в среде со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности (3.4) от температуры:

$$k = k_0 u^\sigma. \tag{3.40}$$

Пусть в начальной момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ на единицу площади мгновенно выделяется количество теплоты E_0. При отсутствии объемных тепловых источников распространение тепла от мгновенного сосредоточенного источника моделируется следующей задачей Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial}{\partial x}(u^\sigma\dfrac{\partial u}{\partial x}), \quad t > 0, x \in R^1, \\ u(x,0) = Q\delta(x). \end{cases} \tag{3.41}$$

Здесь $a^2 = k_0/\rho c_V$ — коэффициент температуропроводности,
$Q = E_0/(\rho c_V)$. Сходимость $u(x,t)$ к дельта - функции при $t \to 0$ понимается как слабая сходимость

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)u(x,t)dx = Qf(0)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. От такого источника в обе стороны от точки $x = 0$ вдоль оси x распространяются тепловые возмущения. Из физической постановки задачи можно положить, что

$$u \to 0, \quad u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{3.42}$$

Интегрируя уравнение теплопроводности (3.41), получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = a^2\left\{u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x\to+\infty} - u^\sigma \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x\to-\infty}\right\} = 0.$$

Отсюда с учетом начального условия получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = Q = \text{const}, \quad \text{при} \quad t \geq 0. \tag{3.43}$$

В задачу входят параметры Q, a^2, единицы измерения которых в системе СИ определяются как $[Q] = \text{град} \cdot \text{М}$, $[a^2] = \text{М}^2 \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{град}^{-\sigma}$. Чтобы найти автомодельную переменную, составим безразмерную комбинацию

$$\eta = \frac{x}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}, \qquad \nu = \frac{1}{\sigma+2}. \tag{3.44}$$

Комбинация, имеющая размерность температуры, имеет вид

$$T = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu. \tag{3.45}$$

Решение уравнения (3.41) в соответствии с (3.25) будем искать в виде

$$u(x,t) = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \Theta(\eta). \tag{3.46}$$

Производные функции (3.46) равны

$$\begin{aligned} u_t &= -\nu \frac{Q^{2\nu}}{a^{2\nu}} t^{-\nu-1}\Theta + \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \Theta' \frac{x}{(Q^\sigma a^2)^\nu}(-\nu)t^{-\nu-1}, \\ u_x &= \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \Theta' \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Здесь штрихом обозначена производная по η. Из (3.44) также следует формула преобразования производной

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{3.48}$$

Подставляя выражения (3.44), (3.46)–(3.48) в (3.41), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $\Theta(\eta)$:

$$-\nu\Theta - \nu\eta\Theta' = (\Theta^\sigma\Theta')'. \tag{3.49}$$

Интегрируя уравнение (3.49), получим

$$-\nu\eta\Theta = \Theta^\sigma\Theta' + c. \tag{3.50}$$

Здесь c — постоянная интегрирования. В силу граничных условий (3.42) имеем $\Theta^\sigma\Theta' \to 0$ при $|\eta| \to \infty$. Переходя в (3.50) к пределу $|\eta| \to \infty$, находим, что $c = 0$. В результате уравнение (3.50) принимает вид

$$\Theta^\sigma\Theta' = -\nu\eta\Theta. \tag{3.51}$$

Уравнение (3.51) имеет особое решение $\Theta = 0$. Если $\Theta \neq 0$, то уравнение (3.51) после интегрирования приводится к виду

$$\Theta^\sigma = -\frac{\sigma}{2}\nu\eta^2 + \mathrm{const}.$$

Подставим в это выражение (3.44) и переобозначим постоянную интегрирования, получим

$$\Theta^\sigma = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\eta_0^2 - \eta^2).$$

Из условия вещественности и положительности температуры можем записать

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\eta_0^2 - \eta^2)\right]^{1/\sigma}, & |\eta| < \eta_0, \\ 0, \qquad |\eta| \geq \eta_0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Здесь η_0 — постоянная. В области $|\eta| \geq \eta_0$ функция $\Theta(\eta) \equiv 0$. Найдем η_0 из условия (3.43), которое для функции Θ принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\eta)d\eta = \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \Theta(\eta)d\eta = 1.$$

Подставим в это выражение (3.52), получим

$$2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} \int\limits_0^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2)^{1/\sigma} d\eta = 1,$$

откуда

$$2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} \eta_0^{(\sigma+2)/\sigma} I(\sigma) = 1. \tag{3.53}$$

Здесь

$$I(\sigma) = \int\limits_0^1 (1 - \xi^2)^{1/\sigma} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(1 + 1/\sigma)}{\Gamma(3/2 + 1/\sigma)}, \tag{3.54}$$

$\xi = \eta/\eta_0$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Из (3.53) выразим постоянную η_0:

$$\eta_0 = \left\{2I(\sigma)\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma}\right\}^{-\sigma/(\sigma+2)}. \tag{3.55}$$

Подставляя полученные выражения в (3.46), с учетом (3.55) найдем поле температур $u(x,t)$ в следующем виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} u(t)\left[1 - \left(\dfrac{x}{x_0(t)}\right)^2\right]^{1/\sigma}, & |x| < x_0(t), \\ 0, & |x| \geq x_0(t). \end{cases} \tag{3.56}$$

Здесь

$$u(t) = \eta_0^{2/\sigma} Q^{2/(\sigma+2)} \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} (a^2 t)^{-1/(\sigma+2)}, \tag{3.57}$$

движение фронта задается выражением

$$x_0(t) = \eta_0 Q^{\sigma/(\sigma+2)} (a^2 t)^{1/(\sigma+2)}. \tag{3.58}$$

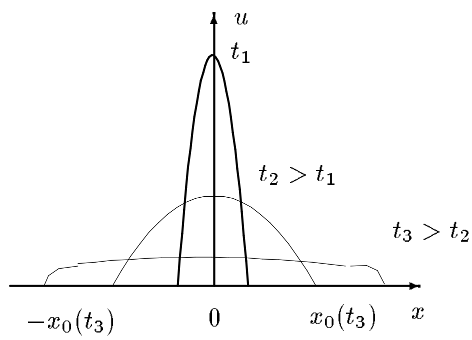

Рис. 3.3:

Решение (3.56) описывает распространение *тепловой волны* от мгновенного теплового источника, сосредоточенного в начальный момент времени в плоскости $x = 0$. Положение фронтов волны в каждый момент времени определяется координатами $x = \pm x_0(t)$. Распространение фронта тепловой волны иллюстрирует Рис.3.3. Скорость движения фронта конечна и равна

$$v(t) = \frac{dx_0}{dt} = \frac{a^2 \eta_0}{\sigma+2} Q^{\sigma/(\sigma+2)} (a^2 t)^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)} \sim t^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)}. \tag{3.59}$$

Скорость $v(t)$ уменьшается с течением времени, но тепловое возмущение проникает в нелинейную среду неограниченно, так как $x_0(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Если $\sigma > 1$, то градиент температуры неограниченно растет, $|\partial u/\partial x| \to \infty$ при $x \to \pm x_0 \mp 0$. Несмотря на неограниченный рост градиента температуры на крутом фронте тепловой волны, плотность теплового потока $q = -k_0 u^\sigma \partial u/\partial x$ стремится к нулю при приближении к тепловому фронту со стороны теплового возмущения, $x \to x_0(t) - 0$, что обеспечивает выполнение на фронте условия непрерывности теплового потока. При $\sigma \to 0$ из (3.55) находим $\eta_0 \to \infty$, и из (3.56) следует

$$u(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}.$$

Это выражение описывает распространение тепла от мгновенного точечного источника *в линейной среде* с коэффициентом теплопроводности, равным k_0. Из (3.59) в рассматриваемом случае получаем $v \to \infty$. Этот результат доказывает бесконечность скорости распространения теплового возмущения в линейном случае.

Режим с "обострением"

Распространение тепла в нелинейной среде может приводить к пространственной локализации тепловых возмущений, когда фронт тепловой волны остается неподвижным в течение некоторого конечного интервала времени. Механизмы локализации могут быть различными. В частности, локализация возникает, если температура на границе неограниченно возрастает за конечный промежуток времени. Такой режим называют режимом с "обострением", а соответствующий промежуток времени — временем обострения.

Режим с "обострением" иллюстрирует следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}), \\ u(x,0) = A_0 \tau^{-1/\sigma} \left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, \quad x > 0, \\ u(0,t) = A_0(\tau - t)^{-1/\sigma}, \quad 0 < t < \tau. \end{cases} \tag{3.60}$$

Здесь A_0, σ, x_0 — вещественные постоянные параметры задачи. При $t \to \tau$ $u(x,0) \to \infty$. В соответствии с приведенным определением τ есть время обострения процесса разогрева нелинейной среды. Решение задачи (3.60) будем искать в разделенных переменных

$$u(x,t) = U(x)T(t), \tag{3.61}$$

где $U(x)$ $T(t)$ — функции указанных переменных. Подставив (3.61) в (3.60) и разделив переменные, получим

$$\frac{\dot{T}}{a^2 T^{\sigma+1}} = \frac{(U^\sigma U')'}{U} = \lambda, \tag{3.62}$$

где λ —константа разделения, $\dot{T} = dT(t)/dt$, $U' = dU(x)/dx$. Подставим (3.61) в начальные и граничные условия задачи (3.60), получим

$$T(0)U(x) = A_0 \tau^{-1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, \tag{3.63}$$

$$T(t)U(0) = A_0(\tau - t)^{-1/\sigma}, \tag{3.64}$$

откуда

$$T(0)U(0) = A_0 \tau^{-1/\sigma}. \tag{3.65}$$

Из (3.65) следует, $T(0) = \mu\tau^{-1/\sigma}$, $U(0) = \mu^{-1}A_0$, где μ — произвольная постоянная. Поскольку функции U и T входят в решение (3.61) в виде произведения, в котором μ сокращается, можно, не уменьшая общности, положить $\mu = 1$. Тогда из (3.63), (3.64) следует

$$U(x) = A_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, \tag{3.66}$$

$$T(t) = (\tau - t)^{-1/\sigma}. \tag{3.67}$$

Подставим (3.66), (3.67) в (3.62) и найдем, что $\lambda = 1/\sigma a^2$, а функция $u(x,t)$ вида (3.61), (3.66), (3.67) является решением краевой задачи (3.60) в области $0 < x_0 < x_0$, если параметр x_0 имеет следующий вид:

$$x_0 = a\left(2A_0^\sigma(\sigma + 2)\sigma^{-1}\right)^{1/2}. \tag{3.68}$$

Решение задачи (3.60) на всей полуоси x записывается в виде

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0(\tau - t)^{-1/\sigma} \left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, \quad 0 \le x \le x_0, \ 0 \le t \le \tau, \\ 0, \quad x \ge x_0, \quad 0 \le t \le \tau. \end{cases} \tag{3.69}$$

Рис. 3.4 иллюстрирует распределение температуры в последовательные моменты времени.

Из графиков видно, что на фронте температурного поля $x = x_0$ равны нулю температура и тепловой поток. Фронт разделяет нагретую $(x \le x_0)$ и холодную $(x \ge x_0)$ области при всех $0 \le t \le \tau$. Фронт остается неподвижным при $t \to \tau$, поэтому решение (3.69) можно рассматривать как остановившуюся на конечное время тепловую волну. Разумеется, рост температуры в реальной системе будет продолжаться до тех пор, пока в действие не вступят факторы, не отраженные в рассматриваемой модели и процесс выйдет за пределы применимости модели.

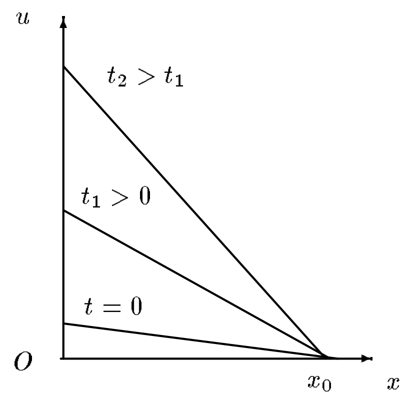

Рис. 3.4:

Перенос тепла в условиях релаксации теплового потока

Закон Фурье (3.2), как отмечено в параграфе 3.1, справедлив, когда градиенты температуры в среде относительно малы, а процесс теплопереноса медленный,

$$\tau\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \ll 1, \quad l|\nabla u| \ll 1, \tag{3.70}$$

где τ — время, l — длина свободного пробега частиц в среде, осуществляющих перенос тепла, u — температура. Однако, в быстро протекающих физических процессах условия (3.70) могут нарушаться. Например, в высокотемпературной плазме, возникающей, в частности, при отжиге полупроводника импульсным излучением мощного лазера, перенос тепла определяется движением наиболее легких и подвижных частиц — электронов.

Тепловой поток, вычисленный по закону Фурье (3.2) при больших градиентах температурного поля может превышать поток тепла, переносимого электронами даже в предположении, что все электроны движутся в одном направлении. Удельный тепловой поток в этом (физически не реализуемом) случае равен

$$q_{max} \approx n_e k u_e \sqrt{\frac{k u_e}{m_e}}. \tag{3.71}$$

Здесь n_e — концентрация электронов, k — постоянная Больцмана, u_e — температура электронного газа, m_e — масса электрона, величина $\sqrt{k u_e/m_e}$ — есть средняя скорость электрона.

Электроны в плазме взаимодействуют между собой и с другими частицами плазмы, поэтому величина электронного теплового потока в плазме значительно меньше максимально возможного значения (3.71). Таким образом, модель теплопроводности, построенная на законе Фурье оказывается неадекватной, так как не учитывает релаксации теплового потока.

Одна из простых моделей, учитывающих релаксацию, строится на уравнении для теплового потока[3]

$$\tau\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} = -\kappa\nabla u. \tag{3.72}$$

Если $\tau\dfrac{\partial \vec{q}}{\partial t} \ll 1$, то уравнение (3.72) переходит в закон Фурье (3.2). Релаксация теплового потока описывается выражением $\tau\partial\vec{q}/\partial t$. Уравнение (3.72) было предложено еще Максвеллом и используется в различных физических теориях, например, при описании распространения тепловых импульсов в твердых телах при низких температурах.

Приведем простейший молекулярно-кинетический анализ, приводящий к уравнению (3.72).

[3]Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики./Отв. ред. акад. А.А. Самарский, чл.-корр. АН РАН С.П. Курдюмов, к.ф.-м.н. В.И. Мажукин. М.: Наука, 1987. — 280 с.

Рассмотрим в некоторой точке среды плоскую площадку, перпендикулярную направлению теплового потока $\vec{q}$. Пусть v — средняя тепловая скорость частиц, τ — время свободного пробега. Обозначим через x координату вдоль оси, проходящую перпендикулярно площадки слева направо. На площадку падают частицы, находящиеся на расстоянии длины свободного пробега $\lambda = v\tau$ от нее, скорость которых направлена в сторону площадки. Считая равновероятными все шесть возможных направлений относительно площадки (вверх и вниз, вперед и назад, вправо и влево), запишем поток частиц, движущихся в сторону площадки справа от нее в виде

$$j_{\text{прав.}} = -\frac{1}{6}nv,$$

где n — концентрация частиц, v — средняя тепловая скорость частиц. Поток энергии, переносимый этими частицами через площадку равен

$$q_{\text{прав.}} = -\frac{1}{6}nvm\varepsilon_{\text{прав.}},$$

где m — масса частицы, $\varepsilon_{\text{прав.}}$ — удельная (на единицу массы) энергия частиц, находящихся справа от площадки. Аналогично,

$$q_{\text{лев.}} = \frac{1}{6}nvm\varepsilon_{\text{лев.}},$$

Суммарный поток энергии через площадку равен

$$q = q_{\text{лев.}} + q_{\text{прав.}} = \frac{m}{6}nv(\varepsilon_{\text{лев.}} - \varepsilon_{\text{прав.}}). \tag{3.73}$$

Удельная энергия частиц в среде различна в различных точках в различные моменты времени, вследствие чего и возникают тепловые потоки, $\varepsilon_{\text{лев.}} = \varepsilon_{\text{лев.}}(\vec{r}, t)$, $\varepsilon_{\text{прав.}} = \varepsilon_{\text{прав.}}(\vec{r}, t)$. Тогда изменение энергии вдоль оси x в первом приближении равно

$$\varepsilon_{\text{лев.}} = \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\lambda, \quad \varepsilon_{\text{прав.}} = \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\lambda,$$

где ε — энергия на площадке.

Выразим тепловую энергию через температуру —

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = c_V\frac{\partial u}{\partial x},$$

где c_V — удельная теплоемкость. Тогда из (3.73) получим закон Фурье

$$q = -\frac{m}{6}nv2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\lambda = -\frac{m}{3}nv\lambda c_V\frac{\partial u}{\partial x} = -\kappa\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.74}$$

где $\kappa = \dfrac{m}{3}nv\lambda c_V$ — коэффициент теплопроводности. При выводе закона Фурье (3.74) предполагалось, что частицы, проходящие через площадку, достигают ее мгновенно.

Поток тепла (3.74) будет перенесен через площадку не в момент времени t, когда температура слева и справа от площадки были $u_{\text{лев.}}$, $u_{\text{прав.}}$, а через промежуток τ, равный времени свободного пробега. Поэтому (3.74) следует записать в виде

$$-\kappa\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = q(x, t+\tau) = q(x,t) + \tau\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}, \tag{3.75}$$

что совпадает с (3.72).

Простейшую модель переноса тепла, в которой закон Фурье (3.2) заменен соотношением (3.75), записывается (в одномерном случае) в виде

$$c_V\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.76}$$

$$\tau \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + \kappa \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q(x,t) = 0. \tag{3.77}$$

Коэффициент теплопроводности κ и время релаксации теплового потока τ могут зависеть от температуры u.

Система (3.76), (3.77) описывает ряд различных физических явлений. В линейном случае при $\kappa = \mathrm{const}$, $\tau = \mathrm{const}$ из (3.76), (3.77) получаем, дифференцируя (3.76) по t, а (3.77) — по x:

$$c_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} = 0,$$

$$\tau \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Отсюда

$$\tau c_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_V \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\kappa}{\tau c_V} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{3.78}$$

Уравнение (3.78) называется "телеграфным уравнением", а также гиперболическим уравнением теплопроводности. Уравнение (3.78) имеет решения волнового типа.

Рассмотрим распространение тепла в нелинейной среде с учетом релаксации, в которой

$$\kappa = \kappa_0 u^a, \quad \tau = \tau_0 u^{a_1}, \quad c_V = \mathrm{const} . \tag{3.79}$$

Будем искать решение системы (3.76), (3.77), (3.79) в виде волны $u = u(x - Vt)$, $q = q(x - Vt)$, бегущей со скоростью V по постоянному фону, который характеризуется постоянным значением температуры u_0 и нулевым значением потока q. Заметим, что при $u = \mathrm{const}$, $q \neq 0$ не выполняется уравнение (3.77). В этих предположениях система (3.76), (3.77) имеет вид

$$-c_V V u' + q' = 0, \tag{3.80}$$

$$-V \tau_0 u^{a_1} q' + \kappa_0 u^a u' + q = 0. \tag{3.81}$$

Здесь $u = u(\xi)$, $q = q(\xi)$, $u' = du(\xi)/d\xi$, $q' = dq/d\xi$, $\xi = x - Vt$.

Уравнение (3.80) интегрируется:

$$q = V c_V (u(\xi) - u_0). \tag{3.82}$$

Подставим (3.82) в (3.72), получим уравнение первого порядка

$$u' \frac{c_V V^2 \tau_0 u^{a_1} - \kappa_0 u^a}{c_V V (u - u_0)} = 1, \tag{3.83}$$

из которого температура u как функция переменной ξ находится квадратурой.

Режимы распространения тепла, описываемые уравнением (3.83), существенно отличаются при различных соотношениях между значениями параметров $c_V V$, $V\tau_0$, κ_0, a, a_1, u_0. Не исследуя подробно все особенности этих режимов, рассмотрим их общее свойство при упрощающем предположении $u_0 = 0$. В этом случае уравнение (3.83) легко интегрируется и дает

$$\frac{V \tau_0}{a_1} u^{a_1} - \frac{\kappa_0}{a c_V V} u^a = \xi - \xi_0, \tag{3.84}$$

где ξ_0 — постоянная интегрирования, имеющая смысл начального положения бегущей волны. Без потери общности положим $\xi_0 = 0$. Соотношение (3.84) определяет зависимость $\xi = \xi(u)$. Будем считать для определенности $a > a_1$. Такой выбор оправдан, например, тем, что значения

$a = 5/2$, $a_1 = 3/2$ соответствуют модели, описывающей полностью ионизированную плазму. При сделанных предположениях из (3.84) следует, что при $\xi = 0$

$$u = u_1 = \left(\frac{V^2 \tau_0}{a_1} \frac{a}{c_V} \right)^{a-a_1}.$$

В точке

$$u = u_m = \left(\frac{V^2 \tau_0}{a_1} \right)^{a-a_1}.$$

функция $\xi(u)$ имеет максимум. Качественный характер зависимости $u(\xi)$ иллюстрирует Рис.3.5. Поскольку $\xi = x - Vt$, то развитию физического процесса во времени t (t возрастает) могут

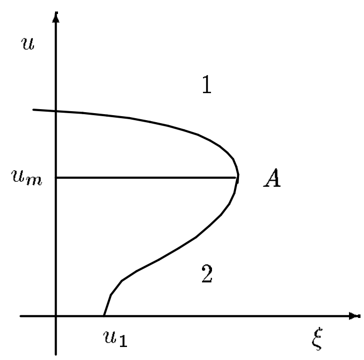

Рис. 3.5:

соответствовать убывающие значения ξ. Этим значениям на Рис.3.5 отвечают две ветви (1 и 2) функции $u(\xi)$, исходящие из общей точки A. Данный пример иллюстрирует одну из характерных особенностей нелинейных процессов — ветвление решений нелинейных уравнений.

Более подробное исследование решений уравнения (3.83) рассмотрено в работе[4].

3.4 Контрольные вопросы

1. При каких условиях имеет смысл понятие поля температуры в сплошной среде?
2. Сформулируйте основной закон распространения тепла.
3. В каких случаях нарушается закон Фурье?
4. Запишите уравнение баланса тепловой энергии в заданной точке сплошной среды и в заданный момент времени.
5. Объясните понятия внутренней и внешней нелинейности. Приведите примеры.
6. Сформулируйте граничное условие в задаче теплопроводности с фазовым переходом. Чем отличаются граничные условия в случае кристаллизации и в случае плавления?
7. Объясните понятия автомодельной переменной и автомодельного решения.
8. Запишите уравнение фронта фазового перехода в одномерной задаче Стефана о фазовом переходе.

[4]Леванов Е.И., Сотский Е.Н. Теплоперенос с учетом релаксации теплового потока./В кн. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики./Отв. ред. акад. А.А. Самарский, чл.-корр. АН РАН С.П. Курдюмов, к.ф.-м.н. В.И. Мажукин. М.: Наука, 1987. С. 155-190.

9. Объясните понятие тепловой волны. В чем различие между тепловой волной и волной упругости?
10. Возникает ли тепловая волна при распространении тепла в линейной среде?
11. Какой режим распространения тепла называется режимом с "обострением"?
12. Объясните понятие "время обострения".
13. При каких условиях следует учитывать релаксацию теплового потока?
14. Составьте уравнение баланса тепловых потоков с учетом релаксации теплового потока.
15. Может ли распространяться локализованное тепловое возмущение в условиях релаксации теплового потока?
16. Объясните понятие ветвления решений нелинейного уравнения на примере модели распространения тепла с учетом релаксации теплового потока.

4 Системы типа "реакция - диффузия"

4.1 Диссипативные структуры в нелинейных системах

В нелинейных неравновесных системах спонтанно или вынужденно могут образовываться пространственно неоднородные состояния. Такие состояния называют *диссипативными структурами* (ДС). Спонтанное образование и эволюцию ДС называют *самоорганизацией*. Самоорганизация обусловлена коллективными (кооперативными) эффектами в неравновесных системах. Область науки, изучающая эти явления, называется *синергетикой*. Из анализа многих задач следует, что возникновение ДС связано с нарастанием флуктуаций определенного вида при некоторых критических состояниях системы. Другими словами, рост определенных флуктуаций в условиях потери устойчивости системы приводит к переходу системы из одного возможного устойчивого состояния в другое. "Выбор" того или иного устойчивого состояния обусловлен видом растущей флуктуации. Образование ДС в однородных распределенных многокомпонентных взаимодействующих (активных) средах выражается в виде расслоения однородного состояния. Причиной возникновения ДС является наличие положительной обратной связи по одной компоненте (называемой *активатором*) и отрицательной обратной связи по другой компоненте (называемой *ингибитором*). Классическими примерами ДС является образование страт в газовом разряде, образование ячеек Бенара в подогреваемой вязкой жидкости.

Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух пространственно распределенных компонент, описываемых параметрами u и v, соответственно. Например, u, v могут иметь смысл концентраций веществ. По одному параметру, активатору u, имеется положительная обратная связь. Это означает, что положительное изменение параметра u приводит к его дальнейшему увеличению. Рост активатора контролируется второй компонентой системы v — ингибитором. ДС образуются вследствие баланса процессов активации и ингибирования в условиях, когда характеристика масштаба процесса ингибирования L много больше характеристики масштаба активирования l, $L \gg l$. В этих условиях ингибитор не может подавлять локальные нарастания активатора, но может "справиться" с активатором на больших масштабах.

Существует несколько механизмов образования ДС и соответствующих теорий, которые зависят как от природы системы, так и от ее геометрии. Для систем с самоорганизацией характерно ее нахождение в одном из устойчивых стационарных состояний. Если параметры системы изменять, то при приближении к критическому значению, когда система теряет устойчивость, состояние системы может измениться за счет флуктуаций. Поэтому для описания нелинейных систем важной задачей является *нахождение стационарных состояний и анализ устойчивости* этих состояний.

4.2 Устойчивость стационарных состояний

Рассмотрим систему, состояние которой определяется ее объемными свойствами и не зависят от размеров системы и условий на ее границе [5].

Во многих физических, химических, биологических и других системах свойства дальнодействия определяются процессами диффузии. Простая модель такой системы может быть построена на основе уравнений

$$\tau_u \frac{\partial u}{\partial t} = l^2 \Delta u - q(u, v, A), \tag{4.1}$$

$$\tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = L^2 \Delta v - Q(u, v, A), \tag{4.2}$$

которые называют системой уравнений типа "реакция - диффузия". Здесь функции u, v описывают активатор и ингибитор, соответственно. Для определенности можно полагать, что u и v

[5] В данном пункте мы следуем в основном работе: Кернер Б.С., Осипов В.В. Самоорганизация в активных распределенных системах// Успехи физических наук. 1990. Т.160, 9. С. 1 - 73.

— концентрации веществ; τ_u, τ_v, l, L — характерные времена и масштабы изменения активатора и ингибитора; A — параметр, управляющий поведением системы. Наличие отрицательной обратной связи по ингибитору и положительной по активатору при данном значении параметра A означает, что

$$q_u = \frac{\partial q}{\partial u} < 0, \quad Q_v = \frac{\partial Q}{\partial v} > 0. \tag{4.3}$$

Пусть система находится в некотором стационарном и однородном состоянии $u = u_h = \text{const}$, $v = v_h = \text{const}$. Это состояние определяется алгебраической системой

$$q(u_h, v_h, A) = 0, \quad Q(u_h, v_h, A) = 0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим физическую систему, для которой уравнения (4.4) имеют единственное решение $u_h = u_h(A)$, $v_h = v_h(A)$ при заданном значении параметра A. Условием единственности по теореме о неявных функциях является неравенство нулю якобиана, $J = q_u Q_v - q_v Q_u \neq 0$.

Решение u_h, v_h можно получить следующим образом. Определим преобразование от переменных (u, v) к некоторым новым переменным $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ по формулам

$$\mathcal{U} = q(u, v, A), \quad \mathcal{V} = Q(u, v, A). \tag{4.5}$$

Преобразование (4.5) обратимо, если якобиан отличен от нуля,

$$J = \begin{vmatrix} q_u & q_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix} = q_u Q_v - q_v Q_u \neq 0, \tag{4.6}$$

и сохраняет ориентацию, если

$$J = q_u Q_v - q_v Q_u > 0. \tag{4.7}$$

Формулы обращения преобразования (4.5) имеют вид

$$u = u(\mathcal{U}, \mathcal{V}, A),$$

$$v = v(\mathcal{U}, \mathcal{V}, A).$$

При выполнении этих условий стационарное однородное состояние системы описывается выражениями

$$\begin{aligned} u_h &= u(0, 0, A) = u_h(A), \\ v_h &= v(0, 0, A) = v_h(A). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Система, для которой зависимость $u_h(A), v_h(A)$ однозначна, называется *моностабильной*.

Исследуем устойчивость стационарного однородного состояния $u_h(A)$, $v_h(A)$. С этой целью будем искать решение системы (4.1), (4.2) в окрестности стационарного однородного решения (4.8), полагая

$$u = u_h + \delta u, \quad v = v_h + \delta v. \tag{4.9}$$

Подставим (4.9) в (4.1), (4.2) и разложим полученные выражения по δu, δv, получим систему в вариациях для системы (4.1), (4.2):

$$\tau_u \frac{\partial \delta u}{\partial t} = l^2 \Delta \delta u - q_u(u_h, v_h, A)\delta u - q_v(u_h, v_h, A)\delta v, \tag{4.10}$$

$$\tau_v \frac{\partial \delta v}{\partial t} = l^2 \Delta \delta v - Q_u(u_h, v_h, A)\delta u - Q_v(u_h, v_h, A)\delta v. \tag{4.11}$$

Система (4.10), (4.11) уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами имеет решения вида

$$\delta u = e_1 e^{-\gamma t + i(\vec{k}\vec{r})}, \tag{4.12}$$

$$\delta v = e_2 e^{-\gamma t + i(\vec{k}\vec{r})}. \tag{4.13}$$

Здесь e_1, e_2 — постоянные, параметр γ в общем случае может быть комплексным. Параметры γ, $\vec{k}$ находятся из условия существования решения системы (4.10), (4.11). Если $\mathrm{Re}\gamma < 0$, то исследуемое стационарное однородное состояние (4.8) неустойчиво, в противном случае оно устойчиво.

Подставим (4.12), (4.13) в (4.10), (4.11), получим

$$\begin{aligned} \gamma\tau_u e_1 &= l^2k^2e_1 + q_u e_1 + q_v e_2, \\ \gamma\tau_v e_2 &= L^2k^2e_2 + Q_u e_1 + Q_v e_2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $k^2 = (\vec{k}\cdot\vec{k})$. Запишем эту систему в матричной форме

$$(A - \gamma I)\vec{e} = 0, \tag{4.15}$$

где I — единичная матрица порядка (2×2),

$$A = \begin{pmatrix} (l^2k^2 + q_u)\tau_u^{-1} & q_v\tau_u^{-1} \\ Q_u\tau_v^{-1} & (L^2k^2 + Q_v)\tau_v^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

$\vec{e} = (e_1, e_2)^T$. Нетривиальные решения уравнений (4.12), (4.13) существуют, если

$$\det(A - \gamma I) = 0. \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) является характеристическим для системы (4.10), (4.11) и определяет характеристические значения параметра γ. Явные выражения для характеристических значений γ получим, подставляя (4.16) в (4.17). Обозначим

$$f = \tau_v(l^2k^2 + q_u) + \tau_u(L^2k^2 + Q_v), \tag{4.18}$$

$$g = (l^2k^2 + q_u)(L^2k^2 + Q_v) - Q_u q_v. \tag{4.19}$$

Тогда уравнение (4.17) примет вид

$$\tau_u\tau_v\gamma^2 - f\gamma + g = 0. \tag{4.20}$$

Отсюда получаем характеристические значения γ:

$$2\tau_u\tau_v\gamma_{1,2} = f \pm \sqrt{f^2 - 4\tau_u\tau_v g}. \tag{4.21}$$

Условие неустойчивости стационарного однородного решения (4.8) имеет место, если выполнено одно из следующих неравенств:

$$f < 0, \tag{4.22}$$

или

$$g < 0. \tag{4.23}$$

Исследуем условия устойчивости в системах с различными соотношениями между характерными временами τ_u, τ_v и масштабами l, L.

Покажем, что в системе (4.1), (4.2), в которой изменение концентрации активатора происходит быстрее, чем ингибитора, т.е.

$$\alpha = \frac{\tau_u}{\tau_v} \ll 1, \tag{4.24}$$

всегда возникает неустойчивость.

Действительно, для флуктуации с $k = 0$

$$f = \tau_v(q_u + \alpha Q_v) \approx \tau_v q_u \tag{4.25}$$

и при выполнении неравенства (4.24) условие (4.22) принимает вид первого условия (4.3) и тем самым выполняется. Другими словами, в такой системе существуют нарастающие флуктуации.

Выражение для γ при $k=0$ имеет вид

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}(\frac{q_u}{\tau_u} + \frac{Q_v}{\tau_v}) \pm i\sqrt{\frac{1}{\tau_u \tau_v}J - \frac{1}{4\tau_u^2\tau_v^2}(\tau_v q_u + \tau_u Q_v)^2}, \tag{4.26}$$

или, принимая во внимание (4.24),

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2\tau_u}(q_u + \alpha Q_v) \pm i\sqrt{\frac{1}{\tau_u \tau_v}J - \frac{1}{4\tau_u^2}(q_u^2 + 2\alpha q_u Q_v)}.$$

На границе выполнения условия (4.22) с учетом (4.25), т.е. при $|q_u| \ll 1$, флуктуация характеризуется частотой осцилляций

$$\Omega = Im\gamma = \omega_0 = (\tau_u \tau_v)^{-1/2}(q_u Q_v - q_v Q_u)^{1/2} = (\tau_u \tau_v)^{-1/2} J^{1/2}. \tag{4.27}$$

Пусть выполнено второе условие неустойчивости, т.е. неравенство (4.23). Тогда флуктуация апериодически растет, поскольку $\mathrm{Im}\gamma \equiv \omega = 0$. Запишем неравенство (4.23) в виде

$$F(k^2) = k^4 l^2 L^2 + k^2(l^2 Q_v + L^2 q_u) + J \leq 0. \tag{4.28}$$

Нетрудно видеть, что (4.28) выполняется в ограниченной области значений k^2, определяемой условиями

$$k_1^2 \leq k^2 \leq k_2^2, \tag{4.29}$$

$$(k^2)_{1,2} = \frac{1}{2l^2L^2}[-(l^2Q_v + L^2 q_u) \pm \sqrt{(l^2Q_v + L^2q_u)^2 - 4l^2L^2J}], \tag{4.30}$$

см. Рис.4.1.

Неотрицательность k_1^2, как следует из (4.30), требует выполнения следующих неравенств:

$$-q_u L^2 - Q_v l^2 \geq 0, \tag{4.31}$$

$$-q_u L^2 - Q_v l^2 \geq 2lLJ^{1/2} \geq 0. \tag{4.32}$$

Неравенство (4.31) является следствием (4.32).

Характерное волновое число k_0, принадлежащее области допустимых значений k^2 (4.29), естественно выбрать в виде

$$(k_0)^2 = \frac{1}{2l^2L^2}(-q_u L^2 - Q_v l^2). \tag{4.33}$$

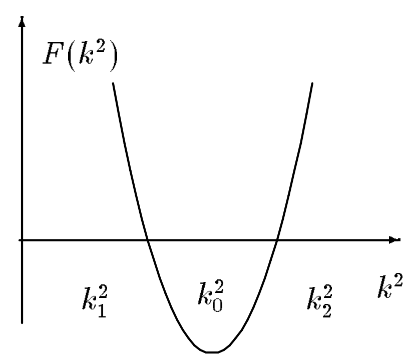

Рис. 4.1:

Вблизи порога выполнения условия (4.32), когда $-q_u L^2 - Q_v l^2 \approx 2lLJ^{1/2}$, из (4.33) для k_0 получаем следующее выражение:

$$k_0 \approx (lL)^{-1/2} J^{1/4}. \tag{4.34}$$

Предположим, что выполнено условие

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1, \tag{4.35}$$

т.е. концентрация ингибитора распределена более однородно, чем активатора.

Тогда условие неустойчивости (4.28) для характерного волнового числа (4.34) с учетом (4.35) принимает вид $\varepsilon^2 Q_v + q_u + 2\varepsilon J \leq 0$, или

$$q_u < -\varepsilon^2 Q_v - 2\varepsilon J^{1/2}. \tag{4.36}$$

Отметим, что условие (4.36) (неустойчивости однородного состояния (4.8)) выполняется благодаря $q_u < 0$ и тем легче, чем меньше величина $\varepsilon = l/L$.

4.3 Устойчивость стационарных состояний в некоторых известных моделях

Условие неустойчивости, приводящей к расслоению однородного состояния в системах с диффузией было получено Тьюрингом при исследовании условий формообразования (морфогенеза). Идеи Тьюринга стимулировали аналитические исследования и компьютерное моделирование биологических, химических и физических нелинейных систем, среди которых известны модель морфогенеза Гирера—Майнхарда, в которой

$$\begin{cases} q = u - B - Au^2/v, \\ Q = v - Cu^2, \end{cases} \tag{4.37}$$

модель, предложенная брюссельской школой физиков (брюсселятор), задается функциями

$$\begin{cases} q = u - (B + u^2 v)(1 + A)^{-1}, \\ Q = u^2 v - Au. \end{cases} \tag{4.38}$$

В модели (4.37) стационарное решение имеет вид

$$u_h = B + \frac{A}{C}, \quad v_h = Cu_h^2, \quad q_u = 1 - 2A\frac{u}{v}. \tag{4.39}$$

Условие (4.3),

$$q_u = 1 - 2A\frac{u_h}{v_h} = 1 - 2A\frac{1}{CB + A} < 0,$$

выполняется при $A > A_0 = CB$. В модели (4.38)

$$u_h = B, \quad v_h = \frac{A}{B}. \tag{4.40}$$

Неравенство (4.3) принимает вид

$$q_u = 1 - \frac{2u_h v_h}{1 + A} = 1 - 2\frac{A}{1 + A} < 0$$

и справедливо при $A > A_0 = 1$.

Рассмотрим условия выполнения неравенства (4.36). При заданном значении ε соотношение (4.36) на пороге его выполнения (когда имеет место равенство) определяет критическое значение управляющего параметра $A = A_c$, при котором возникает расслоение однородного состояния системы.

При $\varepsilon \to 0$ условие (4.36) переходит в (4.3) и выполняется при $A_c \to A_0$, при котором $q_u = 0$.

Существует некоторое максимальное значение $\varepsilon = \varepsilon_m$, выше которого условие (4.36) не выполняется ни при каких значениях параметра A.

Для модели (4.37) из (4.36) имеем

$$1 - 2A_c\frac{u}{v} = -\varepsilon^2 - 2\varepsilon[1 - 2A_c\frac{u}{v} + A_c\frac{u^2}{v^2} \cdot 2uC]^{\frac{1}{2}}.$$

Подставим сюда $u = u_h$, $v = v_h = Cu_h^2$ из (4.39), получим

$$1 - 2A_c\frac{1}{Cu_h} = -\varepsilon^2 - 2\varepsilon,$$

или

$$1 - 2A_c\frac{1}{A_0 + A_c} = -\varepsilon^2 - 2\varepsilon, \quad A_0 = CB.$$

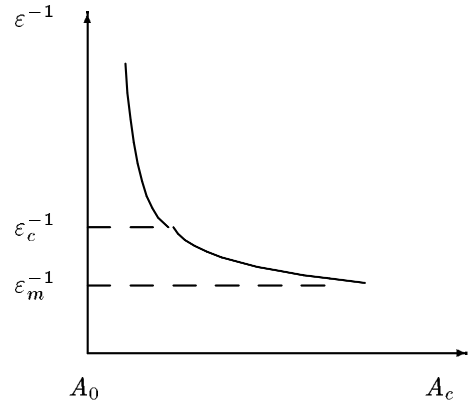

Рис. 4.2:

Откуда

$$A_c = \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-2\varepsilon-\varepsilon^2} A_0.$$

При $\varepsilon = \varepsilon_m = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$ условие (4.36) не реализуется. Зависимость ε^{-1} от параметра A представлена на Рис.4.2.

Для модели (4.38) условие (4.36) принимает вид

$$1 - 2\frac{u_h v_h}{1+A} = -\varepsilon^2 u_h^2 -$$

$$- 2\varepsilon \left[\left(1 - 2\frac{u_h v_h}{1+A} \right) u_h^2 + \frac{u_h^2}{1+A}(2u_h v_h - A) \right]^{\frac{1}{2}},$$

здесь $A = A_c$.

Подставляя сюда (4.40), получим

$$1 - 2\frac{A_c}{1+A_c} = -\varepsilon^2 B^2 - 2\varepsilon B \frac{1}{(1+A_c)^{\frac{1}{2}}},$$

или

$$\varepsilon = \frac{A_c^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+A_c)^{\frac{1}{2}}} B^{-1}. \tag{4.41}$$

Зависимость $\varepsilon^{-1}(A_c)$ также имеет вид, изображенный на Рис. 4.2. Из (4.41) следует, что $\varepsilon = \varepsilon_m = B^{-1}$.

4.4 Контрольные вопросы

1 Объясните следующие понятия: активная среда, диссипативная структура, самоорганизация.

2 Объясните следующие понятия: активатор, ингибитор. За счет каких факторов возникает самоорганизация в активной среде.

3 Сформулируйте модель двухкомпонентной активной среды с диффузией.

4 Дайте определение стационарного состояния в этой модели.

5 Сформулируйте условия моностабильности нелинейной системы.

6 Запишите систему уравнений в вариациях для модели двухкомпонентной активной среды с диффузией.

7 Запишите характеристическое уравнение для системы в вариациях в этой модели.

8 Сформулируйте условия образования диссипативных структур в модели двухкомпонентной активной среды с диффузией.

9 Дайте характеристику типов неустойчивостей в данной модели.

10 Найдите стационарное решение в модели Гирера-Майнхарда.

11 Найдите стационарное решение в модели брюсселятора.

12 Найдите критические значения управляющего параметра A и малого параметра ε в модели Гирера-Майнхарда.

13 Найдите критические значения управляющего параметра A и малого параметра ε в модели брюсселятора.

5 Нелинейные волны

5.1 Гиперболические и диспергирующие волны

Почти любая область науки связана с волновым движением. Дать точное определение понятию волны затруднительно. Чтобы охватить наиболее широкий круг волновых явлений, будем пользоваться представлением о волне, как о любом различимом сигнале, передающемся от одной части среды к другой с некоторой определенной скоростью. Этот сигнал может искажаться, менять свою скорость, но при этом оставаться различимым.

Можно условно выделить два класса волн: *гиперболические* и *диспергирующие*. Это деление не является математически вполне корректным, поскольку данные классы пересекаются. Тем не менее, оно полезно, т.к. позволяет ориентироваться в основных направлениях теории нелинейных волн.

В основе описания гиперболических волн лежат гиперболические уравнения, примером которых является волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2\nabla^2 u; \qquad u = u(t, \vec{r}); \quad \vec{r} \in R^3.$$

В одномерном случае $u = u(t, x); x \in R^1$.

Одномерное волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

может быть представлено в расщепленном виде

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u(t, x) = 0.$$

Отсюда можно выделить более простое уравнение

$$u_t + cu_x = 0, \tag{5.1}$$

которое описывает волну, распространяющуюся в одном направлении слева направо.

Диспергирующая волна определяется видом решения, а не уравнения. Линейная диспергирующая система допускает решение

$$u = a\cos(kx - \omega t). \tag{5.2}$$

Здесь частота ω представляет собой известную вещественную функцию $\omega(k)$, которая определяется свойствами системы.

Фазовая скорость в волне (5.2) равна $\omega(k)/k$. Явление дисперсии подразумевает, что фазовая скорость не является постоянной, $\omega(k)/k \neq \mathrm{const}$.

Удобно определить диспергирующую волну условием $\omega'(k) \neq \mathrm{const}$, или $\omega''(k) \neq 0$. В этом случае в линейной теории волновой пакет, который представляет собой ряд Фурье по гармоникам вида (5.2), при распространении будет диспергировать, (расползаться), т.к. каждая гармоника вида (5.2) распространяется со своей скоростью. Заметим, что волновое уравнение (5.1) имеет решение вида $u = u(x - ct)$, в котором $\omega = ck$. Такая волна не относится к диспергирующим волнам. С другой стороны, гиперболическое уравнение Клейна-Гордона

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + m^2 u = 0$$

имеет решение вида (5.2), для которого

$$\omega^2 = c^2k^2 + m^2$$

и $\omega''(k) \neq 0$. Несмотря на такое двойственное поведение некоторых уравнений, различие гиперболических и диспергирующих волн мы увидим из решения конкретных задач.

Наиболее характерным следствием нелинейности гиперболической волны является *опрокидывание фронта* волны. Рассмотрим подробнее это явление. Простейшее нелинейное уравнение распространения волны получится, если в уравнении (5.1) скорость зависит от поля $u(x,t)$, т.е. $c = c(u)$. В этом случае уравнение (5.1) принимает вид

$$u_t + c(u)u_x = 0. \tag{5.3}$$

В частом случае слабой зависимости $c(u)$ функцию $c(u)$ можно разложить в ряд и ограничиться первым нелинейным членом,

$$c = c_0 + c_1 u.$$

Тогда уравнение (5.3) примет вид

$$u_t + c_0 u_x + c_1 u u_x = 0. \tag{5.4}$$

Преобразованием координат $t \to t$, $x \to x - c_0 t$, при котором производные преобразуются по формулам

$$\partial_t \to \partial_t - c_0 \partial_x \quad \partial_x \to \partial_x,$$

уравнение (5.4) приводится к виду

$$u_t + c_1 u u_x = 0. \tag{5.5}$$

5.2 Метод характеристик

Для решения уравнения (5.3) рассмотрим функцию $u(x,t)$ на некоторой кривой $x = x(t)$ на плоскости (x,t).

Полная производная функции $u(x(t),t)$ вдоль кривой $x = x(t)$ дается выражением

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{5.6}$$

Определим кривую $x = x(t)$ уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(u). \tag{5.7}$$

Определение 5.1 *Кривая $\gamma = (t, x(t))$, определяемая уравнением (5.7), называется характеристикой уравнения (5.3).*

Условие постоянства функции $u(x,t)$ вдоль характеристики принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + c(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{5.8}$$

Из (5.8) следует, что функция $u(x,t)$, сохраняющая постоянное значение $u = u_0$ на характеристике γ, является решением уравнения (5.3).

Поскольку на характеристике γ поле u постоянно, $u = u_0$, то и скорость $c(u) = c(u_0)$ также постоянна на γ. Тогда из (5.7) следует, что характеристика γ представляет собой прямую на плоскости (x,t) с наклоном $c(u) = c(u_0)$. Расположение характеристик показано на Рис. ??.

Общее решение уравнения (5.3) сводится к построению семейства характеристик на плоскости (x,t), каждая из которых имеет наклон $c(u)$, соответствующий значению функции u на ней.

Процедуру построения решения с помощью характеристик нетрудно реализовать в каждой конкретной задаче.

Пример 1 *Пусть функция $u = e^{-x^2}$ при $t = 0$, $-\infty < x < +\infty$. Если некоторая прямая пересекает ось ox в точке $x = \xi$, то*

$$u = e^{-\xi^2} \tag{5.9}$$

на этой прямой. Пусть $c(u) = u$. Уравнение характеристики (5.7) имеет вид

$$x(t) = \xi + e^{-\xi^2} t.$$

Из этого уравнения следует выразить $\xi = \xi(x,t)$. Подстановка в (5.9) дает искомое решение в виде

$$u = u(x,t) = u(\xi(x,t)).$$

В общем случае $c = c(u)$ формулы, определяющие решение уравнения (5.7), имеют следующий вид:

$$x = \xi + F(\xi)t, \quad F(\xi) = c(u_0(\xi)). \tag{5.10}$$

Здесь предположено, что при $t = 0$ $x = \xi$. Начальное условие имеет вид $u(x,0) = u_0(\xi)$, где $u_0(\xi)$ есть заданная функция.

Дифференцируя $u = u_0(\xi(x,t))$, получим

$$u_t = u_0'(\xi)\xi_t, \quad u_x = u_0'(\xi)\xi_x. \tag{5.11}$$

Дифференцируя (5.10), получим

$$0 = F(\xi) + (1 + F'(\xi)t)\xi_t,$$

$$1 = \xi_x(1 + F'(\xi)t).$$

Отсюда и из (5.11) находим

$$u_t = -\frac{F(\xi)u_0'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \qquad u_x = \frac{u_0'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}. \tag{5.12}$$

Из (5.12) непосредственно следует

$$u_t + F(\xi)u_x = 0$$

или

$$u_t + c(u)u_x = 0,$$

поскольку $c(u) = F(\xi)$. Начальное условие выполнено, т.к. при $t = 0$, как видно из (5.10), $\xi = x$.

Основной чертой данного волнового процесса является то, что каждая характеристика $\gamma = (x(t), t)$, определяемая уравнением (5.10), описывает некоторую волну в x - пространстве, которая представляет собой распространение с конечной скоростью $c(u)$ возмущения поля $u(x,t)$.

Обратим внимание на то, что, в соответствии с (5.10), каждое значение u распространяется со своей скоростью $c(u)$. Если зависимость $c(u)$ возрастающая, $c'(u) > 0$ (например, для $c(u) = u$), то бóльшие значения поля u движутся быстрее, чем меньшие значения поля u. Картину распространения волны иллюстрирует Рис. 5.2.

Наблюдается типичный нелинейный эффект: в процессе эволюции волны происходит искажение ее фронта с последующим опрокидыванием фронта волны.

При $c'(u) < 0$ картина будет обратной. Найдем аналитическое условие опрокидывания фронта.

В линейном случае скорость волны постоянна ($c(u) = c_0$) и все точки волны за время t перемещаются на одинаковое расстояние равное $c_0 t$. Форма волны при этом не изменяется.

Если скорость распространения волны является убывающей функцией от x, то происходит опрокидывание. Оно начинается в момент t, когда на профиле волны u впервые появляется точка с вертикальной касательной. В этот момент производная u_x обращается в бесконечность. Из формул (5.12) получаем, что $u_x = \infty$ в момент

$$t = -\frac{1}{F'(\xi)}$$

при условии $F'(\xi) < 0$.

Ранее других опрокидывается волна, определяемая характеристикой $\xi = \xi_B$, для которой $F'(\xi_B) < 0$, а $|F'(\xi_B)|$ принимает максимальное значение. Время начала опрокидывания такой волны равно

$$t_B = -\frac{1}{F'(\xi_B)}.$$

5.3 Контрольные вопросы

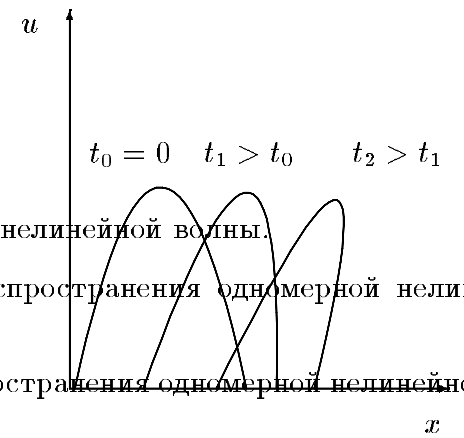

Рис. 5.2:

1 Объясните понятие гиперболической волны.

2 В чем состоит явление дисперсии волны?

3 Запишите уравнение распространения одномерной нелинейной волны.

4 Дайте определение характеристики уравнения распространения одномерной нелинейной волны.

5 Какой вид имеют характеристики уравнения распространения одномерной нелинейной волны?

6 Что является причиной опрокидывания фронта волны?

7 Запишите аналитическое условие опрокидывания фронта одномерной нелинейной волны.

6 Введение в теорию солитонов

В предыдущих разделах было показано, что нелинейность среды может приводить к укручению фронта волны и его опрокидыванию, а дисперсия оказывает противоположное действие. Может возникнуть ситуация, когда оба конкурирующих процесса уравновешивают друг друга и образуется волна, имеющая устойчивую форму. Такая волна была названа уединенной волной (solitary wave), или солитоном (soliton).

История открытия солитона описана в ряде монографий и обзоров[6].

В 60 - 70 - е годы была построена теория, в которой солитоны представляют собой точные аналитические решения некоторых нелинейных волновых уравнений.

В 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой[7] был открыт метод построения точных аналитических решений уравнения Кортевега - де Фриза (КдФ) для вещественной скалярной функции $u(x,t)$, которое имеет следующий вид:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{6.1}$$

Этот метод получил название метода обратной задачи (МОЗ), в английской транскрипции — Invers Scattering Transform (IST). Метод обратной задачи позволяет построить явные аналитические выражения для солитонов и детально изучить их свойства.

В последующие годы МОЗ был построен для целого ряда нелинейных уравнений, получивших название солитонных уравнений. К их числу, в частности, относятся следующие:

нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0, \tag{6.2}$$

где $u = u(x,t)$ - комплексная функция, зависящая от вещественных переменных x и t, $|u|^2 = u^* u$, u^* комплексно сопряжено к u,

уравнение синус - Гордон (СГ):

$$u_{xt} = \sin u, \tag{6.3}$$

где $u = u(x,t)$ — вещественная функция переменных x и t.

В настоящее время теория обратной задачи представляет собой обширную область современной нелинейной математической физики, которая продолжает активно развиваться.

Мы изучим одну из простейших первоначальных формулировок МОЗ применительно к уравнению КдФ (6.1), следуя, в основном, книге[8]. Эта формулировка содержит основные конструкции МОЗ и позволяет получить солитонные решения.

Рассматриваемая нами версия МОЗ опирается на квантовомеханическую задачу рассеяния для одномерного линейного уравнения Шредингера, к изложению которой мы переходим.

6.1 Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера

Одномерный оператор Шредингера определяется следующим выражением:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{6.4}$$

---

[6] См., например, Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. С.319;
Солитоны Пер. с англ./ Под. ред. Буллафа Р., Кодри Ф. М.: Мир, 1983. С. 408;
Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. С. 694;
Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 324 с.

[7] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for Solving the Korteveg - de Vries equation// Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, No. 19. P. 1095-1097.

[8] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

Здесь $u(x)$ — вещественная гладкая функция. Уравнение

$$L\psi = \lambda\psi \tag{6.5}$$

представляет собой задачу на собственные значения для оператора L, которую рассмотрим в классе ограниченных на всей оси x комплексных функций $\psi(x)$.

Приведем необходимые сведения из теории рассеяния для оператора (6.4), полное изложение которой можно найти, например, в книге[9].

Спектр оператора L состоит из дискретного спектра, собственные функции которого квадратично интегрируемы и двукратно вырождены, и из непрерывного спектра, собственные функции которого не имеют конечной нормы.

Непрерывный спектр заполняет полуось $\lambda \geq 0$, точки дискретного спектра принадлежат области $\lambda < 0$.

Ограничимся рассмотрением потенциалов $u(x)$, для которых число точек дискретного спектра конечно. Это выполнятся при

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|(1+|x|)dx < \infty. \tag{6.6}$$

Доказательство этого утверждения мы опускаем, его можно найти в работе[10].

6.1.1 Функции Иоста, матрица переноса

Обозначим в (6.5) $\lambda = k^2$, тогда (6.5) примет вид

$$L\psi = -\psi'' + u(x)\psi = k^2\psi. \tag{6.7}$$

Параметр k в общем случае может быть как вещественным, так и комплексным.
Функциями Иоста называют два набора базисных решений уравнения (6.7) $(\psi_1(x,k), \psi_2(x,k))$ и $(\varphi_1(x,k), \varphi_2(x,k))$, определяемых условиями

$$\begin{array}{lll} \psi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1), & \psi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1), & x \to +\infty; \\ \varphi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1), & \varphi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1), & x \to -\infty. \end{array} \tag{6.8}$$

Для вещественного потенциала и вещественного k справедливы соотношения инволюции:

$$\varphi_1(x,k) = \varphi_2^*(x,k), \quad \psi_1(x,k) = \psi_2^*(x,k), \tag{6.9}$$

для вещественного $u(x)$ и комплексного k —

$$\varphi_1(x,k) = \varphi_2^*(x,k^*), \quad \psi_1(x,k) = \psi_2^*(x,k^*), \tag{6.10}$$

$$\varphi_1(x,k) = \varphi_2(x,-k), \quad \psi_1(x,k) = \psi_2(x,-k). \tag{6.11}$$

Разложение одного базиса по другому определяет матрицу переноса (матрицу передачи) $T_{ij}(k)$:

$$\varphi_i(x,k) = \sum_{l=1}^{z} T_{il}(k)\psi_l(x,k). \tag{6.12}$$

Учитывая (6.10), имеем

$$T_{22}(k) = T_{11}^*(k^*), \quad T_{21}(k) = T_{12}^*(k^*),$$

$$\hat{T}(k) = \left\| \begin{array}{cc} a(k) & b(k) \\ b^*(k^*) & a^*(k^*) \end{array} \right\|. \tag{6.13}$$

[9] Де-Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966. 274 с.
[10] Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера// Труды МИАН. 1964. Т. 73. С. 314-336.

Обозначим

$$\varphi_1(x,k)=\varphi(x,k),\quad \psi_1(x,k)=\psi(x,k).$$

Тогда выражения (6.12) можно записать в виде

$$\varphi(x,k)=a(k)\psi(x,k)+b(k)\psi^*(x,k^*). \tag{6.14}$$

Лемма 6.1 *Вронскиан W любой пары решений (f_1,f_2) уравнения Шредингера (6.7) не зависит от x,*

$$\frac{d}{dx}W(f_1,f_2)=\frac{d}{dx}(f_1f_{2x}-f_{1x}f_2)=0. \tag{6.15}$$

Доказательство получается вычислением производной в (6.15) и подстановкой вторых производных из (6.7).

Так как вронскиан функций Иоста не зависит от x, его можно вычислить с помощью формул (6.8), устремляя $x\to\infty$. В результате получим

$$W(\varphi(x,k),\varphi^*(x,k^*))=W(\psi(x,k),\psi^*(x,k^*))=2ik. \tag{6.16}$$

Отсюда и из (6.14) получим

$$a(k)a^*(k^*)-b(k)b^*(k^*)=1, \tag{6.17}$$

что, принимая во внимание (6.13), равносильно

$$\det\hat{T}(k)=1. \tag{6.18}$$

Квантовомеханический смысл функций $a(k)$, $b(k)$ можно установить из следующих соображений. Представим (6.14) в виде

$$\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}=\psi(x,k)+\frac{b(k)}{a(k)}\psi^*(x,k^*).$$

Считая k вещественным и учитывая (6.8), получим

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}&=e^{-ikx}+\frac{b(k)}{a(k)}e^{ikx}+o(1),\quad x\to+\infty,\\ \frac{\varphi(x,k)}{a(k)}&=\frac{1}{a(k)}e^{-ikx}+o(1),\quad x\to-\infty.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Равенство левых частей позволяет связать правые части и интерпретировать величины в правых частях (6.19) следующим образом. При $x\to+\infty$ на расстояниях, удаленных от области, где рассеивающий потенциал $u(x)\neq 0$, имеется волна e^{-ikx}, падающая на область действия потенциала, и отраженная волна $\dfrac{b(k)}{a(k)}e^{ikx}$. Величина r вида

$$r(k)=\frac{b(k)}{a(k)} \tag{6.20}$$

называется *коэффициентом отражения.*

При $x\to-\infty$ имеется волна, удаляющаяся от области действия потенциала, $\dfrac{1}{a(k)}e^{-ikx}$, следовательно,

$$t(k)=\frac{1}{a(k)}$$

есть амплитуда рассеяния вперед (*коэффициент прохождения* падающей волны).

Выражение (6.18) в этих обозначениях записывается в виде

$$|t(k)|^2+|r(k)|^2=1,\quad \mathrm{Im}k=0. \tag{6.21}$$

Очевидно, вся информация о рассеянии содержится в матрице перехода $\hat{T}(k)$ или, эквивалентно, в функциях $a(k), b(k)$.

Приведем необходимые сведения о матрице перехода $\hat{T}(k)$ и свойствах функции Иоста.

1. Функция $a(k)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной k и имеет конечное число (обозначим его N) простых нулей на мнимой оси k. Обозначим эти значения $k = i\kappa_n,\ n = 1, \ldots, N$.

2. $a(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$.

3. Из (6.21) нетрудно получить, что
$$|a(k)|^2 = (1 - |r(k)|^2)^{-1}, \quad \mathrm{Im} k = 0. \tag{6.22}$$

4. Функция $|r(k)|$ убывает быстрее любой степени $|k|$ при $|k| \to \infty$.

Для $\arg a(k)$ можно получить следующую формулу:
$$\arg a(k) = \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{N} \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} - \frac{1}{\pi}\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|a(k')|}{k' - k} dk'. \tag{6.23}$$

Здесь $\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}$ означает интеграл в смысле главного значения.

Из формул (6.22), (6.23) следует, что $a(k)$ можно выразить через $r(k)$, и таким образом, матрица переноса $\hat{T}(k)$ полностью определяется одним коэффициентом отражения $r(k)$.

Аналитические свойства $a(k)$ являются следствием аналитических свойств функций Иоста $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$.

Теорема 6.1 *Функция $\chi_+(x,k) = e^{ikx}\varphi(x,k)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной k и имеет асимптотику*
$$\chi_+(x,k) = 1 + O(1/k), \quad |k| \to \infty, \quad \mathrm{Im} k > 0. \tag{6.24}$$
Функция $\chi_-(x,k) = e^{ikx}\psi(x,k)$ аналитична в нижней полуплоскости k, причем
$$\chi_-(x,k) = 1 + O(1/k), \quad |k| \to \infty, \quad \mathrm{Im} k < 0. \tag{6.25}$$

Доказательство основано на представлении задачи о нахождении функций $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$ из уравнения (6.7) и условий (6.8) в виде одного интегрального уравнения. Это представление можно получить, например, методом вариации постоянных.

Запишем уравнение (6.7) в виде
$$\varphi''(x,k) + k^2\varphi(x,k) = u(x)\varphi(x,k) \tag{6.26}$$
и будем рассматривать правую часть как неоднородность. Решение неоднородного уравнения (6.7) будем искать в виде
$$\varphi(x,k) = \alpha(x,k)e^{-ikx} + \beta(x,k)e^{ikx}, \tag{6.27}$$
где $\alpha(x,k)$, $\beta(x,k)$ — некоторые функции.

При постоянных α, β выражение (6.27) есть решение однородного ($u(x) = 0$) уравнения (6.27).

Для получения решения неоднородного уравнения (6.26) наложим ограничения на функции α, β. В качестве такого условия удобно взять
$$\alpha'(x,k)e^{-ikx} + \beta'(x,k)e^{ikx} = 0. \tag{6.28}$$

Подстановка (6.27) в уравнение (6.26) и учет (6.28) дает
$$\alpha'(x,k)e^{-ikx} - \beta'(x,k)e^{ikx} = u(x)\varphi(x,k)(-ik)^{-1}. \tag{6.29}$$

Из (6.28), (6.29) и условий (6.8) следует:

$$\alpha(x,k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{-2ik} e^{iky} \varphi(y,k) u(y) dy, \tag{6.30}$$

$$\beta(x,k) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2ik} e^{-iky} u(y) \varphi(y,k) dy. \tag{6.31}$$

Подставляя (6.30), (6.31) в (6.27), получаем искомое интегральное уравнение

$$\chi_+(x,k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2ik} (e^{2ik(x-y)} - 1) u(y) \chi_+(y,k) dy. \tag{6.32}$$

Аналогично

$$\chi_-(x,k) = 1 - \int_{x}^{\infty} \frac{1}{2ik} (e^{2ik(x-y)} - 1) u(y) \chi_-(y,k) dy. \tag{6.33}$$

Если в (6.32) считать k комплексным числом в верхней полуплоскости, $\mathrm{Im}k > 0$, то выражение (6.32) имеет смысл и определяет функцию $\chi_+(x,k)$ для комплексного $k, \mathrm{Im}k > 0$. Действительно, область интегрирования в (6.32) подразумевает, что $(x-y) > 0$. При $k = a + ib$, $b > 0$ имеем

$$e^{2ia(x-y)} e^{-2b(x-y)}.$$

Интегральное уравнение (6.32) есть уравнение Вольтерра и наличие убывающей экспоненты $e^{-2b(x-y)}$ гарантирует существование решения $\chi_+(x,k)$.

Таким образом, уравнение (6.32) представляет собой аналитическое продолжение функции $\chi_+(x,k)$ в верхнюю полуплоскость k.

Аналогично устанавливается аналитичность $\chi_-(x,k)$ в нижней полуплоскости.

Из (6.33) непосредственным переходом к пределу $|k| \to \infty$ следует

$$\chi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{x}^{\infty} u(y) dy + o(\frac{1}{k}). \tag{6.34}$$

Аналитичность $a(k)$ в верхней полуплоскости следует из вычисления вронскиана:

$$\begin{aligned} W(\varphi(x,k), \psi^*(x,k^*)) &= a(k) W(\psi(x,k), \psi^*(x,k^*)) = \\ &= \lim_{x\to\infty} a(k) W(\psi(x,k), \psi^*(x,k^*)) = a(k) 2ik. \end{aligned}$$

$$a(k) = \frac{1}{2ik} [\varphi(x,k) \psi_x^*(x,k^*) - \varphi_x(x,k) \psi^*(x,k^*)]. \tag{6.35}$$

Аналогично

$$b(k) = \frac{1}{2ik} [\psi(x,k), \varphi_x(x,k) - \psi_x(x,k) \varphi(x,k)]. \tag{6.36}$$

Из этих соотношений непосредственно следуют асимптотические свойства функций $a(k)$, $b(k)$ при $|k| \to \infty$.

Без доказательства приведем следующие утверждения. Функция $\psi(x,k) - e^{-ikx}$ квадратично интегрируема по $k \in (ib - \infty, ib + \infty)$, $b < 0$. Для функции $\psi(x,k)$ справедливо интегральное представление:

$$\psi(x,k) = e^{-ikx} + \int_{x}^{\infty} K(x,y) e^{-iky} dy. \tag{6.37}$$

Здесь

$$K(x,y) = 0, \quad y < x. \tag{6.38}$$

6.1.2 Дискретный спектр и задача рассеяния

Как видно из предыдущего параграфа, рассеяние частицы на потенциале $u(x)$ описывается матрицей переноса $\hat{T}(k)$. Покажем, что и дискретный спектр оператора Шредингера (6.7), описывающий связанные состояния, также может быть найден с помощью матрицы $\hat{T}(k)$, а соответствующие волновые функции получаются из функции Иоста.

Определение 6.1 *Значение λ, при котором решение уравнения Шредингера (6.7)*

$$L\psi = -\psi'' + u(x)\psi = \lambda\psi, \tag{6.39}$$

называется собственным значением (точкой дискретного спектра) оператора L, если решение уравнения (6.39), $\psi(x,\lambda) \in L_2\,(-\infty,+\infty)$.

Эрмитовость оператора L приводит к вещественности λ. Множество точек дискретного спектра в рассматриваемом нами случае (6.6) состоит из конечного числа изолированных точек в отрицательной области значений параметра λ. Обозначим эти значения как $\lambda_n = -\kappa_n^2,\ n = 1, ..., N$. Без ограничения общности можно положить $\kappa_n > 0$.

Собственные функции $\psi(x)$, отвечающие λ_n, удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d^2\varphi^{(n)}(x)}{dx^2} + u(x)\varphi^{(n)}(x) = -\kappa_n^2\varphi^{(n)}(x), \tag{6.40}$$

$$\begin{array}{llll} \text{При} & x \to +\infty & u(x) \to 0, & \varphi^{(n)}(x) = c_+ e^{-\kappa_n x}, \\ \text{при} & x \to -\infty & u(x) \to 0, & \varphi^{(n)}(x) = c_- e^{\kappa_n x}. \end{array} \tag{6.41}$$

Здесь c_+, c_- - некоторые постоянные, одной из которых можно придать любое значение, что будет означать выбор нормы.

На комплексной плоскости k точки дискретного спектра расположены на мнимой оси в верхней полуплоскости. Выберем координаты $c_\pm$ в (6.41) так, чтобы

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^{(n)}(x) = e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}), \quad x \to -\infty, \\ \varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\kappa_n x} + o(e^{-\kappa_n x}), \quad x \to +\infty. \end{array}\right\} \tag{6.42}$$

Покажем, что b_n вещественна. Так как вронскиан $W(\varphi^{(n)}, \varphi^{*(n)}) = \mathrm{const}$, то его можно вычислять при любых x, в частности, при $x \to -\infty$.

Подставляя $\varphi^{(n)} = e^{\kappa_n x},\ \varphi^{*(n)} = e^{\kappa_n x}$, получим: $W(\varphi^{(n)}, \varphi^{*(n)}) = 0$. Равенство нулю вронскиана двух функций означает линейную зависимость этих функций, $\varphi^{*(n)} = c\varphi^{(n)}$ при всех x. При $x \to -\infty$ $\varphi^{(n)} \to e^{\kappa_n x},\ \varphi^{*(n)} \to e^{\kappa_n x}$, откуда следует, что при $x \to -\infty$ $c = 1$. Следовательно,

$$\varphi^{*(n)} = \varphi^{(n)}.$$

Пронумеруем собственные значения λ_n:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N.$$

Здесь λ_1 имеет смысл энергии основного состояния.

Воспользуемся известной теоремой о нулях решений уравнения второго порядка[11]: функция $\varphi^{(1)}$ не имеет нулей на вещественной оси x, $\varphi^{(n)}$ имеет $(n-1)$ нулей.

Отсюда непосредственно получаем следствие:

$$b_n = (-1)^{n-1}|b_n|. \tag{6.43}$$

Теорема 6.2 *Точки верхней полуплоскости k, в которых $a(k)$ обращается в нуль, являются точками дискретного спектра и исчерпывают их.*

[11] См., например, Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. — 576 с. С. 150.

Доказательство. Напомним, что

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W(\varphi(x,k), \psi^*(x,k^*)), \quad a(k) \to 1 \tag{6.44}$$

при $|k| \to \infty$, $\mathrm{Im} k \geq 0$.

Пусть $a(k_0) = 0$, тогда из равенства нулю вронскиана (6.44) следует, что $\varphi(x,k_0) = c\psi^*(x,k_0^*)$. Принимая во внимание асимптотики функций Иоста $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$ вида (6.8), получим для $k = k_0 = a + ib$, $b > 0$, что $\varphi(x,k_0) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Следовательно, $\varphi(x,k_0) \in L_2(-\infty,+\infty)$, учитывая экспоненциальный характер убывания $\varphi(x,k_0)$ на бесконечности. Таким образом, $\varphi(x,k_0)$ - собственная функция дискретного спектра, а $\lambda = k_0^2$ - собственное значение оператора L (6.4).

В силу вещественности λ, $\mathrm{Im}\lambda = \mathrm{Im}(a + i\kappa)^2 = 0$. Принадлежность k_0 верхней полуплоскости означает $\kappa \neq 0$, тогда $a = 0$ и $k_0 = i\kappa_0$.

Обратно, пусть $\lambda_n = -\kappa_n^2$ - собственное значение дискретного спектра оператора L.

Рассмотрим функцию Иоста $\varphi(x,k)$ и заменим в ней $k \to i\kappa_n$, получим $\varphi(x,i\kappa_n)$. Эта функция удовлетворяет уравнению Шредингера (6.39) и имеет ту же асимптотику при $x \to -\infty$, что и $\varphi^{(n)}(x)$. Так как решение задачи на с.з. единственно, то

$$\varphi(x,i\kappa_n) = \varphi^{(n)}(x),$$

$$\varphi(x,i\kappa_n) = \varphi^{(n)}(x) \to b_n e^{-\kappa_n x},$$

при $x \to +\infty$.

Следовательно,

$$\varphi(x,i\kappa_n) = b_n \psi^*(x,-i\kappa_n). \tag{6.45}$$

В силу линейной зависимости функций $\varphi(x,i\kappa_n)$, $\psi^*(x,-i\kappa_n)$ их вронскиан $W(\varphi(x,i\kappa_n),\psi^*(x,-i\kappa_n)) = 0$, т.е. $a(i\kappa_n) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 6.3 *Нули функции $a(k)$ простые.*

Доказательство:

$$L\varphi(x,k) = (-\frac{d^2}{dx^2} + u(x))\varphi(x) = k^2\varphi(x). \tag{6.46}$$

Обозначим $\varphi'(x,k) = d\varphi(x,k)/dk$. Дифференцируя (6.46) по k, получим

$$L\varphi'(x,k) = 2k\varphi(x,k) + k^2\varphi'(x,k).$$

Отсюда и из (6.46) нетрудно получить:

$$\frac{d}{dx} W(\varphi'(x,k), \varphi(x,k)) = 2k\varphi^2(x,k). \tag{6.47}$$

Асимптотика $\varphi'(x,k)$ имеет вид

$$\varphi'(x,k) \to a'(k)e^{-ikx} - ixa(k)e^{-ikx} + b'(k)e^{ikx} + ixb(k)e^{ikx}, \; x \to +\infty.$$

Положим $k = i\kappa_n$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi'(x,i\kappa_n) &\to -ixe^{\kappa_n x}, \quad x \to -\infty, \\ \varphi'(x,i\kappa_n) &\to a'(i\kappa_n)e^{\kappa_n x}, \quad x \to +\infty. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Проинтегрируем (6.47), получим:

$$W(\varphi'(x,i\kappa_n), \varphi(x,i\kappa_n))\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 2i\kappa_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x,i\kappa_n)dx. \tag{6.49}$$

С учетом явного вида вронскиана (6.15), асимптотики (6.48) и (6.42) получим

$$W(\varphi'(x,i\kappa_n),\varphi(x,i\kappa_n))\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = -2\kappa_n a'(i\kappa_n)b_n.$$

Подставляя это выражение в (6.49), найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x,i\kappa_n)dx = ia'(i\kappa_n)b_n. \tag{6.50}$$

Так как $\varphi(x,i\kappa_n)=\varphi^{(n)}(x)$ - функция дискретного спектра, то интеграл в левой части (6.50) отличен от нуля (нас интересуют ненулевые собственные функции), следовательно, $a'(i\kappa_n)\neq 0$, т.е. нули $i\kappa_n$ функции $a(k)$ простые.

Заметим в заключение, что $ia'(i\kappa_n)$ вещественно и имеет тот же знак, что и b_n.

Подведем краткий итог полученным результатам.

Задача рассеяния для оператора Шредингера состоит в том, чтобы при заданном потенциале $u(x)$ найти матрицу переноса $\hat{T}(k)$. Это можно сделать, найдя функции Иоста $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$, решая уравнение Шредингера (6.7) с граничными условиями (6.8). Найдя функции φ, ψ, можем разложить один базис $\varphi(x,k),\varphi^*(x,k)$ по другому $(\psi(x,k),\psi^*(x,k))$ и найти функции $a(k),b(k)$ из (6.14), которые полностью определяют матрицу $\hat{T}(k)$. Важно отметить, что связанные состояния уравнения (6.7) не требуют специального нахождения. Функции дискретного спектра определяются подстановкой $k=i\kappa_n$ в функцию Иоста $\varphi(x,i\kappa_n)$

$$\varphi^{(n)}(x)=\varphi(x,i\kappa_n)$$

Точки дискретного спектра находятся из алгебраического уравнения: $a(k)=0$.

6.1.3 Обратная задача рассеяния

Обратную задачу рассеяния будем понимать в следующем смысле. Потенциал $u(x)$ не задан, таким образом, уравнение Шредингера (6.7) не определено. Будем считать заданными матрицу переноса $\hat{T}(k)$ и те величины, которые могут быть определены, в частности, точки дискретного спектра $i\kappa_n$, $n=1,\dots,N$. Задача состоит в том, чтобы по этим данным определить волновую функцию, например, $\psi(x,k)$, и потенциал $u(x)$. Функцию $\varphi(x,k)$ можно найти по формуле (6.14).

Проведем преобразование Фурье в (6.14), предварительно записав его в виде

$$\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}e^{iky}-e^{-ik(x-y)} = e^{iky}[\psi(x,k)+r(k)\psi^*(x,k)-e^{-ikx}]. \tag{6.51}$$

При вычислении преобразования Фурье будем использовать треугольное представление (6.38) для функции $\psi(x,k)$

$$\psi(x,k)=e^{-ikx}+\int_x^\infty K(x,y)e^{-iky}dy, \tag{6.52}$$

в котором $K(x,y)\in L_2(-\infty,+\infty)$ по переменной y и представляет собой Фурье - образ функции $\psi(x,k)-e^{-ikx}$. Поскольку $\psi(x,-k)=\psi^*(x,k)$, то $K(x,y)$ вещественно.

Интегрируя по вещественным значениям k выражение (6.51), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dk\Big(\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}e^{iky}-e^{-ik(x-y)}\Big) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}dk e^{iky}[\psi(x,k)+r(k)\psi^*(x,k)-e^{-ikx}]. \tag{6.53}$$

Обозначим

$$Q(x,k)=\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}e^{iky}-e^{-ik(x-y)},$$

тогда интеграл в левой части уравнения (6.53) примет вид

$$J \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x,k)dk. \tag{6.54}$$

Функция $Q(x,k) \to 0$ при $|k| \to \infty$ и имеет N простых полюсов при $k = i\kappa_n$, $n = 1,\ldots,N$. Интеграл (6.54) можно вычислить по теории вычетов[12] Проинтегрируем функцию $Q(x,k)$ по контуру γ комплексной плоскости k, указанному на Рис. 6.1.

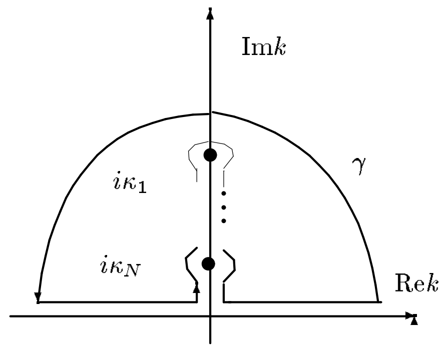

Рис. 6.1:

Тогда получим

$$J = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \mathrm{res}_{k=i\kappa_n} Q(x,k).$$

Согласно теоремам о вычетах,

$$\mathrm{res}_{k=i\kappa_n} Q(x,k) = \lim_{k\to i\kappa_n} (k - i\kappa_n)Q(x,k) = \frac{\varphi(x,i\kappa_n)}{a'(i\kappa_n)} e^{-\kappa_n y}.$$

Из (6.45) следует

$$\varphi(x,i\kappa_n) = b_n\psi^*(x,-i\kappa_n) =$$
$$= b_n \frac{e^{-\kappa_n y}}{a'(i\kappa_n)}[e^{-\kappa_n x} + \int_x^\infty K(x,z)e^{-\kappa_n z}dz].$$

Отсюда имеем

$$J = -2\pi \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{e^{-\kappa_n(x+y)}}{ia'(i\kappa_n)} -$$
$$- 2\pi \int_x^\infty K(x,z) \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\kappa_n(z+y)}}{ia'(i\kappa_n)} dz \tag{6.55}$$

Вычислим правую часть равенства (6.53).

Подставим (6.55) в (6.53), получим

$$- 2\pi \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{e^{-\kappa_n(x+y)}}{ia'(i\kappa_n)} - 2\pi \int_x^\infty K(x,z) \times$$
$$\times \textstyle\sum_{n=1}^{N} \displaystyle\frac{b_n e^{-\kappa_n(z+y)}}{ia'(i\kappa_n)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{iky} \times$$
$$\times \left\{ \int_x^\infty K(x,z)e^{-ikz}dz + r(k)\left[e^{ikx} + \int_x^\infty K(x,z)e^{ikz}dz\right]\right\}. \tag{6.56}$$

[12]см., например, Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. — 408 с.

Здесь мы подставили в правую часть (6.53) треугольное разложение (6.52). Обозначим

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n e^{-\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r(k)e^{ikx}dx. \tag{6.57}$$

Заметим также, что $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(x-y)}dk=2\pi\delta(y-x)$. С учетом обозначения (6.57) выражение (6.56) можно переписать в виде

$$K(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty K(x,z)F(z+y)dz=0 \tag{6.58}$$

Выражение (6.58) носит название уравнения Гельфанда - Левитана - Марченко. Если известна совокупность величин

$$S_n=\{r(k),b_n,\kappa_n,\quad n=1,...,N\}, \tag{6.59}$$

то можно составить функцию $F(x)$ по формуле (6.57). Тогда уравнение (6.58) определяет функцию $K(x,y)$. Последняя по треугольному представлению (6.52) определяет функцию Иоста $\psi(x,k)$.

Тем самым, в обратной задаче рассеяния исходными являются величины S_n (6.59). Они называются *данными рассеяния*. Роль уравнения, определяющего волновую функцию, играет уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко (6.58).

Найдем выражение для потенциала $u(x)$. Для этого треугольное представление (6.52) проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}\int_x^\infty K(x,y)e^{+ik(x-y)}dy=-K(x,y)\frac{e^{ik(x-y)}}{ik}|_x^\infty+\\+\frac{1}{ik}\int_x^\infty K_{,y}(x,y)e^{ik(x-y)}dy=\frac{K(x,x)}{ik}+\\+\frac{1}{ik}\int_x^\infty K_{,y}(x,y)e^{ik(x-y)}dy=\frac{K(x,x)}{ik}+O(\frac{1}{k^2}).\end{aligned} \tag{6.60}$$

Здесь и далее $K(x,y)_{,y}=\partial K(x,y)/\partial y$. Интеграл $\int_x^\infty K_{,y}(x,y)e^{ik(x-y)}dy\to 0$ при $|k|\to\infty$, так как функция $K(x,y)$ вместе со своими производными квадратично интегрируема по переменной y.

Из (6.60) можно записать выражение для функции $\chi_-(x,k)$ (см. (6.25)) в виде

$$\chi_-(x,k)=1+\int_x^\infty K(x,y)e^{ik(x-y)}dy=\frac{K(x,x)}{ik}+O(\frac{1}{k^2})$$

при $|k|\to\infty$. Сравнивая это выражение с (6.34), получим

$$2K(x,x)=\int_x^\infty u(y)dy. \tag{6.61}$$

Откуда

$$u(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{6.62}$$

Теперь у нас есть все необходимое для интегрирования методом обратной задачи нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза.

6.2 Контрольные вопросы

1 Запишите уравнение КдФ и объясните, какие члены уравнения отвечают нелинейности и дисперсии.

2 Сформулируйте постановку задачи о рассеянии на потенциале $u(x)$ для одномерного квантовомеханического уравнения Шрёдингера.

3 Объясните, почему в уравнении $-\psi'' + u(x)\psi = \lambda\psi$ непрерывному спектру соответствуют значения $\lambda > 0$, а дискретный спектр лежит в области $\lambda < 0$?

4 Какие решения уравнения $-\psi'' + u(x)\psi = \lambda\psi$ называют функциями Иоста?

5 Запишите соотношения инволюции для функций Иоста.

6 Дайте определение понятия матрицы переноса в задаче рассеяния.

7 Покажите, что матрица переноса в задаче рассеяния для одномерного квантовомеханического уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cc} a(k) & b(k) \\ b^*(k^*) & a^*(k^*) \end{array} \right\|$$

вследствие соотношений инволюции для функций Иоста.

8 Какое значение λ называется точкой дискретного спектра?

9 Вычислите вронскианы функций Иоста $W(\varphi(x,k),\, \varphi^*(x,k^*))$, $W(\psi(x,k),\, \psi^*(x,k^*))$.

10 Покажите, что детерминант матрицы переноса равен единице.

11 Объясните квантовомеханический смысл величин $b(k), a(k)$.

12 Получите интегральное уравнение, определяющее функцию Иоста $\varphi(x,k)$, $\chi_+(x,k) = e^{ikx}\varphi(x,k)$.

13 Получите интегральное уравнение, определяющее функцию Иоста $\psi(x,k)$, $\chi_-(x,k) = e^{ikx}\psi(x,k)$.

14 Покажите, что функция $\chi_+(x,k)$ аналитична в верхней полуплоскости k.

14 Покажите, что функция $\chi_-(x,k)$ аналитична в нижней полуплоскости k.

15 Докажите, что точки k_0 верхней полуплоскости k, в которых $a(k)$ обращается в нуль, являются точками дискретного спектра для одномерного квантовомеханического уравнения Шрёдингера $-\varphi'' + u(x)\varphi = k_0^2\varphi$.

16 Сформулируйте постановку обратной задачи рассеяния для одномерного квантовомеханического уравнения Шрёдингера.

17 Объясните понятие данных рассеяния.

18 Получите уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко.

19 Получите формулу для потенциала в обратной задаче рассеяния.

7 Интегрирование уравнения КдФ методом обратной задачи

Уравнение КдФ описывает распространение волн в слабо нелинейной среде с дисперсией и в общем случае может быть записано в виде

$$u_t + (\alpha + \beta u)u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{7.1}$$

Здесь α, β, γ - постоянные. Заменой переменных

$$t \to \gamma t, \quad x \to x - \alpha t, \quad u \to -\frac{6\gamma}{\beta} u$$

уравнение (7.1) приводится к виду

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{7.2}$$

который будем использовать в дальнейшем. Уравнение (7.2) можно рассматривать как частный случай уравнения

$$u_t = K(u), \tag{7.3}$$

где $K(u)$ некоторый нелинейный оператор, действующий на u, но не содержащий производных по t.

Уравнение (7.3) называется *эволюционным уравнением*. В случае уравнения КдФ (7.2) нелинейный оператор $K(u)$ имеет вид

$$K(u) = 6uu_x - u_{xxx}.$$

Для уравнения (7.2) рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = K(u), \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{7.4}$$

в классе убывающих на бесконечности функций, $u(t,x) \to 0$, $|x| \to \infty$, удовлетворяющих условию (6.6).

7.1 Понятие об $(L - A)$ – паре

В основе метода интегрирования уравнений вида (7.3) лежит конструкция, называемая $(L - A)$ – парой.

Определение 7.1 *Пусть L и A – линейные операторы, действующие в некотором функциональном пространстве $\mathcal{B} \ni \psi(t)$ и зависящие от $u(t)$ таковы, что*

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + A, L\right] = \dot{L} + [A, L] = 0 \leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - K(u) = 0. \tag{7.5}$$

Тогда операторы L, A называются $(L - A)$ - **парой Лэкса**, *а операторная запись (7.5) эволюционного уравнения (7.3) называется* представлением Лэкса *уравнения (7.3). Здесь и далее $\dot{L} = \partial L / \partial t$.*

Впервые $(L - A)$ – пара была найдена П.Лэксом для уравнения КдФ в работе[13]. Для уравнения КдФ в форме (7.2) $(L - A)$ - пара имеет следующий вид:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t), \tag{7.6}$$

[13]Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves// Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21 P. 467-490. Русский перевод: Лэкс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны// В сб. Математика. 1969. Т. 13:5. С. 128-150.

$$A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u). \qquad (7.7)$$

Отметим, что оператор A антиэрмитов, $A^+ = -A$. Вычисление коммутатора (7.5) дает:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + A, L\right] = \dot{L} + [A, L] = (u_t - 6uu_x + u_{xxx})I. \qquad (7.8)$$

Коммутатор (7.8) представляет собой единичный оператор I, умноженный на функцию $u_t - 6uu_x + u_{xxx}$. Таким образом, коммутатор (7.8) обращается в нуль на решениях уравнения КдФ (7.2).

Построение $(L - A)$ - пары является ключевым моментом интегрирования нелинейного уравнения методом обратной задачи, который мы рассмотрим ниже.

Метод нахождения $(L-A)$ - пары для заданного уравнения не известен. Найдены, однако, $(L-A)$ - пары для ряда нелинейных уравнений различными частными методами. В настоящее время известны $(L - A)$ - пары для некоторых нелинейных уравнений, в которых искомая функция зависит от двух независимых переменных t и x. Как правило, переменная t играет роль времени, а x - пространственная координата. Такие уравнения называют $(1 + 1)$ - мерными.

Построение $(L - A)$ - пар усложняется с увеличением числа независимых переменных в задаче. Тем не менее удалось разработать методы интегрирования на основе $(L - A)$ - пар для $(1 + 2)$ - мерных уравнений, включающих временную переменную t и две пространственные координаты. В высших размерностях построение $(L - A)$ - пар затруднительно.

Рассмотрим возможности, которые дает $(L - A)$ - пара для решения уравнения.

7.2 Унитарная эквивалентность операторов $L(t)$

Операторы L, A зависят от параметра t через $u(x,t)$, $L = L(t)$, $A = A(t)$. Таким образом, $L = L(t)$ следует рассматривать как однопараметрическое семейство операторов.

Теорема 7.1 *Операторы $L(t)$ унитарно эквивалентны $L(0)$, т.е.*

$$L(t) = U^{-1}(t)L(0)U(t), \quad U(t)U^+(t) = U^+(t)U(t) = I. \qquad (7.9)$$

Доказательство. Пусть $U(t)$ однопараметрическое семейство невырожденных операторов $U(t)$. Если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдФ (7.2), то справедливо соотношение (7.8), которое, умножив слева на $U(t)$ и справа на $U(t)^{-1}$, запишем в виде

$$[U(t)(\frac{\partial}{\partial t} + A)U^{-1}(t),\ UL(t)U^{-1}] = 0. \qquad (7.10)$$

Отсюда находим

$$U\frac{\partial}{\partial t}U^{-1} + UAU^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} - \dot{U}U^{-1} + UAU^{-1},$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial t}U^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial t}, U^{-1}\right] \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot{U}^{-1},$$

$U\dot{U}^{-1} = -\dot{U}U^{-1}$. Потребуем, чтобы

$$\dot{U} = UA, \qquad (7.11)$$

$$U(0) = I. \qquad (7.12)$$

Если такое семейство операторов $U(t)$ существует, то, в соответствии с (7.10),

$$[\frac{\partial}{\partial t}, U(t)L(t)U^{-1}(t)] = 0,$$

т.е.

$$U(t)L(t)U^{-1}(t) = U(0)L(0)U^{-1}(0) = L(0) = \mathrm{const}.$$

Уравнение (7.11) представляет собой линейное эволюционное дифференциальное уравнение на оператор U, разрешенное относительно старшей (первой) производной. Ее решение всегда существует. Докажем унитарность операторов $U(t)$. Это свойство тривиально выполняется при $t = 0$ в силу (7.12) и сохраняется при изменении t. Действительно, умножив (7.11) на U^+, получим

$$\dot{U}U^+ = UAU^+.$$

Отсюда с помощью эрмитовского сопряжения получим

$$U\dot{U}^+ = -UAU^+.$$

Здесь учтено, что $A^+ = -A$. Отметим, что дифференцирование по параметру t не связано с операцией сопряжения в $L(-\infty, +\infty)$, $(U^+)^{\cdot} = (U^{\cdot})^+$. Складывая полученные уравнения, находим

$$\dot{U}U^+ + U\dot{U}^+ = (UU^+)^{\cdot} = 0,$$

или $UU^+ = \mathrm{const}$. Отметим также, что вследствие начальных условий (7.12)

$$UU^+ = I.$$

Теорема доказана.

Лемма 7.1 *Унитарно эквивалентные самосопряженные операторы имеют одинаковые собственные значения.*

Доказательство. Пусть $\lambda(0)$ есть собственное значение оператора $L(0)$, отвечающее собственной функции $\varphi(0)$, т. е.

$$L(0)\varphi(0) = \lambda(0)\varphi(0).$$

Принимая во внимание (7.9), получаем

$$L(t)\varphi(t) = \lambda(0)\varphi(t),$$

где $\varphi(t) = U^{-1}(t)\varphi(0)$. Таким образом, любое собственное значение $\lambda(0)$ оператора $L(0)$ является собственным значением оператора $L(t)$, отвечающим собственной функции $\varphi(t)$. Обратно, из

$$L(t)\psi(t) = \lambda\psi(t)$$

следует

$$L(0)\varphi(t) = \lambda\varphi(t),$$

где $\varphi(t) \equiv U(t)\psi(t)$. Таким образом, λ является собственным значением оператора $L(0)$, причем, поскольку $L(0)$ не зависит от t, то λ и $\varphi(t)$ также не зависят от t. Из данной леммы непосредственно получаем

Следствие 7.1.1 *Собственные значения оператора*

$$L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$$

являются интегралами движения уравнения КдФ, т.е. не зависят от параметра t, играющего роль времени в уравнении КдФ.

7.3 Эволюция данных рассеяния

Для нахождения эволюции в зависимости от параметра t данных рассеяния уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+u(x,t)\right]\varphi(x,k,t)\equiv L\varphi=k^2\varphi(x,k,t) \tag{7.13}$$

предположим, что $|u(x,t)|\to 0$ при $|x|\to\infty$. Фиксируем $\varphi(x,k,t)$ асимптотикой $\varphi(x,k,t)=e^{-ikx}+o(1),\ \ x\to-\infty$. Тогда в соответствии с (6.8), (6.9), (6.14)

$$\varphi(x,k,t)=a(k,t)e^{-ikx}+b(x,t)e^{ikx}+o(1),\ \ x\to+\infty. \tag{7.14}$$

Продифференцируем (7.13) по t $\ (\dot{k}^2=0)$, получим

$$\dot{L}\varphi+L\dot{\varphi}=k^2\dot{\varphi}.$$

Считая выполненным уравнение КдФ (7.2), выразим из соотношения (7.8) $\dot{L}=[L,A]$, получим

$$[L,A]\varphi+L\dot{\varphi}=k^2\dot{\varphi},$$

откуда

$$(L-k^2)(\dot{\varphi}+A\varphi)=0.$$

Последнее соотношение показывает, что $\dot{\varphi}+A\varphi$ есть собственная функция оператора L, отвечающая тому же собственному значению k^2, что и φ. Обозначим ее $\tilde{\varphi}$,

$$\dot{\varphi}+A\varphi=\tilde{\varphi},\quad L\tilde{\varphi}=k^2\tilde{\varphi}. \tag{7.15}$$

При $x\to-\infty$

$$\tilde{\varphi}=\dot{\varphi}+A\varphi=(\frac{\partial}{\partial t}+A)e^{-ikx}=4ik^3e^{-ikx}+o(1).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}=4ik^3\varphi(x,k,t)$, тогда (7.15) принимает вид

$$\dot{\varphi}=-A\varphi+4ik^3\varphi. \tag{7.16}$$

Это уравнение определяет эволюцию $\varphi(x,k,t)$ в зависимости от t. Устремим в (7.16) $x\to+\infty$ и учтем, что $u(x,t)\to 0$, тогда получим

$$\dot{a}e^{-ikx}+\dot{b}e^{ikx}=(-4\frac{d^3}{dx^3}+4ik^3)(ae^{-ikx}+be^{ikx}).$$

Отсюда следует,

$$\dot{a}(k)=0,\quad \dot{b}=8ik^3b(k,t). \tag{7.17}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения эволюции данных рассеяния, отвечающих непрерывному спектру в задаче рассеяния. Уравнения (7.17) называют уравнениями ГГКМ (уравнениями К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры).

Рассмотрим эволюцию данных рассеяния, отвечающих дискретному спектру. Согласно следствию (7.1.1), $\dot{\kappa}_n=0$.

Этот результат следует также и из (7.17): $i\kappa_n$ есть значения аргумента функции $a(k)$, не зависящей от t, и поэтому сами $i\kappa_n$ не зависят от t.

Зависимость $b_n(t)$ определяется из (7.16). Так как

$$\varphi(x,i\kappa_n)=b_n(t)e^{-\kappa_n x}+o(e^{-\kappa_n x}),\quad x\to+\infty,$$

то из (7.16) при $k=i\kappa_n$ находим

$$\dot{\kappa}_n=0,\quad \dot{b}_n(t)=8\kappa_n^3b_n. \tag{7.18}$$

Эти уравнения легко интегрируются, и мы получаем эволюцию рассеяния при изменении параметра t —

$$S(t)=\left\{r(k,0)e^{8ik^3t},\ \kappa_n,\ b_n(0)e^{8\kappa_n^3t},\ n=\overline{1,N}\right\}. \tag{7.19}$$

7.4 Схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи

Обобщая полученные выше результаты, сформулируем метод решения решения задачи Коши для уравнения КдФ (7.4):

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = u(x),\ u(x) \to 0, |x| \to \infty, - - - \end{cases} \tag{7.20}$$

который носит название *метод обратной задачи* (МОЗ). Метод сводится к выполнению следующих операций:

I. Решить прямую задачу рассеяния для начального потенциала $u(x)$ и найти данные рассеяния:

$$u(x) \to S(0).$$

II. Построить данные рассеяния, зависящие от времени, по формуле (7.19).

III . Решить обратную задачу рассеяния с данными $S(t)$ и по формуле (6.62) построить $u(x,t)$.

Согласно вышесказанному, построенная таким образом функция $u(x,t)$ будет решением задачи (7.20).

Эту схему можно рассматривать как (невырожденную) замену переменных

$$u(x,0) \to S(0) \to S(t) \to u(x,t).$$

Обратим внимание на то, что все этапы связаны с решением линейных задач.

7.5 Контрольные вопросы

1 Сформулируйте понятие $(L-A)-$ пары для нелинейного уравнения.

2 Докажите, что операторы $L(t)$, входящие в $(L-A)-$ пару уравнения КдФ, унитарно эквивалентны $L(0)$.

3 Покажите, что унитарно эквивалентные самосопряженные операторы имеют одинаковые собственные значения.

4 Покажите, что собственные значения оператора $L(t)$, входящего в $(L-A)-$пару уравнения КдФ, являются интегралами движения, т.е. не зависят от параметра t, играющего роль времени в уравнении КдФ.

5 Получите уравнения эволюции данных рассеяния для непрерывного спектра в обратной задаче.

6 Какой вид имеют уравнения эволюции данных рассеяния для дискретного спектра в обратной задаче?

7 Дайте описание схемы интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи.

8 Безотражательные потенциалы и N-солитонные решения

8.1 Общее выражение для N-солитонного решения

Существует специальный класс потенциалов в задаче рассеяния, для которого прямую и обратную задачи можно решить точно в явном виде. Это класс безотражательных потенциалов, для которых коэффициент отражения $r(k) = 0$. Такие потенциалы, в свою очередь, порождают некоторое семейство точных решений уравнения КдФ – *солитонные решения*. Замечательными особенностями солитонов являются сохранение формы солитона в процессе распространения и упругий характер столкновения солитонов: после столкновения возникают те же солитоны, что и до столкновения. Этот факт был впервые обнаружен в[14] с методами компьютерного моделирования, что вызвало интерес к КдФ и привело в последствии к открытию метода обратной задачи.

Безотражательный потенциал определяется данными рассеяния

$$S = \{r(k) = 0, \quad \kappa_n, \quad b_n, \quad n = \overline{1, N}\}.$$

При $r(k) = 0$, согласно (6.22), получаем, что $|a(k)| = 1$. Тогда из аналитических свойств функции $a(k)$, рассмотренных в разделе 6.1.1, следует, что функция $a(k)$ однозначно определяется своими нулями и имеет вид

$$a(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n}.$$

Поэтому можно считать известными величины $a'(i\kappa_n)$. Напомним, что $ia'(i\kappa_n)$ вещественны и имеют тот же знак, что b_n (см. (6.50)).

Уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко (6.58)

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_{x}^{\infty} K(x, z)F(z + y)dz = 0 \tag{8.1}$$

в данном случае имеет ядро

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\kappa_n x}, \quad \beta_n \equiv \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0. \tag{8.2}$$

Ядро (8.2) является вырожденным, следовательно, уравнение (8.1) решается стандартным методом,[15] согласно которому решение следует искать в виде

$$K(x, y) = \sum_{n} K_n(x) e^{-\kappa_n y}. \tag{8.3}$$

Подстановка (8.3) в уравнение (8.1) дает

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-\kappa_n y} \Big[K_n(x) + \beta_n e^{-\kappa_n x} + \beta_n \int_{x}^{\infty} \sum_{m=1}^{N} K_m(x) e^{-(\kappa_m + \kappa_n)z} dz\Big] = 0.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\sum_{m} A_{nm} K_m(x) = -\beta_n e^{-\kappa_n x}, \tag{8.4}$$

[14] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states// Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 240-243.

[15] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. С. 251.

где обозначено

$$A_{nm} \equiv \delta_{nm} + \frac{\beta_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}. \tag{8.5}$$

Заметим, что

$$\frac{dA_{nm}}{dx} = -\beta_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}.$$

Подставляя это в (8.3), получим

$$K(x,x) = -\sum_{n,m} A^{-1}_{nm} \beta_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x} =$$

$$= \sum_{n,m} A^{-1}_{mn} \frac{dA_{nm}}{dx} \equiv \frac{d}{dx} \ln \det \hat{A}(x). \tag{8.6}$$

Из (8.6) с помощью (6.62) находим выражение для безотражательного потенциала общего вида

$$u(x) = -2\frac{d}{dx} K(x,x) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x). \tag{8.7}$$

Свойство безотражательности сохраняется при изменении параметра t. Это следует из выражения (7.19), определяющего эволюцию данных рассеяния. Действительно, $r(k,t) = r(k,0)e^{8ik^3t}$. Тогда очевидно, что если $r(k,0) = 0$ при $t = 0$, то $r(k,t) = 0$ при $t > 0$. Следовательно, выражение (8.7) определяет набор точных решений уравнения КдФ, если подставить в (8.7) данные рассеяния, зависящие от t в соответствии с (7.19). Последнее достигается заменой

$$\beta_n \to \beta_n \exp\left(8\kappa_n^3 t\right)$$

в матрице A_{nm} (8.5) в соответствии с (7.18).

Выражение (8.5) представляет собой N-солитонное решение общего вида.

8.2 Односолитонное решение

Простейший безотражательный потенциал имеет одну точку дискретного спектра, т.е. $N = 1$. Построим соответствующее решение уравнения КдФ.

Матрица A_{nm} состоит из единственного элемента

$$A(x) = 1 + \frac{\beta}{2\kappa} e^{-2\kappa x + 8\kappa^3 t}.$$

Учитывая положительность $\beta/2\kappa$, обозначим

$$\varphi \equiv \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\beta}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa} \ln b.$$

Тогда

$$A(x) = 1 + e^{-2\kappa x + 8\kappa^3 t + 2\kappa\varphi} = 2e^{-\kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)} \operatorname{ch} \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi).$$

Вычислим производные от функции $A(x,t)$:

$$-2\frac{d}{dx} \ln A = 2\kappa\Big[1 - \frac{\operatorname{sh} \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}{\operatorname{ch} \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}\Big],$$

$$-2\frac{d^2}{dx^2} \ln A = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}.$$

Из (8.7) получаем

$$u(x,t) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}. \tag{8.8}$$

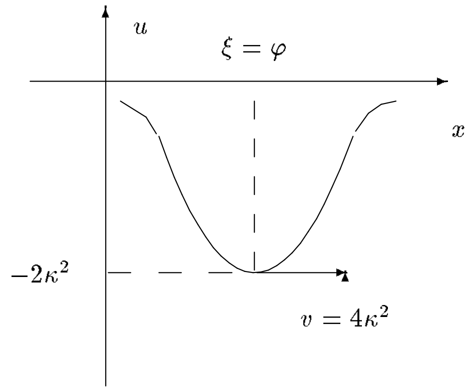

Рис. 8.1:

На Рис. 8.1 приведен график функции (8.8) при $t = 0$. Решение представляет собой возмущение поля $u(x,t)$, распространяющееся вдоль оси x со скоростью $v = 4\kappa^2$ без изменения формы. При $t = 0$ возмущение экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$. Такое решение называется солитоном (уединенной волной). Солитон (8.8) имеет амплитуду $-2\kappa^2$, начальную фазу $\varphi = (1/2\kappa)\ln b$ и скорость $= 4\kappa^2$

Отметим, что для нелинейных процессов характерно возникновение бифуркаций с течением времени. Математически это проявляется в появлении точек, в которых решение начинает ветвиться. Пример солитона показывает, что существуют и неветвящиеся решения.

8.3 Двухсолитонное решение

Процесс столкновения двух солитонов описывает решение (8.7) при $N = 2$. Приведем это решение в явном виде. Введем обозначения

$$\varphi_n = \frac{1}{2\kappa_n}\ln\frac{\beta_n}{2\kappa_n}, \quad \xi_n = x - 4\kappa_n^2 t - \varphi_n, \quad v_n = 4\kappa_n^2.$$

Здесь $n = 1, 2$, для определенности будем считать, что $\kappa_1 > \kappa_2$. Из (8.5) находим матрицу A_{nm} в виде

$$A_{nm}(x) = \left\| \begin{matrix} 1 + e^{-2\kappa_1\xi_1} & \dfrac{2\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2} e^{x(\kappa_1-\kappa_2)-2\kappa_1\xi_1} \\ \dfrac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{x(\kappa_2-\kappa_1)-2\kappa_2\xi_2} & 1 + e^{-2\kappa_2\xi_2} \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда

$$\det A(x) = 1 + e^{-2\xi_1\kappa_1} + e^{-2\kappa_2\xi_2} + \Big(\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\Big)^2 e^{-2\kappa_1\xi_1-2\kappa_2\xi_2} =$$
$$= e^{-\kappa_1\xi_1-\kappa_2\xi_2}\Big\{e^{\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2} + e^{\xi_2\kappa_2-\xi_1\kappa_1} + \frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\times$$
$$\times\Big[\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}e^{\kappa_1\xi_1+\kappa_2\xi_2} + \frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}e^{-\kappa_1\xi_1-\kappa_2\xi_2}\Big]\Big\}.$$

Обозначим

$$\Delta \equiv \ln\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2} > 0,$$

получим

$$\det A(x) = 2\frac{e^{-\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2}}{\kappa_1+\kappa_2}\left\{(\kappa_1+\kappa_2)\,\mathrm{ch}\,(\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2)+\right.$$
$$\left.+(\kappa_1-\kappa_2)\,\mathrm{ch}\,(\xi_1\kappa_1+\xi_2\kappa_2+\Delta)\right\}.$$

Вычислим производную

$$\frac{d}{dx}\ln\det A = -(\kappa_1+\kappa_2) + \\ + \frac{(\kappa_1^2-\kappa_2^2)(\operatorname{sh}(\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2)+}{(\kappa_1+\kappa_2)\operatorname{ch}(\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2)+} \\ \frac{+\operatorname{sh}(\xi_1\kappa_1+\xi_2\kappa_2+\Delta))}{+(\kappa_1-\kappa_2)\operatorname{ch}(\xi_1\kappa_1+\xi_2\kappa_2+\Delta)}.$$

Окончательно решение уравнения КдФ для случая $N = 2$ принимает вид

$$u(x,t) = -4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\times \\ \times\frac{\kappa_1^2-\kappa_2^2+\kappa_1^2\operatorname{ch}(2\kappa_2\xi_2+\Delta)+\kappa_2^2\operatorname{ch}(2\kappa_1\xi_1+\Delta)}{[(\kappa_1+\kappa_2)\operatorname{ch}(\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2)+(\kappa_1-\kappa_2)\operatorname{ch}(\xi_1\kappa_1+\xi_2\kappa_2+\Delta)]^2}. \tag{8.9}$$

Проведем анализ решения (8.9). Обозначим $x' \equiv x - 4\kappa_1^2 t$, тогда

$$\xi_1 = x' - \varphi_1, \quad \xi_2 = x' + 4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t - \varphi_2;$$
$$\xi_1\kappa_1+\xi_2\kappa_2 = (\kappa_1+\kappa_2)x' + 4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\kappa_2 t - \varphi_1\kappa_1 - \varphi_2\kappa_2;$$
$$\xi_1\kappa_1-\xi_2\kappa_2 = (\kappa_1-\kappa_2)x' - 4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t - \kappa_1\varphi_1 + \kappa_2\varphi_2.$$

$$u(x'+4t\kappa_1^2,t) = -4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\times \\ \times\frac{\kappa_1^2-\kappa_2^2+\kappa_1^2\operatorname{ch}[2\kappa_2(x'+4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_2)+\Delta]+}{\{(\kappa_1+\kappa_2)\operatorname{ch}[(\kappa_1-\kappa_2)x'-4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_1\kappa_1+\varphi_2\kappa_2]+} \\ \frac{+\kappa_2^2\operatorname{ch}[2\kappa_1(x'-\varphi_1)+\Delta]}{+(\kappa_1-\kappa_2)\operatorname{ch}[(\kappa_1+\kappa_2)x'+4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_1\kappa_1-\varphi_2\kappa_2+\Delta]\}^2}.$$

Рассмотрим решение (8.9) при $t\to-\infty$ в системе отсчета t, x', которая движется относительно системы отсчета t, x со скоростью $4\kappa_1^2$ в положительном направлении вдоль оси x. Переход к пределу $t\to-\infty$ дается следующими выражениями, в которых отбрасываются убывающие по t экспоненты:

$$u(x'+4t\kappa_1^2,t) \to -2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\kappa_1^2 e^{-2\kappa_2(x'+4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_2)-\Delta}\times \\ \times\left\{\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)e^{(\kappa_1-\kappa_2)x'-4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_1\kappa_1+\varphi_2\kappa_2}+\right. \\ \left.+\frac{1}{2}(\kappa_1-\kappa_2)e^{-\Delta-(\kappa_1+\kappa_2)x'-4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t+\varphi_1\kappa_1+\varphi_2\kappa_2}\right\}^{-2} = \\ = -\frac{2\kappa_1^2}{\left\{\sqrt{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}}\frac{e^{\kappa_1x'-\varphi_1\kappa_1+\frac{\Delta}{2}}}{2}+\sqrt{\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}}\frac{e^{-\kappa_1x'+\varphi_1\kappa_1-\frac{\Delta}{2}}}{2}\right\}^2} = \\ = \frac{-2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2\{\kappa_1x'-\varphi_1\kappa_1+\Delta\}}.$$

Здесь обозначено

$$e^{\Delta/2} = \sqrt{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}}.$$

Полученный результат показывает, что в системе отсчета t, x' при $t\to-\infty$ решение представляет собой солитон с параметрами κ_1, φ_1, Δ. Этот солитон имеет начальную фазу $\varphi_1 - \Delta/\kappa_1$. Отметим, что если предел $t\to-\infty$ вычислить в системе отсчета $t, x" = x - 4\kappa_2^2 t$, то получим

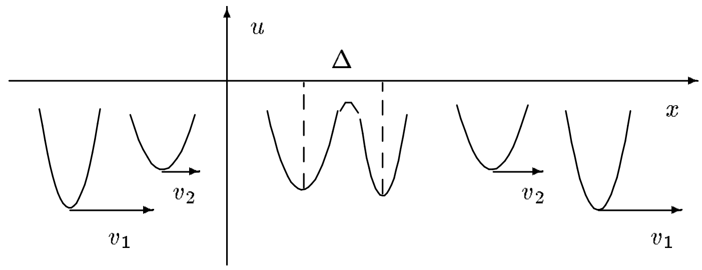

Рис. 8.2:

второй солитон с параметрами κ_2, φ_2. Таким образом, на левой (по пространственной координате x) бесконечности решение (8.9) представляет собой два солитона, находящихся далеко друг от друга и не взаимодействующих. Заметим также, что солитоны движутся с различными скоростями, поскольку $\kappa_1 > \kappa_2$.

Перейдем к пределу $t \to +\infty$. Аналогично предыдущему получим

$$u(x' + 4t\kappa_1^2, t) \to -2\kappa_1^2 e^{2\kappa_2(x'+4(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_2)+\Delta} \times$$
$$\times \left\{ \sqrt{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}} \frac{1}{2} e^{-(\kappa_1-\kappa_2)x'+4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t+\varphi_1\kappa_1-\varphi_2\kappa_2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}} \frac{1}{2} e^{(\kappa_1+\kappa_2)x'+4\kappa_2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)t-\varphi_1\kappa_1-\varphi_2\kappa_2+\Delta} \right\}^{-2} \to$$
$$\to -2\kappa_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}[\kappa_1 x' - \varphi_1\kappa_1]}.$$

Как видно, решение представляет тот же самый солитон, что и при $t \to \infty$, но с фазой, равной φ_1. Обозначим

$$\varphi_1^- \equiv \varphi_1 - \frac{1}{\kappa_1}\Delta; \qquad \varphi_1^+ \equiv \varphi_1.$$

Разность начальных фаз равна

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \frac{1}{\kappa_1}\Delta > 0.$$

Этот результат можно трактовать так, что быстрый солитон получает сдвиг фазы вперед.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что медленный солитон ($\kappa_2 < \kappa_1$) получает сдвиг фазы назад, равный

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = -\frac{1}{\kappa_2}\Delta > 0.$$

Процесс взаимодействия двух солитонов иллюстрирует Рис. 8.2. Обратим внимание на следующую особенность: чтобы произошло взаимодействие солитонов, быстрый солитон должен располагаться левее медленного при больших отрицательных значениях x (на левой бесконечности).

8.4 Контрольные вопросы

1. Объясните понятие "безотражательный потенциал" в задаче рассеяния.
2. Какие процессы описывают безотражательные потенциалы в теории уравнения КдФ?

3. Запишите уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко в случае безотражательного потенциала.

4. Сохраняется ли во времени (которое связано с КдФ) свойство безотражательности для потенциала?

5. Как построить зависящие от времени безотражательные потенциалы?

6. Постройте односолитонное решение уравнения КдФ.

9 Уравнение КдФ как гамильтонова система

Напомним общие понятия о гамильтоновой форме уравнений движения в классической механике[16].

Пусть M^{2n} есть $2n$-мерное фазовое пространство, представляющее собой четномерное вещественное пространство, точки которого ξ задаются $2n$ координатами: $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{2n})$, $\xi_j \in \mathbb{R}^1$ - вещественные переменные, $i, j, k, s = \overline{1, 2n}$.

Предположим, что в каждой точке фазового пространства M^{2n} задана неособенная антисимметричная матрица $\omega^{ij}(\xi)$:

$$\omega = -\omega^T, \quad \det \omega \neq 0.$$

Обозначим через A множество вещественных функций на M^{2n}. Для любых гладких функций $f, g \in A$ положим

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i,k} \omega^{ik}(\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_k}. \tag{9.1}$$

Выражение $\{f, g\}$, заданное формулой (9.1), представляет собой функцию, принадлежащую множеству A, которая называется *скобкой Пуассона* функций f и g. Скобка Пуассона, по определению, должна удовлетворять условиям

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{9.2}$$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \tag{9.3}$$

Свойство (9.2) выполняется вследствие антисимметричности матрицы ω^{ik}. Свойство (9.3) называется *тождеством Якоби* и равносильно соотношению

$$\omega^{si}\omega^{jk}_{,s} + \omega^{sk}\omega^{ij}_{,s} + \omega^{sj}\omega^{ki}_{,s} = 0, \tag{9.4}$$

или

$$\omega^{-1}_{ij,k} + \omega^{-1}_{ki,j} + \omega^{-1}_{jk,i} = 0. \tag{9.5}$$

Здесь $\omega^{ki}_{,s} \equiv \partial\omega^{ki}/\partial x_s$, ω^{-1}_{ij} — матрица обратная к ω_{ij}, т.е.

$$\sum_k \omega^{-1}_{ik}\omega^{kj} = \delta^j_i.$$

Будем считать условие (9.4) выполненным. Выберем некоторую функцию $h(\xi) \in A$ и назовем ее *функцией Гамильтона.*

С помощью функции Гамильтона h зададим динамическую систему на фазовом пространстве M^{2n}

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = \{\xi_i, h\} = \sum_k \omega^{ik}(\xi) \frac{\partial h}{\partial \xi_k}, \tag{9.6}$$

где вещественный параметр t играет роль времени. Система (9.6) называется *гамильтоновой системой.*

Известно[17], что преобразованием координат в фазовом пространстве M^{2n} можно записать матрицу ω^{kl} в канонической форме

$$\omega = \begin{pmatrix} J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & J \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[16] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966

[17] см., например, Рашевский П.К. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ , 1947

Обозначим канонические координаты в M^{2n} через

$$\xi_{2k-1} = p_k, \quad \xi_{2k} = q_k, \ k = \overline{1,n}.$$

В этих координатах скобка Пуассона (9.1) примет обычный в классической механике вид

$$\{f,g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}, \tag{9.7}$$

а гамильтонова система (9.6) — вид

$$\frac{dq_k(t)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k(t)}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q_k}. \tag{9.8}$$

Таким образом, система (9.6) представляет собой гамильтонову систему, записанную в произвольной (неканонической) системе координат фазового пространства M^{2n}. Пусть $f(q,p)$ – некоторая функция на фазовом пространстве M^{2n}, а $q_k(t), p_k(t)$ есть решение гамильтоновой системы (9.8). Тогда производная по времени t от функции $f(q(t),p(t))$ на решениях системы (9.8) вычисляется следующим образом:

$$\frac{df(q(t),p(t))}{dt} = \{f,h\}. \tag{9.9}$$

Формула (9.9) получается вычислением производной от функции $f(q(t),\, p(t))$ по правилу дифференцирования сложной функции с учетом соотношений (9.7), (9.8).

Функция $f(q,p)$ на M^{2n} называется *интегралом движения*, или *законом сохранения* гамильтоновой системы (9.8), если ее значения, взятые на решениях системы (9.8), $f(q(t),p(t))$, не зависят от t, т.е.

$$\frac{df(q(t),p(t))}{dt} = \{f,h\} = 0. \tag{9.10}$$

Некоторым уравнениям в частных производных также можно придать гамильтонову форму. К их числу относится и уравнение КдФ (7.2). Гамильтонова форма открывает дополнительные возможности анализа уравнения. Для записи уравнения КдФ в гамильтоновой форме установим соответствие между основными элементами системы (9.6) и уравнением КдФ (7.2).

Состояние системы, описываемой уравнениями (9.6), задается вектором с компонентами ξ_i. В случае уравнения КдФ состояние задается функцией $u(x)$, которую будем предполагать убывающей при $|x| \to \infty$. Эту функцию можно рассматривать как "вектор", компоненты которого нумерует вещественная переменная x. Таким образом, фазовое пространство для уравнения КдФ (обозначим его M) бесконечномерно и образовано убывающими на бесконечности функциями $u(x)$.

Функциям на фазовом пространстве M^{2n} конечномерной гамильтоновой системы отвечают *функционалы* в случае уравнения КдФ. Согласно определению, функционал сопоставляет функции $u(x)$ некоторое число $I(u)$.

Приведем необходимые понятия и определения, относящиеся к функционалам.

Достаточно общий вид функционала $I(u)$ можно построить следующим образом. Пусть $T(x,u(x),u_x(u),\ldots,u_x^{(n)}(u))$ — некоторая гладкая функция вещественной переменной x, функции $u(x)$ ($\in M$) и ее производных

$$u_x^{(i)}(x) = \partial^i u(x)/(\partial x)^i$$

до порядка n включительно. Будем предполагать также, что функция T убывает при $|x| \to \infty$.

Величина

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x,u,u_x,u_x^{(2)},\ldots,u_x^{(n)})dx \tag{9.11}$$

представляет собой функционал, зависящий от функции $u(x)$.

Для функции $f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^l$, главная линейная часть приращения выражается в виде дифференциала

$$f(\xi + d\xi) - f(\xi) = df + o(d\xi), \quad df = \sum_{i=1}^{l} \partial f(x)/\partial \xi_i.$$

По аналогии с дифференциалом функции вводится главная линейная часть приращения функционала при изменении его аргумента, $u(x) \to u(x) + \delta u(x)$. Она называется *вариацией функционала* δu и определяется формулой

$$I(u + \delta u) - I(u) = \delta I + o(\delta u).$$

Здесь $\delta u(x)$ — произвольная функция из рассматриваемого класса функций M.

Вариация функционала δI, по построению, является линейным функционалом относительно функции $\delta u(x)$. Общий вид произвольного линейного функционала $L(u)$ с аргументом в виде функции $u(x)$ дается следующим выражением:

$$L(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) u(x) dx, \tag{9.12}$$

где $v(x)$ — функция из некоторого функционального пространства, возможно, отличного от пространства M, которому принадлежит функция $u(x)$. Функция $v(x)$ называется *ядром функционала* $I(u)$.

Для функционала δI выражение (9.12) записывают в виде

$$\delta I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta I}{\delta u(x)} dx, \tag{9.13}$$

в котором ядро обозначено через

$$\frac{\delta I}{\delta u(x)}. \tag{9.14}$$

Ядро (9.13) называют *вариационной (функциональной) производной* функционала (9.13).

Для функционала (9.11) с помощью интегрирования по частям нетрудно получить формулу

$$\delta I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial u_x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial u_x^{(2)}} - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial T}{\partial u_x^{(n)}} \right] \delta u(x) dx. \tag{9.15}$$

Эволюция состояния со временем описывается вектор-функцией времени с компонентами $\xi_i(t)$ для системы (9.6) и, соответственно, функцией $u(t, x)$ для уравнения КдФ. Основным элементом гамильтоновой системы является скобка Пуассона. Построим скобку Пуассона для уравнения КдФ. С этой целью запишем уравнение КдФ (7.2) в виде

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (3u^2(x, t) - u_{xx}(x, t)).$$

Будем рассматривать выражение $3u^2 - u_{xx}$ как вариационную производную $\delta H/\delta u(x, t)$ от некоторого функционала $H(u)$, в котором переменная t является параметром.

Принимая во внимание выражение (9.15), нетрудно непосредственно проверить, что для функционала

$$H(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + \frac{1}{2} u_x^2) dx \tag{9.16}$$

имеем:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} (3u^2 - u_{xx}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x, t)}. \tag{9.17}$$

Запишем выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x,t)}$$

в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x,t)} = -\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x'))\frac{\delta H}{\delta u(x',t)}dx',$$

где $\delta(x-x')$ — дельта - функция Дирака. Сравним это выражение с конечномерной гамильтоновой системой (9.6), записанной в произвольной системе координат фазового пространства M^{2n}.

Здесь интегралу отвечает сумма в (9.1), функциям f, g на фазовом пространстве соответствуют функционалы на M. Матрице $\omega^{ik}(\xi)$ следует сопоставить функцию

$$\omega(x,x') = \frac{\partial\delta(x-x')}{\partial x'}.$$

Построим скобку Пуассона двух функционалов $S(u), R(u)$ с помощью функции $\omega(x,x')$, положив

$$\{S,R\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta S}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta R}{\delta u(x)}dx. \tag{9.18}$$

Нетрудно непосредственно убедиться с помощью интегрирования по частям, что выражение (9.18) антисимметрично относительно перестановки S и R.

Установим невырожденность функции $\omega(x,x')$, которая играет роль матрицы ω^{ij}.

Невырожденность матрицы ω^{ij} в конечномерном случае может быть записана следующим образом. Рассмотрим систему уравнений $\omega_{ij}\lambda^i = 0$, в которой числа λ_i являются неизвестными. Если матрица ω^{ij} невырождена, то единственным решением этой системы будет нулевое решение $\lambda^i = 0$. В бесконечномерном случае аналогичное условие для неизвестной убывающей на бесконечности функции $v(x)$, соответствующей совокупности чисел λ^i, принимает вид интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\delta(x-x')}{\partial x'}v(x')dx' = 0.$$

Преобразуем это выражение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\delta(x-x')}{\partial x'}v(x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x'}(\delta(x-x')v(x'))dx' -$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')v_{x'}(x')dx' = -v_x(x) = 0,$$

откуда следует, что $v(x) = \mathrm{const} = 0$.

Отметим также, что $\omega(x,x')$ не зависит от функции $u(x)$, которая играет роль точки фазового пространства M, и поэтому скобка Пуассона (9.18) удовлетворяет тождеству Якоби (9.3).

Таким образом, скобка (9.18) действительно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скобке Пуассона.

Уравнение КдФ (7.2) в форме (9.17) имеет гамильтонов вид

$$u_t(x,t) = \{u, H\} \tag{9.19}$$

со скобкой Пуассона (9.18) и гамильтонианом (9.16).

Уравнение (9.19) аналогично конечномерной гамильтоновой системе (9.6).

Найдем выражение для производной по времени от некоторого функционала $I(u)$ на решениях уравнения КдФ (9.17). Подставим в $I(u)$ решение уравнения КдФ $u(x,t)$, получим $I(t) = I(u(t))$,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[I(u(t+\Delta t)) - I(u(t))]. \tag{9.20}$$

Положим $u(t+\Delta t) = u(x,t) + u_t\Delta t + o(\Delta t)$, где $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Преобразуем правую часть (9.20) к виду

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[I(u(t+\Delta t)) - I(u(t))] = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta I + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} o(u_t + o(\Delta t)). \tag{9.21}$$

Так как второй предел в этом выражении равен нулю, то

$$\frac{dI(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\delta I. \tag{9.22}$$

Представим вариацию функционала через вариационную производную в виде (9.13)

$$\delta I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta I}{\delta u(x,t)} \delta u(x,t) dx, \tag{9.23}$$

где $\delta u(x,t) = u_t\Delta t + o(\Delta t)$. Подставляя (9.23) в (9.22) и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0} o(\Delta t)/\Delta t = 0$, получим

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I}{\delta u(x,t)} u_t(x,t) dx.$$

Подставляя в это выражение частную производную по времени u_t из (9.17) и принимая во внимание вид скобки Пуассона (9.18), приходим к выражению

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I}{\delta u(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x,t)} dx = \{I, H\}. \tag{9.24}$$

Формула (9.24) совпадает с аналогичным выражением (9.9) для конечномерной гамильтоновой системы.

Перейдем к рассмотрению законов сохранения для уравнения КдФ.

Закон сохранения в общем случае представляет собой некоторое соотношение между величинами, характеризующими физический процесс, значение которого не изменяется в ходе процесса.

Полное описание физического процесса задается соответствующим набором физических величин в каждый момент времени. Этот набор величин находится решением основных уравнений модели. Найти решение в явном виде часто бывает затруднительно. Если известны законы сохранения для исследуемой модели, то они могут служить дополнительным средством анализа физического процесса. Кроме того, многие уравнения, составляющие основу модели физического процесса, являются математической формой некоторого закона сохранения. Этим определяется важное значение законов сохранения.

Введем понятие закона сохранения для уравнения с частными производными более общего вида, чем уравнение КдФ:

$$F(u)(x,t) = 0. \tag{9.25}$$

Здесь $u = u(x,t)$ — гладкая вещественная функция, убывающая вместе со всеми своими производными при $|x| \to \infty$.

Предположим, что некоторый физический процесс в данный момент времени t описывается гладкой вещественной функцией $u(x)$, $x \in R^1$, убывающей вместе со своими производными при $x \to \infty$, $u(x) \in M$.

Величина, характеризующая систему, представляет собой некоторое число, зависящее от состояния системы. Математически она должна выражаться в виде некоторого функционала, $I(u)$, который, как уже отмечалось выше, сопоставляет функции $u(x)$ вещественное число, $I(u) \in \mathbb{R}$.

Изменение со временем t поля $u(x)$ описывается функцией $u = u(t,x)$, которая определяется уравнением (9.25) при некотором начальном условии $u(t,x)|_{t=0} = u_0(x)$.

Подставим $u(t,x)$ в правую часть (9.11), получим величину, в общем случае зависящую от времени t, $I(u(t)) = I(t)$.

Величина $I(u)$ вида (9.11) называется *интегральным законом сохранения* для уравнения (9.25), если

$$\left.\frac{dI(u(t))}{dt}\right|_{F(u)(x,t)=0} = 0, \tag{9.26}$$

то есть $I(u(t))$ не зависит от времени на решениях уравнения (9.25). Функция $T(x, u, u_x, \ldots)$ называется *сохраняющейся плотностью* величины $I(u)$.

Закону сохранения в интегральной форме (9.11) поставим в соответствие закон сохранения в дифференциальной форме.

Дифференциальным законом сохранения уравнения (9.25) назовем пару функций

$$T(t, x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)}), \quad X(t, x, u, u_x, \ldots, u_x^{(p)}) \tag{9.27}$$

таких, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x}\right)\Big|_{F(u)(t,x)=0} = 0, \tag{9.28}$$

то есть левая часть выражения (9.28) обращается в нуль, когда в качестве функции $u = u(t, x)$ в него подставляется решение уравнения (9.25). Заметим, что для общности в функции T, X включена явная зависимость от времени t.

Функция X называется *сохраняющимся током* величины $I(u)$.

9.1 Полиномиальные законы сохранения для уравнения КдФ

Возьмем в качестве уравнения (9.25), определяющего функцию $u(x, t)$, уравнение КдФ (7.2). Построим законы сохранения для уравнения КдФ (7.2), используя интегрируемость уравнения КдФ методом обратной задачи. Нас будут интересовать полиномиальные законы сохранения вида

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(u, u_x, u_{xx}, \ldots)dx, \tag{9.29}$$

где через P_n обозначен полином степени n от u, u_x, $u_{xx}, \ldots$ с постоянными коэффициентами, не зависящими от t, x.

Обратимся к уравнению Шредингера (6.7), определяющему функции Иоста $\varphi(x, k)$, $\psi(x, t)$. Представим функцию Иоста $\varphi(x, k)$ в виде

$$\varphi(x, k) = \exp(-ikx + \int_{-\infty}^{x} \chi(x', k)dx'), \tag{9.30}$$

где функция $\chi(x, k)$ определяется из уравнения Шредингера (6.7).

Примем во внимание свойства функции $\varphi(x, k)$, рассмотренные в п. 6.1. При $x \to -\infty$, как видно из (9.30), $\varphi(x, k) \to e^{-ikx}$, что согласуется с (6.8). Согласно теореме 6.1 функция $\varphi(x, k)$ аналитична в верхней полуплоскости k, т. е. при $\mathrm{Im}k > 0$. Следовательно, этим же свойством обладает и функция $\chi(x, k)$. При $|k| \to \infty$, в соответствии с (6.24), $\varphi(x, k) = e^{-ikx} + O(1/k)$. Соответственно, для функции $\chi(x, k)$ из (9.30) получим

$$\int_{-\infty}^{x} \chi(x', k)dx' \sim O(1/k) \quad \text{при} \quad |k| \to \infty. \tag{9.31}$$

Представим аналитическую в верхней полуплоскости k функцию $\chi(x, k)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $k \to \infty$ в виде ряда по степеням $1/k$. С учетом (9.31) разложение будет иметь вид

$$\chi(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x)}{(2ik)^n}. \tag{9.32}$$

При $\mathrm{Im}k > 0$, $x \to \infty$ функция Иоста $\varphi(x,k)$ имеет следующую асимптотику: $\varphi(x,k)e^{ikx} \to a(k) + e^{2ikx}b(k)$, причем $b(k) \to 0$ быстрее любой степени $1/k$. Следовательно, при $|k| \to \infty$ и $x \to +\infty$, пренебрегая вторым слагаемым $e^{2ikx}b(k)$, имеем $\varphi(x,k)e^{ikx} = a(k)$. Отсюда

$$\ln a(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x,k)dx. \qquad (9.33)$$

Но функция $a(k)$ не зависит от t (см. (7.17)), поэтому $\chi(x,k)$ — сохраняющаяся плотность уравнения для КдФ при $k \to \infty$.

Подставим $\varphi(x,k)$ вида (9.30) в уравнение Шредингера (6.7), получим уравнение Риккати, которому удовлетворяет функция $\chi(x,k)$,

$$\chi_x + \chi^2 - u - 2ik\chi = 0. \qquad (9.34)$$

Подставляя сюда асимптотическое разложение (9.32), получим равенство

$$\sum_{n=1} \frac{\chi_{n,x}}{(2ik)^n} + \sum_{l,n=1} \frac{\chi_n \chi_l}{(2ik)^{n+l}} - u - \sum_{n=1} \frac{\chi_n}{(2ik)^{n-1}} = 0, \qquad (9.35)$$

справедливое при всех значениях параметра k.

Отметим, что

$$\sum_{l,n=1} \frac{\chi_n \chi_l}{(2ik)^{n+l}} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\chi_{n-l}\chi_l}{(2ik)^n}. \qquad (9.36)$$

В уравнении (9.35) приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра k. С учетом (9.36) получим рекуррентное соотношение для функций $\chi_n(x)$. Для первых трех функций имеем

$$\chi_1 = -u(x),\ \chi_2 = -u_x,\ \chi_3 = \chi_1^2 + \chi_{2,x}.$$

Для функций с $n > 3$ рекуррентное соотношение принимает вид

$$\chi_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}\chi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \chi_k(x)\chi_{n-k}(x),\ n = \overline{1,\infty}. \qquad (9.37)$$

Равенство (9.33) является асимптотическим, справедливым при $k \to \infty$. Если разложить левую и правую части по степеням $1/k$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $1/k$, то получим *точные* равенства, причем каждая функция $\chi_n(x)$ будет сохраняющейся плотностью, поскольку соответствующий коэффициент разложения в левой части (9.33) не зависит от t.

Выпишем в качестве иллюстрации в явной форме функции χ_4, χ_5:

$$\chi_4 = -u_{xxx} + 2\frac{d}{dx}u^2,\ \chi_5 = -u_x^{(4)} + u_x^{(2)} + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3.$$

Заметим, что сохраняющиеся плотности χ_2 и χ_4 являются полными производными по переменной x от некоторых функций. Соответствующие им сохраняющиеся величины представляются интегралами вида (9.29) от сохраняющихся плотностей. Интегралы от полных производных вычисляются и оказываются тождественно равными нулю после подстановки в подынтегральное выражение функции $u(x)$ и ее производных при $x = \pm\infty$. Такие интегралы движения тривиальны. Соответствующие сохраняющиеся плотности также естественно считать тривиальными.

Покажем, что все функции χ_n с четными номерами тривиальны. Нетривиальными являются χ_n с нечетными номерами.

Положим k в (9.34) вещественным и отделим вещественную и мнимую части в полученном уравнении. Полагая

$$\chi \equiv \chi_R + i\chi_I,$$

из (9.34) получим, беря мнимую часть,

$$\chi_{I,x} + 2\chi_I\chi_R - 2k\chi_R = 0.$$

Откуда

$$\chi_R = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\chi_I - k).$$

Очевидно, функция χ_R является полной производной от $\ln(\chi_I - k)$. С другой стороны, функции $\chi_{2n}(x)$ в разложении (9.32) представляют собой коэффициенты асимптотического разложения $\chi_R(x)$ по степеням $1/k$. Следовательно, все функции $\chi_R(x)$ представляются в виде полных производных по переменной x от некоторых функций, выражающихся через функцию $u(x)$ и ее производные.

Обозначим

$$2I_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{2n+1}(x)dx, \; n = 0, 1, 2, \dots . \tag{9.38}$$

Величины I_n являются интегралами движения уравнения КдФ (интегральными законами сохранения).

Явные выражения для нескольких первых интегралов (9.38), в которых сохраняющиеся плотности χ_{2n+1} находятся из рекуррентного соотношения (9.37), с помощью интегрирования по частям приводятся к виду

$$I_{-1} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx, \; I_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)dx,$$

$$I_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2}u_x^2 + u^3)dx, \tag{9.39}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_{xx}^2 - 5u^2u_{xx} + 5u^4)dx.$$

Для анализа физического смысла законов сохранения вычислим в качестве примеров вариационные производные от этих функционалов.

Пример 1. Рассмотрим приращение функционала I_{-1}:

$$I_{-1}(u + \delta u) - I_{-1}(u) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(u(x) + \delta u(x))dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta u(x)dx.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta I_{-1}}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2}. \tag{9.40}$$

Пример 2. Для функционала I_0 имеем

$$I_0(u + \delta u) - I_0(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(u(x) + \delta u(x))^2dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\delta u(x)dx + o(\delta u),$$

где $o(\delta u) = (1/2)\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta u(x))^2dx$. Откуда

$$\frac{\delta I_0}{\delta u(x)} = u(x). \tag{9.41}$$

Пример 3. Для функционалов I_1, I_2 с помощью интегрирования по частям аналогично находим

$$\frac{\delta I_1}{\delta u(x)} = u_{xx} - 3u^2, \tag{9.42}$$

$$\frac{\delta I_2}{\delta u(x)} = u_{xxxx} - (5/2)(u^2)_{xx} - 5uu_{xx} + 10u^3. \tag{9.43}$$

Рассмотрим физический смысл интегралов I_{-1}, I_0, I_1, I_2.

9.2 Физический смысл сохраняющихся величин

Запишем производную по времени от интегралов I_n (9.38) в форме (9.24),

$$\frac{dI_n}{dt} = \{I_n, H\}. \tag{9.44}$$

Так как I_n сохраняется во времени, то $\{I_n, H\} = 0$. Рассмотрим причины, вследствие которых скобка Пуассона обращается в нуль для интегралов (9.39).

Для интеграла I_{-1} имеем $\dfrac{\delta I_{-1}}{\delta u(x)} = -\dfrac{1}{2}$. Сохранение I_{-1} связано со спецификой скобки Пуассона (9.18) — наличием в ней производной $\dfrac{\partial}{\partial x}$. Тогда $\dfrac{dI_{-1}}{dt} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x)}dx$. Подынтегральная функция представляет собой полную производную. Интеграл от полной производной вычисляется и после подстановки пределов интегрирования $x = \pm\infty$ обращается в нуль.

Сохранение I_0 можно связать с инвариантностью гамильтониана H вида (9.16) относительно сдвигов по пространственной координате x посредством следующих (нестрогих) рассуждений. Вычислим функционал $H(u)$ вида (9.16) для функции $u = u(x,t)$ и для функции $u(x+a,t)$, где a — вещественный параметр. Обозначим их значения через $H[u(x)]$ и $H[u(x+a)]$, соответственно. Непосредственным сравнением интегралов (9.16), задающих $H[u(x)]$ и $H[u(x+a)]$, нетрудно убедиться в том, что $H[u(x)] = H[u(x+a)]$.

Продифференцируем равенство

$$H[u(x+a)] - H[u(x)] = 0 \tag{9.45}$$

по параметру a и положим $a = 0$, получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x+a,t)^3 + \frac{1}{2}u_x(x+a,t)^2\right]dx\right)\Big|_{a=0} &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty}(u_x u_{xx} + 3u^2 u_x)dx &= 0.\end{aligned} \tag{9.46}$$

Знак первого слагаемого можно изменить на противоположный с помощью интегрирования по частям, тогда (9.46) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}(-u_{xx} + 3u^2)u_x dx = 0. \tag{9.47}$$

Принимая во внимание выражения для вариационных производных (9.17), (9.41), приведем (9.47) к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta H}{\delta u(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_0}{\delta u(x,t)}dx \equiv \frac{dI_0}{dt} = 0.$$

Таким образом, условие инвариантности (9.45) приводится к условию сохранения интеграла I_0. Как известно, в классической механике инвариантность системы относительно пространственных сдвигов приводит к сохранению импульса системы. Это может служить аргументом интерпретировать интеграл $I_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx$ как *импульс поля* $u(x,t)$.

Интеграл I_1 с точностью до знака совпадает с гамильтонианом $H(u)$ (9.16), который естественно интерпретировать как *энергию поля* $u(x,t)$.

Отметим, что высшие законы сохранения I_n, $n \geq 2$ не интепретированы в современной литературе.

Выразим теперь I_n через данные рассеяния. Для этого в (9.33) подставим разложение (9.32), получим

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(x)dx. \tag{9.48}$$

Примем во внимание, что интегралы с четными номерами тождественно равны нулю, получим

$$\ln a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^{2n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{2n+1}(x)dx, \tag{9.49}$$

откуда с учетом обозначения (9.38) имеем

$$\ln a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^{2n+1}} I_{n-1}. \tag{9.50}$$

Выражение интегралов I_n через данные рассеяния можно получить, если в (9.50) разложить $\ln a(k)$ в степенной ряд по $1/(2ik)$ и сравнить разложения в левой и правой частях этого равенства.

С этой целью формулу (6.23) для $\arg a(k)$ запишем в виде

$$\ln a(k) = \sum_{l=1}^{N} \ln \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l} + \frac{1}{\pi i} \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} dk'. \tag{9.51}$$

Модуль $|a(k)|$ убывает быстрее любой степени $|k|$ при $|k| \to \infty$, т.е.

$$\ln |a(k)| = O(e^{-\lambda |k|}), \quad |k| \to \infty.$$

Действительно, из (6.22) следует

$$\ln |a(k)| = -\frac{1}{2} \ln |1 - |r(k)|^2| = |r(k)| + o(|r(k)|),$$

где $r(k) = b(k)/a(k)$ (см. (6.20)). Из свойств функций $a(k)$, $b(k)$, рассмотренных в п. 6.1.1 следует, что $b(k)$ убывает быстрее любой степени $|k|$ при $|k| \to \infty$, следовательно,

$$|k^j r(k)| \to 0, \quad |k| \to \infty. \tag{9.52}$$

Разложим (9.51) в степенной ряд по $\dfrac{1}{k}$.

Запишем $\ln \dfrac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l} = \ln \dfrac{1 - x_l}{1 + x_l}$, $x_l = i\kappa_l/k$, далее разлагаем это выражение по x_l в ряд Тэйлора в окрестности $x_l = 0$.

Аналогично,

$$\frac{\ln |a(k')|}{k' - k} = k^{-1} \frac{\ln |a(k')|}{x - 1}.$$

Это выражение также нетрудно разложить в степенной ряд по x. Поскольку $|a(-k)| = |a(k)|$, то коэффициенты при четных степенях k в указанных разложениях будут равны нулю. Подставим эти разложения в (9.51), получим

$$\ln a(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+1}} \left[\frac{2(-1)^{j+1}}{2j+1} \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^{2j+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk \right]. \tag{9.53}$$

Замечание 9.1 *Вследствие (9.52) интеграл* $\int_0^\infty k^{2j} \ln |a(k)| dk$ *сходится в обычном смысле.*

Подставим теперь (9.53) в (9.50), получим искомое выражение интегралов I_n через данные рассеяния

$$2I_{j-1} = \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1} \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^{2j+1} + \frac{(-1)^{j+1} 2^{2(j+1)}}{\pi} \int_0^\infty k^{2j} \ln |a(k)| dk. \tag{9.54}$$

В частности, для гамильтониана (9.16) находим $H = -I_1$,

$$H = -\frac{32}{5} \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^5 + \frac{32}{\pi} \int_0^\infty k^4 \ln |a(k)| dk. \tag{9.55}$$

Из (9.55), в частности, следует, что вклад в энергию от переменных непрерывного спектра положителен, а от дискретного — отрицателен.

9.3 Контрольные вопросы

1 Из каких элементов состоит гамильтонова структура на конечномерном фазовом пространстве M^{2n}?

2 Дайте определение скобки Пуассона на фазовом пространстве M^{2n}. Каким свойствам должна удовлетворять скобка Пуассона?

3 Что такое канонические координаты в фазовом пространстве? Как записывается скобка Пуассона в канонических координатах?

4 Что такое функция Гамильтона? Запишите гамильтонову систему в конечномерном фазовом пространстве M^{2n} в произвольной системе координат.

5 Запишите гамильтонову систему в канонических координатах фазового пространства.

6 Вычислите производную от функции $f(q(t)p(t))$, где $p_i(t)$, $q_i(t)$ есть решение гамильтоновой системы.

7 Дайте определение функционала от функции $u(x)$.

8 Дайте определение вариации функционала $I(u)$.

9 Дайте определение вариационной производной $\delta I / \delta u(x)$.

10 Вычислите вариационную производную от функционала $I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, u(x), u_x(x), u_{xx}(x)) dx$.

11 Запишите уравнение КдФ в гамильтоновой форме.

12 Запишите выражение скобки Пуассона для уравнения КдФ.

13 Дайте определение интегрального закона сохранения уравнения КдФ.

14 Дайте определение дифференциального закона сохранения уравнения КдФ.

15 Запишите общий вид полиномиального закона сохранения уравнения КдФ.

16 Что такое тривиальный закон сохранения? Какие законы сохранения будут тривиальными для уравнения КдФ?

17 Объясните физический смысл закона сохранения $I_0(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x) dx$ для уравнения КдФ.

10 Нелинейное уравнение Шредингера

10.1 Вводные замечания

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) есть уравнение на комплексную скалярную функцию $u(x,t)$

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = 0. \tag{10.1}$$

Напомним, что здесь $|u|^2 = u^* u$, u^* комплексно сопряжено к u, x — пространственная координата, $x \in R^1$, t — время.

НУШ исторически было вторым уравнением после уравнения КдФ, которое удалось проинтегрировать методом обратной задачи[18]. Название *нелинейное уравнение Шредингера* было дано уравнению (10.1) потому, что оно по форме совпадает с квантовомеханическим уравнением Шредингера, в котором $|u|^2$ играет роль потенциала.

Важное значение НУШ в нелинейной физике обусловлено тем, что, с одной стороны, оно возникает при описании многих нелинейных явлений различной физической природы. С другой стороны, НУШ допускает точное интегрирование, благодаря чему описываемое им явление может быть детально проанализировано.

В квантовой физике, где $u(x,t)$ имеет смысл волновой функции, НУШ описывает сравнительно ограниченный круг явлений. Примером таких задач может служить теория солитонных возбуждений в молекулярных системах[19]. Основные физические приложения НУШ нашло в теории распространения огибающих волновых пакетов в системах с дисперсией и слабой нелинейностью. Баланс этих двух конкурирующих факторов реализуется, в частности, в виде солитонных решений, которыми обладает НУШ. Обзор задач теории нелинейных волн можно найти в главе 8 книги[20].

В этой области приложений НУШ огромный практический интерес представляют нелинейные оптические явления. Среди них особое место занимает теория распространения оптических солитонов в линиях волоконно-оптической связи[21].

В этой главе мы рассмотрим основные элементы теории интегрирования НУШ (10.1) методом обратной задачи, составляющей основу описания указанных выше явлений. Мы будем следовать главам 6, 7, в которых метод обратной задачи построен для уравнения КдФ.

10.2 Матричная $(L-A)$ — пара

Интегрирование НУШ методом обратной задачи основано на существовании $(L-A)$ — пары. Операторы L и A, составляющие $(L-A)$ — пару, в отличие от уравнения КдФ (см. п. 7.4), являются матричными дифференциальными операторами и имеют следующий вид:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ -u & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|u|^2 & -iu^*\partial/\partial x - \frac{i}{2}u_x^* \\ iu\partial/\partial x + \frac{1}{2}u_x & -\frac{1}{2}|u|^2 \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

Коммутатор

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - A, L\right] = i\frac{\partial L}{\partial t} + [L, A] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & iu_t - \frac{1}{2}u_{xx}^* - |u|^2 u^* \\ -iu_t - \frac{1}{2}u_{xx} - |u|^2 u & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.4}$$

[18] Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах// Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1971. Т. 61. С. 118 – 134

[19] Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова Думка, 1984. С. 288

[20] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. С. 694

[21] Хаус Х. Волны и поля в оптоэлектронике: Перевод с английского. М.: Мир, 1988. С. 432

очевидно, обращается в нуль на решениях НУШ вида (10.1). Таким образом, операторы (10.2), (10.3) образуют $(L-A)$ — пару для НУШ (10.1). Операторы (10.2), (10.3), являясь матричными дифференциальными операторами, действуют на двухкомпонентные вектор - функции вида

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(x,t) \\ \psi^{(2)}(x,t) \end{pmatrix}, \tag{10.5}$$

где $\psi^{(1)}(x,t)$, $\psi^{(2)}(x,t)$ — скалярные (однокомпонентные) комплексные функции.

Обозначим пространство вектор - функций вида (10.5) через V, и определим в нем скалярное произведение $<\psi,\varphi>$ функций $\psi,\varphi\in V$ следующим выражением:

$$<\psi,\varphi>=\sum_{k=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi(x)^{(k)})^{*}\varphi^{(k)}(x)dx. \tag{10.6}$$

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что оператор L вида (10.2) не является эрмитовым относительно скалярного произведения (10.6), то есть $<\psi,L\varphi>\neq<L\psi,\varphi>$. Для нелинейного уравнения Шредингера (10.1) поставим задачу Коши

$$\begin{cases} iu_t+\frac{1}{2}u_{xx}+|u|^2u=0, \\ u(x,t)|_{t=0}=u_0(x) \end{cases} \tag{10.7}$$

в классе гладких функций $u(x,t)$, убывающих вместе со своими производными по x при $|x|\to\infty$.

10.3 Матричная задача рассеяния

В соответствии с общей схемой метода обратной задачи (см. п. 7.4) сначала следует проанализировать спектральную задачу (6.5) для оператора L (10.2) в пространстве функции V,

$$L\psi=\lambda\psi, \quad \psi\in V. \tag{10.8}$$

Систему (10.8), определяющую двухкомпонентную функцию ψ, называют *ассоциированной матричной линейной задачей* для нелинейного уравнения Шредингера, или *задачей Захарова - Шабата.*

Рассмотрим необходимые в дальнейшем свойства системы (10.8), (10.2) для потенциала $u(x)$, убывающего при $|x|\to\infty$. Так как оператор L не является эрмитовым в пространстве V, то собственные значения λ в общем случае будут комплексными числами. Рассмотрим некоторые свойства задачи (10.8). Пусть $\psi=\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\ \psi^{(2)}\end{pmatrix}$ есть решение задачи (10.8). Тогда функция

$$\bar{\psi}=\begin{pmatrix}\psi^{*(2)}\\ -\psi^{*(1)}\end{pmatrix} \tag{10.9}$$

есть решение задачи

$$L\bar{\psi}=\lambda^{*}\bar{\psi}, \tag{10.10}$$

а функция

$$\tilde{\psi}=\begin{pmatrix}\psi^{*(2)}\\ \psi^{*(1)}\end{pmatrix} \tag{10.11}$$

есть решение задачи

$$L^{+}\tilde{\psi}=\lambda^{*}\tilde{\psi}. \tag{10.12}$$

Соотношения (10.9), (10.11), связывающие решения задач (10.8), (10.10), (10.12), называются соотношениями *инволюции.*

Оператор L^+ эрмитовски сопряжен к оператору L и имеет вид

$$L^+ = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -u^* \\ u & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.13}$$

Для компонент $\psi^{(1)}$ $\psi^{(2)}$ вектор - функции ψ вида (10.5) система (10.8), (10.2) принимает вид

$$\begin{cases} i\psi_x^{(1)} + u^*\psi^{(2)} = \lambda\psi^{(1)} \\ -i\psi_x^{(2)} - u\psi^{(1)} = \lambda\psi^{(2)} \end{cases} \tag{10.14}$$

Система (10.14) имеет два линейно независимых решения. В этом нетрудно убедиться, рассматривая систему в области $|x| \to \infty$, где потенциал $u(x) \to 0$. Система (10.14) принимает вид

$$\begin{cases} i\psi_x^{(1)} = \lambda\psi^{(1)}, \\ -i\psi_x^{(2)} = \lambda\psi^{(2)}. \end{cases} \tag{10.15}$$

Общее решение системы (10.15)

$$\psi = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \tag{10.16}$$

и представляет собой суперпозицию двух линейно независимых решений, отвечающих одному собственному значению λ.

Очевидно, система (10.14) будет иметь два линейно независимых решений и в области $|x| < \infty$.

Лемма 10.1 *Если вектор - функция* $v = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$ *есть решение системы (10.14) с собственным значением* λ_1, *а* $w = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{pmatrix}$ *— решение с собственным значением* λ_2, *тогда*

$$i\frac{d}{dx}W(v, w) = (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 w_2 + v_2 w_1) \tag{10.17}$$

Здесь через $W(v, w)$ обозначено выражение

$$W(v, w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}, \tag{10.18}$$

которое называется вронскианом (определителем Вронского) решений v и w.

Задача рассеяния для системы (10.14) состоит в нахождении функций Иоста, матрицы переноса и изучения их свойств (см. п. 6.1.1).

10.4 Функции Иоста. Матрица переноса

При вещественном λ функции Иоста $g(x, \lambda)$ и $f(x, \lambda)$ определяются как решение задачи (10.14) с граничными условиями

$$g(x, \lambda) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \quad x \to -\infty, \tag{10.19}$$

$$f(x, \lambda) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \quad x \to +\infty. \tag{10.20}$$

Отсюда, учитывая соотношение инволюции (10.9), следует

$$\bar{g}(x, \lambda) \to -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \quad x \to -\infty, \tag{10.21}$$

$$\bar{f}(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \quad x \to +\infty. \tag{10.22}$$

$f(x,\lambda)$ и $\bar{f}(x,\lambda)$ образуют базис решений системы (10.14). Разложим функцию $g(x,\lambda)$ по этому базису:

$$g(x,\lambda) = a(\lambda)\bar{f}(x,\lambda) + b(\lambda)f(x,\lambda). \tag{10.23}$$

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ совместно с соотношением инволюции (10.9) определяют матрицу переноса. Применяя лемму 10.1 к функциям g и $\bar{g}$ и вычисляя вронскиан (10.18) при $|x| \to \infty$, получим формулы

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1, \tag{10.24}$$

$$a(\lambda) = W(g(x,\lambda), f(x,\lambda)), \quad \mathrm{Im}\lambda = 0. \tag{10.25}$$

Обращая (10.23) с помощью (10.24), находим

$$f(x,\lambda) = -a(\lambda)\bar{g}(x,\lambda) + b^*(\lambda)g(x,\lambda), \quad \mathrm{Im}\lambda = 0. \tag{10.26}$$

10.5 Аналитические свойства

Функция $f(x,\lambda)$ определяется как решение системы (10.14) с граничным условием (10.20). Представим эту задачу в виде интегральных уравнений.

Систему (10.14) для функции Иоста $f(x,\lambda)$ запишем в виде

$$\begin{cases} if_x^{(1)} + u^* f^{(2)} = \lambda f^{(1)}, \quad f^{(1)} \to 0 \quad x \to \infty, \\ if_x^{(2)} + u f^{(1)} = -\lambda f^{(2)}, \quad f^{(2)} \to e^{i\lambda x}, \quad \mathrm{Im}\lambda = 0. \end{cases} \tag{10.27}$$

Отсюда непосредственно получаем уравнение второго порядка для функции $f^{(2)}$

$$f_{xx}^{(2)} + \lambda^2 f^{(2)} = iu_x f^{(1)} - |u|^2 f^{(2)}. \tag{10.28}$$

Определив $f^{(2)}(x,\lambda)$ из уравнения (10.28), можно выразить функцию $f^{(1)}(x,\lambda)$ из уравнения (10.27).

Повторяя рассуждения теоремы 6.1, преобразуем уравнение (10.28) для функции Иоста в интегральное уравнение

$$\begin{gathered} f^{(2)}(x,\lambda) = e^{i\lambda x} - \\ -\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-y)}{\lambda}[iu'(y)f^{(1)}(y,\lambda) - \\ -|u(y)|^2 f^{(2)}(y,\lambda)]dy. \end{gathered} \tag{10.29}$$

Функция $f^{(1)}$ выражается в виде

$$f^{(1)}(x,\lambda) = -i\int_x^\infty u^*(y)f^{(2)}(y,\lambda)e^{-i\lambda(x-y)}dy. \tag{10.30}$$

Обозначим

$$\varphi_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}f^{(1)}(x,\lambda), \quad f^{(1)}(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\varphi_1(x,\lambda), \tag{10.31}$$

$$\varphi_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}f^{(2)}(x,\lambda), \quad f^{(2)}(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\varphi_2(x,\lambda). \tag{10.32}$$

Тогда из (10.27) получим уравнения для функций φ_1, φ_2

$$i\varphi_{1x} = -2\lambda\varphi_1 + u^*\varphi_2 \tag{10.33}$$

$$i\varphi_{2x} = -u\varphi_1 \tag{10.34}$$

Подставив (10.33) и (10.34) в (10.30) и (10.29), найдем вид соответствующих интегральных уравнений:

$$\varphi_1(x,\lambda) = -i\int_x^\infty e^{-2i\lambda(x-y)}u^*(y)\varphi_2(y,\lambda)dy, \tag{10.35}$$

$$\varphi_2(x,\lambda) = 1 - \int_x^\infty \frac{1-e^{-2i\lambda(x-y)}}{2i\lambda}[iu'(y)\varphi_1(y,\lambda) - \\ - |u(y)|^2\varphi_2(y,\lambda)]dy. \tag{10.36}$$

Уравнения (10.35), (10.36) представляют собой интегральные уравнения вольтерровского типа, имеющие бесконечный радиус сходимости. Они определяют функции φ_1 и φ_2 при вещественном λ. Если сместить λ в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, то в подынтегральных выражениях (10.35) и (10.36) появится экспонента с отрицательным показателем $e^{r\eta(x-y)}$ (учитывая, что $(x-y)<0$, $\eta>0$). Это улучшит сходимость итерационных рядов, представляющих решения интегральных уравнений. Таким образом, если решения интегральных уравнений существовали при вещественном λ, они тем более существуют при комплексном λ, $\mathrm{Im}\lambda>0$. Решения системы вольтерровских уравнений (10.35), (10.36) можно рассматривать как аналитическое продолжение функции $f(x,\lambda)$ в верхнюю полуплоскость λ. Аналогично, функция $g(x,\lambda)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость λ. Из свойств аналитичности функций Иоста непосредственно получим свойства аналитичности элементов матрицы переноса.

Следствие 10.0.2 *Функция $a(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости λ.*

Доказательство следует из свойств аналитичности функций $f(x,\lambda)$, $g(x,\lambda)$ и формулы (10.25).

Из выражений (10.35) и (10.36) с помощью интегрирования по частям получаются асимптотические (по λ, $\lambda\to\infty$) формулы

$$\varphi_1(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}u^*(x)\varphi_2(x,\lambda) + \\ + \frac{1}{2\lambda}\int_x^\infty e^{-2i\lambda(x-y)}(u^*(y)\varphi_2(y,\lambda))_{,y}dy. \tag{10.37}$$

Из свойств интеграла Фурье[22] следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_x^\infty e^{-2i\lambda(x-y)}\chi(y)dy \to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda|\to\infty. \tag{10.38}$$

Принимая во внимание множитель $1/\lambda$ перед интегралом в (10.37), можно утверждать, что второе слагаемое в (10.37) имеет порядок
$O(1/\lambda^2)$.

С учетом оценки (10.38) получим следующие свойства функций
$\varphi_2(x,\lambda)$ и $a(\lambda)$:

$$\varphi_2(x,\lambda) = 1 + \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty |u(y)|^2\varphi_2(y,\lambda)dy + O(\frac{1}{\lambda^2}), \tag{10.39}$$

$$a(\lambda)\to 1, \quad |\lambda|\to\infty, \quad \mathrm{Im}\lambda\geq 0. \tag{10.40}$$

Замечание 10.1 *Аналогичными рассуждениями можно показать, что $\bar f(x,\lambda)$, $\bar g(x,\lambda)$ аналитически продолжаются в нижнюю полуплоскость λ.*

[22] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М: Наука, 1966. 656 с. Т. III. п. 711.

10.5.1 Дискретный спектр

Дискретные собственные значения (дискретный спектр) и соответствующие собственные функции необходимы для решения обратной задачи рассеяния.

Определение 10.1 *Значение $\lambda = \lambda_0$ называется точкой дискретного спектра оператора L, если соответствующее решение $f_0(x)$ убывает при $x \to \pm\infty$.*

Следствие 10.0.3 *Точки вещественной оси λ не могут быть точками дискретного спектра.*

Решение системы (10.27), отвечающее дискретному значению спектра $\lambda = \lambda_0$ должно убывать при $|x| \to \infty$. Так как потенциал $u(x)$ убывает в области, удаленной от начала координат, система (10.27) принимает вид

$$\begin{cases} i f_x^{(1)} = \lambda f^{(1)} \\ i f_x^{(2)} = -\lambda f^{(2)}. \end{cases} \tag{10.41}$$

Общее решение этой системы при $|x| \to \infty$ дается выражениями

$$f^{(1)} = \alpha_1 e^{-i\lambda x}, \quad f^{(2)} = \alpha_2 e^{i\lambda x}, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const}\ .$$

Для вещественного λ убывающих на бесконечности решений система (10.41) не имеет.

Следствие 10.0.4 *Нули функции $a(\lambda)$ в верхней полуплоскости λ являются точками дискретного спектра оператора L.*

Пусть $\lambda = \zeta_n$, $\mathrm{Im}\zeta_n > 0$ аннулирует функцию $a(\lambda)$, $a(\zeta_n) = 0$. Обращение в нуль вронскиана (10.25) означает линейную зависимость вектор - функций g и f,

$$g(x, \zeta_n) = \rho_n f(x, \zeta_n), \quad \rho = \mathrm{const}\ . \tag{10.42}$$

Учитывая асимптотики (10.19), (10.20), заключаем, что ζ_n — точка дискретного спектра. Справедлива формула —

$$a_n' \equiv \left.\frac{da(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\zeta_n} =$$

$$= -i\rho_n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(x, \zeta_n) f(x, \zeta_n) dx. \tag{10.43}$$

Для доказательства рассмотрим уравнение $Lf(x,\lambda) = \lambda f(x,\lambda)$ при $\lambda = \zeta_n$ и, дифференцируя по λ, положим $\lambda = \zeta_n$, получим

$$Lf(x, \zeta_n) = \zeta_n f(x, \zeta_n),$$

$$Lf'(x, \zeta_n) = f(x, \zeta_n) + \zeta_n f'(x, \zeta_n), \quad f'(x, \zeta_n) = (\partial f(x, \lambda)/\partial\lambda)_{\lambda=\zeta_n}.$$

Из этих соотношений следует

$$i\frac{\partial}{\partial x}(f^{(1)\prime} f^{(2)} - f^{(1)} f^{(2)\prime}) = 2 f^{(1)} f^{(2)}$$

или

$$i\frac{d}{dx} W(f'(x, \zeta_n), f(x, \zeta_n)) = \tilde{f}^*(x, \zeta_n) f(x, \zeta_n). \tag{10.44}$$

Из (10.14), (10.20), (10.42) находим следующие асимптотики:

$$f(x, \zeta_n) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta_n x};$$

$$f'(x, \zeta_n) \to ix \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta_n x}, \quad x \to +\infty.$$

$$f(x,\zeta_n) \to \frac{1}{\rho_n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta_n x};$$

$$f'(x,\zeta_n) \to a'_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta_n x}, \quad x\to-\infty.$$

Интегрируя (10.44), получаем

$$-\frac{i}{\rho_n}a'_n\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}^*(x,\zeta_n)f(x,\zeta_n)dx;$$

$$a'_n = -i\rho_n\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}^*(x,\zeta_n)f(x,\zeta_n)dx =$$
$$= -2i\rho_n\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(1)}(x,\zeta_n)f^{(2)}(x,\zeta_n)dx.$$

Следствие 10.0.5 *Нули функции $a(\lambda)$ в верхней полуплоскости простые.*

Доказательство следует из (10.43) в предположении, что интеграл в правой части не равен нулю.

10.5.2 Соотношение ортогональности функций Иоста

В теории матричной задачи рассеяния (10.8) и ее приложениях оказываются полезными соотношения ортогональности функций Иоста. Получим некоторые из этих соотношений.

Если $\psi(x,\zeta_1)$ и $\psi(x,\zeta_2)$ — есть собственные функции оператора L, отвечающие собственным значениям ζ_1 и ζ_2 дискретного спектра, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}^*(x,\zeta_1)\psi(x,\zeta_2)dx = 0, \quad \zeta_1\neq\zeta_2. \tag{10.45}$$

Это непосредственно следует из (10.17) с учетом убывания $\psi(x,\zeta_2)$ на бесконечности.

Будем считать интеграл (10.45) отличным от нуля при $\zeta_1=\zeta_2$. В этом случае справедливо соотношение (10.43). Для функций Иоста справедливы следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\tilde{f}}^*(x,\mu)f(x,\lambda)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\tilde{g}}^*(x,\mu)g(x,\lambda)dx = 2\pi|a(\lambda)|^2\delta(\mu-\lambda), \tag{10.46}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\tilde{f}}^*(x,\mu)g(x,\lambda)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\tilde{g}}^*(x,\mu)f(x,\lambda)dx = 0. \tag{10.47}$$

Представим интеграл (10.46) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\tilde{f}}^*(x,\mu)f(x,\lambda)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(-f_1^*(x,\mu)f_1(x,\lambda)+f_2^*(x,\mu)f_2(x,\lambda))dx, \tag{10.48}$$

Напомним, что в соответствии с (10.9), (10.11)

$$\bar{\tilde{f}}^* = \begin{pmatrix}-f_1^*\\f_2^*\end{pmatrix}.$$

Разобъем область интегрирования $-\infty, +\infty$ в (10.48) на части $(-\infty, +\infty) = \cup(-A, A) \cup (A, +\infty)$. Число $A > 0$ выберем достаточно большим, чтобы в областях $(-\infty, -A)$ и $(A, +\infty)$ можно было воспользоваться асимптотическими выражениями для функции $f(x, \lambda)$ (10.20), (10.22).

Рассмотрим интеграл (10.48) в области $(A, +\infty)$

$$J_1(\mu, \lambda) = \int_A^{+\infty} \tilde{\bar{f}}^*(x, \mu) f(x, \lambda) dx = \int_A^{+\infty} e^{i(\lambda-\mu)x} dx. \tag{10.49}$$

Интеграл в правой части (10.49) не существует в смысле Римана. Будем рассматривать интеграл (10.49) как обобщенную функцию в виде интеграла в смысле главного значения[23].

$$J_1(\mu, \lambda) = \int_A^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0+0} e^{i(\lambda-\mu)x - \varepsilon x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} (-1) \frac{e^{i(\lambda-\mu)A - \varepsilon A}}{i(\lambda - \mu + i\varepsilon)} =$$
$$= \pi\delta(\lambda - \mu) + i \mathrm{vp} \frac{e^{i(\lambda-\mu)A}}{\lambda - \mu}.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{-A} \tilde{\bar{f}}^*(x, \mu) f(x, \lambda) dx = a(\lambda) a^*(\mu) \int_{-\infty}^{-A} e^{i(\lambda-\mu)x} dx -$$
$$- b(\mu) b^*(\lambda) \int_{-\infty}^{-A} e^{i(\mu-\lambda)x} dx = \pi(|a|^2 - |b|^2)\delta(\lambda - \mu) -$$
$$- i \mathrm{vp} \frac{a(\lambda) a^*(\mu)}{(\lambda - \mu)} e^{-i(\lambda-\mu)A} - i \mathrm{vp} \frac{b(\mu) b^*(\lambda)}{\lambda - \mu} e^{i(\lambda-\mu)A}.$$

Для вычисления $\int_{-A}^{A}$ воспользуемся формулой (10.17), получим

$$\int_{-A}^{A} \tilde{\bar{f}}^*(x, \mu) f(x, \lambda) dx = \frac{i}{\lambda - \mu} \tilde{\bar{f}}^*(x, \mu) P f(x, \lambda) \Big|_{-A}^{A} =$$
$$= \frac{i}{\mu - \lambda} f_l^*(x, \mu) f_l(x, \lambda) \Big|_{-A}^{A} =$$
$$= \frac{i}{\lambda - \mu} [a(\lambda) a^*(\mu) e^{-i(\lambda-\mu)A} + (b(\mu) b^*(\lambda) - 1) e^{i(\lambda-\mu)A}].$$

Интеграл $\int_{-A}^{A}$ представляет собой главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}$, поэтому в последнем равенстве $\frac{1}{\lambda - \mu} \to \ \mathrm{vp}\frac{1}{\lambda - \mu}$. Суммируя интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{+\infty}$, замечаем, что все члены без δ — функций сокращаются. Применяя далее (10.24), получим первое соотношение (10.46).

10.6 Обратная задача рассеяния

Следуя далее аналогии с теорией рассеяния для квантовомеханического уравнения Шредингера (6.5) (см. п.6.1), перейдем к формулировке и решению обратной задачи для уравнения (10.8).

Для этого нам потребуется треугольное разложение для функции Иоста $f(x, \lambda)$, аналогичное (6.37). Без доказательства приведем соответствующее выражение

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \begin{pmatrix} K_1(x, y) \\ K_2(x, y) \end{pmatrix} e^{i\lambda y} dy \tag{10.50}$$

[23] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. в 3-х томах, т. II. М.: Наука, 1966. 800 с. П. 484, с. 500

причем $K_1(x,y)$ и $K_2(x,y) \in L_2(-\infty,+\infty)$ по переменной y. Представление (10.50) запишем в виде

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,y) e^{i\lambda y} dy, \tag{10.51}$$

$$\bar{f}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty \bar{K}(x,y) e^{-i\lambda y} dy, \tag{10.52}$$

где

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} K_1(x,y) \\ K_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Запишем соотношение (10.23) в виде

$$\frac{g(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda(x-y)} =$$
$$= e^{i\lambda y}\left[\bar{f}(x,\lambda) + r(\lambda) f(x,\lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}\right].$$

Левая часть аналитична в верхней полуплоскости за исключением N простых полюсов $\lambda = \zeta_n$, при $|\lambda| \to \infty$ левая часть стремится к нулю. Проинтегрируем по λ от $-\infty$ до $+\infty$ зто равенство и вычислим интеграл от левой части по теории вычетов, используя обычную формулу Коши и выбирая контур, как показано на Рис. 10.1.

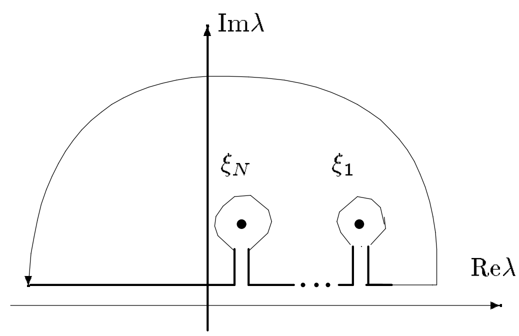

Рис. 10.1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{g(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda(x-y)}\right] d\lambda =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y}\left[\bar{f}(x,\lambda) + r(\lambda) f(x,\lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}\right] d\lambda. \tag{10.53}$$

Обозначим

$$J \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{g(x,\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda(x-y)}\right] d\lambda.$$

Вычисление интеграла дает

$$J = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{g(x,\zeta_n)}{a'(\zeta_n)} e^{i\zeta_n y} = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n f(x,\zeta_n)}{a'(\zeta_n)} e^{i\zeta_n y} =$$
$$= 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n}{a'(\zeta_n)} e^{i\zeta_n y}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta_n x} + \int_x^\infty K(x,z) e^{i\zeta_n z} dz\right].$$

Здесь в последнем равенстве использовано (10.51).

Правая часть уравнения (10.53) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda y}\left[\int_x^{\infty}\bar{K}(x,z)e^{-i\lambda z}dz + r(\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}+\right.$$
$$\left.+\,r(\lambda)\int_x^{\infty}K(x,z)e^{i\lambda z}dz\right]$$

Перепишем (10.53) в виде

$$-2\pi\sum_{n=1}^{N}\frac{\rho_n}{ia'(\zeta_n)}e^{i\zeta_n(y+x)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 2\pi\int_x^{\infty}K(x,z)\sum_{n=1}^{N}\frac{\rho_n e^{i\zeta_n(y+z)}}{ia'(\zeta_n)}dz =$$
$$=\int_x^{\infty}dz\bar{K}(x,z)\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda e^{i\lambda(y-z)} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(x+y)}r(\lambda)d\lambda +$$
$$+\int_x^{\infty}K(x,z)dz\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda e^{i\lambda(z+y)}r(\lambda) =$$
$$=2\pi\bar{K}(x,y) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(x+y)}r(\lambda)d\lambda +$$
$$+\int_x^{\infty}K(x,z)dz\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda e^{i\lambda(z+y)}r(\lambda).$$

Введем обозначение

$$F(x)\equiv\sum_{n=1}^{N}\frac{\rho_n e^{i\zeta_n x}}{ia'(\zeta_n)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}r(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \qquad (10.54)$$

Тогда рассматриваемое равенство (10.53) примет вид

$$\bar{K}(x,y) + \int_x^{\infty}K(x,z)F(z+y)dz + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y) = 0. \qquad (10.55)$$

Уравнения (10.54), (10.55) являются матричными аналогами уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко.

Они образуют замкнутую систему интегральных уравнений обратной задачи рассеяния. В них в качестве заданных следует брать набор величин

$$S=\{\zeta_n,\rho_n,\quad n=1,\ldots,N,\quad I_m\zeta_n>0; r(\lambda),$$
$$-\infty<\lambda<+\infty\} \qquad (10.56)$$

По этим данным рассеяния (10.56) восстанавливается ядро $F(x)$ в уравнении (10.55), решая (10.55), находим $K(x,y)$, что позволяет найти функцию Иоста (10.50).

Распишем (10.55) по компонентам и найдем "формулу для потенциала $u(x)$" через $K(x,y)$.

$$\begin{pmatrix}K_2^*(x,y)\\-K_1^*(x,y)\end{pmatrix} + \int_x^{\infty}\begin{pmatrix}K_1(x,z)\\K_2(x,z)\end{pmatrix}F(z+y)dz +$$
$$+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y) = 0$$

Откуда имеем

$$K_2^*(x,y) = -\int_x^{\infty}K_1(x,z)F(z+y)dz, \qquad (10.57)$$

$$K_1(x,y) = F^*(x+y) -$$
$$-\int_x^{\infty}K_1(x,z)\int_x^{\infty}F^*(y+z')F(z'+z)dz'dz. \qquad (10.58)$$

Интегрируя по частям, из (10.50) получим асимптотическую (при $|\lambda\to\infty|$) формулу

$$\varphi_1(x,\lambda)=\frac{1}{i\lambda}\int_x^\infty K_1(x,y)de^{i\lambda(y-x)}=\frac{1}{i\lambda}K_1(x,x)+O(\frac{1}{\lambda^2}).$$

Сравнивая ее с (10.37), получаем

$$u(x)=-2iK_1^*(x,x) \tag{10.59}$$

10.7 Эволюция данных рассеяния. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи

Метод обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера (10.1), подобно случаю уравнения КдФ (см. Гл. 7), предполагает получение уравнений эволюции данных рассеяния (10.56).

Эволюция дискретных собственных значений.

Пусть $u(x,t)$ эволюционирует в соответствии с (10.1). Рассмотрим задачу на собственные значения. ζ_n — точка дискретного спектра.

$$Lf(x,\zeta_n)=\zeta_n f(x,\zeta_n). \tag{10.60}$$

В соответствии с (10.11), (10.12)

$$L^+\tilde f(x,\zeta_n)=\zeta_n^*\tilde f(x,\zeta_n). \tag{10.61}$$

L^+ имеет вид (10.13). Дифференцируя (10.60) по t и учитывая операторное представление уравнения Шредингера (10.4), то есть

$$i\frac{\partial L}{\partial t}+[L,A]=0,\quad iu_{xx}+\frac{1}{2}u_{xx}+|u|^2u=0, \tag{10.62}$$

получаем

$$(L-\zeta_n)(\dot f_n+iAf_n)=\dot\zeta_n f_n \tag{10.63}$$

Здесь обозначено $f_n\equiv f(x,\zeta_n)$. Умножим скалярно на $\tilde f_n$, получим, учитывая (10.61) и вид скалярного произведения (10.6), находим

$$\dot\zeta_n\langle\tilde f_n,f_n\rangle=0,$$

$$\langle\tilde f_n,f_n\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{r=1}^{2}\tilde f^{*(r)}(x,\zeta_n)f^{(r)}(x,\zeta_n)dx=\frac{ia_n'}{\rho_n}\neq 0$$

согласно (10.43). Поэтому

$$\dot\zeta_n=0. \tag{10.64}$$

Эволюция элементов матрицы рассеяния.

Для собственных значений непрерывного спектра можно положить по определению

$$\dot\lambda=0. \tag{10.65}$$

Аналогично (10.63), дифференцируя по t уравнение

$$Lg(x,\lambda)=\lambda g(x,\lambda)$$

и учитывая (10.62), получим соотношение:

$$(L-\lambda)(\dot g(x,\lambda)+iAg(x,\lambda))=0. \tag{10.66}$$

Общее решение уравнения (10.66) представим в виде

$$\dot g(x,\lambda)+iAg(x,\lambda)=c(\lambda)g(x,\lambda)+c_1(\lambda)\bar g(x,\lambda).$$

При $x \to -\infty$ $g \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$, $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial^2/\partial x^2$, что следует из (10.3). Переходя к асимптотике $|x| \to \infty$, находим $c(\lambda) = -i\lambda^2$, $c_1(\lambda) = 0$. Следовательно,

$$ig_t - Ag = \lambda^2 g. \tag{10.67}$$

При $x \to +\infty$ асимптотику $g(\lambda)$ найдем из (10.23), (10.20), (10.22)

$$g \to a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + b(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}. \tag{10.68}$$

Переходя к асимптотике $x \to +\infty$ в (10.67) и учитывая (10.68), получим

$$\dot{a}(\lambda) = 0; \quad \dot{b}(\lambda) = -i2\lambda^2 b(\lambda).$$

Подставляя вместо функции $g(x,\lambda)$ собственную функцию дискретного спектра $g(x,\zeta_n)$ в (10.67), получим при $x \to +\infty$ и с учетом (10.42)

$$\dot{\rho}_n = -2i\zeta_n^2 \rho_n.$$

Таким образом, эволюция данных рассеяния определяется следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \dot{\zeta}_n = 0; \quad \dot{\lambda} = 0; \quad \dot{a}(\lambda) = 0; \\ \dot{b}(\lambda) = -2i\lambda^2 b(\lambda); \quad \dot{\rho}_n = -2i\zeta_n^2 \rho_n. \end{gathered} \tag{10.69}$$

Обозначим данные рассеяния при $t = 0$ через

$$\begin{gathered} S(t=0) = \{\zeta_n, \quad \rho_n(0), \quad n = 1, \ldots, N; \\ \mathrm{Im}\zeta_n > 0; \quad r(\lambda, 0), \quad -\infty < \lambda < +\infty\}. \end{gathered} \tag{10.70}$$

Тогда данные рассеяния в момент времени t принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} S(t) = \{\zeta_n, \quad \rho_n(0)e^{-2i\zeta_n^2 t}, \quad b(\lambda,0)e^{-2i\lambda^2 t}; \\ \mathrm{Im}\zeta_n > 0; \quad r(\lambda,t) = r(\lambda,0)e^{-2i\lambda^2 t}, \quad -\infty < \lambda < +\infty\}. \end{gathered} \tag{10.71}$$

Сформулируем схему интегрирования нелинейного уравнения Шредингера (10.1) в классе убывающих при $|x| \to \infty$.

Задача Коши (10.7) методом обратной задачи решается следующим образом:

1. По заданному начальному потенциалу $u(x)$ находятся данные рассеяния $S(t = 0)$ вида (10.70).

2. Находятся данные рассеяния $S(t)$ вида (10.71) в момент времени t.

3. По данным рассеяния $S(t)$ находится $u(x,t)$ — решение нелинейного уравнения Шредингера в соответствии с (10.59).

10.8 Солитонные решения

N — солитонное решение

Получим явные выражения для солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера. Построение решений нелинейного уравнения Шредингера в явной форме возможно, если удается решить уравнение Гельфанда – Левитана – Марченко (10.55). Это оказывается возможным для случая, когда в данных рассеяния $S(t)$ $r(\lambda,t) = 0$. Заметим, что если $r(\lambda) = 0$ при $t = 0$, то $r(\lambda,t) = 0$. В соответствии с (10.24) в этом случае

$$|a(\lambda)|^2 = 1. \tag{10.72}$$

Аналитичная в верхней полуплоскости λ функция $a(\lambda)$, удовлетворяющая условию (10.72), определяется своими нулями и имеет следующий вид:

$$a(\lambda) = \Pi_{n=1}^{N} \frac{\lambda - \zeta_n}{\lambda - \zeta_n^*}. \tag{10.73}$$

Обозначим $c_m \equiv \rho_m / a'(\zeta_m)$. Система уравнений обратной задачи

$$\bar{f}(x, \zeta_n) e^{i\zeta_n^* x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{N} \frac{\rho_m f(x, \zeta_m)}{a'(\zeta_m)} \frac{e^{i\zeta_m x}}{\zeta_n^* - \zeta_m}.$$

Отсюда

$$f(x, \zeta_n) e^{-i\zeta_n x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{N} \frac{c_m^* \bar{f}(x, \zeta_m)}{\zeta_m^* - \zeta_n} e^{-i\zeta_m^* x}.$$

Обозначая $\kappa_n(x) \equiv f(x, \zeta_n) e^{i\zeta_n x}$, из этих уравнений получим

$$\kappa_n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\zeta_n x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{m=1}^{N} \frac{c_m^*}{\zeta_m^* - \zeta_n} e^{2ix(\zeta_n - \zeta_m^*)} -$$
$$- \sum_{\substack{m=1 \\ k=1}}^{N} \frac{c_m^* e^{2i\zeta_n x}}{\zeta_m^* - \zeta_n} \cdot \frac{c_k e^{-2i\zeta_m^* x}}{\zeta_k - \zeta_m^*} \kappa_k(x). \tag{10.74}$$

Из (10.59) следует

$$u(x) = -2 \sum_{n=1}^{N} c_n \kappa_n^{(2)}(x)$$
$$|u(x)|^2 = 2i \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{N} c_n \kappa_n^{(1)}(x). \tag{10.75}$$

Полагая

$$A_{nj} \equiv \frac{c_j e^{-2i\zeta_n^* x}}{\zeta_j - \zeta_n^*},$$

находим

$$\kappa_n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\zeta_n x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{m=1}^{N} A_{nm}^* e^{-2ix\zeta_m^*} -$$
$$- \sum_{\substack{m=1 \\ k=1}}^{N} A_{nm}^* A_{mk} \kappa_k(x), \tag{10.76}$$

$$\kappa_n^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{N} A_{nm}^* e^{-2ix\zeta_m^*} - \sum_{\substack{m=1 \\ k=1}}^{N} A_{nm}^* A_{mk} \kappa_k^{(1)}(x), \tag{10.77}$$

$$\kappa_n^{(2)}(x) = e^{2i\zeta_n x} - \sum_{\substack{m=1 \\ k=1}}^{N} A_{nm}^* A_{mk} \kappa_k^{(2)}(x). \tag{10.78}$$

$$\sum_{m=1}^{N} (1 + A^* A)_{nm} \kappa_m^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{N} A_{nm}^* e^{-2i\zeta_m^* x}, \tag{10.79}$$

$$\sum_{m=1}^{N} (1 + A^* A)_{nm} \kappa_m^{(2)}(x) = e^{2i\zeta_n x}. \tag{10.80}$$

Формулы (10.75) — (10.80) определяют N — солитонное решение.

Односолитонное решение

Односолитонное решение соответствует случаю, когда потенциал $u(x)$ имеет одну точку дискретного спектра $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta > 0$. В этом случае справедливы выражения:

$$A = \frac{1}{i}\exp[i(-2\xi x - 2t(\xi^2 - \eta^2) + \varphi_0) - 2\eta(x - x_0 - 2\xi t)],$$

$$c = 2\eta\exp[i\varphi_0 - 2it(\xi^2 - \eta^2) + 2\eta x_0 + 4\eta\xi t],$$
$$1 + A^*A = 2e^{-2\eta(x-x_0-2\xi t)}\,\mathrm{ch}\;2\eta(x - x_0 - 2\xi t),$$
$$\kappa^{(2)} = \frac{e^{2i\xi - 2\eta(x_0+2\xi t)}}{2\,\mathrm{ch}\;2\eta(x - x_0 - 2\xi t)}.$$

С помощью этих выражений односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера записывается следующим образом:

$$u(x,t) = -2\eta\frac{e^{i[2\xi x - 2t(\xi^2-\eta^2)\varphi_0]}}{\mathrm{ch}\;2\eta(x - x_0 - 2\xi t)} \tag{10.81}$$

Параметры решения (10.81) имеют следующий смысл:

ξ определяет скорость солитона, $v = 2\xi$; η определяет амплитуду и ширину солитона; x_0 задает начальное положение, а φ_0 — начальную фазу.

Оценка порога существования солитона

Солитонное решение уравнения (10.1) возможно, если начальный потенциал $u(x,t) = u(x)$ имеет хотя бы одну точку дискретного спектра.

Найдем соответствующую оценку для $u(x)$.

По аналогии с (10.31), (10.32) введем функции $\chi_1(x,\lambda)$, $\chi_2(x,\lambda)$ следующими выражениями:

$$g^{(1)}(x,\lambda) \equiv e^{-i\lambda x}\chi_1(x,\lambda),$$
$$g^{(2)}(x,\lambda) \equiv e^{-i\lambda x}\chi_2(x,\lambda). \tag{10.82}$$

В соответствии с (10.19) имеем при $x \to -\infty$

$$\chi_1(x,\lambda) \to 1, \quad \chi_2(x,\lambda) \to 0. \tag{10.83}$$

Система (10.14) для функций χ_1, χ_2 принимает вид

$$\begin{cases} i\chi_{1x} = -u^*\chi_2 \\ i\chi_{2x} = -2\lambda\chi_2 - u\chi_1. \end{cases}$$

Система интегральных уравнений, аналогичная (10.29), (10.30), определяющая функции $\chi_1(x,\lambda)$, $\chi_2(x,\lambda)$, которые удовлетворяют условиям (10.83), записывается следующим образом:

$$\chi_1(x,\lambda) = 1 + i\int_{-\infty}^{x} u^*(y)\chi_2(y,\lambda)dy, \tag{10.84}$$

$$\chi_2(x,\lambda) = i\int_{-\infty}^{x} e^{2i\lambda(x-y)}u(y)\chi_1(y,\lambda)dy. \tag{10.85}$$

Подставим (10.85) в (10.84), получим интегральное уравнение, определяющее функцию $\chi_1(x,\lambda)$,

$$\chi_1(x,\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{x} u^*(y)dy\int_{-\infty}^{y} e^{2i\lambda(y-y')}u(y')\chi_1(y',\lambda)dy'. \tag{10.86}$$

Для абсолютной величины находим

$$|\chi_1(x,\lambda)| \le 1 + \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy \int_{-\infty}^{y} |u(y')|dy'|\chi_1(y',\lambda)|. \tag{10.87}$$

Последовательными итерациями из этого неравенства получим

$$\begin{aligned} |\chi_1(x,\lambda)| \le 1 + \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy \int_{-\infty}^{y} |u(y')|dy' + \\ + \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy \int_{-\infty}^{y} |u(y')|dy' \int_{-\infty}^{y'} |u(y'')|dy'' \times \\ \times \int_{-\infty}^{y''} |u(y''')|dy''' + \ldots \end{aligned} \tag{10.88}$$

Обозначим $Q(x) = \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy$. Заметим, что $Q'(x) = |u(x)|$,

$$\begin{aligned} J_2 = \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy \int_{-\infty}^{y} |u(y')|dy' = \\ = \int_{-\infty}^{x} Q(y)\frac{dQ(y)}{dy}dy = \frac{1}{2!}Q^2(x). \end{aligned}$$

По индукции находим

$$J_n(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy \ldots \int_{-\infty}^{y'} |u(y')|dy'}_{n} = \frac{1}{n!}Q^n(x).$$

Тогда (10.88) приводится к виду

$$\begin{aligned} |\chi_1(x,\lambda)| \le 1 + \frac{1}{2!}Q^2(x) + \frac{1}{4!} + Q^4(x) + \\ + \ldots = \mathrm{ch}\; Q(x) = \mathrm{ch}\; \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy. \end{aligned} \tag{10.89}$$

Из (10.86) следует также

$$|\chi_1(x,\lambda) - 1| \le \mathrm{ch}\; \int_{-\infty}^{x} |u(y)|dy - 1. \tag{10.90}$$

Перейдем в этом выражении к пределу $x \to +\infty$. Для этого выразим функции $\chi_1(x,\lambda)$ через $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ вида (10.31), (10.32) по формуле (10.23), получим

$$\chi(x,\lambda) = a(\lambda)\tilde{f}(x,\lambda)e^{i\lambda x} + b(\lambda)f(x,\lambda)e^{i\lambda x}.$$

В пределе $x \to +\infty$, согласно (10.20), (10.22), получаем $\chi_1(x,\lambda) \to a(\lambda)$.

Тогда из (10.90) имеем

$$|a(\lambda) - 1| \le \mathrm{ch}\; \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|dx - 1. \tag{10.91}$$

Если

$$\mathrm{ch}\; \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|dx - 1 < 1, \tag{10.92}$$

то из (10.91) следует, что $|a(\lambda)| > 0$. Так как функция $a(\lambda)$ обращается в нуль лишь в точках дискретного спектра, то условие $a(\lambda) \ne 0$ означает, что потенциал, удовлетворяющий (10.92), не обладает дискретным спектром.

Условие (10.92) можно представить также в более удобном виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|dx < \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1,316958 \approx 1,32. \tag{10.93}$$

Следствие 10.0.6 *Всегда имеются условия для существования этого солитона. Для существования N — солитона имеется нетривиальное ограничения на амплитуду начального импульса.*

Замечание 10.2 *Нелинейное уравнение*

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} - |u|^2 u = 0 \tag{10.94}$$

допускает $L - A$ пару с самосопряженным оператором

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.95}$$

Собственные значения λ этого оператора, определяемые спектральной задачей

$$L\psi = \lambda\psi, \tag{10.96}$$

вещественны. По этой причине задача (10.95), (10.96) не имеет дискретного спектра. Как мы знаем из Гл. 7, дискретному спектру линейной задачи (10.96) должны отвечать солитонные решения нелинейного уравнения, в данном случае уравнения (10.94). Следует ожидать, что уравнение (10.94) не имеет солитонных решений.

10.9 Контрольные вопросы

1 Запишите нелинейное уравнение Шредингера.

2 В чем отличие $(L - A)$ — пар нелинейного уравнения Шредингера и уравнения КдФ?

3 Дайте определение ассоциированной матричной линейной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.

4 Дайте определение соотношений инволюции для матричной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера.

5 Покажите, что матричная задача рассеяния имеет два линейно независимых решений.

6 Запишите выражение для вронскиана двух решений матричной линейной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.

7 Сформулируйте постановку матричной линейной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.

8 Дайте определение точки дискретного спектра матричной линейной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.

9 Чем отличаются спектральные точки матричной линейной задачи для нелинейного уравнения Шредингера от спектральных точек квантовомеханического уравнения Шредингера?

10 Какие величины составляют данные рассеяния ассоциированной матричной задачи в случае нелинейного уравнения Шредингера?

11 Необходима ли $(L - A)$ — пара для нахождения эволюции данных рассеяния?

12 Сформулируйте схему интегрирования нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи.

13 Какие решения нелинейного уравнения Шредингера называют солитонными? Что представляют собой "безотражательные потенциалы"? Связаны ли они с солитонными решениями?

14 Какие параметры входят в односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера?

15 В чем отличие решений нелинейного уравнения Шредингера вида

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = 0$$

от решений нелинейного уравнения Шредингера вида

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} - |u|^2 u = 0$$

в классе убывающих на бесконечности функций $u(x,t)$, $|x| \to \infty$?

Предметный указатель

активатор, 32
ассоциированная линейная задача, 77
безотражательный потенциал, 59
вариационная производная функционала, 67
вариация функционала, 67
внешняя нелинейность, 18
внутренняя нелинейность, 18
вполне гиперболическая система, 15
гамильтонова система, 65
гиперболические волны, 39
гиперболический, 6
данные рассеяния, 52
диспергирующие волны, 39
диссипативные структуры, 32
дифференциальный закон сохранения, 70
задача Захарова-Шабата, 77
закон Фурье, 17
закон сохранения, 66
ингибитор, 32
интегральный закон сохранения, 70
коэффициент отражения, 45
коэффициент прохождения, 45
метод обратной задачи, 58
моностабильная система, 33
параболический, 6
принцип суперпозиции, 3
самоорганизация, 32
свободная кривая, 15
свободноая кривая, 13
синергетика, 32
скобка Пуассона, 65
солитонные решения, 59
соотношения инволюции, 77
сохраняющаяся плотность, 70
сохраняющийся ток, 70
тепловая волна, 25
тождество Якоби, 65
условие Стефана, 18
условия Коши, 12
функции Иоста, 44
функция Гамильтона, 65
характеристика, 13
характеристическая форма, 13
характеристический определитель, 15
эллиптический, 6
ядро функционала, 67

Содержание

1 Введение **3**

2 Классификация линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка **5**

2.1 Канонические формы и классификация . . . 5
2.2 Характеристики и классификация нелинейных дифференциальных уравнений . . . 12
2.3 Система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными . . . 14
2.4 Контрольные вопросы . . . 15

3 Нелинейное уравнение теплопроводности **17**

3.1 Введение . . . 17
3.2 Задача Стефана о фазовом переходе . . . 19
3.3 Распространение тепла в нелинейной среде . . . 22
3.4 Контрольные вопросы . . . 30

4 Системы типа ”реакция - диффузия” **32**

4.1 Диссипативные структуры в нелинейных системах . . . 32
4.2 Устойчивость стационарных состояний . . . 32
4.3 Устойчивость стационарных состояний в некоторых известных моделях . . . 36
4.4 Контрольные вопросы . . . 37

5 Нелинейные волны **39**

5.1 Гиперболические и диспергирующие волны . . . 39
5.2 Метод характеристик . . . 40
5.3 Контрольные вопросы . . . 42

6 Введение в теорию солитонов **43**

6.1 Прямая и обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера . . . 43
6.1.1 Функции Иоста, матрица переноса . . . 44
6.1.2 Дискретный спектр и задача рассеяния . . . 48
6.1.3 Обратная задача рассеяния . . . 50
6.2 Контрольные вопросы . . . 52

7 Интегрирование уравнения КдФ методом обратной задачи **54**

7.1 Понятие об $(L-A)$ – паре . . . 54
7.2 Унитарная эквивалентность операторов $L(t)$ . . . 55
7.3 Эволюция данных рассеяния . . . 57
7.4 Схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи . . . 58
7.5 Контрольные вопросы . . . 58

8 Безотражательные потенциалы и N-солитонные решения **59**

8.1 Общее выражение для N-солитонного решения . . . 59
8.2 Односолитонное решение . . . 60

8.3 Двухсолитонное решение 61
8.4 Контрольные вопросы 63

9 Уравнение КдФ как гамильтонова система **65**
9.1 Полиномиальные законы сохранения для уравнения КдФ 70
9.2 Физический смысл сохраняющихся величин 73
9.3 Контрольные вопросы 75

10 Нелинейное уравнение Шредингера **76**
10.1 Вводные замечания 76
10.2 Матричная $(L - A)$ — пара 76
10.3 Матричная задача рассеяния 77
10.4 Функции Иоста. Матрица переноса 78
10.5 Аналитические свойства 79
10.5.1 Дискретный спектр 81
10.5.2 Соотношение ортогональности функций Иоста 82
10.6 Обратная задача рассеяния 83
10.7 Эволюция данных рассеяния. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи 86
10.8 Солитонные решения 87
10.9 Контрольные вопросы 91

Шаповалов Александр Васильевич

Введение в нелинейную физику

Учебное пособие

Научный редактор профессор,
доктор физ.- мат. наук Ю.Ю. Крючков

Редактор В.И. Моторина

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе TEX – LATEX
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Плоская печать. Усл. печ. л.   Уч.-изд. л.
Тираж   экз. Заказ   . Цена свободная.
ИПФ ТПУ. Лицензия ЛТ 1 от 18.07.94
Типография ТПУ. 634034, г. Томск, проспект Ленина, 30