Ю. В. Сидоров

МНОГОЗНАЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Ю. В. Сидоров. Лекции по теории функций комплексного переменного.
Многозначные аналитические функции.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов 3-го курса МФТИ. В нём рассматривается наиболее сложный раздел курса ТФКП — многозначные аналитические функции. Изучение этой темы с помощью ранее изданных учебных пособий и учебников вызывает у студентов большие трудности.

В настоящем пособии предлагается наиболее простой способ изложения этой темы. Это достигается тем, что рассматривается небольшой по объёму теоретический материал с наглядной иллюстрацией его на простейших примерах многозначных функций.

Условные обозначения:

○ — начало доказательства теоремы или другого утверждения (вместо слова «Доказательство»);

● — конец доказательства (вместо слов «что и требовалось доказать»);

△ — начало решения примера (вместо слова «Решение»);

▲ — конец решения примера.

§ 1. Определение аналитической функции

1. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей

Рассмотрим некоторые способы аналитического продолжения заданных функций.

Определение 1. Пусть функция $g(z)$ определена на множестве E, функция $f(z)$ регулярна в области D, содержащей множество E, и

$$f(z) = g(z) \quad \text{при} \quad z \in E. \tag{1}$$

Тогда функция $f(z)$ называется *аналитическим продолжением функции $g(z)$ с множества E в область D.*

Если для заданной функции $g(z)$, $z \in E$, существует ее продолжение в область $D \supset E$, т.е. регулярная в области D функция $f(z)$, удовлетворяющая условию (1), то говорят, что "функцию $g(z)$ можно аналитически продолжить в область D" или "функция $g(z)$ допускает аналитическое продолжение в область D".

Такое аналитическое продолжение может оказаться не единственным, например, если множество E состоит из конечного числа точек, или если множество E состоит из бесконечного числа точек, но не имеет предельных точек внутри области D.

Из теоремы единственности следует, что:

если множество E состоит из бесконечного числа различных точек и имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую области $D \supset E$, то аналитическое продолжение с множества E в область D единственно.

Пример 1. Функции $e^z, \sin z, \cos z$ являются единственными аналитическими продолжениями функций соответственно e^x, $\sin x$, $\cos x$ с действительной оси во всю комплексную плоскость.

$\triangle$ Функция $\operatorname{tg} z$ является единственным аналитическим продолжением функции $\operatorname{tg} x$ с интервала $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ во всю комплексную плоскость с выколотыми точками $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Функция $\operatorname{ctg} z$ является единственным аналитическим продолжением функции $\operatorname{ctg} x$ с интервала $0 < x < \pi$ во всю комплексную плоскость с выколотыми точками $z = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. ▲

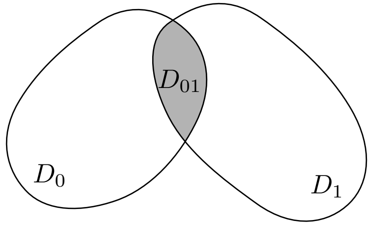

Рис. 1

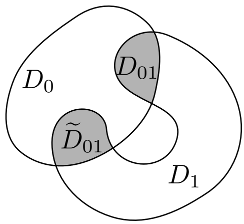

Рис. 2

Определение 2. Пусть даны две области D_0 и D_1 такие, что *существует область D_{01}, принадлежащая обеим областям D_0 и D_1* (рис. 1). Пусть функции $f_0(z)$, $f_1(z)$ регулярны в областях D_0,D_1 соответственно, и эти функции совпадают в области D_{01}, т.е.

$$f_1(z) = f_0(z), \quad z \in D_{01}.$$

Тогда функция $f_1(z)$ называется *непосредственным аналитическим продолжением* функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D_1 через область D_{01}.

Это продолжение единственно по теореме единственности.

Отметим, что в рассмотренной ситуации может оказаться, что области D_0 и D_1 имеют, кроме области D_{01}, и другие общие точки (рис. 2), в которых значения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$ могут быть неравными. Но если $f_0(z) = f_1(z)$ во всех общих точках областей D_0 и D_1, то функция

$$F(z) = \begin{cases} f_0(z), & \text{если } z \in D_0, \\ f_1(z), & \text{если } z \in D_1, \end{cases}$$

регулярна в области $D = D_0 \cup D_1$ и является аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D в смысле определения 1.

Пусть теперь дана цепочка областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$ (рис. 3). Предположим, что существуют регулярные функции $f_j(z)$, $z \in D_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$, такие, что каждая последующая функция $f_{j+1}(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением предыдущей функции $f_j(z)$ из области D_j в область D_{j+1}, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Тогда функция $f_n(z)$ называется *аналитическим продолжением функции* $f_0(z)$ *вдоль цепочки областей* $D_0, D_1, \ldots, D_n$. Это продолжение единственно.

Полученный набор функций $\{f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z)\}$ также называют *аналитическим продолжением функции* $f_0(z)$ *вдоль цепочки областей* D_0, D_1, $\ldots$, D_n, а функцию $f_n(z)$ называют *результатом аналитического продолжения функции* $f_0(z)$ *из области* D_0 *в область* D_n *вдоль цепочки областей* D_0, D_1, $\ldots$, D_n.

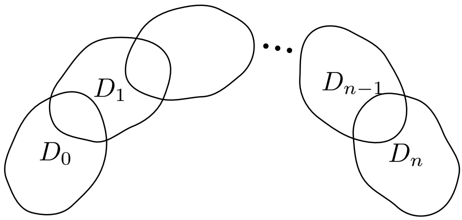

Рис. 3.

Регулярную в области D_j функцию $f_j(z)$ называют *элементом*. Пусть задан элемент $f_0(z)$, $z \in D_0$. Если существует аналитическое продолжение этого (исходного) элемента вдоль цепочки областей D_0, D_1, $\ldots$, D_n, то эту цепочку называют *допустимой* для элемента $f_0(z)$, $z \in D_0$.

Аналитической функцией (полной аналитической функцией) называется множество элементов, полученных из исходного элемента по всем допустимым для него цепочкам областей.

Отметим, что в результате аналитического продолжения исходного элемента $f_0(z)$, $z \in D_0$, вдоль двух различных допустимых цепочек областей в одну и ту же область D_n могут получиться различные элементы. Таким образом, аналитическая функция может оказаться *неоднозначной* как функция от z. Неоднозначность может получиться уже на первом шаге аналитического продолжения (рис. 2).

Во всех случаях аналитическую функцию с исходным элементом $f_0(z)$, $z \in D_0$, будем обозначать $F(z)$. Таким образом, аналитическая функция $F(z)$ — это обобщение понятия регулярной функции. Аналитическая функция $F(z)$ “составлена” или “склеена” из однозначных элементов — регулярных функций.

Описанный общий подход к понятию аналитической функции оказывается неудобным при изучении конкретных функций. Не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением цепочек областей, состоящих из кругов с центрами на заданной кривой, т.е. аналитическим продолжением вдоль кривых.

2. Аналитическое продолжение вдоль кривой

Элементом в точке z_0 будем называть функцию $f_0(z)$, регулярную в некоторой окрестности точки z_0, т.е. в круге $K_0 : |z - z_0| < R_0$, $R_0 > 0$.

Определение 3. Пусть задана кривая γ с началом в точке a и концом в точке b (рис. 4). И пусть в начальной точке $z_0 = a$ задан элемент $f_0(z)$, т.е. регулярная в круге $K_0 : |z - z_0| < R_0$ функция $f_0(z)$.

Набор элементов $f_j(z)$, $z \in K_j : |z - z_j| < R_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, называется *аналитическим продолжением элемента* $f_0(z)$ *вдоль кривой* γ, если:

1) точки $a = z_0,z_1,z_2,\ldots,z_n = b$ принадлежат γ и занумерованы в порядке ориентации кривой γ;
2) пересечение $K_{j-1} \cap K_j$ не пусто и $f_{j-1}(z) \equiv f_j(z)$ при $z \in K_{j-1} \cap K_j$ для $j = 1,2,\ldots,n$;
3) дуга кривой γ от точки z_{j-1} до z_j принадлежит объединению $K_{j-1} \cup K_j$ для $j = 0,1,\ldots,n$.

При этом элемент $f_n(z)$ называется *результатом аналитического продолжения элемента* $f_0(z)$ *из точки* a *в точку* b *вдоль кривой* γ.

Если для заданного элемента $f_0(z)$ в начальной точке кривой γ существует аналитическое продолжение вдоль γ, то будем говорить, что “элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой γ” или “элемент $f_0(z)$ допускает аналитическое продолжение вдоль кри-

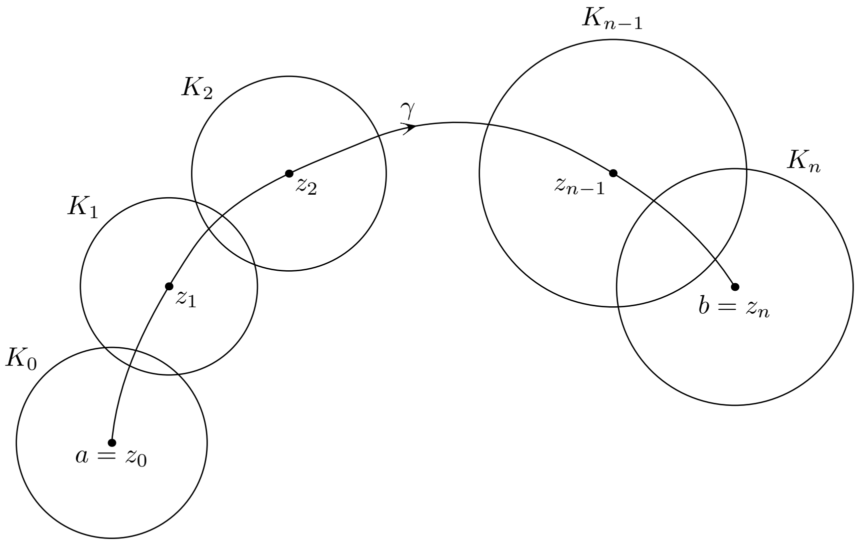

Рис. 4

вой γ", а кривую γ будем называть *допустимой* для элемента $f_0(z)$.

Заметим, что аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ вдоль допустимой кривой γ определяет на кривой γ непрерывную функцию $F_\gamma(z)$ (значениями элементов $f_j(z)$), а в каждой точке $\zeta \in \gamma$ — элемент $f_\zeta(z)$ такой, что

$$f_\zeta(z) = F_\gamma(z), \quad z \in \gamma_\zeta, \tag{2}$$

где γ_ζ — дуга кривой γ, лежащая в некоторой окрестности точки ζ.

Можно доказать обратное утверждение: если на кривой γ задана непрерывная функция $F_\gamma(z)$ и в каждой точке $\zeta \in \gamma$ задан элемент $f_\zeta(z)$ такой, что выполняется условие (2), то из множества этих элементов $f_\zeta(z)$ можно выбрать конечное число элементов $f_j(z)$, $j = 1,2,\ldots,n$, удовлетворяющих определению 3.

Таким образом, эквивалентным определению 3 является

Определение 4. Пусть в начальной точке a кривой γ задан элемент $f_a(z)$. Множество элементов $f_\zeta(z)$, заданных во всех точках $\zeta \in \in \gamma$, называется *аналитическим продолжением элемента* $f_a(z)$ *вдоль кривой* γ, если существует такая непрерывная на кривой γ функция $F_\gamma(z)$, что выполняется условие (2).

Теорема 1. *Аналитическое продолжение данного элемента вдоль допустимой для него кривой единственно, т.е. определяет на этой кривой единственную непрерывную функцию, а в каждой точке этой кривой — единственный элемент, удовлетворяющий условию* (2).

○ Пусть сначала γ — простая незамкнутая кривая (рис. 4). И пусть два набора элементов $f_j(z)$, $z \in K_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, и $\tilde f_j(z)$, $z \in \tilde K_j$, $j = = 1,2,\ldots,\tilde n$ являются аналитическими продолжениями одного и того же элемента $f_0(z)$, $z \in K_0$, заданного в начальной точке z_0 кривой γ. Тогда существует такая область D, содержащая кривую γ (окрестность кривой γ), которая принадлежит как объединению кругов K_j, $j = 0,1,\ldots,n$, так и объединению кругов $\tilde K_j$, $j = 0,1,\ldots,\tilde n$. В области D функции $f_j(z)$, $j = 0,1,\ldots,n$ определяют регулярную функцию $f(z)$, а функции $\tilde f_j(z)$, $j = 1,2,\ldots,\tilde n$ — регулярную функцию $\tilde f(z)$. По условию в некоторой окрестности точки z_0 эти функции совпадают: $f(z) \equiv \tilde f(z) = f_0(z)$. По теореме единственности функции $f(z)$ и $\tilde f(z)$ совпадают во всей области D, в частности, на кривой γ и в окрестности каждой точки $\zeta \in \gamma$.

В общем случае кривую γ нужно разбить на конечное число простых незамкнутых дуг и поочередно для каждой дуги провести предыдущие рассуждения. ●

Определение 5. *Аналитической функцией* с исходным элементом $f_0(z)$ (порожденной элементом $f_0(z)$) называется *множество элементов, полученных в результате аналитического продолжения элемента* $f_0(z)$ *вдоль всех допустимых для него кривых.*

Аналитическую функцию с исходным элементом $f_0(z)$ будем обозначать $F(z)$, хотя эта функция может быть неоднозначной как функция точки плоскости z. Значениями функции $F(z)$ в точке z будем называть значения всех ее элементов в этой точке.

Начнем изучать конкретные аналитические функции.

§ 2. Логарифмическая функция

1. Определение логарифмической функции

В курсе математического анализа логарифмическая функция $\ln x$ определяется при $x > 0$ и изучаются ее свойства. Естественно определить логарифмическую функцию для комплексных значений z как аналитическое продолжение функции $\ln x$. Рассмотрим наиболее простой способ осуществления такого аналитического продолжения.

В курсе математического анализа доказывается, что функция $\ln x$ на интервале $0 < x < 2$ представляется рядом Тейлора

$$\ln x = \ln[1 + (x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n,$$

сходящимся к этой функции на интервале (0,2).

Этот ряд при комплексных значениях z обозначим $f_0(z)$, т.е.

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \quad z \in K_0 : |z-1| < 1. \tag{1}$$

Ряд (1) сходится в круге K_0, т.е. является элементом в точке $z_0 = 1$, и $f_0(x) = \ln x$ при $0 < x < 2$. Следовательно, функция $f_0(z)$ является аналитическим продолжением (и притом единственным) функции $\ln x$ с интервала $0 < x < 2$ в круг K_0.

Аналитическую функцию с исходным элементом (1) назовем *логарифмической* и обозначим $\operatorname{Ln} z$.

2. Свойства логарифмической функции

Свойство 1. *Элемент* (1) *можно представить интегралом*

$$f_0(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in K_0, \tag{2}$$

по любой кривой γ, лежащей в круге K_0.

○ Докажем равенство (2) с помощью теоремы единственности.

1. Функция $f_0(z)$, заданная формулой (1), регулярна в круге K_0.
2. Интеграл, стоящий в правой части равенства (2), не зависит от пути интегрирования γ и является регулярной в круге K_0 функцией, так как подынтегральная функция регулярна в круге K_0.
3. Если $x \in (0,2)$, то при действительных $\zeta = t$ интеграл (2) равен $\int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.

По теореме единственности интеграл (2) совпадает с функцией (1) во всем круге K_0, т.е. верна формула (2). ●

Свойство 2.
Элемент (1) *можно аналитически продолжить по любой кривой γ с началом в точке $z = 1$, не проходящей через точку $z = 0$, и это продолжение определяет на кривой γ непрерывную функцию*

$$F_\gamma(z) = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \gamma, \tag{3}$$

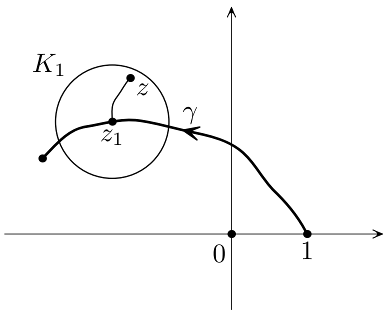

Рис. 5.

а в каждой точке $z_1 \in \gamma$ — элемент

$$f_1(z) = \int\limits_1^{z_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, z \in K_1 : |z - z_1| < R_1 \leqslant |z_1|, \tag{4}$$

где правая часть формулы (3) *и первое слагаемое в правой части равенства* (4) *— это интегралы по кривой γ, а второе слагаемое в правой части равенства* (4) *— это интеграл по любой кривой, лежащей в круге K_1 (рис.* 5*).*

○ *Докажем, что элементы (4) удовлетворяют определению 4, §1.*

1. Интеграл (3) является непрерывной функцией на кривой γ как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной на γ функции.
2. Функция (4) является элементом в точке z_1, т.е. регулярной в круге K_1 функцией, так как первый из интегралов в формуле (4) не зависит от z, а второй интеграл не зависит от пути интегрирования и является регулярной в круге K_1 функцией, так как подынтегральная функция регулярна в круге K_1.
3. Пусть в формуле (4) точка z принадлежит дуге кривой γ, лежащей в круге K_1. Выберем во втором интеграле (4) путь интегрирования от z_1 до z по кривой γ. Тогда по свойствам интегралов сумма интегралов (4) равна интегралу (3), т.е. $f_1(z) = F_\gamma(z)$, если z принадлежит дуге кривой γ, лежащей в некоторой окрестности точки z_1. ●

Свойство 3. *Все значения функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* $z \neq 0$ *определяются формулой*

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z, \tag{5}$$

т.е.

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots\ , \tag{6}$$

где φ *— одно из значений* $\arg z$.

○ Вычислим первый интеграл в формуле (4), т.е. найдем $f_1(z_1)$.

Пусть $\zeta(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — параметрическое уравнение кривой γ с началом в точке $z = 1$ и концом в точке z_1. Тогда

$$d\zeta = r'(t)e^{i\varphi(t)}\,dt + ir(t)\varphi'(t)e^{i\varphi(t)}\,dt,$$

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt + i\varphi'(t)\,dt$$

и поэтому

$$f_1(z_1) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)\,dt = \ln r(\beta) - \ln r(\alpha) + i[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)].$$

Так как $r(\beta) = |z_1|$, $r(\alpha) = 1$, то обозначая $\Delta\varphi = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$, получаем

$$f_1(z_1) = \ln|z_1| + i\Delta\varphi, \tag{7}$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота вектора z при движении точки z по кривой γ от точки $z = 1$ до точки z_1 (рис. 6). Этот угол будем называть *приращением аргумента z вдоль кривой* γ и обозначать $\Delta_\gamma \arg z$ (рис. 6). Приращение аргумента обычно будем находить геометрически из рисунка (см. ниже пример 1). Свойства приращения аргумента будут рассмотрены в п.1, §5.

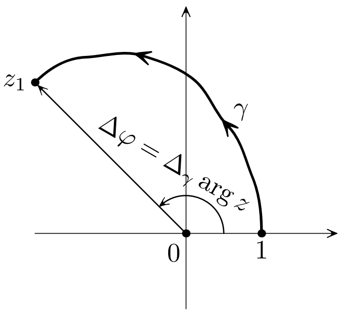

Рис. 6

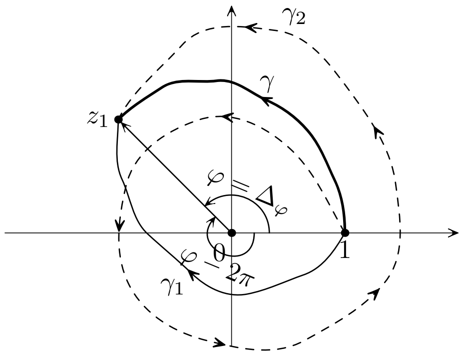

Рис. 7

Из формулы (7) следует, что *элемент* $f_0(z)$, заданный формулой (1), *нельзя аналитически продолжить по кривой* γ (с началом в точке $z = 1$), *проходящей через точку* $z = 0$. В самом деле, аналитическое продолжение должно определять на такой кривой γ непрерывную функцию $F_\gamma(z)$, значения которой в точках кривой γ от точки $z = 1$ до точки $z = 0$ в силу формулы (7) находятся по формуле $F_\gamma(z) =$

$= \ln|z| + i\Delta_\gamma \arg z$, но $\ln|z| \to \infty$ при $z \to 0$ и поэтому $F_\gamma(z) \to \infty$ при $z \to 0$, $z \in \gamma$.

Таким образом, *функция* $\operatorname{Ln} z$ *— это множество элементов вида* (4), где z_1 — любая точка, $z_1 \neq 0$, а γ — различные кривые, не проходящие через точку $z = 0$, с началом в точке $z = 1$ и концом в точке z_1.

Заметим, что в формуле (7) $\Delta\varphi = \varphi$ — одно из значений $\arg z_1$ (рис. 7), причем в зависимости от того, сколько оборотов вокруг точки $z = 0$ делает кривая γ (по часовой или против часовой стрелки), φ — может быть любым значением $\arg z_1$ (на рис. 7 $\Delta_{\gamma_1} \arg z = \varphi + 2\pi$, $\Delta_{\gamma_2} \arg z = \varphi - 2\pi$). Следовательно, все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z_1 \neq 0$ определяются формулой

$$\operatorname{Ln} z_1 = \ln|z_1| + i(\varphi + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{8}$$

где φ — одно из значений $\arg z_1$.

Так как в формуле (8) $z_1 \neq 0$ — любая точка, то, обозначая $z_1 = z$, получаем формулу (6), которую кратко можно записать в виде (5). ●

П р и м е р 1. Вычислим по формуле (7) значение $\operatorname{Ln} z$ в заданной точке z_1, полученное в результате аналитического продолжения исходного элемента $f_0(z)$ вдоль заданной кривой γ, находя $\Delta_\gamma \arg z$ геометрически из рисунка.

△ 1) Пусть $z_1 = 2i$, γ — отрезок $[1,2i]$. Тогда $\operatorname{Ln} 2i = \ln 2 + \frac{\pi i}{2}$ (рис. 8).

2) Пусть $z_1 = -1$, γ_+ — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ориентированная против часовой стрелки. Тогда $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$ (рис. 9).

3) Пусть $z_1 = -1$, γ_- — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, ориентированная по часовой стрелке. Тогда $\operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$ (рис. 9). ▲

П р и м е р 2. Найдем по формуле (6) все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в заданной точке:

△ 1) $\operatorname{Ln}(-3) = \ln 3 + \pi(1 + 2k)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) $\operatorname{Ln}(-i) = -\frac{\pi i}{2} + 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

3) $\operatorname{Ln}(-1 + i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi i}{4} + 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ▲

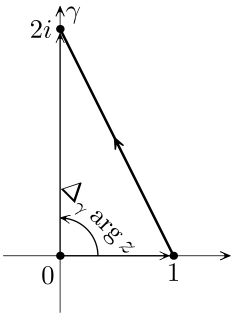

Рис. 8

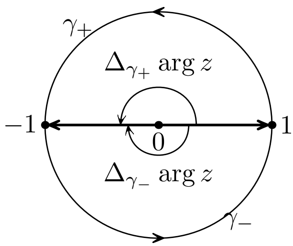

Рис. 9

Отметим, что *функция* $\operatorname{Ln} z$ *является обратной к функции* e^z, так как из формулы (5) получается равенство $e^{\operatorname{Ln} z} = z$.

Свойство 4. *Пусть* $f(z)$ *— элемент функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* $z_0 \neq 0$. *Тогда*

$$f'(z) = \frac{1}{z}. \tag{9}$$

○ Выше доказано, что функция $\operatorname{Ln} z$ — это множество элементов вида (4). В формуле (4) первый интеграл не зависит от z, а второй является первообразной функции $\frac{1}{z}$ в круге K_1. Следовательно, $f_1'(z) = \frac{1}{z}$. Заменяя здесь $f_1(z)$ на $f(z)$, получаем формулу (9). ●

Свойство 5. *Пусть* $f(z)$ *— элемент функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* $z_0 \neq 0$. *Тогда этот элемент представляется рядом Тейлора*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n, \tag{10}$$

сходящимся к функции $f(z)$ *в круге* $K_0 : |z - z_0| < |z_0|$; *все элементы функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* z_0 *имеют вид*

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n, \tag{11}$$

где $\operatorname{Ln} z_0$ — *все значения функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* z_0.

○ В формуле (4) первый интеграл равен $f_1(z_1)$. По свойству 4, $f_1'(z) = \frac{1}{z}$, откуда $f_1^{(n)}(z_1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{z_1^n}$, $n = 1{,}2{,}3,\ldots$. По формуле Тейлора получаем

$$f_1(z) = f_1(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_1^n}(z - z_1)^n. \tag{12}$$

Этот ряд сходится к функции $f_1(z)$ в круге $K_1 : |z - z_1| < |z_1|$, так как функция $f_1(z)$ регулярна в этом круге. Обозначая $f_1(z) = f(z)$, $z_1 = z_0$, из (12) получаем формулу (10).

В формуле (10) число $f(z_0)$ — одно из значений функции $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0. Перебирая все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0, получаем разложение в ряды Тейлора (11) всех элементов функции $\operatorname{Ln} z$ в круге K_0. ●

З а м е ч а н и е 1. В формуле (11) ряд под знаком суммы один и тот же для всех значений $\operatorname{Ln} z_0$. Следовательно, *любой элемент функции* $\operatorname{Ln} z$ *в любой точке* $z_0 \neq 0$ *полностью определяется заданием своего значения в этой точке* (формула (10)).

В общем случае аналитическая функция может не обладать таким свойством.

З а м е ч а н и е 2. Так как значения функции $\operatorname{Ln} z$ в одной и той же точке $z \neq 0$ отличаются друг от друга на $2\pi k i$, где k — целое число (формула (6)), то из формулы (11) следует, что *если* $f(z)$ *и* $\tilde{f}(z)$ — *элементы функции* $\operatorname{Ln} z$ *в одной и той же точке* $z_0 \neq 0$, *то*

$$f(z) - \tilde{f}(z) \equiv 2\pi k i, \quad |z - z_0| < |z_0|,$$

где k — некоторое целое число.

З а м е ч а н и е 3. Формулу (11) можно не запоминать, а получить ее формально такими же преобразованиями, как если бы z и z_0

были действительными:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}[z_0 + (z - z_0)] = \operatorname{Ln}\left[z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{Ln} z_0 + \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right) = \operatorname{Ln} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n.$$

П р и м е р 3. Найдем разложение в ряды Тейлора всех элементов функции $\operatorname{Ln} z$ в круге $|z + 3i| < 3$ по степеням $(z + 3i)$.

△ Получаем:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}[-3i + (z + 3i)] = \operatorname{Ln}\left[(-3i)\left(1 - \frac{z + 3i}{3i}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{Ln}(-3i) + \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{z + 3i}{3i}\right) =$$
$$= \ln 3 - \frac{\pi i}{2} + 2\pi k i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3i)^n}(z + 3i)^n, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \blacktriangle$$

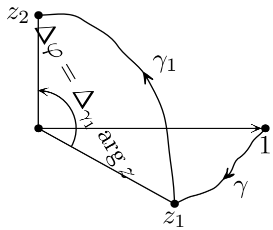

Рис. 10.

Свойство 6. *Пусть $f_1(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z_1 \neq 0$, заданный значением $f_1(z_1) = \ln|z_1| + i\varphi_1$, где φ_1 — одно из значений $\arg z_1$. И пусть $f_2(z)$ — результат аналитического продолжения элемента $f_1(z)$ из точки z_1 в точку $z_2 \neq 0$ вдоль кривой γ_1, не проходящей через точку $z = 0$ (рис. 10). Тогда*

$$f_2(z_2) = \ln|z_2| + i(\varphi_1 + \Delta\varphi) = \ln|z_2| + i(\varphi_1 + \Delta_{\gamma_1} \arg z). \qquad (13)$$

○ По свойству 2 функция $f_1(z)$ — результат аналитического продолжения элемента (1) из точки $z = 1$ в точку z_1 вдоль некоторой кривой γ, не проходящей через точку $z = 0$ (рис. 10). Поэтому $f_2(z)$ — результат аналитического продолжения элемента (1) из точки $z = 1$

в точку z_2 вдоль кривой $\gamma\gamma_1$. Это аналитическое продолжение определяет на кривой $\gamma\gamma_1$ непрерывную функцию

$$F_{\gamma\gamma_1}(z) = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \gamma\gamma_1.$$

Поэтому

$$f_2(z_2) = \int\limits_1^{z_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^{z_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{14}$$

В этой формуле первый интеграл равен $f_1(z_1) = \ln|z_1| + i\varphi_1$, а второй (вычисляется так же, как и в свойстве 3) равен $\ln|z_2| - \ln|z_1| + i\Delta_{\gamma_1} \arg z$. Следовательно, из формулы (14) получается формула (13). ●

П р и м е р 4. Пусть $f_1(z)$ — элемент функции $\mathrm{Ln}\, z$ в точке $z_1 \neq 0$. Найдем элемент $f_2(z)$, который получается в результате аналитического продолжения элемента $f_1(z)$ из точки z_1 в ту же точку z_1 вдоль окружности $\gamma : |z| = |z_1|$ (рис. 11), ориентированной против часовой стрелки. (Коротко будем говорить: "Совершим обход вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении".)

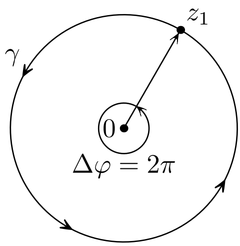

Рис. 11.

△ По формуле (13) с помощью рис. 11 находим $f_2(z_1) = f_1(z_1) + 2\pi i$. Поэтому $f_2(z) = f_1(z) + 2\pi i$ (см. замечание 2).

В этом случае будем говорить, что после одного оборота вокруг точки $z = 0$ элемент $f_1(z)$ переходит в элемент $f_1(z) + 2\pi i$ и писать

$$f_1(z) \to f_1(z) + 2\pi i.$$

После второго, третьего и т.д. оборотов вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении получаем

$$f_1(z) \to f_1(z) + 2\pi i \to f_1(z) + 4\pi i \to f_1(z) + 6\pi i \to \dots \ .$$

Аналогично, после первого, второго и т.д. оборотов вокруг точки $z = 0$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке) получаем

$$f_1(z) \to f_1(z) - 2\pi i \to f_1(z) - 4\pi i \to f_1(z) - 6\pi i \to \ldots .$$

Итак, в результате аналитического продолжения после каждого оборота вокруг точки $z = 0$ в положительном и отрицательном направлениях в точке z_1 получаются новые элементы. В таком случае точку $z = 0$ называют *логарифмической точкой ветвления* функции $\operatorname{Ln} z$ (см. §6). ▲

З а м е ч а н и е 4. Пусть $f_1(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$, заданный в точке $z_1 \neq 0$. Аналитическую функцию с исходным элементом $f_1(z)$ обозначим $F(z)$. По свойствам функции $\operatorname{Ln} z$ получается, что функция $F(z)$ — это множество тех же элементов, что и множество элементов функции $\operatorname{Ln} z$. Во многих задачах не имеет значения, какой из элементов аналитической функции принят за исходный (см. примеры 2–4). Поэтому функцию $F(z)$ также называют логарифмической и обозначают $\operatorname{Ln} z$. Таким образом, $\operatorname{Ln} z$ — это совокупность аналитических функций, имеющих одно и то же множество элементов и отличающихся друг от друга только исходными элементами. В этом случае будем говорить также, что $\operatorname{Ln} z$ — это одна аналитическая функция с точностью до исходного элемента.

§ 3. Степенна́я функция

1. Определение степенной функции

При действительных β и $x > 0$ справедлива формула $x^\beta = e^{\beta \ln x}$. Естественно распространить эту формулу на комплексные значения b и z так, чтобы выполнялось равенство $z^b = e^{b \operatorname{Ln} z}$. Для этого сначала сформулируем определение суперпозиции аналитических функций.

Определение 1. Пусть $F(z)$ — аналитическая функция с исходным элементом $f_0(z)$, заданным в точке z_0, и пусть $H(\zeta)$ — аналитическая функция с исходным элементом $h_0(\zeta)$, заданным в точке $\zeta_0 = f_0(z_0)$. Тогда функция $g_0(z) = h_0(f_0(z))$ регулярна в точке z_0 как суперпозиция регулярных функций, т.е. является элементом в точке z_0. Аналитическая функция с исходным элементом $g_0(z)$ называется *суперпозицией аналитических функций* $F(z)$ и $H(\zeta)$ и обозначается $G(z) = H(F(z))$.

Определение 2. Пусть $f_0(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$, заданный в точке $z_0 \neq 0$ (для определенности будем считать, что $z_0 = 1$ и $f_0(z)$ — элемент (1), §2) и b — любое фиксированное комплексное число. Аналитическую функцию с исходным элементом

$$g_0(z) = e^{bf_0(z)}, \quad z \in K_0 : |z - 1| < 1, \tag{1}$$

будем обозначать $e^{b \operatorname{Ln} z}$ (в силу определения 1), а также z^b, и называть *степенно́й функцией*, т.е. $z^b = e^{b \operatorname{Ln} z}$.

2. Свойства степенной функции

Из определения 2 следует, что все свойства степенной функции получаются из соответствующих свойств логарифмической функции.

Свойство 1. *Элемент* (1) *допускает аналитическое продолжение по любой кривой* γ *с началом в точке* $z_0 = 1$, *не проходящей через точку* $z = 0$.

○ Пусть множество элементов $f_\zeta(z)$, $\zeta \in \gamma$, является аналитическим продолжением элемента $f_0(z)$ вдоль кривой γ (такое продолжение существует по свойству 2, §2). Тогда множество элементов $g_\zeta(z) = e^{bf_\zeta(z)}$ является аналитическим продолжением элемента (1) вдоль кривой γ (определение 4, §1). ●

Таким образом, функция z^b в каждой точке $z \neq 0$ состоит из элементов

$$g(z) = e^{bf(z)}, \tag{2}$$

где $f(z)$ — элементы функции $\operatorname{Ln} z$.

Свойство 2. *Все значения функции* z^b *в точке* $z \neq 0$ *определяются формулой*

$$z^b = e^{b(\ln|z| + i \arg z)}, \tag{3}$$

т.е.

$$z^b = e^{b[\ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)]}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \tag{4}$$

где φ *— одно из значений* $\arg z$.

○ Формулы (3), (4) получаются из формул (5), (6) §2. ●

П р и м е р 1.

△ 1) Пусть $b = 0$. Тогда по формуле (3) $z^0 = 1$ при $z \neq 0$. По условленной договоренности значение функции z^0 при $z = 0$ также равно 1. Таким образом, функция $z^0 \equiv 1$ регулярна во всей комплексной плоскости.

2) Пусть $b = n$, где $n = 1,2,\dots$. Тогда по формуле (3) при $z \neq 0$ получаем

$$z^1 = z, \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}} \quad \text{при } n = 2,3,\dots .$$

Доопределяя эти функции в точке $z = 0$ равенством $(0)^n = 0$, получаем, что функция z^n регулярна во всей комплексной плоскости.

Отметим, что только в случаях 1) и 2) элемент (1) можно аналитически продолжить по всем кривым с началом в точке $z_0 = 1$, включая кривые, проходящие через точку $z = 0$, и при этом аналитическая функция с исходным элементом (1) оказывается регулярной во всей комплексной плоскости.

3) Пусть $b = -n$, $n = 1,2,\dots$. Тогда по формуле (3) $z^b = \frac{1}{z^n}$. В этом случае элемент (1) нельзя аналитически продолжить по кривой, проходящей через точку $z = 0$, так как $\frac{1}{z^n} \to \infty$ при $z \to 0$.

Отметим, что только в случаях 1)–3) функция z^b является однозначной.

4) Пусть $b = \frac{m}{n}$, где $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, $n = 2,3\dots$ и $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда по формуле (4) функция $z^b = z^{\frac{m}{n}}$ в каждой точке $z \neq 0$ принимает ровно n различных значений:

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}(\varphi + 2\pi k)i}, \quad k = 0,1,2,\dots,n-1, \tag{5}$$

где φ — одно из значений $\arg z$.

В частности, функцию $z^{\frac{1}{n}}$ называют корнем n-й степени из z и обозначают: $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$, $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$, $n = 3,4,\ldots$. Тогда из (5) получается, что если $z \neq 0$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{1}{n}(\varphi+2\pi k)i}, k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{6}$$

где $\varphi = \arg z$, $\sqrt[n]{|z|}$ — арифметический корень. Функция $\sqrt[n]{z}$, $n = 2,3,\ldots$, является обратной к функции z^n, так как $(\sqrt[n]{z})^n = z$.

5) Пусть число b не является рациональным, т.е. или b — действительное иррациональное число, или $\operatorname{Im} b \neq 0$. Тогда по формуле (4) получается, что функция z^b в каждой точке $z \neq 0$ принимает бесконечное (счетное) число различных значений.

Например, функция z^i в точке $z = i$ принимает значения $i^i = e^{i[\ln|i|+i\arg i]} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ▲

Отметим, что если $b = \beta$ — действительное число, то формулу (4) можно записать так:

$$z^\beta = |z|^\beta e^{\beta(\varphi+2\pi k)i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ , \tag{7}$$

где $\varphi = \arg z$, $|z|^\beta > 0$.

Свойство 3. *Пусть $g(z)$ — элемент функции z^b. Тогда*

$$g'(z) = \frac{b}{z}g(z). \tag{8}$$

○ Из формулы (2) с учетом формулы (9), §2 получаем

$$g'(z) = \left(e^{bf(z)}\right)' = bf'(z)e^{bf(z)} = \frac{b}{z}e^{bf(z)} = \frac{b}{z}g(z). \ \bullet$$

Свойство 4. *Пусть $g(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_0 \neq 0$. Тогда этот элемент представляется рядом Тейлора*

$$g(z) = g(z_0)\sum_{n=0}^{\infty} C_b^n \frac{1}{z_0^n}(z-z_0)^n, \tag{9}$$

сходящимся к $g(z)$ *в круге* $K_0 : |z - z_0| < |z_0|$, *а все элементы функции* z^b *в точке* z_0 *имеют вид*

$$z^b = z_0^b \sum_{n=0}^{\infty} C_b^n \frac{1}{z_0^n}(z - z_0)^n, \tag{10}$$

где z_0^b *— все значения функции* z^b *в точке* z_0,

$$C_b^0 = 1, \qquad C_b^n = \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{n!}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

○ Из формулы (8) находим

$$g''(z) = -\frac{b}{z^2}g(z) + \frac{b}{z}g'(z) = -\frac{b}{z^2}g(z) + \frac{b^2}{z^2}g(z) = \frac{b(b-1)}{z^2}g(z).$$

По индукции находим $g^{(n)}(z) = C_b^n \dfrac{n!}{z^n} g(z)$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, $g^{(n)}(z_0) = C_b^n \dfrac{n!}{z_0^n} g(z_0)$, $n = 1,2,\ldots$. По формуле Тейлора получаем ряд (9). Этот ряд сходится в круге K_0 к функции $g(z)$, так как функция $g(z)$ регулярна в круге K_0.

Так как $g(z_0)$ может быть любым значением функции z^b в точке z_0, то все элементы функции z^b в точке z_0 в круге K_0 имеют вид (10).

●

З а м е ч а н и е 1. В формуле (10) ряд под знаком суммы один и тот же для всех значений z_0^b. Следовательно, *любой элемент функции* z^b *в любой точке* $z_0 \neq 0$ *полностью определяется заданием своего значения в этой точке* (формула (9)).

Из формул (4) и (10) получается, что *если* $g(z)$ *и* $\tilde{g}(z)$ *— элементы функции* z^b *в одной и той же точке* $z_0 \neq 0$, *то*

$$\tilde{g}(z) = g(z)e^{2\pi kbi}, \quad |z - z_0| < |z_0|,$$

где k *— некоторое целое число.*

П р и м е р 2. Разложим все элементы функции $\sqrt[n]{z}$, $n = 2,3, \ldots$, в круге $|z + 4i| < 4$ в ряды Тейлора по степеням $(z + 4i)$.

△ Формулу (10) можно получить формально такими же преобразованиями, как если бы z и z_0 были действительными (замечание 3, §2). Получаем

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = [-4i + (z + 4i)]^{\frac{1}{n}} =$$
$$= \left[(-4i)\left(1 - \frac{z+4i}{4i}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = (-4i)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{z+4i}{4i}\right)^{\frac{1}{n}} =$$
$$= \sqrt[n]{4}e^{\frac{i}{n}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} \sum_{m=0}^{\infty} C^m_{\frac{1}{n}} \frac{(-1)^m}{(4i)^m}(z + 4i)^m, \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \quad \blacktriangle$$

Свойство 5. *Пусть $g_1(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_1 \neq$ $\neq 0$, определенный значением $g_1(z_1) = e^{b(\ln|z_1|+i\varphi_1)}$, где φ_1 — одно из значений $\arg z_1$. И пусть $g_2(z)$ — результат аналитического продолжения элемента $g_1(z)$ из точки z_1 в точку $z_2 \neq 0$ вдоль кривой γ_1, не проходящей через точку $z = 0$ (рис. 10). Тогда*

$$g_2(z_2) = e^{b[\ln|z_2|]+i(\varphi_1+\Delta_{\gamma_1}\arg z)]}. \tag{11}$$

○ Формула (11) получается непосредственно из формулы (13), §2. ●

П р и м е р 3. Пусть $g_1(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_1 \neq 0$. Найдем элемент $g_2(z)$, который получается в результате аналитического продолжения элемента $g_1(z)$ из точки z_1 в ту же точку z_1 вдоль окружности $\gamma : |z| = |z_1|$, ориентированной против часовой стрелки (рис. 11).

△ По формуле (11) с помощью рис. 11 находим $g_2(z_1) = g_1(z_1)e^{2\pi bi}$, поэтому $g_2(z) = g_1(z)e^{2\pi bi}$. Таким образом, после одного оборота вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении получаем

$$g_1(z) \to g_1(z)e^{2\pi bi}.$$

После второго, третьего и т.д. оборотов вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении получаем

$$g_1(z) \to g_1(z)e^{2\pi bi} \to g_1(z)e^{4\pi bi} \to g_1(z)e^{6\pi bi} \to \ldots\ . \tag{12}$$

Аналогично после оборотов вокруг точки $z = 0$ в отрицательном направлении находим

$$g_1(z) \to g_1(z)e^{-2\pi bi} \to g_1(z)e^{-4\pi bi} \to g_1(z)e^{-6\pi bi} \to \ldots\ . \tag{13}$$

Из формул (12), (13) следует, что если число b не является рациональным, то $z = 0$ — логарифмическая точка ветвления функции z^b.

Пусть теперь $b = \frac{m}{n}$, где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $n = 2{,}3, \ldots$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда числа $e^{\frac{2\pi km}{n}i}$ при $k = 0{,}1, \ldots ,n-1$ различны, а $e^{\frac{2\pi nm}{n}i} = 1$. Следовательно, по формуле (12) в точке $z_1 \neq 0$ функция $z^{\frac{m}{n}}$ имеет ровно n различных элементов $g_1(z)e^{\frac{2\pi km}{n}i}$, $k = 0{,}1, \ldots ,n-1$, а $g_1(z)e^{\frac{2\pi nm}{n}i} \equiv g_1(z)$. (По формуле (13) получаются эти же элементы.)

Итак, после первых $n-1$ оборотов вокруг точки $z = 0$ в точке z_1 получаются различные между собой элементы, отличные от $g_1(z)$, а после n-го оборота получается элемент $g_1(z)$. В таком случае точка $z = 0$ называется *алгебраической точкой ветвления порядка n* функции $z^{\frac{m}{n}}$ (см. §6). ▲

Вернемся к свойству 1. Докажем, что *если b — нецелое число, то элемент* (1) *функции z^b нельзя аналитически продолжить по кривой, проходящей через точку $z = 0$.*

○ Предположим, что такое продолжение существует. Тогда в точке $z = 0$ оно определяет элемент $\tilde{g}(z)$ функции z^b, т.е. регулярную в некотором круге $\tilde{K} : |z| < \tilde{R}$ функцию $\tilde{g}(z)$.

Пусть $z_1 \neq 0$, $0 < |z_1| < \tilde{R}$. В окрестности точки z_1 функция $g_1(z) = \tilde{g}(z)$ является элементом функции z^b. Рассмотрим аналитическое продолжение этого элемента вдоль окружности $\gamma : |z| = |z_1|$, ориентированной против часовой стрелки.

Так как функция $\tilde{g}(z)$ регулярна в круге $\tilde{K}$, то в каждой точке $\zeta \in \gamma$ должен получиться элемент $g_\zeta(z) = \tilde{g}(z)$, в частности, в точке

z_1 должен получиться элемент $g_1(z) = \tilde{g}(z)$. Но в примере 3 доказано, что после одного оборота вокруг точки $z = 0$ в точке z_1 получается элемент $g_1(z)e^{2\pi bi} \neq g_1(z)$, так как b — нецелое число. Это противоречие и доказывает сформулированное утверждение. ●

Таким образом, если b — нецелое число, то функция z^b — это множество элементов в точках $z \neq 0$, которые можно представить, например, по формулам (2), (9), (10).

З а м е ч а н и е 2. Как и для $\operatorname{Ln} z$ (замечание 4, §2), символом z^b обозначается совокупность аналитических функций, имеющих одно и то же множество элементов и отличающихся друг от друга только исходными элементами.

З а м е ч а н и е 3. Для исследования аналитической функции $F(z)$, заданной исходным элементом $f_0(z)$ (как и в §§2, 3), обычно выясняют:

1) какие кривые являются допустимыми для элемента $f_0(z)$;
2) как находить значения функции $F(z)$, т.е. значения ее элементов;
3) как находить производные ее элементов;
4) как представлять ее элементы рядами Тейлора или Лорана.

§ 4. Арифметические операции над аналитическими функциями

Определение 1. Пусть аналитические функции $G(z)$ и $H(z)$ порождены исходными элементами $g_0(z)$ и $h_0(z)$ соответственно, *заданными в одной и той же точке* z_0. Тогда аналитические функции с исходными элементами $g_0(z) \pm h_0(z)$, $g_0(z)h_0(z)$ и $\frac{g_0(z)}{h_0(z)}$, если $h_0(z_0) \neq$ $\neq 0$, называются соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* аналитических функций $G(z)$ и $H(z)$ и обозначаются

$$G(z) \pm H(z), \qquad G(z)H(z), \qquad \frac{G(z)}{H(z)}.$$

Если аналитические функции заданы исходными элементами в разных точках, то арифметические операции над ними не определены.

П р и м е р 1. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \mathrm{Ln}[(z-a)(z-b)], \tag{1}$$

где a, b — действительные числа, $a < b$.

$\triangle$ Эту функцию можно определить как суперпозицию функций $\zeta = H(z) = (z-a)(z-b)$ и $G(\zeta) = \mathrm{Ln}\,\zeta$ (см. §3). Однако более простым для изучения свойств функции (1) является эквивалентное определение ее по формуле

$$F(z) = \mathrm{Ln}[(z-a)(z-b)] = \mathrm{Ln}(z-a) + \mathrm{Ln}(z-b). \tag{2}$$

Свойства функции вида $\mathrm{Ln}(z-a)$, определенной как суперпозиция функций $\zeta = z - a$ и $\mathrm{Ln}\,\zeta$, получаются непосредственно из свойств функции $\mathrm{Ln}\,z$.

По определению 1 функция (2) — это аналитическая функция с исходным элементом $f_0(z) = g_0(z) + h_0(z)$, где $g_0(z)$, $h_0(z)$ — некоторые элементы соответственно функций $\mathrm{Ln}(z-a)$, $\mathrm{Ln}(z-b)$ в одной и той же точке z_0, где $z_0 \neq a$, $z_0 \neq b$.

Каждый из элементов $g_0(z)$ и $h_0(z)$ полностью определяется своим значением в точке z_0 (замечание 1, §2).

Пусть $g_0(z_0) = \ln|z_0 - a| + i\varphi_1^{(0)}$, $h(z_0) = \ln|z_0 - b| + i\varphi_2^{(0)}$, где $\varphi_1^{(0)}$ — одно из значений $\arg(z_0 - a)$, $\varphi_2^{(0)}$ — одно из значений $\arg(z_0 - b)$ (рис. 12). Тогда

$$f_0(z_0) = \ln|(z_0-a)(z_0-b)| + \left(\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)}\right) i. \tag{3}$$

Элементы $g_0(z)$ и $h_0(z)$ можно аналитически продолжить из точки z_0 в точку z вдоль любой кривой γ, не проходящей через точки $z = a$ и $z = b$ (свойство 2, §2), и значения этих продолжений вычисляются по формуле (13), §2. Следовательно, элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой такой кривой и в результате в точке z получится такой элемент $f(z)$ функции $F(z)$, значение которого вычисляется по формуле

$$f(z) = \ln|(z-a)(z-b)| + \left(\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)}\right) i + (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)i, \tag{4}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-a)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-b)$ (рис. 12).

Итак, значения функции (2) вычисляются по формуле (4).

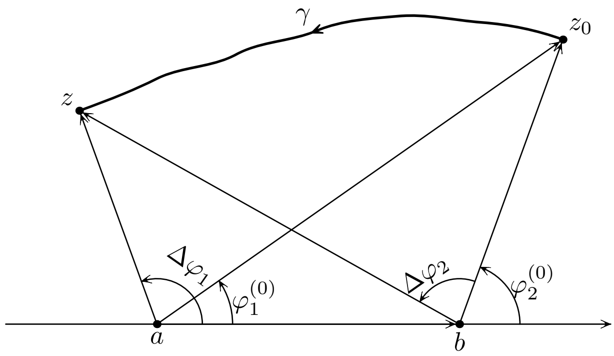

Рис. 12

Все остальные свойства функции (2) также получаются из соответствующих свойств функции $\operatorname{Ln} z$. Например, если $f(z)$ — элемент функции (2), то по формуле (9), §2 находим

$$f'(z) = \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}. \blacktriangle$$

П р и м е р 2. Рассмотрим функцию

$$F(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta, \tag{5}$$

где a, b, α, β — действительные числа, $a < b$.

$\triangle$ Свойства функции (5) получаются непосредственно из свойств функции z^b (§3).

По определению 1 функция (5) — это аналитическая функция с исходным элементом $f_0(z) = g_0(z)h_0(z)$, где $g_0(z)$, $h_0(z)$ — некоторые элементы соответственно функций $(z-a)^\alpha$, $(z-b)^\beta$ в одной и той же точке z_0, где $z_0 \neq a$, $z_0 \neq b$.

Пусть $g_0(z_0) = |z_0 - a|^\alpha e^{i\alpha\varphi_1^{(0)}}$, $h_0(z_0) = |z_0 - a|^\beta e^{i\beta\varphi_2^{(0)}}$, где $\varphi_1^{(0)} = \arg(z_0 - a)$, $\varphi_2^{(0)} = \arg(z_0 - b)$ (рис. 12). Тогда

$$f_0(z_0) = |z_0 - a|^\alpha |z - b|^\beta e^{\left(\alpha\varphi_1^{(0)} + \beta\varphi_2^{(0)}\right)i}. \tag{6}$$

По формуле (11), §3 получаем, что в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ из точки z_0 в точку z вдоль кривой γ, не проходящей через точки $z = a, z = b$, в точке z получается элемент $f(z)$ функции $F(z)$, значение которого вычисляется по формуле

$$f(z) = |z - a|^\alpha |z - b|^\beta e^{\left(\alpha\varphi_1^{(0)} + \beta\varphi_2^{(0)}\right)i} e^{(\alpha\Delta\varphi_1 + \beta\Delta\varphi_2)i}, \tag{7}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z - a)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z - b)$.

Итак, значения функции (5) вычисляются по формуле (7).

Найдем формулу для вычисления значений производной элементов функции (5). Пусть $f(z) = g(z)h(z)$ — элемент функции (5) в точке $z \neq a$, $z \neq b$, где $g(z)$, $h(z)$ — элементы соответственно функций $(z - a)^\alpha$, $(z - b)^\beta$. Тогда, используя формулу (8), §3, получаем

$$f'(z) = g'(z)h(z) + g(z)h'(z) = \frac{\alpha}{z - a} g(z)h(z) + g(z)\frac{\beta}{z - b} h(z) = \\ = \left(\frac{\alpha}{z - a} + \frac{\beta}{z - b}\right) f(z).$$

Итак:

$$f'(z) = \left(\frac{\alpha}{z - a} + \frac{\beta}{z - b}\right) f(z). \blacktriangle \tag{8}$$

П р и м е р 3. Покажем, как можно определить *обратные тригонометрические функции.*

$\triangle$ Решим уравнение $\sin w = z$ относительно w при заданном (любом) значении z. Получаем:

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) = z,$$

$$
\begin{gathered}
(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0,\\
e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2},\\
w = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}).
\end{gathered}
$$

Поэтому естественно функцию $\arcsin z$ определить формулой

$$
\arcsin z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}). \tag{9}
$$

Аналогично, решая уравнения $\cos w = z$, $\mathrm{tg}\, w = z$, $\mathrm{ctg}\, w = z$, получаем определение остальных обратных тригонометрических функций формулами:

$$
\arccos z = i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \tag{10}
$$

$$
\mathrm{arctg}\, z = \frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i+z}{i-z}, \tag{11}
$$

$$
\mathrm{arcctg}\, z = \frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z-i}{z+i}. \tag{12}
$$

Таким же способом получаются формулы для обратных гиперболических функций.

Таким образом, свойства обратных тригонометрических функций и обратных гиперболических функций получаются из соответствующих свойств уже изученных функций $\mathrm{Ln}\, z$ и $\sqrt{z^2-1}$.

Отметим, что каждую из этих функций можно задать какимнибудь ее исходным элементом. Например, функцию $\mathrm{arctg}\, z$ можно определить ее исходным элементом

$$
f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \quad z \in K_0 : |z| < 1.
$$

Регулярная функция $f_0(z)$ является аналитическим продолжением (единственным) функции $\mathrm{arctg}\, x$ с интервала $-1 < x < 1$ в круг K_0. Элемент $f_0(z)$ можно представить интегралом

$$
f_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}, \quad z \in K_0,
$$

по любой кривой в круге K_0.

Подробнее об обратных тригонометрических и об обратных гиперболических функциях см. в [2]. ▲

<u>З а м е ч а н и е.</u> Каждая из формул (1), (5), (9)–(12) задает одну аналитическую функцию с точностью до исходного элемента. Следует иметь в виду, что не всякая формула, содержащая логарифмы и степени, задает только одну аналитическую функцию. Например, $\sqrt{z^2}$ — это две аналитические функции z и $-z$, $\operatorname{Ln} e^z$ — это аналитические функции$z + 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В таких случаях для задания аналитической функции нужно задать ее исходный элемент.

П р и м е р 4. Функция z^z определяется формулой $z^z = e^{z \operatorname{Ln} z}$, поэтому ее значения в точке $z \neq 0$ находятся по формуле $z^z = e^{z(\ln|z| + i \arg z)}$.

△ Например, при $z = i$ получаем

$$i^i = e^{i(\ln|i| + i \arg i)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Это те же самые значения, которые принимает функция z^i в точке i (пример 1, §3). ▲

§ 5. Аналитические и регулярные ветви полных аналитических функций

1. Непрерывные ветви функции $\arg z$

В §2 (свойство 3) сформулированы следующие два определения *приращения аргумента z вдоль кривой γ, не проходящей через точку $z = 0$.*

Г е о м е т р и ч е с к о е : $\Delta_\gamma \arg z$ — это угол поворота вектора z при движении точки z по кривой γ от начальной точки z_0 кривой γ до точки z (рис. 13).

А н а л и т и ч е с к о е : если $z = r(t) e^{i\varphi(t)}$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, —

параметрическое уравнение кривой γ, то

$$\Delta_\gamma \arg z = \int\limits_\gamma d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \varphi'(t)\, dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Так как $d\varphi = \dfrac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}$, то

$$\Delta_\gamma \arg z = \int\limits_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Геометрически или из свойств интеграла (1) получаются следующие свойства приращения аргумента.

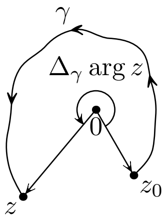

Рис. 13

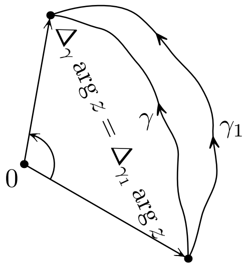

Рис. 14

Свойство 1. *Пусть кривые* γ,γ_1 *с общим началом и общим концом не проходят через точку* $z = 0$ *и кривую* γ *можно непрерывно деформировать в кривую* γ_1, *не проходя через точку* $z = 0$, *т.е. в области* $0 < |z| < \infty$ *(рис.* 14*). Тогда*

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z. \tag{2}$$

Отметим, что если две кривые с общим началом и общим концом нельзя непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области

$0 < |z| < \infty$, то равенство (2) может оказаться неверным (пример 1, §2, рис. 9).

Свойство 2. *Если кривая* γ *не проходит через точку* $z = 0$, *то*

$$\Delta_\gamma \arg z = -\Delta_{\gamma^{-1}} \arg z.$$

Свойство 3. *Если кривая* $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ *не проходит через точку* $z = 0$, *то*

$$\Delta_{\gamma_1\gamma_2} \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z.$$

Рассмотрим кривую γ с началом в точке z_0, не проходящую через точку $z = 0$ (рис. 15). Обозначим $\Delta\varphi(z) = \Delta_\gamma \arg z$, где z — переменная точка кривой γ. Из формулы (1) следует, что функция $\Delta\varphi(z)$ является непрерывной на кривой γ.

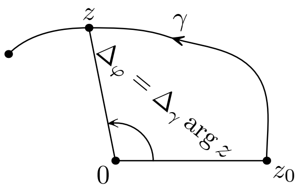

Рис. 15

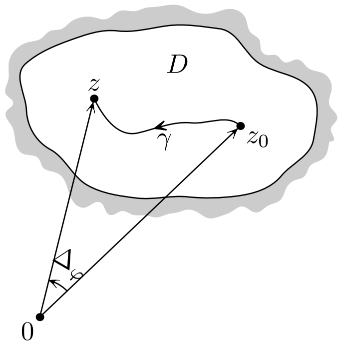

Рис. 16

Пусть $\varphi_0 = \arg z_0$, т.е. φ_0 — одно из значений аргумента z_0. Тогда функция

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta\varphi(z) \tag{3}$$

непрерывна на кривой γ и $\varphi(z) = \arg z$, т.е. $\varphi(z)$ — одно из значений $\arg z$. Такую функцию $\varphi(z)$ *называют непрерывной ветвью многозначной функции* $\arg z$ *на кривой* γ.

Рассмотрим теперь односвязную область D, принадлежащую области $0 < |z| < \infty$, т.е. не содержащую точку $z = 0$ (рис. 16). Пусть

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \Delta\varphi(z), \quad z \in D, \tag{4}$$

где $z_0 \in D$, $\varphi_0 = \arg z_0$ (одно из значений $\arg z_0$), $\Delta\varphi(z) = \Delta_\gamma \arg z$, γ — кривая с началом в точке z_0, принадлежащая области D.

Функция $\varphi(z)$ *однозначна* в области D (свойство 1), *непрерывна в D и в каждой точке $z \in D$ значение $\varphi(z)$ равно одному из значений* $\arg z$. Такую функцию $\varphi(z)$ называют *непрерывной ветвью многозначной функции* $\arg z$ *в области D.*

Выбирая в формуле (4) вместо φ_0 другие (все) значения $\arg z_0$, получаем все непрерывные ветви функции $\arg z$ в области D:

$$\varphi_k(z) = \varphi_0 + \Delta\varphi(z) + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ . \tag{5}$$

Отметим, что в каждой точке $z \in D$ каждое значение $\arg z$ равно значению одной (и только одной) из функций (5), т.е. $\arg z = \varphi_k(z)$, где k — некоторое целое число.

Таким образом, многозначная функция $\arg z$ в области D *распадается* на однозначные непрерывные ветви (5).

Непрерывная ветвь функции $\arg z$ *в области D полностью определяется своим значением в одной точке $z_0 \in D$.*

П р и м е р 1. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty,0]$ (рис. 17) , $z_0 = 1, \varphi_0 = \arg 1 = 0$. Тогда непрерывная ветвь $\varphi(z)$ в области D, заданная значением $\varphi(1) = 0$, такова, что $-\pi < \varphi(z) < \pi$ (рис. 17).
$\triangle$ Например, $\varphi(x) = 0$ при $x > 0, \varphi(iy) = \frac{\pi}{2}$ при $y > 0, \varphi(iy) = -\frac{\pi}{2}$ при $y < 0$. $\blacktriangle$

В формуле (4) точка z_0 может быть граничной точкой области D.

П р и м е р 2. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$, $z_0 = 1 + i0$ — точка верхнего берега разреза, $\varphi_0 = \arg 1 = 0$ (рис. 18). Тогда непрерывная ветвь $\varphi(z)$ функции $\arg z$ в

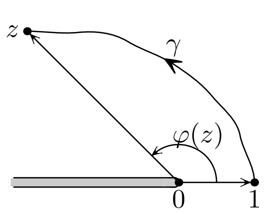

Рис. 17

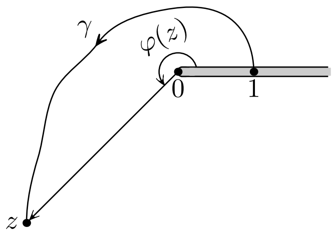

Рис. 18

области D, заданная значением $\varphi(1+i0)=0$, такова, что $0<\varphi(z)<$ $<2\pi$ (рис. 18).

△ Например, $\varphi(iy)=\frac{\pi}{2}$ при $y>0$, $\varphi(x)=\pi$ при $x<0$, $\varphi(iy)=\frac{3\pi}{2}$ при $y<0$ (ср. пример 1), на верхнем берегу разреза $\varphi(x+i0)=0$ при $x>0$, на нижнем берегу разреза $\varphi(x-i0)=2\pi$ при $x>0$. ▲

Приведем пример области, в которой нельзя выделить непрерывную ветвь функции $\arg z$.

П р и м е р 3. Пусть D — кольцо $1<|z|<3$ (рис. 19). Предположим, что в этой области существует непрерывная ветвь $\varphi(z)$ функции $\arg z$. Тогда функция $\varphi(z)$ непрерывна, в частности, на окружности $\gamma:|z|=2$ (рис. 19). Если, например, $z_0=2, \varphi(z_0)=\varphi_0=\arg 2$, то в точках $z\in\gamma$ по формуле (3) получаем

$$\varphi(z)=\varphi_0+\Delta_\gamma \arg z,$$

откуда при $\Delta_\gamma \arg z=2\pi$ (после одного оборота вокруг точки $z=0$ по окружности γ против часовой стрелки) получаем $\varphi(z_0)=\varphi_0+2\pi$, что противоречит равенству $\varphi(z_0)=\varphi_0$. ▲

Таким образом, в области D можно выделить непрерывную ветвь функции $\arg z$, если приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ не зависит от кривой γ, т.е. если для любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, имеет место равенство $\Delta_\gamma \arg z=0$. Другими словами, в области D не должно быть простых замкнутых кривых, содержащих внутри себя точку $z=0$, т.е. нужно, чтобы в области D нельзя было обойти вокруг точки $z=0$ (одновременно вокруг точки $z=\infty$). Такой обла-

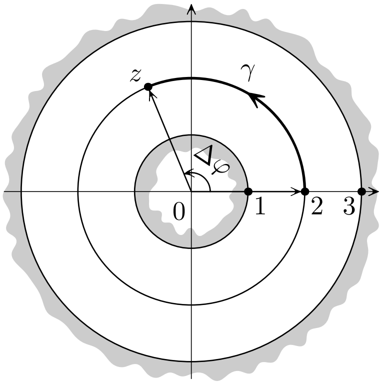

Рис. 19

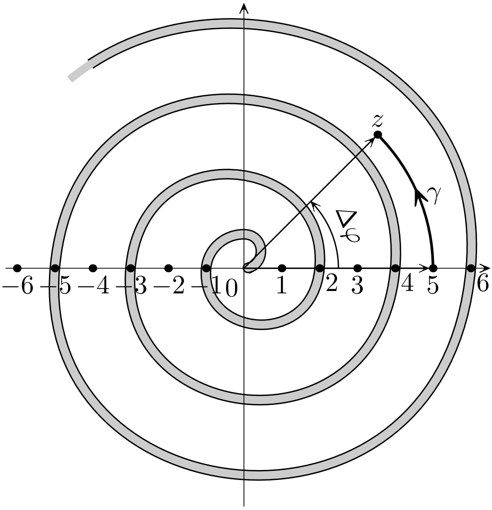

Рис. 20

стью является, например, вся комплексная плоскость с разрезом по неограниченной кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$. В такой области и в любой ее подобласти многозначная функция $\arg z$ допускает выделение однозначных непрерывных ветвей.

П р и м е р 4. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по кривой $z = \frac{t}{\pi} e^{it}$,
$0 \leqslant t < \infty$ (рис. 20) и $\varphi(z)$ — непрерывная ветвь функции $\arg z$ в области D такая, что $\varphi(5) = 2\pi$. Тогда

$$\varphi(z) = 2\pi + \Delta_\gamma \arg z,$$

где γ — кривые с началом в точке $z_0 = 5$, лежащие в области D. Выбирая различные такие кривые γ, с помощью рис. 20 находим, например: $\varphi(-6) = 3\pi$, $\varphi(7) = 4\pi$, $\varphi(-4) = \pi$, $\varphi(3) = 0$, $\varphi(-2) = -\pi$, $\varphi(1) = -2\pi$. ▲

2. Определение аналитической в области функции

Определение 1. Пусть заданы область D и элемент $f_0(z)$ в точке $z_0 \in D$ такой, что его можно аналитически продолжить по любой кривой с началом в точке z_0, лежащей в области D, т.е. любая такая кривая является допустимой для элемента $f_0(z)$. *Аналитической в области D функцией* с исходным элементом $f_0(z)$ (порожденной элементом $f_0(z)$) называется *множество элементов, полученных в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ по всем кривым с началом в точке z_0, лежащим в области D.*

Аналитическую в области функцию будем обозначать $f(z)$,$F(z)$ и т.п., хотя эта функция может быть неоднозначной как функция точки плоскости z.

П р и м е р 5.

1) Из свойства 2, §2 следует, что функция $\operatorname{Ln} z$ аналитична в области $0 < |z| < \infty$.
2) Из свойства 1, §3 следует, что функция z^b (b — любое комплексное число) аналитична в области $0 < |z| < \infty$.
3) Функция $\operatorname{Ln}[(z-a)(z-b)]$, где a,b — действительные числа, $a < b$, аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $z = a$,$z = b$,$z = \infty$ (пример 1, §4).
4) Функция $(z-a)^\alpha(z-b)^\beta$, где a,b,α,β — действительные числа, $a < b$, аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $z = a$,$z = b$,$z = \infty$ (пример 2, §4). ▲

П р и м е р 6. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty,0]$ (пример 1, рис. 17) и $f_0(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$, заданной в точке $z_0 = 1$ значением $f_0(1) = 0$. По свойству 2, §2 любая кривая γ с началом в точке $z_0 = 1$, лежащая в области D, является допустимой для элемента $f_0(z)$. Следовательно, элемент $f_0(z)$ порождает аналитическую в области D функцию, обозначим ее $f(z)$. Из свойств функции $\operatorname{Ln} z$ (§2) и функции $\Delta_\gamma \arg z$ (пример 1) получается, что $f(z)$ — однозначная регулярная в области D функция:

$$f(z) = \ln|z| + i\varphi, \qquad \text{где} \quad \varphi = \arg z, \quad -\pi < \varphi < \pi. \tag{6}$$

Аналогично, если $g_0(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_0 = 1$ такой, что $g_0(1) = 1$, то этот элемент порождает аналитическую в области D функцию $g(z)$, которая однозначна и регулярна в области D:

$$g(z) = e^{b(\ln|z|+i\varphi)}, \quad -\pi < \varphi < \pi. \ \blacktriangle \tag{7}$$

Вообще регулярная в области функция является аналитической в этой области, т.е. регулярная в области функция — это частный случай аналитической в области функции.

В примере 6 функцию (6) называют регулярной ветвью функции $\operatorname{Ln} z$ в области D, а функцию (7) — регулярной ветвью функции z^b в этой области.

3. Аналитические и регулярные ветви полных аналитических функций

Определение 2. *Аналитической ветвью полной аналитической функции $F(z)$ в области D называется аналитическая в области D функция $f(z)$ такая, что некоторый элемент функции $f(z)$ является одним из элементов функции $F(z)$.*

Если для заданной аналитической функции $F(z)$ существует аналитическая ветвь в заданной области D, то говорят, что "в области D можно выделить аналитическую ветвь функции $F(z)$" или "функция $F(z)$ допускает выделение аналитической ветви в области D".

Поясним более подробно определение 2. Пусть задана полная аналитическая функция $F(z)$ своим исходным элементом $f_0(z)$ в точке z_0. И пусть существует точка z_1, принадлежащая заданной области D, такая, что элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по некоторой кривой в точку z_1 и в результате в точке z_1 получится элемент $f_1(z)$ функции $F(z)$.

Предположим, что элемент $f_1(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в области D, с началом в точке $z_1 \in D$, т.е. элемент $f_1(z)$ порождает аналитическую в области D функцию $f(z)$. Тогда каждый элемент $f_2(z)$ функции $f(z)$ в каждой точке $z_2 \in D$ является элементом функции $F(z)$. Таким образом, $f(z)$ — это множество элементов функции $F(z)$ таких, что они получаются в результате аналитического продолжения элемента $f_1(z)$ из точки z_1 по всем кривым, лежащим в области D. В этом случае функцию $f(z)$ называют аналитической ветвью функции $F(z)$ в области D.

При этом может оказаться, что функция $f(z)$ однозначна и, следовательно, регулярна в области D, так как в окрестности каждой точки $z_2 \in D$ функция $f(z)$ является одним из элементов функции $F(z)$ и поэтому функция $f(z)$ регулярна в точке z_2. Тогда функцию $f(z)$ называют *регулярной ветвью функции* $F(z)$ *в области* D.

Определение регулярной ветви многозначной функции $F(z)$ (заданной своими значениями и не обязательно аналитической) можно сформулировать следующим образом.

Определение 3. *Регулярной ветвью многозначной функции $F(z)$ в области D называется такая регулярная в области функция $f(z)$, что в каждой точке $z \in D$ значение $f(z)$ равно одному из значений функции $F(z)$.*

Для доказательства возможности выделения в области D регулярной ветви аналитической функции $F(z)$ нужно доказать, что в некоторой точке $z_0 \in D$ существует такой элемент $f_0(z)$ функции $F(z)$, что:

1) элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой с началом в точке z_0, лежащей в области D;
2) аналитическая в области D функция $f(z)$, порожденная элементом $f_0(z)$, является однозначной и, следовательно, регулярной в области D.

В примере 6 однозначность функции $f(z)$ (и $g(z)$) доказана с помощью свойств приращения аргумента z (п. 1, свойство 1). Оказывается, что в общем случае аналитическое продолжение обладает следующим замечательным свойством.

Теорема 1. ***(О монодромии)*** *Пусть элемент $f_0(z)$, заданный в точке $z_0 \in D$, можно аналитически продолжить по любой кривой с началом в точке z_0, принадлежащей области D. И пусть две кривые γ_1 и γ_2 с общим началом в точке z_0 и общим концом в точке $z_1 \in \in D$, лежащие в области D, можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D. Тогда в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ из точки z_0 в точку z_1 вдоль кривых γ_1 и γ_2 в точке z_1 получается один и тот же элемент.*

Доказательство этой теоремы см. в [2].

Если D — односвязная область, то любые две кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D. Поэтому из теоремы о монодромии получается

Следствие. *Аналитическая в односвязной области функция однозначна и, следовательно, регулярна.*

П р и м е р 7. Пусть D — область примера 4 (рис. 20). Выберем в точке $z_0 = 5$ элемент $f_0(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ такой, что $f_0(5) = \ln 5 + 2\pi i$. По свойству 2, §2 этот элемент допускает аналитическое продолжение по любой кривой γ с началом в точке $z_0 = 5$, лежащей в области D. Следовательно, элемент $f_0(z)$ порождает аналитическую в области D функцию (определение 1), обозначим ее $f(z)$. По определению 2 функция $f(z)$ является аналитической ветвью функции $\operatorname{Ln} z$ в области D. Так как D — односвязная область, то по теореме о монодромии функция $f(z)$ однозначна и регулярна в области D, т.е. является регулярной ветвью функции $\operatorname{Ln} z$ в области D.

По свойству 6, §2 значения функции $f(z)$ находятся по формуле

$$f(z) = \ln |z| + (2\pi + \Delta_\gamma \arg z)i.$$

Например, с помощью рис. 20 находим:

$$f(7) = \ln 7 + 4\pi i, \quad f(-4) = \ln 4 + \pi i, \quad f(3) = \ln 3, \quad f(1) = -2\pi i.$$

Выбирая в точке z_0 другие (все) значения $\operatorname{Ln} z_0$ получаем все регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} z$ в области D:

$$f_k(z) = \ln|z| + (2\pi + 2\pi k + \Delta_\gamma \arg z)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \qquad (8).$$

Отметим, что в каждой точке $z \in D$ каждое значение $\operatorname{Ln} z$ равно значению одной (и только одной) из функций (8), т.е. $\operatorname{Ln} z = f_k(z)$, где k — некоторое целое число.

Таким образом, многозначная функция $\operatorname{Ln} z$ в области D *распадается* на однозначные регулярные ветви (8). ▲

Регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ *в области* D *полностью определяется своим значением в одной точке* $z_0 \in D$.

Отметим, что не каждая аналитическая функция $F(z)$ обладает последним свойством. Например, аналитическая функция $F(z) = \sin z \operatorname{Ln} z$ в рассматриваемой области D распадается на регулярные ветви $\sin z f_k(z)$, где $f_k(z)$ определяется формулой (8). Однако, значение всех этих ветвей, например, в точке $z_0 = \pi$, одно и то же — равно нулю.

П р и м е р 8. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по отрезкам [1,3], [3,3+i) и лучу ($-\infty+i$,3+i] (рис. 21). Так же, как и в примере 7, доказывается, что аналитическая функция $\operatorname{Ln}(z-1)$ в области D распадается на регулярные ветви, каждая из которых полностью определяется своим значением в некоторой точке $z_0 \in D$ — одним из значений $\operatorname{Ln}(z_0 - 1)$.

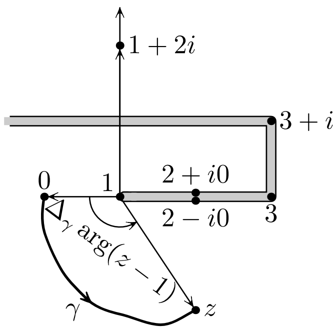

Рис. 21.

Пусть $z_0 = 0$ и $f(z)$ — такая регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}(z-1)$ в области D, что $f(0) = \pi i$. Поставим следующие задачи:

1) найти формулу для вычисления значений функции $f(z)$;
2) найти формулу для производной функции $f(z)$;
3) разложить функцию $f(z)$ в ряду Тейлора в окрестности точки $z_1 = 1 + 2i$ по степеням $(z - 1 - 2i)$.

$\triangle$ 1) По свойству 6, §2 получаем

$$f(z) = \ln|z - 1| + (\pi + \Delta_\gamma \arg(z - 1))i. \tag{9}$$

По этой формуле с помощью рис. 21 находим:

$$f(4) = \ln 3 + 2\pi i, \quad f\left(1 + \frac{i}{2}\right) = -\ln 2 + \frac{\pi i}{2},$$
$$f(2 - i0) = 2\pi i, \quad f(2 + i0) = 0.$$

Как и в последних двух случаях, получается, что в каждой точке разреза на разных его берегах значения функции $f(z)$ отличаются на $2\pi i$. Поэтому функцию $f(z)$ нельзя “склеить” вдоль разреза так, чтобы получилась непрерывная функция.

2) По свойству 4, §2 получаем

$$f'(z) = \frac{1}{z - 1}.$$

3) Функция $f(z)$ в окрестности точки $z_1 = 1+2i$ является одним из элементов функции $\mathrm{Ln}(z-1)$ в этой точке. По свойству 5, §2 получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathrm{Ln}(z - 1) = \mathrm{Ln}[(z - 1 - 2i) + 2i] = \\ &= \mathrm{Ln}\left[2i\left(1 + \frac{z - 1 - 2i}{2i}\right)\right] = \mathrm{Ln}(2i) + \mathrm{Ln}\left(1 + \frac{z - 1 - 2i}{2i}\right) = \\ &= \ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) i + \sum_{n-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2i)^n}(z - 1 - 2i)^n, \end{aligned} \tag{10}$$

где k — некоторое целое число, которое нужно найти.

По формуле (9) находим

$$f(1 + 2i) = \ln 2 + \left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right) i,$$

а по формуле (10) получаем

$$f(1+2i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) i,$$

откуда $k = 1$, и поэтому

$$f(z) = \ln 2 + \frac{5\pi i}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2i)^n}(z-1-2i)^n. \qquad (11)$$

Этот ряд сходится к функции $f(z)$ в любой окрестности точки $z_1 = 1 + 2i$, лежащей в области D, в частности, в круге $K_0 : |z-1-2i| < 1$ (рис. 22). Однако кругом сходимости ряда является круг $K : |z-1-2i| < 2$. Луч $(-\infty + i, 3 + i]$ “разрезает” круг K на две области: $D_1 : |z-1-2i| < 2$, $\operatorname{Im} z > 1$ и $D_2 : |z-1-2i| < 2$, $\operatorname{Im} z < 1$ (рис. 22).

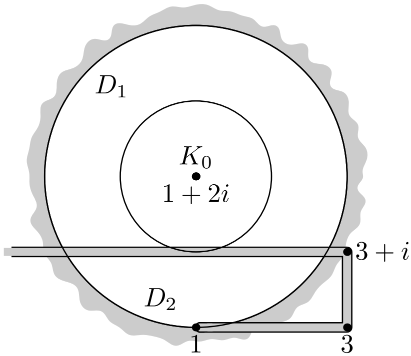

Рис. 22.

В области D_1 ряд (11) сходится к функции $f(z)$ по теореме единственности, так как ряд (11) и функция $f(z)$ регулярны в области D_1, и они совпадают в круге K_0.

В области D_2 ряд (11) сходится, но не к функции $f(z)$, так как ряд (11) — регулярная в круге K функция, а функция $f(z)$ терпит разрыв на луче $(-\infty + i, 3 + i]$. В точках z области D_2 значения ряда (11) равны $f(z) + 2\pi i$. ▲

П р и м е р 9. Пусть D — та же самая область, что и в примере 8 (рис. 21), и $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[4]{z-1}$ в области D такая, что $g(0) = e^{\frac{\pi i}{4}}$. Решим для функции $g(z)$ такие же задачи, как и для функции $f(z)$ в примере 8.

△ 1) По свойству 5, §3 получаем

$$g(z) = \sqrt[4]{|z-1|}\, e^{\frac{i}{4}(\pi + \Delta_\gamma \arg(z-1))}. \qquad (12)$$

Например, по этой формуле с помощью рис. 21 находим: $g(4) = i\sqrt[4]{3}$, $g(2-i0) = i$, $g(2+i0) = 1$.

Как и в последних двух случаях, получается, что в каждой точке разреза на разных его берегах значения функции $g(z)$ отличаются множителем i, и поэтому функцию $g(z)$ нельзя "склеить" вдоль разреза.

2) По свойству 3, §3 получаем

$$g'(z) = \frac{1}{4(z-1)}g(z).$$

Например, по этой формуле и формуле (12) находим

$$g'(4) = \frac{i\sqrt[4]{3}}{12}, \quad g'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

3) По свойству 4, §3 в окрестности точки $z_1 = 1+2i$ получаем

$$g(z) = \sqrt[4]{z-1} = [(z-1-2i)+2i]^{\frac{1}{4}} = (2i)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{z-1-2i}{2i}\right)^{\frac{1}{4}} =$$
$$= \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi i}{8}(1+4k)}\sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{4}}^{n}\frac{1}{(2i)^n}(z-1-2i)^n, \tag{13}$$

где k — некоторое целое число, которое нужно найти.

По формуле (12) находим

$$g(1+2i) = \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi i}{8}},$$

а по формуле (13) получаем

$$g(1+2i) = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi i}{8}(1+4k)},$$

откуда

$$e^{\frac{\pi i}{8}(1+4k)} = e^{\frac{5\pi i}{8}}. \tag{14}$$

Из равенства (14) целое число k определяется неоднозначно, но это не существенно. Важно, что в формуле (13) множитель $e^{\frac{\pi i}{8}(1+4k)}$ определяется однозначно формулой (14). Однако, в таких задачах во избежание вычислительных ошибок полезно проверить, что равенство (14) в самом деле выполняется при некоторых целых значениях k. В данном случае равенство (14) выполняется, например, при $k = 1$.

Итак, из формул (13) и (14) находим

$$g(z) = \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi i}{8}} \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{4}}^{n} \frac{1}{(2i)^n}(z-1-2i)^n. \tag{15}$$

Так же, как и в примере 8, получается, что ряд (15) сходится к функции $g(z)$ в области D_1 (рис. 22), а в области D_2 сходится к функции $ig(z)$. ▲

П р и м е р 10. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по отрезку $[a,b]$, где a и b действительные числа, $a < b$ (рис. 23). Докажем, что в этой области:

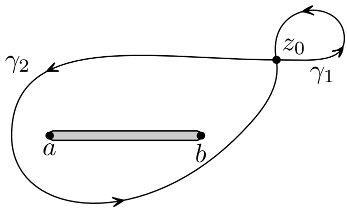

Рис. 23.

1) функция

$$F(z) = \operatorname{Ln}\frac{z-a}{b-z} \tag{16}$$

распадается на регулярные ветви;

2) функция

$$F(z) = (z-a)^{\alpha}(b-z)^{1-\alpha}, \tag{17}$$

где α — действительное число, также распадается на регулярные ветви.

△ 1) Функцию (16) определим формулой

$$F(z) = \pi i + \operatorname{Ln}(z-a) - \operatorname{Ln}(z-b) \tag{18}$$

(ср. с примером 1, §4).

Пусть $f_0(z)$ — исходный элемент функции (18) в точке $z_0 \in D$, заданный значением

$$f_0(z_0) = \pi i + \ln|z_0 - a| + i\varphi_1^{(0)} - \ln|z_0 - b| - i\varphi_2^{(0)}, \tag{19}$$

где $\varphi_1^{(0)} = \arg(z_0 - a)$, $\varphi_2^{(0)} = \arg(z_0 - b)$ (рис. 12).

Элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой γ с началом в точке z_0, лежащей в области D. Следовательно, элемент $f_0(z)$ порождает аналитическую в области D функцию $f(z)$ (определение 1), которая является аналитической ветвью функции (18) в области D (определение 2).

Значения функции $f(z)$ вычисляются по формуле

$$f(z) = \ln\left|\frac{z-a}{b-z}\right| + (\pi + \varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)})i + (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)i, \tag{20}$$

где γ — кривые с началом в точке z_0, лежащие в области D, $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-a)$, $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-b)$ (рис. 12).

Покажем, что функция $f(z)$ однозначна и, следовательно, регулярна в области D.

Пусть сначала $z = z_0$. Если кривая γ_1 с началом и концом в точке z_0 не совершает оборот вокруг разреза (на рис. 23 γ_1 — простая замкнутая кривая, не содержащая внутри себя отрезок $[a,b]$), то $\Delta_{\gamma_1} \arg(z-a) = 0$, $\Delta_{\gamma_1} \arg(z-b) = 0$, и по формуле (20) получаем $f(z_0) = f_0(z_0)$. Если замкнутая кривая γ_2 с началам и концом в точке z_0 совершает один оборот вокруг разреза, например, против часовой стрелки (на рис. 23 γ_2 — простая замкнутая кривая, содержащая внутри себя отрезок $[a,b]$), то $\Delta_{\gamma_2} \arg(z-a) = 2\pi$, $\Delta_{\gamma_2} \arg(z-b) = 2\pi$, и по формуле (20) снова получаем $f(z_0) = f_0(z_0)$. Аналогично доказывается, что функция (20) однозначна в каждой точке $z \in D$.

Итак, функция $f(z)$, заданная формулой (20), является регулярной ветвью функции $F(z)$ в области D.

Все регулярные ветви функции $F(z)$ в области D находятся по формуле

$$f_k(z) = f(z) + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

2) Пусть $f_0(z)$ — элемент функции $F(z) = (z-a)^{\alpha}(b-z)^{1-\alpha}$, заданный в точке $z_0 \in D$ (рис. 23) значением

$$f_0(z_0) = |z_0 - a|^{\alpha}|b - z_0|^{1-\alpha} e^{i\alpha\varphi_1^{(0)} + i(1-\alpha)(\pi + \varphi_2^{(0)})}, \tag{21}$$

где $\varphi_1^{(0)} = \arg(z_0 - a)$, $\varphi_2^{(0)} = \arg(z_0 - b)$ (рис. 12).

Элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой γ с началом в точке z_0, лежащей в области D (пример 2, §4). Следовательно, $f_0(z)$ порождает аналитическую в области D функцию $f(z)$ — аналитическую ветвь аналитической функции $F(z)$. Значения функции $f(z)$ находятся по формуле (пример 2, §4)

$$f(z) = |z - a|^{\alpha}|b - z|^{1-\alpha} e^{i\alpha\varphi_1^{(0)} + i(1-\alpha)(\pi + \varphi_2^{(0)})} e^{i\alpha\Delta\varphi_1 + i(1-\alpha)\Delta\varphi_2}, \tag{22}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z - a)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z - b)$ (рис. 12).

По формуле (22) получаем: если кривая γ_1 не совершает оборот вокруг разреза (рис. 23), то $\Delta\varphi_1 = 0, \Delta\varphi_2 = 0$ и $f(z_0) = f_0(z_0)$; если кривая γ_2 делает оборот вокруг разреза (рис. 23), то $\Delta\varphi_1 = 2\pi$, $\Delta\varphi_2 = 2\pi$ и снова $f(z_0) = f_0(z_0)$. Аналогично доказывается, что функция (22) однозначна и, следовательно, регулярна во всей области D.

Таким образом, $f(z)$ — регулярная ветвь аналитической функции $F(z)$. Все регулярные ветви функции $F(z)$ в области D находятся по формуле

$$f_k(z) = f(z) e^{2\pi k\alpha i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

Из этой формулы, в частности, получается, что функция $F(z)$ распадается на конечное число различных регулярных ветвей, если α — рациональное число, и на бесконечное, если α — иррациональное число. ▲

В примере 10 точку z_0 можно выбрать на верхнем или нижнем берегу разреза интервала (a,b). Приведем такие примеры.

Пример 11. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-1}{3-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку [1,3] (рис. 24) такая, что $f(2+i0) = 0$.

Решим следующие задачи:

1) найти формулу для вычисления значений функции $f(z)$;
2) найти формулу для производной функции $f(z)$;
3) разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1 + 2i$ по степеням $(z - 1 - 2i)$;
4) разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $3 < |z| < \infty$ по степеням z.

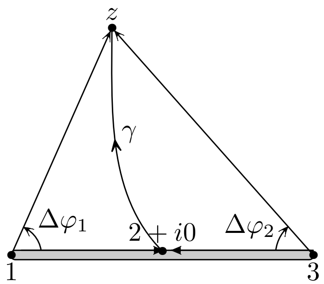

Рис. 24.

△ 1) Из условия $f(2+i0) = 0$ и формулы (19) при $z_0 = 2+i0$ получаем

$$f(2 + i0) = \pi i + (\varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)})i = 0.$$

Следовательно, формула (20) для вычисления значений функции $f(z)$ такова

$$f(z) = \ln\left|\frac{z-1}{3-z}\right| + (\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)i, \tag{23}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z - 1)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z - 3)$ (рис. 24).

Например, по формуле (23) находим

$$f(4) = \ln 3 + \pi, \qquad f(x + i0) = \ln\frac{x-1}{3-x} \quad \text{при } 1 < x < 3,$$
$$f(x - i0) = \ln\frac{x-1}{3-x} + 2\pi i \quad \text{при } 1 < x < 3$$
$$f(1 + 2i) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi i}{4}.$$

2) Так как $\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{3-z} = \pi i + \operatorname{Ln}(z-1) - \operatorname{Ln}(z-3)$, то по свойству 4, §2 находим

$$f'(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} = \frac{2}{(z-1)(3-z)}$$

3) Разложим в ряды Тейлора все элементы функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-1}{3-z}$ в окрестности точки $z=1+2i$ (замечание 3, §2):

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,\frac{z-1}{3-z} &= \mathrm{Ln}\,\frac{2i+(z-1-2i)}{2-2i-(z-1-2i)} = \\ &= \mathrm{Ln}\,\frac{2i}{2-2i}+\mathrm{Ln}\left(1+\frac{z-1-2i}{2i}\right)-\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z-1-2i}{2-2i}\right) = \\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3\pi i}{4}+2\pi k i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2i)^n}(z-1-2i)^n+ \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2-2i)^n}(z-1-2i)^n, \quad k=0,\pm 1,\pm 2,\dots\ .\end{aligned}$$

Так как функция $f(z)$ в окрестности точки $z=1+2i$ является одним из этих элементов, то

$$f(z)=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi i}{4}+2\pi k i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\frac{1}{(1-i)^n}-i^n\right)(z-1-2i)^n,$$

где k — целое число, которое нужно найти.

Подставляя в этот ряд $z=1+2i$, получаем

$$f(1+2i)=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi i}{4}+2\pi k i,$$

а по формуле (23) (см. п.1)

$$f(1+2i)=-\frac{1}{2}\ln+\frac{3\pi i}{4}.$$

Следовательно, $k=0$ и

$$f(z)=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi i}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\frac{1}{(1-i)^n}-i^n\right)(z-1-2i)^n.$$

Этот ряд во всем его круге сходимости $|z-1-2i|<2$ сходится к функции $f(z)$.

4) В кольце $3 < |z| < \infty$ функция $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-1}{3-z}$ распадается на регулярные ветви, для которых ряды Лорана по степеням z можно получить следующим способом:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,\frac{z-1}{3-z} &= \mathrm{Ln}\,\frac{(-1)\left(1-\frac{1}{z}\right)}{1-\frac{3}{z}} = \mathrm{Ln}(-1) + \mathrm{Ln}(1-\frac{1}{z}) - \\ &- \mathrm{Ln}\left(1-\frac{3}{z}\right) = -\pi i + 2\pi l i - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{nz^n}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .\end{aligned}$$

Так как функция $f(z)$ является одной из этих ветвей, то

$$f(z) = -\pi i + 2\pi l i + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{n}\,\frac{1}{z^n}, \tag{24}$$

где l — целое число, которое нужно найти.

Этот ряд сходится в области $3 < |z| < \infty$. Заметим, что из него получается, например, $f(4) = -\pi i + 2\pi l i + \alpha$, где α — действительное число, а по формуле (23) (см. п.1)) $f(4) = \ln 3 + \pi i$. Следовательно, $l = 1$ и

$$f(z) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{n}\,\frac{1}{z^n}, \quad 3 < |z| < \infty. \ \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-a}{b-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[a,b]$, где a, b — действительные числа, $a < b$ (рис. 25), такая, что $f(x+i0) = \ln\dfrac{x-a}{b-x}$ при $a < x < b$.

Тогда, как и в примере 11, доказывается, что значения функции $f(z)$ вычисляются по формуле

$$f(z) = \ln\left|\frac{z-a}{b-z}\right| + i(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2), \tag{25}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-a)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-b)$ (рис. 25).

Формулой (25) будем пользоваться в дальнейшем при вычислении интегралов.

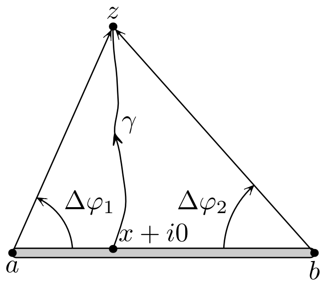

Рис. 25

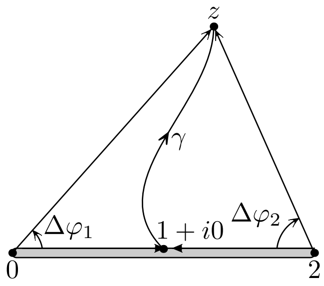

Рис. 26

П р и м е р 12. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{z^2(2-z)}$ в плоскости с разрезом по отрезку [0,2] (рис. 26) такая, что $f(1+i0) = 1$.

Решим следующие задачи:

1) найти формулу для вычисления значений функции $f(z)$;
2) найти формулу для производной функции $f(z)$;
3) разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < \infty$ по степеням z.

$\triangle$ 1) Из условия $f(1+i0) = 1$ и формулы (21) при $z_0 = 1+i0$, $\alpha = \frac{2}{3}$ получаем

$$f(1+i0) = e^{\frac{i}{3}(2\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)} + \pi)} = 1.$$

Следовательно, формула (22) для вычисления значения функции $f(z)$ такова

$$f(z) = \sqrt[3]{|z|^2|2-z|}\, e^{\frac{i}{3}(2\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)}, \tag{26}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-2)$ (рис. 26).

Например, по формуле (26) находим

$$f(3) = \sqrt[3]{9}e^{-\frac{\pi i}{3}}, \quad f(-1) = \sqrt[3]{3}e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad f(x+i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}$$

при $0 < x < 2$, $f(x - i0) = \sqrt[3]{x^2(2 - x)}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.

2) По формуле (8), §4 при $a = 0$, $b = 2$, $\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\beta = \dfrac{1}{3}$ получаем

$$f'(z) = \frac{3z - 4}{3z(z - 2)}f(z). \tag{27}$$

Например, по формуле (26) имеем $f(-1) = \sqrt[3]{3}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и по формуле (27) находим

$$f'(-1) = \frac{7\sqrt[3]{3}}{9}e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

Отметим, что формулу (27) можно получить следующим образом. В окрестности каждой точки $z (z \notin [0{,}2])$ функция $f(z)$ является суперпозицией двух функций: $f(z) = g(\zeta(z))$, где $\zeta = \zeta(z) = z^2(2 - z)$, $g(\zeta)$ — некоторый элемент функции $\sqrt[3]{\zeta}$ в точке $\zeta = \zeta(z)$. Так как $g'(\zeta) = \frac{1}{3\zeta}$, то

$$f'(z) = g'(\zeta)\zeta'(z) = \frac{1}{3\zeta(z)}g(\zeta(z))\zeta'(z) =$$
$$= \frac{1}{3z^2(2 - z)}f(z)[z^2(2 - z)]' = \frac{3z - 4}{3z(z - 2)}f(z).$$

3) В кольце $2 < |z| < \infty$ функция $\sqrt[3]{z^2(2 - z)}$ распадается на три регулярные ветви, для которых ряды Лорана по степеням z можно получить следующим способом:

$$\sqrt[3]{z^2(2 - z)} = (-z^3)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{3}} = ze^{\frac{\pi + 2\pi k}{3}i}\sum_{n=0}^{\infty} c^n_{\frac{1}{3}}(-2)^n\frac{1}{z^n},$$

где $k = 0{,}1{,}2$.

Так как функция $f(z)$ является одной из этих ветвей, то

$$f(z) = ze^{\frac{\pi + 2\pi k}{3}i}\left(1 - \frac{2}{3z} - \frac{4}{9z^2} - \dots\right), \tag{28}$$

где k — целое число, которое нужно найти.

Ряд (28) сходится в области $2 < |z| < \infty$. Заметим, что коэффициенты ряда

$$g(z) = 1 - \frac{2}{3z} - \frac{4}{9z^2} - \dots$$

действительны и $g(z) \to 1$ при $z \to \infty$. Поэтому $g(x) > 0$ при достаточно больших $x > 2$ (можно показать, что $g(x) > 0$ при $x > 2$).

При таких значениях $z = x$ по формуле (28) получаем

$$f(x) = xg(x)e^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i} = |f(x)|e^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i}.$$

А по формуле (26) находим

$$f(x) = |f(x)|e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

Следовательно, $e^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ (откуда, например, $k = -1$) и

$$f(z) = e^{-\frac{\pi i}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} c^n_{\frac{1}{3}} (-2)^n \frac{1}{z^{n-1}}, \quad 2 < |z| < \infty. \ \blacktriangle$$

<u>З а м е ч а н и е 2.</u> Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $(z-a)^{\alpha}\times(b-z)^{1-\alpha}$, где a,b,α — действительные числа, $a < b$, в плоскости с разрезом по отрезку $[a,b]$ (рис. 25) такая, что $f(x+i0) = (x-a)^{\alpha}(b-x)^{1-\alpha} > 0$ при $a < x < b$. Тогда как и в примере 12, доказывается, что значения функции $f(z)$ вычисляются по формуле

$$f(z) = |z-a|^{\alpha}|b-z|^{1-\alpha}e^{i\alpha\Delta\varphi_1 + i(1-\alpha)\Delta\varphi_2}, \tag{29}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-a)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-b)$ (рис. 25).

4. Римановы поверхности функций $\mathrm{Ln}\, z$ и $\sqrt{z}$

П р и м е р 13. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty,0]$ (рис. 17). В этой области функция $\mathrm{Ln}\, z$ распадается на регулярные ветви

$$f_k(z) = \ln|z| + (\varphi + 2\pi k)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \tag{30}$$

где $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi < \pi$ (см. пример 6).

Вместо того, чтобы рассматривать бесконечное число регулярных функций (30) в одной области D, возьмем бесконечное число идентичных экземпляров этой области. Обозначим эти области D_k, $k = 0$, ±1, ±2, … , и будем считать, что в области D_k задана регулярная функция$f_k(z)$. Пусть γ_k^+ — верхний, γ_k^- — нижний берега разреза плоскости D_k (рис. 27).

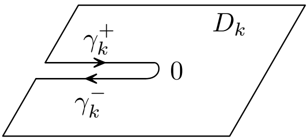

Рис. 27

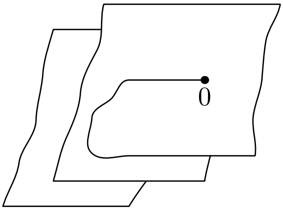

Рис. 28

Склеим области D_k ("листы") в одну поверхность так, чтобы на этой поверхности функция $\operatorname{Ln} z$ была однозначна и непрерывна. По формуле (30) получаем

$$f_k(x)|_{\gamma_k^+} = f_{k+1}(x)|_{\gamma_{k+1}^-} = \ln|x| + \pi(2k+1), \quad x < 0.$$

Поэтому склеим верхний берег разреза γ_k^+ с нижним берегом разреза γ_{k+1}^-, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

На построенной "винтовой" поверхности (рис. 28) функция $\operatorname{Ln} z$ однозначна и регулярна при $z \neq 0$ (по лемме об устранимой особенности). Эта поверхность называется *римановой поверхностью функции* $\operatorname{Ln} z$. ▲

П р и м е р 14. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty,0]$ (рис. 17). В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на регулярные ветви

$$f_1(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad \text{и} \quad f_2(z) = -\sqrt{|z|}e^{\frac{i\varphi}{2}}, \tag{31}$$

где $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi < \pi$ (см. пример 6).

Возьмем два экземпляра D_1 и D_2 области и будем считать, что функция $f_k(z)$ определена в области D_k, $k = 1{,}2$. Пусть γ_k^+ — верхний, γ_k^- — нижний берега разреза плоскости D_k.

По формуле (31) получаем, что при $x \leqslant 0$

$$f_1(x)|_{\gamma_1^+} = f_2(x)|_{\gamma_2^-} = i\sqrt{|x|}, \quad f_1(x)|_{\gamma_1^-} = f_2(x)|_{\gamma_2^+} = -i\sqrt{|x|}.$$

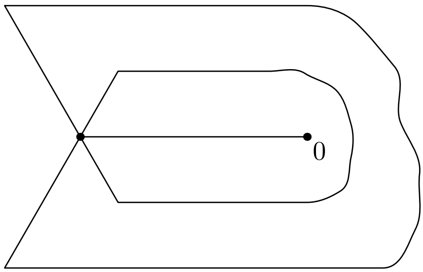

Рис. 29

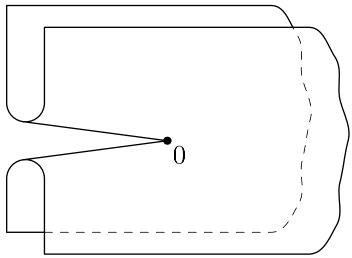

Рис. 30

Поэтому нужно склеить γ_1^+ с γ_2^- и γ_1^- с γ_2^+ (крест-накрест). Получится риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ с самопересечением (рис. 29). Но можно сначала повернуть плоскость D_2 вокруг действительной оси на $180°$, а затем склеить γ_1^+ с γ_2^- и γ_1^- с γ_2^+. Тогда получится *риманова поверхность функции* $\sqrt{z}$ без самопересечения (рис. 30). На этой поверхности функция $\sqrt{z}$ однозначна и регулярна при $z \neq 0$ (по лемме об устранимой особенности). ▲

§ 6. Особые точки аналитических функций

Общее определение особой точки аналитической функции является довольно сложным и не будет детально рассматриваться в этом курсе. Однако, для знакомства сформулируем определение, приведенное в [1].

Пусть аналитическая функция $F(z)$ порождена исходным элементом $f_0(z)$ в точке z_0 и кривая γ_1 с началом в точке z_0 и концом в точке z_1 такова, что элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой γ_1 в каждую точку $z \in \gamma_1$, $z \neq z_1$ и нельзя продолжить в точку z_1. Тогда пару (γ_1, z_1) называют особой "точкой" функции $F(z)$.

Вы знакомы с определением и классификацией изолированных особых точек однозначного характера. Рассмотрим другие случаи особых точек аналитических функций.

1. Точки ветвления

Определение 1. Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0 и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка z_0 называется *точкой ветвления* функции $F(z)$.

Пример 1.

1) Функция $\operatorname{Ln} z$ аналитична и неоднозначна в области $D : 0 < |z| < < \infty$. Область D является проколотой окрестностью точки $z = 0$ и одновременно проколотой окрестностью точки $z = \infty$. Следовательно, $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления функции $\operatorname{Ln} z$.
2) Аналогично, точки $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления функции z^b, если b — нецелое число. ▲

Приведем другое эквивалентное определение точки ветвления.

Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0, т.е. в кольце $K_0 : 0 < |z - z_0| < R$, если $z_0 \neq \infty$, или в кольце $K_0 : R < |z| < \infty$, если $z_0 = \infty$. И пусть $f_1(z)$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 \in K_0$. Совершим обход вокруг точки z_0, т.е. рассмотрим аналитическое продолжение элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $\gamma : |z - z_0| = |z_1 - z_0|$, если $z_0 \neq \infty$, $\gamma : |z| = |z_1|$, если $z_0 = \infty$.

При этом может оказаться, что после одного оборота вокруг точки z_0 в точке z_1 получится тот же элемент $f_1(z)$. Тогда по теореме о монодромии можно доказать, что функция $F(z)$ однозначна и, следовательно, регулярна в кольце K_0. Поэтому z_0 — изолированная особая точка однозначного характера функции $F(z)$, т.е. z_0 — либо устранимая особая точка, либо полюс, либо существенно особая точка функции $F(z)$.

Если же после первого оборота вокруг точки z_0 в точке z_1 получается новый элемент $f_2(z) \not\equiv f_1(z)$, т.е.

$$f_1(z) \to f_2(z) \not\equiv f_1(z),$$

то точка z_0 называется *точкой ветвления функции* $F(z)$.

Точка ветвления может быть или *логарифмической*, или *алгебраической* (пример 4, §2; пример 3, §3).

Логарифмические точки ветвления. Пусть в рассматриваемой ситуации при каждом следующем обороте вокруг точки z_0 в положительном и отрицательном направлениях в точке z_1 получаются новые элементы, отличные от всех предыдущих. Тогда точка z_0 называется *логарифмической точкой ветвления* функции $F(z)$.

В этом случае функция $F(z)$ в каждой точке $z_1 \in K_0$ имеет бесконечное множество различных элементов, однако значения этих элементов в точке z_1 могут быть одинаковыми. Подробнее: в этом случае функция $F(z)$ "почти" в каждой точке $z_1 \in K_0$ имеет бесконечное множество различных значений. Здесь и далее слово "почти" означает, что могут быть исключительные точки, в которых функция $F(z)$ имеет конечное число значений. Таких исключительных точек может быть конечное число или бесконечное множество, но предельная точка этих точек не может принадлежать кольцу K_0.

Пример 2.

1) Для функции $(z^2 - 1)\operatorname{Ln} z$, аналитичной в кольце $K_0 : 0 < z < \infty$, точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются логарифмическими точками ветвления. Эта функция в каждой точке $z \in K_0$, $z \neq \pm 1$ имеет бесконечное число различных значений, а в точках $z = \pm 1$ — только одно значение, равное нулю.
2) Функция $\sin z \operatorname{Ln} z$ в каждой точке z того же кольца K_0, где $z \neq \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеет бесконечное множество различных значений, а в точках $z_k = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — только одно значение, равное нулю. Предельная точка $z = \infty$ точек z_k не принадлежит кольцу K_0. ▲

Алгебраические точки ветвления. Пусть в

рассматриваемой ситуации после n оборотов ($n \geqslant 2$) вокруг точки z_0 в положительном направлении получается

$$f_1(z) \to f_2(z) \to \ldots \to f_n(z) \to f_{n+1}(z) \equiv f_1(z),$$

где все элементы $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ различны. Тогда точка z_0 называется *алгебраической точкой ветвления* функции $F(z)$ порядка n.

В этом случае функция $F(z)$ в каждой точке $z_1 \in K_0$ имеет ровно n различных элементов, однако значения некоторых из этих элементов в самой точке z_1 могут быть одинаковыми.

П р и м е р 3. Для функции $\sin \dfrac{1}{z} \sqrt[n]{z}$, где n — натуральное число, $n \geqslant 2$, аналитической в кольце $K_0 : 0 < |z| < \infty$, точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются алгебраическими точками ветвления порядка n. Эта функция в каждой точке $z \in K_0$, $z \neq \dfrac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm\, 2, \ldots$, принимает ровно n различных значений, а в точках $z_k = \dfrac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm\, 2, \ldots$, только одно значение, равное нулю.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Если $z_0 \neq \infty$ — алгебраическая точка ветвления порядка n аналитической в кольце $K_0 : 0 < |z - z_0| < R$ функции $F(z)$, то функцию $F(z)$ можно представить в виде ряда*

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^{\frac{k}{n}},$$

сходящегося к функции $F(z)$ во всем кольце K_0.

Если $z_0 = \infty$ — алгебраическая точка ветвления порядка n аналитической в кольце $K_0 : R < |z| < \infty$ функции $F(z)$, то эту функцию можно представить в виде ряда

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^{\frac{k}{n}},$$

сходящегося к функции $F(z)$ во всем кольце K_0.

Такие ряды по дробным степеням называют рядами Пюизе.

Доказательство этой теоремы см. в [2].

Покажем на примерах, как исследуются особые точки многозначных аналитических функций.

П р и м е р 4. Исследуем особые точки функции $F(z) = \dfrac{1}{2+\sqrt{z}}$. Эта функция аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0, z = \infty$ (это особые точки функции $\sqrt{z}$) и $z = 4$ (в этой точке одно из значений знаменателя $2+\sqrt{z}$ равно нулю).

$\triangle$ 1) Рассмотрим проколотую окрестность точки $z = 0$, не содержащую точку $z = 4$, например, кольцо $K_1 : 0 < |z| < 2$. Выберем в какой-нибудь точке этого кольца некоторый элемент функции $\sqrt{z}$. Пусть, например, $z_1 = 1, g_1(z)$ — элемент функции $\sqrt{z}$ в точке $z_1 = 1$ такой, что $g_1(z) = 1$. Тогда $f_1(z) = \dfrac{1}{2+g_1(z)}$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = 1$. Так как этот элемент можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в кольце K_1, то элемент $f_1(z)$ порождает аналитическую в кольце K_1 функцию $F_1(z)$ — аналитическую ветвь функции $F(z)$ в кольце K_1.

Рассмотрим аналитическое продолжение элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z| = 1$. После первого оборота вокруг точки z_0 получаем

$$f_1(z) \to \frac{1}{2-g_1(z)} \not\equiv f_1(z),$$

после второго оборота

$$\frac{1}{2-g_1(z)} \to \frac{1}{2+g_1(z)} \equiv f_1(z).$$

Следовательно, точка $z = 0$ является алгебраической точкой ветвления второго порядка функции $F_1(z)$.

Отметим, в кольце K_1 можно выделить только одну аналитическую ветвь функции $F(z)$ (с точностью до исходного элемента). Поэтому точку z_0 называют алгебраической точкой ветвления второго порядка функции $F(z)$.

2) Рассмотрим кольцо $K_2 : 4 < |z| < \infty$ — проколотую окрест-

ность точки $z = \infty$, не содержащую точек $z = 0$ и $z = 4$. Выберем в точке $z_2 = 16 \in K_2$ элемент $g_2(z)$ функции $\sqrt{z}$ такой, что $g_2(16) = 4$. Тогда элемент $f_2(z) = \dfrac{1}{2 + g_2(z)}$ функции $F(z)$ порождает аналитическую ветвь $F_2(z)$ (единственную с точностью до исходного элемента) функции $F(z)$ в кольце K_2.

При аналитическом продолжении элемента $f_2(z)$ вдоль окружности $|z| = 16$ после первого оборота (вокруг точки $z = \infty$) получаем

$$f_2(z) \to \frac{1}{2 - g_2(z)} \not\equiv f_2(z),$$

после второго оборота

$$\frac{1}{2 - g_2(z)} \to \frac{1}{2 + g_2(z)} \equiv f_2(z).$$

Следовательно, точка $z = \infty$ является алгебраической точкой ветвления второго порядка функции $F_2(z)$ (и функции $F(z)$).

3) Для исследования особой точки $z = 4$ воспользуемся тем, что в круге $K : |z - 4| < 2$ функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $g_3(z)$ и $g_4(z) = -g_3(z)$ такие, что $g_3(4) = 2, g_4(4) = -2$. Поэтому функция $F(z)$ в кольце $K_3 : 0 < |z - 4| < 2$ распадается на две регулярные ветви $f_3(z) = \dfrac{1}{2 + g_3(z)}$ и $f_4(z) = \dfrac{1}{2 + g_4(z)}$.

Функция $f_3(z)$ регулярна во всем круге K, в частности, в точке $z = 4$, так как $2 + g_3(z) \neq 0$ при $z \in K$.

Для функции $f_4(z)$ точка $z = 4$ является полюсом, так как знаменатель $2 + g_4(4) = 0$. Для нахождения порядка этого полюса найдем кратность нуля знаменателя $2 + g_4(z)$. Находим: $(2 + g_4(z))'|_{z=4} = = \dfrac{1}{2z} g_4(z)|_{z=4} = -\dfrac{1}{4} \neq 0$. Следовательно, $z = 4$ — полюс функции $f_4(z)$ — первого порядка.

Итак, в проколотой окрестности точки $z = 4$ функция $F(z)$ распадается на две регулярные ветви, для одной из которых $z = 4$ — регулярная точка, а для другой точка $z = 4$ — полюс первого порядка. ▲

<u>Замечание 1.</u> Типичная ошибка при исследовании особых точек функции $F(z)=\dfrac{1}{2+\sqrt{z}}$ такова: “Так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{z}}=\dfrac{1}{2}$, то $z=0$ — устранимая особая точка функции $F(z)$.” (?) Это утверждение неверно, так как устранимая особая точка — это изолированная особая точка однозначной регулярной функции, а функция $F(z)$ не является однозначной.

Пример 5. Исследуем особые точки функции $F(z)=\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$. Эта функция аналитична во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $0,\infty,1$.

$\triangle$ 1) Пусть $K_1: 0<|z|<1$, $g_1(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z_1=\dfrac{1}{2}$ такой, что $g_1\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$. Тогда $f_1(z)=\dfrac{1}{g_1(z)}$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1=\dfrac{1}{2}$.

При аналитическом продолжении элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z|=\dfrac{1}{2}$ после каждого оборота вокруг точки $z=0$ получается новый

элемент:
$$\frac{1}{g_1(z)}\to\frac{1}{g_1(z)+2\pi i}\to\frac{1}{g_1(z)+4\pi i}\to\ldots\ .$$
Следовательно, $z=0$ — логарифмическая точка ветвления функции $F(z)$.

2) Аналогично доказывается, что точка $z=\infty$ также является логарифмической точкой ветвления функции $F(z)$.

3) В круге $K:|z-1|<1$ функция $\operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви $g_k(z)=g_0(z)+2\pi ki$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, где $g_0(1)=0$. Поэтому функция $F(z)$ в кольце $K_2: 0<|z-1|<1$ распадается на регулярные ветви $f_k(z)=\dfrac{1}{g_k(z)}$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

Если целое число $k\neq 0$, то функция $f_k(z)$ регулярна во всем круге K, в частности, в точке $z=1$, так как $g_k(z)\neq 0$ при $z\in K$.

Для функции $f_0(z)$ точка $z=1$ является полюсом, так как $g_0(1)=$

$= 0$. А так как $g_0'(1) = \left.\dfrac{1}{z}\right|_{z=1} = 1 \neq 0$, то $z = 1$ — полюс функции $f_0(z)$ первого порядка.

Итак, в проколотой окрестности точки $z = 1$ функция $\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$ распадается на бесконечное множество регулярных ветвей, каждая из которых, кроме одной, регулярна в точке $z = 1$, а для одной из этих ветвей точка $z = 1$ — полюс первого порядка. ▲

Пример 6. Исследуем особые точки функции $F(z) = \operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{3-z}$ (см. пример 1, §4 и пример 11, §5). Эта функция аналитична во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками 1,3,∞.

△ 1) Пусть $K_1 : 0 < |z-1| < 2$,$f_1(z) = g_1(z) - h_1(z)$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = 2 \in K_1$, где $g_1(z)$,$h_1(z)$ — некоторые элементы соответственно функций $\operatorname{Ln}(z-1), \operatorname{Ln}(3-z)$ в точке $z_1 = 2$.

При аналитическом продолжении элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z-1| = 1$ после каждого оборота вокруг точки $z = 1$ получается новый элемент:

$$f_1(z) \to f_1(z) + 2\pi i \to f_1(z) + 4\pi i \to \dots\ ,$$

так как

$$g_1(z) \to g_1(z) + 2\pi i \to g(z) + 4\pi i \to \dots\ ,$$
$$h_1(z) \to h_1(z) \to h_1(z) \to \dots\ .$$

Следовательно, $z = 1$ — логарифмическая точка ветвления функции $F(z)$.

2) Аналогично доказывается, что точка $z = 3$ также является логарифмической функцией $F(z)$.

3) В кольце $3 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви $f_k(z)$,$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ такие, что $\lim\limits_{z\to\infty} f_k(z) = \pi(1+2k)i$ (см. пример 11, §5), поэтому для каждой из этих ветвей точка $z = \infty$ является устранимой, т.е. регулярной. ▲

Пример 7. Исследуем особые точки функции $F(z) = \sqrt[3]{z^2(2-z)}$ (см. пример 2, §4 и пример 12, §5). Эта функция аналитична во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками 0,2,∞.

$\triangle$ 1) Пусть $K_1 : 0 < |z| < 2$,$f_1(z) = g_1(z)h_1(z)$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = 1 \in K_1$, где $g_1(z)$,$h_1(z)$ — некоторые элементы функций соответственно $\sqrt[3]{z^2}$, $\sqrt[3]{2-z}$ в точке $z_1 = 1$.

При аналитическом продолжении элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z| = 1$ после трех оборотов вокруг точки $z = 0$ получаем:

$$f_1(z) = g_1(z)h_1(z) \to \left[e^{\frac{4\pi i}{3}} g_1(z)\right] h_1(z) \to \left[e^{\frac{8\pi i}{3}} g_1(z)\right] h_1(z) \to$$
$$\to \left[e^{\frac{12\pi i}{3}} g_1(z)\right] h_1(z) \equiv f_1(z).$$

Следовательно, $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления третьего порядка функции $F(z)$.

2) Аналогично доказывается, что $z = 2$ также алгебраическая точка ветвления третьего порядка функции $F(z)$.

3) В кольце $2 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на три регулярные ветви $f_k(z) = zh_k(z)$, где функции $h_k(z)$ регулярны в точке $z = \infty$ и $h_k(\infty) = e^{\frac{\pi}{3}(1+2k)i}$, $k = 0,1,2$ (см. пример 12, §5). Следовательно, для каждой из этих ветвей точка $z = \infty$ является полюсом первого порядка. $\blacktriangle$

Рассмотрим чуть более сложный пример.

П р и м е р 8. Исследуем особые точки аналитической функции

$$F(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z-2}. \qquad (1)$$

$\triangle$ Исходный элемент этой функции выберем, например, в точке $z_0 = 1$. В этой точке функция $\sqrt{z}$ имеет два элемента $g_0(z)$, $g_1(z)$ такие, что $g_0(1) = 1$, $g_1(1) = -1$, поэтому $g_1(z) = -g_0(z)$. Функция $\sqrt{z-2}$ в точке $z_0 = 1$ также имеет два элемента $h_0(z)$, $h_1(z)$ такие, что $h_0(1) = i$, $h_1(1) = -i$, поэтому $h_1(z) = -h_0(z)$.

Пусть $f_0(z) = g_0(z) + h_0(z)$ — исходный элемент функции $F(z)$. Допустимыми кривыми для элемента $f_0(z)$ являются все кривые с началом в точке $z_0 = 1$, не проходящие через точки $z = 0$ и $z = 2$, так как такие и только такие кривые являются допустимыми для обоих элементов $g_0(z)$ и $h_0(z)$.

В результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ из точки z_0 в точку z вдоль допустимой для него кривой γ в точке z получается элемент

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\Delta\varphi_1}{2}} + \sqrt{|z-2|}e^{\frac{i\Delta\varphi_2}{2}}, \tag{2}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$,$\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-2)$ (см. свойство 5, §3, рис. 10, 11).

1) Пусть D_1 — кольцо $0 < |z| < 2$ (рис. 31). Так как элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой γ с началом в точке z_0, лежащей в области D_1, то элемент $f_0(z)$ порождает аналитическую в области D_1 функцию, обозначим ее $F_1(z)$.

По условию $f_0(1) = 1 + i$. Найдем результат аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ вдоль окружности $\gamma : |z| = 1$ с началом и концом в точке $z_0 = 1$, ориентированной против часовой стрелки, т.е. совершим обход вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении.

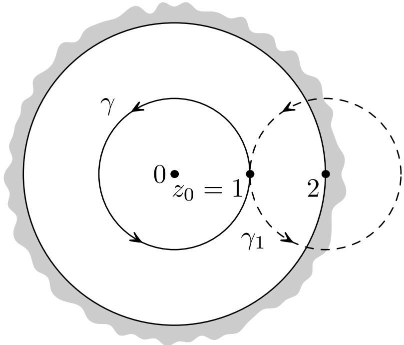

Рис. 31.

После одного оборота в точке $z_0 = 1$ получим элемент $f_1(z)$, значение которого в точке $z_0 = 1$ по формуле (2) равно $f_1(1) = -1 + i$, так как $\Delta\varphi_1 = 2\pi$,$\Delta\varphi_2 = 0$. Поэтому $f_1(z) = -g_0(z) + h_0(z)$. Таким образом, после первого оборота вокруг точки $z = 0$ получаем

$$f_0(z) = g_0(z) + h_0(z) \to f_1(z) = -g_0(z) + h_0(z) \not\equiv f_0(z).$$

Аналогично, после второго оборота получаем

$$f_1(z) = -g_0(z) + h_0(z) \to g_0(z) + h_0(z) \equiv f_0(z).$$

Следовательно, $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка функции $F_1(z)$.

Заметим, что функция $F(z)$ в каждой точке $z \neq 0$, $z \neq 2$ имеет четыре различных элемента, в частности, в точке $z_0 = 1$ четыре элемента $\pm g_0(z) \pm h_0(z)$. Так элемент $g_0(z) - h_0(z)$ получается в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z) = g_0(z) + h_0(z)$ вдоль окружности $\gamma_1 : |z-2| = 1$ (рис. 31), а элемент $-g_0(z)-h_0(z)$ — в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ по кривой $\gamma\gamma_1$.

Пусть $F_2(z)$ — аналитическая в кольце D_1 функция с исходным элементом $f_2(z) = g_0(z) - h_0(z)$, заданным в точке $z_0 = 1$ значением $f_2(1) = 1 - i$. Так же, как и для функции $F_1(z)$ доказывается, что $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка функции $F_2(z)$.

Итак, в кольце D_1 аналитическая функция $F(z)$ распадается на две различные аналитические ветви $F_1(z)$ и $F_2(z)$, для каждой из которых $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка.

2) Аналогично доказывается, что:

в кольце $0 < |z-2| < 2$ функция $F(z)$ распадается на две аналитические ветви, для каждой из которых $z = 2$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка;

в кольце $2 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на две аналитические ветви, для каждой из которых $z = \infty$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка. ▲

2. Граничные особые точки регулярных функций

Определение 2. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, границей которой является простая кривая Γ. Точка $z_0 \in \Gamma$ называется *регулярной граничной точкой* функции $f(z)$, если функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в точку z_0 по кривой γ с концом в точке z_0, лежащей в области D, за исключением точки z_0. В противном случае точка z_0 называется *граничной особой точкой* функции $f(z)$.

Отметим, что если z_0 — регулярная граничная точка функции $f(z)$, то функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в точку z_0 по любой кривой с концом в точке z_0, лежащей в области D, за исключением точки z_0. При этом в точке z_0 получается один и тот же элемент $f_0(z)$ для всех таких кривых. Поэтому существует такая окрестность точки z_0, т.е. круг $K_0 : |z - z_0| < R_0$, что $f_0(z)$ при $z \in D \cap K_0$.

Теорема 2. *На границе круга сходимости степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3}$$

есть хотя бы одна особая точка его суммы.

○ Пусть $K_0 : |z - z_0| < R_0$ — круг сходимости ряда (3), $0 < R_0 < \infty$, и на окружности $\Gamma_0 : |z - z_0| = R_0$ нет особых точек функции $f(z)$. Тогда эту функцию можно аналитически продолжить в каждую точку $\zeta \in \Gamma_0$ и в точке ζ получится элемент $f_\zeta(z)$, $z \in K_\zeta : |z - \zeta| < R_\zeta$, такой, что $f_\zeta(z) = f(z)$ при $z \in K_0 \cap K_\zeta$. Таким образом, окружность Γ_0 покрыта бесконечным числом кругов K_ζ.

По лемме Гейля-Бореля из этого бесконечного покрытия можно выбрать конечное покрытие, т.е. из всех кругов K_ζ можно выбрать конечное число кругов $K_j : |z - z_j| < R_0$, $j = 1,2,\ldots ,n$ таких, что каждая точка $z \in \Gamma_0$ принадлежит хотя бы одному из этих кругов.

Точку пересечения соседних окружностей $|z - z_j| = R_j$ и $|z - z_{j+1}| = R_{j+1}$, лежащую вне круга K_0, обозначим $\widetilde{z}_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ $(K_{n+1} = K_1)$. Пусть $\widetilde{R_0} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\widetilde{z}_j - z_0|$. Тогда функция $f(z)$ и элементы $f_j(z)$, $z \in k_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ определяют в круге $\widetilde{K_0} : |z - z_0| < \widetilde{R_0}$ регулярную функцию $F(z)$ — аналитическое продолжение функции $f(z)$ из круга K_0 в круг $\widetilde{K_0}$. Поэтому ряд (3) сходится в круге $\widetilde{K_0}$

к функции $F(z)$, т.е. радиус сходимости ряда (3) больше R_0, что противоречит условию. ●

П р и м е р 9. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ равен 1. На окружности $|z| = 1$ есть две особые точки его суммы $\dfrac{1}{1+z^2}$, а именно, точки $\pm i$. ▲

Следствие 1. *Радиус сходимости ряда* (3) *равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей к ней особой точки функции $f(z)$.*

П р и м е р 10. Не вычисляя коэффициенты ряда

$$\frac{1}{(z+2)(z-3i)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n,$$

можно сразу сказать, что его радиус сходимости равен двум, так как ближайшей к точке $z = 0$ особой точкой его суммы является точка $z = -2$. ▲

З а м е ч а н и е 2. Сходимость ряда (3) в точках границы его круга сходимости не связана с регулярностью суммы ряда в этих точках. Приведем примеры.

П р и м е р 11. Ряд $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ расходится в каждой точке окружности $|z| = 1$. Для суммы ряда точка $z = 1$ — особая, а остальные точки этой окружности — регулярные. ▲

П р и м е р 12. Ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ сходится в точке $z = 1$ и его сумма регулярна в этой точке, так как $f(z)$ — это элемент функции $\mathrm{Ln}(1+z)$. ▲

П р и м е р 13. Ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n+1}}{n(n+1)}$ сходится в каждой точке окружности $|z| = 1$, но точка $z = 1$ является особой для его суммы, так как $f(z)$ — это элемент функции $z+(1-z)\,\mathrm{Ln}(1-z)$, для которой $z=1$ — точка ветвления. ▲

Л и т е р а т у р а

1. М.А. Евграфов. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965, 1968.
2. Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1982, 1989.

Содержание