СМБ

Ю. А. БРЫЧКОВ
А. П. ПРУДНИКОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Главная редакция
физико-математической
литературы

СПРАВОЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Ю. А. БРЫЧКОВ, А. П. ПРУДНИКОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

518
Б 89
УДК 519.95

Интегральные преобразования обобщенных функций. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977.

В настоящем выпуске серии «СМБ» рассматриваются интегральные преобразования в пространствах обобщенных функций. Книга состоит из двух частей. В первой части дается обзор различных методов введения и свойств интегральных преобразований обобщенных функций, а также соответствующих пространств основных и обобщенных функций. Рассмотрены преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля, Ганкеля—Шварца, *K*, *I*, Харди, Конторовича—Лебедева, Стилтьеса, Гильберта, Вейерштрасса, Вейерштрасса—Ганкеля, Варма, Пуассона—Лагерра, свертки и дробное интегрирование. Для некоторых преобразований ряд результатов формулируется также и в многомерном случае. Вторая часть книги содержит таблицы преобразований Фурье и Лапласа обобщенных функций медленного роста.

Книга предназначается математикам, физикам и специалистам в области прикладной математики.

$Б \frac{20204-128}{053(02)\text{-}77}$ 71-77

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Глава 1. Введение 9

§ 1. Некоторые понятия функционального анализа 9
§ 2. Основные способы введения интегральных преобразований обобщенных функций 15

Глава 2. Преобразование Фурье 16

§ 1. Введение 16
§ 2. Преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(R^n)$ 17
§ 3. Преобразование Фурье в $\mathcal{D}'(R^n)$ и $\mathcal{Z}'(R^n)$ 19
§ 4. Другие определения 21
§ 5. Асимптотические формулы 22

Глава 3. Преобразования Лапласа и Меллина 29

§ 1. Введение 29
§ 2. Правостороннее преобразование Лапласа 30
§ 3. Левостороннее преобразование Лапласа 33
§ 4. Двустороннее преобразование Лапласа 34
§ 5. Многомерное преобразование Лапласа 41
§ 6. Преобразование Меллина 44

Глава 4. Преобразование Бесселя 50

§ 1. Введение 50
§ 2. Преобразование Ганкеля 50
§ 3. Многомерное преобразование Ганкеля 56
§ 4. Преобразование Ганкеля—Шварца 57
§ 5. K-преобразование 59
§ 6. I-преобразование 63
§ 7. Преобразование Харди 64
§ 8. Преобразование Конторовича—Лебедева 67

Глава 5. Преобразования Стилтьеса и Гильберта 68

§ 1. Преобразование Стилтьеса 68
§ 2. Обобщенное преобразование Стилтьеса 71
§ 3. S_2-преобразование 74
§ 4. Преобразование Гильберта 75

Глава 6. Преобразование Вейерштрасса 80

§ 1. Преобразование Вейерштрасса 80
§ 2. Многомерное преобразование Вейерштрасса 84
§ 3. Преобразование Вейерштрасса — Ганкеля 85

Глава 7. Другие интегральные преобразования 88

§ 1. Преобразование Варма 88
§ 2. Преобразование Пуассона — Лагерра 90
§ 3. Дробные интегралы 92
§ 4. Преобразование свертки 98

ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ

Перечень обозначений специальных функций и некоторых постоянных 99

Глава 8. Преобразование Фурье 102

§ 1. Алгебраические и связанные с ними функции 102
§ 2. Ступенчатые и связанные с ними функции, сосредоточенные на $(0, \infty)$ 132
§ 3. Ступенчатые и связанные с ними функции, сосредоточенные на $(-\infty, \infty)$ 152
§ 4. Показательные функции 181
§ 5. Логарифмические функции 185
§ 6. Тригонометрические функции 200
§ 7. Ряды с дельта-функциями 235
§ 8. Функции вида $f(x+i0)$ 238
§ 9. Некоторые функции в R^n 244

Глава 9. Правостороннее преобразование Лапласа на $[0, \infty)$ 251

§ 1. Дельта-функция, алгебраические и связанные с ними функции 251
§ 2. Логарифмические и связанные с ними функции 257
§ 3. Тригонометрические функции 260
§ 4. Некоторые специальные функции 263

Литература 270
Именной указатель 283
Предметный указатель 285
Обозначения 287

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегральные преобразования обобщенных функций, в особенности преобразования Фурье и Лапласа, применяются в самых различных задачах математической физики и прикладной математики. В настоящей книге излагаются основы теории интегральных преобразований обобщенных функций и приводятся таблицы преобразований Фурье и Лапласа.

В первой части дается краткий обзор различных методов введения и свойств интегральных преобразований обобщенных функций, а также соответствующих пространств основных и обобщенных функций. Кроме того, в первой главе приведен небольшой вспомогательный материал по функциональному анализу. Наиболее исследованными в настоящее время являются преобразования Фурье, Лапласа, Меллина и Ганкеля; им и в этой книге уделяется наибольшее внимание. Рассмотрены также преобразования Гильберта, Стилтьеса, K, I, Вейерштрасса, Харди, Вейерштрасса—Ганкеля, Варма, Пуассона—Лагерра, дробное интегрирование. В книге сформулированы свойства гладкости и аналитичности, единственности преобразований, приведены различные формулы обращения, формулы преобразования операций и, для некоторых преобразований, асимптотические формулы.

Для некоторых преобразований ряд результатов формулируется также и в многомерном случае. Теория многомерных интегральных преобразований обобщенных функций подробно изложена в монографии Владимирова [13]. Преобразования, связанные с ортогональными разложениями, изучаются в книге Земаняна [15].

Вторая часть содержит таблицы преобразований Фурье и Лапласа обобщенных функций из пространства $\mathscr{S}'$ (обобщенные функции медленного роста). Часть формул, вошедших в таблицы преобразований Фурье, публикуется впервые; некоторые формулы в переработанном виде взяты из книги Лавуана [3]. Таблицы преобразований Лапласа содержат наиболее часто встречающиеся обобщенные функции; соответствующие формулы наряду со многими другими содержатся в книге Лавуана [1].

Обобщенные функции, для которых приведены преобразования Фурье и Лапласа, имеют конечное или счетное число особенностей вида $t_{\pm}^{\lambda}\ln^m t_{\pm}$, $|t|^{\lambda}\ln^m|t|$, $|t|^{\lambda}\ln^m|t|\operatorname{sgn} t$, где λ — любое комплексное число, а m — натуральное число или нуль, а также особенности типа δ-функции. Следует подчеркнуть, что обобщенные функции $t_{\pm}^{-n}\ln^m t_{\pm}$, $|t|^{-n}\ln^m|t|$, $|t|^{-n}\ln^m|t|\operatorname{sgn} t$ не являются значениями указанных выше обобщенных функций при $\lambda=-1, -2, \ldots$. Относительно определений используемых обобщенных функций см., например, книги Владимирова [14], Гельфанда и Шилова [2], Земаняна [1], Лавуана [1], Л. Шварца [1] (а также справочник «Функциональный анализ», «Наука», М., 1972).

В справочнике содержатся также преобразования Фурье некоторых обобщенных функций, представимых в виде пределов функций, аналитических в верхней полуплоскости:

$$f(x+i0)=\lim_{y\to+0} f(x+iy).$$

Для некоторых преобразований даются два выражения: в виде $f(x+i0)$ и через функции указанного выше типа. Кроме того, приведены преобразования для рядов с δ-функциями.

Таблицам формул предшествует перечень обозначений специальных функций и некоторых постоянных.

Библиография, помещенная в конце книги, содержит достаточно обширный список монографий и журнальных статей, посвященных интегральным преобразованиям обобщенных функций.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Некоторые понятия функционального анализа

1. Пусть $\mathcal{V}$ — линейное пространство с топологией, порожденной счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Окрестность (шар) Ω элемента $\psi \in \mathcal{V}$ в этой топологии определяется следующим образом: если $\{\gamma_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ — любое непустое подмножество $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — произвольные положительные числа, то $\Omega = \{\varphi : \gamma_{k_i}(\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$. В том случае, когда все полунормы обращаются в нуль одновременно лишь на нулевом элементе пространства $\mathcal{V}$, семейство $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется счетной мультинормой, а $\mathcal{V}$ — счетно-мультинормированным пространством.

Пусть $\{\mathcal{V}_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность счетно-мультинормированных пространств с топологиями τ_m, причем $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3 \subset \ldots$ и при любом m топология τ_m сильнее топологии, порожденной в $\mathcal{V}_m$ топологией τ_{m+1} (это, в частности, означает, что из сходимости последовательности в $\mathcal{V}_m$ вытекает ее сходимость в $\mathcal{V}_{m+1}$). Пусть $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{V}_m$; сходимость в $\mathcal{V}$ определяется как сходимость в одном из пространств $\mathcal{V}_m$. Пространство $\mathcal{V}$ называется счетным объединением пространств. Если при любом m топология τ_m совпадает с топологией, порожденной в $\mathcal{V}_m$ топологией τ_{m+1}, то $\mathcal{V}$ называется строгим счетным объединением пространств.

2. Множество всех непрерывных линейных функционалов на счетно-мультинормированном пространстве $\mathcal{V}$ называется пространством, *сопряженным* (дуальным) $\mathcal{V}$, и обозначается через $\mathcal{V}'$.

Если $\mathcal{V}^\circ=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\mathcal{V}^\circ_m$ — счетное объединение счетно-мультинормированных пространств, то функционал называется непрерывным на $\mathcal{V}^\circ$, если он непрерывен на каждом $\mathcal{V}^\circ_m$, $m=1, 2, \ldots$ Множество всех непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{V}^\circ$ называется пространством, сопряженным $\mathcal{V}^\circ$, и обозначается через $\mathcal{V}^{\circ\prime}$. Для функционалов мы будем использовать обозначение $\langle f, \varphi\rangle$, где $f\in\mathcal{V}^{\circ\prime}$, $\varphi\in\mathcal{V}^\circ$.

3. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}^\circ$ — счетно-мультинормированные пространства или счетные объединения счетно-мультинормированных пространств. Если A — линейный непрерывный оператор, отображающий $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}^\circ$, то *сопряженный оператор* A' на сопряженном пространстве $\mathcal{V}^{\circ\prime}$ определяется формулой

$$\langle A'f, \varphi\rangle=\langle f, A\varphi\rangle, \tag{1}$$

где $f\in\mathcal{V}^{\circ\prime}$ и $\varphi\in\mathcal{U}$. Это равенство определяет $A'f$ как функционал на $\mathcal{U}$; оператор A' линеен и непрерывен.

Если при указанных $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}^\circ$ оператор A задает *изоморфизм* (т. е. линейное взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}^\circ$, то сопряженный оператор A' определяет изоморфизм $\mathcal{V}^{\circ\prime}$ на $\mathcal{U}'$.

Более подробное изложение функционального анализа, приспособленное для изучения различных интегральных преобразований обобщенных функций, читатель может найти в книге Земаняна [15].

4. Пусть I — открытое множество в n-мерном вещественном (комплексном) евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ ($\boldsymbol{C}^n$). Любое линейное пространство $\mathcal{V}^\circ(I)$, состоящее из определенных на I комплекснозначных функций и снабженное топологией, на котором рассматриваются функционалы, мы будем называть *пространством основных функций* или *основным пространством* на I.

Обобщенной функцией (на I) называется любой непрерывный линейный функционал на любом основном пространстве $\mathcal{V}^\circ(I)$; другими словами, f — обобщенная функция (на I), если $f\in\mathcal{V}^{\circ\prime}(I)$.

5. Некоторые обозначения. Если $A=B$ по определению, то будем писать $A\overset{\Delta}{=}B$. Для любой точки $t=(t_1, t_2, \ldots, t_n)\in\boldsymbol{R}^n$ число $|t|$ определяется

формулой

$$|t| \overset{\Delta}{=} \sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2}.$$

Если $t, \tau \in R^n$, то запись $t<\tau$ $(t \leqslant \tau)$ означает, что $t_i<\tau_i$ $(t_i \leqslant \tau_i)$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$. Если $z \in C^n$, $t \in R^n$, то $zt \overset{\Delta}{=} z_1t_1+z_2t_2+\ldots+z_nt_n$. Совокупность $k=(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ называется целым числом в R^n, если все k_i — целые числа $(i=1, 2, \ldots, n)$. Если k — неотрицательное целое число из R^n, то $|k|=k_1+k_2+\ldots+k_n$ и

$$D_t^k=\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\ldots\partial t_n^{k_n}};$$

в некоторых случаях будет употребляться обозначение D^k, если очевидно, по какому аргументу проводится дифференцирование. Если t, $m \in R^n$, то $t^m \overset{\Delta}{=} t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_n^{m_n}$.

Обычной называется любая функция, определенная в R^n или C^n с областью значений в R^1 или C^1. Пусть обычная функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором открытом множестве $\Omega \subset R^n$. *Носителем* $(\operatorname{supp} f)$ функции f называется замыкание в Ω множества точек, в которых $f(t) \neq 0$. Говорят, что обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(I)$ обращается в нуль в открытом множестве Ω, если $\langle f, \varphi\rangle=0$ для всех основных функций $\varphi \in \mathscr{D}(I)$, носители которых содержатся в Ω. Пусть Ω_f — наибольшее открытое множество, в котором $f=0$. Множество $I \setminus \Omega_f$ называется носителем обобщенной функции f и обозначается $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f \subset \Delta \subset I$, то говорят, что обобщенная функция сосредоточена на Δ. Если множество Δ ограничено, то обобщенная функция называется *финитной* (или обобщенной функцией с компактным носителем).

Пусть $I=R^1$. Говорят, что носитель обычной или обобщенной функции $f(t)$ *ограничен слева (справа)*, если существует такое число T_f, $-\infty<T_f<\infty$, что $f(t)=0$ при $t<T_f$ (соответственно при $t>T_f$).

Пусть $g(t)$ — обычная функция на I, такая, что для всех $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ интеграл

$$\int_I g(t)\varphi(t)\,dt$$

существует в смысле Лебега и определяет непрерывный функционал на $\mathcal{V}^0(I)$. Обобщенная функция g, определенная равенством

$$\langle g, \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \int_I g(t)\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi(t)\in\mathcal{V}^0(I), \tag{2}$$

называется *регулярной* обобщенной функцией в $\mathcal{V}^{0\prime}(I)$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}^0$ — два линейных пространства с топологиями τ_1 и τ_2 соответственно, причем $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}^0$. Если из сходимости любой последовательности $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty\subset\mathcal{U}$ в топологии τ_1 вытекает ее сходимость в топологии τ_2, то говорят, что справедливо *вложение* $\mathcal{U}\to\mathcal{V}^0$.

6. Пространства $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'_K$, $\mathcal{D}'$. Пусть K — компактное (т. е. ограниченное и замкнутое) множество в R^n. *Пространство основных функций* $\mathcal{D}_K=\mathcal{D}_K(R^n)$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, обращающихся в нуль вне K. Топология в $\mathcal{D}_K$ вводится с помощью счетного семейства полунорм $\{\gamma_k\}_{|k|=0}^\infty$, где

$$\gamma_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{t\in R^n}|D^k\varphi(t)|, \qquad \varphi(t)\in\mathcal{D}_K, \tag{3}$$

k — любое неотрицательное целое число из R^n.

Пусть $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность таких компактных множеств в R^n, что

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\ldots \quad\text{и}\quad R^n=\bigcup_{m=1}^\infty K_m.$$

Пространство основных функций $\mathcal{D}=\mathcal{D}(R^n)$ определяется как строгое счетное объединение пространств $\mathcal{D}_{K_m}$, т. е. $\mathcal{D}=\bigcup\limits_{m=1}^\infty \mathcal{D}_{K_m}$. Оно состоит из всех финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Пространства, сопряженные $\mathcal{D}_K$ и $\mathcal{D}$, обозначаются через $\mathcal{D}'_K$ и $\mathcal{D}'$ соответственно. Обобщенные функции из этих пространств часто называют *распределениями*.

Структура обобщенных функций из $\mathcal{D}'_K$. Каждая обобщенная функция $f\in\mathcal{D}'_K$ представляется в виде

$$f(t)=D^mF(t), \tag{4}$$

где $F(t)$ — непрерывная функция на K, m — неотрицательное целое число из R^n.

Структура обобщенных функций из $\mathscr{D}'$. Каждая обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$ представляется в виде бесконечной суммы

$$f(t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} D^{p_m} F_m(t), \tag{5}$$

где m и p_m — неотрицательные целые числа из R^n, $F_m(t)$ — непрерывные функции с компактными носителями, удаляющимися от начала координат при $|m| \to \infty$ и содержащимися в произвольной окрестности носителя f.

Структура финитных обобщенных функций из $\mathscr{D}'$. Каждая финитная обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$ представляется в виде

$$f(t) = \sum_{|m|=0}^{N<\infty} D^m F_m(t), \tag{6}$$

где $F_m(t)$ — непрерывные функции, сосредоточенные в произвольной окрестности носителя f, m — неотрицательные целые числа из R^n.

Любая обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$, сосредоточенная в точке t_0, имеет вид

$$f(t) = \sum_{|m|=0}^{N<\infty} a_m D^m \delta(t - t_0), \tag{7}$$

где m — неотрицательные целые числа из R^n, а a_m — постоянные.

7. Пусть $\mathscr{D}_+$ — подпространство $\mathscr{D}(R^1)$, состоящее из функций, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Обозначим через $\mathscr{D}'_+$ сопряженное ему пространство. Оно состоит из обобщенных функций $f \in \mathscr{D}'(R^1)$, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Подпространство $\mathscr{D}'(R^1)$, состоящее из обобщенных функций, носители которых ограничены слева (справа), будет обозначаться ниже через $\mathscr{D}'_R$ ($\mathscr{D}'_L$); см. п. 5.

8. Пространства $\mathscr{S}(R^n)$ и $\mathscr{S}'(R^n)$. Пространство основных функций $\mathscr{S} = \mathscr{S}(R^n)$ состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, определенных в R^n и удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_{m,k}(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{t \in R^n} \{(1 + |t|^{2m}) |D^k \varphi(t)|\} < \infty \tag{8}$$

при любом выборе неотрицательных целых чисел $m \in R^1$

и $k \in R^n$. Топология в $\mathscr{S}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_{m,k}\}_{m,|k|=0}^{\infty}$.

Из формулы (8) следует, что функция $\varphi(t) \in \mathscr{S}$ убывает быстрее любой степени $|t|^{-1}$ при $|t| \to \infty$; поэтому пространство $\mathscr{S}$ часто называют пространством *быстро убывающих* бесконечно дифференцируемых функций. Пространство, сопряженное $\mathscr{S}$, обозначается через $\mathscr{S}'$.

Структура обобщенных функций из $\mathscr{S}'$. Любая обобщенная функция $f \in \mathscr{S}'$ представляется в виде

$$f(t) = D^k F(t), \tag{9}$$

где k — неотрицательное целое число из R^n и $F(t)$ — непрерывная функция медленного (не выше степенного) роста. Пространство $\mathscr{S}'$ часто называют пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Обозначим через $\mathscr{S}_+$ пространство основных функций, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, $t \in [0, \infty)$, быстро убывающих при $t \to +\infty$. Сопряженное ему пространство $\mathscr{S}'_+$ состоит из обобщенных функций $f(t) \in \mathscr{S}'(R^1)$, которые обращаются в нуль при $t < 0$; таким образом, $\mathscr{S}'_+ = \mathscr{S}'(R^1) \cap \mathscr{D}'_+$.

9. Пространства $\mathscr{E}(R^n)$ и $\mathscr{E}'(R^n)$. Пространство основных функций $\mathscr{E} = \mathscr{E}(R^n)$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на R^n. Сопряженное ему пространство $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(R^n)$ состоит из всех финитных обобщенных функций.

Обозначим через $\mathscr{E}_+$ пространство основных функций, бесконечно дифференцируемых на $[0, \infty)$. Сопряженное ему пространство обозначается через $\mathscr{E}'_+$; при этом $\mathscr{E}'_+ = \mathscr{E}'(R^1) \cap \mathscr{D}'_+$.

10. Пространства $\mathscr{Z}(R^n)$ и $\mathscr{Z}'(R^n)$. Пространство основных функций $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}(R^n)$ состоит из всех целых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\zeta_{k,m}(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{t \in C^n} \left(|\operatorname{Re} t|^m |D^k \varphi(t)| e^{-\sum_i a_i |\operatorname{Im} t_i|}\right) < \infty \tag{10}$$

при любых неотрицательных целых числах $m, k \in R^n$; постоянные a_i зависят от $\varphi(t)$. Топология в $\mathscr{Z}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\zeta_{k,m}\}_{|k|,|m|=0}^{\infty}$. Сопряженное пространство $\mathscr{Z}' = \mathscr{Z}'(R^n)$ иногда называют пространством *ультрараспределений*.

§ 2. Основные способы введения интегральных преобразований обобщенных функций

Интегральные преобразования обобщенных функций могут быть определены следующими способами.

1. Строится пространство основных функций $\mathcal{U}$, среди элементов которого содержится ядро $N(x, t)$ рассматриваемого преобразования A. Интегральное преобразование Af любой обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{U}'$ определяется как значение функционала f на основной функции $N(x, t)$:

$$A[f(t)](x) = \langle f, N(x, t) \rangle. \qquad (11)$$

2. Строится пространство основных функций $\mathcal{V}^0$, в котором определено обычное (классическое) интегральное преобразование A, отображающее $\mathcal{V}^0$ на некоторое пространство основных функций $\mathcal{W}$. На основе равенства

$$\langle A'f, \varphi \rangle = \langle f, A\varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{V}^0, \ f \in \mathcal{W}', \qquad (12)$$

вводится оператор A', сопряженный оператору A и отображающий пространство $\mathcal{W}'$ на $\mathcal{V}^{0\prime}$. Тем самым равенство (12) определяет интегральное преобразование $A'f$ любой обобщенной функции $f \in \mathcal{W}'$.

3. Рассматриваемое преобразование выражается через другое интегральное преобразование, которое определено для пространств обобщенных функций.

ГЛАВА 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

Преобразование Фурье обычных функций $f(t)$, $t \in R^n$, обладающих некоторыми дополнительными свойствами (например, $f(t) \in L_1(R^n)$), определяется формулой

$$F(x) = \int_{R^n} f(t)\, e^{ixt} dt. \tag{13}$$

Различным способам введения преобразования Фурье в разных пространствах обобщенных функций и исследованию его свойств посвящена обширная литература (см. Антосик, Микусинский и Сикорский [1], Арсак [1], Бремерман [1], Бремерман и Дюран [1], Владимиров [3, 13, 14], Гельфанд и Шилов [1—3], Гюттингер [1], Джоунс [2], Зелезный [1], Земанян [1, 5, 15], Иино [1], Кармихаэль [1], Коревaар [2], Лавуан [3], Лайтхилл [1], Мартино и Трев [1], Микусинский [1], Чирну [1, 2], Л. Шварц [1], Шилов [1], Эрдейи [3], Эренпрайс [2]).

В работах Антосика, Микусинского и Сикорского [1], Крачунаса [1], Матушу [1], Микусинского [1], Темпла [1] и Уестона [1] дано определение преобразования Фурье обобщенных функций в рамках *секвенциальной теории* Микусинского.

В статьях Кармихаэля [2] и Уомброда [1] дается определение *конечного преобразования Фурье* обобщенных функций.

Преобразования Фурье *однородных* обобщенных функций рассматривались Гельфандом и Шиловым [1], Гордингом [1], Куррежом [1] и Лемуаном [1].

Связь поведения преобразования Фурье со свойствами носителя обобщенной функции исследовалась в работах Вотье [1, 2] и Достала [1].

Кристенсен, Мейлбо и Паульсен [1] и Фомин [1] рассмотрели преобразование Фурье обобщенных функций бесконечного числа переменных.

Работы Брестерса [1], Лавуана [2], Маркова [1] и Фишера [1] посвящены вычислению преобразований Фурье некоторых конкретных обобщенных функций.

Ряд работ касается исследования преобразования Фурье в специальных пространствах обобщенных функций (см. Альбрихт и Мусиляк [1], Беренстейн и Достал [1], Владимиров [13], Кармихаэль [1], Кучера [1], Мусиляк [1], Румье [1], Хаякава [1]. Ямагата [1] построил пространство обобщенных функций, содержащее $\mathscr{S}'$ и инвариантное относительно преобразования Фурье.

Блейк [1] и Милтон [2] изучали синус- и косинус-преобразования Фурье обобщенных функций.

Исследованию *асимптотических свойств* преобразования Фурье обобщенных функций посвящены работы Брычкова [1, 2], Брычкова и Широкова [1, 2], Джоунса [2, 3], Дрожжинова и Завьялова [1], Завьялова [1], Мангада [1], Милтона [1, 2], Смирнова [1], Ф. Шварца [1].

§ 2. Преобразование Фурье в $\mathscr{S}'(R^n)$

В пространстве $\mathscr{S}'(R^n)$ преобразование Фурье было введено Л. Шварцем [1]. Преобразование Фурье (13) является автоморфизмом пространства основных функций $\mathscr{S} = \mathscr{S}(R^n)$. Поэтому можно сформулировать следующее определение.

Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'$ определяется равенством

$$\langle F[f], \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, F[\varphi]\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{14}$$

Оно задает автоморфизм пространства обобщенных функций $\mathscr{S}'$. Для функций $f(t) \in L_1(R^n)$ это преобразование совпадает с (13).

Определим для $f(t) \in \mathscr{S}'$ операцию

$$F^{-1}[f(t)] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-t)]; \tag{15}$$

она также является автомофизмом $\mathscr{S}'$ и задает преобразование, обратное F:

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathscr{S}'.$$

Для функций $f(t) \in L_1(R^n)$ формула (15) принимает вид

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(t)\, e^{-ixt} dt. \tag{16}$$

Отметим также равенство

$$F[F[f(t)]] = (2\pi)^n f(-t).$$

Если $f \in \mathscr{E}'$, то преобразование Фурье обобщенной функции f представимо в виде

$$F[f](x) = \langle f(t),\ \eta(t)\, e^{ixt} \rangle, \tag{17}$$

где $\eta(t)$ — любая функция из $\mathscr{D}$, равная единице в окрестности носителя f. При этом $F[f](x)$ — целая функция x, и существуют такие числа $C_k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, что

$$|D_x^k F[f](x)| \leqslant C_k (1 + |x|^2)^m, \tag{18}$$

где k — любое неотрицательное целое число из R^n.

Преобразование операций. Пусть $f(t)$, $g(t) \in \mathscr{S}'$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in R^n$ и c — комплексное число. Тогда

1) $$F[(it)^k f] = D^k F[f]; \tag{19}$$
2) $$F[D^k f] = (-ix)^k F[f]; \tag{20}$$
3) $$F[f(t - t_0)] = e^{-ixt_0} F[f]; \tag{21}$$
4) $$F[e^{itx_0} f] = F[f](x + x_0); \tag{22}$$
5) $$F[f(ct)] = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{x}{c}\right),\quad c \neq 0; \tag{23}$$
6) $$F[f(t) \times g(\tau)] = F[f](x) \times F[g](y), \tag{24}$$

где $f(t) \times g(\tau)$ — прямое произведение обобщенных функций;

7) если $f \in \mathscr{S}'$ и $g \in \mathscr{E}'$, то свертка $f * g$ принадлежит $\mathscr{S}'$ и

$$F[f * g] = F[f]\, F[g]. \tag{25}$$

Определение преобразования Фурье в рамках *секвенциального подхода* можно найти у Микусинского [1] и в книге Антосика, Микусинского и Сикорского [1].

Отметим в заключение этого пункта, что существуют также другие формы определения преобразования Фурье (см., например, Земанян [1]):

а) $$F_{-}[\varphi(t)] \overset{\Delta}{=} \int_{R^n} \varphi(t)\, e^{-ixt} dt, \qquad \varphi \in \mathscr{S}, \qquad б)$$

$$\langle F_-[f], \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, F_-[\varphi]\rangle, \quad f \in \mathscr{S}'; \tag{27}$$

б) $$F_-[\varphi(t)] \overset{\Delta}{=} \int_{R^n} \varphi(t) e^{-ixt} dt, \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{28}$$

$$\langle F_1[f], F_-[\varphi]\rangle \overset{\Delta}{=} 2\pi\langle f, \varphi(-t)\rangle, \quad f \in \mathscr{S}'; \tag{29}$$

в) $$F[\varphi(t)] \overset{\Delta}{=} \int_{R^n} \varphi(t) e^{ixt} dt, \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{30}$$

$$\langle F_2[f], F[\varphi]\rangle \overset{\Delta}{=} 2\pi\langle f, \varphi\rangle, \quad f \in \mathscr{S}'; \tag{31}$$

г) $$F_{2\pi}[\varphi(t)] \overset{\Delta}{=} \int_{R^n} \varphi(t) e^{2\pi ixt} dt, \quad \varphi \in \mathscr{S}, \tag{32}$$

$$\langle F_{2\pi}[f], F_{2\pi}[\varphi]\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, \varphi\rangle, \quad f \in \mathscr{S}'. \tag{33}$$

§ 3. Преобразование Фурье в $\mathscr{D}'(R^n)$ и $\mathscr{Z}'(R^n)$.

В пространствах $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(R^n)$ и $\mathscr{Z}' = \mathscr{Z}'(R^n)$ преобразование Фурье было введено Гельфандом и Шиловым [1—3]. Преобразование Фурье является изоморфизмом пространства $\mathscr{D}$ на пространство $\mathscr{Z}$. При этом функция $\varphi(t) \in \mathscr{D}$ обращается в нуль вне параллелепипеда $\{t: |t_i| \leqslant a_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $F[\varphi](z)$—целая функция переменной $z = x + iy$, удовлетворяющая неравенствам

$$|z^k F[\varphi](z)| \leqslant C_k e^{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n} \tag{34}$$

для любого неотрицательного целого числа $k \in R^n$ и некоторых $C_k \geqslant 0$.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \mathscr{D}$ определяется формулой

$$\langle F_{(\mathscr{Z})}[f], \psi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, F[\psi]\rangle, \quad \psi \in \mathscr{Z}. \tag{35}$$

Преобразование Фурье является изоморфизмом $\mathscr{D}'$ на $\mathscr{Z}'$. Индекс $(\mathscr{Z})$ указывает, что преобразование определено на $\mathscr{Z}$.

Введем еще одно преобразование:

$$\langle F^{-1}_{(\mathscr{Z})}[f], \psi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, F^{-1}[\psi]\rangle, \quad \psi \in \mathscr{Z}. \tag{36}$$

Преобразование Фурье обобщенной функции $g \in \mathscr{Z}'$ определяется равенством

$$\langle F_{(\mathscr{D})}[g], \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle g, F[\varphi]\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{37}$$

Индекс $(\mathscr{D})$ указывает, что преобразование определено на $\mathscr{D}$.

Введем также преобразование

$$\langle F^{-1}_{(\mathscr{D})}[g], \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle g, F^{-1}[\varphi]\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{38}$$

Справедливы следующие соотношения:

1) если $f \in \mathscr{D}'$, то

$$F^{-1}_{(\mathscr{D})}[F_{(\mathscr{Z})}[f]] = F_{(\mathscr{D})}[F^{-1}_{(\mathscr{Z})}[f]] = f; \tag{39}$$

2) если $g \in \mathscr{Z}'$, то

$$F^{-1}_{(\mathscr{Z})}[F_{(\mathscr{D})}[g]] = F_{(\mathscr{Z})}[F^{-1}_{(\mathscr{D})}[g]] = g \tag{40}$$

(см. Бремерман [1]). Индексы $(\mathscr{D})$ и $(\mathscr{Z})$ обычно опускают.

Для преобразований Фурье обобщенных функций справедливы *формулы преобразования операций* (19)—(24). Если $f \in \mathscr{D}'$ и $g \in \mathscr{E}'$, то

$$F[f*g] = F[f]\,F[g]. \tag{41}$$

Если обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$ обращается в нуль вне области $\{t: |t_i| \leqslant a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, то ее преобразование Фурье $F[f](z)$, $z = x + iy$, есть целая функция 1-го порядка и типа a_i по переменной z_i, причем для некоторого целого положительного числа N и любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$|F[f](x+iy)| \leqslant C_\varepsilon (1 + |x|)^N e^{(a_1+\varepsilon)|y_1| + \ldots + (a_n+\varepsilon)|y_n|}, \tag{42}$$

где C_ε — постоянная. Обратное утверждение (теорема Пэли — Винера — Шварца) также верно.

Страбл [1] предложил следующее определение *преобразования Фурье* $f \in \mathscr{D}'(R^1)$:

$$F_S[f] \overset{\Delta}{=} \lim_{n\to\infty} U_n e^{-ixt} f(t) \tag{43}$$

в смысле $\mathcal{D}'$, где оператор U_n определен формулой

$$\langle U_n e^{-ixt} f(t),\ \varphi(x)\psi(t)\rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle n e^{-ixnt} f(nt),\ \varphi(x)\psi(t)\rangle,$$

$$\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(R^1).$$

Темпл и Зелезный [1] ввели преобразование Фурье *быстро растущих* обобщенных функций в рамках секвенциальной теории.

§ 4. Другие определения

1. Можно определить преобразование Фурье некоторых классов обобщенных функций, не обращаясь к понятию сопряженного оператора в сопряженном пространстве. Для такого определения необходимо, чтобы соответствующее пространство основных функций содержало функцию e^{ixt}. Одно из возможных определений принадлежит Эрдейи [3]. Он рассмотрел в качестве пространства основных функций пространство $\mathcal{B}$, которое состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на R^n, ограниченных вместе со всеми производными. Топология в $\mathcal{B}$ определяется как топология ограниченной сходимости функций и всех их производных на R^n и равномерной сходимости на любом комнактном множестве в R^n. Функция e^{ixt} принадлежит $\mathcal{B}$ при любом x. Поэтому для любой обобщенной функции $f(t)$ из сопряженного пространства $\mathcal{B}'$ существует выражение

$$F(x) = \langle f(t),\ e^{ixt}\rangle, \tag{44}$$

которое и называется *преобразованием Фурье обобщенной функции* $f(t)$. Справедливы вложения

$$\mathcal{D} \to \mathcal{B} \to \mathcal{E} \text{ и } \mathcal{E}' \to \mathcal{B}' \to \mathcal{D}'.$$

2. Обобщенное преобразование Фурье. Теория обобщенного преобразования Фурье подробно изложена в книге Бремермана [1]. Приведем его основные свойства.

Пусть $g(t)$ — непрерывная функция медленного (т. е. не выше степенного) роста при $|t| \to \infty$, $t \in R^1$. Обобщенное преобразование Фурье $F_0 g$ функции $g(t)$ определяется равенством

$$[F_0 g](z) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} \int\limits_0^{\infty} g(t)\, e^{izt}\, dt & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\int\limits_{-\infty}^{0} g(t)\, e^{izt}\, dt & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{45}$$

Функция $[F_0 g](z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(R^1)$. Тогда f представляется в виде $f = g^{(m)}(t)$, $g(t)$ — непрерывная функция медленного роста.

Обобщенное преобразование Фурье $F_0 f$ обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'(R^1)$ определяется равенством

$$[F_0 f](z) \overset{\Delta}{=} (-iz)^m [F_0 g](z). \tag{46}$$

Пусть $f \in \mathcal{S}'(R^1)$ и $F[f]$ — преобразование Фурье обобщенной функции f в смысле (14). Тогда

$$F[f] = \lim_{\varepsilon \to +0} \{[F_0 f](x + i\varepsilon) - [F_0 f](x - i\varepsilon)\} \tag{47}$$

в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{S}(R^1)$.

§ 5. Асимптотические формулы

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(R^n)$, $x \in R^1$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in R^n$, $st = s_1 t_1 - s_2 t_2 - \ldots - s_n t_n$ и при фиксированном s функции $\psi_k(x, s)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ образуют асимптотическую последовательность при $x \to +\infty$, т. е. $\psi_{k+1}(x, s) = o(\psi_k(x, s))$, $x \to +\infty$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Функция $f(t)\, e^{ixst}$ имеет при $x \to +\infty$ разложение

$$f(t)\, e^{ixst} \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t, s)\, \psi_k(x, s), \tag{48}$$

где $C_k(t, s) \in \mathcal{S}'$ при всех $k = 1, 2, 3, \ldots$, если

$$\langle f(t)\, e^{ixst}, \varphi(t) \rangle \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle C_k(t, s), \varphi(t) \rangle\, \psi_k(x, s),\ x \to +\infty \tag{49}$$

для всех $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ (см. Брычков [1]).

Асимптотические разложения в одномерном случае. Если $R^n = R^1$, $s_1 = 1$ и $s_2 = s_3 = \ldots = s_m = 0$, то имеют место следующие асимптотические разложения.[1])

[1]) При $x \to +\infty$ во всех формулах следует брать верхний знак ($+$ или $-$), а при $x \to -\infty$ — нижний знак. Соотношение $r(x) \sim 0$ ($x \to \pm\infty$) означает, что $|x|^m r(x) \to 0$ при любом $m \geqslant 0$.

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)\,e^{ixt}$ при $x \to \pm\infty$	
$\delta^{(n)}(t)$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_n^k(-ix)^{n-k}\delta^{(k)}(t)$	(50)
$(t \mp i0)^{\lambda}$	$2\pi\,\|x\|^{-\lambda-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{\mp i\frac{(\lambda+n)}{2}\pi}}{\Gamma(-\lambda-n)\,n!}\,\dfrac{1}{\|x\|^n}\,\delta^{(n)}(t)$	(51)
$(t \pm i0)^{\lambda}$	0	(52)
t_+^{λ}	$\|x\|^{-\lambda-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(1+\lambda+n)}{n!\,\|x\|^n}\,e^{\pm i\frac{(\lambda-n+1)}{2}\pi}\,\delta^{(n)}(t)$	(53)
t_-^{λ}	$\|x\|^{-\lambda-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(1+\lambda+n)}{n!\,\|x\|^n}\,e^{\mp i\frac{(\lambda+n+1)}{2}\pi}\,\delta^{(n)}(t)$	(54)
$\theta(t)$	$\|x\|^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^{\mp(n-1)}}{\|x\|^n}\,\delta^{(n)}(t)$	(55)
$\|t\|^{\lambda}$, $\lambda \neq -1, -3, \dots$	$-2\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}\,\|x\|^{-\lambda-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(1+\lambda+n)}{n!\,\|x\|^n}\,e^{\mp i\frac{\pi n}{2}}\,\delta^{(n)}(t)$	(56)
$\|t\|^{\lambda}\operatorname{sgn} t$, $\lambda \neq -2, -4, \dots$	$2\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}\,\|x\|^{-\lambda-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(1+\lambda+n)}{n!\,\|x\|^n}\,e^{\mp i\frac{(n-1)}{2}\pi}\,\delta^{(n)}(t)$	(57)
t^{-m}	$\pm i^m\dfrac{\pi}{(m-1)!}\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k\,\|x\|^{m-1-k}\,i^k\delta^{(k)}(t)$	(58)
$\|t\|^{-2m-1}$	$\dfrac{2(-1)^m}{(2m)!}\sum\limits_{k=0}^{2m} C_{2m}^k x^{2m-k} i^k\left\{\left[1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n-1}+\Gamma'(1)\right]\delta^{(k)}(t)-\ln\|x\|\,\delta^{(k)}(t)-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{nx^n}\,\delta^{(n+k)}(t)\right\}$	(59)

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)e^{ixt}$ при $x \to \pm\infty$
$\lvert t\rvert^{-2m}\operatorname{sgn} t$	$\frac{2i(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\sum_{k=0}^{2m-1} C_{2m-1}^{k} x^{2m-1-k} i^{k}\Big\{\Big[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\Gamma'(1)\Big]\delta^{(k)}(t)-\ln\lvert x\rvert\,\delta^{(k)}(t)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{nx^{n}}\delta^{(n+k)}(t)\Big\}$ (60)
$(t\mp i0)^{\lambda}\times$ $\times\ln^{m}(t\mp i0)$	$2\pi\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k}\ln^{m-k}\lvert x\rvert\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{k}}{d\lambda^{k}}\left\{\frac{e^{\mp i\frac{(\lambda+n)}{2}\pi}}{\Gamma(-\lambda-n)}\right\}\frac{1}{n!\lvert x\rvert^{n}}\delta^{(n)}(t)$ (61)
$(t\pm i0)^{\lambda}\times$ $\times\ln(t\pm i0)$	0 (62)
$t_{+}^{\lambda}\ln^{m}t_{+}$	$\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k}\ln^{m-k}\lvert x\rvert\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{k}}{d\lambda^{k}}\left\{\Gamma(1+\lambda+n)\,e^{\pm i\frac{(\lambda-n+1)}{2}\pi}\right\}\frac{1}{n!\lvert x\rvert^{n}}\delta^{(n)}(t)$ (63)
$t_{-}^{\lambda}\ln^{m}t_{-}$	$\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k}\ln^{m-k}\lvert x\rvert\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{k}}{d\lambda^{k}}\left\{\Gamma(1+\lambda+n)\,e^{\mp i\frac{(\lambda+n-1)}{2}\pi}\right\}\frac{1}{n!\lvert x\rvert^{n}}\delta^{(n)}(t)$ (64)
$\lvert t\rvert^{\lambda}\ln^{m}\lvert t\rvert$ $\lambda\neq-1,-3,\ldots$	$-2\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\sum_{k=0}^{m} C_{m}^{k}\ln^{m-k}\lvert x\rvert\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{k}}{d\lambda^{k}}\left\{\Gamma(1+\lambda+n)\sin\frac{\lambda\pi}{2}\right\}\frac{1}{n!\lvert x\rvert^{n}}\delta^{(n)}(t)$ (65)

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)\,e^{ixt}$ при $x \to \pm\infty$
$\lvert t\rvert^{\lambda}\ln^{m}\lvert t\rvert\operatorname{sgn} t$, $\lambda \neq -2, -4, \ldots$	$2\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \ln^{m-k}\lvert x\rvert \times \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left\{\Gamma(1+\lambda+n)\cos\frac{\lambda\pi}{2}\right\}\frac{1}{n!\,\lvert x\rvert^{n}}\,\delta^{(n)}(t)$ (66)

Асимптотические разложения в n-мерном случае. Пусть $f(t)\in\mathcal{S}'(R^n)$, $t^2 \overset{\Delta}{=} t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_n^2$, $s^2 \overset{\Delta}{=} s_1^2 - s_2^2 - \ldots - s_n^2$, $sD_t \overset{\Delta}{=} s_1 D_{t_1} - s_2 D_{t_2} - \ldots - s_n D_{t_n}$, $\square \overset{\Delta}{=} D_{t_1}^2 - D_{t_2}^2 - \ldots - D_{t_n}^2$. Имеют место следующие асимптотические разложения (см. Смирнов [1]) при $x \to +\infty$.

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)\,e^{istx}$ при $x \to +\infty$
$(t^2 \pm i0)^{\lambda}$, $s^2 \neq 0$	$\frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\,e^{\mp\frac{i\pi(n-1)}{2}}\,2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{1}{x^{2\lambda+n}} \times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)}{k!}\,\frac{(s^2 \mp i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}-k}}{x^{2k}} \times (\square - 2ixsD_t)^k\,\delta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (67)
$(t^2 \pm i0)^{\lambda}$, $s^2 = 0$	$\frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\,e^{\mp\frac{i\pi(n-1)}{2}}\,2^{\lambda+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{1}{x^{\lambda+\frac{n}{2}}} \times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{\pm\frac{i\pi}{2}\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)}}{2^k\,k!}\cdot\frac{1}{x^k}\int d\alpha\,\alpha_{\mp}^{\lambda+\frac{n}{2}+k-1} \times \square^k\{\delta(t_1-\alpha s_1)\,\delta(t_2-\alpha s_2)\ldots\delta(t_n-\alpha s_n)\}$ (68)

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)e^{istx}$ при $x \longrightarrow +\infty$
$(-t^2 \pm i0t_1)^{\lambda}$ $s^2 \neq 0$	$$\frac{2^{2\lambda+n+1}\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(-\lambda)} \frac{1}{x^{n+2\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta(\pm s_1)(s^2)_+^{-\lambda-\frac{n}{2}-k}}{k!\,\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}-k+1\right)x^{2k}} \times$$ $$\times(\square-2ixsD_t)^k\,\delta(t) \quad (69)$$
$(-t^2 \pm i0t_1)^{\lambda}$ $s^2 = 0$	$$\frac{2^{\lambda+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda)} (s_1)_{\pm}^{-1} \frac{1}{x^{\lambda+n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i\left(\lambda+\frac{n}{2}-k-1\right)\frac{\pi}{2}}}{k!\,(2x)^k} \times$$ $$\times\square^k\left\{(s_1^{-1}t_1-i0)^{\lambda+\frac{n}{2}+k-1}\prod_{l=2}^{n}\delta(t_l-s_1^{-1}s_lt_1)\right\} (70)$$
$\theta(\pm t_1)(t^2)_+^{\lambda}$ $s^2 \neq 0$	$$\pi^{\frac{n}{2}-1}2^{2\lambda+n-1}\Gamma(\lambda+1)\frac{1}{x^{2\lambda+n}}\times$$ $$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)}{k!}\frac{(-s^2\mp i0s_1)^{-\lambda-k-\frac{n}{2}}}{x^{2k}}\times$$ $$\times(\square-2ixsD_t)^k\,\delta(t) \quad (71)$$
$\theta(\pm t_1)(t^2)_+^{\lambda}$ $s^2 = 0$	$$\lvert s_1\rvert^{-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}2^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\cdot\frac{1}{x^{\lambda+n/2}}\times$$ $$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{\pm i\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)\pi/2\,\operatorname{sgn} s_1}}{k!}\cdot\frac{1}{(2x)^k}\times$$ $$\times\square^k\left\{(s_1^{-1}t_1)_{\pm}^{\lambda+\frac{n}{2}+k-1}\prod_{l=2}^{n}\delta(t_l-s_1^{-1}s_lt_1)\right. \quad (72)$$
$\operatorname{sgn}(t_1)(t^2)_+^{\lambda}$ $s^2 \neq 0$	$$i\pi^{n/2}\operatorname{sgn} s_1 2^{2\lambda+n}\Gamma(\lambda+1)\frac{1}{x^{2\lambda+n}}\times$$ $$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(s^2)_+^{-\lambda-k-\frac{n}{2}}}{k!\,\Gamma\left(-\lambda-k-\frac{n}{2}+1\right)}\times$$ $$\times\frac{1}{x^{2k}}(\square-2ixsD_t)^k\,\delta(t) \quad (73)$$

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)\,e^{istx}$ при $x \to +\infty$
$\operatorname{sgn}(t_1)\,(t^2)_+^{\lambda}$ $s^2=0$	$\operatorname{sgn} s_1 2^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\frac{1}{x^{\lambda+\frac{n}{2}}}\times$ $\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{i\left(\lambda+\frac{n}{2}-k\right)\frac{\pi}{2}}}{k!}\times$ $\times\frac{1}{(2x)^k}\square^k\,(s_1^{-1}t_1-i0)^{\lambda+k+\frac{n}{2}-1}\prod_{l=2}^{n}\delta\left(t_l-s_1^{-1}s_lt_1\right)$ (74)
$\operatorname{sgn}(t_1)\,\delta(t^2)$ $s^2\neq 0$	0, если $n=4+2p$, $p=0, 1, 2, \ldots$ (75) $i\pi^{\frac{n}{2}}2^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(2-\frac{n}{2}-k\right)}\frac{\varepsilon(s_1)\,(s^2)_+^{1-k-\frac{n}{2}}}{x^{n+2k-2}}\times$ $\times(\square-2ixsD_t)^k\,\delta(t)$ в остальных случаях (76)
$\operatorname{sgn}(t_1)\,\delta(t^2)$ $s^2=0$	$\frac{\operatorname{sgn} s_1\pi^{\frac{n}{2}-1}2^{\frac{n}{2}-2}}{x^{\frac{n}{2}-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{i(n/2-k-1)\frac{\pi}{2}}}{k!}\frac{1}{(2x)^k}\times$ $\times\square^k\left\{(s_1^{-1}t_1-i0)^{n/2+k-2}\prod_{l=2}^{n}\delta\left(t_l-s_1^{-1}s_lt_1\right)\right.$ (77)
$(t^2)^{-1}$ $s^2\neq 0$	0, если $n=4+2p$, $p=0, 1, 2, \ldots$ (78) $2^{n-2}\pi^{\frac{n}{2}+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!\,\Gamma\left(2-\frac{n}{2}-k\right)}\frac{(s^2)_+^{1-\frac{n}{2}-k}}{x^{2n+2k-2}}\times$ $\times(\square-2ixsD_t)^k\,\delta(t)$ в остальных случаях (79)
$(t^2)^{-1}$ $s^2=0$	$\lvert s_1\rvert^{-1}\frac{2^{\frac{n}{2}-2}\pi^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{n}{2}-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{i\left(\frac{n}{2}-k\right)\frac{\pi}{2}}}{k!}\frac{1}{(2t)^k}\times$ $\times\square^k\left\{(s_1^{-1}t_1-i0)^{\frac{n}{2}+k-2}\prod_{l=2}^{n}\delta\left(t_l-s_1^{-1}s_lt_1\right)\right.$ (80)

Обобщенная функция $f(t)$	Асимптотическое разложение $f(t)\,e^{istx}$ при $x \longrightarrow +\infty$
$(t^2)_-^{\lambda}$ $s^2 \neq 0$	$\begin{aligned} &-\Gamma(\lambda+1)\,2^{n+2\lambda}\pi^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{1}{x^{2\lambda+n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}+k\right)}{k!}\times \\ &\times\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\,(s^2)_+^{-\lambda-\frac{n}{2}-k}+(-1)^k\cos\pi\lambda\,(s^2)_-^{-\lambda-\frac{n}{2}-k}}{x^{2k}}\times \\ &\qquad\times(\Box-2ixsD_t)^k\,\delta(t) \quad (81) \end{aligned}$
$(t^2)_-^{\lambda}$ $s^2 = 0$	$\begin{aligned} &-\lvert s_1\rvert^{-1}\frac{2^{\frac{n}{2}+\lambda-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)}{x^{\lambda+\frac{n}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(2x)^k}\times \\ &\times\Box^k\left\{\left(e^{i\frac{\pi}{2}\left(\lambda-\frac{n}{2}+k\right)}(s_1^{-1}t_1)_-^{\lambda+\frac{n}{2}+k-1}+\right.\right. \\ &\left.+e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\lambda-\frac{n}{2}+k\right)}(s_1^{-1}t_1)_+^{\lambda+\frac{n}{2}+k-1}\right)\times \\ &\qquad\left.\times\prod_{l=2}^{n}\delta(t_l-s_1^{-1}s_lt_1)\right\} \quad (82) \end{aligned}$

ГЛАВА 3
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И МЕЛЛИНА

§ 1. Введение

Правостороннее, левостороннее и двустороннее преобразования Лапласа обычной функции $f(t)$ определяются формулами

$$F_R(p) = \int_T^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$
$$F_L(p) = \int_{-\infty}^T f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{83}$$
$$F(p) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

соответственно; здесь $-\infty < T < \infty$. Существуют различные способы распространения этих преобразований на обобщенные функции. Первым ввел *преобразование Лапласа* обобщенных функций Л. Шварц [2], который использовал при этом преобразование Фурье. Другой способ, основанный на включении функции e^{-pt} в число основных, принадлежит Земаняну [1—4, 15]. Подходы Шварца и Земаняна подробно рассмотрены ниже.

Исихара [1] предложил определение *преобразования Лапласа*, фактически совпадающее с преобразованием Фурье и применимое ко всем обобщенным функциям из $\mathscr{D}'$:

$$L[f](z) \overset{\Delta}{=} F[e^{-yt} f(t)](x), \tag{84}$$

где $f \in \mathscr{D}'$, $\mathscr{D}'_+$ или $\mathscr{D}'_-$ и $F[e^{-yt} f(t)] \in \mathscr{Z}'$.

Еще один способ введения преобразования Лапласа принадлежит Маринеску и Тудору [1]: если $f \in \mathscr{D}'$, то *преобразование Лапласа* обобщенной функции f определяется равенством

$$\langle \boldsymbol{L}[f],\ \boldsymbol{L}[\varphi]\rangle \overset{\Delta}{=} i^n \langle \boldsymbol{F}[f],\ \boldsymbol{F}[\varphi(-t)]\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{85}$$

Это определение эквивалентно определению Исихары (см. Тудор [1, 2]).

Среди книг и журнальных статей, посвященных (полностью или частично) преобразованию Лапласа обобщенных функций, следует отметить работы Бенедетто [1], Владимирова [1—13], Гарнира и Мунстера [1], Гхоша [1], Джоунса [2], Земаняна [14], Коломбо и Лавуана [1], Исихары [2], Кореваара [1], Кучеры [2], Купера [1], Лавуана [1], Леонарда [1], Ливермана [1], Лионса [1], Миллера [1], Неймарка [1], Суорца [1, 2], Уестона [1], Чирну [3], Шельмецкой [1]. *Асимптотические свойства* преобразований Лапласа обобщенных функций изучались в работах Лавуана [1, 4, 5] и Милтона [1].

§ 2. Правостороннее преобразование Лапласа

1. *Правостороннее преобразование Лапласа* определяется для подходящих обычных функций $f(t)$ формулой

$$\boldsymbol{L}[f(t)] = \int_T^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{86}$$

где T — некоторое действительное число.

2. Одно из обобщений правостороннего преобразования Лапласа вытекает из определения двустороннего преобразования Лапласа обобщенных функций в $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$, принадлежащего Л. Шварцу [2].

Пусть $f(t) \in \mathscr{D}'_R$ (т. е. $f(t) \in \mathscr{D}'$ и носитель f ограничен слева) и $y \in \Gamma_f \overset{\Delta}{=} \{y\colon\ e^{-yt} f(t) \in \mathscr{S}'\}$. *Преобразование Лапласа* (или *Фурье—Лапласа*) обобщенной функции $f(t) \in \mathscr{D}'_R$ определяется равенством

$$\boldsymbol{L}[f(t)](z) \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{F}[e^{-yt} f(t)](x), \qquad z = x + iy, \quad y \in \Gamma_f. \tag{87}$$

Если $f(t)$ — обычная функция, обладающая правосторонним преобразованием Лапласа $\tilde{f}(p)$ в обычном смысле (86), то

$$\boldsymbol{F}[e^{-yt} f(t)](x) = \tilde{f}(y - ix). \tag{88}$$

Относительно дальнейших свойств см. п. 3 § 4 и указанную там литературу.

3. Другой способ введения правостороннего преобразования Лапласа обобщенных функций принадлежит Земаняну [3, 15].

Пусть $f(t) \in \mathcal{D}'_R$ и существует действительное число p_0, для которого $e^{-p_0 t} f(t) \in \mathcal{S}'$.

Правостороннее преобразование Лапласа обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{D}'_R$ определяется формулой

$$L[f(t)] \stackrel{\Delta}{=} \langle e^{-p_0 t} f(t),\ \lambda(t) e^{-(p-p_0)t} \rangle, \qquad \operatorname{Re} p > p_0, \qquad (89)$$

где $\lambda(t) \in C^\infty$, $\lambda(t) = 1$ в окрестности носителя $f(t)$ и $\lambda(t) = 0$ при $t < T - 1$. Правая часть имеет смысл, поскольку $\lambda(t) e^{-(p-p_0)t} \in \mathcal{S}$. Формулу (89) можно записать в виде

$$L[f(t)] \stackrel{\Delta}{=} \langle f(t),\ e^{-pt} \rangle. \qquad (90)$$

Преобразование Лапласа (89) определяется для всех комплексных значений p, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > p_0$. Наибольшая нижняя грань σ_f значений p_0, для которых $e^{-p_0 t} f(t) \in \mathcal{S}'$, называется *абсциссой сходимости*, а полуплоскость $\operatorname{Re} p > \sigma_f$ — *областью* или *полуплоскостью сходимости* правостороннего преобразования Лапласа $L[f(t)]$. Отметим, что определение (89) не зависит от выбора p_0 $(p_0 > \sigma_f)$ и $\lambda(t)$ с указанными свойствами.

Если $f(t)$ — локально интегрируемая функция, $f(t) = 0$ при $t < T$ и $f(t) e^{-pt} \in L_1(T, \infty)$ для всех $\operatorname{Re} p > \sigma$, то $f(t)$ порождает *регулярную* обобщенную функцию в $\mathcal{D}'_R$, преобразование Лапласа которой совпадает с (86) при $\operatorname{Re} p > \sigma$.

Единственность. Если обобщенные функции f, $g \in \mathcal{D}'_R$ допускают преобразование Лапласа и $L[f] = L[g]$ на некоторой вертикальной линии $p = p_0 + i\tau$, лежащей в пересечении областей сходимости, то $f = g$.

Аналитичность. Пусть $f \in \mathcal{D}'_R$ допускает преобразование Лапласа. Тогда $L[f(t)] = F(p)$ — аналитическая функция в области сходимости $\operatorname{Re} p > \sigma_f$ и

$$D_p^k F(p) = \langle f(t),\ D_p^k e^{-pt} \rangle = \langle f(t),\ (-t)^k e^{-pt} \rangle \qquad (91)$$

при $\operatorname{Re} p > \sigma_f$.

Преобразование операций. Если $f(t) \in \mathcal{D}'_R$ допускает преобразование Лапласа (90) и $L[f(t)] = F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \sigma_f$, то

$$L[t^n f(t)] = (-1)^k F^{(k)}(p), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_f, \tag{92}$$

$$L[f^{(k)}(t)] = p^k F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_f, \tag{93}$$

$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_f, \tag{94}$$

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(p+\alpha), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_f - \operatorname{Re} \alpha, \tag{95}$$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \qquad \operatorname{Re} p > a\sigma_f, \tag{96}$$

где k — положительное целое число, α — комплексное, a — действительное положительное число.

Представление посредством правостороннего преобразования Лапласа. Для того чтобы функция $F(p)$ была преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{D}'$ с носителем, сосредоточенным справа от точки $t = T$, необходимо и достаточно, чтобы она была аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant p_0$ и удовлетворяла условию

$$|F(p)| \leqslant e^{-\operatorname{Re} pT} Q(|p|), \qquad \operatorname{Re} p \geqslant p_0, \tag{97}$$

где $Q(|p|)$ — полином относительно $|p|$.

Преобразование Лапласа свертки. Пусть f, $g \in \mathcal{D}'_R$ допускают преобразование Лапласа и

$$L[f] = F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_f,$$

$$L[g] = G(p), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_g.$$

Тогда свертка $f * g \in \mathcal{D}'_R$ также допускает преобразование Лапласа и

$$L[f * g] = F(p)\, G(p), \qquad \operatorname{Re} p > \max(\sigma_f, \sigma_g). \tag{98}$$

4. Еще один способ введения правостороннего преобразования Лапласа обобщенных функций, также принадлежащий Земаняну, состоит в следующем [15].

Пространства основных функций $\mathcal{L}_a$ *и* $\mathcal{L}(w)$. Пусть a — фиксированное действительное число. Пространство $\mathcal{L}_a$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $-\infty < t < \infty$, удовлетворяющих для любого действительного числа T

неравенствам

$$\rho_{a, T, k}(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{T<t<\infty} |e^{at}D^k\varphi(t)| < \infty \tag{99}$$

при всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathscr{L}_a$ порождается счетным семейством полунорм $\{\rho_{a, T_p, k}\}_{k, p=0}^{\infty}$, где T_p пробегает последовательность точек, стремящихся к $-\infty$. Пространство, сопряженное $\mathscr{L}_a$, обозначим через $\mathscr{L}'_a$.

Пусть w—действительное число или $-\infty$. Выберем монотонную последовательность действительных чисел $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, такую, что $a_\nu \to w+0$. *Пространство основных функций* $\mathscr{L}(w)$ определяется как счетное объединение пространств $\mathscr{L}_{a_\nu}$, т. е. $\mathscr{L}(w) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathscr{L}_{a_\nu}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{L}(w)$, обозначим через $\mathscr{L}'(w)$. Справедливы вложения $\mathscr{D} \to \mathscr{L}(w) \to \mathscr{E}$ и $\mathscr{E}' \to \mathscr{L}'(w) \to \mathscr{D}'$.

Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$ допускает преобразование Лапласа, если существует такое действительное число a, что $f \in \mathscr{L}'_a$. Для любой обобщенной функции, допускающей преобразование Лапласа, существует такое действительное число σ_1 (включая значение $\sigma_1 = -\infty$), что $f \in \mathscr{L}'(\sigma_1)$ и $f \notin \mathscr{L}'(w)$, если $w < \sigma_1$. Введем обозначение

$$\Omega_f = \{p\colon \operatorname{Re} p > \sigma_1\},$$

Правостороннее преобразование Лапласа обобщенной функции $f \in \mathscr{L}'(\sigma_1)$ определяется равенством

$$L[f](p) \overset{\Delta}{=} \langle f(t), e^{-pt}\rangle, \quad p \in \Omega_f. \tag{100}$$

Отметим, что $e^{-pt} \in \mathscr{L}(\sigma_1)$ при $p \in \Omega_f$. Область Ω_f называется *областью* или *полуплоскостью сходимости*, а σ_1—*абсциссой сходимости*.

Относительно дальнейших свойств см. двустороннее преобразование Лапласа (п. 3 § 4), для которого правостороннее является частным случаем; при этом нужно положить $\sigma_2 = \infty$.

§ 3. Левостороннее преобразование Лапласа

Левостороннее преобразование Лапласа определяется для подходящих обычных функций $f(t)$ формулой

$$L[f(t)] \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{T} f(t) e^{-pt}\, dt, \tag{101}$$

где T — некоторое действительное число. Рассмотрим лишь одно обобщение этого преобразования на $\mathscr{D}'_L \subset \mathscr{D}'$ (см. Земанян [1]).

Пусть $f(t) \in \mathscr{D}'_L$ и существует такое действительное число p_0, что

$$e^{-p_0 t} f(t) \in \mathscr{S}'.$$

Левостороннее преобразование Лапласа обобщенной функции $f(t) \in \mathscr{D}'_L$ определяется формулой

$$F(p) = \boldsymbol{L}[f(t)] \overset{\Delta}{=} \langle e^{-p_0 t} f(t),\ \mu(t) e^{-(p-p_0)t} \rangle, \tag{102}$$

где $\mu(t) \in C^\infty$, $\mu(t) = 1$ в окрестности носителя $f(t)$ и носитель $\mu(t)$ ограничен справа; $\mu(t) e^{-(p-p_0)t} \in \mathscr{S}$ при $\operatorname{Re} p < p_0$.

Наименьшая верхняя грань σ_f значений p_0, для которых $e^{-p_0 t} f(t) \in \mathscr{S}'$, называется *абсциссой сходимости*, а полуплоскость $\operatorname{Re} p < \sigma_f$ — *областью сходимости* левостороннего преобразования Лапласа.

Если $f(t)$ — локально интегрируемая функция, $f(t) = 0$ при $t > T$ и $f(t) e^{-pt} \in L_1(-\infty, T)$ для всех $\operatorname{Re} p < \sigma$, то $f(t)$ порождает *регулярную* обобщенную функцию в $\mathscr{D}'_L$, преобразование Лапласа которой совпадает с (101) при $\operatorname{Re} p < \sigma$.

Единственность. Если обобщенные функции f, $g \in \mathscr{D}'_L$ допускают преобразование Лапласа и $\boldsymbol{L}[f] = \boldsymbol{L}[g]$ на некоторой вертикальной линии $p = p_0 + i\tau$, лежащей в пересечении областей сходимости, то $f = g$.

Аналитичность. Пусть $f(t) \in \mathscr{D}'_L$ допускает преобразование Лапласа. Тогда $F(p) = \boldsymbol{L}[f(t)]$ — аналитическая функция в области сходимости $\operatorname{Re} p < \sigma_f$ и

$$D_p^k F(p) = \langle f(t),\ D_p^k e^{-pt} \rangle = \langle f(t),\ (-t)^k e^{-pt} \rangle \tag{103}$$

при $\operatorname{Re} p < \sigma_f$.

Формулы преобразования операций получаются из формул (92) — (96) при замене знака $>$ на $<$.

§ 4. Двустороннее преобразование Лапласа

1. Для обычных функций $f(t)$ *двустороннее преобразование Лапласа* определяется формулой

$$\boldsymbol{L}[f](x) = F(x) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-xt}\, dt. \tag{104}$$

Существует несколько способов распространения этого преобразования на обобщенные функции. Ниже приведены некоторые из них.

2. Метод Л. Шварца [2] использует преобразование Фурье обобщенных функций и поэтому соответствующее преобразование называется иногда преобразованием Фурье—Лапласа.

Пусть $f(t) \in \mathscr{D}'$ и $y \in \Gamma_f = \{y\colon e^{-yt} f(t) \in \mathscr{S}'\}$. *Преобразование Лапласа* (или *Фурье—Лапласа*) обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'$ определяется равенством

$$\boldsymbol{L}[f(t)](z) \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{F}(e^{-yt} f(t)](x), \qquad z = x + iy, \quad y \in \Gamma_f. \tag{105}$$

Подробнее это определение и его свойства здесь не рассматриваются, так как все результаты получаются как частный случай из соответствующей теории в $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 1$.

Отметим, что если $f(t) \in \mathscr{S}'$, то

$$\lim_{y \to +0} \boldsymbol{L}[f(t)](x + iy) = \boldsymbol{F}[f(t)](x) \tag{106}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{S}'$.

3. Теперь мы изложим еще один способ введения двустороннего преобразования Лапласа обобщенных функций из $\mathscr{D}'$ (см. Земанян [1]).

Пусть $f(t) \in \mathscr{D}'$, $\alpha(t) \in C^\infty$, $\alpha(t) = 1$ при $T \leqslant t < \infty$, $\alpha(t) = 0$ при $-\infty < t \leqslant T - 1$. Тогда

$$f(t) = \alpha(t) f(t) + (1 - \alpha(t)) f(t) = f_R(t) + f_L(t).$$

Если обобщенные функции $f_R(t) \in \mathscr{D}'_R$ и $f_L(t) \in \mathscr{D}'_L$ (см. п. 7 § 1 гл. 1) допускают преобразование Лапласа, причем

$$\boldsymbol{L}[f_L] = F_L(p), \qquad \operatorname{Re} p < \sigma_2,$$
$$\boldsymbol{L}[f_R] = F_R(p), \qquad \operatorname{Re} p > \sigma_1,$$

то *двустороннее преобразование Лапласа* $f(t) \in \mathscr{D}'$ можно определить с помощью формулы

$$\boldsymbol{L}[f] \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{L}[f_L] + \boldsymbol{L}[f_R]. \tag{107}$$

Если $\sigma_1 < \sigma_2$, то $\boldsymbol{L}[f]$ существует в области $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$, которая называется *областью* или *полосой сходимости*. Величины σ_1 и σ_2 называются *абсциссами сходимости*; они могут принимать значения $\sigma_1 = -\infty$ и $\sigma_2 = +\infty$. Отметим, что определение (107) не зависит от разбиения $f(t)$ на $f_L(t)$ и $f_R(t)$.

Преобразование Лапласа в смысле формулы (107) и преобзазование Фурье—Лапласа (105) связаны следующим соотношением: если для всех $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$ имеем $e^{-pt}f(t) \in \mathscr{S}'$, то

$$L[f(t)](p) = F[e^{-\operatorname{Re} pt}f(t)](-\operatorname{Im} p), \quad \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2. \quad (108)$$

Пусть $f(t)$—локально интегрируемая функция и $e^{-pt}f(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ при всех p, удовлетворяющих условию $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$. Тогда $f(t)$ порождает в $\mathscr{D}'$ *регулярную* обобщенную функцию, преобразование Лапласа которой совпадает с (104) при $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$.

Единственность. Если $f, g \in \mathscr{D}'$ допускают преобразование Лапласа и $L[f] = L[g]$ на некоторой вертикальной линии $p = p_0 + i\tau$, лежащей в пересечении их полос сходимости, то $f = g$.

Аналитичность. Пусть $f \in \mathscr{D}'$ допускает преобразование Лапласа с полосой сходимости $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$. Тогда $F(p) = L[f]$—аналитическая функция при $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$ и

$$D_p^k F(p) = \langle f(t), D_p^k e^{-pt} \rangle = \langle f(t), (-t)^k e^{-pt} \rangle, \qquad \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2. \quad (109)$$

Преобразование операций. Если $f(t) \in \mathscr{D}'$ допускает преобразование Лапласа и $F(p) = L[f]$, то имеют место следующие формулы:

$$L[t^k f(t)] = (-1)^k F^{(k)}(p), \qquad \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2, \quad (110)$$

$$L[f^{(k)}(t)] = p^k F(p), \qquad \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2, \quad (111)$$

$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p), \qquad \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2, \quad (112)$$

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(p+\alpha), \qquad \sigma_1 - \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} p < \sigma_2 - \operatorname{Re}\alpha, \quad (113)$$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \qquad a\sigma_1 < \operatorname{Re} p < a\sigma_2, \quad (114)$$

где k—положительное целое число, α—комплексное, a—действительное положительное число.

4. В этом пункте будет изложен еще один способ введения двустороннего преобразования Лапласа, принадлежащий Земаняну [3, 15].

Пространства основных функций $\mathscr{L}_{a,b}$ *и* $\mathscr{L}(w, z)$. Пусть a, b—действительные числа из R^1 и

$$\varkappa_{a,b}(t) = \begin{cases} e^{at}, & 0 \leqslant t < \infty, \\ e^{bt}, & -\infty < t < 0. \end{cases}$$

Пространство $\mathscr{L}_{a,b}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{-\infty<t<\infty} |\varkappa_{a,b}(t) D^k \varphi(t)| < \infty \qquad (115)$$

при всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathscr{L}_{a,b}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{L}_{a,b}$, обозначим через $\mathscr{L}'_{a,b}$.

Пусть w — действительное число или $-\infty$, z — действительное число или $+\infty$. Выберем две монотонные последовательности действительных чисел $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ и $\{b_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, такие, что $a_\nu \to w+0$ и $b_\nu \to z-0$. *Пространство основных функций* $\mathscr{L}(w, z)$ определяется как счетное объединение пространств $\mathscr{L}_{a_\nu, b_\nu}$, т. е. $\mathscr{L}(w, z) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathscr{L}_{a_\nu, b_\nu}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{L}(w, z)$, обозначим через $\mathscr{L}'(w, z)$. Справедливы вложения $\mathscr{D} \to \mathscr{L}(w, z) \to \mathscr{E}$ и $\mathscr{E}' \to \mathscr{L}'(w, z) \to \mathscr{D}'$.

Структура обобщенных функций из пространства $\mathscr{L}'_{a,b}$. Если $f(t) \in \mathscr{L}'_{a,b}$ и $\varphi(t) \in \mathscr{D}$, то найдется такое конечное множество ограниченных измеримых функций $g_k(t)$, что

$$\langle f, \varphi\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N} \int_0^t g_k(\tau) \varkappa_{a,b}(\tau)\, d\tau,\ D^k\varphi(t)\right\rangle. \qquad (116)$$

Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая функция на $(-\infty, \infty)$, такая, что $f(t)[\varkappa_{a,b}(t)]^{-1} \in L_1(-\infty, \infty)$ при любом выборе a и b, таких, что $w < a$ и $b < z$. Тогда $f(t)$ порождает в $\mathscr{L}'(w, z)$ *регулярную* обобщенную функцию f по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in \mathscr{L}(w, z).$$

Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$ допускает преобразование Лапласа, если существует по крайней мере одна пара действительных чисел a, b $(a < b)$, такая, что $f \in \mathscr{L}'_{a,b}$. Для любой обобщенной функции, допускающей преобразование Лапласа, существует единственный непустой интервал (σ_1, σ_2), такой, что $f \in \mathscr{L}(\sigma_1, \sigma_2)$ и $f \notin \mathscr{L}(w, z)$, если

$\omega < \sigma_1$ или $z > \sigma_2$. Введем обозначение $\Omega_f = \{p: \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2\}$.

Преобразование Лапласа обобщенной функции $f \in \mathcal{L}'(\sigma_1, \sigma_2)$ определяется формулой

$$L[f](p) \overset{\Delta}{=} \langle f(t), e^{-pt} \rangle, \quad p \in \Omega_f. \tag{117}$$

Отметим, что $e^{-pt} \in \mathcal{L}(\sigma_1, \sigma_2)$ при $p \in \Omega_f$. Область Ω_f называется *областью* или *полосой сходимости*, а σ_1 и σ_2 — *абсциссами сходимости*.

Аналитичность. Если $L[f] = F(p)$ при $p \in \Omega_f$, то функция $F(p)$ аналитична в Ω_f и при любом $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$D^k F(p) = \langle f(t), (-t)^k e^{-pt} \rangle, \quad p \in \Omega_f. \tag{118}$$

Формулы преобразования операций получаются из формул (110)—(114) при замене указанных там условий на условие $p \in \Omega_f$, а в случае (113) — на $p + \alpha \in \Omega_f$.

Формулы обращения. 1) Пусть $L[f] = F(p)$ при $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$, r — действительная переменная и σ — любое фиксированное действительное число из интервала (σ_1, σ_2). Тогда

$$f(t) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} F(p) e^{pt} dz \tag{119}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'$.

2) Пусть $L[f] = F(p)$ при $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$, a, b и σ — действительные числа из (σ_1, σ_2), причем $a < \sigma < b$, и $Q(p)$ — полином, не имеющий нулей при $a \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant b$ и удовлетворяющий условию $|F(p)/Q(p)| \leqslant K/|z|^2$ при $a < \operatorname{Re} p < b$, где k — постоянная. Тогда

$$f(t) = Q(D_t) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(p)}{Q(p)} e^{pt} dp \tag{120}$$

в смысле равенства в $\mathcal{D}'$.

3) Пусть $L[f] = F(p)$ при $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$, числа a, b и σ определены, как в 2). Тогда

$$f(t) = \lim_{r_1, r_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - ir_1}^{\sigma + ir_2} F(p) e^{pt} dp \tag{121}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{L}'_{a, b}$.

4) Пусть $L[f]=F(p)$ при $\sigma_1<\operatorname{Re}p<\sigma_2$ и $\operatorname{supp} f\subset$ $\subset[B, \infty)$, где $B>-\infty$. Тогда

$$f(t)=\lim_{\sigma\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\sigma F(k\sigma)e^{k\sigma t}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$.

Единственность. Пусть $L[f]=F(p)$ при $p\in\Omega_f$ и $L[g]=G(p)$ при $p\in\Omega_g$. Если пересечение $\Omega_f\cap\Omega_g$ не пусто и $F(p)=G(p)$ при $p\in\Omega_f\cap\Omega_g$, то $f=g$ в смысле равенства в $\mathscr{L}'(w, z)$, где $(w, z)=\Omega_f\cap\Omega_g\cap R^1$.

Представление посредством преобразования Лапласа. Для того чтобы функция $F(p)$ была преобразованием Лапласа обобщенной функции f и чтобы соответствующая полоса сходимости совпадала с $\Omega_f=$ $=\{p: \sigma_1<\operatorname{Re}p<\sigma_2\}$, необходимо и достаточно, чтобы $F(p)$ была аналитична в Ω_f и для каждой замкнутой подобласти $\{p: a\leqslant\operatorname{Re}p\leqslant b\}$ полосы Ω_f, $\sigma_1<a<b<\sigma_2$, существовал такой полином P, что $|F(p)|\leqslant P(|p|)$ при $a\leqslant p\leqslant b$. Полином P в общем случае может зависеть от a и b.

Преобразование Лапласа свертки. Свертка $f*g$ двух обобщенных функций $f, g\in\mathscr{L}'_{a,b}$ $(a\leqslant b)$ определяется равенством

$$\langle f*g, \varphi\rangle\stackrel{\Delta}{=}\langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle,$$
$$\varphi\in\mathscr{L}_{a,b}.$$

Она также принадлежит $\mathscr{L}'_{a,b}$.

Пусть $L[f]=F(p)$ при $p\in\Omega_f$ и $L[g]=G(p)$ при $p\in\Omega_g$. Если множество $\Omega_f\cap\Omega_g$ не пусто, то $f*g$ существует в $\mathscr{L}'(w, z)$, где $(w, z)=\Omega_f\cap\Omega_g\cap R^1$. При этом

$$L[f*g]=F[p]G[p],\quad p\in\Omega_f\cap\Omega_g. \tag{122}$$

Относительно дальнейших свойств свертки см. книгу Земаняна [15].

5. Еще одно определение двустороннего преобразования Лапласа обобщенных функций, эквивалентное определению Л. Шварца, было дано Прайсом [1].

В этом случае *пространство основных функций* $\mathscr{B}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{-\infty<t<\infty} |\varphi^{(k)}(t)| < \infty \tag{123}$$

при всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathcal{B}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрим подпространство $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\lim_{|t|\to\infty} \varphi^{(k)}(t) = 0.$$

Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{B}_0$, через $\mathcal{B}_0'$.

Введем на $\mathcal{D}'$ операторы U_a и T^{-p} равенствами

$$\langle U_a f(t),\ \varphi(t)\rangle \overset{\Delta}{=} \left\langle f(t),\ \varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right\rangle, \tag{124}$$

$$\langle T^{-p} f(t),\ \varphi(t)\rangle \overset{\Delta}{=} \langle e^{-pt} f(t),\ \varphi(t)\rangle, \tag{125}$$

где $f(t) \in \mathcal{D}'$, $\varphi(t) \in \mathcal{D}$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{D}'$ и существует такое p, что $T^{-p} f \in \mathcal{B}_0'$. *Преобразование Лапласа* обобщенной функции $f(t)$ определяется соотношением

$$L[f](p) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{\varphi(0)} \lim_{j\to\infty} \langle U_j T^{-p} f,\ \varphi\rangle, \tag{126}$$

где $\varphi(t) \in \mathcal{D}$.

6. Асимптотика (Лавуан [4]). Пусть обобщенная функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = h(t)\,\theta(t) + \\ + \sum_{k=0}^{K} (b_k + a_k \ln t)\, t_+^{-k} + \sum_{j=0}^{J} (\beta_j + \alpha_j \ln t)\, t_+^{-\nu_j}, \tag{127}$$

где K, $J < \infty$, $\nu > -1$ и $h(t)$ — такая обычная функция, что произведение $t^{\gamma} h(t)$ ограничено в окрестности точки $t=0$ при $\gamma > 1$.

Будем называть асимптотикой обобщенной функции при $t \to t_0$ асимптотику обычной функции, с которой данная обобщенная функция совпадает в окрестности точки t_0. Тогда:

1) если $f(t) \sim A t^{\nu}$ при $t \to +0$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, то

$$[Lf](p) \sim A\Gamma(\nu+1)\, p^{-\nu-1}, \qquad \operatorname{Re} p \to +\infty; \tag{128}$$

2) если $f(t) \sim At^{-n}$ при $t \to +0$, $n=1, 2, 3, \ldots$, то

$$[Lf](p) \sim A \frac{(-1)^n}{(n-1)!} p^{n-1} \ln p, \qquad \operatorname{Re} p \to +\infty; \qquad (129)$$

3) если $f(t) \sim At^{\nu} \ln t$ при $t \to +0$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, то

$$[Lf](p) \sim -A\Gamma(\nu+1) p^{-\nu-1} \ln p, \qquad \operatorname{Re} p \to +\infty; \qquad (130)$$

4) если $f(t) \sim At^{-n} \ln t$ при $t \to +0$, $n=1, 2, 3, \ldots$, то

$$[Lf](p) \sim A \frac{(-1)^{n-1}}{2(n-1)!} p^{n-1} (\ln p)^2, \qquad \operatorname{Re} p \to +\infty. \qquad (131)$$

Пусть $\operatorname{Re} p > 0$ и обобщенная функция $f(t)$ удовлетворяет тем же условиям; тогда:

5) если $f(t) \sim At^{\nu}$ при $t \to +\infty$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, то

$$[Lf](p) \sim A\Gamma(\nu+1) p^{-\nu-1}, \qquad p \to 0; \qquad (132)$$

6) если $f(t) \sim At^{-n} + O(t^{-n-\beta})$ при $t \to \infty$, $n=1, 2, 3, \ldots$, $\beta > 0$, то

$$[Lf](p) \sim A \frac{(-1)^n}{(n-1)!} p^{n-1} \ln |p|, \qquad p \to 0; \qquad (133)$$

7) если $f(t) \sim At^{\nu} \ln t$ при $t \to \infty$, $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, то

$$[Lf](p) \sim A\Gamma(\nu+1) p^{-\nu-1} \ln |p|, \qquad p \to 0; \qquad (134)$$

8) если $f(t) \sim At^{-n} \ln t + O(t^{-n-\beta})$ при $t \to \infty$, $n=1, 2, 3, \ldots$, $\beta > 0$, то

$$[Lf](p) \sim A \frac{(-1)^n}{2(n-1)!} p^{n-1} (\ln |p|)^2, \qquad p \to 0. \qquad (135)$$

§ 5. Многомерное преобразование Лапласа

1. Пусть $t=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in C^n$, $zt = z_1 t_1 + z_2 t_2 + \cdots + z_n t_n$, $z^t = z_1^{t_1} z_2^{t_2} \cdots z_n^{t_n}$.

Многомерное (*n-мерное*) *преобразование Лапласа* обычной функции $f(t)$ определяется формулой

$$F(x)=\int_a^\infty\int_a^\infty\ldots\int_a^\infty f(t)\,e^{-xt}d^nt, \tag{136}$$

где a равняется 0 или $-\infty$.

Определение преобразования Лапласа (Фурье—Лапласа) обобщенных функций из $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ было дано Л. Шварцем [2]. Свойства этого преобразования в различных пространствах обобщенных функций, определенных на $\boldsymbol{R}^n$ или в некоторых областях в $\boldsymbol{R}^n$, изучались в работах Бремермана [1], Владимирова [1—13], Гарнира [1], Гарнира и Мунстера [1], Жаринова [1, 2], Земаняна [3, 15] Исихары [1], Леонарда [1], Лионса [1], Мунстера [1], Неймарка [1], Петерсена [1], Соловьева [1].

2. Для обобщенных функций $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$ теория преобразования Лапласа была развита Владимировым [1—13]. Ниже излагаются элементы этой теории.

Пусть Γ—замкнутый выпуклый острый конус в $\boldsymbol{R}^n$ с вершиной в начале координат (конусом называется такое множество Γ, что из включения $x\in\Gamma$ следует $\lambda x\in\Gamma$ при любом $\lambda>0$). Конус $\Gamma^*=\{t\colon tx\geqslant 0,\ \forall x\in\Gamma\}$ называется сопряженным к конусу Γ. Пусть C—внутренняя часть конуса Γ^* и

$$T^C=\boldsymbol{R}^n+iC=\{z=x+iy\colon\ x\in\boldsymbol{R}^n,\ y\in C\}$$

—трубчатая область в C^n с основанием C.

Множество A ограничено со стороны конуса Γ, если $A\subset\Gamma+K$, где K—некоторый компакт. Совокупность обобщенных функций из $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$, носители которых ограничены со стороны конуса Γ, обозначим через $\mathscr{S}'(\Gamma^+)$.

Преобразование Лапласа (или *Фурье—Лапласа*) обобщенной функции $f\in\mathscr{S}'(\Gamma^+)$ определяется формулой

$$\boldsymbol{L}[f]=\boldsymbol{F}[f(t)\,e^{-yt}](x),\qquad y\in C, \tag{137}$$

где $\boldsymbol{F}$—оператор преобразования Фурье.

Преобразование операций (k—неотрицательное целое число из $\boldsymbol{R}^n$, $f(t)\in\mathscr{S}'(\Gamma^+)$):

1) $\boldsymbol{L}[D_t^k f(t)]=(-iz)^k\boldsymbol{L}[f](z),\qquad z\in T^C;$ (138)

2) $\boldsymbol{L}[(it)^k f(t)]=D_z^k\boldsymbol{L}[f](z),\qquad z\in T^C;$ (139)

3) $$L[f(t-t_0)]=e^{izt}L[f](z),\qquad z\in T^C;\tag{140}$$

4) если $\operatorname{Im} a\in C$, то
$$L[f(t)e^{iat}]=L[f](z+a),\qquad z\in T^C;\tag{141}$$

5) если A — матрица линейного преобразования аргумента, то
$$L[f(At)]=\frac{1}{|\det A|}L[f(t)]([A^{-1}]^{\mathrm{Tr}}z),\quad z\in T^{A^{\mathrm{Tr}}C};\tag{142}$$

6) если $f_1(t)\in\mathscr{S}'(\Gamma_1^+)$ и $f_2(\tau)\in\mathscr{S}'(\Gamma_2^+)$, то
$$L[f_1\times f_2](z,\ \zeta)=L[f_1](z)L[f_2](\zeta),\qquad (z,\ \zeta)\in T^{C_1\times C_2}\tag{143}$$
(преобразование Лапласа прямого произведения);

7) если $f_1,\ f_2\in\mathscr{S}'(\Gamma^+)$, то $f_1*f_2\in\mathscr{S}'(\Gamma^+)$ и
$$L[f_1*f_2]=L[f_1]L[f_2].\tag{144}$$

3. Излагаемые ниже результаты принадлежат Земаняну [3, 15].

Пространство основных функций $\mathscr{L}_{a,b}$. Пусть $t=(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$, $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, $b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ — точки в R^n,
$$\varkappa_{a_\nu,\,b_\nu}(t_\nu)=\begin{cases}\exp a_\nu t_\nu, & 0\leqslant t_\nu\leqslant\infty,\\ \exp b_\nu t_\nu, & -\infty<t_\nu<\infty,\end{cases}$$
где $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и
$$\varkappa_{a,\,b}(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\varkappa_{a_\nu,\,b_\nu}(t_\nu).$$

Пространство $\mathscr{L}_{a,b}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на R^n, удовлетворяющих при любом неотрицательном целом $k\in R^n$ неравенствам
$$\gamma_k(\varphi)\overset{\Delta}{=}\sup_{t\in R^n}|\varkappa_{a,\,b}(t)D^k\varphi(t)|<\infty.\tag{145}$$

Топология в $\mathscr{L}_{a,b}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{L}_{a,b}$, обозначим через $\mathscr{L}'_{a,b}$. Справедлива структурная формула (116), где следует положить $t,\ N\in R^n$.

Обобщенная функция $f\in\mathscr{D}'(R^n)$ допускает преобразование Лапласа, если существует по крайней мере одна пара точек $a,\ b\in R^n$ $(a<b)$, такая, что $f\in\mathscr{L}'_{a,b}$. Для любой обобщенной функции, допускающей преобразование

Лапласа, существует единственное множество Ω_f, определяемое следующим образом: $p \in C^n$ принадлежит Ω_f тогда и только тогда, когда существуют две точки a, $b \in R^n$ $(a < b)$, такие, что $a < \operatorname{Re} p < b$ и $f \in \mathscr{L}'_{a,b}$.

Множество Ω_f называется *трубой сходимости* для преобразования Лапласа. (Вообще трубой в C^n называется множество точек $\{p\colon \operatorname{Im} p \in R^n,\ \operatorname{Re} p \in B\}$, где B — множество в R^n; в теории преобразования Фурье — Лапласа труба определяется несколько иначе; см. п. 2.)

Преобразование Лапласа обобщенной функции $f(t) \in \mathscr{L}'_{a,b}$ определяется формулой

$$L[f] \overset{\Delta}{=} \langle f(t),\ e^{-pt} \rangle, \quad p \in \Omega_f. \tag{146}$$

Правая часть имеет смысл, так как $e^{-pt} \in \mathscr{L}_{a,b}$ при $p \in \Omega_f$.

Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая функция, причем $f(t)e^{-pt} \in L_1(R^n)$ для всех $\operatorname{Re} p$ из некоторого открытого подмножества $\Omega \subset R^n$. Тогда $f(t)$ порождает *регулярную* обобщенную функцию в $\mathscr{L}'_{a,b}$, преобразование Лапласа которой совпадает с обычным интегралом при $\operatorname{Re} p \in \Omega$.

Формулы преобразования операций имеют тот же вид, что и в одномерном случае (см. п. 3 § 4), если считать, что через t^k обозначено произведение $t_1^{k_1} t_2^{k_1} \ldots t_n^{k_n}$, а через p^k — произведение $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$; при этом указанные там условия заменяются условиями $p \in \Omega_f$, а в случае (113) — условием $p + \alpha \in \Omega_f$.

Свойства аналитичности, единственности, формулу обращения и другие свойства можно найти в книге Земаняна [15].

§ 6. Преобразование Меллина

1. *Преобразование Меллина* обычной функции $f(t)$, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, определяется формулой

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{z-1}\, dt. \tag{147}$$

Это преобразование с помощью замены $t = e^{-\tau}$ можно связать с двусторонним преобразованием Лапласа.

2. Фын [1] распространил это преобразование на пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'_+$ и исследовал его свойства, рассмотрев, в частности, преобразование Меллина свертки меллиновского типа. Краткий обзор результатов Фына имеется у Перри [1].

Рассмотрим в качестве пространства основных функций пространство $\mathcal{D}_+$. Преобразование Меллина

$$[M\varphi](z) \overset{\Delta}{=} \int_0^\infty \varphi(t)\, t^{z-1}\, dt, \qquad \varphi(t) \in \mathcal{D}_+,$$

задает изоморфизм $\mathcal{D}_+$ на другое пространство основных функций, которое обозначим через $\mathcal{Z}_+$.

Пространство $\mathcal{Z}_+$ состоит из всех целых функций $\psi(z) = \psi(x+iy)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|\psi(x+iy)| \leqslant Ae^{B|y|}$, где A и B — постоянные, зависящие от $\psi(z)$;

б) $\psi(x+iy) \in \mathcal{S}$ по y при любом фиксированном x. Последовательность $\{\psi_\nu\}$ в $\mathcal{Z}_+$ называется сходящейся, если сходится последовательность прообразов функций ψ_ν в пространстве $\mathcal{D}_+$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{Z}_+$, через $\mathcal{Z}'_+$.

Преобразование Меллина обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{D}'_+$ определяется равенством

$$\langle Mf, \psi(z)\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f(t), M^{-1}\psi\rangle, \qquad \psi \in \mathcal{Z}_+, \tag{148}$$

где оператор M^{-1} имеет вид

$$[M^{-1}\psi(z)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \psi(z)\, z^t\, dz; \tag{149}$$

σ — любое действительное число. Преобразование Меллина осуществляет изоморфизм $\mathcal{D}'_+$ на $\mathcal{Z}'_+$.

Обратное преобразование Меллина $M^{-1}g$ обобщенной функции g определено в пространстве $\mathcal{Z}'_+$ равенством

$$\langle M^{-1}g, \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle g, M\varphi\rangle, \qquad g \in \mathcal{Z}'_+, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+. \tag{150}$$

Оно изоморфно отображает $\mathcal{Z}'_+$ на $\mathcal{D}'_+$.

3. Аналогичное определение преобразования Меллина в том же пространстве обобщенных функций дали Ноаги и Матеи [1], исследовавшие также свойства относительно некоторых других преобразований и дифференцирования. А. И. Комеч [1] построил аналогичную теорию,

исходя из преобразования Меллина вида

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty t^{iz}\varphi(t)\,dt \tag{151}$$

в пространстве основных функций $\mathcal{S}_+$. При этом *преобразование Меллина* обобщенной функции $f\in\mathcal{S}'_+$ определяется равенством

$$\langle Mf,\ [M\varphi](-z-i)\rangle \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi}\langle f(t),\ \varphi(t)\rangle,\qquad \varphi\in S_+. \tag{152}$$

В этой же работе исследована структура пространств, являющихся образами $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}'_+$.

4. Другой подход к определению преобразования Меллина обобщенных функций принадлежит Земаняну [3, 15], рассмотревшему также многомерный случай.

Пространства основных функций $\mathcal{M}_{a,b}$ *и* $\mathcal{M}(u,\ v)$. Пусть a и b — фиксированные числа из R^1 и

$$\zeta_{a,b}(t)\overset{\Delta}{=}\begin{cases} t^{-a}, & 0<t\leqslant 1,\\ t^{-b}, & 1<t<\infty.\end{cases}$$

Пространство $\mathcal{M}_{a,b}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0,\ \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\xi_k(\varphi)\overset{\Delta}{=}\sup_{0<t<\infty}|\zeta_{a,b}(t)\,t^{k+1}D_t^k\varphi(t)|<\infty \tag{153}$$

при любом $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Топология в $\mathcal{M}_{a,b}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$. Пространство, сопряженное $\mathcal{M}_{a,b}$, обозначим через $\mathcal{M}'_{a,b}$.

Пусть u — действительное число или $-\infty$, v — действительное число или $+\infty$. Выберем две монотонные последовательности действительных чисел $\{a_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ и $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, такие, что $a_\nu\to u+0$ и $b_\nu\to v-0$. *Пространство основных функций* $\mathcal{M}(u,\ v)$ определяется как счетное объединение пространств $\mathcal{M}_{a_\nu,b_\nu}$, т. е. $\mathcal{M}(u,\ v)=\bigcup_{\nu=1}^\infty \mathcal{M}_{a_\nu,b_\nu}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{M}(u,\ v)$, обозначим через $\mathcal{M}'(u,\ v)$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+\to\mathcal{M}(u,\ v)$ и $\mathcal{M}'(u,\ v)\to\mathcal{D}'_+$.

Если $f(t)$ — локально интегрируемая на $(0,\ \infty)$ функция и $f(t)[\zeta_{a,b}(t)]^{-1}\in L(0,\ \infty)$, то $f(t)$ порождает в $\mathcal{M}'_{a,b}$

регулярный элемент f по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^\infty f(t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathscr{M}_{a,b}. \tag{154}$$

Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'_+$ допускает преобразование Меллина, если существует хотя бы одна такая пара чисел a, b $(a < b)$, что $f \in \mathscr{M}'_{a,b}$. Для любой обобщенной функции f, допускающей преобразование Меллина, существует единственный непустой интервал (σ_1, σ_2), такой, что $f \in \mathscr{M}'(\sigma_1, \sigma_2)$ и $f \notin \mathscr{M}'(u, v)$, если $u < \sigma_1$ или $v > \sigma_2$. Областью определения обобщенной функции f, допускающей преобразование Меллина, называется область $\Omega_f \subset C^1$,

$$\Omega_f \stackrel{\Delta}{=} \{z: \quad \sigma_1 < \operatorname{Re} z < \sigma_2\},$$

где σ_1 и σ_2 определены выше; числа σ_1 и σ_2 называются *абсциссами сходимости*. Если $z \in \Omega_f$, то $t^{z-1} \in \mathscr{M}(\sigma_1, \sigma_2)$ по t.

Преобразование Меллина обобщенной функции $f \in \mathscr{M}'(\sigma_1, \sigma_2)$ определяется равенством

$$F(z) \stackrel{\Delta}{=} [Mf](z) \stackrel{\Delta}{=} \langle f(t), t^{z-1}\rangle, \qquad z \in \Omega_f \tag{155}$$

Область Ω_f также называется ***областью сходимости*** преобразования Меллина.

Аналитичность. Если $F(z) = Mf$ при $z \in \Omega_f$, то $F(z)$ — аналитическая функция в Ω_f и

$$D_z^k F(z) = \langle f(t), D_z^k t^{z-1}\rangle = \langle f(t), (\ln t)^k t^{z-1}\rangle, \quad z \in \Omega_f. \tag{156}$$

Представление посредством преобразования Меллина. Для того чтобы функция $F(z)$ была преобразованием Меллина обобщенной функции и чтобы соответствующая область сходимости имела вид $\Omega_f = \{z: \sigma_1 < \operatorname{Re} z < \sigma_2\}$, необходимо и достаточно, чтобы $F(z)$ была аналитична в Ω_f и для любой замкнутой подобласти $\{z: a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b\}$, $\sigma_1 < a < b < \sigma_2$, существовал бы такой полином P, что $|F(z)| \leqslant P(|z|)$ при $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$. Полином P, вообще говоря, зависит от выбора a и b.

Формулы обращения. 1) Пусть $F(z) = [Mf](z)$ при $z \in \Omega_f$, r — действительная переменная и σ — любое фиксированное действительное число из интервала (σ_1, σ_2).

Тогда

$$f(t)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir}F(z)\,t^{-z}dz \tag{157}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$.

2) Пусть $F(z)=Mf$ при $z\in\Omega_f$, a, σ, b — фиксированные действительные числа, удовлетворяющие неравенству $\sigma_1<a<\sigma<b<\sigma_2$, $Q(z)$ — полином, не имеющий нулей в области $a\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant b$ и удовлетворяющий неравенству

$$\left|\frac{F(z)}{Q(z)}\right|\leqslant\frac{K}{|z|^2},\qquad a<\operatorname{Re} z<b,$$

K — постоянная. Тогда

$$f(t)=Q(-tD_t)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(z)}{Q(z)}t^{-z}dz \tag{158}$$

в смысле равенства в $\mathscr{M}'(a, b)$; интеграл сходится в обычном смысле.

Единственность. Пусть $Mf=F(z)$ при $z\in\Omega_f$ и $Mg=G(z)$ при $z\in\Omega_g$. Если множество $\Omega_f\cap\Omega_g$ не пусто и $F(z)=G(z)$ при $z\in\Omega_f\cap\Omega_g$, то $f=g$ в смысле равенства в $\mathscr{M}'(u, v)$, где $(u, v)=\Omega_f\cap\Omega_g\cap \boldsymbol{R}^1$.

Преобразование операций. Пусть $F(z)=M[f(t)]$ при $z\in\Omega_f$, $k=1, 2, 3, \ldots$, r — фиксированное действительное число.

1) $$M[(\ln t)^k f(t)]=D_z^k F(z),\qquad z\in\Omega_f, \tag{159}$$

2) $$M[t^\alpha f(t)]=F(z+\alpha),\qquad z+\alpha\in\Omega_f, \tag{160}$$

3) $$M[D_t^k f(t)]=(-1)^k(z-1)(z-2)\ldots(z-k)F(z-k),\qquad z-k\in\Omega_f, \tag{161}$$

4) $$M[D_t^k t^k f(t)]=(-1)^k(z-1)(z-2)\ldots(z-k)F(z),\qquad z\in\Omega_f, \tag{162}$$

5) $$M[(D_t t)^k f(t)]=(-1)^k(z-1)^k F(z),\qquad z\in\Omega_f, \tag{163}$$

6) $$M[f(rt)]=r^{-z}F(z),\qquad r>0,\quad z\in\Omega_f, \tag{164}$$

7) $$M[f(t^{-1})]=F(-z),\qquad -z\in\Omega_f, \tag{165}$$

8) $$M[f(t^r)]=|r|^{-1}F(r^{-1}z),\quad r\neq 0,\quad r^{-1}z\in\Omega_f. \tag{166}$$

Свертка меллиновского типа и ее преобразование Меллина. Пусть a, b ($a\leqslant b$) — действительные числа. Сверткой меллиновского типа двух обобщенных функций f, $g\in\mathcal{M}'_{a,b}$ называется выражение $f\vee g$, определенное формулой

$$\langle f\vee g, \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t\tau)\rangle\rangle, \qquad \varphi\in\mathcal{M}_{a,b}. \tag{167}$$

Выражение $f\vee g$ является элементом $\mathcal{M}'_{a,b}$.

Если $Mf=F(z)$ при $z\in\Omega_f$, $Mg=G(z)$ при $z\in\Omega_g$, и множество $\Omega_f\cap\Omega_g$ не пусто, то $f\vee g\in\mathcal{M}'(u, v)$, где $(u, v)=\Omega_f\cap\Omega_g\cap R^1$. При этом

$$M[f\vee g]=F(z)\,G(z), \qquad z\in\Omega_f\cap\Omega_g. \tag{168}$$

Отметим, что в случае, когда f и g — локально интегрируемые на $(0, \infty)$ функции и $f(t)[\xi_{a,b}(t)]^{-1}$, $g(t)[\zeta_{a,b}(t)]^{-1}\in L_1(0, \infty)$, то $f\vee g$ — регулярный элемент $\mathcal{M}'_{a,b}$ и

$$f\vee g=\int\limits_0^\infty f(\tau)\,g\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{1}{\tau}\,d\tau. \tag{169}$$

Связь с двусторонним преобразованием Лапласа. Отображение $f(t)\to f(e^{-t})$ является изоморфизмом $\mathcal{M}_{a,b}$ на $\mathcal{L}_{a,b}$ и $\mathcal{M}'(u, v)$ на $\mathcal{L}'(u, v)$. Обобщенная функция f допускает преобразование Меллина тогда и только тогда, когда $f(e^{-t})$ допускает двустороннее преобразование Лапласа. При этом области определения $M[f(t)]$ и $L[f(e^{-t})]$ совпадают и $M[f(t)]=L[f(e^{-t})]$ при всех $z\in\Omega_f$.

Примеры.

а) $M[\delta^{(k)}(t-a)]=(-1)^k(z-1)(z-2)\ldots(z-k)\,a^{z-1}$, $\Omega_f=(-\infty, \infty)$, $a>0$, $k=0, 1, 2, \ldots$;

б) $M[t^\alpha\theta(t-1)]=-(z+\alpha)^{-1}$, $\Omega_f=(-\infty, -\alpha)$;

в) $M[t^\alpha(1-t)]=(z+\alpha)^{-1}$, $\Omega_f=(-\alpha, \infty)$.

5. В книге Коломбо и Лавуана [1], а также Лафлина [1] можно найти преобразования Меллина некоторых других обобщенных функций. Некоторые приложения преобразования Меллина обобщенных функций приводятся в книге Земаняна [15] и в работе Сривастава и Парихара [1].

ГЛАВА 4
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЯ

§ 1. Введение

Интегральные преобразования вида

$$F(x) = \int_0^\infty K(xt) f(t)\, dt,$$

где $K(z)$ — функции Бесселя или связанные с ними функции, называются *преобразованиями Бесселя*.

К этому виду принадлежат преобразования Ганкеля, K (преобразование Мейера), I, Харди, Конторовича — Лебедева и ряд других преобразований.

§ 2. Преобразование Ганкеля

1. *Преобразованием Ганкеля* называется выражение

$$F(x) = \int_0^\infty f(t) \sqrt{xt}\, J_\mu(xt)\, dt, \tag{170}$$

где $0 < x < \infty$, μ — действительное число, $J_\mu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка μ.

Известно несколько подходов к определению этого преобразования для обобщенных функций.

2. Начнем с теории, принадлежащей Земаняну [5, 8, 15] и основанной на введении преобразования Ганкеля для обобщенных функций как операции, сопряженной соответствующему преобразованию в пространстве основных функций.

Пространство основных функций $\mathscr{H}_\mu$. Пусть μ — любое действительное число. Пространство $\mathscr{H}_\mu$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} \left| t^m (t^{-1}D)^k [t^{-\mu-\frac{1}{2}}\varphi(t)] \right| < \infty \quad (171)$$

при всех $m, k = 0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathcal{H}_\mu$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma^{\mu}_{m,k}\}^{\infty}_{m,k=0}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{H}_\mu$, обозначим через $\mathcal{H}'_\mu$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{E}_+$ и $\mathcal{E}'_+ \to \mathcal{H}'_\mu \to \mathcal{D}'_+$. Если $f \in \mathcal{H}'_\mu$ и $\operatorname{supp} f \subset [T, \infty)$, где $T > 0$, то $f \in \mathcal{S}'_+$.

Пусть $f(t)$—локально интегрируемая на $0 < t < \infty$ функция, причем $f(t)$ имеет медленный рост при $t \to +\infty$ и $t^{\mu+\frac{1}{2}} f(t) \in L_1(0, 1)$. Тогда f порождает в $\mathcal{H}'_\mu$ *регулярную* обобщенную функцию по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(t)\varphi(t)\,dt.$$

Если $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, то обычное преобразование Ганкеля (170) определяет автоморфизм пространства $\mathcal{H}_\mu$.

Преобразование Ганкеля обобщенной функции $f \in \mathcal{H}'_\mu$ определяется формулой

$$\langle H_\mu f, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, H_\mu \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{H}_\mu, \quad \mu \geqslant -\frac{1}{2}. \quad (172)$$

Оно задает автоморфизм пространства $\mathcal{H}'_\mu$; при этом $H_\mu^{-1} = H_\mu$.

Преобразование операций. Рассмотрим два оператора:

$$M_\mu f(t) = t^{-\mu-1/2} D t^{\mu+1/2} f(t), \quad (173)$$

$$N_\mu f(t) = t^{\mu+1/2} D t^{-\mu-1/2} f(t). \quad (174)$$

Пусть $\mu \geqslant -1/2$. Тогда если $f \in \mathcal{H}'_\mu$, то

$$H_{\mu+1}[-tf(t)] = N_\mu [H_\mu f](x), \quad (175)$$

$$H_{\mu+1}[N_\mu f(t)] = -x [H_\mu f](x), \quad (176)$$

$$H_\mu [-t^2 f(t)] = M_\mu N_\mu [H_\mu f](x), \quad (177)$$

$$H_\mu [M_\mu N_\mu f(t)] = -x^2 [H_\mu f](x). \quad (178)$$

Если $f \in \mathcal{H}'_{\mu+1}$, то

$$H_\mu [tf(t)] = M_\mu [H_{\mu+1} f](x), \quad (179)$$

$$H_\mu [M_\mu f(t)] = x [H_\mu f](x). \quad (180)$$

Если $f \in \mathscr{E}'$, то преобразование Ганкеля $H_\mu f$ допускает представление вида

$$[H_\mu f](x) = \langle f(t), \sqrt{xt}\, J_\mu(xt)\rangle \tag{181}$$

при $\mu \geqslant -1/2$. Функция $H_\mu f = F(x)$ может быть продолжена до функции, аналитической во всей комплексной плоскости, исключая точки ветвления в начале координат и в бесконечности. Кроме того, она удовлетворяет неравенству

$$|F(x)| \leqslant \begin{cases} Kx^{\mu+1/2}, & 0 < x < 1, \\ Kx^p, & 1 < x < \infty, \end{cases} \tag{182}$$

где K и p — достаточно большие действительные числа.

Пример. $H^\mu \delta^{(k)}(t-a) = (-1)^k D_a^k[\sqrt{ax}\, J_\mu(ax)]$, где $a > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

3. Земанян [11] определил преобразование Ганкеля и для значений порядка μ, меньших $-1/2$. Пусть μ — любое фиксированное действительное число и k — положительное целое число, такое, что $\mu + k \geqslant -1/2$. Преобразование

$$H_{\mu,k}[\varphi(t)] \overset{\Delta}{=} (-1)^k x^{-k} H_{\mu+k}[N_{\mu+k-1} \ldots N_{\mu+1} N_\mu \varphi(t)] \tag{183}$$

является автоморфизмом на $\mathscr{H}_\mu$. Если $\mu \geqslant -1/2$, то $H_{\mu,k} = H_\mu$ в $\mathscr{H}_\mu$.

Преобразование Ганкеля $H'_\mu f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{H}'_\mu$ определяется формулой

$$\langle H'_\mu f, \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, H_{\mu,k}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{H}_\mu. \tag{184}$$

При $\mu \geqslant -1/2$ это определение совпадает с определением (172).

4. Другой способ введения преобразования Ганкеля при всех комплексных значениях μ, $\mu \neq -1, -2, -3, \ldots$, принадлежит Лионсу [2].

Преобразование Ганкеля может быть распространено на классы обобщенных функций, на рост которых при $t \to +\infty$ не наложено никаких ограничений. Одно из таких обобщений принадлежит Земаняну [6, 9, 15] и основано на определении вида (172).

Кох [1] обобщил преобразование Ганкеля обобщенных функций произвольного роста при $t \to +\infty$ на все действительные значения параметра μ. При этом он использовал метод Земаняна [6].

Ли [1] ввел пространства типа $\mathcal{H}_\mu$ (пространства, более узкие, чем $\mathcal{H}_\mu$, и связанные с $\mathcal{H}_\mu$ так, как пространства $\mathcal{S}_\alpha^\beta$ типа $\mathcal{S}$ связаны с $\mathcal{S}$; относительно последних см. Гельфанд и Шилов [3]) и исследовал в них преобразование Ганкеля при любых действительных значениях μ также в рамках вышеизложенной теории Земаняна.

5. При $\mu=0, 1, 2, \ldots$ теория преобразования Ганкеля обобщенных функций произвольного при $t\to+\infty$ роста была развита также Феньо [1]. В качестве пространств основных функций он рассматривал пространства $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{H}_n^F$. Последнее состоит из функций, которые являются преобразованиями Ганкеля функций из $\mathcal{D}_+$, причем оператор преобразования задается равенством

$$H_F[\varphi(t)](x)\overset{\Delta}{=}\int_0^\infty tJ_n(xt)\,\varphi(t)\,dt. \tag{185}$$

Функция $H_F[\varphi(t)](x)$—целая по x; справедливы формулы

$$H_F\left[\frac{H_F[\varphi](x)}{x}\right]\in\mathcal{D}_+,\quad \frac{H_F[\varphi]}{x}\in\mathcal{H}_n^F. \tag{186}$$

Преобразование Ганкеля $H_F[f]$ обобщенной функции $f\in\mathcal{H}_n^F$ определяется равенством

$$\langle H_F[f],\varphi\rangle\overset{\Delta}{=}\left\langle f, xH_F\left[\frac{\varphi(t)}{t}\right]\right\rangle,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_+. \tag{187}$$

Если $f(t)$—обычная функция, допускающая преобразование Ганкеля вида (185), то

$$\langle H_F[f],\varphi\rangle=\int_0^\infty H_F[f](x)\,\varphi(x)\,dx,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_+. \tag{188}$$

Преобразование Ганкеля $H_F[f]$ обобщенной функции $f\in\mathcal{D}'_+$ определяется равенством

$$\langle H_F[f],\psi\rangle\overset{\Delta}{=}\left\langle f, xH_F\left[\frac{\psi(x)}{x}\right]\right\rangle,\qquad \psi\in\mathcal{H}_n^F. \tag{189}$$

Формула обращения. Если $f\in\mathcal{D}'_+$, то

$$H_F[H_F[f]]=f. \tag{190}$$

6. Теперь мы изложим другой подход к определению преобразования Ганкеля обобщенных функций, принадлежащий Коху и Земаняну [1]. Иногда такое преобразование называют комплексным преобразованием Ганкеля.

Пространство основных функций $\mathcal{J}_{\mu, a}$. Пусть μ — произвольное действительное число, a — положительное действительное число. Пространство $\mathcal{J}_{\mu, a}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих при любом $k=0, 1, 2, \ldots$ неравенству

$$\tau_k^{\mu, a}(\varphi) = \sup_{0<t<\infty} |e^{-at} t^{-\mu-1/2} [S_\mu^k \varphi]| < \infty, \qquad (191)$$

где S_μ^k — оператор, определенный формулой

$$S_\mu^k \overset{\Delta}{=} (t^{-\mu-1/2} D t^{2\mu+1} D t^{-\mu-1/2})^k.$$

Топология в $\mathcal{J}_{\mu, a}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\tau_k^{\mu, a}\}_{k=0}^{\infty}$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{J}_{\mu, a}$, через $\mathcal{J}'_{\mu, a}$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{J}_{\mu, a} \to \mathcal{E}_+$ и $\mathcal{E}'_+ \to \mathcal{J}'_{\mu, a} \to \mathcal{H}'_\mu \to \mathcal{D}'_+$.

Структура сужения обобщенной функции $f \in \mathcal{J}'_{\mu, a}$ на $\mathcal{D}_+$. Пусть $f \in \mathcal{J}'_{\mu, a}$, где a — произвольное фиксированное действительное число и $-1/2 \leqslant \mu < \infty$. Тогда для любой $\varphi(t) \in \mathcal{D}_+$

$$\langle f, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{m} c_k D_t^k [e^{-at} t^{-\mu-1/2-k-1} P_k(t) F_k(t)], \varphi \right\rangle, \qquad (192)$$

где c_k — постоянные, $P_k(t)$ — полиномы порядка m и $F_k(t)$ — функции, непрерывные на $(0, \infty)$.

Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая на $0 < t < \infty$ функция, такая, что $f(t) e^{at} t^{\mu+1/2} \in L_1(0, \infty)$. Тогда $f(t)$ порождает *регулярный* элемент в $\mathcal{J}'_{\mu, a}$ по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(t) \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathcal{J}_{\mu, a}.$$

Если $z \in \{z\colon |\operatorname{Im} z| < a,\ z \notin (-\infty, 0]\}$, то при любом фиксированном z и $m=0, 1, 2, \ldots$

$$D_z^m \sqrt{zm}\, J_\mu(zt) \in \mathcal{J}_{\mu, a}.$$

Пусть $\mu \geqslant -1/2$. Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'_+$ допускает комплексное преобразование Ганкеля, если найдется такое положительное число a, что $f \in \mathcal{J}'_{\mu, a}$. Для любой обобщенной функции, допускающей комплексное преобразование Ганкеля, существует такое единственное действительное число σ_f (возможно, равное $+\infty$), что $f \in \mathcal{I}'_{\mu, b}$ при $b < \sigma_f$ и $f \notin \mathcal{I}'_{\mu, b}$ при $b > \sigma_f$. Назовем область

$$\Omega_f \overset{\Delta}{=} \{z: \ |\operatorname{Im} z| < \sigma_f, \ \ z \notin (-\infty, 0]\}$$

областью определения комплексного преобразования Ганкеля.

Комплексное преобразование Ганкеля обобщенной функции $f \in \mathcal{I}'_{\mu, a}$ определяется равенством

$$F(z) = [h_\mu f](z) \overset{\Delta}{=} \langle f(t), \sqrt{zt}\, J_\mu(zt)\rangle, \quad z \in \Omega_f. \tag{193}$$

Если существует преобразование Ганкеля в смысле определения (193), то оно существует и в смысле определения (172).

Аналитичность. Функция $F(z) = [h_\mu f](z)$ аналитична в Ω_f и для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$D_z^m F(z) = \langle f(t), D_z^m \sqrt{zt}\, J_\mu(zt)\rangle, \quad z \in \Omega_f. \tag{194}$$

Формула обращения. Пусть $f \in \mathcal{I}'_{\mu, a}$, $F(z) = [h_\mu f](z)$, $z \in \Omega_f$, и r — действительная переменная. Тогда

$$f(t) = \lim_{r \to \infty} \int_0^r [h_\mu f](x) \sqrt{xt}\, J_\mu(xt)\, dx \tag{195}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'_+$; здесь $0 < x < \infty$.

Единственность. Пусть $F(z) = h_\mu f$ при $z \in \Omega_f$ и $G(z) = h_\mu g$ при $z \in \Omega_g$. Если $F(z) = G(z)$ при $z \in \Omega_f \cap \Omega_g$, то $f = g$ в смысле равенства в $\mathcal{D}'_+$.

Оценка. Пусть $F(z) = h_\mu f$ при $z \in \Omega_f$. Тогда в любой полосе $\{z: \ |\operatorname{Im} z| \leqslant a < \sigma_f, \ z \notin (-\infty, 0]\}$ справедливо неравенство

$$|F(z)| \leqslant |z|^{\mu + 1/2} P_a(|z|), \tag{196}$$

где $P_a(|z|)$ — многочлен, зависящий от a.

При всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива формула

$$h_\mu [S^k_{\mu, t} f] = (-1)^k z^k h_\mu [f], \quad z \in \Omega_f. \tag{197}$$

Отметим, что преобразование Ганкеля обобщенных функций можно рассматривать как частный случай преобразования Ватсона; относительно этого подхода см. Хсу [1].

§ 3. Многомерное преобразование Ганкеля

Кох [2] предложил следующий вариант распространения преобразования Ганкеля на обобщенные функции n переменных. Пусть $t=(t_1, t_2, \ldots, t_n)\in R^n$ и $f(t)$ — обычная функция. Тогда можно определить формально *преобразование Ганкеля* функции $f(t)$ равенством

$$[h_\mu f](x) \overset{\Delta}{=} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(t) \left[\prod_{i=1}^n (x_i t_i)^{\frac{1}{2}} J_\mu (x_i t_i)\right] d^n t. \quad (198)$$

Пространство основных функций $\mathscr{H}_\mu(R^n)$. Пусть μ — любое фиксированное действительное число и $I=\{t: t\in R^n, 0<t_i<\infty, i=1, 2, \ldots, n\}$. Пространство $\mathscr{H}_\mu(R^n)$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на I, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma^\mu_{m,k}(\varphi) \overset{\Delta}{=}$$

$$\overset{\Delta}{=} \sup_{t\in I} \left| t_1^{m_1} \ldots t_n^{m_n} \prod_{i=1}^n (t_i^{-1} D_{t_i})^{k_i} (t_1 \ldots t_n)^{-\mu-1/2} \varphi(t)\right| < \infty \quad (199)$$

для любой пары неотрицательных целых чисел m и k из R^n. Топология в $\mathscr{H}_\mu(R^n)$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma^\mu_{m,k}\}^\infty_{|m|, |k|=0}$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathscr{H}_\mu(R^n)$, через $\mathscr{H}'_\mu(R^n)$. Справедливы вложения $\mathscr{D}(I)\to\mathscr{H}_\mu(R^n)$ и $\mathscr{H}'_\mu(R^n)\to\mathscr{D}'(I)$.

Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая на I функция, медленно растущая при $|t|\to\infty$ и такая, что $t_1\ldots t_n f(t)\in$ $\in L_1(0, 1)$ по каждой переменной. Тогда f порождает *регулярную* обобщенную функцию в $\mathscr{H}'_\mu(R^n)$ по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(t)\varphi(t)\, d^n t, \quad \varphi\in\mathscr{H}_\mu(R^n).$$

Преобразование Ганкеля обобщенной функции $f\in$ $\in\mathscr{H}'_\mu(R^n)$, $\mu\geqslant -\frac{1}{2}$, определяется равенством

$$\langle h'_\mu f, \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, h_\mu\varphi\rangle, \qquad \varphi\in\mathscr{H}_\mu(R^n). \quad (200)$$

Эта формула имеет смысл, так как при $\mu \geqslant -1/2$ преобразование H_μ осуществляет автоморфизм $\mathcal{H}_\mu(R^n)$. В этой же работе Коха получены формулы преобразования операций, аналогичные формулам (175)—(180) для одномерного случая.

§ 4. Преобразование Ганкеля—Шварца

1. А. Шварц [1] ввел преобразование Ганкеля обычных функций, обладающих некоторыми дополнительными свойствами, равенством

$$F(x) = H_\nu^{(S)} f = \int_0^\infty f(t)\,\hat{J}_\nu(xt)\,m'(t)\,dt, \tag{201}$$

где

$$\hat{J}_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\,t^{-\nu} J_\nu(t), \qquad t > 0, \tag{202}$$

$$m'(t) = \frac{t^{2\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}. \tag{203}$$

Это преобразование было перенесено на специальные классы обобщенных функций двумя различными способами.

2. Первый способ принадлежит Ли [2] и основан на введении преобразования Ганкеля—Шварца обобщенных функций как сопряженного оператора в сопряженном пространстве.

Пространства основных функций $\mathcal{T}_\nu$ *и* $\check{\mathcal{T}}_\nu$. Пусть ν — произвольное комплексное число. Пространство $\mathcal{T}_\nu$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих при любых $m, k = 0, 1, 2, \ldots$ неравенствам

$$\gamma_{m,k}(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} |t^m \Delta_{\nu,t}^k \varphi(t)| < \infty, \tag{204}$$

где

$$\Delta_{\nu,t} \overset{\Delta}{=} D_t^2 + (2\nu+1)\,t^{-1} D_t. \tag{205}$$

Пространство $\check{\mathcal{T}}_\nu$ состоит из таких же функций, удовлетворяющих неравенствам (204) лишь при $m=0$ и всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Топологии в $\mathcal{T}_\nu$ и $\check{\mathcal{T}}_\nu$ порождаются счетными семействами полунорм $\{\gamma_{m,k}\}_{m,k=0}^\infty$ и $\{\gamma_{0,k}\}_{k=0}^\infty$ соответственно. Отметим, что $\varphi(t) \in \mathcal{T}_\nu$ тогда и только тогда, когда $t^{\nu+1/2}\varphi(t)\in\mathcal{H}_\mu$ (см. п. 2 § 2). Преобразование Ганкеля в форме А. Шварца (201) задает при $\nu\geqslant-1/2$ линейное непрерывное отображение $\mathcal{T}_\nu$ в $\breve{\mathcal{T}}_\nu$.

Преобразование Ганкеля—Шварца $(H_\nu^{(S)})'f$ обобщенной функции $f\in\breve{\mathcal{T}}'_\nu$ определяется равенством

$$<(H_\nu^{(S)})'f,\ \varphi>\overset{\Delta}{=}<f,\ H_\nu^{(S)}\varphi>,\quad \varphi\in\mathcal{T}_\nu. \tag{206}$$

При $\nu\geqslant-1/2$ оператор $(H_\nu^{(S)})'$ отображает $\breve{\mathcal{T}}'_\nu$ на $\mathcal{T}'_\nu$ линейно и непрерывно.

Если $f\in\mathcal{E}'_+$, то преобразование Ганкеля—Шварца допускает представление вида

$$[(H_\nu^{(S)})'f](x)=<f(t),\ t^{2\nu+1}(xt)^{-\nu}J_\nu(xt)>. \tag{207}$$

Оценка. Если $f\in\mathcal{E}'_+$, то

$$|F(x)|\leqslant\begin{cases}C, & 0<x\leqslant1,\\ Cx^k, & 1<x<\infty\end{cases} \tag{208}$$

при некоторой постоянной C и достаточно большом положительном целом числе k.

3. Другой подход был развит Дьюбом и Пэнди [1].

Пространство основных функций $\mathcal{H}_{a,\delta}$. Пусть α, δ, ν — фиксированные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\nu>-1/2$, $0<\alpha\leqslant\nu+1/2$ и $\delta\geqslant0$. Пусть $\xi(t)$ — бесконечно дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция, причем $\xi(t)>0$ при всех $t>0$ и

$$\xi(t)=\begin{cases}t^{\nu+1/2+\delta}, & 0<t<1,\\ t^{\alpha-2}, & t\geqslant2.\end{cases}$$

Пространство $\mathcal{H}_{a,\delta}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0,\infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k(\varphi)\overset{\Delta}{=}\sup_{0<t<\infty}\left|\xi(t)\,\Delta^k_{\nu,t}\left[\frac{\varphi(t)}{m'(t)}\right]\right|<\infty. \tag{209}$$

при всех $k=0,1,2,\ldots$; оператор $\Delta_{\nu,t}$ определен формулой (205), а функция $m'(t)$ — равенством (203). Топология в $\mathcal{H}_{a,\delta}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{H}_{a,\delta}$, через $\mathcal{H}'_{a,\delta}$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+\to\mathcal{H}_{a,\delta}$ и $\mathcal{H}'_{a,\delta}\to\mathcal{D}'_+$. При любом фиксированном $x>0$ функция $m'(t)\,\hat{J}_\nu(xt)$ принадлежит $\mathcal{H}_{a,\delta}$.

Если функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, \infty)$ и $f(t)[\xi(t)]^{-1} m'(t) \in L_1(0, \infty)$, то f порождает *регулярную* обобщенную функцию в $\mathscr{H}_{a, \delta}$ по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(t)\varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathscr{H}_{a, \delta}.$$

Преобразование Ганкеля $h_\nu^{(S)} f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{H}_{a, \delta}$ определяется формулой

$$F(x) = [h_\nu^{(S)} f](x) \overset{\Delta}{=} \langle f(t),\ m'(t)\, \hat{J}_\nu(xt) \rangle, \quad x > 0. \tag{210}$$

Гладкость. Функция $F(x)$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$ для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ и

$$D_x^k F(x) = \langle f(t),\ m'(t)\, D_x^k \hat{J}_\nu(xt) \rangle, \qquad x > 0. \tag{211}$$

Асимптотика. Справедлива оценка

$$F(x) = O\left(x^{\min(2-\alpha,\ 0)}\right), \qquad x \to +0; \tag{212}$$

$$F(x) = O\left(x^{2p-\nu-\frac{1}{2}}\right), \qquad x \to +\infty, \tag{213}$$

где p — неотрицательное целое число.

Формула обращения. Пусть $F(x) = h_\nu^{(S)} f$ и r — действительная переменная. Тогда

$$f(t) = \lim_{r \to \infty} \int_0^r F(x)\, m'(x)\, \hat{J}_\nu(xt)\, dx \tag{214}$$

в смысле сходимости в D'_+.

§ 5. K-преобразование

Для обычных функций $f(t)$, удовлетворяющих некоторым ограничениям, *K-преобразование*, называемое также *преобразованием Мейера*, определяется равенством

$$F(z) \overset{\Delta}{=} \int_0^\infty f(t) \sqrt{zt}\, K_\mu(zt)\, dt, \tag{215}$$

где $K_\mu(z)$ — функция Макдональда (см., например, Диткин и Прудников [1]).

Земанян [8, 9, 15] распространил K-преобразование на специальный класс обобщенных функций, исследовал свойства преобразования и получил для него формулы обращения.

Пространство основных функций $\mathcal{K}_{\mu,a}$. Пусть a — действительное число, μ — нуль или комплексное число, удовлетворяющее неравенству $\operatorname{Re}\mu > 0$, $h(t)$ — непрерывная функция на $(0, \infty)$, заданная равенством

$$h(t) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} \ln t, & 0 < t < e^{-1}, \\ -1, & e^{-1} \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Введем дифференциальный оператор

$$\vec{S}_\mu = t^{-\mu-1/2} D t^{2\mu+1} D t^{-\mu-1/2}. \tag{216}$$

Пространство $\mathcal{K}_{\mu,a}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\rho^{\mu}_{a,k}(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} |e^{at} t^{\mu-1/2} S^k_\mu \varphi(t)| < \infty, \quad \operatorname{Re}\mu > 0,$$

$$\rho^{0}_{a,k}(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} \left| e^{at} \frac{S^k_0 \varphi(t)}{\sqrt{t}\, h(t)} \right| < \infty \tag{217}$$

при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathcal{K}_{\mu,a}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\rho^{\mu}_{a,k}\}_{k=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{K}_{\mu,a}$, обозначим через $\mathcal{K}'_{\mu,a}$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{K}_{\mu,a}$ и $\mathcal{K}'_{\mu,a} \to \mathcal{D}'_+$.

Пусть a — произвольное действительное число, $f(t)$ — такая локально интегрируемая на $(0, \infty)$ функция, что $t^{\mu+1/2} e^{-at} f(t) \in L_1(0, \infty)$ при $\operatorname{Re}\mu > 0$ и $\sqrt{t}\, h(t) e^{-at} f(t) \in L_1(0, \infty)$ при $\mu = 0$. Тогда $f(t)$ порождает в $\mathcal{K}'_{\mu,a}$ *регулярный* элемент

$$\langle f, \varphi \rangle \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty f(t)\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi(t) \in \mathcal{K}_{\mu,a}.$$

Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'_+$ допускает K-преобразование, если существует такое действительное число a, что $f \in \mathcal{K}'_{\mu,a}$. Для любой обобщенной функции, допускающей K-преобразование, существует такое действительное число σ_f (возможно, равное $-\infty$), что $f \in \mathcal{K}'_{\mu,a}$ при всех $a > \sigma_f$ и $f \notin \mathcal{K}_{\mu,a}$ при $a < \sigma_f$. При каждом фиксированном z, таком, что $z \neq 0$ и $\operatorname{Re} z > a$, функция $\sqrt{zt}\, K_\mu(zt)$ принадлежит $\mathcal{K}_{\mu, a}$.

K-преобразование порядка μ обобщенной функции $f \in \mathcal{K}'_{\mu, a}$ определяется равенством

$$F(z) = [K_\mu f](z) \stackrel{\Delta}{=} \langle f(t),\ \sqrt{zt}\, K_\mu(zt) \rangle, \qquad z \in \Omega_f, \tag{218}$$

где Ω_f—область следующего вида:

$$\Omega_f \stackrel{\Delta}{=} \{z\colon\ \operatorname{Re} z > \sigma_f,\ z \neq 0,\ -\pi < \arg z < \pi\}.$$

При $\sigma_f < 0$ область Ω_f представляет собой полуплоскость с разрезом $[\sigma_f, 0]$. Число σ_f называется *абсциссой сходимости*, а Ω_f—*областью сходимости* K-преобразования обобщенной функции $f \in \mathcal{K}_{\mu, a}$.

Если функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, \infty)$ и $f(t)\, e^{-at} [j(t)]^{-1} \in L(0, \infty)$, то f порождает в $\mathcal{K}'_{\mu, a}$ *регулярную* обобщенную функцию, K-преобразование которой имеет вид

$$F(z) = \int_0^\infty f(t) \sqrt{zt}\, K_\mu(zt)\, dt.$$

Аналитичность. Пусть $F(z) = [K_\mu f](z)$ при $z \in \Omega_f$. Тогда $F(z)$—функция, аналитическая в Ω_f, и

$$D_z^k F(z) = \langle f(t),\ D_z^n \sqrt{zt}\, K_\mu(zt) \rangle, \qquad z \in \Omega_f. \tag{219}$$

Преобразование операций.

1) Если $F(z) = [K_\mu f](z)$, $z \in \Omega_f$, то для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$K_\mu [S_\mu^k f] = z^{2k} F(z), \qquad z \in \Omega_f. \tag{220}$$

2) Если $f \in \mathcal{E}'_+$ и $z \notin (-\infty, 0]$, то

а) $$[K_\mu t f(t)](z) = -z^{\mu - 1/2} D_z z^{-\mu + 1/2} [K_{\mu-1} f](z) = -z^{-\mu - 1/2} D_z z^{\mu + 1/2} [K_{\mu-1} f](z); \tag{221}$$

б) $$[K_\mu t^{-1} f(t)](z) = -\frac{z}{2\mu} \{[K_{\mu-1} f](z) - [K_{\mu+1} f](z)\}; \tag{222}$$

в) $$[K_\mu t^{-1/2} D_t t^{1/2} f(t)](z) = -\frac{z}{2} \{[K_{\mu-1} f](z) + [K_{\mu+1} f](z)\}; \tag{223}$$

г) $$[K_\mu t^{\mu - 1/2} D_t t^{-\mu + 1/2} f(t)](z) = -z [K_{\mu-1} f](z); \tag{224}$$

д) $$[K_\mu t^{-\mu - 1/2} D_t t^{\mu + 1/2}](z) = -z [K_{\mu+1} f](z). \tag{225}$$

Представление посредством K-преобразований. Для того чтобы функция $F(z)$ была K-преобразованием порядка μ некоторой обобщенной функции, определенным формулой (218), необходимо и достаточно, чтобы существовала полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Re} z \geqslant b > 0\}$, в которой $F(z)$ аналитична и удовлетворяет неравенству

$$|F(z)| \leqslant P_b(|z|), \tag{226}$$

где $P_b(|z|)$ — полином относительно $|z|$.

Формулы обращения. 1) Пусть $f \in \mathscr{K}'_{\mu,a}$, $F(z) = K_\mu f$ при $z \in \Omega_f$ и σ — любое фиксированное действительное положительное число из Ω_f. Тогда

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(z)\sqrt{zt}\, I_\mu(zt)\, dz \tag{227}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$, $I_\mu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. (Для обобщенных функций из $\mathscr{I}'_{\mu,a}$, $-1/2 \leqslant \mu < 0$, введенных в п. 6 § 2, эта формула получена Кохом [1].)

2) Пусть $F(z) = K_\mu f$ при $z \in \Omega_f$ и $\operatorname{supp} f \subset [T, \infty)$, где $T > 0$. Тогда

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{2k}{t}\right)^{2k+1}\left[S_\mu^k F(z)\big|_{z=2k/t}\right] \tag{228}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

3) Пусть $F(z) = K_\mu f$ при $z \in \Omega_f$ и n — степень полинома в оценке (226) для полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant b > 0$. Пусть m — целое положительное число, причем

$$2m - \operatorname{Re}\mu - 3/2 > n.$$

Введем оператор $K_{\mu,c}^{-1}$ формулой

$$K_{\mu,c}^{-1} z^{-2m} F(z) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{2m} F(z)\sqrt{zt}\, I_\mu(zt)\, dz.$$

Если $c > b$, то

$$f = S_\mu^m\left[K_{\mu,c}^{-1} z^{-2m} F(z)\right] \tag{229}$$

в смысле равенства в $\mathscr{D}'_+$.

Единственность. Пусть $F(z) = K_\mu f$ при $z \in \Omega_f$, $G(z) = K_\mu g$ при $z \in \Omega_g$ и $F(z) = G(z)$ при $z \in \Omega_f \cap \Omega_g$. Тогда $f = g$ в смысле равенства в $\mathscr{D}'_+$.

Оценка (Кох и Земанян [1]). Если $0 \leqslant \operatorname{Re}\mu \leqslant 1/2$, $f \in \mathcal{K}'_{\mu, a}$ и $\operatorname{supp} f \in [t_f, \infty)$, $t_f > 0$, то

$$|F(x)| \leqslant Me^{-\tau x}, \tag{230}$$

где $x > a+1$, τ — любое действительное число, такое, что $0 < \tau < t_f$, и M — достаточно большая постоянная.

Если $f \in \mathcal{K}'_{\mu, 0}$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$, то

$$F(x) = o(x^{1-\eta}), \quad x \to +0, \tag{231}$$

где $\eta > -1$.

§ 6. *I*-преобразование

Для обычных функций *I-преобразование* формально определяется равенством

$$F(z) = \int f(t) \sqrt{zt}\, I_\mu(zt)\, dt, \tag{232}$$

где $I_\mu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка μ.

Кох и Земанян [1] распространили это преобразование на обобщенные функции следующим образом.

Пространство основных функций $\mathcal{I}_\mu(\sigma)$. Пусть $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, такая, что $a_\nu \to \sigma - 0$. Пространство $\mathcal{I}_\mu(\sigma)$ определяется как счетное объединение пространств $\mathcal{I}_{\mu, a}$ (см. п. 6 § 2), т. е. $\mathcal{I}_\mu(\sigma) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{I}_{\mu, a_\nu}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{I}_\mu(\sigma)$, обозначим через $\mathcal{I}'_\mu(\sigma)$.

I-преобразование обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{I}'_\mu(\sigma_f)$, $\mu \geqslant -1/2$, определяется формулой

$$[I_\mu f](z) \overset{\Delta}{=} \langle f(t), \sqrt{zt}\, I_\mu(zt) \rangle, \quad z \in \chi_f, \tag{233}$$

где

$$\chi_f \overset{\Delta}{=} \{z: \quad |\operatorname{Re} z| < \sigma_f, \quad z \notin (-\infty, 0]\},$$

а число σ_f определено в п. 6 § 2.

Правая часть формулы (233) имеет смысл, так как при любом $z \in \chi_f$, для которого $|\operatorname{Re} z| < a < \sigma_f$, имеем $\sqrt{zt}\, I_\mu(zt) \in \mathcal{I}_{\mu, a}$.

Аналитичность. Функция $F(z) = I_\mu f$ аналитична в области χ_p и

$$D_z^k F(z) = \langle f(t),\ D_z^k \sqrt{zt}\, I_\mu(zt)\rangle, \quad z \in \chi_f. \tag{234}$$

Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, \infty)$ и $f(t)\, e^{at} t^{\mu+1/2} \in L(0, \infty)$. Тогда f порождает *регулярную* обобщенную функцию

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^\infty f(t)\, \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathcal{I}_{\mu, a}.$$

Оценка. Если $f \in \mathcal{I}'_\mu(\sigma_f)$, $z \in \chi_f$ и $|\operatorname{Re} z| \leqslant a < \sigma_f$, то

$$|[I_\mu f](z)| \leqslant |z|^{-\mu-1/2} P_a(|z|), \tag{235}$$

где P_a — многочлен, зависящий от a.

Преобразование операции. Если $f \in \mathcal{I}'_\mu(\sigma_f)$, то

$$I_\mu[S_{\mu, t}^k f(t)] = z^{2k} [I_\mu f](z), \qquad z \in \chi_f; \tag{236}$$

оператор $S_{\mu, t}^k$ определен в п. 6 § 2.

Формула обращения. Пусть $F(z) = I_\mu f$, $z \in \chi_f$, $\mu \geqslant -1/2$, σ — любое действительное неотрицательное число из χ_f.

Тогда

$$f(t) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} F(z) \sqrt{tz}\, K_\mu(tz)\, dz \tag{237}$$

в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'_+$; $K_\mu(z)$ — функция Макдональда.

Связь с преобразованием Ганкеля. Если $f \in \mathcal{I}'_\mu(\sigma_f)$, то

$$[h_\mu f](iz) = e^{i\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi} [I_\mu f](z), \qquad z \in \chi_f. \tag{238}$$

§ 7. Преобразование Харди

Преобразование Харди обычной функции $f(t)$ определяется формулой (Харди [1])

$$F(x) = \int_0^\infty C_\nu(xt)\, t f(t)\, dt, \tag{239}$$

где

$$C_\nu(z) = \cos p\pi J_\nu(z) + \sin p\pi Y_\nu(z),$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$—функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

При $p=0$ преобразование Харди совпадает с одной из форм преобразования Ганкеля, а при $p=1$—с Y-преобразованием. Патак и Пэнди [1, 2] ввели и изучили преобразование Харди для специального класса обобщенных функций. Ниже излагаются некоторые полученные ими результаты.

Пространство основных функций $\mathcal{G}_\alpha$. Пусть α—фиксированное действительное число, $|\nu| \leqslant \alpha \leqslant 1/2$. Пространство $\mathcal{G}_\alpha$ состоит из всех определенных на $(0, \infty)$ комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} |\xi(t)\Delta_t^k \varphi(t)| < \infty, \tag{240}$$

где $k=0, 1, 2, \ldots,$

$$\xi(t) = \begin{cases} t^\alpha, & 0 < t \leqslant 1, \\ t^{\alpha-2}, & t > 1, \end{cases} \qquad \Delta_t^k = \left(D_t^2 - \frac{1}{t}D_t - \frac{\nu^2}{t^2}\right)^k. \tag{241}$$

Топология в $\mathcal{G}_\alpha$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{G}_\alpha$, через $\mathcal{G}'_\alpha$.

Пространство основных функций $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$. Пространство $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$ состоит из всех комплекснозначных функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\varphi(t)}{t} \in \mathcal{G}_\alpha.$$

Топология в $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$ порождается счетным семейством полунорм $\{\beta_k\}_{k=0}^\infty$, где $\beta_k(\varphi) = \gamma_k\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)$. Обозначим пространство, сопряженное $\hat{\mathcal{G}}_\alpha$, через $\hat{\mathcal{G}}'_\alpha$. При любом фиксированном x функция $C_\alpha(xt)$ принадлежит $\mathcal{G}_\alpha$, если $x \neq 0$ и $|\nu| \leqslant \alpha \leqslant 1/2$.

Преобразование Харди обобщенной функции $f(t)\in\hat{\mathscr{G}}_\alpha$ определяется формулой

$$F(x)\overset{\Delta}{=}\langle tf(t),\ C_\nu(xt)\rangle\overset{\Delta}{=}\langle f(t),\ tC_\nu(xt)\rangle, \tag{242}$$

где x — произвольное действительное число, отличное от нуля, $|\nu|\leqslant\alpha\leqslant 1/2$.

Гладкость. Функция $F(x)$ бесконечно дифференцируема при $x\neq 0$ и

$$F^{(k)}(x)=\langle tf(t),\ D_t^k C_\nu(xt)\rangle \tag{243}$$

при всех $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Асимптотика. Если $x\neq 0$, то

$$F(x)=O(|x|^{-\alpha})\quad\text{при}\quad x\to 0, \tag{244}$$

$$F(x)=O(|x|^{2r-\alpha})\quad\text{при}\quad x\to\infty, \tag{245}$$

где r — некоторое неотрицательное число и α — фиксированное положительное число, такое, что $|\nu|\leqslant\alpha\leqslant 1/2$.

Введем обозначение

$$F_\nu(z)=\frac{2^{2-\nu-2p}}{\Gamma(p)\,\Gamma(\nu+p)}\,s_{\nu+2p-1,\,\nu}(z), \tag{246}$$

где $s_{\mu,\,\nu}(z)$ — функция Ломмеля.

Формула обращения. Пусть $f(t)\in\hat{\mathscr{G}}'_\alpha$, где $|\nu|\leqslant\leqslant\alpha\leqslant 1/2$ и

$$F(x)=\langle f(t),\ tC_\alpha(xt)\rangle,\qquad x\neq 0. \tag{247}$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} t\int_0^N F(x)\,F_\nu(xt)\,x\,dx=tf(t) \tag{248}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

Следствие 1. Пусть $f\in\hat{\mathscr{G}}'_\alpha$, $|\nu|\leqslant\alpha\leqslant 1/2$. При $p=0$ преобразование Харди (37) переходит в одну из форм преобразования Ганкеля обобщенных функций

$$F(x)=\langle f(t),\ tJ_\nu(tx)\rangle.$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} t\int_0^N F(x)\,J_\nu(tx)\,x\,dx=tf(t) \tag{249}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

Следствие 2. Пусть $f \in \mathscr{G}'_\alpha$, $|\nu| \leqslant \alpha \leqslant 1/2$ и $F(x)$ является Y-преобразованием обобщенной функции f:

$$F(x) = \langle f(t),\ tY_\nu(xt)\rangle.$$

Тогда

$$\lim_{N \to \infty} t \int_0^N F(x)\, \mathbf{H}_\nu(xt)\, x\, dx = tf(t) \tag{250}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$; здесь $\mathbf{H}_\nu(z)$ — функция Струве.

§ 8. Преобразование Конторовича — Лебедева

Преобразованием Конторовича — Лебедева (см., например, Диткин и Прудников [1]) для обычных функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, называется выражение

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)\, K_{ix}(t)\, dt, \tag{251}$$

где $K_\mu(t)$ — функция Макдональда.

Земанян [16] ввел преобразование Конторовича — Лебедева для обобщенных функций с компактными носителями в $(0, \infty)$ и доказал формулу обращения.

Поскольку функция $K_{ix}(t)$ при любом фиксированном t — целая по x, то $K_{ix}(t) \in \mathscr{E}_+$.

Преобразование Конторовича — Лебедева обобщенной функции $f(t) \in \mathscr{E}'_+$ определяется равенством

$$F(x) \overset{\Delta}{=} \langle f(t),\ K_{ix}(t)\rangle. \tag{252}$$

Формула обращения. Если $f(t) \in \mathscr{E}'_+$, то

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{\pi^2 t} \int_0^T F(x)\, K_{ix}(t)\, x \operatorname{sh} \pi x\, dx \tag{253}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

ГЛАВА 5

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛТЬЕСА И ГИЛЬБЕРТА

§ 1. Преобразование Стилтьеса

1. *Преобразование Стилтьеса* определяется для обычных функций, обладающих некоторыми дополнительными свойствами, формулой

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+x}\, dt \tag{254}$$

(см., например, Диткин и Прудников [1]). Ниже приведены два варианта распространения преобразования Стилтьеса на обобщенные функции.

2. Земанян [15] вводит преобразование Стилтьеса как частный случай преобразования свертки. Не останавливаясь на приводящих к этому определению заменах, мы сформулируем лишь окончательные результаты.

Пространство основных функций $\mathcal{Y}_{a,b}$. Пусть a и b — произвольные действительные числа. Пространство $\mathcal{Y}_{a,b}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно-дифференцируемых функций $\varphi(t)$, определенных на $(0, \infty)$ и удовлетворяющих при $k = 0, 1, 2, \ldots$ неравенствам

$$\iota_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} |\delta_{a,b}(t)(tD_t)^k \sqrt{t}\varphi(t)| < \infty, \tag{255}$$

где

$$\delta_{a,b}(t) = \begin{cases} t^a, & 1 \leqslant t < \infty, \\ t^b, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Топология в $\mathcal{Y}_{a,b}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\iota_k\}_{k=0}^\infty$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{Y}_{a,b}$, через $\mathcal{Y}'_{a,b}$. Для каждого фиксированного x, $0 < x < \infty$, и действительных чисел $a \leqslant 1/2$ и $b \geqslant -1/2$ функция $(x+t)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{Y}_{a,b}$.

Преобразование Стилтьеса обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{Y}'_{a,b}$ определяется равенством

$$J(x) \stackrel{\Delta}{=} \left\langle f(t), \frac{1}{x+t} \right\rangle, \quad 0 < x < \infty. \tag{256}$$

Гладкость. Функция $J(x)$ бесконечно дифференцируема и

$$J^{(m)}(x) = \left\langle f(t), D_x^m \frac{1}{x+t} \right\rangle, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Формула обращения. Пусть $f(t) \in \mathcal{Y}'_{a,b}$ и ее преобразование Стилтьеса определено формулой (256). Тогда

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \left(\frac{e}{n} \right)^{2n} D_x^n [x^{2n} D_x^n J(x)] \tag{257}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'_+$.

3. Другой способ введения преобразования Стилтьеса обобщенных функций принадлежит Пэнди [6].

Пространство основных функций S_α. Пространство S_α состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, определенных на $(0, \infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$\gamma_k(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{0 < t < \infty} (1+t)^\alpha |(tD_t)^k \varphi(t)| < \infty \tag{258}$$

при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $\alpha \leqslant 1$ — фиксированное действительное число. Топология в S_α порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$. Обозначим пространство, сопряженное S_α, через S'_α. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to S_\alpha$ и $S'_\alpha \to \mathcal{D}'_+$.

Если $f(t)/(1+t)^\alpha \in L_1(0, \infty)$, то $f(t)$ порождает *регулярную* обобщенную функцию в S'_α по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(t) \varphi(t)\, dt, \quad \varphi(t) \in S_\alpha.$$

Для комплексных значений z, не принадлежащих отрицательной действительной полуоси, и $k = 1, 2, 3, \ldots$ функция $1/(z+t)^k$ принадлежит S_α.

Патак [2, 3] обобщил определение пространства S_α на n-мерный случай и доказал структурную теорему для соответствующих обобщенных функций. Ниже она приведена для пространства S'_α.

Структура сужения $f \in S'_\alpha$ на $\mathscr{D}_+$. Пусть $f \in S'_\alpha$ и $\varphi(t) \in \mathscr{D}_+$. Тогда существуют такие ограниченные измеримые функции $g_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, r$, определенные на $(0, \infty)$, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{r} (-1)^k (1+t)^\alpha (tD_t)^k g_k(t), \varphi(t) \right\rangle. \quad (259)$$

Преобразование Стилтьеса обобщенной функции $f(t) \in S'_\alpha$ определяется формулой

$$F(z) \stackrel{\Delta}{=} \left\langle f(t), \frac{1}{z+t} \right\rangle \quad (260)$$

для значений z, не принадлежащих $(-\infty, 0]$.

Аналитичность. Функция $F(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости z, исключая разрез вдоль $(-\infty, 0]$, и для нее вне разреза справедлива формула

$$F^{(k)}(z) = \left\langle f(t), \frac{(-1)^k k!}{(z+t)^k} \right\rangle. \quad (261)$$

Асимптотика. При положительных действительных значениях x и $k=0, 1, 2, \ldots$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &F^{(k)}(x) = o(x^{-k}) && \text{при } x \to +\infty, && \text{если } \alpha < 1; \\ &F^{(k)}(x) = O(x^{-k}) && \text{при } x \to +\infty, && \text{если } \alpha = 1; \quad (262) \\ &F^{(k)}(x) = O(x^{-k-1}) && \text{при } x \to +0, && \text{если } \alpha \leqslant 1. \end{aligned}$$

Формула обращения. Пусть $\alpha \leqslant 1$, $x > 0$, $f(t) \in S'_\alpha$ и $F(x) = \left\langle f(t), \frac{1}{x+t} \right\rangle$. Тогда

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{(-x)^{k-1}}{k!\,(k-2)!} D_x^{2k-1} [x^k F(x)] \quad (263)$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

Комплексная формула обращения. Пусть $f(t) \in S'_\alpha$ и $F(z) = \left\langle f(t), \frac{1}{z+t} \right\rangle$. Тогда

$$\lim_{y \to +0} \frac{F(-x-iy) - F(-x+iy)}{2\pi i} = f(x) \quad (264)$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

§ 2. Обобщенное преобразование Стилтьеса

1. *Обобщенное преобразование Стилтьеса* вида

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{(x+t)^{\rho+1}} \tag{265}$$

для подходящих классов обычных функций было рассмотрено Уиддером [1]. Его распространение на специальный класс обобщенных функций предложил Мисра [2], который получил также оценки для асимптотики и некоторые абелевы теоремы для этого преобразования. Аналогичные свойства обобщенного преобразования Стилтьеса изучались Мисрой и Лавуаном [1].

2. *Пространство основных функций $\mathcal{Y}_\alpha$.* Пусть $K_\alpha(t)$ — непрерывная на $(0, \infty)$ функция, определенная формулой

$$K_\alpha(t)=\begin{cases} t^\alpha, & 1\leqslant t<\infty, \\ 1, & 0<t<1, \end{cases} \quad \alpha\leqslant 1.$$

Пространство $\mathcal{Y}_\alpha$ состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k(\varphi)\overset{\Delta}{=}\sup_{0<t<\infty}|K_\alpha(t)\,t^{\rho+k}D^k\varphi(t)| \tag{266}$$

при всех $k=0, 1, 2, \ldots$ Топология в $\mathcal{Y}_\alpha$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{Y}_\alpha$, через $\mathcal{Y}'_\alpha$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+\to\mathcal{Y}_\alpha$ и $\mathcal{Y}'_\alpha\to\mathcal{D}'_+$. При любом фиксированном комплексном z, не принадлежащем $(-\infty, 0]$, функция $(z+t)^{-\rho-1}$ является элементом $\mathcal{Y}_\alpha$ по t.

Обобщенное преобразование Стилтьеса обобщенной функции $f(t)\in\mathcal{Y}'_\alpha$ определяется равенством

$$F(z)=\left\langle f(t), \frac{1}{(z+t)^{\rho+1}}\right\rangle, \quad z\notin(-\infty, 0]. \tag{267}$$

Аналитичность. Функция $F(z)$ аналитична в области $C^1\setminus(-\infty, 0]$ и

$$F^{(k)}(z)=\left\langle f(t), D_z^k\frac{1}{(z+t)^{\rho+1}}\right\rangle, \quad z\notin(-\infty, 0]. \tag{268}$$

Оценка. Для действительных положительных x

$$\begin{aligned} |F^{(k)}(x)| &= o(x^{-k}), & x &\to +\infty; \\ |F^{(k)}(x)| &= O(x^{-k-1}), & x &\to +0. \end{aligned} \tag{269}$$

Патак [3] предложил следующую формулу обращения для обобщенных функций из пространства S'_α (см. п. 3 § 1).

Формула обращения. Пусть $f(t) \in S'_\alpha$ и

$$F(z) = \left\langle f(t), \frac{1}{(z+t)^{\rho+1}} \right\rangle, \quad z \notin (-\infty, 0].$$

Тогда

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} (-1)^k \frac{2^{\rho-1}(2k-1)!\,\Gamma(\rho)}{k!\,(k-2)!\,\Gamma(2k+\rho+1)} \times D_t^k [t^{2k+\rho-2} D_t^{k-1} F(t)] \tag{270}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

Асимптотика (Лавуан и Мисра [1]). Пусть α — действительное число. Обозначим через $\mathscr{D}'_+(\alpha)$ подпространство $\mathscr{D}'_+$, состоящее из обобщенных функций $f(t)$, для которых существуют действительное число a_f, целое число k и обычная функция $g_f(t)$, такие, что на $[a_f, \infty)$

$$f(t) = D^k g_f(t)$$

и функция $f(t)\, t^{-k-\alpha}$ ограничена.

Сформулируем теперь два определения.

а) Обобщенная функция $f(t) \in \mathscr{D}'_+(\alpha)$ эквивалентна At_+^ν в начале координат ($f(t) \sim At_+^\nu$, $t \to +0$), если существуют число $\zeta > 0$ и обобщенная функция $p(t) \in \mathscr{D}'_+(\alpha)$, такие, что

$$f(t) = At_+^\nu + p(t) \tag{271}$$

на $[0, \zeta]$ и при $\lambda \to 0$

$$\left\langle p(t), \lambda^{-\nu-1} \varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right\rangle \to 0$$

для любой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}_+$. Если $\nu = 0$, то A называется значением $f(t)$ при $t \to +0$ в смысле Лоясевича [1].

б) Обобщенная функция $f(t) \in \mathscr{D}'_+$ на ∞ эквивалентна At^ν ($f(t) \sim At^\nu$, $t \to +\infty$), если существуют число $\zeta > 1$, целое число k и непрерывная функция $g(t)$, такие, что

$$f(t) = D^k g(t) \quad \text{на} \quad [\zeta, \infty)$$

и

$$k!\,t^{-k} g(t) \to \frac{A}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} \tag{272}$$

при $t \to +\infty$ (при этом $(\nu+1)_0 = 1$). Если $\nu = 0$, то A называется значением $f(t)$ при $t \to +\infty$.

Пусть $f(t) \in D'_+(\alpha)$ и

$$F(z) = \left\langle f(t), \frac{1}{(z+t)^{\rho+1}} \right\rangle, \tag{273}$$

где $\rho > \alpha$.

Если

$$f(t) \sim A t_+^{\nu}, \qquad t \to +0, \tag{274}$$

то для $\rho > \sup(\alpha, \nu)$ при $z \to 0$

$$F(z) \sim A \frac{\mathrm{B}(\rho-\nu, \nu+1)}{z^{\rho-\nu}}, \qquad \nu \neq -1, -2, \ldots \tag{275}$$

и

$$F(z) \sim A \frac{(-1)^n \Gamma(\rho+n) \ln z}{(n-1)!\, \Gamma(\rho+1)}, \qquad \nu = -1, -2, \ldots. \tag{276}$$

Если $f \in \mathscr{E}'_+$ и

$$f(t) \sim A t_+^{\nu}, \qquad t \to +0,$$

то формулы (275) и (276) справедливы при $\rho > \nu$.

Если

$$f(t) \sim 0 \quad (\text{т. е. } \nu = 0,\ A = 0), \qquad t \to +0, \tag{277}$$

то при $\rho > \sup(\alpha, 0)$

$$F(z) = o(z^{-\rho}), \qquad z \to 0. \tag{278}$$

Если $f(t) \in \mathscr{D}'_+$, $\nu > -1$,

$$f(t) \sim A t^{\nu}, \qquad t \to +\infty, \tag{279}$$

то при $\rho > \nu$

$$F(z) \sim A \frac{\mathrm{B}(\rho-\nu, \nu+1)}{z^{\rho-\nu}}, \qquad z \to \infty. \tag{280}$$

Если $f(t) \in \mathscr{D}'_+$ и

$$f(t) \sim 0 \quad (\text{т. е. } \nu = 0,\ A = 0), \qquad (t \to +\infty) \tag{281}$$

то при $\rho > -1$

$$z^{\rho} F(z) \to 0, \qquad z \to \infty. \tag{282}$$

Если $f(t) \in \mathscr{E}'_+$, то при $\rho' < \rho + 1$

$$z^{\rho'} F(z) \to 0, \qquad z \to \infty. \tag{283}$$

§ 3. S_2-преобразование

Для обычных функций S_2-преобразование (возникающее при итерировании преобразования Стилтьеса) формально определяется равенством

$$F(x)=\int_{+0}^{\infty}\frac{\ln\frac{x}{t}}{x-t}f(t)\,dt, \tag{284}$$

где значение функции $\dfrac{\ln\frac{x}{t}}{x-t}$ при $t=x$ принимается равным $1/x$. Это преобразование было введено Боасом и Уиддером [1], которые получили для него формулу обращения.

Дьюб [1] распространил S_2-преобразование на пространство S'_α, $0<a<1$ (см. п. 3 § 1) следующим образом. Функция

$$K(t,x)\stackrel{\Delta}{=}\begin{cases}\dfrac{\ln\frac{x}{t}}{x-t}, & t\neq x,\\[2mm] \dfrac{1}{x}, & t=x\end{cases}$$

при каждом фиксированном x принадлежит S_α по t. Это дает возможность определить S_2-преобразование любой обобщенной функции $f\in S'_\alpha$ следующим образом.

S_2-преобразование обобщенной функции $f(t)\in S'_\alpha$, $0<\alpha<1$, определяется формулой

$$F(x)=\langle f(t),\ K(t,x)\rangle,\qquad x>0. \tag{285}$$

Гладкость. Функция $F(x)$ бесконечно дифференцируема и

$$F^{(n)}(x)=\langle f(t),\ D_x^nK(t,x)\rangle \tag{286}$$

при $x>0$ и $n=1, 2, 3, \ldots$.

Формула обращения. Пусть $f(t)\in S'_\alpha$, $0<\alpha<1$, и S_2-преобразование определено формулой (285). Тогда

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!\,(n-2)}\right]^2 D^n\left[x^{2n-1}D^{2n-1}\left[x^{2n-1}D^{n-1}F(x)\right]\right\} \tag{287}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'_+$.

Единственность. Пусть f, $g \in S'_\alpha$, $0<\alpha<1$, и пусть $F(x)$ и $G(x)$ — соответствующие S_2-преобразования. Тогда, если $F(x)=G(x)$ для всех $x>0$, то $f=g$ в смысле равенства в $\mathscr{D}'_+$.

§ 4. Преобразование Гильберта

1. *Преобразование Гильберта* обычных функций формально определяется формулой

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{z-t}\,dt. \tag{288}$$

Классическая теория изложена, например, в монографии Титчмарша [1]. Различные методы распространения преобразования Гильберта на обобщенные функции содержатся в работах Бельтрами и Волерса [2], Владимирова [13], Бремермана [1], Бремермана и Дюрана [1], Гельфанда и Шилова [3], Джоунса [1, 3, 4], Ловерье [1], Ортона [1], а также в ряде других, которые будут указаны ниже.

2. Теория, изложенная в работе Бремермана и Дюрана [1], использует два пространства основных функций — $\mathscr{E}$ и $\mathscr{V}^0_H \subset \mathscr{E}$. Пространство $\mathscr{V}^0_H$ состоит из функций $\varphi(t)\in\mathscr{E}$, удовлетворяющих условиям

$$|t\,\varphi^{(k)}(t)|<\infty$$

при любых $k=0, 1, 2, \ldots$ Топология вводится, как в пространстве $\mathscr{E}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{V}^0_H$, обозначим через $\mathscr{V}^{0\prime}_H$. При любом фиксированном комплексном z, $\operatorname{Im} z\neq 0$, функция $\dfrac{1}{z-t}$ принадлежит $\mathscr{E}$ по t.

Преобразование Гильберта обобщенной функции $f(t)\in\mathscr{E}'$ определяется равенством

$$G(z)\overset{\triangle}{=}G[f(t)](z)=\left\langle f(t), \frac{1}{z-t}\right\rangle, \quad \operatorname{Im} z\neq 0. \tag{289}$$

Выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\left\langle f(t), \frac{1}{t-z}\right\rangle, \tag{290}$$

отличающееся от правой части (289) числовым множителем, часто называют *представлением Коши* обобщенной функции $f(t)$.

Аналитичность. Функция $G(z)$ аналитична в области $C^1 \setminus \operatorname{supp} f$; справедливо равенство

$$D^n G(z) = \frac{n!}{\pi} \left\langle f(t), \frac{1}{(t-z)^{n+1}} \right\rangle, \quad z \in C^1 \setminus \operatorname{supp} f. \tag{291}$$

Асимптотика. Справедлива оценка

$$G(z) = O(|z|^{-1}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{292}$$

Формула обращения. Если $f \in \mathscr{E}'$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 2i [G(x+i\varepsilon) - G(x-i\varepsilon)] = f(x) \tag{293}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$.

Формулой (289) преобразование Гильберта можно определить и в пространстве $\mathscr{V}'_H$. Для него также имеют место свойство аналитичности и формула обращения, приведенные выше.

Примеры.

а) $G[\delta^{(n)}(t)] = \dfrac{(-1)^{n+1} n!}{\pi} \dfrac{1}{z^{n+1}}$;

б) $G[t^{-n}] = \begin{cases} -i/z^n, & \operatorname{Im} z > 0, \\ i/z^n, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3 \ldots .$

в) $G\left[\dfrac{1}{t+i0}\right] = \begin{cases} -2i/z, & \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$

3. В книге Бремермана [1] введено *пространство основных функций* $\mathscr{G}_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$. Оно состоит из всех функций $\varphi(t) \in \mathscr{E}(\boldsymbol{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi^{(k)}(t) = O(|t|^\alpha), \quad |t| \to \infty,$$

при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$; α — фиксированное действительное число. Последовательность $\{\varphi_\nu\}$ сходится в $\mathscr{G}_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$, если она сходится в топологии $\mathscr{E}(\boldsymbol{R}^n)$ и для любого k существует такая постоянная C_k, не зависящая от ν, что

$$|\varphi_\nu^{(k)}(t)| \leqslant C_k |t|^\alpha.$$

Обозначим пространство, сопряженное $\mathfrak{S}_\alpha$, через $\mathfrak{S}'_\alpha$. Имеют место вложения $\mathcal{D} \to \mathfrak{S}_\alpha \to \mathcal{E}$ и $\mathcal{E}' \to \mathfrak{S}'_\alpha \to \mathcal{D}'$ при любом α.

Определим *преобразование Гильберта* обобщенной функции $f \in \mathfrak{S}'_\alpha(R^1)$, $\alpha \geqslant -1$, формулой (289). Для него также справедливы свойство аналитичности и формула обращения, приведенные выше.

В этой же работе приведена таблица преобразований Гильберта (представлений Коши) для некоторых обобщенных функций.

4. Еще один подход, отличный от изложенного выше, принадлежит Гельфанду и Шилову [3].

Пусть *пространство* $\mathcal{V}^0$ *основных функций* состоит из функций $\psi(t)$, определенных на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функция $\psi(t)$ и ее производная $\psi'(t)$ непрерывны в $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$; при $t=0$ они могут иметь разрыв первого рода;

$$2)\ \|\psi(t)\|_k \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |t^k\psi(t)|\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} |t^k\psi'(t)|\,dt +$$
$$+ \max_{-\infty<t<\infty} |\psi(t)| + \max_{-\infty<t<\infty} |\psi'(t)| < \infty;\ k=0, 1, 2, \ldots.$$

Топология в $\mathcal{V}^0$ порождается счетным семейством норм $\{\|\psi\|_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Обозначим через $\mathcal{U}$ *пространство основных функций*, состоящее из фурье-образов элементов пространства $\mathcal{V}^0$. Обычное преобразование Гильберта H задает автоморфизм $\mathcal{U}$:

$$H[\varphi(t)](x) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{1}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{x} * \varphi\right] \in \mathcal{U},$$
$$\text{если } \varphi \in \mathcal{U}. \qquad (294)$$

Пусть $\mathcal{U}'$ — пространство, сопряженное $\mathcal{U}$.

Преобразование Гильберта обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{U}'$ определяется равенством

$$\langle Hf, \varphi\rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle f, H\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{U}. \qquad (295)$$

5. Аналогичное определение дано Абдурахмановым [1] в другом пространстве основных функций $\mathcal{V}^{\rho}_{\infty}$. Оно состоит из всех функций $\psi(t)$, определенных на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) функция $\psi(t)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$; $\psi(t)$ и ее производные могут иметь разрыв первого рода при $t=0$;

2) при всех $k, q = 0, 1, 2, \ldots$

$$\gamma_{k,q}(\psi) \overset{\Delta}{=} \sup_{-\infty < t < \infty} |t^k \psi^{(q)}(t)| < \infty. \qquad (296)$$

Топология в $\mathcal{V}^{\rho}_{\infty}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_{k,q}\}_{k,q=0}^{\infty}$. Пусть $\mathcal{U}_{\infty}$ — основное пространство, состоящее из фурье-образов элементов пространства $\mathcal{V}^{\rho}_{\infty}$. Сходимость в $\mathcal{U}_{\infty}$ определяется через сходимость в $\mathcal{V}^{\rho}_{\infty}$. Обозначим через $\mathcal{U}'_{\infty}$ пространство, сопряженное $\mathcal{U}_{\infty}$. Преобразование Гильберта обобщенных функций $f \in \mathcal{U}'_{\infty}$ определяется равенством (295).

6. Гюттингер [1] предложил формулу для вычисления преобразования Стилтьеса некоторых классов обобщенных функций f:

$$[Hf](x) = \frac{1}{\pi x} * f = \operatorname*{Res}_{z=0} \left\{ (\pi x)^{-1} * \left[f(x) \frac{(ax)^z}{z} \right] \right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2 i} \oint_C \frac{dz}{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(at)^z\,dt}{x-t} \right], \qquad (297)$$

где C — окружность с центром в $z=0$. Сначала следует вычислить интеграл по t при достаточно больших по модулю отрицательных значениях $\operatorname{Re} z$, затем результат продолжается в область, содержащую $z=0$, и после этого находится вычет в точке $z=0$.

Пример.

$$H[t_+^{\lambda}] = -\frac{1}{\pi}\Gamma(-\lambda)\Gamma(\lambda+1)[x_-^{\lambda} + x_+^{\lambda}\cos\lambda\pi],$$
$$\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Формула (297) допускает обобщение на n-мерный случай.

Обобщение преобразования Гильберта было предложено Джоунсом [4], который рассмотрел в специальных пространствах обобщенных функций преобразования

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-t|^{\alpha} \operatorname{sgn}(x-t) f(t)\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x-t|^{\alpha} f(t)\, dt,$$

где α — комплексное число, и исследовал их свойства.

Хсу [1] рассматривал преобразование Гильберта как частный случай преобразования Ватсона обобщенных функций.

ГЛАВА 6
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕЙЕРШТРАССА

§ 1. Преобразование Вейерштрасса

1. *Преобразованием Вейерштрасса* обычной функции $f(t)$, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, называется выражение

$$F(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-(z-t)^2/4}\, dt \tag{298}$$

(см., например, книгу Хиршмана и Уиддера [1]).

2. Земанян [12] ввел и исследовал преобразование Вейерштрасса для специального класса обобщенных функций, установив, в частности, две формулы обращения.

Пространства основных функций $\mathscr{W}_{a,b}$ *и* $\mathscr{W}(u, v)$. Пусть a и b — фиксированные числа из R^1 и

$$\rho_{a,b}(t) = \begin{cases} e^{-at/2}, & -\infty < t < 0, \\ e^{-bt/2}, & 0 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Пространство $\mathscr{W}_{a,b}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\chi_m(\varphi) = \sup_{-\infty < t < \infty} |e^{t^2/4} \rho_{a,b}(t)\, D^m \varphi(t)| < \infty \tag{299}$$

при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathscr{W}_{a,b}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\chi_m\}_{m=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{W}_{a,b}$, обозначим через $\mathscr{W}'_{a,b}$.

Пусть u — действительное число или $-\infty$, v — действительное число или $+\infty$. Выберем две монотонные последовательности действительных чисел

$$\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{b_\nu\}_{\nu=1}^{\infty},$$

такие, что $a_\nu \to u+0$ и $b_\nu \to v-0$. *Пространство основных функций* $\mathscr{W}(u, v)$ определяется как счетное объединение пространств $\mathscr{W}_{a_\nu, b_\nu}$, т. е. $\mathscr{W}(u, v) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathscr{W}_{a_\nu, b_\nu}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{W}(u, v)$, обозначим через $\mathscr{W}'(u, v)$. Справедливы вложения $\mathscr{D} \to \mathscr{W}(u, v)$ и $\mathscr{W}'(u, v) \to \mathscr{D}'$.

Пусть $f(t)$ — локально интегрируемая функция на $(-\infty, \infty)$, такая, что $f(t) e^{-t^2/2} \rho_{a,b}^{-1}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ при всех a и b, удовлетворяющих условиям $a > u$, $b < v$. Тогда $f(t)$ порождает в $\mathscr{W}'(u, v)$ *регулярную* обобщенную функцию f по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathscr{W}(u, v).$$

Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'$ допускает преобразование Вейерштрасса, если существует по крайней мере одна пара действительных чисел a, b $(a < b)$, такая, что $f \in \mathscr{W}'_{a, b}$. Для любой обобщенной функции f, допускающей преобразование Вейерштрасса, существует единственный непустой интервал (σ_1, σ_2), такой, что $f \in \mathscr{W}'(\sigma_1, \sigma_2)$ и $f \notin \mathscr{W}'(u, v)$, если $u < \sigma_1$ или $v > \sigma_2$.

Областью сходимости преобразования Вейерштрасса обобщенной функции f называется область

$$\Omega_f \stackrel{\Delta}{=} \{z\colon \sigma_1 < \operatorname{Re} z < \sigma_2\},$$

где σ_1 и σ_2 определены выше; σ_1 и σ_2 называются *абсциссами сходимости*.

Введем функцию

$$k(z, \tau) = \frac{e^{-z^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}, \tag{300}$$

где $z \in C^1$ и $0 < t < 1$. Для каждого фиксированного $z \in \Omega_f$ функция $k(z-t, 1)$ принадлежит $\mathscr{W}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Преобразование Вейерштрасса обобщенной функции $f \in \mathscr{W}'(\sigma_1, \sigma_2)$ определяется формулой

$$F(z) \stackrel{\Delta}{=} [Wf](z) \stackrel{\Delta}{=} \langle f(t), k(z-t, 1) \rangle, \qquad z \in \Omega_f. \tag{301}$$

Аналитичность. Функция $F(z)=[Wf](z)$ аналитична в Ω_f и для всех $m=1, 2, 3, \ldots$ имеем

$$D_z^m F(z) = \langle f(t),\ D_z^m k(z-t, 1)\rangle, \qquad z \in \Omega_f. \tag{302}$$

Формулы обращения. 1) Пусть $F(z)=[Wf](z)$, $z\in\Omega_f$, r — действительная переменная и σ — любое фиксированное действительное число из интервала (σ_1, σ_2). Тогда

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{i\sqrt{4\pi}} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(z)\, e^{(z-t)^2/4}\, dz =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} F(\sigma+iy)\, k(y+it-i\sigma, 1)\, dy \tag{303}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$.

2) Пусть $F(z)=[Wf](z)$, $z\in\Omega_f$, σ — любое число из интервала (σ_1, σ_2). Тогда

$$f(t) = \lim_{\tau\to 1-0} \frac{1}{i\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z)\, e^{(z-t)^2/4\tau}\, dz =$$

$$= \lim_{\tau\to 1-0} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+iy)\, k(y+it-i\sigma, \tau)\, dy \tag{304}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$. Дитциан [2] показал, что эта формула справедлива и в смысле сходимости в $\mathscr{W}'(\sigma_1, \sigma_2)$.

Единственность. Пусть $Wf = F(z)$ при $z\in\Omega_f$ и $Wg = G(z)$ при $z\in\Omega_g$. Если множество $\Omega_f\cap\Omega_g$ не пусто и $F(z)=G(z)$ при $z\in\Omega_f\cap\Omega_g$, то $f=g$ в смысле равенства в $\mathscr{W}'(u, v)$, где $(u, v)=\Omega_f\cap\Omega_g\cap R^1$.

Представление посредством преобразований Вейерштрасса. Для того чтобы функция $F(z)$ была преобразованием Вейерштрасса обобщенной функции и чтобы соответствующая область определения имела вид $\Omega_f=\{z\colon \sigma_1<\operatorname{Re} z<\sigma_2\}$, необходимо и достаточно, чтобы $F(z)$ была аналитична в Ω_f и для каждой выбранной подобласти $\{z\colon a\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant b\}$, $\sigma_1<a<b<\sigma_2$, существовал полином B, такой, что

$$|F(x+iy)| \leqslant e^{y^2/4} B(|y|)$$

для $a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b$. Полином B, вообще говоря, зависит от выбора a и b.

Преобразование операций.

Если $W[f(t)] = F(z)$, $z \in \Omega_f$, то

$$W[f(t-\tau)] = F(z-\tau), \qquad z-\tau \in \Omega_f, \tag{305}$$

$$W[D_t^k f(t)] = D_z^k F(z), \qquad z \in \Omega_f,\ k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{306}$$

Связь с преобразованием Лапласа. Отображение $f(t) \to e^{-t^2/2} f(t)$ является изоморфизмом $\mathscr{W}'(u, v)$ на $\mathscr{L}'(-u/2, v/2)$. Обобщенная функция $f(t)$ допускает преобразование Вейерштрасса с областью определения $\{z\colon \sigma_1 < \operatorname{Re} z < \sigma_2\}$ для $[Wf](z)$ тогда и только тогда, когда $e^{-t^2/4} f(t)$ допускает преобразование Лапласа с областью определения $\{z\colon -\sigma_2/2 < \operatorname{Re} z < -\sigma_1/2\}$ для $[L(e^{-t^2/4} f(t))](z)$. В этом случае

$$[Wf](z) = \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{4\pi}} [L(e^{-t^2/4} f(t))]\left(-\frac{z}{2}\right), \quad \sigma_1 < \operatorname{Re} z < \sigma_2. \tag{307}$$

3. Куин [1] рассмотрел преобразование Вейерштрасса в другом пространстве обобщенных функций и получил еще одну формулу обращения (см. также § 2).

Пространство основных функций $\mathscr{W}_\mu$. Пусть μ — фиксированное положительное число. Пространство $\mathscr{W}_\mu$ состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_m(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \exp\left[\frac{t^2}{8+\mu}\right] D^m \varphi(t) \right| < \infty \tag{308}$$

при любом $m = 0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathscr{W}_\mu$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_m\}_{m=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное $\mathscr{W}_\mu$, обозначим через $\mathscr{W}'_\mu$. Справедливы вложения $\mathscr{D} \to \mathscr{W}_\mu$ и $\mathscr{W}'_\mu \to \mathscr{D}'$. При любом фиксированном $x \in R^1$, если $0 < \tau \leqslant 1$, функция $k(x-t, \tau)$, определенная формулой (300), принадлежит $\mathscr{W}_\mu$.

Преобразование Вейерштрасса **обобщенной функции** $f(t) \in \mathscr{W}'_\mu$ определяется формулой

$$[Wf](x) \overset{\Delta}{=} \langle f(t),\ k(x-t, \tau)\rangle, \tag{309}$$

где $0 < \tau \leqslant 1$.

Справедлива следующая *формула дифференцирования*:

$$D_x^k[Wf](x) = \langle f(t),\ D_x^k k(x-t, \tau)\rangle. \tag{310}$$

Формула обращения. Пусть $H_k(z)$ — полиномы Эрмита степени k, $f(t) \in \mathscr{W}'_\mu$ и

$$F(x) = \langle f(t),\ k(x-t, 1)\rangle.$$

Тогда для любого действительного числа c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k H_k(c/2)}{k!} F^{(k)}(x+c) = f(x) \tag{311}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$.

§ 2. Многомерное преобразование Вейерштрасса

Преобразование Вейерштрасса для специального класса обобщенных функций в n-мерном случае было введено Куином [1]. Полученная им формула обращения обобщает соответствующую формулу Руни [1, 2].

Пространство основных функций $\mathscr{W}_\mu(R^n)$. Пусть μ — фиксированное положительное число. Пространство $\mathscr{W}_\mu(R^n)$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ в R^n, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_m(\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{t \in R^n} \left| \exp\left[\frac{|t|^2}{8+\mu}\right] D_t^m \varphi(t) \right| < \infty \tag{312}$$

при любом целом положительном числе $m \in R^n$. Топология в $\mathscr{W}_\mu(R^n)$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_m\}_{|m|=0}^{\infty}$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathscr{W}_\mu(R^n)$, через $\mathscr{W}'_\mu(R^n)$. Справедливы вложения $\mathscr{D}(R^n) \to \mathscr{W}_\mu(R^n)$ и $\mathscr{W}'_\mu(R^n) \to \mathscr{D}'(R^n)$.

Пусть

$$k(x_i - t_i, \tau) = (4\pi\tau)^{-1/2} e^{-(x_i-t_i)^2/4\tau}$$

и

$$K(x-t, \tau) = \prod_{i=1}^{n} k(x_i - t_i, \tau). \tag{313}$$

Для любого фиксированного $x \in R^n$ и числа τ, $0 < \tau \leqslant 1$, $K(x-t, \tau)$ как функция t принадлежит $\mathscr{W}_\mu(R^n)$.

Преобразование Вейерштрасса Wf обобщенной функции $f(t) \in \mathscr{W}'_\mu(\boldsymbol{R}^n)$ определяется равенством

$$[Wf](x) \overset{\Delta}{=} \langle f(t),\quad K(x-t, \tau)\rangle, \tag{314}$$

где $0 < \tau \leqslant 1$.

Справедлива следующая *формула дифференцирования*:

$$D_x^m[Wf](x) = \langle f(t),\quad D_x^m K(x-t, \tau)\rangle \tag{315}$$

для любого неотрицательного целого числа $m \in \boldsymbol{R}^n$.

Формула обращения. Пусть $H_k(z)$ — полином Эрмита степени k; x, c, $t \in \boldsymbol{R}^n$; $k \in \boldsymbol{R}^1$ и $N \in \boldsymbol{R}^n$ — неотрицательные целые числа. Введем дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$M_{x,c,\tau} = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{N_i} \frac{t^{k/2}(-1)^k H_k(c_i/2)}{k!} D_{x_i}^k \right).$$

Пусть $f \in \mathscr{W}'_\mu(\boldsymbol{R}^n)$ и

$$F(x) = \langle f(t),\quad K(x-t, 1)\rangle.$$

Тогда при любом фиксированном $c \in \boldsymbol{R}^n$

$$f(x) = \lim_{\tau \to 1-0} M_{x,c,\tau} F(x + c\sqrt{\tau}) \tag{316}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$.

§ 3. Преобразование Вейерштрасса — Ганкеля

1. Для обычных функций, обладающих некоторыми дополнительными свойствами, *преобразование Вейерштрасса — Ганкеля* было введено в работе Холевински и Хэймо [1] формулой

$$F(x) \overset{\Delta}{=} \int_0^\infty \mu'(t) f(t) G(x, t; \tau)\, dt, \tag{317}$$

где

$$\mu'(t) = \frac{t^{2\gamma+1}}{2^{\gamma+1}\Gamma(\gamma+3/2)},$$

$x \geqslant 0$, γ — фиксированное положительное число,

$$G(x, t, \tau) \overset{\Delta}{=}$$
$$\overset{\Delta}{=} \left(\frac{1}{2\tau}\right)^{\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{x^2+t^2}{\tau^2}\right) 2^{\gamma-1/2}\, \Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{xt}{2\tau}\right)^{1/2-\gamma} I_{\gamma-1/2}\left(\frac{xt}{2\tau}\right).$$

2. Пэнди [4] рассмотрел это преобразование для специального класса обобщенных функций.

Пространство основных функций G_α. Пространство G_α состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} \left| e^{t^2/(4+\alpha)} \left(D^2 + \frac{2\gamma}{t} D\right)^k \varphi(t) \right| < \infty \qquad (318)$$

при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$; α — фиксированное положительное число. Топология в G_α порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное G_α, обозначим через G'_α.

Пространство основных функций H_α. Пространство H_α состоит из всех комплекснозначных функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих условию $\varphi(t)/\mu'(t) \in G_\alpha$. Топология в H_α порождается счетным семейством полунорм $\beta_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \gamma_k(\varphi(t)/\mu'(t))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пространство, сопряженное H_α, обозначим через H'_α. При любом комплексном z и $0 < \tau \leqslant 1$ функция $G(z, t; \tau) \in G_\alpha$ по y, если $y > 0$.

Преобразование ***Вейерштрасса — Ганкеля*** обобщенной функции $f(t) \in G'_\alpha$ определяется формулой

$$u(t, \tau) \overset{\Delta}{=} \langle \mu'(t) f(t), \quad G(z, t; \tau) \rangle, \qquad (319)$$

где $z = x + iy$.

Аналитичность. При любом комплексном z

$$D_z^m u(z, \tau) = \langle \mu'(t) f(t), \quad D_z^m G(z, t; \tau) \rangle \qquad (320)$$

для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Асимптотика. Пусть

$$F(x) \overset{\Delta}{=} \langle \mu'(t) f(t), \quad G(x, t; 1) \rangle.$$

Тогда для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$F^{(m)}(ix) = O\left(e^{x^2/4} P_m(x)\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{321}$$

где $P_m(x)$ — полином, зависящий от m.

Формула обращения. Пусть оператор $e^{-\tau\Delta_x}$ определен равенством

$$e^{-\tau\Delta_x} F(x) \overset{\Delta}{=} \langle \mu'(t) f(t), \; G(x, t; \; 1-\tau) \rangle.$$

Тогда, если $f(t) \in H'_\alpha$, то

$$\lim_{\tau \to 1-0} \mu'(x) e^{-\tau\Delta_x} F(x) = \mu'(x) f(x) \tag{322}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'_+$.

ГЛАВА 7

ДРУГИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Преобразование Варма

1. Одно из обобщений преобразования Лапласа было предложено Варма [1]. Это преобразование имеет вид

$$F(x)=\int_0^{\infty}(xt)^{m-1/2}e^{-xt/2}W_{k,m}(xt)f(t)\,dt, \tag{323}$$

где $f(t)\in L(0,\infty)$, $m>-1/2$, $x>0$, $W_{k,m}(x)$ — функция Уиттекера. При $k+m=1/2$ оно совпадает с преобразованием Лапласа; заменой k на $k+1/2$ и f на $t^{-k-m}f$ оно сводится к одному из видов преобразования Мейера (см. Диткин и Прудников [1]).

2. Патак [1] распространил преобразование Варма на специальный класс обобщенных функций.

Пространство основных функций $\mathscr{V}_a$. Пространство $\mathscr{V}_a$ состоит из всех определенных на $(0,\infty)$ комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_q(\varphi)\overset{\Delta}{=}\sup_{0<t<\infty}|e^{at}U_q\varphi(t)|<\infty, \tag{324}$$

где $q=0, 1, 2, \ldots$ и

$$U_q\varphi(t)=(-1)^q t^{m-k-q-1/2}(t^2D)^q[t^{k-m+1/2}\varphi(t)]. \tag{325}$$

Топология в $\mathscr{V}_a$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_q\}_{q=0}^{\infty}$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathscr{V}_a$, через $\mathscr{V}'_a$. Справедливы вложения $\mathscr{D}_+\to\mathscr{V}_a$ и $\mathscr{V}'_a\to\mathscr{D}'_+$. При любом фиксированном значении z, $z\neq 0$, $\operatorname{Re} z>0$ и $\operatorname{Re} m>0$

$$(zt)^{m-1/2}e^{-zt/2}W_{k,m}(zt)\in\mathscr{V}_a.$$

Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'_+$ допускает преобразование Варма, если $f \in \mathscr{V}'_a$ для некоторого действительного числа a. Для любой обобщенной функции f, допускающей преобразование Варма, существует такое действительное число σ_f (возможно, равное $-\infty$), что $f \in \mathscr{V}'_a$ при всех $a > \sigma_f$ и $f \notin \mathscr{V}'_a$ при всех $a < \sigma_f$.

Преобразование Варма обобщенной функции $f \in \mathscr{V}'_a$ определяется равенством

$$F(z) = [V_{k,m} f](z) \stackrel{\Delta}{=} \langle f(t), (zt)^{m-1/2} e^{-zt/2} W_{k,m}(zt) \rangle, \quad z \in \Omega_f, \tag{326}$$

где

$$\Omega_f \stackrel{\Delta}{=} \{z\colon \operatorname{Re} z > \sigma_f, \quad z \neq 0 \quad -\pi < \arg z < \pi\};$$

если $\sigma_f = 0$, то Ω_f — полуплоскость с разрезом $[\sigma_f, 0]$.

Аналитичность. Функция $F(z) = [V_{k,m} f](z)$ аналитична в Ω_f и для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$D_z^n F(z) = \langle f(t), D_z^n [(zt)^{m-1/2} e^{-zt/2} W_{k,m}(zt)] \rangle, \quad z \in \Omega_f. \tag{327}$$

Формула обращения. Пусть носитель $f(t)$ содержится в интервале $T \leqslant t < \infty$, $T > 0$. Тогда в смысле сходимости в $\mathscr{D}'$

$$f(t) = \lim_{q \to \infty} \frac{t^{-1}}{\Gamma(\lambda)} [U_q F(x)|_{x = \lambda/t}],$$

где $\lambda = q + k + m - 1/2$, k и m — действительные числа и оператор U_q определен формулой (325).

Единственность. Если

$$F(z) = [V_{k,m} f](z) \quad \text{при} \quad z \in \Omega_f,$$
$$G(z) = [V_{k,m} g](z) \quad \text{при} \quad z \in \Omega_g,$$
$$F(z) = G(z) \quad \text{при} \quad z \in \Omega_f \cap \Omega_g,$$

то

$$f = g \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'_+.$$

Структура сужения $f \in \mathscr{V}'_a$ на $\mathscr{D}_+$. Пусть $f \in \mathscr{V}'_a$ и $\varphi(t) \in \mathscr{D}_+$. Тогда существуют такие ограниченные измеримые при $t > 0$ функции $g_r(t)$ и полиномы

$Q_r(t)$, что

$$\langle f, \varphi\rangle = \left\langle \sum_{r=0}^{q} (-1)^r D^{r+1} \int_a^t g_r(t) e^{at} Q_r(t)\, dt,\ \varphi(t) \right\rangle. \quad (328)$$

§ 2. Преобразование Пуассона — Лагерра

1. *Преобразование Пуассона — Лагерра* обычных функций $f(t)$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, определяется формулой

$$F(x) = \int_0^\infty g_\alpha(x, t;\ 1) f(t)\, d\Lambda(t), \quad (329)$$

где

$$g_\alpha(x, t;\ \tau) = \left(\frac{e^\tau}{e^\tau - 1}\right)^{\alpha+1} \exp\left[\frac{-(x+t)}{e^t - 1}\right] I\left(\frac{2(xte^\tau)^{1/2}}{e^\tau - 1}\right),$$

$$I(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) z^{-\alpha} I_\alpha(z),$$

$I_\alpha(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода,

$$d\Lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-t} t^\alpha dt.$$

Функция $g_\alpha(x, t; \tau)$ является целой по x при фиксированных действительных значениях t и τ. Для обычных функций $f(t)$ это преобразование было введено и исследовано Холевински и Хэймо [1]. На специальный класс обобщенных функций оно было перенесено Пэнди [5].

2. *Пространства основных функций* $\mathcal{G}_{\alpha,\delta}$, $\mathcal{P}_{\alpha,\delta}$, $\mathcal{G}_\alpha^\delta$. Пусть α и δ — фиксированные действительные числа, причем $\delta \neq -1$. Пространство $\mathcal{G}_{\alpha,\delta}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \sup_{0<t<\infty} \left| \exp\left[\frac{t}{e^{1+\delta} - 1}\right] \{tD_t^2 + (\alpha + 1 - t) D_t\}^k \varphi(t) \right| < \infty \quad (330)$$

при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathcal{G}_{\alpha,\delta}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{G}_{\alpha,\delta}$, через $\mathcal{G}'_{\alpha,\delta}$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{G}_{\alpha,\delta}$ и $\mathcal{G}'_{\alpha,\delta} \to \mathcal{D}'_+$.

Пусть α и δ — действительные числа, причем $\alpha > 0$, $\delta > 0$. Выберем монотонную возрастающую последовательность $\{\delta_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, такую, что $\delta_\nu \to \delta - 0$. *Пространство основных функций* $\mathcal{G}_\alpha^\delta$ определяется как счетное объединение пространств $\mathcal{G}_{\alpha,\delta_\nu}$, т. е. $\mathcal{G}_\alpha^\delta = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{G}_{\alpha,\delta_\nu}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{G}_\alpha^\delta$, обозначим через $(\mathcal{G}_\alpha^\delta)'$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{G}_\alpha^\delta$ и $(\mathcal{G}_\alpha^\delta)' \to \mathcal{D}'_+$, а также $\mathcal{G}_+ \to \mathcal{G}_{\alpha,\delta}$ и $\mathcal{G}'_{\alpha,\delta} \to \mathcal{G}'$.

Пространство основных функций $\mathcal{P}_{\alpha,\delta}$, где α и β — фиксированные действительные числа, $\delta \neq -1$, состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих условию

$$\beta_k(\varphi) \overset{\Delta}{=} \gamma_k \{\varphi(t)/\Lambda'(t)\} < \infty \tag{331}$$

при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Топология в $\mathcal{P}_{\alpha,\delta}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{P}_{\alpha,\delta}$, обозначим через $\mathcal{P}'_{\alpha,\delta}$. Справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{P}_{\alpha,\delta}$ и $\mathcal{P}'_{\alpha,\delta} \to \mathcal{D}'_+$.

При комплексном z, фиксированном $t \in (0, 1]$, $\alpha > -1$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ функции $D_z^n g_\alpha(z, t; \tau)$ и $D_\tau^n g_\alpha(z, t; \tau)$ принадлежат пространству $\mathcal{G}_{\alpha,\delta}$.

Преобразование Пуассона—Лагерра обобщенной функции $f \in \mathcal{P}_{\alpha,\delta}$ определяется равенством

$$u(z, \tau) \overset{\Delta}{=} \langle \Lambda'(t) f(t), g_\alpha(z, t; \tau) \rangle, \tag{332}$$

где $0 < t \leqslant 1$.

Аналитичность по z. Пусть $f \in \mathcal{P}'_{\alpha,\delta}$, $t > 0$, $0 < \tau \leqslant 1$. Тогда функция $u(z, \tau)$, определенная равенством (332),— целая по z, и при всех $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$D_z^m u(z, \tau) = \langle \Lambda'(t) f(t), D_z^m g_\alpha(z, t; \tau) \rangle. \tag{333}$$

Гладкость по τ. При тех же условиях функция $u(z, \tau)$ бесконечно дифференцируема по τ и при всех $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$D_\tau^m u(z, \tau) = \langle \Lambda'(t) f(t), D_\tau^m g_\alpha(z, t; \tau) \rangle. \tag{334}$$

Асимптотика. При тех же условиях и $(e^{1/\delta} - 1)^{-1} < A < (e - 1)^{-1}$

$$u(z, \tau) = O\left\{P(|z|) \exp\left[\frac{A|z|e^\tau}{1 - A(e^\tau - 1)}\right] e^{|z|}\right\}, \quad z \to \infty, \tag{335}$$

где $P(|z|)$ — полином по z.

Формула обращения. Пусть $f \in \mathcal{P}'_{\alpha,\delta}$, $0 < t \leqslant 1$. Тогда

$$\lim_{\tau \to +0} \Lambda'(x) \langle \Lambda'(t) f(t),\ g_\alpha(x, t; \tau) \rangle = \Lambda'(x) f(x) \quad (336)$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'_+$.

Структура обобщенных функций из $\mathcal{G}_{\alpha\,\delta}$. Пусть $f \in \mathcal{G}_{\alpha,\delta}$ и $\varphi \in \mathcal{G}^\delta_\alpha$. Тогда существуют такие ограниченные измеримые функции $g_r(t)$ и полиномы $Q_r(t)$, $r = 0, 1, \ldots, k$, что

$$\langle f, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{r=0}^{k} (-1)^r D^{r+1} \int_0^t g_r(t) e^{ct} Q_r(t)\, dt,\ \varphi(t) \right\rangle; \quad (337)$$

здесь $c = (e^{1+\delta} - 1)^{-1}$ и $\alpha > 0$.

§ 3. Дробные интегралы

1. *Дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка* α от обычной функции $f(t)$ называется преобразование

$$I^\alpha f(x) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (x - t)^{\alpha - 1} f(t)\, dt. \quad (338)$$

Дробным интегралом Вейля порядка α от обычной функции $f(t)$ называется преобразование

$$K^\alpha f(x) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t - x)^{\alpha - 1} f(t)\, dt. \quad (339)$$

Выражения (338) и (339) существуют, если на $f(t)$ и α наложены соответствующие ограничения.

2. Существует несколько способов распространения дробных интегралов на обобщенные функции (см. Эрдейи [4]).

1) Формулу (338) можно записать в виде

$$I^\alpha f(x) = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(x). \quad (340)$$

Это выражение можно использовать для определения дробных интегралов любого комплексного порядка α обобщенных функций, допускающих свертку с $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

2) Для подходящих обычных функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ справедлива формула

$$\int_0^\infty I^\alpha f(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_0^\infty f(t)\,K^\alpha g(t)\,dt$$

или

$$\langle I^\alpha f,\ \varphi\rangle=\langle f,\ K^\alpha\varphi\rangle. \qquad (341)$$

С помощью этой формулы можно определить оператор I^α в пространстве обобщенных функций f как сопряженный к оператору K^α, действующему в пространстве основных функций φ (аналогично можно определить для обобщенных функций оператор K^α).

3) Если $f(t)$ — подходящая обычная функция, то

$$M[I^\alpha f](z)=\frac{\Gamma(1-\alpha-z)}{\Gamma(1-z)}M[f](z+\alpha), \qquad (342)$$

$$M[K^\alpha f](z)=\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(\alpha+z)}M[f](z+\alpha), \qquad (343)$$

где M — оператор преобразования Меллина. На основе этих соотношений посредством преобразования Меллина обобщенных функций можно операцию дробного интегрирования перенести на обобщенные функции. Брааксма и Шуитман [1] показали, что дробные интегралы от обобщенных функций можно рассматривать как частный случай преобразования Ватсона.

3. Первый способ обобщения преобразования (338) был предложен Л. Шварцем [1].

Пусть α — произвольное комплексное число и $f\in\mathscr{D}'_+$. *Дробным интегралом* порядка α называется свертка

$$I^\alpha f(x)=\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}*f(x), \qquad (344)$$

где

$$x_+^{\alpha-1}=\begin{cases} x^{\alpha-1}, & x>0,\\ 0\ , & x<0.\end{cases}$$

Справедливы следующие соотношения:

1) $$I^\alpha I^\beta f=I^{\alpha+\beta}f; \qquad (345)$$

2) $$I^{-n}f=D^nf. \qquad (346)$$

Равенство 2) позволяет говорить о выражении $I^{-\alpha} f$ как о производной произвольного порядка α обобщенной функции f.

4. Второй способ обобщения был использован Лизоркиным [1] при определении операции дробного лиувиллевского дифференцирования (интегрирования) обобщенных функций.

Пространства основных функций $\mathscr{P}$ и $\tilde{\mathscr{P}}$. Пространство $\tilde{\mathscr{P}}$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\psi(\lambda)$ в R^n, удовлетворяющих неравенствам

$$\|\psi\|_k = \sup_{|l| \leqslant k} \sup_{\lambda \in R^n} \{M_k(\lambda) \, |D^l \psi(\lambda)|\} < \infty, \tag{347}$$

где l — целое неотрицательное число из R^n, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$M_k(\lambda) = \max_{\lambda \in R^n} \{(1 + |\lambda|^2)^{k/2}, \; 1/\Lambda^k\},$$

$$\Lambda = \min\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|, \; 1\right).$$

Топология в $\tilde{\mathscr{P}}$ порождается счетным семейством норм $\|\psi\|_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $\tilde{\mathscr{P}}'$ — пространство, сопряженное $\tilde{\mathscr{P}}$. Операция умножения на λ^r, где r — любое комплексное число из C^n, осуществляет автоморфизм пространств $\tilde{\mathscr{P}}$ и $\tilde{\mathscr{P}}'$; при этом

$$\langle \lambda^r f, \psi \rangle = \langle f, \lambda^r \psi \rangle, \quad f \in \tilde{\mathscr{P}}', \; \psi \in \tilde{\mathscr{P}}.$$

Отметим, что функции из $\tilde{\mathscr{P}}$ стремятся к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и при приближении к любой из координатных плоскостей. Справедливы вложения $\tilde{\mathscr{P}} \to \mathscr{S}$ и $\mathscr{S}' \to \tilde{\mathscr{P}}'$.

Пространство основных функций $\mathscr{P}$ состоит из функций, которые являются фурье-образами элементов пространства $\tilde{\mathscr{P}}$. Если $\varphi(t) \in \mathscr{P}$, то для всех m, $1 \leqslant m \leqslant n$, и всех целых неотрицательных чисел $l \in R^n$ имеем

$$\int_{R^m} t^l \varphi(t) \, d^m t = 0.$$

Пространство, сопряженное $\mathscr{P}$, обозначим через $\mathscr{P}'$. Справедливы вложения $\mathscr{P} \to \mathscr{S}$ и $\mathscr{S}' \to \mathscr{P}'$.

Введем обобщенную функцию

$$I^{\alpha}(t)=\prod_{k=1}^{n}(t_k)_{+}^{\alpha_k-1}/\Gamma(\alpha_k),$$

где символ $\prod$ обозначает прямое произведение и

$$(t_k)_{+}^{\alpha_k-1}=\begin{cases} t_k^{\alpha_k-1}, & t>0,\\ 0, & t<0;\end{cases}$$

α_k — любые комплексные числа.

Преобразование свертки

$$I^{\alpha}(x)*f$$

осуществляет автоморфизм пространства $\mathcal{P}$.

Дробный лиувиллевский интеграл обобщенной функции определяется равенством

$$\langle \boldsymbol{I}^{\alpha}f,\ \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle I^{\alpha}*f,\ \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f,\ I^{\alpha}*\varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f,\ \boldsymbol{I}^{\alpha}\varphi\rangle,$$
$$\varphi\in\mathcal{P}. \qquad (348)$$

Дробная лиувиллевская производная $\boldsymbol{D}^{\alpha}f$ порядка α обобщенной функции $f\in\mathcal{P}'$ определяется равенством

$$\langle \boldsymbol{D}^{\alpha}f,\ \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle \boldsymbol{I}^{-\alpha}f,\ \varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{P}. \qquad (349)$$

Если α — целое неотрицательное число из R^n, то

$$\boldsymbol{D}^{\alpha}f=D^{\alpha}f,$$

где

$$\langle D^{\alpha}f,\ \varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\ D^{\alpha}\varphi\rangle,\qquad \varphi\in\mathcal{P}.$$

5. Аналогичный способ введения интегралов от обобщенных функций использовался в работах Мак-Брайда [1], Эрдейи [2], Эрдейи и Мак-Брайда [1]. Остановимся сначала на работе Эрдейи [2].

Пространство основных функций $\mathcal{I}_p$. Пусть p — произвольное действительное число. Пространство основных функций $\mathcal{I}_{pl}$ состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0,\infty)$, равных нулю при $t>l$ и удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_{p,k}(\varphi)\overset{\Delta}{=}\sup_{0<t<\infty}\{t^{-p+k}\varphi^{(k)}(t)\}<\infty \qquad (350)$$

при всех $k=0,1,2,\ldots$. Топология в $\mathcal{I}_{pl}$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_{p,k}\}_{k=0}^{\infty}$. Пусть $\mathcal{I}_p=\bigcup_{l=1}^{\infty}\mathcal{I}_{pl}$ —

счетное объединение пространств $\mathcal{I}_{pl}$. Пространство, сопряженное $\mathcal{I}_p$, обозначим через $\mathcal{I}'_p$. Отметим, что если $a \leqslant p+1$ и b — любое действительное число, то $\mathcal{I}_p \subset \mathcal{M}_{a,b}$ (см. п. 4 § 6 гл. 3).

Преобразование K^α задает непрерывное отображение пространства $\mathcal{I}_p$ в $\mathcal{I}_{p+a}$, если $p+a<0$; $\mathcal{I}_p$ в $\mathcal{I}_0$, если $p+a>0$; $\mathcal{I}_p$ в $\mathcal{I}_{-\varepsilon}$ при любом ε, если $p+a=0$.

Дробный интеграл $I^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{I}_p$ определяется равенством

$$\langle I^\alpha f, \varphi\rangle \stackrel{\Delta}{=} \langle f, K^\alpha \varphi\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{I}_p. \tag{351}$$

1) Если $f \in \mathcal{I}'_p$, $a=\operatorname{Re}\alpha$, $b=\operatorname{Re}\beta$ и $p<\min(0, a)$, то

$$I^\beta I^\alpha f = I^{\alpha+\beta} f \tag{352}$$

в смысле равенства в пространстве $\mathcal{I}'_{p-a-b}$.

2) Если $f \in \mathcal{I}'_p$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, $c=\operatorname{Re}\gamma$ и $p< <\min(0, -c)$, то

$$I^\gamma x^\beta I^\alpha f = x^{-\alpha} I^{-\beta} x^{-\gamma} f \tag{353}$$

в смысле равенства в пространстве $\mathcal{I}'_p$.

Преобразование I^α определено на $\mathcal{I}'_p$ при $p \leqslant 0$ и задает непрерывное отображение $\mathcal{I}'_p$ в $\mathcal{I}'_{p-a}$.

6. В другой работе Эрдейи [4] перенес на специальные классы обобщенных функций *обобщенные операторы дробного интегрирования*, введенные для обычных функций Кобером [1] и Эрдейи [1]:

$$I_{x^m}^{\eta,\alpha} f(x) = \frac{m x^{-m\eta-m\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^m - t^m)^{\alpha-1}\, t^{m\eta++m-1} f(t)\, dt, \tag{354}$$

$$K_{x^m}^{\xi,\alpha} f(x) = \frac{m x^{m\xi}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (x^m - t^m)^{\alpha-1}\, t^{-m\xi-m\alpha+m-1} f(t)\, dt, \tag{355}$$

$m>0$ — действительное число, $\operatorname{Re}\alpha>0$, ξ, η — комплексные числа.

При этом он использовал основные пространства типа $\mathcal{I}_{pl}$ и $\mathcal{I}_p$. Отметим, что при $m=1$ формулы (6) и (7) определяют дробные интегралы Римана — Лиувилля и Вейля.

7. Аналогичная теория в других пространствах обобщенных функций была развита Мак-Брайдом [1].

Пространства основных функций $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_{p,\mu}$. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пространство $\mathcal{F}_p$ состоит из всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma_k^p(\varphi) \overset{\Delta}{=} \| t^k D^k \varphi(t) \|_p < \infty \tag{356}$$

при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$; при этом

$$\| f \|_p = \left(\int | f(t) |^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Топология в $\mathcal{F}_p$ порождается счетным семейством полунорм $\{\gamma_k^p\}_{k=0}^{\infty}$. Обозначим пространство, сопряженное $\mathcal{F}_p$, через $\mathcal{F}'_p$. Если $1 \leqslant p < \infty$, то справедливы вложения $\mathcal{D}_+ \to \mathcal{F}_p \to \mathcal{E}_+$ и $\mathcal{E}'_+ \to \mathcal{F}'_p \to \mathcal{D}'_+$; если $p = \infty$, то $\mathcal{F}_p \to \to \mathcal{E}_+$ и $\mathcal{E}'_+ \to \mathcal{F}'_p$.

Пусть $f(t) \in L_q$, где $1/p + 1/q = 1$. Тогда $f(t)$ порождает в $\mathcal{F}_p$ *регулярный* элемент по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} f(t) \varphi(t) \, dt, \quad \varphi(t) \in \mathcal{F}_p.$$

Пусть μ — произвольное комплексное число и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пространство $\mathcal{F}_{p,\mu}$ состоит из таких функций $\varphi(t)$, что $t^{-\mu}\varphi(t) \in \mathcal{F}_p$. Топология в $\mathcal{F}_{p,\mu}$ порождается счетным семейством полунорм

$$\{\gamma_k^{p,\mu}(\varphi)\} \overset{\Delta}{=} \{\gamma_k^p(t^{-\mu}\varphi)\}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}'_{p,\mu}$ пространство, сопряженное $\mathcal{F}_{p,\mu}$.

Структура обобщенных функций из $\mathcal{F}'_{p,\mu}$. Пусть μ — любое комплексное число и $1 \leqslant p < \infty$. Любая обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{F}'_{p,\mu}$ представляется в виде

$$f(t) = t^{-\mu} \sum_{k=0}^{N} t^k D^k h_k(t), \tag{357}$$

где N — положительное целое число и $h_k(t) \in L_q$, $1/p + 1/q = 1$.

Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\operatorname{Re}(m\eta + \mu) + m > 1/p$, то $I_{x^m}^{\eta,\alpha}$ определяет автоморфизм $\mathcal{F}_{p,\mu}$. Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\operatorname{Re}(m\eta - \mu) > -1/p$, то $K_{x^m}^{\eta,\alpha}$ определяет автоморфизм $\mathcal{F}_{p,\mu}$.

Обобщенные дробные интегралы от обобщенной функции $f \in \mathcal{F}'_{p,\mu}$ определяются равенствами

$$\left\langle I_{x^m}^{\eta,\alpha} f,\ \varphi\right\rangle \stackrel{\Delta}{=} \left\langle f,\ K_{x^m}^{\eta+1-1/m,\alpha}\varphi\right\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{F}_{p,\mu}; \tag{358}$$

$$\left\langle K_{x^m}^{\eta,\alpha} f,\ \varphi\right\rangle \stackrel{\Delta}{=} \left\langle f,\ I_{x^m}^{\eta-1+1/m,\alpha}\varphi\right\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{F}_{p,\mu}. \tag{359}$$

§ 4. Преобразование свертки

Преобразованием свертки обычной функции $f(t)$ с ядром $G(t)$ называется выражение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, G(x-t)\, dt, \tag{360}$$

где функции $f(t)$ и $G(t)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (см. Хиршман и Уиддер [1]). Для определенных типов ядер G интеграл (360) после соответствующих замен переменных переходит в одностороннее преобразование Лапласа, Стилтьеса, K-преобразование.

Земанян [7, 13, 15] расширил определение (360) на некоторые классы обобщенных функций и получил для этого преобразования формулу обращения. Еще одна формула обращения предложена Пэнди и Земаняном [1]. Исследованию свойств преобразований типа свертки посвящены работы Дитциана [1], Земаняна [7, 13], Пэнди [1, 2], Пэнди и Земаняна [1, 2].

Подробное изложение свойств преобразования свертки обобщенных функций можно найти в книге Земаняна [15].

ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ

ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫХ ПОСТОЯННЫХ

a	Положительное число
$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$ $n = 1, 2, 3 \ldots$ $(a)_0 = 1$ $C = e^{\gamma}$	
$C(x) = \int\limits_0^x \cos\frac{\pi}{2}u^2\,du$	Косинус-интеграл Френеля
$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Биномиальный коэффициент
$\mathrm{chi}(x) = \gamma + \ln x + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k(2k)!}$	Интегральный гиперболический косинус
$\mathrm{ci}(x) = -\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$	Интегральный косинус
$D_\nu(x)$	Функция параболического цилиндра (функция Вебера)
$\mathrm{Ei}(-x) = \ln x + \gamma + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k \cdot k!}$ $(\lvert\arg x\rvert < \pi)$	Интегральная показательная функция
$\mathrm{Ei}^*(x) = \ln x + \gamma + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k \cdot k!}$	
${}_1F_1(\nu;\ \lambda;\ x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu)_k}{(\lambda)_k}\frac{z^k}{k!}$	Функция Куммера

$$\mathbf{H}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k+1}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right)}$$

Функция Струве

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x)$$

Функция Ганкеля первого рода

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)$$

Функция Ганкеля второго рода

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Функция Бесселя мнимого аргумента

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Функция Бесселя

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$$

Функция Макдональда

$$\mathbf{L}_\nu(x)=i^{-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(ix)$$

Модифицированная функция Струве

$$S(x)=\int_0^x\sin\frac{\pi}{2}u^2\,du$$

Синус-интеграл Френеля

$$\mathrm{shi}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

Интегральный гиперболический синус

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}+\quad(x)$$

Интегральный синус

$$\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$$Y_\nu(x)$$

Функция Неймана

$$\Gamma(z)$$

Гамма-функция

$\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1)$	Постоянная Эйлера
$\delta(x)$	Дельта-функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

где $n = 1, 2, \ldots$

ГЛАВА 8
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Алгебраические и связанные с ними функции

	f	$F[f]$
1	1	$2\pi\delta(x)$
2	$\operatorname{sgn} t$	$2ix^{-1}$
3	$\theta(t)$	$ix^{-1}+\pi\delta(x)$
4	$\theta(-t)$	$-ix^{-1}+\pi\delta(x)$
5	t^n	$2(-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)$
6	$t^n \operatorname{sgn} t$	$2n!\,(-ix)^{-n-1}$
7	t_+^n	$i^{n+1}n!\,x^{-n-1}+(-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)=i^{n+1}n!\,(x+i0)^{-n-1}$
8	t_-^n	$(-i)^{n+1}n!\,x^{-n-1}+i^n\pi\delta^{(n)}(x)=-i^{n+1}n!\,(x-i0)^{-n-1}$
9	$t_+^\lambda \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots$	$ie^{i\lambda\pi/2}\Gamma(\lambda+1)(x+i0)^{-\lambda-1}=i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\pi/2}x_+^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\pi/2}x_-^{-\lambda-1}\right]$

10 $t_{\pm}^{\lambda} \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots$	$-ie^{-i\lambda\pi/2}\Gamma(\lambda+1)(x-i0)^{-\lambda-1}=i\Gamma(\lambda+1)\left[e^{i\lambda\pi/2}x_{-}^{-\lambda-1}-e^{-i\lambda\pi/2}x_{+}^{-\lambda-1}\right]$
11 $\lvert t\rvert^{\lambda} \quad \lambda \neq -1, -3, \ldots$	$-2\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert x\rvert^{-\lambda-1}$
12 $\lvert t\rvert^{\lambda}\operatorname{sgn} t \quad \lambda \neq -2, -4, \ldots$	$2i\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn} x$
13 t^{-1}	$i\pi\operatorname{sgn} x$
14 $\lvert t\rvert^{-1}$	$-2(\gamma+\ln\lvert x\rvert)$
15 t_{+}^{-1}	$-\gamma+i\dfrac{\pi}{2}-\ln(x+i0)$
16 t_{-}^{-1}	$-\gamma-i\dfrac{\pi}{2}-\ln(x-i0)$
17 t^{-2}	$-\pi\lvert x\rvert$
18 $t^{-2}\operatorname{sgn} t$	$2ix(1-\gamma)-2ix\ln\lvert x\rvert$
19 t_{+}^{-2}	$ix\left(1-\gamma+i\dfrac{\pi}{2}\right)-ix\ln(x+i0)$

f	$F[f]$
20 t_-^{-2}	$-ix\left(1-\gamma-i\frac{\pi}{2}\right)+ix\ln(x-i0)$
21 t^{-2m} $m=1, 2, \ldots$	$(-1)^m\frac{\pi}{(2m-1)!}\lvert x\rvert^{2m-1}$
22 t^{-2m-1} $m=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{(-1)^m}{(2m)!}i\pi\lvert x\rvert^{2m}\operatorname{sgn}x$
23 $t^{-2m}\operatorname{sgn}t$ $m=1, 2, \ldots$	$i\frac{2(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\psi(2m)x^{2m-1}-i\frac{2(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}\ln\lvert x\rvert$
24 $\lvert t\rvert^{-2m-1}$ $m=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{2(-1)^m}{(2m)!}[\psi(2m+1)x^{2m}-x^{2m}\ln\lvert x\rvert]$
25 t_+^{-n}	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\left[\psi(n)+i\frac{\pi}{2}\right]i^{n-1}-i^{n-1}\ln(x+i0)\right\}$
26 t_-^{-n}	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\left[\psi(n)-i\frac{\pi}{2}\right](-i)^{n-1}-(-i)^{n-1}\ln(x-i0)\right\}$

27	
t^n, $0 < t < a$ 0 при остальных t	$-(-i)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}[x^{-1}(1-\cos ax-i\sin ax)]$
28	
t^n, $-a < t < 0$ 0 при остальных t	$(-i)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}[x^{-1}(1-\cos ax+i\sin ax)]$
29	
t^n, $\|t\| < a$ 0 при остальных t	$2(-i)^n\frac{d^n}{dx^n}(x^{-1}\sin ax)$
30	
$t^n \operatorname{sgn} t$, $\|t\| < a$ 0 при остальных t	$-2(-i)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}[x^{-1}(1-\cos ax)]$
31	
t^n, $t > a$ 0 при остальных t	$-(-i)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}(x^{-1}e^{iax})+(-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)$
32	
t^n, $t < -a$ 0 при остальных t	$(-i)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}(x^{-1}e^{-iax})+(-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)$
33	
t^n, $\|t\| > a$ 0 при остальных t	$2(-i)^n\pi\delta^{(n)}(x)-2(-i)^n\frac{d^n}{dx^n}(x^{-1}\sin ax)$

f	$F[f]$
34 $t^n \operatorname{sgn} t, \quad \lvert t\rvert > a$ 0 при остальных t	$-2(-i)^{n+1}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{-1}\cos ax)$
35 $t^{-1}, \quad 0 < t < a$ 0 при остальных t	$\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)-\ln\lvert x\rvert-\gamma+i\operatorname{Si}(ax)$
36 $t^{-1}, \quad -a < t < 0$ 0 при остальных t	$-\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)+\ln\lvert x\rvert+\gamma+i\operatorname{Si}(ax)$
37 $t^{-1}, \quad \lvert t\rvert < a$ 0 при остальных t	$2i\operatorname{Si}(ax)$
38 $t^{-1}\operatorname{sgn} t, \quad \lvert t\rvert < a$ 0 при остальных t	$2\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)-2\ln\lvert x\rvert-2\gamma$
39 $t^{-n-1}, \quad 0 < t < a$ 0 при остальных t	$\dfrac{(ix)^n}{n!}\Big[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)-\ln\lvert x\rvert+\psi(n+1)+ i\operatorname{Si}(ax)-e^{iax}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-i)^k(k-1)!}{(ax)^k}\Big]$

40 t^{-n-1}, $\quad -a < t < 0$ 0 при остальных t	$-(ix)^n \Big[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) - \ln\lvert x\rvert + \psi(n+1) - -i\,\operatorname{Si}(ax) - e^{-iax} \sum_{k=1}^{n} \frac{i^k (k-1)!}{(ax)^k} \Big]$
41 t^{-n-1}, $\quad \lvert t\rvert < a$ 0 при остальных t	$\frac{2i^{n+1}x^n}{n!} \left[\operatorname{Si}(ax) - \sum_{k=1}^{n} \sin\left(ax + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{(k-1)!}{(ax)^k} \right]$
42 $t^{-n-1}\operatorname{sgn} t$, $\quad \lvert t\rvert < a$ 0 при остальных t	$\frac{2(ix)^n}{n!} \left[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) - \ln\lvert x\rvert + \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \cos\left(ax + \frac{\pi k}{2}\right) \frac{(k-1)!}{(ax)^k} \right]$
43 t^{-1}, $\quad t > a$ 0 при остальных t	$-\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) - i\,\operatorname{Si}(ax) + i\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$
44 t^{-1}, $\quad t < -a$ 0 при остальных t	$\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) - i\,\operatorname{Si}(ax) + i\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$
45 t^{-1}, $\quad \lvert t\rvert > a$ 0 при остальных t	$-2i\,\operatorname{Si}(ax) + \pi i \operatorname{sgn} x$

f	$F[f]$
46 $\lvert t\rvert^{-1}$, $\lvert t\rvert > a$; 0 при остальных t	$-2\,\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)$
47 t^{-n-1}, $t > a$; 0 при остальных t	$-\dfrac{(ix)^n}{n!}\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+i\,\mathrm{Si}\,(ax)-i\,\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x-e^{iax}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-i)^k\,(k-1)\,!}{ax^k}\right]$
48 t^{-n-1}, $t < -a$; 0 при остальных t	$\dfrac{(ix)^n}{n!}\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)-i\,\mathrm{Si}\,(ax)+i\,\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x-e^{iax}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{i^k\,(k-1)\,!}{(ax)^k}\right]$
49 t^{-n-1}, $\lvert t\rvert > a$; 0 при остальных t	$\dfrac{-i^{n+1}x^n}{n!}\left[2\,\mathrm{Si}\,(ax)-\pi\,\mathrm{sgn}\,x-2\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(ax+\dfrac{\pi k}{2}\right)\dfrac{(k-1)\,!}{(ax)^k}\right]$
50 $t^{-n-1}\,\mathrm{sgn}\,t$, $\lvert t\rvert > a$; 0 при остальных t	$-\dfrac{2\,(ix)^n}{n!}\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(ax+\dfrac{\pi k}{2}\right)\dfrac{(k-1)!}{(ax)^k}\right]$
51 $t^{\lambda-1}$, $0 < t < a$; 0 при остальных t; $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$e^{i\frac{\pi\lambda}{2}}\,\dfrac{\gamma\,(\lambda,\,-iax)}{x^{\lambda}}\equiv\dfrac{1}{\lambda}\,a^{\lambda}\,{}_1F_1\,(\lambda;\ \lambda+1;\ iax)$

52 $\|t\|^{\lambda-1}, \quad -a < t < 0$ 0 при остальных t $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}} \dfrac{\gamma(\lambda, iax)}{x^{\lambda}} = \dfrac{1}{\lambda} a^{\lambda} {}_1F_1(\lambda;\ \lambda+1;\ -iax)$
53 $\|t\|^{\lambda-1}, \quad \|t\| < a$ 0 при остальных t $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$\dfrac{2}{\lambda} a^{\lambda} {}_1F_2\left(\dfrac{\lambda}{2};\ \dfrac{\lambda}{2}+1;\ -\dfrac{a^2x^2}{4}\right)$
54 $\|t\|^{\lambda-1} \operatorname{sgn} t, \quad \|t\| < a$ 0 при остальных t $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$\dfrac{2ix}{\lambda+1} a^{\lambda+1} {}_1F_2\left(\dfrac{\lambda+1}{2};\ \dfrac{\lambda+1}{2}+1,\ \dfrac{3}{2};\ -\dfrac{a^2x^2}{4}\right)$
55 $(t+a)^n$	$2\pi\left(a - i\dfrac{d}{dx}\right)^n \delta(x)$
56 $(t+a)^n \operatorname{sgn} t$	$2a^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{(n-k)!} \left(\dfrac{-i}{ax}\right)^{k+1}$
57 $\theta(t)(t+a)^n$	$a^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{(n-k)!} \dfrac{(-i)^{k+1}}{(ax)^{k+1}} + \pi\left(a - i\dfrac{d}{dx}\right)^n \delta(x) =$ $= -(-i)^{n+1} e^{-iax} \dfrac{d^n}{dx^n}\left[\dfrac{e^{iax}}{x+i0}\right]$

f	$F[f]$
58 $(t+a)^{-n-1}$	$\frac{i^{n+1}\pi x^n}{n!}\operatorname{sgn} x\, e^{-iax}$
59 $(t+a)^{-n-1}\operatorname{sgn} t$	$-\frac{2(ix)^n}{n!}\left\{e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\|x\|)+i\operatorname{Si}(ax)]-\sum_{k=1}^{n}(k-1)!\left(\frac{-i}{ax}\right)^k\right.$
60 $\theta(t)(t+a)^{-n-1}$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{n!}\frac{(ix)^{n-k}}{a^k}-\frac{(ix)^n}{n!}e^{-iax}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]+i\operatorname{Si}(ax)-i\frac{\pi}{2}\right\}=$ $=\frac{(ix)^n}{n!}\left\{\sum_{k=1}^{n}(k-1)!\left(\frac{-i}{ax}\right)^k-\right.$ $\left.-e^{-iax}\left[\operatorname{ci}(a\|x\|)+i\operatorname{Si}(ax)-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right]\right\}$
61 $t_+(t+a)^{-1}$	$ae^{-iax}[\operatorname{ci}(a\|x\|)+i\operatorname{sgn} x\operatorname{si}(a\|x\|)]+ix^{-1}+\pi\delta(x)=$ $=ae^{-iax}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]+i\operatorname{Si}(ax)-i\frac{\pi}{2}\right\}+\frac{i}{x+i0}$

62 $t(t+a)^{-1}$	$-a\pi \operatorname{sgn} x\, e^{-iax} + 2\pi\delta(x)$
63 $\lvert t\rvert (t+a)^{-1}$	$2ae^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) + i\operatorname{Si}(ax)] + 2ix^{-1}$
64 $\theta(t)(t+a)^{-1}$	$-e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) + i\operatorname{sgn} x \operatorname{si}(a\lvert x\rvert)] = -e^{-iax}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)] + i\operatorname{Si}(ax) - i\frac{\pi}{2}\right\}$
65 $(t+a)^{-1}$	$i\pi \operatorname{sgn} x e^{-iax}$
66 $(t+a)^{-1}\operatorname{sgn} t$	$-2e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) + i\operatorname{Si}(ax)]$
67 $t_+^{-1}(t+a)^{-1}$	$\frac{1}{a}\left\{e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) + i\operatorname{sgn} x \operatorname{si}(a\lvert x\rvert)] - \ln C\lvert x\rvert + \frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn} x\right\} = \frac{1}{a}\left\{e^{-iax}\left[\operatorname{ci}(a(x+i0)) + i\operatorname{Si}(ax) - i\frac{\pi}{2}\right] - \gamma + i\frac{\pi}{2} - \ln(x+i0)\right\}$
68 $t^{-1}(t+a)^{-1}$	$-\frac{i\pi}{a}\operatorname{sgn} x\,(e^{-iax}-1)$
69 $\lvert t\rvert^{-1}(t+a)^{-1}$	$\frac{2}{a}\left\{e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert) + i\operatorname{Si}(ax)] - \ln C\lvert x\rvert\right\}$

f	$F[f]$
70 $t_+^{-2}(t+a)^{-1}$	$\frac{1}{a^2}\Big\{-e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)+i\operatorname{sgn}x\operatorname{si}(a\lvert x\rvert)]+\ln C\lvert x\rvert-\frac{\pi a\lvert x\rvert}{2}-iax(\ln C\lvert x\rvert-1)-\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}x\Big\}=$ $=\frac{1}{a^2}\Big\{-e^{-iax}\Big[\operatorname{ci}(a(x+i0))+i\operatorname{Si}(ax)-i\frac{\pi}{2}\Big]-iax\Big[\gamma-i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)-1\Big]+\gamma-i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\Big\}$
71 $t^{-2}(t+a)^{-1}$	$\frac{\pi}{a^2}\operatorname{sgn}x\,[i(e^{-iax}-1)-ax]$
72 $t^{-2}\operatorname{sgn}t\,(t+a)^{-1}$	$\frac{1}{a^2}\{-2e^{-iax}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)+i\operatorname{Si}(ax)]+2\ln C\lvert x\rvert-2iax(\ln C\lvert x\rvert-1)\}$
73 $(t-a)^n$	$(-1)^n 2\pi\left(a+i\frac{d}{dx}\right)^n\delta(x)$
74 $(t-a)^n\operatorname{sgn}t$	$2(-a)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{i}{ax}\right)^{k+1}$

75	$\theta(t)(t-a)^n$	$-(-i)^{n+1}e^{iax}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{iax}\frac{1}{x+i0}\right]=$ $=-(-i)^{n+1}e^{iax}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{e^{iax}}{x}\right]+\pi(-i)^n e^{iax}\delta^{(n)}(x)$
76	$\theta(t)(t-a)^{-1}$	$-e^{iax}\{\mathrm{ci}(a\|x\|)-i\,\mathrm{sgn}\,x\,[\mathrm{si}(a\|x\|)+\pi]\}=$ $=-e^{iax}\left\{\mathrm{ci}[a(x+i0)]-i\,\mathrm{Si}(ax)-i\frac{\pi}{2}\right\}$
77	$(t-a)^{-1}$	$i\pi\,\mathrm{sgn}\,x\,e^{iax}$
78	$(t-a)^{-1}\,\mathrm{sgn}\,t$	$-2e^{iax}[\mathrm{ci}(a\|x\|)-i\,\mathrm{Si}(ax)]$
79	$\theta(t)(t-a)^{-n-1}$	$-\frac{(ix)^n}{n!}\Big\{e^{iax}[\mathrm{ci}(a\|x\|)-i\,\mathrm{sgn}\,x(\mathrm{si}(a\|x\|)+\pi)]-$ $-\sum_{k=1}^{n}(k-1)!\frac{i^k}{(ax)^k}\Big\}=-\frac{(ix)^n}{n!}\Big\{e^{iax}\Big[\mathrm{ci}(a(x+i0))-$ $-i\,\mathrm{Si}(ax)-\frac{i\pi}{2}\Big]-\sum_{k=1}^{n}(k-1)!\frac{i^k}{(ax)^k}\Big\}$
80	$(t-a)^{-n-1}$	$\frac{\pi i^{n+1}}{n!}x^n e^{iax}$

f	$F[f]$
81 $(t-a)^{-n-1}\operatorname{sgn} t$	$-\frac{2(ix)^n}{n!}\left\{e^{iax}[\operatorname{ci}(a\|x\|)-i\operatorname{Si}(ax)]-\sum_{k=1}^{n}(k-1)!\frac{i^k}{(ax)^k}\right\}$
82 $t_+(t-a)^{-1}$	$-ae^{iax}\{\operatorname{ci}(a\|x\|)-i\operatorname{sgn} x[\operatorname{si}(a\|x\|)+\pi]\}+ix^{-1}+\pi\delta(x)=$ $=-ae^{iax}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]-i\operatorname{Si}(ax)-i\frac{\pi}{2}\right\}+\frac{i}{x+i0}$
83 $t(t-a)^{-1}$	$\pi ai\operatorname{sgn} x\, e^{iax}+2\pi\delta(x)$
84 $\|t\|(t-a)^{-1}$	$-2ae^{iax}[\operatorname{ci}(a\|x\|)-i\operatorname{Si}(ax)+2ix^{-1}]$
85 $t_+^{-1}(t-a)^{-1}$	$-\frac{e^{iax}}{a}\{\operatorname{ci}(a\|x\|)-i\operatorname{sgn} x[\operatorname{si}(a\|x\|)+\pi]\}+$ $+\frac{1}{a}\left[\ln C\|x\|-\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right]=-\frac{e^{iax}}{a}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]-i\operatorname{Si}(ax)-\frac{i\pi}{2}\right\}+$ $+\frac{1}{a}\left[\gamma-\frac{i\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]$
86 $t^{-1}(t-a)^{-1}$	$\frac{i\pi}{a}\operatorname{sgn} x\,(e^{iax}-1)$

87 $\lvert t\rvert^{-1}(t-a)^{-1}$	$-\frac{2}{a}\{e^{iax}[\mathrm{ci}(a\lvert x\rvert)-i\,\mathrm{Si}(ax)]-\ln C\lvert x\rvert\}$
88 $t_+^{-2}(t-a)^{-1}$	$-\frac{1}{a^2}e^{iax}\{\mathrm{ci}(a\lvert x\rvert)-i\,\mathrm{sgn}\,x\,[\mathrm{si}(a\lvert x\rvert)+\pi]\}+$ $+\frac{1}{a^2}\left[\ln C\lvert x\rvert+\frac{\pi a\lvert x\rvert}{2}+iax(\ln C\lvert x\rvert-1)-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x\right]=$ $=-\frac{1}{a^2}e^{iax}\left\{\mathrm{ci}[a(x+i0)]-i\,\mathrm{Si}(ax)-\frac{i\pi}{2}\right\}+$ $+\frac{1}{a^2}\left[\gamma-i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]$
89 $t^{-2}(t-a)^{-1}$	$\frac{\pi}{a^2}\,\mathrm{sgn}\,x\,[i(e^{iax}-1)+ax]$
90 $t^{-2}\,\mathrm{sgn}\,t\,(t-a)^{-1}$	$\frac{1}{a^2}\{-2e^{iax}[\mathrm{ci}(a\lvert x\rvert)-i\,\mathrm{Si}(ax)]+2\ln C\lvert x\rvert-2iax(\ln C\lvert x\rvert-1)\}$
91 $t(a-t)^{-1}$, $0<t<a$ 0 при остальных t	$a[\mathrm{ci}(a\lvert x\rvert)-\ln C\lvert x\rvert-i\,\mathrm{Si}(ax)]e^{iax}-ix^{-1}(1-e^{iax})$
92 $(a-t)^{-1}$, $0<t<a$ 0 при остальных t	$[\mathrm{ci}(a\lvert x\rvert)-\ln C\lvert x\rvert-i\,\mathrm{Si}(ax)]e^{iax}=$ $=\{\mathrm{ci}[a(x+i0)]-i\,\mathrm{Si}(ax)-\gamma-\ln(x+i0)$

f	$F[f]$
93	
$t^{-1}(a-t), \quad 0 < t < a$ 0 при остальных t	$\frac{1}{a}\{[\mathrm{ci}(a\|x\|)-\ln G\|x\|](1+e^{iax})+i\,\mathrm{Si}(ax)(1-e^{iax})\}$
94	
$\theta(t-a)$	$\pi\delta(x)+ix^{-1}e^{iax}$
95	
$(t-a)_+$	$-x^{-2}e^{iax}-\pi[a\delta(x)+i\delta'(x)]=\frac{-e^{iax}}{(x+i0)^2}$
96	
$t-a, \quad \|t\|>a$ $0, \quad \|t\|<a$	$-2\pi[a\delta(x)+i\delta'(x)]-2ix^{-2}(\sin ax-axe^{-iax})$
97	
$(t-a)\,\mathrm{sgn}\,t, \quad \|t\|>a$ $0, \quad \|t\|<a$	$-2x^{-2}\cos ax-\frac{i}{\pi}x^{-1}e^{-iax}$
98	
$(t-a)_+^{-1}$	$-\left(\ln C\|x\|-i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x\right)e^{iax}$
99	
$(t-a)^{-1}, \quad \|t\|>a$ $0, \quad \|t\|<a$	$\{\mathrm{ci}(2a\|x\|)-\ln C\|x\|-i[\mathrm{Si}(2ax)-\pi\,\mathrm{sgn}\,x]\}e^{iax}$

100 $(t-a)^{-1}\operatorname{sgn} t, \quad \lvert t\rvert > a$; $0, \quad \lvert t\rvert < a$	$-[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)+\ln C\lvert x\rvert - i\operatorname{Si}(2ax)]\,e^{iax}$
101 $(a-t)^{-n-1}, \quad 0 < t < a$; 0 при остальных t	$\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)-\ln\lvert x\rvert+\psi(n+1)-i\operatorname{Si}(ax)]\,e^{iax}$
102 $(a-t)^{\lambda-1}, \quad 0 < t < a$; 0 при остальных t; $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$\frac{1}{\lambda}a^{\lambda}{}_1F_1(\lambda;\lambda+1;-iax)\,e^{iax}=e^{i\lambda\pi/2}(x+i0)^{-\lambda}e^{iax}\gamma(\lambda, iax)$
103 $\theta(t-a)(t-a)^{-\lambda-1}$; $\lambda \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\Gamma(-\lambda)\,e^{iax}e^{-i\lambda\pi/2}(x+i0)^{\lambda}$
104 $(t^2+a^2)^n$	$2\pi\left(a^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)^n\delta(x)$
105 $(t^2+a^2)^{-\lambda}$; $\lambda \neq -1, -2, \ldots$	$\frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda)}\left(\frac{\lvert x\rvert}{2a}\right)^{\lambda-1/2}K_{\lambda-1/2}(a\lvert x\rvert)$
106 $(t^2+a^2)^{-n}$	$\frac{2(-1)^{n-1}\pi^2}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{2a\,\partial a}\right)^{n-1}\frac{e^{-a\lvert x\rvert}}{a}$

f	$F[f]$
107 $(t^2+a^2)^{-n}\operatorname{sgn} t$	$\frac{4\pi i(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{2a\,\partial a}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{a}\left[-\operatorname{chi}(a\lvert x\rvert)\operatorname{sh} ax+\operatorname{shi}(ax)\operatorname{ch} ax\right]\right\}$
108 $(t^2+a^2)^{-1}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert x\rvert}$
109 $\operatorname{sgn} t\,(t^2+a^2)^{-1}$	$-\frac{2i}{a}\left[\operatorname{chi}(a\lvert x\rvert)\operatorname{sh} ax-\operatorname{shi}(ax)\operatorname{ch}(ax)\right]$
110 $t\,(t^2+a^2)^{-1}$	$i\pi\operatorname{sgn} x\,e^{-a\lvert x\rvert}$
111 $\lvert t\rvert\,(t^2+a^2)^{-1}$	$-2\left[\operatorname{chi}(a\lvert x\rvert)\operatorname{ch} ax-\operatorname{shi}(ax)\operatorname{sh}(ax)\right]$
112 $t^2(t^2+a^2)^{-1}$	$-\pi a e^{-a\lvert x\rvert}+2\pi\delta(x)$
113 $t^2\operatorname{sgn} t\,(t^2+a^2)^{-1}$	$2ai\left[\operatorname{chi}(a\lvert x\rvert)\operatorname{sh} ax-\operatorname{shi}(ax)\operatorname{ch}(ax)\right]+2ix^{-1}$
114 $t^3(t^2+a^2)^{-1}$	$-ia^2\pi\operatorname{sgn} x\,e^{-a\lvert x\rvert}+2\pi i\delta'(x)$
115 $\lvert t\rvert^3(t^2+a^2)^{-1}$	$2a^2\left[\operatorname{chi}(a\lvert x\rvert)\operatorname{ch} ax-\operatorname{shi}(ax)\operatorname{sh} ax\right]-2x^{-2}$
116 $t^{-1}(t^2+a^2)^{-1}$	$-\frac{\pi}{a^2}i\operatorname{sgn} x\,(e^{-a\lvert x\rvert}-1)$

117 $\lvert t\rvert^{-1}(t^2+a^2)^{-1}$	$\frac{2}{a^2}[\mathrm{chi}(a\lvert x\rvert)\,\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{shi}(ax)\,\mathrm{sh}\,ax]+\ln C\lvert x\rvert$
118 $t_+^{-1}(t^2+a^2)^{-1}$	$-\frac{1}{a^2}\left\{\mathrm{chi}[-a(x+i0)]\,\mathrm{ch}\,ax+i\left[\frac{\pi}{2}-i\,\mathrm{shi}(ax)\right]\mathrm{sh}\,ax+\gamma-i\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\ln(x+i0)\right\}$
119 $t^{-2}(t^2+a^2)^{-1}$	$-\frac{\pi}{a^3}(e^{-a\lvert x\rvert}+a\lvert x\rvert)$
120 $t^{-2}\,\mathrm{sgn}\,t\,(t^2+a^2)^{-1}$	$\frac{2i}{a^3}[\mathrm{chi}(a\lvert x\rvert)\,\mathrm{sh}\,ax-\mathrm{shi}(ax)\,\mathrm{ch}\,ax+ax(\ln C\lvert x\rvert-1)]$
121 $t_+^{-2}(t^2+a^2)^{-1}$	$-\frac{1}{a^3}\left\{\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{chi}[a(x+i0)]\,\mathrm{sh}\,ax+\left[\frac{\pi}{2}-i\,\mathrm{shi}(ax)\right]\mathrm{ch}\,ax+\right.$ $\left.+iax\left[\gamma-i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)-1\right]\right\}$
122 $t(t^2+a^2)^{-2}$	$\frac{\pi i}{2a}xe^{-a\lvert x\rvert}$
123 $\lvert t\rvert(t^2+a^2)^{-2}$	$\frac{x}{a}[\mathrm{chi}(a\lvert x\rvert)\,\mathrm{sh}\,ax-\mathrm{shi}(ax)\,\mathrm{ch}\,ax]$

f	$F[f]$
124	
$t^2(t^2+a^2)^{-2}$	$-\frac{\pi}{2a}(a\|x\|-1)e^{-a\|x\|}$
125	
$t^2 \operatorname{sgn} t\,(t^2+a^2)^{-2}$	$-\frac{i}{a}[\operatorname{chi}(a\|x\|)(\operatorname{sh} ax+ax\operatorname{ch} ax)-\operatorname{shi}(ax)(\operatorname{ch} ax+ax\operatorname{sh} ax)]$
126	
$t(a^2-t^2)^{\lambda}, \quad \|t\|<a$ $0, \quad \|t\|>a$ $\lambda \neq -1, -2, -3, \dots$	$i\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,a^{2\lambda+2}\operatorname{sgn} x\left(\frac{a\|x\|}{2}\right)^{-\lambda-1/2} J_{\lambda+3/2}(a\|x\|)$
127	
$\|t\|(a^2-t^2)^{\lambda}, \quad \|t\|<a$ $0 \quad \|t\|>a$ $\lambda \neq -1, -2, -3, \dots$	$-\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,a^{2\lambda+2}\left(\frac{ax}{2}\right)^{-\lambda-1/2}\mathbf{H}_{\lambda+3/2}(a\|x\|)+a^{2\lambda+2}(\lambda+1)^{-1}$
128	
$(a^2-t^2)^n, \quad \|t\|<a$ $0, \quad \|t\|>a$	$(-1)^n 2^{n+1} n!\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \frac{\sin ax}{x}$
129	
$\operatorname{sgn} t\,(a^2-t^2)^n, \quad \|t\|<a$ $0, \quad \|t\|>a$	$(-2)^{n+1}n!\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \frac{\cos ax}{x}+2ia^{2n}x^{-1}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (2k)!\,(ax)^{-2k}$

130 $(a^2-t^2)^\lambda, \quad \lvert t\rvert < a$ $0, \quad \lvert t\rvert > a$ $\lambda \neq -1, -2, -3, \ldots$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,a^{2\lambda+1}\left(\frac{a\lvert x\rvert}{2}\right)^{-\lambda-1/2} J_{\lambda+1/2}(a\lvert x\rvert)$
131 $\operatorname{sgn} t\,(a^2-t^2)^\lambda, \quad \lvert t\rvert < a$ $0, \quad \lvert t\rvert > a$ $\lambda \neq -1, -2, -3, \ldots$	$i\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,a^{2\lambda+1}\operatorname{sgn} x\left(\frac{a\lvert x\rvert}{2}\right)^{-\lambda-1/2}\mathrm{H}_{\lambda+1/2}(a\lvert x\rvert)$
132 $(t^2-a^2), \quad \lvert t\rvert > a$ $0, \quad \lvert t\rvert < a$	$-2\pi[a^2\delta(x)+\delta''(x)]+4x^{-3}(\sin ax - ax\cos ax)$
133 $\operatorname{sgn} t\,(t^2-a^2), \quad \lvert t\rvert > a$ $0, \quad \lvert t\rvert < a$	$-4ix^{-3}(\cos ax + ax\sin ax)$
134 $(t^2-a^2)^\lambda, \quad \lvert t\rvert > a$ $0, \quad \lvert t\rvert < a$ $\lambda \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$	$-\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{\lvert x\rvert}{2a}\right)^{-\lambda-1/2} Y_{-\lambda-1/2}(a\lvert x\rvert)$
135 $\operatorname{sgn} t\,(t^2-a^2)^\lambda, \quad \lvert t\rvert > a$ $0, \quad \lvert t\rvert < a$ $\lambda \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$	$i\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\operatorname{sgn} x\left(\frac{\lvert x\rvert}{2a}\right)^{-\lambda-1/2} J_{-\lambda-1/2}(a\lvert x\rvert)$

	f	$F[f]$
136	$(t^2-a^2)^{-n}, \quad n=1, 2, 3, \dots$	$-\frac{\pi}{(\pi-1)!}\left(\frac{\partial}{2a\,\partial a}\right)^{n-1}\frac{\sin a\lvert x\rvert}{a}$
137	$\operatorname{sgn} t\,(t^2-a^2)^{-n}, \quad n=1, 2, 3, \dots$	$\frac{2i}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{2a\,\partial a}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{a}\left[\operatorname{Si}(ax)\cos ax+\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\sin a\lvert x\rvert\right]\right\}$
138	$(t^2-a^2)^{-1}$	$-\frac{\pi}{a}\sin a\lvert x\rvert$
139	$\operatorname{sgn} t\,(t^2-a^2)^{-1}$	$\frac{2i}{a}\left[\operatorname{Si}(ax)\cos ax+\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\sin a\lvert x\rvert\right]$
140	$\theta(t)\,(t^2-a^2)^{-1}$	$\frac{i}{a}\left\{\operatorname{Si}(ax)\cos ax-\operatorname{ci}[a(x+i0)]\sin ax+i\frac{\pi}{2}\sin ax\right\}$
141	$(a^2-t^2)^{-1}, \quad \lvert t\rvert<a$ $0, \quad \lvert t\rvert>a$	$\frac{1}{a}\left\{\operatorname{Si}(2ax)\sin ax+\left[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)-\gamma-\ln\lvert x\rvert\right]\cos ax\right\}$
142	$\operatorname{sgn} t\,(a^2-t^2)^{-1}, \quad \lvert t\rvert<a$ $0, \quad \lvert t\rvert>a$	$\frac{i}{a}\left\{\left[\operatorname{Si}(2ax)-2\operatorname{Si}(ax)\right]\cos ax-\left[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)-2\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)+\gamma+\ln\lvert x\rvert\right]\sin ax\right\}$

143 $(t^2-a^2)^{-1}$, $\lvert t\rvert > a$; 0, $\lvert t\rvert < a$	$\frac{1}{a}\{[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)-\gamma-\ln\lvert x\rvert]\cos ax+[\operatorname{Si}(2ax)-\pi\operatorname{sgn}x]\sin ax\}$
144 $\operatorname{sgn}t\,(t^2-a^2)^{-1}$, $\lvert t\rvert > a$; 0, $\lvert t\rvert < a$	$-\frac{i}{a}\{[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)+\gamma+\ln\lvert x\rvert]\sin ax-\operatorname{Si}(2ax)\cos ax\}$
145 $t\,(t^2-a^2)^{-1}$	$i\pi\operatorname{sgn}x\cos ax$
146 $\lvert t\rvert\,(t^2-a^2)^{-1}$	$-2\,[\operatorname{Si}(ax)\sin ax-\operatorname{sgn}x\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\cos ax]$
147 $t^2\,(t^2-a^2)^{-1}$	$-\pi a\sin a\lvert x\rvert+2\pi\delta(x)$
148 $t^2\operatorname{sgn}t\,(t^2-a^2)^{-1}$	$2ai\,[\operatorname{Si}(ax)\cos ax+\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\sin a\lvert x\rvert]+2ix^{-1}$
149 $t^3\,(t^2-a^2)^{-1}$	$i\pi a^2\operatorname{sgn}x\cos ax-2\pi i\delta'(x)$
150 $\lvert t\rvert^3\,(t^2-a^2)^{-1}$	$-2a^2\,[\operatorname{Si}(ax)\sin ax-\operatorname{sgn}x\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\cos ax]-2x^{-2}$
151 $t^{-1}\,(t^2-a^2)^{-1}$	$-\frac{\pi i}{a^2}\operatorname{sgn}x\,(1-\cos ax)$
152 $\lvert t\rvert^{-1}\,(t^2-a^2)^{-1}$	$-\frac{2}{a^2}\,[\operatorname{Si}(ax)\sin ax-\operatorname{sgn}x\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\cos ax-\ln C\lvert x\rvert]$

f	$F[f]$
153 $t_+^{-1}(t^2-a^2)^{-1}$	$-\frac{1}{a^2}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]\cos ax+\operatorname{Si}(ax)\sin ax+i\frac{\pi}{2}-\gamma-\ln(x+i0)\right\}$
154 $t^{-1}(a^2-t^2)^{-1}, \quad \lvert t\rvert<a$; $0, \quad \lvert t\rvert>a$	$-\frac{i}{a^2}\left\{\operatorname{Si}(2ax)\cos ax-2\operatorname{Si}(ax)-[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)-\ln C\lvert x\rvert]\sin ax\right\}$
155 $t(t^2-a^2)^{-2}$	$-\frac{\pi i}{2a}x\sin a\lvert x\rvert$
156 $\lvert t\rvert(t^2-a^2)^{-2}$	$\frac{x}{a}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)\sin ax-\operatorname{Si}(ax)\cos ax]$
157 $t^2(t^2-a^2)^{-2}$	$-\frac{\pi}{2a}(a\lvert x\rvert\cos ax+\sin a\lvert x\rvert)$
158 $t^2\operatorname{sgn}t\,(t^2-a^2)^{-2}$	$-\frac{i}{a}[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)(\sin ax+ax\cos ax)-\operatorname{Si}(ax)(\cos ax-ax\sin ax)]$
159 $t^{-1}(a^2-t^2)^{-1}, \quad \lvert t\rvert<a$; $0, \quad \lvert t\rvert>a$	$-i\operatorname{Si}(2ax)\cos ax+i[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)-\ln C\lvert x\rvert]\sin ax$
160 $\lvert t\rvert^{-1}(a^2-t^2)^{-1}, \quad \lvert t\rvert<a$; $0, \quad \lvert t\rvert>a$	$-[\operatorname{Si}(2ax)-2\operatorname{Si}(ax)]\sin ax-[\operatorname{ci}(2a\lvert x\rvert)-2\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)+\ln C\lvert x\rvert]\cos ax$

161 $(t^2-a^2)^{-2}, \quad \|t\|<a$ $0, \quad \|t\|>a$	$\frac{1}{2a^3}\Big\{[\operatorname{ci}(2a\|x\|)-\ln C\|x\|+1](\cos ax+ax\sin ax)+$ $+\operatorname{Si}(2ax)(\sin ax-ax\cos ax)-\frac{1}{2}\cos ax\Big\}$
162 $\operatorname{sgn} t\,(t^2-a^2)^{-2}, \quad \|t\|<a$ $0, \quad \|t\|>a$	$\frac{i}{2a^3}\Big\{[\operatorname{ci}(2a\|x\|)-2\operatorname{ci}(a\|x\|)+\ln C\|x\|](ax\cos ax-\sin ax)+$ $+[\operatorname{Si}(2ax)-2\operatorname{Si}(ax)-1](\cos ax+ax\sin ax)+\frac{1}{2}\sin ax\Big\}$
163 $(2at-t^2)^{\lambda}$, $0<t<2a$ 0 при остальных t $\lambda\neq-1,-2,\ldots$	$\left(\frac{2}{a}\right)^{\lambda+1/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\,e^{iax}(x+i0)^{-\lambda-1/2}J_{\lambda+\frac{1}{2}}[a(x+i0)]$
164 $\theta(t-b)\frac{1}{t+a}$	$-e^{-iax}\Big\{\operatorname{ci}[(a+b)(x+i0)]+i\operatorname{Si}[(a+b)x]-i\frac{\pi}{2}\Big\}=$ $=-e^{-iax}\Big\{\operatorname{ci}[(a+b)\|x\|]+i\operatorname{Si}[(a+b)x]-\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn} x\Big\}$
165 $\frac{1}{t+a}, \quad 0<b<t<c$ 0 при остальных t	$e^{-iax}\{\operatorname{ci}[(a+c)(x+i0)]+i\operatorname{Si}[(a+c)x]-$ $-\operatorname{ci}[(a+b)(x+i0)]-i\operatorname{Si}[(a+b)x]\}$

f	$F[f]$
166 $\theta(t-b)\dfrac{1}{(t+a)^n}$, $n=2, 3, \ldots$	$e^{ibx}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\dfrac{(m-1)!}{(n-1)!}(ix)^{n-m-1}-\dfrac{(ix)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-iax}\left\{\operatorname{ci}[(a+b)(x+i0)]+i\operatorname{Si}[(a+b)x]-i\dfrac{\pi}{2}\right\}$
167 $\dfrac{t_+^n}{t+a}$	$(-1)^{n-1}a^n e^{-iax}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]+i\operatorname{Si}(ax)-i\dfrac{\pi}{2}\right\}+(-a)^n\sum\limits_{m=1}^{n}(m-1)!\,(-a)^{-m}i^m(x+i0)^{-m}$
168 $\theta(t-a)\,t^{-1/2}$	$\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}\left\{1-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\left[C\left(\sqrt{\dfrac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\dfrac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)\right]\right\}(x+i0)^{-1/2}=$ $=\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}\left(x_+^{-1/2}-ix_-^{-1/2}\right)-\sqrt{2\pi}x^{-1/2}\left[C\left(\sqrt{\dfrac{2ax}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\dfrac{2ax}{\pi}}\right)\right]$

169 $t^{-1/2}, \quad 0<t<a$ 0 при остальных t	$\sqrt{2\pi}x^{-1/2}\left[C\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)\right]$
170 $\theta(t)(t+a)^{-1/2}$	$e^{-iax}\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}(x+i0)^{-1/2}-\sqrt{2\pi}e^{-iax}x^{-1/2}\left[C\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)+\right.$ $\left.+iS\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)\right]$
171 $\theta(t-a)t^{-3/2}$	$\frac{2}{\sqrt{a}}e^{iax}-2\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}(x+i0)^{1/2}-2^{3/2}\sqrt{\pi}ix^{1/2}\left[C\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)+\right.$ $\left.+iS\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)\right]$
172 $\theta(t)(t+a)^{-3/2}$	$\frac{2}{\sqrt{a}}-2\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}(x+i0)^{1/2}e^{-iax}-2^{3/2}\sqrt{\pi}ie^{-iax}x^{1/2}\left[C\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)+\right.$ $\left.+iS\left(\sqrt{\frac{2ax}{\pi}}\right)\right]$
173 $t_+^{1/2}(t+a)^{-1}$	$\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}(x+i0)^{-1/2}-\pi\sqrt{a}e^{-iax}\times$ $\times\left\{1-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\left[C\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)\right]\right\}$

f	$F[f]$
174 $t^{-1}(t-a)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi}e^{iax}e^{i\pi/4}(x+i0)^{-1/2}-\pi\sqrt{a}\left\{1-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\left[C\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{2\pi}}\right)\right]\right\}$
175 $(1+2at)\,t_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi}e^{3i\pi/4}(x+i0)^{-3/2}(-ix+a)$
176 $t_+^{-1/2}\quad(t+a)^{-1}$	$\frac{\pi}{\sqrt{a}}e^{-iax}\left\{1-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\left[C\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)\right]\right\}$
177 $t^{-1}(t-a)_+^{-1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{1-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\left[C\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)+iS\left(\sqrt{\frac{2a(x+i0)}{\pi}}\right)\right]\right\}$
178 $\theta(t-a)\,t\,(t^2-a^2)^{-1/2}$	$-\frac{\pi a}{2}H_1^{(1)}[a(x+i0)]=\frac{\pi a}{2}\begin{cases}H_1^{(1)}(ax), & x>0\\ H_1^{(2)}(a\vert x\vert), & x<0\end{cases}$
179 $\theta(t)(t+a)(t^2+2at)^{-1/2}$	$-\frac{\pi a}{2}e^{-iax}H_1^{(1)}[a(x+i0)]$

180 $(a-t)(2at-t^2)^{-1/2}$, $0 < t < 2a$ 0 при остальных t	$-i\pi a e^{iax} J_1(x)$
181 $\theta(t)(t^2+2at)^{-1/2}$	$\frac{\pi i}{2} e^{-iax} H_0^{(1)}[a(x+i0)] = \frac{\pi i}{2} e^{-iax} \begin{cases} H_0^{(1)}(ax), & x > 0 \\ H_0^{(2)}(a\|x\|), & x < 0 \end{cases}$
182 $\theta(t)(t^2+2at)^{1/2}$	$-\frac{i\pi a}{2} e^{-iax}(x+i0)^{-1} H_1^{(1)}[a(x+i0)]$
183 $\theta(t)(t^2+2at)^{\lambda-1/2}$ $\lambda \neq -n-\frac{1}{2}$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(2a)^{\lambda} e^{i\pi(\lambda+1/2)} e^{-iax}(x+i0)^{-\lambda} H_{\lambda}^{(1)}[a(x+i0)]$
184 $\theta(t)(t^2+it)^{\lambda-1/2}$ $\lambda \neq -n-1/2$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e^{i\lambda\pi} e^{x/2}(x+i0)^{-\lambda} K_{\lambda}\left(\frac{x+i0}{2}\right)$
185 $\theta(t)(t^2-it)^{\lambda-1/2}$ $\lambda \neq -n-1/2$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) e^{-x/2}(x+i0)^{-\lambda} K_{\lambda}\left[-\frac{1}{2}(x+i0)\right]$
186 0, $t < 0$ $[2a(t-2an)-(t-2an)^2]^{1/2}$, $2an < t < 2a(n+1)$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\pi a i}{(x+i0)\sin a(x+i0)} J_1[a(x+i0)]$

f	$F[f]$
187 $0, \quad t<0$ $[2a(t-2an)-(t-2an)^2]^{\lambda-1/2}$, $2an<t<2a(n+1)$ $\lambda \neq k-1/2$ $k, n=0, 1, 2, \ldots$	$\pi i \left(\frac{a}{2}\right)^{\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(x+i0)^{\lambda} \sin a(x+i0)} J_{\lambda}[a(x+i0)]$
188 $(2at-t^2)^{\lambda-1/2}, \quad 0<t<a$ $-(2at-t^2)^{\lambda-1/2}, \quad a<t<2a$ 0 при остальных t $\lambda \neq n-1/2$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-i(2a)^{\lambda} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(x+i0)^{\lambda}} \mathbf{H}_{\lambda}[a(x+i0)]$
189 $0, \quad t<0$ $[2a(t-2an)-(t-2an)^2]^{\lambda-1/2}$, $2an<t<(2n+1)a$ $-[2a(t-2an)-(t-2an)^2]^{\lambda-1/2}$, $(2n+1)a<t<(2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$ $\lambda \neq k-1/2$ $k=0, 1, 2, \ldots$	$\pi \left(\frac{a}{2}\right)^{\lambda} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(x+i0)^{\lambda} \sin a(x+i0)} \mathbf{H}_{\lambda}[a(x+i0)]$

190 $\theta\left(t-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{3}{4}+t-n-(t-n)^2\right]^{\lambda-1/2}$, $\frac{2n+1}{2}<t<\frac{2n+3}{2}$ $n=0, 1, 2, \ldots$ $\lambda \neq k-1/2$ $k=0, 1, 2, \ldots$	$2^{-\lambda-1}\pi\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\frac{iJ_\lambda(x+i0)-\mathrm{H}_\lambda(x+i0)}{(x+i0)\sin\frac{x+i0}{2}}$
191 $\theta(t-1)(t^2-1)^{-1/2}\left[(\sqrt{t^2-1}+t)^\lambda+(\sqrt{t^2-1}+t)^{-\lambda}\right]$	$\pi e^{i\frac{\lambda+1}{2}\pi}H_\lambda^{(1)}(x+i0)=\pi\begin{cases}e^{i\frac{\lambda+1}{2}\pi}H_\lambda^{(1)}(x), & x>0\\ e^{-i\frac{\lambda+1}{2}\pi}H_\lambda^{(2)}(\lvert x\rvert), & x<0\end{cases}$
192 $\theta(t)\left[(\sqrt{t+2a}+\sqrt{t})^{2\lambda}-(\sqrt{t+2a}-\sqrt{t})^{2\lambda}\right]$	$-(2a)^\lambda\lambda\pi e^{i\lambda\pi/2}e^{-iax}(x+i0)^{-1}H_\lambda^{(1)}[a(x+i0)]$
193 $\theta(t-a)\left[(\sqrt{t+a}+\sqrt{t-a})^{2\lambda}-(\sqrt{t+a}-\sqrt{t-a})^{2\lambda}\right]$	$-\lambda\pi(2a)^\lambda e^{i\lambda\pi/2}(x+i0)^{-1}H_\lambda^{(1)}[a(x+i0)]$
194 $\theta(t)(t+\sqrt{t^2+a^2})^{-1}$	$-\frac{i\pi}{2a(x+i0)}\mathrm{L}_1[-a(x+i0)]-\frac{1}{2a(x+i0)}\{K_1[a(x+i0)]-K_1[-a(x+i0)]\}+\frac{1}{a^2(x+i0)^2}$

§ 2. Ступенчатые и связанные с ними функции, сосредоточенные на $(0, \infty)$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
195	
$\theta(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } t>0 \\ 0 \text{ при } t<0 \end{cases}$	$i(x+i0)^{-1}=ix^{-1}+\pi\delta(x)$
196	
1 при $a<t<b$ 0 при остальных t	$ix^{-1}(e^{iax}-e^{ibx})$
197	
0 при $t<a$ 1 при $t>a$	$ie^{iax}(x+i0)^{-1}=ie^{iax}x^{-1}+\pi\delta(x)$
198	
1 при $0<t<a$ 0 при остальных t	$ix^{-1}(1-e^{iax})$
199	
1 при $0<t<a$ -1 при $a<t<2a$ 0 при остальных t	$ix^{-1}(1-e^{iax})^2$
200	
1 при $2a<t<a+b$ -1 при $a+b<t<2b$ 0 при остальных t	$ix^{-1}(e^{iax}-e^{ibx})^2$

201 t при $0 < t <$ $2a - t$ при $a < t < 2a$ 0 при остальных t	$-x^{-2}(1 - e^{iax})^2$
202 $t - 2a$ при $2a < t < a + b$ $2b - t$ при $a + b < t < 2b$ 0 при остальных t	$-x^{-2}(e^{iax} - e^{ibx})^2$
203 t	$-(x + i0)^{-2} = -x^{-2} - i\pi\delta'(x)$
204 t^n	$e^{i(n+1)\pi/2}\Gamma(n+1)(x+i0)^{-n-1} =$ $= i^{n+1}n!\, x^{-n-1} + (-i)^n \pi\delta^{(n)}(x)$
205 0 при $t < a$ $t - a$ при $a < t < b$ $b - a$ при $t > b$	$-\dfrac{e^{iax} - e^{ibx}}{(x+i0)^2} = -(e^{iax} - e^{ibx})x^{-2} - (a - b)\pi\delta'(x)$
206 0 при $t < 0$ t при $0 < t < a$ a при $t > a$	$(e^{iax} - 1)(x + i0)^{-2} = (e^{iax} - 1)x^{-2} + \pi a\delta'(x)$
207 0 при $t < a$ t^n при $t > a$	$i^{n+1}e^{iax}(x + i0)^{-n-1}\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{n!}{m!}e^{-i\pi m/2}a^m x^m$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
208 t^n при $0<t<a$ 0 при остальных t	$n!\,e^{i\pi(n+1)/2}(x+i0)^{-n-1}-$ $-e^{i\pi(n+1)/2}(x+i0)^{-n-1}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!}e^{-i\pi m/2}a^m x^m e^{iax}$
209 1 при $2na<t<(2n+1)a$ 0 при $(2n+1)a<t<(2n+2)a$ $n=0,1,2,\dots$	$\frac{i}{2}e^{-iax/2}\frac{1}{(x+i0)\cos\frac{a(x+i0)}{2}}$
210 0 при $2na<t<(2n+1)a$ 1 при $(2n+1)a<t<(2n+2)a$ $n=0,1,2,\dots$	$\frac{i}{2}e^{iax/2}\frac{1}{(x+i0)\cos\frac{a(x+i0)}{2}}$
211 1 при $na<t<\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a<t<(n+1)a$ $\nu>1,\ n=0,1,2,\dots$	$-(1-e^{iax/\nu})\frac{1}{(x+i0)\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
212 1 при $2na<t<(2n+1)a$	$(x+i0)^{-1}\operatorname{tg}\frac{a(x+i0)}{2}$

-1 при $(2n+1)a < t < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	
213	
0 при $t < a$ 1 при $(2n+1)a < t < (2n+2)a$ -1 при $(2n+2)a < t < (2n+3)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-e^{iax}(x+i0)^{-1}\operatorname{tg} a(x+i0)$
214	
$\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}$ при $na < t < (n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$i(x+i0)^{-1}(4-e^{iax})(4+2e^{iax})^{-1}$
215	
0 при $2na < t < (2n+1)a$ 1 при $(4n+1)a < t < (4n+2)a$ -1 при $(4n+3)a < t < (4n+4)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{2}(x+i0)^{-1}(1-e^{iax})\frac{1}{\cos a(x+i0)}$
216	
$[t]^2$	$-\frac{i}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{(x+i0)\sin^2\left(\frac{x+i0}{2}\right)}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
217	
0 при $na < t < \left(n+\frac{1}{\lambda}\right)a$ 1 при $\left(n+\frac{1}{\lambda}\right)a < t < \left(n+\frac{1}{\mu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\mu}\right)a < t < \left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ -1 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a < t < (n+1)a$ $1<\nu<\mu<\lambda$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{2}e^{-iax/2}\left(e^{iax/\lambda}-e^{iax/\mu}+e^{iax}-\right.$ $\left.-e^{iax/\nu}\right)\frac{1}{(x+i0)\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
218	
$\frac{t}{a}-2n$ при $2na<t<(2n+1)a$ $-\frac{t}{a}+2(n+1)$ при $(2n+1)a<t<(2n+2)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{a}(x+i0)^{-2}\operatorname{tg}\frac{a(x+i0)}{2}$
219	
$\frac{t}{a}-4n$ при $4na<t<(4n+1)a$ $-\frac{t}{a}+4n+2$ при $(4n+1)a<t<(4n+2)a$ 0 при $(4n+2)a<t<(4n+4)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{2i}{a}e^{-iax}\frac{\sin^2\frac{ax}{2}}{(x+i0)^2\sin 2a(x+i0)}$

220 $\frac{2\nu}{a}t-2\nu n$ при $na<t<\left(n+\frac{1}{2\nu}\right)a$ $-\frac{2\nu}{a}t+2\nu n+2$ при $\left(n+\frac{1}{2\nu}\right)a<t<\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a<t<(n+1)a$ $\nu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{4i}{a}\sin\frac{2ax}{4\nu}e^{iax(1/\nu-1)/2}\frac{1}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
221 $\frac{t}{a}-2n$ при $2na<t<\left(2n+\frac{1}{\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n+\frac{1}{\mu}\right)a<t<\left(2n+2-\frac{1}{\mu}\right)a$ $-\frac{t}{a}+2n+2$ при $\left(2n+2-\frac{1}{\mu}\right)a<t<(2n+2)a$ $\mu>1,\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{2i}{a}\frac{\sin\frac{ax}{2\mu}\sin\frac{ax}{2}\left(2-\frac{1}{\mu}\right)}{(x+i0)^2\sin a(x+i0)}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
222 $\frac{t}{a}-4n$ при $4na<t<\left(4n+\frac{1}{\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(4n+\frac{1}{\mu}\right)a<t<\left(4n+2-\frac{1}{\mu}\right)a$ $-\frac{t}{a}+4n+2$ при $\left(4n+2-\frac{1}{\mu}\right)a<t<(4n+2)a$ 0 при $(4n+2)a<t<(4n+4)a$ $\mu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{2i}{a}e^{-iax}\frac{\sin\frac{ax}{2\mu}\sin\left[\frac{ax}{2}\left(2-\frac{1}{\mu}\right)\right]}{(x+i0)^2\sin 2a(x+i0)}$
223 $\frac{2\nu}{a}t-2\nu n$ при $na<t<\left(n+\frac{1}{2\nu\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(n+\frac{1}{2\nu\mu}\right)a<t<\left(n+\frac{2\mu-1}{2\nu\mu}\right)a$ $-\frac{2\nu}{a}t+2\nu n+2$ при $\left(n+\frac{2\mu-1}{2\nu\mu}\right)a<t<\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a<t<(n+1)a$ $\nu,\ \mu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{\nu i}{a}e^{-iax/2}\left[1-e^{iax/2\nu\mu}+e^{iax/2}\right]\times$ $\times\frac{1}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$

224 $\frac{\nu t}{a} - n$ при $na < t < \left(n + \frac{1}{\nu}\right) a$ $-\frac{\nu}{a(\nu-1)} t + \frac{\nu(n+1)}{\nu-1}$ при $\left(n + \frac{1}{\nu}\right) a < t < (n+1) a$ $\nu > 1, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$	$-\frac{i}{2a(\nu-1)} \left[\nu(\nu-1) + \nu e^{iax} - \nu^2 e^{iax/\nu}\right] \times$ $\times e^{-iax/2} \frac{1}{(x+i0)^2 \sin \frac{a(x+i0)}{2}}$
225 $\frac{\nu}{a} t - 2n$ при $2na < t < \left(2n + \frac{1}{\nu}\right) a$ $-\frac{\nu}{a(\nu-1)} t + \frac{\nu(2n+1)}{\nu-1}$ при $\left(2n + \frac{1}{\nu}\right) a < t < (2n+1) a$ 0 при $(2n+1) a < t < (2n+2) a$ $\nu > 1, \ n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{i}{2a(\nu-1)} \left[\nu(\nu-1) + \nu e^{iax} - \nu^2 e^{iax/\nu}\right] e^{-iax} \times$ $\times \frac{1}{(x+i0)^2 \sin a(x+i0)}$
226 $\frac{\lambda\nu}{a} t - \lambda\nu n$ при $na < t < \left(n + \frac{1}{\lambda\nu}\right) a$ $-\frac{\lambda\nu}{a(\nu-1)} t + \frac{\nu(n+1)}{\nu-1}$ при $\left(n + \frac{1}{\lambda\nu}\right) a < t < \left(n + \frac{1}{\lambda}\right) a$ 0 при $\left(n + \frac{1}{\lambda}\right) a < t < (n+1) a$ $\lambda, \nu > 1, \ n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{i}{2a(\nu-1)} e^{-iax/2} \left[\lambda\nu(\nu-1) + \lambda\nu e^{iax/\lambda} - \lambda\nu^2 e^{iax/\lambda\nu}\right] \times$ $\times \frac{1}{(x+i0)^2 \sin \frac{a(x+i0)}{2}}$

	f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
227	$\frac{t}{a}-n$ при $na<t<(n+1)a$ $n=0,1,2,\ldots$	$\frac{i}{2a}e^{iax/2}\left[-iax+1-e^{-iax}\right]\frac{1}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
228	$\frac{t}{a}-2n$ при $2na<t<(2n+1)a$ 0 при $(2n+1)a<t<(2n+2)a$ $n=0,1,2,\ldots$	$-\frac{i}{2a}\left[iax-1+e^{-iax}\right]\frac{1}{(x+i0)^2\sin a(x+i0)}$
229	$\frac{\nu}{a}t-\nu n$ при $na<t<\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a<t<(n+1)a$ $\nu>1,\ n=0,1,2,\ldots$	$-\frac{i}{2a}\frac{\nu-(\nu-iax)e^{iax/2}}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}e^{-iax/2}$
230	$\frac{t}{a}-n$ при $na<t<\left(n+\frac{1}{\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(n+\frac{1}{\mu}\right)a<t<(n+1)a$ $\mu>1,\ n=0,1,2,\ldots$	$-\frac{i}{2a\mu}\left[\mu-\mu e^{iax/\mu}+iaxe^{iax}\right]e^{-iax/2}\times$ $\times\frac{1}{(x+i0)^2\sin^2\frac{(x+i0)}{2}}$

231 $\frac{t}{a}-2n$ при $2na < t < \left(2n+\frac{1}{\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n+\frac{1}{\mu}\right)a < t < (2n+1)a$ 0 при $(2n+1)a < t < (2n+2)a$ $\mu > 1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{i}{2a\mu}\left[\mu-\mu e^{iax/\mu}+iaxe^{iax}\right]e^{-iax}\frac{1}{(x+i0)^2\sin a(x+i0)}$
232 $\frac{\nu}{a}t-\nu n$ при $na < t < \left(n+\frac{1}{\nu\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(n+\frac{1}{\nu\mu}\right)a < t < \left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a < t < (n+1)a$ $\nu,\ \mu > 1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{i}{2a\mu}\left[\mu^{\nu}-\mu\nu e^{iax/\nu\mu}+iaxe^{iax/\nu}\right]\times$ $\times e^{-iax/2}\frac{1}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
233 $\frac{2t}{a}-(2n+1)$ при $na < t < (n+1)a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{1}{a}\left[2\sin\frac{ax}{2}-ax\cos\frac{ax}{2}\right]\frac{1}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
234 $-\frac{1}{\mu}$ при $na < t < \left(n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a$ $\frac{2t}{a}-(2n+1)$ при $\left(n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a < t < \left(n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a$	$\frac{1}{a\mu}\frac{-2\mu\sin\frac{ax}{2}+ax\cos\frac{ax}{2}}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
$\frac{1}{\mu}$ при $\left(n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a<t<(n+1)a$ $\mu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	
235	
$\frac{2t}{a}-(4n+1)$ при $2na<t<(2n+1)a$ $-\frac{2t}{a}+4n+3$ при $(2n+1)a<t<(2n+2)a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{2i}{a}\frac{\sin\frac{ax}{2}}{(x+i0)^2\cos\frac{a(x+i0)}{2}}-1$
236	
$-\frac{1}{\mu}$ при $2na<t<\left(2n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a$ $\frac{2t}{a}-(4n+1)$ при $\left(2n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a<t<\left(2n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a<t<\left(2n+\frac{3\mu-1}{2\mu}\right)a$ $-\frac{2t}{a}+4n+3$ при $\left(2n+\frac{3\mu-1}{2\mu}\right)a<t<\left(2n+\frac{3\mu+1}{2\mu}\right)a$ $-\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n+\frac{3\mu+1}{2\mu}\right)a<t<(2n+2)a$ $\mu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{2i}{a}\frac{\sin\frac{ax}{2\mu}}{(x+i0)\cos\frac{a(x+i0)}{2}}-\frac{1}{\mu}$

237 $n\left(t-\frac{(n+1)a}{2}\right)$ при $na < t < (n+1)a$ 0 при $t < a$ $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\frac{i}{2}e^{iax/2}\frac{1}{(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
238 0 при $(4n-1)a < t < (4n+1)a$ 2 при $(4n+1)a < t < (4n+3)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{(x+i0)\cos a(x+i0)}$
239 n при $na < t < (n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{e^{iax/2}}{2(x+i0)\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
240 $n+1$ при $na < t < (n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{e^{-iax/2}}{2(x+i0)\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
241 $2n+1$ при $2na < t < 2(n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{(x+i0)}\operatorname{ctg} a(x+i0)$
242 0 при $t < a$ $2n$ при $(2n-1)a < t < (2n+1)a$ $n=1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{(x+i0)\sin a(x+i0)}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
243 C_n^m при $na < t < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{i^{m+1}}{2^m} e^{i\frac{m+2}{2}ax} \dfrac{1}{(x+i0)\sin\dfrac{a(x+i0)}{2}}$
244 n^m при $na < t < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\dfrac{1-e^{iax}}{2(ai)^m(x+i0)} \dfrac{d^m}{dx^m} \dfrac{e^{-iax/2}}{\sin\dfrac{a(x+i0)}{2}}$
245 0 при $t<a$; $2n(t-an)$ при $(2n-1)a < t < (2n+1)a$, $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\dfrac{i}{(x+i0)^2 \sin a(x+i0)}$
246 $(t-na)$ при $na < t < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{1}{2i}\left[e^{-iax}+iax-1\right]e^{iax/2} \dfrac{1}{(x+i0)^2 \sin\dfrac{a(x+i0)}{2}}$
247 $(2n+1)t-2an(n+1)$ при $2na < t < 2(n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\dfrac{i}{(x+i0)^2}\operatorname{ctg} a(x+i0)$

248 $a-(-1)^n(2an+a-t)$ при $2na<t<2(n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{i}{(x+i0)^2}\operatorname{tg} a(x+i0)$
249 0 при $t<a$; $t-(-1)^n(t-2na)$ при $(2n-1)a<t<(2n+1)a$, $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\dfrac{1}{(x+i0)^2\cos a(x+i0)}$
250 $\dfrac{1}{4}[1-(-1)^n](2t-a)+\dfrac{1}{2}(-1)^n an$ при $na<t<(n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{-e^{iax/2}}{2}\dfrac{1}{(x+i0)^2\cos\dfrac{a(x+i0)}{2}}$
251 $\dfrac{t^2}{2}$ при $0<t<1$; $1-\dfrac{(t-2)^2}{2}$ при $1<t<2$; 1 при $t>2$	$-\dfrac{i(1-e^{ix})^2}{(x+i0)^3}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
252 $\frac{t^2}{2}$ при $0<t<1$ $\frac{3}{4}-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$ при $1<t<2$ $\frac{1}{2}(t-3)^2$ при $2<t<3$ 0 при остальных t	$-\frac{i(1-e^{ix})^3}{(x+i0)^3}$
253 $(t-na)^2$ при $na<t<(n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2i}{(x+i0)^3}-\frac{a^2-2iax}{2i(x+i0)^2\sin\frac{a(x+i0)}{2}}e^{iax/2}$
254 $\left[\frac{t}{a}\right]$ или n при $na<t<(n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{e^{iax/2}}{2(x+i0)\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$
255 $\left[\frac{t}{a}\right]+1$ или $n+1$ при $na<t<(n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{e^{-iax/2}}{2(x+i0)\sin\frac{a(x+i0)}{2}}$

256 $\frac{\alpha^{[t]}-1}{\alpha-1}$ или $\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}$ при $n < t < n-1$ $n=0, 1, 2, \ldots$ $0 < \alpha < 1$	$\frac{i}{(x+i0)(e^{-ix}-\alpha)}$
257 $\alpha^{[t]}$ или α^n при $n < t < n+1$ $n=0, 1, 2, \ldots$ $0 < \alpha < 1$	$i\frac{e^{-ix}-1}{x(e^{-ix}-\alpha)}$
258 $[t]\,\alpha^{[t]-1}$ или $n\alpha^{n-1}$ при $n < t < n+1$ $n=0, 1, 2, \ldots$ $0 < \alpha < 1$	$i\frac{e^{-ix}-1}{x(e^{-ix}-\alpha)^2}$
259 $\frac{1}{2}[t]([t]-1)\,\alpha^{[t]-2}$ или $\frac{1}{2}n(n-1)\,\alpha^{n-2}$ при $n < t < n+1$ $n=0, 1, 2, \ldots$ $0 < \alpha < 1$	$i\frac{e^{-ix}-1}{(e^{-ix}-\alpha)^3 x}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
260	
$\dfrac{\alpha^{[t]}-\beta^{[t]}}{\alpha-\beta}$ или	$i\dfrac{e^{-ix}-1}{(e^{-ix}-\alpha)(e^{-ix}-\beta)x}$
$\dfrac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}$ при $n<t<n+1$	
$n=0, 1, 2, \ldots$	
$\alpha\neq\beta,\ 0<\alpha,\ \beta<1$	
261	
$-\alpha\beta\dfrac{\alpha^{[t]-1}-\beta^{[t]-1}}{\alpha-\beta}$ или	$i\dfrac{(e^{-ix}-1)[e^{-ix}-(\alpha+\beta)]}{(e^{-ix}-\alpha)(e^{-ix}-\beta)x}$
$-\alpha\beta\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$ при $n<t<n+1,\ n=0, 1, 2, \ldots$	
$\alpha\neq\beta,\ 0<\alpha,\ \beta<1$	
262	
$-([t]-1)\alpha^{[t]}$ или	$i\dfrac{(e^{-ix}-1)(e^{-ix}-2\alpha)}{x(e^{-ix}-\alpha)^2}$
$-(n-1)\alpha^{n}$ при $n<t<n+1$	
$n=0, 1, 2, \ldots$	
$0<\alpha<1$	

263	
$[t]^2\,\alpha^{[t]-1}$ $0<\alpha<1$	$i\,\dfrac{(e^{-ix}-1)(e^{-ix}+\alpha)}{x\,(e^{-ix}-\alpha)^3}$
264	
$a\alpha^{[t]}-b\beta^{[t]}$ $0<\alpha,\ \beta<1$	$i\,\dfrac{(e^{-ix}-1)\,[(a-b)\,e^{-ix}-(a\beta-b\alpha)]}{x\,(e^{-ix}-\alpha)(e^{-ix}-\beta)}$
265	
$-\sum\limits_{i=0}^{\infty}\alpha_i$ при $t<\lambda_0$ $-\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i$ при $\lambda_n<t<\lambda_{n+1}$ $\lambda_n\geqslant 0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{i}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left(e^{i\lambda_n x}-1\right)$
266	
0 при $t<\lambda_0$ $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i$ при $\lambda_n<t<\lambda_{n+1}$	$\dfrac{i}{x+i0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n e^{i\lambda_n x}$

f ($f=0$ при $t<0$)	$F[f]$
267	
1 при $(8n-7)a<t<(8n-5)a$ 1 при $(8n-3)a<t<(8n-1)a$ 0 при остальных t $n=1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{\sin ax}{(x+i0)\cos 2a(x+i0)}$
268	
0 при $(8n-1)a<t<(8n+1)a$ $t-(8n+1)a$ при $(8n+1)a<t<(8n+3)a$ $2a$ при $(8n+3)a<t<(8n+5)a$ $-t+(8n+7)a$ при $(8n+5)a<t<(8n+7)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$i\dfrac{\sin ax}{(x+i0)^2\cos 2a(x+i0)}$
269	
$4n-2$ при $(4n-3)a<t<(4n-1)a$ $-4n$ при $(4n-1)a<t<(4n+1)a$ $n=1, 2, \ldots$	$\dfrac{\sin ax}{(x+i0)\cos^2 a(x+i0)}$
270	
$2n-1$ при $2(n-1)a<t<2na$ $n=1, 2, \ldots$	$-\dfrac{\cos ax}{(x+i0)\sin a(x+i0)}$

271 $2t$ при $(4n-3)a < t < (4n-1)a$ 0 при остальных t $n=1, 2, \ldots$	$-\dfrac{1-ax\operatorname{tg} a(x+i0)}{(x+i0)^2\cos a(x+i0)}$
272 $\dfrac{\sin\beta n}{\sin\beta}$ при $n < t < n+1$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-e^{ix/2}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2(x+i0)\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+i0}{2}+\beta\right)}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+i0}{2}-\beta\right)}$
273 $\cos\beta n$ при $n < t < n+1$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-e^{ix/2}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}(e^{-ix}-\cos\beta)}{2(x+i0)\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+i0}{2}+\beta\right)}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+i0}{2}-\beta\right)}$

§ 3. Ступенчатые и связанные с ними функции, сосредоточенные на $(-\infty, \infty)$

f	$F[f]$
274 $\varepsilon(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } t>0 \\ -1 \text{ при } t<0 \end{cases}$	$2ix^{-1}$
275 0 при $\lvert t\rvert<a$ 1 при $a<\lvert t\rvert<b$ 0 при $\lvert t\rvert>b$	$-\frac{2}{x}(\sin ax-\sin bx)$
276 0 при $\lvert t\rvert<a$ $\operatorname{sgn} t$ при $a<\lvert t\rvert<b$ 0 при $\lvert t\rvert>b$	$2ix^{-1}(\cos ax-\cos bx)$
277 0 при $\lvert t\rvert<a$ 1 при $\lvert t\rvert>a$	$-2x^{-1}\sin ax+2\pi\delta(x)$
278 0 при $\lvert t\rvert<a$ $\operatorname{sgn} t$ при $\lvert t\rvert>a$	$2ix^{-1}\cos ax$
279 1 при $\lvert t\rvert<a$ 0 при $\lvert t\rvert>a$	$2x^{-1}\sin ax$

280 $\operatorname{sgn} t$ при $\|t\| < a$ 0 при $\|t\| > a$	$2ix^{-1}(1-\cos ax)$
281 1 при $\|t\| < a$ -1 при $a < \|t\| < 2a$ 0 при $\|t\| > 2a$	$4x^{-1}\sin ax\,(1-\cos ax)$
282 $\operatorname{sgn} t$ при $\|t\| < a$ $-\operatorname{sgn} t$ при $a < \|t\| < 2a$ 0 при $\|t\| > 2a$	$2ix^{-1}(1-2\cos ax+\cos 2ax)$
283 0 при $\|t\| < 2a$ 1 при $2a < \|t\| < a+b$ -1 при $a+b < \|t\| < 2b$ 0 при $\|t\| > 2b$	$-4x^{-1}(\cos ax-\cos bx)(\sin ax-\sin bx)$
284 0 при $\|t\| < 2a$ $\operatorname{sgn} t$ при $2a < \|t\| < a+b$ $-\operatorname{sgn} t$ при $a+b < \|t\| < 2b$ 0 при $\|t\| > 2b$	$2ix^{-1}[\cos 2ax+\cos 2bx-2\cos (a+b)x]$
285 $\|t\|$ при $\|t\| < a$ $2a-\|t\|$ при $a < \|t\| < 2a$ 0 при $\|t\| > 2a$	$-2x^{-2}(1-2\cos ax+\cos 2ax)$

f	$F[f]$
286	
t при $\|t\| < a$ $2a \operatorname{sgn} t - t$ при $a < \|t\| < 2a$ 0 при $\|t\| > 2a$	$2ix^{-2}(2 \sin ax + \sin 2ax)$
287	
0 при $\|t\| < 2a$ $\|t\| - 2a$ при $2a < \|t\| < a+b$ $2b - \|t\|$ при $a+b < \|t\| < 2b$ 0 при $\|t\| > 2b$	$-2x^{-2}[\cos 2ax + \cos 2bx - 2\cos(a+b)x]$
288	
0 при $\|t\| < 2a$ $t - 2a \operatorname{sgn} t$ при $2a < \|t\| < a+b$ $2b \operatorname{sgn} t - t$ при $a+b < \|t\| < 2b$ 0 при $\|t\| > 2b$	$-2ix^{-2}[\sin 2ax + \sin 2bx - 2\sin(a+b)x]$
289	
$\|t\|$	$-2x^{-2}$
290	
	$-2i\pi\delta'(x)$
291	
0 при $\|t\| < a$ $\|t\| - a$ при $a < \|t\| < b$ $b - a$ при $\|t\| > b$	$-2x^{-2}(\cos ax - \cos bx) - 2(a-b)\pi\delta''(x)$

292 0 при $\lvert t\rvert < a$ $t-a \operatorname{sgn} t$ при $a < \lvert t\rvert < b$ $(b-a) \operatorname{sgn} t$ при $\lvert t\rvert > b$	$-2ix^{-2}(\sin ax-\sin bx)$
293 $\lvert t\rvert$ при $\lvert t\rvert < a$ a при $\lvert t\rvert > a$	$2x^{-2}(\cos ax-1)+2\pi a\delta(x)$
294 t при $\lvert t\rvert < a$ $a \operatorname{sgn} t$ при $\lvert t\rvert > a$	$2ix^{-2}\sin ax$
295 1 при $2na < \lvert t\rvert < (2n+1)a$ 0 при $(2n+1)a < \lvert t\rvert < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2 \ldots$	$\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+\pi\delta(x)$
296 $\operatorname{sgn} t$ при $2na < \lvert t\rvert < (2n+1)a$ 0 при $(2n+1)a < \lvert t\rvert < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{x}+2i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\delta\left(x-\frac{2n+1}{a}\pi\right)$
297 0 при $2na < \lvert t\rvert < (2n+1)a$ 1 при $(2n+1)a < \lvert t\rvert < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+\pi\delta(x)$

f	$F[f]$
298	
0 при $2na < \|t\| < (2n+1)a$ $\operatorname{sgn} t$ при $(2n+1)a < \|t\| < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{x} - 2i \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \delta\left(x - \frac{2n+1}{a}\pi\right)$
299	
-1 при $2na < \|t\| < (2n+1)a$ 1 при $(2n+1)a < \|t\| < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2}{x} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$
300	
$-\operatorname{sgn} t$ при $2na < \|t\| < (2n+1)a$ $\operatorname{sgn} t$ при $(2n+1)a < \|t\| < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-4i \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \delta\left(x - \frac{2n+1}{a}\pi\right)$
301	
0 при $0 < \|t\| < a$ 1 при $(2n+1)a < \|t\| < (2n+2)a$ -1 при $(2n+2)a < \|t\| < (2n+3)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2\sin ax}{x} + 4 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \delta\left(x - \frac{2n+1}{2a}\pi\right)$

302	
0 при $0 < \lvert t \rvert < a$ $\operatorname{sgn} t$ при $(2n+1)a \lvert t \rvert < (2n+2)a$ $-\operatorname{sgn} t$ при $(2n+2)a < \lvert t \rvert < (2n+3)a$	$-2i \dfrac{\sin ax}{x} \operatorname{tg} ax$
303	
$\dfrac{1}{2} + (-1)^n \dfrac{1}{2^{n+1}}$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\pi\delta(x) + \dfrac{6 \sin ax}{x(5 + 4\cos ax)}$
304	
$\operatorname{sgn} t \left[\dfrac{1}{2} + (-1)^n \dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\dfrac{i}{x} \dfrac{7 + 2\cos ax}{5 + 4\cos ax}$
305	
0 при $2na < \lvert t \rvert < (2n+1)a$ 1 при $(4n+1)a < \lvert t \rvert < (4n+2)a$ -1 при $(4n+3)a < \lvert t \rvert < (4n+4)a$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\dfrac{1}{x} \operatorname{tg} ax - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \delta\left(x - \dfrac{2n+1}{2a}\pi\right)$

f	$F[f]$
306	
0 при $2na < \lvert t \rvert < (2n+1)a$ $\operatorname{sgn} t$ при $(4n+1)a < \lvert t \rvert < (4n+2)a$ $-\operatorname{sgn} t$ при $(4n+3)a < \lvert t \rvert < (4n+4)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$2i\dfrac{\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x\cos ax}+2i\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\delta\left(x-\dfrac{2n+1}{2a}\pi\right)$
307	
$[\lvert t \rvert]^2$	$\dfrac{\pi}{4}\delta(x)-\pi\delta''(x)-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\delta(x-2\pi n)$
308	
$\operatorname{sgn} t\,[\lvert t \rvert]^2$	$-2i\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{x\sin^2\dfrac{x}{2}}$
309	
$\dfrac{\lvert t \rvert}{a}-2n$ при $2na < \lvert t \rvert < (2n+1)a$ $-\dfrac{\lvert t \rvert}{a}+2(n+1)$ при $(2n+1)a < \lvert t \rvert < (2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\pi\delta(x)-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\delta\left(x-\dfrac{2n+1}{a}\pi\right)$

310 $\frac{t}{a} - 2n \operatorname{sgn} t$ при $2na < \lvert t \rvert < (2n+1)a$ $-\frac{t}{a} - (2n+1) \operatorname{sgn} t$ при $(2n+1)a < \lvert t \rvert < (2n+2)$	$\frac{2i}{a} \frac{1}{x^2} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$
311 $\frac{\lvert t \rvert}{a} - 4n$ при $4na < \lvert t \rvert < (4n+1)a$ $-\frac{\lvert t \rvert}{a} + 4n + 2$ при $(4n+1)a < \lvert t \rvert < (4n+2)a$ 0 при $(4n+2)a < \lvert t \rvert < (4n+4)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{2}{a} \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2 \cos ax} + \pi\delta(x)$
312 $\frac{t}{a} - 4n \operatorname{sgn} t$ при $4na < \lvert t \rvert < (4n+1)a$ $-\frac{t}{a} + (4n+2) \operatorname{sgn} t$ при $(4n+1)a < \lvert t \rvert < (4n+2)a$ 0 при $(4n+2)a < \lvert t \rvert < (4n+4)a$	$\frac{2i}{a} \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2 \sin ax} + 4i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n}{2}\, \delta\left(x - \frac{\pi n}{2a}\right)$

	f	$F[f]$
313	$\frac{2\nu}{a}\lvert t\rvert-2\nu n$ при $na<\lvert t\rvert<\left(n+\frac{1}{2\nu}\right)a$ $-\frac{2\nu}{a}\lvert t\rvert+2\nu n+2$ при $\left(n+\frac{1}{2\nu}\right)a<\lvert t\rvert<\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a$ 0 при $\left(n+\frac{1}{\nu}\right)a<\lvert t\rvert<(n+1)a$ $\nu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{8}{a}\frac{\sin^2\frac{ax}{4\nu}\sin\frac{ax}{2}\left(\frac{1}{\nu}-1\right)}{x^2\sin\frac{ax}{2}}+\frac{2\pi}{\nu^2}\delta(x)+$ $+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{2\nu}\cos\frac{\pi n}{\nu}\,\delta\left(x-\frac{2\pi n}{a}\right)$

314 $\frac{2\nu}{a} t - 2\nu n \operatorname{sgn} t$ при $na < \lvert t \rvert < \left(n + \frac{1}{2\nu}\right) a$ $-\frac{2\nu}{a} t + 2\nu n + 2$ при $\left(n + \frac{1}{2\nu}\right) a < \lvert t \rvert < \left(n + \frac{1}{\nu}\right) a$ 0 при $\left(n + \frac{1}{\nu}\right) a < \lvert t \rvert < (n+1) a$ $\nu > 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{8i}{a} \frac{\sin^2 \frac{ax}{4\nu} \cos \frac{ax}{2} \left(\frac{1}{\nu} - 1\right)}{x^2 \sin \frac{ax}{2}} + \frac{4i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{\pi n}{2\nu} \times$ $\times \sin \frac{\pi n}{\nu} \delta \left(x - \frac{2\pi n}{a}\right)$
315 $\frac{\lvert t \rvert}{a} - 2n$ при $2na < \lvert t \rvert < \left(2n + \frac{1}{\mu}\right) a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n + \frac{1}{\mu}\right) a < \lvert t \rvert < \left(2n + 2 - \frac{1}{\mu}\right) a$ $-\frac{\lvert t \rvert}{a} + 2n + 2$ при $\left(2n + 2 - \frac{1}{\mu}\right) a < \lvert t \rvert < (2n+2) a$ $\mu > 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{\pi}{\mu}\left(2 - \frac{1}{\mu}\right) \delta(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \times$ $\times \sin^2 \frac{\pi n}{2\mu} \delta \left(x - \frac{\pi n}{a}\right)$

f	$F[f]$
316	
$\frac{t}{a}-2n\operatorname{sgn} t$ при $2na<\lvert t\rvert<\left(2n+\frac{1}{\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}\operatorname{sgn} t$ при $\left(2n+\frac{1}{\mu}\right)a<\lvert t\rvert<\left(2n+2-\frac{1}{\mu}\right)a$ $-\frac{t}{a}+(2n+2)\operatorname{sgn} t$ при $\left(2n+2-\frac{1}{\mu}\right)a<\lvert t\rvert<(2n+2)a$ $\mu>1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{4i}{a}\,\frac{\sin\frac{ax}{2\mu}\sin\frac{ax}{2}\left(2-\frac{1}{\mu}\right)}{x^2\sin ax}$
317	
$\frac{\lvert t\rvert}{a}-4n$ при $4na<\lvert t\rvert<\left(4n+\frac{1}{\mu}\right)a$	$\frac{2}{a}\,\frac{\sin\frac{ax}{\mu}\sin\frac{ax}{2}\left(2-\frac{1}{\mu}\right)}{x^2\sin ax}+\frac{\pi}{2\mu}\left(2-\frac{1}{\mu}\right)\delta(x)$

	$\frac{1}{\mu}$ при $\left(4n+\frac{1}{\mu}\right)a<\lvert t\rvert<\left(4n+2-\frac{1}{\mu}\right)a$ $-\frac{\lvert t\rvert}{a}+4n+2$ при $\left(4n+2-\frac{1}{\mu}\right)a<\lvert t\rvert<(4n+2)a$ 0 при $(4n+2)a<\lvert t\rvert<(4n+4)a$ $\mu>1,\ n=0, 1, 2, \ldots$	
318	$\frac{t}{a}-4n\operatorname{sgn}t$ при $4na<\lvert t\rvert<\left(4n+\frac{1}{\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}\operatorname{sgn}t$ при $\left(4n+\frac{1}{\mu}\right)a<\lvert t\rvert<\left(4n+2-\frac{1}{\mu}\right)a$ $-\frac{t}{a}+(4n+2)\operatorname{sgn}t$ при $\left(4n+2-\frac{1}{\mu}\right)a<\lvert t\rvert<(4n+2)a$ 0 при $(4n+2)a<\lvert t\rvert<(4n+4)a$ $\mu>1,\ n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{2i}{a}\frac{\sin\frac{ax}{2\mu}\sin\frac{ax}{2}\left(2-\frac{1}{\mu}\right)}{x^2\sin ax}-$ $-\frac{4i}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin^2\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{2\mu}\,\delta\left(x-\frac{\pi n}{2a}\right)$

f	$F[f]$
319 $\frac{2\lvert t\rvert}{a}-(2n+1)$ при $na<\lvert t\rvert<(n+1)a$, $n=0,1,2,\ldots$	$-\frac{2}{a}\left[2\sin\frac{ax}{2}-ax\cos\frac{ax}{2}\right]\frac{1}{x^2\sin\frac{ax}{2}}$
320 $\frac{2t}{a}-(2n+1)\operatorname{sgn} t$ при $na<\lvert t\rvert<(n+1)a$, $n=0,1,2,\ldots$	$-2i\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\,\delta\left(x-\frac{2\pi n}{a}\right)$
321 $-\frac{1}{\mu}$ при $na<\lvert t\rvert<\left(n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a$; $\frac{2\lvert t\rvert}{a}-(2n+1)$ при $\left(n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a<\lvert t\rvert<\left(n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a$	$\frac{2}{a\mu}\left[2\mu\sin\frac{ax}{2}+ax\cos\frac{ax}{2}\right]\frac{1}{x^2\sin\frac{ax}{2}}$

$\frac{1}{\mu}$ при $\left(n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < (n+1) a$ $\mu > 1, \quad n=0, 1, 2, \ldots$	
322 $-\frac{1}{\mu} \operatorname{sgn} t$ при $na < \lvert t \rvert < \left(n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right) a$ $\frac{2t}{a}-(2n+1) \operatorname{sgn} t$ при $\left(n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < \left(n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right) a$ $\frac{1}{\mu} \operatorname{sgn} t$ при $\left(n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < (n+1) a$ $\mu > 1, \quad n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{4\pi i}{a\mu}(2\mu-a)\,\delta'(x)-\frac{2i}{\mu} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n}\,\delta\left(x-\frac{2\pi n}{a}\right)$

f	$F[f]$
323	
$\frac{2\|t\|}{a}-(4n+1)$ при $2na<\|t\|<(2n+1)a$ $-\frac{2\|t\|}{a}+4n+3$ при $(2n+1)a<\|t\|<(2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$2\pi\delta(x)-\frac{8}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\delta\left(x-\frac{2n+1}{a}\pi\right)-2$
324	
$\frac{2t}{a}-(4n+1)\operatorname{sgn} t$ при $2na<\|t\|<(2n+1)a$ $-\frac{2t}{a}+(4n+3)\operatorname{sgn} t$ при $(2n+1)a<\|t\|<(2n+2)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{4i}{a}x^{-2}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

325	$-\frac{1}{\mu}$ при $2na < \lvert t \rvert < \left(2n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right) a$ $\frac{2\lvert t \rvert}{a}-(4n+1)$ при $\left(2n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < \left(2n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right) a$ $\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < \left(2n+\frac{3\mu-1}{2\mu}\right) a$ $-\frac{2\lvert t \rvert}{a}+(4n+3)$ при $\left(2n+\frac{3\mu-1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < \left(2n+\frac{3\mu+1}{2\mu}\right) a$ $-\frac{1}{\mu}$ при $\left(2n+\frac{3\mu+1}{2\mu}\right) a < \lvert t \rvert < (2n+2)\, a$ $\mu > 1, \quad n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{2\pi}{\mu}\,\delta(x)-\frac{8}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\times$ $\times\sin\frac{2n+1}{2\mu}\pi\delta\left(x-\frac{2n+1}{a}\pi\right)-\frac{2}{\mu}$

f	$F[f]$
326	
$-\frac{1}{\mu}\operatorname{sgn} t$ при $2na < \|t\| < \left(2n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a$ $\frac{2t}{a}-(4n+1)\operatorname{sgn} t$ при $\left(2n+\frac{\mu-1}{2\mu}\right)a < \|t\| < \left(2n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a$ $\frac{1}{\mu}\operatorname{sgn} t$ при $\left(2n+\frac{\mu+1}{2\mu}\right)a < \|t\| < \left(2n+\frac{3\mu-1}{2\mu}\right)a$ $-\frac{2t}{a}+(4n+3)\operatorname{sgn} t$ при $\left(2n+\frac{3\mu-1}{2\mu}\right)a < \|t\| < \left(2n+\frac{3\mu+1}{2\mu}\right)a$ $-\frac{1}{\mu}\operatorname{sgn} t$ при $\left(2n+\frac{3\mu+1}{2\mu}\right)a < \|t\| < (2n+2)a$ $\mu > 1, \quad n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{4i}{a}\,\frac{\sin\frac{ax}{2\mu}}{x^2\cos\frac{ax}{2}}$

327 $n\left(\lvert t\rvert-\frac{(n+1)a}{2}\right)$ при $na<\lvert t\rvert<(n+1)a$ 0 при $\lvert t\rvert<a$ $n=1, 2, 3, \ldots$	$\frac{1}{x^2}+\frac{\pi a}{2}\delta(x)-\frac{2\pi}{a}\delta''(x)-\frac{a}{2\pi}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\delta\left(x-\frac{2\pi n}{a}\right)$
328 $n\left(t-\frac{(n+1)a\operatorname{sgn}t}{2}\right)$ при $na<\lvert t\rvert<(n+1)a$ 0 при $\lvert t\rvert<a$ $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\frac{i}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}+2\pi i\delta'(x)$
329 0 при $(4n-1)a<\lvert t\rvert<(4n+1)a$ 1 при $(4n+1)a<\lvert t\rvert<(4n+3)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\pi\delta(x)-2\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\delta\left(x-\frac{2n+1}{2a}\pi\right)$
330 0 при $(4n-1)a<\lvert t\rvert<(4n+1)a$ $\operatorname{sgn}t$ при $(4n+1)a<\lvert t\rvert<(4n+3)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{x\cos ax}$

f	$F[f]$
331	
n при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \pi\delta(x)$
332	
$n \operatorname{sgn} t$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{i}{x} - \frac{2\pi i}{a}\delta'(x) + i\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{2\pi n}{a}\right)$
333	
$n+1$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \pi\delta(x)$
334	
$(n+1)\operatorname{sgn} t$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{i}{x} - \frac{2\pi i}{a}\delta'(x) + i\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{2\pi n}{a}\right)$
335	
$2n+1$ при $2na < \lvert t \rvert < 2(n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2}{x}\operatorname{ctg} ax$

336 $(2n+1)\operatorname{sgn} t$ при $2na < \vert t \vert < 2(n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2\pi i}{a}\delta'(x)+2i\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)$
337 0 при $\vert t \vert < a$ $2n$ при $(2n-1)a < \vert t \vert < (2n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2}{x\sin ax}$
338 0 при $\vert t \vert < a$ $2n\operatorname{sgn} t$ при $(2n-1)a < \vert t \vert < (2n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{2\pi i}{a}\delta'(x)+2i\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\delta\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)$
339 0 при $\vert t \vert < a$ $2n(\vert t \vert - an)$ при $(2n-1)a < \vert t \vert < (2n+1)a$ $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\frac{2\pi}{a}\delta''(x)-\frac{2a}{\pi}\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\delta\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)$

f	$F[f]$
340	
0 при $\lvert t\rvert < a$ $2n(t - an \operatorname{sgn} t)$ при $(2n-1)a < \lvert t\rvert < (2n+1)a$ $n = 1, 2, \ldots$	$-\dfrac{2i}{x^2 \sin ax}$
341	
$(2n+1)\lvert t\rvert - 2an(n+1)$ при $2na < \lvert t\rvert < 2(n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\dfrac{2\pi}{a}\delta''(x) + 2\pi a\delta(x) - \dfrac{2a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\delta\left(x - \dfrac{\pi n}{a}\right)$
342	
$(2n+1)t - 2an(n+1)\operatorname{sgn} t$ при $2na < \lvert t\rvert < 2(n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$-\dfrac{2i}{x^2}\operatorname{ctg} ax$
343	
$a - (-1)^n(2an + a - \lvert t\rvert)$ при $2na < \lvert t\rvert < (2n+1)a$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$2\pi a\delta(x) - \dfrac{8a}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\delta\left(x - \dfrac{2n+1}{2a}\pi\right)$

344	
$[a-(-1)^n(2an+a)]\operatorname{sgn} t+(-1)^n t$ при $2na<\lvert t\rvert<(2n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{2i}{x^2}\operatorname{tg} ax$
345	
0 при $\lvert t\rvert<a$; $\lvert t\rvert-(-1)^n(\lvert t\rvert-2na)$ при $(2n-1)a<\lvert t\rvert<(2n+1)a$, $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\dfrac{2}{x^2\cos ax}$
346	
0 при $\lvert t\rvert<a$; $t[1-(-1)^n]+2na\operatorname{sgn} t$ при $(2n-1)a<\lvert t\rvert<(2n+1)a$, $n=1, 2, 3, \ldots$	$-2i\left[\pi\delta'(x)+\dfrac{4a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\delta\left(x-\dfrac{2n+1}{2a}\pi\right)\right]$
347	
$\dfrac{t^2}{2}$ при $\lvert t\rvert<1$; $1-\dfrac{(\lvert t\rvert-2)^2}{2}$ при $1<\lvert t\rvert<2$; 1 при $\lvert t\rvert>2$	$-2(2\sin x-\sin 2x)\dfrac{1}{x^3}+2\pi\delta(x)$

f	$F[f]$
348	
$t^2/2 \operatorname{sgn} t$ при $\lvert t\rvert < 1$ $[1-(\lvert t\rvert-2)^2/2] \operatorname{sgn} t$ при $1 < \lvert t\rvert < 2$ $\operatorname{sgn} t$ при $\lvert t\rvert > 2$	$-2i(1-2\cos x+\cos 2x)\dfrac{1}{x^3}$
349	
$t^2/2$ при $\lvert t\rvert < 1$ $3/4-(\lvert t\rvert-3/2)^2$ при $1 < \lvert t\rvert < 2$ $1/2(\lvert t\rvert-3)^2$ при $2 < \lvert t\rvert < 3$ 0 при $\lvert t\rvert > 3$	$16\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}\dfrac{1}{x^3}$
350	
$t^2 \operatorname{sgn} t/2$ при $\lvert t\rvert < 1$ $[3/4-(\lvert t\rvert-3/2)^2] \operatorname{sgn} t$ при $1 < \lvert t\rvert < 2$ $1/2(\lvert t\rvert-3)^2 \operatorname{sgn} t$ при $2 < \lvert t\rvert < 3$ 0 при $\lvert t\rvert > 3$	$16i\sin^3\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}\dfrac{1}{x^3}$

351 $(\lvert t \rvert - na)^2$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{2a}{x}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{a^2}{x^2} + \pi a\left(2a - \frac{1}{2}\right)\delta(x) + \frac{a^2}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{2\pi n}{a}\right) - 2\pi\delta''(x)$
352 $(\lvert t \rvert - na)^2 \operatorname{sgn} t$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$2\pi i(4 - a^2)\delta'(x) + \frac{2ai}{x} + ia^2x^{-2}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - 4i\frac{1}{x^3} - 2ai\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{2\pi n}{a}\right)$
353 $[\lvert t \rvert / a]$ при $n < \lvert t \rvert < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \pi\delta(x)$
354 $[\lvert t \rvert / a] \operatorname{sgn} t$ при $na < \lvert t \rvert < (n+1)a$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\frac{i}{x} - \frac{2\pi i}{a}\delta'(x) + i\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{2\pi n}{a}\right)$

f	$F[f]$
355 $[\lvert t\rvert/a]+1$ при $na<\lvert t\rvert<(n+1)a$, $n=0,1,2,\ldots$	$-\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}+\pi\delta(x)$
356 $([\lvert t\rvert/a]+1)\operatorname{sgn} t$ при $na<\lvert t\rvert<(n+1)a$, $n=0,1,2,\ldots$	$\frac{i}{x}-\frac{2\pi i}{a}\delta'(x)+i\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x-\frac{2\pi n}{a}\right)$
357 $\frac{\alpha^{[\lvert t\rvert]}-1}{\alpha-1}$ при $n<\lvert t\rvert<n+1$, $n=0,1,2,\ldots$, $0<\alpha<1$	$\frac{-2\sin x}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)x}+\frac{2\pi}{1-\alpha}\delta(x)$
358 $\frac{\alpha^{[\lvert t\rvert]}-1}{\alpha-1}\operatorname{sgn} t$ при $n<\lvert t\rvert<n+1$, $n=0,1,2,\ldots$, $0<\alpha<1$	$\frac{2i(\cos x-\alpha)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\,\frac{1}{x}$

359 $\alpha^{[\|t\|]}$ при $n < t < n+1$, $n=0, 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$	$\dfrac{2(1-\alpha)\sin x}{x(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)}$
360 $\alpha^{[\|t\|]}\operatorname{sgn} t$ при $n < t < n+1$, $n=0, 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$	$\dfrac{4i\sin^2\frac{x}{2}(1+\alpha)}{x(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)}$
361 $[\|t\|]\alpha^{[\|t\|]-1}$ при $n < \|t\| < n+1$, $n=0, 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$	$\dfrac{2\sin x}{x}\dfrac{\alpha^2-1-2\alpha+2\cos x}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)^2}$
362 $[\|t\|]\alpha^{[\|t\|]-1}\operatorname{sgn} t$ при $n < \|t\| < n+1$, $n=0, 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$	$\dfrac{4i\sin^2\frac{x}{2}}{x}\dfrac{1-\alpha^2-2\alpha+2\cos x}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)^2}$

f	$F[f]$
363	
1 при $(8n-7)a<\lvert t\rvert<(8n-5)a$ -1 при $(8n-3)a<\lvert t\rvert<(8n-1)a$ 0 при остальных t $n=1, 2, 3, \ldots$	$2\dfrac{\sin ax}{x\cos 2ax}$
364	
$\operatorname{sgn} t$ при $(8n-7)a<\lvert t\rvert<(8n-5)a$ $-\operatorname{sgn} t$ при $(8n-3)a<\lvert t\rvert<(8n-1)a$ 0 при остальных t $n=1, 2, 3, \ldots$	$4i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\sin\dfrac{2n+1}{4}\pi\,\delta\left(x-\dfrac{2n+1}{4a}\pi\right)$
365	
0 при $(8n-1)a<\lvert t\rvert<(8n+1)a$ $\lvert t\rvert-(8n+1)a$ при $(8n+1)a<\lvert t\rvert<(8n+3)a$ $2a$ при $(8n+3)a<\lvert t\rvert<(8n+5)a$ $-\lvert t\rvert+(8n+7)a$ при $(8n+5)a<\lvert t\rvert<(8n+7)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$2\pi a\,\delta(x)-\dfrac{16a}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{2n+1}{4}\pi\times$ $\times\delta\left(x-\dfrac{2n+1}{4a}\pi\right)$

366	
0 при $(8n-1)\,a<\lvert t\rvert<(8n+1)\,a$ $t-(8n+1)\,a\operatorname{sgn}t$ при $(8n+1)\,a<\lvert t\rvert<(8n+3)\,a$ $2a\operatorname{sgn}t$ при $(8n+3)\,a<\lvert t\rvert<(8n+5)\,a$ $-t+(8n+7)\,a\operatorname{sgn}t$ при $(8n+5)\,a<\lvert t\rvert<(8n+7)\,a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$2i\,\dfrac{\sin ax}{x^2\cos 2ax}$
367	
$4n-2$ при $(4n-3)\,a<\lvert t\rvert<(4n-1)\,a$ $-4n$ при $(4n-1)\,a<\lvert t\rvert<(4n+1)\,a$ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$	$\dfrac{2\sin ax}{x\cos^2 ax}$
368	
$(4n-2)\operatorname{sgn}t$ при $(4n-3)\,a<\lvert t\rvert<(4n-1)\,a$ $-4n\operatorname{sgn}t$ при $(4n-1)\,a<\lvert t\rvert<(4n+1)\,a$ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$	$-\dfrac{4i}{a}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,\delta\left(x-\frac{2n+1}{2a}\pi\right)$

f	$F[f]$
369	
$2n-1$ при $2(n-1)a<\lvert t\rvert<2na$, $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\frac{2}{x}\operatorname{ctg} ax$
370	
$(2n-1)\operatorname{sgn} t$ при $2(n-1)a<\lvert t\rvert<2na$, $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\frac{2\pi i}{a}\delta'(x)+2i\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)$

§ 4. Показательные функции

f	$F[f]$
371 e^{iat}	$2\pi\delta(x+a)$
372 $\theta(t)e^{iat}$	$i(x+a+i0)^{-1}=i(x+a)^{-1}+\pi\delta(x+a)$
373 $e^{iat}t^n$	$2\pi(-i)^n\delta^{(n)}(x+a)$
374 $e^{iat}t_+^\lambda$, $\lambda\neq-1,-2,\ldots$	$e^{i\frac{\lambda+1}{2}\pi}\Gamma(\lambda+1)(x+a+i0)^{-\lambda-1}$
375 $e^{iat}t_+^{-n}$, $n=1,2,\ldots$	$-i^{n-1}\dfrac{(x+a)^{n-1}}{(n-1)!}\left[-i\dfrac{\pi}{2}+\ln(x+a+i0)-\psi(n)\right]$
376 $e^{iat}\lvert t\rvert^\lambda$, $\lambda\neq-1,-3,\ldots$	$-2\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert x+a\rvert^{-\lambda-1}$
377 $e^{iat}\lvert t\rvert^\lambda\operatorname{sgn}t$, $\lambda\neq-2,-4,\ldots$	$2i\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\lvert x+a\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}(x+a)$

f	$F[f]$
378 $t_+^{-1/2}\, e^{-t^2/4a}$	$\sqrt{a}\, e^{-i\pi/4}\, e^{-ax^2/2}\, x^{1/2} K_{1/4}(-ax^2/2)$
379 $t_+^{-3/2}\, e^{-t^2/8a^2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-a^2x^2}\left[-iD_{-3/2}(2ax)+D_{-3/2}(-2ax)\right]$
380 $t_+^{\lambda}\, e^{-t^2/8a^2}$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$	$2^{\lambda+1/2}\sqrt{\pi}\, a^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)\, e^{-a^2x^2}\left[-e^{i\lambda\pi}D_{\lambda}(2ax)+D_{\lambda}(-2ax)\right]$
381 $\theta(t)\, e^{-a^2/4t}$	$ae^{i\pi/4}(x+i0)^{-1/2} K_1\left[e^{-i\pi/4}\, a(x+i0)^{1/2}\right]$
382 $t_+^{-1/2}\, e^{-a^2/4t}$	$\sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}(x+i0)^{-1/2} \exp\left[e^{i3\pi/4}\, a(x+i0)^{1/2}\right]$
383 $t_+^{\lambda-1}\, e^{-a^2/4t}$, $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$2^{1-\lambda} a^{\lambda}\, e^{i\lambda\pi/4}(x+i0)^{-\lambda/2} K_{\lambda}\left[ae^{-i\pi/4}(x+i0)^{1/2}\right]$
384 $\theta(t)(1-e^{-t})^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{x+i0}\,\frac{i^{n+1}n!}{(x+i)(x+2i)\ldots(x+ni)}$

385	$\theta(t)\, e^{-at}\,\mathrm{sh}\, at$	$-\dfrac{a}{x+2ai}\,\dfrac{1}{x+i0}$
386	$e^{-a\|t\|}\,\mathrm{sh}\, at$	$ia^2x^{-1}\left(\dfrac{x^2}{4}+a^2\right)^{-1}$
387	$e^{-a\|t\|}\,\mathrm{sh}\, a\|t\|$	$-\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+a^2\right)^{-1}+\pi\delta(\lambda)$
388	$\theta(t)\, e^{-at}\,\mathrm{ch}\, at$	$i\,\dfrac{x+ai}{x+2ai}\,\dfrac{1}{x+i0}$
389	$e^{-a\|t\|}\,\mathrm{ch}\, at$	$\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+a^2\right)^{-1}+\pi\delta(x)$
390	$\mathrm{sgn}\, t\, e^{-a\|t\|}\,\mathrm{ch}\, at$	$ix^{-1}\left(\dfrac{x^2}{2}+a^2\right)\left(\dfrac{x^2}{4}+a^2\right)^{-1}$
391	$\theta(t)\,\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, at}$	$-\dfrac{1}{a}\left\{\psi\left[-i\,\dfrac{x+i0}{2a}+\dfrac{1}{2}\right]+\ln 2a+\gamma\right\}$
392	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}\, at}$	$\dfrac{\pi i}{a}\,\mathrm{th}\,\dfrac{\pi x}{2a}$
393	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, at}$	$\dfrac{\pi}{a}\,\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi x}{2a}}$

f	$F[f]$
394 $\theta(t)\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 at}$	$-\dfrac{ix}{a^2}\left[\psi\left(-i\dfrac{x+i0}{2a}\right)-1+\ln 2a+\gamma\right]+\dfrac{1}{a}$
395 $\theta(t)\operatorname{th} at$	$\dfrac{1}{a}\left[\psi\left(-\dfrac{ix}{2a}\right)-\psi\left(-\dfrac{ix}{4a}\right)-\dfrac{ia}{x}\right]-\dfrac{\ln 2}{a}+2\pi\delta(x)$
396 $\operatorname{th} at$	$i\dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi x}{2a}}$
397 $\theta(t)\operatorname{cth} at$	$-\dfrac{1}{a}\left[\psi\left(-i\dfrac{x+i0}{2a}\right)+\dfrac{ia}{x+i0}+\ln 2a+\gamma\right]$
398 $\operatorname{th}^2 at$	$-\dfrac{\pi}{a^2}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi x}{2a}}+2\pi\delta(x)$
399 $t_+^{-1}\operatorname{th} t$	$-i\dfrac{\pi}{2}+\ln(x+i0)+2\ln\dfrac{\Gamma\left(-i\dfrac{x+i0}{4}\right)}{2\Gamma\left(-i\dfrac{x+i0}{4}+\dfrac{1}{2}\right)}$

§ 5. Логарифмические функции

f	$F[f]$
400 $\ln t_+$	$i\left[\left(i\frac{\pi}{2}-\gamma\right)(x+i0)^{-1}-(x+i0)^{-1}\ln(x+i0)\right]=$ $=-\frac{\pi}{2}\lvert x\rvert^{-1}-i\gamma x^{-1}-ix^{-1}\ln\lvert x\rvert-\gamma\pi\delta(x)$
401 $\ln t_-$	$i\left[\left(i\frac{\pi}{2}+\gamma\right)(x-i0)^{-1}+(x-i0)^{-1}\ln(x-i0)\right]=$ $=-\frac{\pi}{2}\lvert x\rvert^{-1}+i\gamma x^{-1}+ix^{-1}\ln\lvert x\rvert-\gamma\pi\delta(x)$
402 $\ln\lvert t\rvert$	$-\pi[\lvert x\rvert^{-1}+2\gamma\delta(x)]$
403 $\operatorname{sgn} t\ln\lvert t\rvert$	$-2ix^{-1}(\gamma+\ln\lvert x\rvert)$
404 $t^n\ln t_+$	$i^{n+1}n!\left\{\left[\psi(n+1)+i\frac{\pi}{2}\right](x+i0)^{-n-1}-\right.$ $\left.-(x+i0)^{-n-1}\ln(x+i0)\right\}=i^{n+1}n!\left\{\left[x^{-n-1}-\right.\right.$ $\left.-\frac{i\pi(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(x)\right]\psi(n+1)+$ $\left.+(-1)^n\frac{i\pi}{2}\lvert x\rvert^{-n-1}-x^{-n-1}\ln\lvert x\rvert\right\}$

f	$F[f]$
405 $t^n \ln t_-$	$-i^{n+1}n!\left\{\left[\psi(n+1)-i\frac{\pi}{2}\right](x-i0)^{-n-1}-(x-i0)^{-n-1}\ln(x-i0)\right\}=$ $=-i^{n+1}n!\left\{\left[x^{-n-1}+\frac{i\pi(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(x)\right]\psi(n+1)+(-1)^{n+1}\frac{i\pi}{2}\lvert x\rvert^{-n-1}-x^{-n-1}\ln\lvert x\rvert\right\}$
406 $t_+^{\lambda}\ln t_+$, $\lambda\neq-1,-2,\ldots$	$e^{i\frac{\lambda+1}{2}\pi}\Gamma(\lambda+1)\left\{\left[\psi(\lambda+1)+i\frac{\pi}{2}\right](x+i0)^{-\lambda-1}-(x+i0)^{-\lambda-1}\ln(x+i0)\right\}$
407 $t_-^{\lambda}\ln t_-$, $\lambda\neq-1,-2,\ldots$	$e^{-i\frac{\lambda+1}{2}\pi}\Gamma(\lambda+1)\left\{\left[\psi(\lambda+1)-i\frac{\pi}{2}\right](x-i0)^{-\lambda-1}-(x-i0)^{-\lambda-1}\ln(x-i0)\right\}$

408 $\dfrac{t_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}[\psi(\lambda)-\ln t_+]$ $\lambda \neq -1, -2, \ldots$	$e^{i\lambda\pi/2}(x+i0)^{-\lambda}\left[-i\dfrac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]$
409 $t_+^{-1}\ln t_+$	$\dfrac{1}{2}\left\{\left[i\dfrac{\pi}{2}+\gamma-\ln(x+i0)\right]^2+\dfrac{\pi^2}{6}\right\}$
410 $t_-^{-1}\ln t_-$	$\dfrac{1}{2}\left\{\left[-i\dfrac{\pi}{2}+\gamma-\ln(x-i0)\right]^2+\dfrac{\pi^2}{6}\right\}$
411 $t^{-1}\ln\|t\|$	$-i\pi\operatorname{sgn}x\,[\ln\|x\|+\gamma]$
412 $\|t\|^{-1}\ln\|t\|$	$-\dfrac{\pi^2}{6}-2\gamma\ln\|x\|+\ln^2\|x\|$
413 $t_+^{-n}\ln t_+$	$i^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{2(n-1)!}\left\{\left[i\dfrac{\pi}{2}+\psi(n)-\ln(x+i0)\right]^2+\right.$ $\left.+\dfrac{\pi^2}{3}-\psi'(n)\right\}$
414 $t_-^{-n}\ln t_-$	$(-i)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{2(n-1)!}\left\{\left[-i\dfrac{\pi}{2}+\psi(n)-\ln(x-i0)\right]+\right.$ $\left.+\dfrac{\pi^2}{3}-\psi'(n)\right\}$

f	$F[f]$
415 $\lvert t\rvert^{\lambda}\ln\lvert t\rvert$, $\lambda\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$	$2\Gamma(\lambda+1)\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\times\left\{[\ln\lvert x\rvert-\psi(\lambda+1)]\sin\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\lambda\pi}{2}\right\}$
416 $\lvert t\rvert^{\lambda}\ln\lvert t\rvert\operatorname{sgn} t$, $\lambda\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$	$-2i\Gamma(\lambda+1)\lvert x\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn} x\times\left\{[\ln\lvert x\rvert-\psi(\lambda+1)]\cos\frac{\lambda\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\lambda\pi}{2}\right\}$
417 $t^{-2m}\ln\lvert t\rvert$, $m=1,\ 2,\ 3,\ \dots$	$\frac{\pi(-1)^m}{(2m-1)!}[\psi(2m)\lvert x\rvert^{2m-1}-\lvert x\rvert^{2m-1}\ln\lvert x\rvert]$
418 $t^{-2m-1}\ln\lvert t\rvert$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \dots$	$\frac{(-1)^m\pi i}{(2m)!}[\psi(2m+1)x^{2m}\operatorname{sgn} x-x^{2m}\ln\lvert x\rvert\operatorname{sgn} x]$
419 $\lvert t\rvert^{-2m-1}\ln\lvert t\rvert$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \dots$	$\frac{2(-1)^m}{(2m)!}\left\{\left[\sum_{j=1}^{2m}\frac{1}{j^2}+\sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,\,k\leqslant 2m}}\frac{1}{jk}-\frac{\pi^2}{8}-\gamma\sum_{j=1}^{2m}\frac{1}{j}+\Gamma''(1)\right]x^{2m}-\psi(2m+1)x^{2m}\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{2}x^{2m}\ln^2\lvert x\rvert\right\}$

420	$t^{-2m} \ln\lvert t\rvert \operatorname{sgn} t$ $m=1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{2i(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\left\{\left[\sum_{j=1}^{2m-1}\dfrac{1}{j^2}+\sum_{\substack{j\neq k\\ 1\leqslant j,\, k\leqslant 2m-1}}\dfrac{1}{jk}-\dfrac{\pi^2}{8}-\gamma\sum_{j=1}^{2m-1}\dfrac{1}{j}+\Gamma''(1)\right]x^{2m-1}-\psi(2m)\,x^{2m-1}\ln\lvert x\rvert+\dfrac{1}{2}x^{2m-1}\ln^2\lvert x\rvert\right\}$
421	$\theta(t)\ln(t+a)$	$i(x+i0)^{-1}\left\{\ln a-e^{-iax}\left[\operatorname{ci}(a(x+i0))+\operatorname{Si}(ax)-i\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}=ix^{-1}\left\{\ln a-e^{-iax}\times\left[\operatorname{ci}(a\lvert x\rvert)+i\operatorname{Si}(ax)-i\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right]\right\}-\pi\gamma\delta(x)$

f	$F[f]$
422	
$\theta(t)\ln\lvert a-t\rvert$	$i(x+i0)^{-1}\left\{\ln a-e^{iax}\left[\mathrm{ci}\,(a(x+i0))-iSi\,(ax)-i\frac{\pi}{2}\right]\right\}=ix^{-1}\left\{\ln a-e^{iax}\times\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)-iSi\,(ax)-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right]\right\}-\pi\gamma\delta(x)$
423	
$\theta(t-a)\ln t$	$ie^{iax}\ln a\,(x+i0)^{-1}-i(x+i0)^{-1}\times\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]+iSi\,(ax)-i\frac{\pi}{2}\right\}=ix^{-1}\left\{e^{iax}\ln a-\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+iSi\,(ax)-i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\right]\right\}-\pi\gamma\delta(x)$
424	
$\ln\lvert t\pm a\rvert$	$-\frac{\pi}{2}\lvert x\rvert^{-1}e^{\mp iax}-2\pi\gamma\delta(x)$
425	
$\operatorname{sgn}t\ln\lvert t+a\rvert$	$-2ix^{-1}e^{-iax}\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+iSi\,(ax)-\frac{\pi i}{2}\operatorname{sng}x\right]+2ix^{-1}\ln a$

426 $\theta(t-a)\ln\frac{t}{a}$	$-i(x+i0)^{-1}\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]+i\,\mathrm{Si}\,(ax)-i\frac{\pi}{2}\right\}=$ $=-ix^{-1}\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+i\mathrm{Si}\,(ax)-i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x\right]-$ $-\pi[\gamma+\ln a]\,\delta(x)$
427 $0,\quad t<0$; $\ln a,\quad 0<t<a$; $\ln t,\quad t>a$	$-i(x+i0)^{-1}\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]+i\mathrm{Si}\,(ax)-i\frac{\pi}{2}-\ln a\right\}=$ $=-ix^{-1}\left[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+i\mathrm{Si}\,(ax)-\right.$ $\left.-i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x-\ln a\right]-\pi\gamma\delta(x)$
428 $\ln\frac{t}{a}\quad 0<t<a$; 0 при остальных t	$i(x+i0)^{-1}\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]+i\mathrm{Si}\,(ax)-\ln a-\gamma-$ $-\ln(x+i0)\}=ix^{-1}[\mathrm{ci}\,(a\lvert x\rvert)+i\mathrm{Si}\,(ax)-\ln(aC\lvert x\rvert)]$
429 $\theta(t-1)\,t^{-1}\ln(2t-1)$	$\frac{1}{2}\left[\mathrm{ci}\left(\frac{x+i0}{2}\right)+i\mathrm{Si}\left(\frac{x}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}\right]^2=$ $=\frac{1}{2}\left[\mathrm{ci}\left(\frac{\lvert x\rvert}{2}\right)+i\mathrm{Si}\left(\frac{x}{2}\right)-i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,x\right]^2$

f	$F[f]$
430 $\theta(t-a)\dfrac{\ln t}{a+t}$	$e^{-iax}\left\{\left[\operatorname{ci}(a(x+i0))+i\operatorname{Si}(ax)-i\dfrac{\pi}{2}\right]^2-\right.$ $\left.-2\ln a\left[\operatorname{ci}(2a(x+i0))+i\operatorname{Si}(2ax)-i\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$
431 $\theta(t-a)\dfrac{\ln t-\ln a}{t+a}$	$e^{-iax}\left\{\operatorname{ci}[a(x+i0)]+i\operatorname{Si}(ax)-i\dfrac{\pi}{2}\right\}^2$
432 $\theta(t)\ln(t^2+a^2)$	$\dfrac{2i}{x+i0}\left\{\ln a-\left[i\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{chi}(a(x+i0))\right]\operatorname{ch}ax+\right.$ $\left.+i\left[-\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{shi}(ax)\right]\operatorname{sh}ax\right\}$
433 $t_+^{-1}\ln(t^2+a^2)$	$\left\{-i\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{chi}[a(x+i0)]\right\}^2+\left\{-\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{shi}(ax)\right\}^2-$ $-2\ln a\left[\gamma-i\dfrac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]$
434 $t_+^{-1}\ln\left(\dfrac{t^2}{a^2}+1\right)$	$\left\{-i\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{chi}[a(x+i0)]\right\}^2+\left\{-\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{shi}(ax)\right\}^2$

435 $t_+^{-2} \ln (t^2+a^2)$	$ix \left\{-i\frac{\pi}{2}+\operatorname{chi}[a(x+i0)]\right\}^2 + ix\left[-\frac{\pi}{2}+i\operatorname{shi}(ax)\right]^2 - 2\ln a\left[\gamma - i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)-1\right] - \frac{2}{a}\left\{\frac{\pi}{2}+i\operatorname{chi}[a(x+i0)]\right\}\operatorname{sh} ax + \frac{a}{2}\left[\frac{\pi}{2}+i\operatorname{shi}(ax)\right]\operatorname{ch} ax$
436 $\theta(t)\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{t+2a}}{\sqrt{2a}}$	$-\frac{\pi}{4}e^{-iax}(x+i0)^{-1}H_0^{(1)}[a(x+i0)]$
437 $\theta(t-a)\ln\frac{\sqrt{t+a}+\sqrt{t-a}}{\sqrt{2a}}$	$-\frac{\pi}{4}(x+i0)^{-1}H_0^{(1)}[a(x+i0)]$
438 $\theta(t)\ln\frac{\sqrt{t+ia}+\sqrt{t-ia}}{\sqrt{2a}}$	$\frac{i}{4}(x+i0)^{-1}\{\pi i \mathrm{L}_0[-a(x+i0)]-K_0[-a(x+i0)]-K_0[a(x+i0)]\}$

f	$F[f]$
439 $\dfrac{\ln\left[4t\left(\dfrac{2a-t^2}{a^2}\right)\right]}{\sqrt{t(2a-t)}}$ при $0<t<2a$ 0 при остальных t	$\pi e^{iax}\left\{\dfrac{\pi}{2}Y_0[a(x+i0)]-(\gamma-\ln 2)J_0[a(x+i0)]\right\}$
440 $\theta(t)\ln\|t^2-a^2\|$	$i\{2\ln a-2\,\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]\cos ax-2\,\mathrm{Si}\,(ax)\sin ax+$ $+i\pi\cos ax\}(x+i0)^{-1}$
441 $\ln\|t^2-a^2\|$	$-2\pi\|x\|^{-1}\cos ax-4\pi\gamma\delta(x)$
442 $\ln\|t^2-a^2\|\,\mathrm{sgn}\,t$	$-4ix^{-1}[\mathrm{ci}\,(a\|x\|)\cos ax+\mathrm{si}\,(a\|x\|)\sin a\|x\|-\ln a]$
443 $t_+^{-1}\ln\|t^2-a^2\|$	$\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]+i\,\mathrm{Si}\,(ax)-\dfrac{\pi i}{2}\right\}\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]-\right.$ $\left.-i\,\mathrm{Si}\,(ax)-\dfrac{i\pi}{2}\right\}-2\ln a\left[\gamma+\ln(x+i0)-i\dfrac{\pi}{2}\right]$
444 $t^{-1}\ln\|t^2-a^2\|$	$-2\pi i\,\mathrm{sgn}\,x\,[\mathrm{ci}\,(a\|x\|)-\ln a]$

445 $\|t\|^{-1}\ln\|t^2-a^2\|$	$2\,[\mathrm{ci}^2(a\|x\|)+\mathrm{si}^2(a\|x\|)-2\ln a\,(\ln\|x\|+\gamma)]$
446 $t_+^{-2}\ln\|t^2-a^2\|$	$ix\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]+i\,\mathrm{Si}\,(ax)-\frac{\pi i}{2}\right\}\left\{\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]-\right.$ $\left.-i\,\mathrm{Si}\,(ax)-\frac{\pi i}{2}\right\}-2ix\ln a\left[\gamma-i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)-1\right]+$ $+\frac{1}{a}\{-2i\,\mathrm{ci}\,[a(x+i0)]\sin ax+$ $+2i\,\mathrm{Si}\,(ax)\cos ax-\pi\sin ax\}$
447 $t^{-2}\ln\|t^2-a^2\|$	$2\pi\|x\|[\mathrm{ci}\,(a\|x\|)-\ln a]-\frac{2\pi}{a}\sin a\|x\|$
448 $t^{-2}\operatorname{sgn}t\ln\|t^2-a^2\|$	$-\frac{4i}{a}\left\{-\frac{a}{2}x\,[\mathrm{ci}^2(a\|x\|)+\mathrm{si}^2(a\|x\|)]-\right.$ $-2\ln a\,[\ln\|x\|+\gamma-1]+\mathrm{ci}\,(a\|x\|)\sin ax-$ $\left.-\mathrm{Si}\,(ax)\cos ax\right\}$
449 $\ln^2 t_+$	$i(x+i0)^{-1}\left\{\left[\gamma-i\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]^2+\frac{\pi^2}{6}\right\}$
450 $\ln^2 t_-$	$-i(x-i0)^{-1}\left\{\left[\gamma+i\frac{\pi}{2}+\ln(x-i0)\right]^2+\frac{\pi^2}{6}\right\}$

f	$F[f]$
451 $\ln^2\lvert t\rvert$	$2\pi\lvert x\rvert^{-1}(\gamma+\ln\lvert x\rvert)+2\pi\left(\frac{\pi^2}{12}+\gamma^2\right)\delta(x)$
452 $\ln^2\lvert t\rvert\operatorname{sgn} t$	$2ix^{-1}\left[(\ln\lvert x\rvert+\gamma)^2-\frac{\pi^2}{12}\right]$
453 $t_+^{\lambda-1}\ln^2 t_+$, $\lambda\neq 0, -1, -2, \ldots$	$e^{-i\pi\lambda/2}\,\Gamma(\lambda)(x+i0)^{-\lambda}\left\{\left[\psi(\lambda)+i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\right]^2+\psi'(\lambda)\right\}$
454 $t_-^{\lambda-1}\ln^2 t_-$, $\lambda\neq 0, -1, -2, \ldots$	$e^{-i\pi\lambda/2}\,\Gamma(\lambda)(x-i0)^{-\lambda}\left\{\left[\psi(\lambda)-i\frac{\pi}{2}-\ln(x-i0)\right]^2+\psi'(\lambda)\right\}$
455 $\lvert t\rvert^{\lambda-1}\ln^2\lvert t\rvert$, $\lambda\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$2\Gamma(\lambda)\lvert x\rvert^{-\lambda}\left\{\left[[\ln\lvert x\rvert-\psi(\lambda)]^2-\frac{\pi^2}{4}+\psi'(\lambda)\right]\cos\frac{\lambda}{2}\pi+\pi[\ln\lvert x\rvert-\psi(\lambda)]\sin\frac{\lambda}{2}\pi\right\}$

456 $\|t\|^{\lambda-1}\ln^2\|t\|\operatorname{sgn} t$, $\lambda\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$	$2i\operatorname{sgn} x\,\|x\|^{-\lambda}\left\{\left[(\ln\|x\|-\psi(\lambda))^2-\frac{\pi^2}{4}+\psi'(\lambda)\right]\sin\frac{\lambda}{2}\pi-\right.$ $\left.-\pi\,[\ln\|x\|-\psi(\lambda)]\cos\frac{\lambda}{2}\pi\right\}$
457 $t^{-n}\ln^2\|t\|$, $n=1,\ 2,\ \dots$	$\pi i^n\frac{x^{n-1}\operatorname{sgn} x}{(n-1)!}\left\{[\ln\|x\|-\psi(n)]^2+\frac{\pi^2}{4}-\psi'(n)\right\}$
458 $t^{-n}\ln^2\|t\|\operatorname{sgn} t$, $n=1,\ 2,\ \dots$	$\frac{2i^{n+1}}{3}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left\{[\ln\|x\|-\psi(n)]^3+3\left[\frac{\pi^2}{12}-\psi'(n)\right]\times\right.$ $\left.\times\,[\ln\|x\|-\psi(n)]-\psi'(n)\right\}$
459 $\ln^3 t_+$	$-i\,(x+i0)^{-1}\left\{\left[\gamma-i\,\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]^3+\right.$ $\left.+\frac{\pi^2}{2}\left[\gamma-i\,\frac{\pi}{2}+\ln(x+i0)\right]+\psi''(1)\right\}$
460 $\ln^3 t_-$	$i\,(x-i0)^{-1}\left\{\left[\gamma+i\,\frac{\pi}{2}+\ln(x-i0)\right]^3+\right.$ $\left.+\frac{\pi^2}{2}\left[i\,\frac{\pi}{2}+\ln(x-i0)\right]+\psi''(1)\right\}$

f	$F[f]$
461 $t_+^{\lambda-1}\ln^3 t_+$ $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$e^{-i\lambda\pi/2}(x+i0)^{-\lambda}\Big\{\Big[i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\Big]^3\Gamma(\lambda)+$ $+3\Big[i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\Big]^2\Gamma'(\lambda)+$ $+3\Big[i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\Big]\Gamma''(\lambda)+\Gamma'''(\lambda)\Big\}$
462 $t_-^{\lambda-1}\ln^3 t_-$ $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$	$-e^{i\lambda\pi/2}(x-i0)^{-\lambda}\Big\{\Big[i\frac{\pi}{2}+\ln(x-i0)\Big]\Gamma(\lambda)-$ $-3\Big[i\frac{\pi}{2}+\ln(x-i0)\Big]^2\Gamma'(\lambda)+$ $+3\Big[i\frac{\pi}{2}+\ln(x-i0)\Big]\Gamma''(\lambda)-\Gamma'''(\lambda)\Big\}$

463 $t_+^{\lambda-1}\ln^m t_+$ $\lambda \neq 0, -1, -2, \dots$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$e^{-i\lambda\pi/2}(x+i0)^{-\lambda}\Big\{\Big[i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\Big]^m\Gamma(\lambda)+$ $+C_m^1\Big[i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\Big]^{m-1}\Gamma'(\lambda)+\dots$ $\dots+C_m^r\Big[i\frac{\pi}{2}-\ln(x+i0)\Big]^{m-r}\times$ $\times\Gamma^{(r)}(\lambda)+\dots+\Gamma^{(m)}(\lambda)\Big\}$
464 $t_-^{\lambda-1}\ln^m t_-$ $\lambda \neq 0, -1, -2, \dots$ $m = 0, 1, 2, \dots$	$e^{i\lambda\pi/2}(x-i0)^{-\lambda}\Big\{\Big[-i\frac{\pi}{2}-\ln(x-i0)\Big]^m\Gamma(\lambda)+$ $+C_m^1\Big[-i\frac{\pi}{2}-\ln(x-i0)\Big]^{m-1}\Gamma'(\lambda)+\dots$ $\dots+C_m^r\Big[-i\frac{\pi}{2}-\ln(x-i0)\Big]^{m-r}\Gamma^{(r)}(\lambda)+\dots$ $\dots+\Gamma^{(m)}(\lambda)\Big\}$

§ 6. Тригонометрические функции

f	$F[f]$
465 $\sin at$	$-i\pi[\delta(x+a)-\delta(x-a)]$
466 $\theta(t)\sin at$	$-\dfrac{a}{x^2-a^2}-\dfrac{\pi i}{2}[\delta(x+a)-\delta(x-a)]=-\dfrac{a}{(x+i0)^2-a^2}$
467 $\theta(-t)\sin at$	$\dfrac{a}{x^2-a^2}-\dfrac{\pi i}{2}[\delta(x+a)-\delta(x-a)]=\dfrac{a}{(x-i0)^2-a^2}$
468 $\operatorname{sgn} t\sin at$	$-\dfrac{2a}{x^2-a^2}$
469 $\theta(t)\mid\sin at\mid$	$-\dfrac{ia}{(x+i0)^2-a^2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi(x+i0)}{2a}$
470 $t_+^\lambda\sin at$ $\lambda\neq-1,\,-2,\,\ldots$	$\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{2}e^{i\frac{\lambda\pi}{2}}\left[(x+a-i0)^{-\lambda-1}-[x-a-i0)^{-\lambda-1}\right]$

471	$t_-^{\lambda}\sin at$ $\lambda\neq -1, -2, \ldots$	$-\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{2}e^{-i\lambda\pi/2}[(x+a-i0)^{-\lambda-1}-(x-a-i0)^{-\lambda-1}]$
472	$\lvert t\rvert^{\lambda}\sin at$ $\lambda\neq -1, -3, \ldots$	$i\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)[\lvert x+a\rvert^{-\lambda-1}-\lvert x-a\rvert^{-\lambda-1}]$
473	$\lvert t\rvert^{\lambda}\operatorname{sgn} t\sin at$ $\lambda\neq -2, -4, \ldots$	$\cos\dfrac{\lambda\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)[\lvert x+a\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}(x+a)-\lvert x-a\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}(x-a)]$
474	$t^n\sin at$	$(-i)^{n+1}\pi[\delta^{(n)}(x+a)-\delta^{(n)}(x-a)]$
475	$t_+^n\sin at$	$\dfrac{i^n n!}{2}[(x+a+i0)^{-n-1}-(x-a+i0)^{-n-1}]=$ $=\dfrac{i^n n!}{2}[(x+a)^{-n-1}-(x-a)^{-n-1}]+$ $+\dfrac{(-i)^{n+1}\pi}{2}[\delta^{(n)}(x+a)-\delta^{(n)}(x-a)]$

f	$F[f]$
476 $t_-^n \sin at$	$-\frac{(-i)^n n!}{2}[(x+a-i0)^{-n-1}-(x-a-i0)^{-n-1}] = -\frac{(-i)^n n!}{2}[(x+a)^{-n-1}-(x-a)^{-n-1}] + \frac{i^{n-1}\pi}{2}[\delta^{(n)}(x+a)-\delta^{(n)}(x-a)]$
477 $t^n \operatorname{sgn} t \sin at$	$-2a(-i)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x^2-a^2}$
478 $t^{-1} \sin at$	$\pi \begin{cases} 1, & \|x\| < a \\ 0, & \|x\| > a \end{cases}$
479 $t_+^{-1} \sin at$	$\frac{1}{2i}[\ln(x-a+i0)-\ln(x+a+i0)]$
480 $t_-^{-1} \sin at$	$\frac{1}{2i}[\ln(x-a-i0)-\ln(x+a-i0)]$
481 $\|t\|^{-1} \sin at$	$-i\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$

482 $t^{-2}\sin at$	$i\pi\begin{cases}-a, & x<-a\\ x, & \lvert x\rvert<a\\ a, & x>a\end{cases}$
483 $t^{-2}\operatorname{sgn} t\sin at$	$2a(1-\gamma)-[(x+a)\ln\lvert x+a\rvert-(x-a)\ln\lvert x-a\rvert]$
484 $t_{+}^{-2}\sin at$	$a\left(1-\gamma+i\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[(x+a)\ln(x+a+i0)-(x-a)\ln(x-a+i0)\right]$
485 $t_{-}^{-2}\sin at$	$-a\left(1-\gamma-i\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}[(x+a)\ln(x+a-i0)-(x-a)\ln(x-a-i0)]$
486 $t^{-2m}\sin at$ $m=1, 2, \ldots$	$\frac{(-1)^{m+1}\pi i}{2(2m-1)!}[\lvert x+a\rvert^{2m-1}-\lvert x-a\rvert^{2m-1}]$
487 $t^{-2m-1}\sin at$ $m=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{(-1)^m\pi}{2(2m)!}[\lvert x+a\rvert^{2m}\operatorname{sgn}(x+a)-\lvert x-a\rvert^{2m}\operatorname{sgn}(x-a)]$
488 $t^{-2m}\operatorname{sgn} t\sin at$ $m=1, 2, \ldots$	$\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\{[(x+a)^{2m-1}-(x-a)^{2m-1}]\psi(2m)-$ $-(x+a)^{2m-1}\ln\lvert x+a\rvert+(x-a)^{2m-1}\ln\lvert x-a\rvert\}$

f	$F[f]$
489 $\lvert t\rvert^{-2m-1}\sin at$, $m=0, 1, 2, \ldots$	$\frac{(-1)^{m+1} i}{(2m)!}\left[(x+a)^{2m}-(x-a)^{2m}-(x+a)^{2m}\ln\lvert x+a\rvert+(x-a)^{2m}\ln\lvert x-a\rvert\right]$
490 $0,\quad t<0$; $\sin\beta n,\ n<t<n+1$, $n=0, 1, 2, \ldots$	$-\sin\beta e^{i\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2(x+i0)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\beta+i0\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\beta+i0\right)}$
491 $\sin^2 at$	$-\frac{\pi}{2}[\delta(x+2a)-2\delta(x)+\delta(x-2a)]$
492 $\theta(t)\sin^2 at$	$-\frac{2ia^2}{(x+i0)[(x+i0)^2-4a^2]}$
493 $\operatorname{sgn} t\sin^2 at$	$-\frac{4ia^2}{x(x^2-4a^2)}$
494 $t^n\sin^2 at$	$-\frac{(-i)^n\pi}{2}[\delta^{(n)}(x+2a)-2\delta^{(n)}(x)+\delta^{(n)}(x-2a)]$

495 $t^{-1}\sin^2 at$	$\dfrac{i\pi}{2}\begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < 2a \\ 0, & \lvert x\rvert > 2a \end{cases}$
496 $\lvert t\rvert^{-1}\sin^2 at$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x^2-4a^2}{x^2}\right\rvert$
497 $t^{-2}\sin^2 at$	$\dfrac{\pi}{2}\begin{cases} 2a-\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert < 2a \\ 0, & \lvert x\rvert > 2a \end{cases}$
498 $t^{-2}\operatorname{sgn} t\sin^2 at$	$\dfrac{i}{2}[(x+2a)\ln\lvert x+2a\rvert-2x\ln\lvert x\rvert+(x-2a)\ln\lvert x-2a\rvert]$
499 $t^{-2m}\sin^2 at$ $m=1, 2, \ldots$	$\dfrac{(-1)^{m+1}\pi}{4(2m-1)!}[\lvert x+2a\rvert^{2m-1}-2\lvert x\rvert^{2m-1}+\lvert x-2a\rvert^{2m-1}]$
500 $t^{-2m-1}\sin^2 at$ $m=0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{(-1)^{m+1}\pi i}{4(2m)!}[\lvert x+2a\rvert^{2m}\operatorname{sgn}(x+2a)-2\lvert x\rvert^{2m}\operatorname{sgn} x+$ $+\lvert x-2a\rvert^{2m}\operatorname{sgn}(x-2a)]$
501 $t^{-2m}\operatorname{sgn} t\sin^2 at$ $m=1, 2, \ldots$	$\dfrac{(-1)^m i}{2(2m)!}\{[(x+2a)^{2m-1}-2x^{2m-1}+(x-2a)^{2m-1}]\psi(2m)-$ $-(x+2a)^{2m-1}\ln\lvert x+2a\rvert+2x^{2m-1}\ln\lvert x\rvert-(x-2a)^{2m-1}\ln(x-2a)\}$

f	$F[f]$
502 $\lvert t\rvert^{-2m-1}\sin^2 at$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\frac{(-1)^{m+1}}{2\,(2m)!}\left[(x+2a)^{2m}-2x^{2m}+(x-2a)^{2m}\mp -(x+2a)^{2m}\ln\lvert x+2a\rvert+2x^{m}\ln\lvert x\rvert-(x-2a)^{2m}\ln\lvert x-2a\rvert\right]$
503 $\cos at$	$\pi\,[\delta(x+a)+\delta(x-a)]$
504 $\theta(t)\cos at$	$\frac{ix}{(x+i0)^2-a^2}$
505 $\theta(-t)\cos at$	$\frac{-ix}{(x-i0)^2-a^2}$
506 $\operatorname{sgn} t\cos at$	$\frac{2ix}{x^2-a^2}$
507 $\theta(t)\,\lvert\cos at\rvert$	$\frac{i}{(x+i0^2)-a^2}\left[x-a\,\frac{1}{\sin\frac{\pi(x+i0)}{2a}}\right]$
508 $t_+^{\lambda}\cos at$, $\lambda\neq -1,-2,\ \ldots$	$\frac{i\Gamma(\lambda+1)}{2}\,e^{i\lambda\pi/2}\left[(x+a+i0)^{-\lambda-1}+(x-a+i0)^{-\lambda-1}\right]$

509 $t_-^\lambda \cos at$ $\lambda \neq -1, -2, \ldots$	$-\frac{i\Gamma(\lambda+1)}{2} e^{-i\lambda\pi/2}\left[(x+a-i0)^{-\lambda-1}+(x-a-i0)^{-\lambda-1}\right]$
510 $\lvert t\rvert^\lambda \cos at$ $\lambda \neq -1, -3, \ldots$	$-\sin\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\left[\lvert x+a\rvert^{-\lambda-1}+\lvert x-a\rvert^{-\lambda-1}\right]$
511 $\lvert t\rvert^\lambda \operatorname{sgn} t \cos at$ $\lambda \neq -2, -4, \ldots$	$i\cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\Gamma(\lambda+1)\left[\lvert x+a\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}(x+a)+\lvert x-a\rvert^{-\lambda-1}\operatorname{sgn}(x-a)\right]$
512 $t^n \cos at$	$(-i)^n\pi\left[\delta^{(n)}(x+a)+\delta^{(n)}(x-a)\right]$
513 $t_+^n \cos at$	$\frac{i^{n+1}n!}{2}\left[(x+a+i0)^{-n-1}+(x-a+i0)^{-n-1}\right]=$ $=\frac{i^{n+1}n!}{2}\left[(x+a)^{-n-1}+(x-a)^{-n-1}\right]+$ $+\frac{(-i)^n\pi}{2}\left[\delta^{(n)}(x+a)+\delta^{(n)}(x-a)\right]$
514 $t_-^n \cos at$	$\frac{(-i)^{n+1}n!}{2}\left[(x+a-i0)^{-n-1}+(x-a-i0)^{-n-1}\right]=$ $=\frac{(-i)^{n+1}n!}{2}\left[(x+a)^{-n-1}+(x-a)^{-n-1}\right]+$ $+\frac{i^n\pi}{2}\left[\delta^{(n)}(x+a)+\delta^{(n)}(x-a)\right]$

f	$F[f]$
515 $t^n \operatorname{sgn} t \cos at$	$-2(-i)^{n+1}\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{x}{x^2-a^2}$
516 $t^{-1}\cos at$	$i\pi\begin{cases}-1, & x<-a\\ 0, & \|x\|<a\\ 1, & x>a\end{cases}$
517 $t_+^{-1}\cos at$	$\dfrac{1}{2}[\ln(x-a+i0)+\ln(x+a+i0)]+i\dfrac{\pi}{2}-\gamma$
518 $t_-^{-1}\cos at$	$\dfrac{1}{2}[\ln(x-a-i0)+\ln(x+a-i0)]-i\dfrac{\pi}{2}-\gamma$
519 $\|t\|^{-1}\cos at$	$-\ln\|x^2-a^2\|-2\gamma$
520 $t^{-2}\cos at$	$-\pi\begin{cases}-x, & x<-a\\ a, & \|x\|<a\\ x, & x>a\end{cases}$
521 $t^{-2}\operatorname{sgn} t\cos at$	$2ix[1-\gamma]-i[(x+a)\ln\|x+a\|+(x-a)\ln\|x-a\|]$

522	$t_+^{-2}\cos at$	$ix\left[1-\gamma+i\frac{\pi}{2}\right]-\frac{i}{2}[(x+a)\ln(x+a+i0)+(x-a)\ln(x-a-i0)]$
523	$t_-^{-2}\cos at$	$-ix\left[1-\gamma-i\frac{\pi}{2}\right]+\frac{i}{2}[(x+a)\ln(x+a-i0)+$ $+(x-a)\ln(x-a-i0)]$
524	$t^{-2m}\cos at$	$\frac{(-1)^m\pi}{2(2m-1)!}[\lvert x+a\rvert^{2m-1}+\lvert x-a\rvert^{2m-1}]$
525	$t^{-2m-1}\cos at$	$\frac{(-1)^m i\pi}{2(2m)!}[\lvert x+a\rvert\operatorname{sgn}(x+a)+\lvert x-a\rvert\operatorname{sgn}(x-a)]$
526	$t^{-2m}\operatorname{sgn}t\cos at$	$\frac{(-1)^{m+1}i}{(2m-1)!}\{[(x+a)^{2m-1}+(x-a)^{2m-1}]\psi(2m)-$ $-[(x+a)^{2m-1}\ln\lvert x+a\rvert+(x-a)^{2m-1}\ln\lvert x-a\rvert]\}$
527	$\lvert t\rvert^{-2m-1}\cos at$	$\frac{(-1)^m}{(2m)!}\{[(x+a)^{2m}+(x-a)^{2m}]\psi(2m+1)-$ $-[(x+a)^{2m}\ln\lvert x+a\rvert+(x-a)^{2m}\ln\lvert x-a\rvert]\}$
528	$0,\ t<0$ $\cos\beta n,\ n<t<n+1$ $n=0,1,2,\dots$	$-e^{i\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}(e^{-ix}-\cos\beta)}{2(x+i0)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\beta+i0\right)}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\beta+i0\right)}$

f	$F[f]$
529 $\cos^2 at$	$\frac{\pi}{2}[\delta(x+2a)+2\delta(x)+\delta(x-2a)]$
530 $\theta(t)\cos^2 at$	$\frac{-2ia^2}{(x+i0)[(x+i0)^2-4a^2]}\left\{1-\frac{x^2}{2a^2}\right\}$
531 $\operatorname{sgn} t\cos^2 at$	$\frac{2i}{x}\frac{x^2-2a^2}{x^2-4a^2}$
532 $t^n\cos^2 at$	$\frac{(-i)^n\pi}{2}[\delta^{(n)}(x+2a)+2\delta^{(n)}(x)+\delta^{(n)}(x-2a)]$
533 $t^{-1}\cos^2 at$	$i\pi\operatorname{sgn} x\begin{cases}\frac{1}{2}, & \lvert x\rvert<2a\\ 1, & \lvert x\rvert>2a\end{cases}$
534 $\lvert t\rvert^{-1}\cos^2 at$	$-2\gamma-\frac{1}{2}\ln(x^2\lvert x^2-4a^2\rvert)$
535 $t^{-2}\cos^2 at$	$-\frac{\pi}{2}\begin{cases}2a+\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert<2a\\ 2\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert>2a\end{cases}$

536 $t^{-2}\operatorname{sgn} t\cos^2 at$	$2ix(1-\gamma)-\frac{i}{2}[(x+2a)\ln\lvert x+2a\rvert+2x\ln\lvert x\rvert+(x-2a)\ln\lvert x-a\rvert]$
537 $t^{-2m}\cos^2 at$	$\frac{(-1)^m\pi}{4(2m-1)!}[\lvert x+2a\rvert^{2m-1}+2\lvert x\rvert^{2m-1}+\lvert x-2a\rvert^{2m-1}]$
538 $t^{-2m-1}\cos^2 at$	$\frac{(-1)^m i\pi}{4(2m)!}[(x+2a)^{2m}\operatorname{sgn}(x+2a)+2x^{2m}\operatorname{sgn} x+(x-2a)^{2m}\operatorname{sgn}(x-2a)]$
539 $t^{-2m}\operatorname{sgn} t\cos^2 at$	$\frac{(-1)^{m+1}i}{2(2m-1)!}\{[(x+2a)^{2m-1}+x^{2m-1}+(x-2a)^{2m-1}]\psi(2m)-$ $-[(x+2a)^{2m-1}\ln\lvert x+2a\rvert+2x^{2m-1}\ln\lvert x\rvert+$ $+(x-2a)^{2m-1}\ln(x-2a)]\}$
540 $\lvert t\rvert^{-2m-1}\cos^2 at$	$\frac{(-1)^m}{2(2m)!}\{[(x+2a)^{2m}+2x^{2m}+(x-2a)^{2m}]\psi(2m+1)-$ $-[(x+2a)^{2m}\ln\lvert x+2a\rvert+2x^{2m}\ln\lvert x\rvert+(x-2a)^{2m}\ln\lvert x-2a\rvert]\}$
541 $\frac{\sin at\sin bt}{t}$ $a>b$	$i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x,\quad a-b<\lvert x\rvert<a+b$ 0 при остальных x

f	$F[f]$
542 $\dfrac{\sin at \sin bt}{t^2}$, $a > b$	$\dfrac{\pi}{2}\begin{cases} 0, & \lvert x\rvert > a+b \\ \dfrac{a+b}{2}-\lvert x\rvert, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 2b, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
543 $\dfrac{\sin at \sin bt}{t^3}$, $a > b$	$\dfrac{i\pi}{4}\begin{cases} 4ab, & \lvert x\rvert > a+b \\ 2(a+b)\lvert x\rvert - x^2-(a-b)^2, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 4b\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
544 $\dfrac{\cos at \cos bt}{t}$, $a > b$	$i\pi(\operatorname{sgn} x)\begin{cases} 1, & \lvert x\rvert > a+b \\ \dfrac{1}{2}, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 0, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
545 $\dfrac{\cos at \cos bt}{t^2}$, $a > b$	$-\dfrac{\pi}{2}\begin{cases} 2\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert > a+b \\ a+b+\lvert x\rvert, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 2a, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$

546 $\dfrac{\cos at \cos bt}{t^3}$ $a > b$	$-\dfrac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} x \begin{cases} 2(x^2+a^2+b^2), & \lvert x\rvert > a+b \\ x^2+2(a+b)\lvert x\rvert+(a+b)^2, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 4a\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
547 $\dfrac{\sin at \cos bt}{t}$ $a > b$	$\begin{cases} 0, & \lvert x\rvert > a+b \\ \dfrac{1}{2}, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 1, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
548 $\dfrac{\sin at \cos bt}{t^2}$ $a > b$	$\dfrac{i\pi}{2}\begin{cases} 2a \operatorname{sgn} x, & \lvert x\rvert > a+b \\ x+(a-b)\operatorname{sgn} x, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 2x, & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
549 $\dfrac{\sin at \cos bt}{t^3}$ $a > b$	$-\dfrac{\pi}{4}\begin{cases} 4a\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert > a+b \\ x^2+2(a-b)\lvert x\rvert+(a+b)^2, & a-b < \lvert x\rvert < a+b \\ 2(x^2+a^2+b^2), & \lvert x\rvert < a-b \end{cases}$
550 $\sin^n at$	$\dfrac{\pi e^{in\pi/2}}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{n} C_n^m (-1)^m \delta(x+2am-an)$

f	$F[f]$
551 $\theta(t)\sin^{2n} at$	$\dfrac{(-1)^n i\,(2n)!\,a^{2n}}{(x+i0)\,[(x+i0)^2-(2a)^2]\ldots[(x+i0)^2-(2na)^2]}$
552 $\theta(t)\sin^{2n+1} at$	$\dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)!\,a^{2n+1}}{[(x+i0)^2-a^2]\ldots\{(x+i0)^2-[(2n+1)\,a]^2\}}$
553 $0 \quad t<\dfrac{\pi}{2}$; $\sin^{2n} t \quad t>\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{(-1)^n i}{x+i0}\,\dfrac{(2n)!\,e^{i\pi x/2}}{[(x+i0)^2-2^2]\ldots[(x+i0)^2-4n^2]}\times$ $\times\left\{1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^2(2^2-x^2)}{4!}-\ldots-\dfrac{x^2(2^2-x^2)\ldots[4(n-1)^2-x^2]}{(2n)!}\right\}$
554 $\sin^{2n} t \quad 0<t<\dfrac{\pi}{2}$; 0 при остальных t	$\dfrac{(-1)^n i}{x+i0}\,\dfrac{(2n)!\,e^{i\pi x/2}}{[(x+i0)^2-2^2]\ldots[(x+i0)^2-4(n-1)^2]}\times$ $\times\left\{e^{-i\pi x/2}-1+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^2(2^2-x^2)\ldots[4(n-1)^2-x^2]}{(2n)!}\right\}$
555 $\sin^{2n} t \quad 0<t<\pi m$; 0 при остальных t; $m=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{(-1)^n i}{x+i0}\,\dfrac{(2n)!\,(1-e^{im\pi x})}{[(x+i0)^2-2^2]\ldots[(x+i0)^2-4n^2]}$

556 $0, \quad t < \frac{\pi}{2}$ $\sin^{2n+1} t, \quad t > \frac{\pi}{2}$	$\frac{(-1)^n ixe^{i\pi x/2}(2n+1)!}{[(x+i0)^2-1^2]\dots[(x+i0)^2-(2n+1)^2]}\times$ $\times\left\{1+\frac{1^2-x^2}{3!}+\frac{(1^2-x^2)(3-x^2)}{5!}+\dots\right.$ $\left.\dots+\frac{(1^2-x^2)(3^2-x^2)\dots[(2n-1)^2-x^2]}{(2n+1)!}\right\}$
557 $\sin^{2n+1} t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$ 0 при остальных t	$\frac{(-1)^n (2n+1)! e^{i\pi x/2}}{[(x+i0)^2-1^2]\dots[(x+i0)^2-(2n+1)^2]}\times$ $\times\left\{e^{-i\pi x/2}+ix+ix\frac{(1^2-x^2)}{3!}+\dots\right.$ $\left.\dots+ix\frac{(1^2-x^2)(3^2-x^2)\dots[(2n+1)^2-x^2]}{(2n+1)!}\right\}$
558 $\sin^{2n+1} t, \quad 0 < t < m\pi$ 0 при остальных t $m = 1, 2, 3, \dots;$	$\frac{(-1)^n (2n+1)!\left[1-(-1)^m e^{im\pi x}\right]}{[(x+i0)^2-1^2]\dots[(x+i0)^2-(2n+1)^2]}$
559 $0, \quad t < \frac{\pi}{2}$ $t\sin t, \quad t > \frac{\pi}{2}$	$-\frac{e^{i\pi x/2}}{[(x+i0)^2-1]^2}\left[i\frac{\pi x}{2}(1-x^2)+x^2+1\right]$

f	$F[f]$
560 $t \sin t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$ 0 при остальных t	$-\frac{1}{[(x+i0)^2-1]^2}\left\{2ix - e^{i\pi x/2}\left[i\frac{\pi x}{2}(1-x^2)+x^2+1\right]\right\}$
561 $\cos^n at$	$\frac{\pi}{2^{n-1}}\sum_{m=0}^{n} C_n^m \delta(x+2am-n)$
562 $\theta(t)\cos^{2n} at$	$\frac{(-1)^n i\,(2n)!\,a^{2n}}{(x+i0)\,[(x+i0)^2-(2a)^2]\ldots[(x+i0)^2-(2na)^2]}\times$ $\times\left\{1-\frac{x^2}{2!a^2}-\frac{x^2[(2a)^2-x^2]}{4!a^4}-\ldots\right.$ $\left.\ldots-\frac{x^2[(2a)^2-x^2][(4a)^2-x^2]\ldots[(2n-1)^2a^2-x^2]}{(2n)!\,a^{2n}}\right\}$
563 $\theta(t)\cos^{2n+1} at$	$\frac{(-1)^n i\,(2n+1)!\,a^{2n}x}{[(x+i0)^2-a^2]\ldots[(x+i0)^2-(2n+1)^2a^2]}\times$ $\times\left\{1+\frac{a^2-x^2}{3!a^2}+\frac{(a^2-x^2)[(3a)^2-x^2]}{5!a^4}+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{(a^2-x^2)[(3a)^2-x^2]\ldots[(2n-1)^2a^2-x^2]}{(2n+1)!\,a^{2n}}\right\}$

564 $0, \quad t < \frac{\pi}{2}$ $\cos^{2n} t, \quad t > \frac{\pi}{2}$	$\frac{(-1)^n i}{x+i0} \frac{(2n)!\, e^{i\pi x/2}}{[(x+i0)^2-2^2]\ldots[(x+i0)^2-4n^2]}$
565 $\cos^{2n} t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$ **0 при остальных** t	$\frac{(-1)^n i}{x+i0} \frac{(2n)!}{[(x+i0)^2-2^2]\ldots[(x+i0)^2-4n^2]} \times$ $\times \left\{ -e^{i\pi x/2} + 1 - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^2(2^2-x^2)\ldots[4(n-1)^2-x^2]}{(2n)!} \right\}$
566 $\cos^{2n} t, \quad \frac{\pi}{2} < t < \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$ 0 при остальных t $m=1, 2, 3, \ldots$	$\frac{(-1)^n i}{x+i0} \frac{(2n)!\, e^{i\pi x/2}(1-e^{im\pi x})}{[(x+i0)^2-2^2]\ldots[(x+i0)^2-4n^2]}$
567 $0, \quad t < \frac{\pi}{2}$ $\cos^{2n+1} t, \quad t > \frac{\pi}{2}$	$\frac{(-1)^n e^{i\pi x/2}(2n+1)!}{[(x+i0)^2-1^2]\ldots[(x+i0)^2-(2n+1)^2]}$
568 $\cos^{2n+1} t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$ **0 при остальных** t	$\frac{(-1)^n (2n+1)!}{[(x+i0)^2-1^2]\ldots[(x+i0)^2-(2n+1)^2]} \left\{ e^{i\pi x/2} - ix - ix\frac{1^2-x^2}{3!} - \ldots \right.$ $\left. \ldots - ix\frac{(1^2-x^2)(3^2-x^2)\ldots[(2n-1)^2-x^2]}{(2n+1)!} \right\}$

f	$F[f]$
569	
$\cos^{2n+1} t, \quad \frac{\pi}{2} < t < \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$ 0 при остальных t	$\frac{(-1)^n (2n+1)!\, e^{i\pi x/2}\left[(-1)^m e^{im\pi x}-1\right]}{[(x+i0)^2-1^2]\ldots[(x+i0)^2-(2n+1)^2]}$
570	
$0, \quad t < \frac{\pi}{2}$ $t\cos t, \quad t > \frac{\pi}{2}$	$-\frac{e^{i\pi x/2}}{[(x+i0)^2-1]^2}\left[\frac{\pi}{2}(1-x^2)-2ix\right]$
571	
$t\cos t, \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ 0 при остальных t	$-\frac{1+x^2}{[(x+i0)^2-1]^2}-\frac{1}{[(x+i0)^2-1]^2}\, e^{i\pi x/2}\left[\frac{\pi}{2}(x^2-1)+2ix\right]$
572	
$\theta(t)\frac{1}{\sin at}$	$-\frac{1}{a}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{2a}+\frac{1}{2}\right)+\ln 2a+\gamma+\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x+i0)\right]$
573	
$\theta(-t)\frac{1}{\sin at}$	$\frac{1}{a}\left[\psi\left(-\frac{x-i0}{2a}+\frac{1}{2}\right)+\ln 2a+\gamma+\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2a}(x-i0)\right]$
574	
$\frac{1}{\sin at}$	$2\pi i\sum_{j=0}^{\infty}\left[\delta(x-2aj-a)-\delta(x+2aj+a)\right]$

575 $\operatorname{sgn} t \dfrac{1}{\sin at}$	$-\dfrac{2}{a}\left[\psi\left(-\dfrac{x}{2a}+\dfrac{1}{2}\right)+\pi \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}+2\ln 2a+2\gamma\right]$
576 $\theta(t)\dfrac{1}{\cos at}$	$-\dfrac{i}{2a}\left[\psi\left(-\dfrac{x+i0}{4a}+\dfrac{3}{4}\right)-\psi\left(-\dfrac{x+i0}{4a}+\dfrac{1}{4}\right)\right]+i\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi(x+i0)}{2a}}$
577 $\theta(-t)\dfrac{1}{\cos at}$	$\dfrac{i}{2a}\left[\psi\left(-\dfrac{x-i0}{4a}+\dfrac{3}{4}\right)-\psi\left(-\dfrac{x-i0}{4a}+\dfrac{1}{4}\right)\right]-i\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi(x-i0)}{2a}}$
578 $\dfrac{1}{\cos at}$	$2\pi\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j[\delta(x-2aj-a)+\delta(x+2aj+a)]$
579 $\operatorname{sgn} t\dfrac{1}{\cos at}$	$-\dfrac{i}{a}\left[\psi\left(-\dfrac{x}{4a}+\dfrac{3}{4}\right)-\psi\left(-\dfrac{x}{4a}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{\pi}{\cos\dfrac{\pi x}{2a}}\right]$
580 $\theta(t)\operatorname{tg} at$	$-\dfrac{1}{2a}\left[\psi\left(-\dfrac{x+i0}{4a}+\dfrac{1}{2}\right)-\psi\left(-\dfrac{x+i0}{4a}\right)\right]-\dfrac{1}{x+i0}-$ $-\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi(x+i0)}{2a}}$

f	$F[f]$
581 $\theta(-t)\operatorname{tg} at$	$\frac{1}{2a}\left[\psi\left(-\frac{x-i0}{4a}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(-\frac{x-i0}{4a}\right)\right]+\frac{1}{x-i0}+\frac{\pi}{2a}\frac{1}{\sin\frac{\pi(x-i0)}{2a}}$
582 $\operatorname{tg} at$	$-2\pi i\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j[\delta(x-2aj)-\delta(x+2aj)]$
583 $\operatorname{sgn} t \operatorname{tg} at$	$-\frac{1}{a}\left[\psi\left(-\frac{x}{4a}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(-\frac{x}{4a}\right)+\frac{2a}{x}+\frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2a}}\right]$
584 $\theta(t)\operatorname{ctg} at$	$-\frac{1}{a}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{2a}\right)+\ln 2a+\gamma-\frac{a}{x+i0}+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi(x+i0)}{2a}\right]$
585 $\theta(-t)\operatorname{ctg} at$	$\frac{1}{a}\left[\psi\left(-\frac{x-i0}{2a}\right)+\ln 2a+\gamma-\frac{a}{x-i0}+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-i0)}{2a}\right]$
586 $\operatorname{ctg} at$	$2\pi i\sum_{j=1}^{\infty}[\delta(x-2aj)-\delta(x+2aj)]$

587	$\operatorname{sgn} t \operatorname{ctg} at$	$-\frac{2}{a}\left[\psi\left(-\frac{x}{2a}\right)-\frac{a}{x}-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}\right]-\frac{1}{a}[\ln 2a+\gamma]$
588	$\theta(t)\frac{1}{\sin^2 at}$	$-\frac{ix}{a^2}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{2a}\right)-1+\ln 2a+\gamma\right]+\frac{i}{a^2}\left[a+\frac{\pi x}{2}\operatorname{ctg}\pi\frac{x+i0}{2a}\right]$
589	$\theta(-t)\frac{1}{\sin^2 at}$	$\frac{ix}{a^2}\left[\psi\left(-\frac{x-i0}{2a}\right)-1+\ln 2a+\gamma\right]-\frac{i}{a^2}\left[a+\frac{\pi x}{2}\operatorname{ctg}\pi\frac{x-i0}{2a}\right]$
590	$\frac{1}{\sin^2 at}$	$-4\pi\sum_{j=1}^{\infty} j\,[\delta(x-2aj)+\delta(x+2aj)]$
591	$\operatorname{sgn} t\,\frac{1}{\sin^2 at}$	$\frac{2i}{a^2}\left\{-x\left[\psi\left(-\frac{x}{2a}\right)-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}\right]+x(1-\ln 2a-\gamma)+a\right\}$
592	$\frac{\cos at}{\sin^2 at}$	$-2\pi\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\,[\delta(x-2aj-a)+\delta(x+2aj+a)]$
593	$\theta(t)\,\frac{1}{\cos^2 at}$	$\frac{ix}{2a^2}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{4a}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(-\frac{x+i0}{4a}\right)\right]+ +\frac{i}{a^2}\left[a+\frac{\pi x}{2}\frac{1}{\sin\pi\frac{x+i0}{2a}}\right]$

	f	$F[f]$
594	$\theta(-t)\dfrac{1}{\cos^2 at}$	$-\dfrac{ix}{2a^2}\left[\psi\left(-\dfrac{x-i0}{4a}+\dfrac{1}{2}\right)-\psi\left(-\dfrac{x-i0}{4a}\right)\right]-\dfrac{i}{a^2}\left[a+\dfrac{\pi x}{2}\dfrac{1}{\sin\pi\dfrac{x+i0}{2a}}\right]$
595	$\dfrac{1}{\cos^2 at}$	$-4\pi\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j j\,[\delta(x-2aj)+\delta(x+2aj)]$
596	$\operatorname{sgn} t\,\dfrac{1}{\cos^2 at}$	$-\dfrac{2i}{a}\left\{\dfrac{x}{2a}\left[\psi\left(-\dfrac{x}{4a}\right)-\psi\left(-\dfrac{x}{4a}+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi x}{2a}}\right]-1\right\}$
597	$\dfrac{\sin at}{\cos^2 at}$	$-2\pi i\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)\,[\delta(x-2aj-a)-\delta(x+2aj+a)]$
598	$\theta(t)\operatorname{tg}^2 at$	$\dfrac{ix}{2a^2}\left[\psi\left(-\dfrac{x+i0}{4a}+\dfrac{1}{2}\right)-\psi\left(-\dfrac{x+i0}{4a}\right)\right]-\dfrac{i}{x+i0}+\dfrac{1}{a^2}\left[a-\dfrac{\pi x}{2}\dfrac{1}{\sin\pi\dfrac{x+i0}{2a}}\right]$

599 $\theta(-t)\,\mathrm{tg}^2\, at$	$-\frac{ix}{2a^2}\left[\psi\left(-\frac{x-i0}{4a}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(-\frac{x-i0}{4a}\right)\right]+\frac{i}{x-i0}-\frac{i}{a^2}\left[a-\frac{\pi x}{2}\frac{1}{\sin\pi\frac{x-i0}{2a}}\right]$
600 $\mathrm{tg}^2\, at$	$-\pi\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)\left[\delta(x-2aj)-\delta(x+2aj+2a)-\delta(x-2aj-2a)+\delta(x+2aj)\right]$
601 $\theta(t)\,\mathrm{ctg}^2\, at$	$-\frac{ix}{a^2}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{2a}\right)-1+\ln 2a+\gamma\right]-\frac{i}{x+i0}+\frac{i}{a^2}\left[a+\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{ctg}\,\pi\frac{x+i0}{2a}\right]$
602 $\theta(-t)\,\mathrm{ctg}^2\, at$	$\frac{ix}{a^2}\left[\psi\left(-\frac{x-i0}{2a}\right)-1+\ln 2a+\gamma\right]+\frac{1}{x-i0}-\frac{i}{a^2}\left[a+\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{ctg}\,\pi\frac{x-i0}{2a}\right]$
603 $\mathrm{ctg}^2\, at$	$-\pi\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\left[\delta(x-2aj)+\delta(x+2aj+2a)+\delta(x-2aj-2a)+\delta(x+2aj)\right]$

f	$F[f]$
604 $\theta(t)\ln\lvert\sin at\rvert$	$-\frac{i}{x+i0}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{2a}\right)+\ln 2+\gamma\right]+\frac{i}{x+i0}\left[\frac{a}{x+i0}+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi\frac{x+i0}{2a}\right]$
605 $\ln\lvert\sin at\rvert$	$2\pi\ln 2\,\delta(x)-\pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}[\delta(x-2aj)+\delta(x+2aj)]$
606 $\operatorname{sgn}t\ln\lvert\sin at\rvert$	$-\frac{2i}{x}\left[\psi\left(-\frac{x}{2a}\right)-\frac{a}{x}+\ln 2+\gamma-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}\right]$
607 $\theta(t)\ln\lvert\cos at\rvert$	$\frac{i}{2(x+i0)}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{4a}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(-\frac{x+i0}{4a}\right)\right]+\frac{i}{x+i0}\left[\frac{a}{x+i0}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\pi\frac{x+i0}{2a}}\right]$
608 $\ln\lvert\cos at\rvert$	$-2\pi\ln 2\,\delta(x)-\pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}[\delta(x-2aj)+\delta(x+2aj)]$

609 $\operatorname{sgn} t \ln\lvert\cos at\rvert$	$\frac{i}{x}\left[\psi\left(-\frac{x}{4a}+\frac{1}{2}\right)+\psi\left(-\frac{x}{4a}\right)+\frac{2a}{x}+\frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2a}}\right]$
610 $\theta(t)\ln\lvert\operatorname{tg} at\rvert$	$-\frac{i}{(x+i0)}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{4a}+\frac{1}{4}\right)+2\ln 2+\gamma\right]-$ $-\frac{\pi i}{2(x+i0)}\operatorname{tg}\pi\frac{x+i0}{4a}$
611 $\ln\lvert\operatorname{tg} at\rvert$	$-2\pi\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2j+1}[\delta(x-4aj-2a)+\delta(x+4aj+2a)]$
612 $\operatorname{sgn} t\ln\lvert\operatorname{tg} at\rvert$	$-\frac{2i}{x}\left[\psi\left(-\frac{x}{4a}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4a}+2\ln 2+\gamma\right]$
613 $\theta(t)\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(at+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\frac{1}{2(x+i0)}\left[\psi\left(-\frac{x+i0}{8a}+\frac{3}{4}\right)-\psi\left(-\frac{x+i0}{8a}+\frac{1}{4}\right)\right]-$ $-\frac{\pi}{2(x+i0)}\cdot\frac{1}{\cos\pi\frac{x+i0}{4a}}$
614 $\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(at+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$2\pi i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}[\delta(x-4aj-2a)-\delta(x+4aj+2a)]$

f	$F[f]$
615 $\operatorname{sgn} t \ln \left\| \operatorname{tg}\left(at+\frac{\pi}{4}\right)\right\|$	$\frac{1}{x}\left[\psi\left(-\frac{x}{8a}+\frac{3}{4}\right)-\psi\left(-\frac{x}{8a}+\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi}{\cos\frac{\pi x}{2a}}\right]$
616 $\frac{1}{t \sin at}$	$0, \quad \|x\| < a$ $-2\pi n, \quad (2n-1)a < \|x\| < (2n+1)a$ $n=1, 2, \ldots$
617 $\frac{1}{t \cos at}$	$2\pi i \operatorname{sgn} x, \quad (4n+1)a < \|x\| < (4n+3)a$ 0 при остальных x $n=0, 1, 2, \ldots$
618 $\frac{1}{t} \operatorname{tg} at$	$\pi, \quad 4na < \|x\| < (4n+2)a$ $-\pi, \quad (4n+2)a < \|x\| < 4na$ $n=0, 1, 2, \ldots$
619 $\frac{1}{t} \operatorname{ctg} at$	$-(2n+1)\pi, \quad 4na < \|x\| < 4(n+1)a$ $n=0, 1, 2, \ldots$

620 $\dfrac{1}{t^2 \sin at}$	$0, \quad \lvert x\rvert < a$ $-2\pi in(x - an\,\mathrm{sgn}\,x)$, $(2n-1) < \lvert x\rvert < (2n+1)\,a$ $n=1,\ 2,\ \ldots$
621 $\dfrac{1}{t^2 \cos at}$	$0, \quad \lvert x\rvert < a$ $-\pi\lvert x\rvert + \pi(-1^n)(\lvert x\rvert - 2na)$, $(2n-1) < \lvert x\rvert < (2n+1)\,a$ $n=1,\ 2,\ \ldots$
622 $\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{tg}\,at$	$\pi ai\left(\dfrac{x}{a} - 2n\,\mathrm{sgn}\,x\right), \quad 2na < \lvert x\rvert < (2n+1)\,a$ $-\pi ai\left(\dfrac{x}{a} + (2n+1)\,\mathrm{sgn}\,x\right), \quad (2n+1)\,a < \lvert x\rvert < (2n+2)\,a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
623 $\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{ctg}\,at$	$\pi i\,[-(2n+1)\,x + 2an\,(n+1)\,\mathrm{sgn}\,x]$ $2na < \lvert x\rvert < 2\,(n+1)\,a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

f	$F[f]$
624 $t^n \sin^2 t^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(-i\frac{d}{dx}\right)^n \cos\left(\frac{x^2}{4a^2}+\frac{\pi}{4}\right)$
625 $t^n \sin^2 t^2 \operatorname{sgn} t$	$i\,\frac{\sqrt{2\pi}}{a}\left(-i\frac{d}{dx}\right)^n\left[S\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\sin\frac{x^2}{4a^2}+ +C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\cos\frac{x^2}{4a^2}\right]$
626 $\frac{\sin a^2t^2}{\lvert t\rvert}$	$\pi\left[\frac{1}{2}-S^2\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)-C^2\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\right]$
627 $\frac{\sin a^2t^2}{t}$	$-i\pi\left[S\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\Bigr)-C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\right]$
628 $\frac{\sin a^2t^2}{t^2}$	$\pi x\left[S\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)-C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\right]+2\sqrt{\pi}a\sin\left(\frac{x^2}{4a^2}+\frac{\pi}{4}\right)$
629 $t^n \cos a^2t^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(-i\frac{d}{dx}\right)^n \sin\left(\frac{x^2}{4a^2}+\frac{\pi}{4}\right)$

630 $t^n \cos a^2t^2 \operatorname{sgn} t$	$-i\frac{\sqrt{2\pi}}{a}\left(-i\frac{d}{dx}\right)^n\left[S\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\cos\frac{x^2}{4a^2}-C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\sin\frac{x^2}{4a^2}\right]$
631 $\frac{\cos a^2t^2}{t}$	$i\pi\left[S\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)+C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\right]$
632 $\frac{\cos a^2t^2}{t^2}$	$-\pi x\left[S\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)+C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi}}\right)\right]-2a\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{x^2}{4a^2}+\frac{\pi}{4}\right)$
633 $\theta(t)\sin a\sqrt{t}$	$\frac{a\sqrt{\pi}}{2}e^{3i\pi/4}(x+i0)^{-3/2}e^{-\frac{ia^2}{4(x+i0)}}$
634 $\sin a\sqrt{\|t\|}$	$-a\sqrt{\pi}\|x\|^{-3/2}\cos\left(\frac{a^2}{4\|x\|}+\frac{\pi}{4}\right)$
635 $\operatorname{sgn} t \sin a\sqrt{\|t\|}$	$ia\sqrt{\pi}\|x\|^{-3/2}\operatorname{sgn} x \sin\left(\frac{a^2}{4\|x\|}+\frac{\pi}{4}\right)$

f	$F[f]$
636 $\sqrt{\lvert t\rvert}\sin a\sqrt{\lvert t\rvert}$	$-ax^{-2}-\sqrt{2\pi}\lvert x\rvert^{-3/2}\left\{\operatorname{sgn}x\, S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\times\left[\sin\frac{a^2}{4x}+\frac{a^2}{2x}\cos\frac{a^2}{4x}\right]-C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\left[\cos\frac{a^2}{4x}-\frac{a^2}{2x}\sin\frac{a^2}{4x}\right]\right\}$
637 $\operatorname{sgn}t\,\sqrt{\lvert t\rvert}\sin a\sqrt{\lvert t\rvert}$	$-i\sqrt{2\pi}\lvert x\rvert^{-3/2}\left\{\operatorname{sgn}x\, S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\times\left[\cos\frac{a^2}{4x}-\frac{a^2}{2x}\sin\frac{a^2}{4x}\right]-C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\left[\sin\frac{a^2}{4x}+\frac{a^2}{2x}\cos\frac{a^2}{4x}\right]\right\}$
638 $t_+^{1/2}\sin a\sqrt{t}$	$-\frac{a}{2(x+i0)^2}+i\sqrt{2\pi}(x+i0)^{-5/2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{ix}{2}\right)e^{-\frac{ia^2}{4(x+i0)}}\times\left[C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)+iS\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)\right]$

639 $t \sin a\sqrt{\lvert t\rvert}$	$-2i\sqrt{\pi}\, a \operatorname{sgn} x \lvert x\rvert^{-5/2}\left[\frac{3}{2}\cos\left(\frac{a^2}{4\pi\lvert x\rvert}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{a^2}{4\lvert x\rvert}\sin\left(\frac{a^2}{4\lvert x\rvert}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$
640 $\lvert t\rvert \sin a\sqrt{\lvert t\rvert}$	$-2a\sqrt{\pi}\lvert x\rvert^{-5/2}\left[\frac{3}{2}\sin\left(\frac{a^2}{4\lvert x\rvert}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{a^2}{4\lvert x\rvert}\cos\left(\frac{a^2}{4\lvert x\rvert}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$
641 $\frac{\sin a\sqrt{\lvert t\rvert}}{\lvert t\rvert}$	$2\pi\left[S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)+C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\right]$
642 $\frac{\sin a\sqrt{\lvert t\rvert}}{t}$	$-2\pi i \operatorname{sgn} x\left[S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)-C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\right]$
643 $t_+^{-1}\sin a\sqrt{t}$	$\pi\sqrt{2}e^{i\pi/4}\left[C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)-iS\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)\right]$
644 $\frac{\sin a\sqrt{\lvert t\rvert}}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\frac{-2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}\left[S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\cos\frac{a^2}{4x}-C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\sin\frac{a^2}{4\lvert x\rvert}\right]$
645 $\frac{\sin a\sqrt{t}}{\sqrt{\lvert t\rvert}}\operatorname{sgn} t$	$\frac{2\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}\left[S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\sin\frac{a^2}{4x}+\operatorname{sgn} x\, C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\lvert x\rvert}}\right)\cos\frac{a^2}{4x}\right]$

f	$F[f]$
646 $t_+^{-1/2}\sin a\sqrt{t}$	$i\sqrt{2\pi}(x+i0)^{-1/2}e^{-\frac{ia^2}{4(x+i0)}}\times\left[C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)+iS\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)\right]$
647 $\cos a\sqrt{\vert t\vert}$	$a\sqrt{2\pi}\vert x\vert^{-3/2}\left[\operatorname{sgn}x\,S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\vert x\vert}}\right)\sin\frac{a^2}{4x}+C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\vert x\vert}}\right)\cos\frac{a^2}{4x}\right]$
648 $\operatorname{sgn}t\cos a\sqrt{\vert t\vert}$	$ia\sqrt{2\pi}\vert x\vert^{-3/2}\left[S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\vert x\vert}}\right)\cos\frac{a^2}{4x}-C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi\vert x\vert}}\right)\sin\frac{a^2}{4x}\right]+\frac{2i}{x}$
649 $\theta(t)\cos a\sqrt{t}$	$\frac{i}{x+i0}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,ae^{-\frac{ia^2}{4(x+i0)}}\times\left[C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)+iS\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi(x+i0)}}\right)\right]$

650 $t \cos a \sqrt{\lvert t \rvert}$	$\frac{ia^2}{2} x^{-3} - ia \sqrt{2\pi} \lvert x \rvert^{-5/2} \times$ $\times \left\{ S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi \lvert x \rvert}}\right) \left[\frac{3}{2} \sin \frac{a^2}{4\lvert x \rvert} + \frac{a^2}{4\lvert x \rvert} \cos \frac{a^2}{4\lvert x \rvert}\right] - \right.$ $\left. - \operatorname{sgn} x \, C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi \lvert x \rvert}}\right) \left[\frac{3}{2} \cos \frac{a^2}{4\lvert x \rvert} - \frac{a^2}{4\lvert x \rvert} \sin \frac{a^2}{4\lvert x \rvert}\right] \right\}$
651 $\lvert t \rvert \cos a \sqrt{\lvert t \rvert}$	$-\frac{2}{x^2} - a \sqrt{2\pi} \lvert x \rvert^{-5/2} \times$ $\times \left\{ S\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi \lvert x \rvert}}\right) \left[\frac{3}{2} \cos \frac{a^2}{4x} - \frac{a^2}{4x} \sin \frac{a^2}{4x}\right] + \right.$ $\left. + \operatorname{sgn} x \, C\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi \lvert x \rvert}}\right) \left[\frac{3}{2} \sin \frac{a^2}{4\lvert x \rvert} + \frac{a^2}{4\lvert x \rvert} \cos \frac{a^2}{4x}\right] \right\}$
652 $\sqrt{\lvert t \rvert} \cos a \sqrt{\lvert t \rvert}$	$-\sqrt{\pi} \lvert x \rvert^{-3/2} \left[\cos \left(\frac{a^2}{4\lvert x \rvert} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{a^2}{2\lvert x \rvert} \sin \left(\frac{a^2}{4\lvert x \rvert} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
653 $\operatorname{sgn} t \sqrt{\lvert t \rvert} \cos a \sqrt{\lvert t \rvert}$	$i \sqrt{\pi} \lvert x \rvert^{-3/2} \operatorname{sgn} x \left[\sin \left(\frac{a^2}{4\lvert x \rvert} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{a^2}{2\lvert x \rvert} \cos \left(\frac{a^2}{4\lvert x \rvert} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
654 $t_+^{1/2} \cos a \sqrt{t}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} (x + i0)^{-5/2} \left(\frac{a^2}{4} + ix\right) e^{-\frac{ia^2}{4(x+i0)}}$

f	$F(f)$
655 $\dfrac{\cos a\sqrt{\lvert t\rvert}}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$2\sqrt{\pi}\,\lvert x\rvert^{-1/2}\sin\left(\dfrac{a^2}{4\lvert x\rvert}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
656 $\operatorname{sgn} t\,\dfrac{\cos a\sqrt{\lvert t\rvert}}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$i2\sqrt{\pi}\,\lvert x\rvert^{-1/2}\cos\left(\dfrac{a^2}{4\lvert x\rvert}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
657 $t_+^{-1/2}\cos\sqrt{t}$	$\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}(x+i0)^{-1/2}e^{-ia^2/4(x+i0)}$
658 $t\sin\dfrac{a}{t}$	$-\pi a\lvert x\rvert^{-1}J_2\left(2\sqrt{a\lvert x\rvert}\right)+2\pi a\delta(x)$
659 $\sin\dfrac{a}{t}$	$i\pi\operatorname{sgn} x\sqrt{\dfrac{a}{\lvert x\rvert}}\,J_1\left(2\sqrt{a\lvert x\rvert}\right)$
660 $t\cos\dfrac{a}{t}$	$-ia\pi x^{-1}J_2\left(2\sqrt{a\lvert x\rvert}\right)-2\pi i\delta'(x)$
661 $\cos\dfrac{a}{t}$	$-\pi\sqrt{\dfrac{a}{\lvert x\rvert}}\,J_1\left(2\sqrt{a\lvert x\rvert}\right)+2\pi\delta(x)$

§ 7. Ряды с дельта-функциями

f	$F[f]$
662 $\delta(t)$	1
663 $\delta^{(n)}(t)$	$(-ix)^n$
664 $\delta^{(n)}(t \pm a)$	$e^{\mp iax}(-ix)^n$
665 $\delta(t+a)-\delta(t-a)$	$-2i \sin ax$
666 $\delta(t+a)+\delta(t-a)$	$2 \cos ax$
667 $\delta(t)+2\sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-2na)$	$i \operatorname{ctg} a(x+i0)$
668 $\delta(t)+2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta(t-2na)$	$-i \operatorname{tg} a(x+i0)$

f	$F[f]$
669 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n}\,\delta\left(t-\frac{2\pi n}{a}\right)$	$\pi i\left[-\frac{2x}{a}+(2n+1)\operatorname{sgn} x\right]$ $na<\lvert x\rvert<(n+1)a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
670 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,\delta\left(t-\frac{2\pi n}{a}\right)$	$-\pi i x,\quad \lvert x\rvert<a$ $-\pi i x+2\pi i n\operatorname{sgn} x,\quad (2n-1)a<\lvert x\rvert<(2n+1)a$ $n=1,\ 2,\ \ldots$
671 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\,\delta\left(t-\frac{2n+1}{a}\pi\right)$	$\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn} x\begin{cases} 1, & 2na<\lvert x\rvert<(2n+1)a \\ -1, & (2n+1)a<\lvert x\rvert<(2n+2)a\end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
672 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\delta\left(t-\frac{2n+1}{2a}\pi\right)$	$-\frac{\pi i}{a}\operatorname{sgn} x\begin{cases} 2n-1, & (4n-3)a<\lvert t\rvert<(4n-1)a \\ -2n, & (4n-1)a<\lvert t\rvert<(4n+1)a\end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

673 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\delta\left(t-\frac{\pi n}{a}\right)$	$\pi^2\left[\frac{x^2}{a}+a-(2n+1)\lvert x\rvert+2an(n+1)\right],$ $2na<\lvert x\rvert<2(n+1)a$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
674 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\delta\left(t-\frac{\pi n}{a}\right)$	$\begin{matrix} 0, & \lvert x\rvert<a \\ \frac{\pi^2x^2}{a^2}-\frac{\pi n}{a}\lvert x\rvert+\pi n^2, & (2n-1)a<\lvert x\rvert<(2n+1)a \end{matrix}$ $n=1,\ 2,\ \ldots$
675 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\delta\left(t-\frac{2n+1}{a}\pi\right)$	$\frac{\pi^2}{2}\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{\lvert x\rvert}{a}+2n, & 2na<\lvert x\rvert<(2n+1)a \\ -\frac{3}{2}+\frac{\lvert x\rvert}{a}-2n, & (2n+1)a<\lvert x\rvert<(2n+2)a \end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
676 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\delta\left(t-\frac{2n+1}{2a}\pi\right)$	$\frac{\pi}{2}\begin{cases} a\pi x, & \lvert x\rvert<a \\ a\pi x-\frac{\pi x}{2}[1-(-1)^n]-n\operatorname{sgn}x, & (2n-1)a<\lvert x\rvert<(2n+1)a \end{cases}$ $n=1,\ 2,\ \ldots$

§ 8. Функции вида $f(x+i0)$

f	$F[f]$
677 $(t+i0)^{\lambda}$, $\lambda \neq 0, 1, 2, \ldots$	$2\pi \frac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)} x_-^{-\lambda-1}$
678 $(t+i0)^{-n}$, $n=1, 2, \ldots$	$2\pi \frac{(-i)^n}{(n-1)!} x_-^{n-1}$
679 $(t+i0)^{-1}$	$-2\pi i\theta(-x)$
680 $(t+i0)^{\lambda}\ln(t+i0)$	$2\pi \frac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\left[i\frac{\pi}{2}+\psi(-\lambda)\right] x_-^{-\lambda-1} - 2\pi \frac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)} x_-^{-\lambda-1}\ln x_-$
681 $(t+i0)^{-n}\ln(t+i0)$, $n=1, 2, \ldots$	$2\pi \frac{(-i)^n}{(n-1)!}\left[i\frac{\pi}{2}+\psi(n)\right] x_-^{n-1} - 2\pi \frac{(-i)^n}{(n-1)!} x_-^{n-1}\ln x_-$
682 $(t+i0)^{-1}\ln(t+i0)$	$-2\pi i\left(i\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\theta(-x)+2\pi i\ln x_-$
683 $\ln(t+i0)$	$-2\pi x_-^{-1}+2\pi\left(i\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\delta(x)$

684 $(t+i0)^{\lambda}\ln^m(t+i0)$, $m=1, 2, \ldots$	$2\pi\left[\frac{d^m}{d\lambda^m}\frac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\right]x_-^{-\lambda-1}+2\pi(-1)^m\frac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}x_-^{-\lambda-1}\ln^m x_-$
685 $\frac{1}{\sin[a(t+i0)]}$	$-4\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x+2na+a)$
686 $\frac{1}{\cos[a(t+i0)]}$	$4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x+4na+a)-4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x+4na+3a)$
687 $\operatorname{tg}[a(t+i0)]$	$-4\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x+4na+2a)+4\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x+4na+4a)+2\pi i\delta(x)$
688 $\operatorname{ctg}[a(t+i0)]$	$-4\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\delta(x+2na)-2\pi i\delta(x)$
689 $\frac{1}{(t+i0)\sin[a(t+i0)]}$	$\begin{cases}0, & x>-a\\ -4\pi n, & -(2n+1)a<x<-(2n-1)a\end{cases}$ $n=1, 2, \ldots$
690 $\frac{1}{(t+i0)\cos[a(t+i0)]}$	$\begin{cases}-4\pi i, & -(4n+3)a<x<-(4n+1)a\\ 0 \text{ при остальных } x\end{cases}$ $n=1, 2, \ldots$

f	$F[f]$
691 $(t+i0)^{-1}\operatorname{tg}[a(t+i0)]$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ 2\pi, & -2(2n+1)a<x<-4na \\ -2\pi, & -4(n+1)a<x<-2(2n+1)a \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$
692 $(t+i0)^{-1}\operatorname{ctg}[a(t+i0)]$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ -2\pi(2n+1), & -2(n+1)a<x<-2na \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$
693 $\dfrac{\sin at}{(t+i0)\cos[2a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 2\pi, & -(8n-5)a<x<-(8n-7)a \\ -2\pi, & -(8n-1)a<x<-(8n-3)a \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$ $n=1,2,3,\ldots$
694 $\dfrac{e^{iat}}{(t+i0)\sin[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ -4\pi n, & -2(n+1)a<x<-2na \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$
695 $\dfrac{e^{-iat}}{(t+i0)\sin[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ -4\pi(n+1), & -2(n+1)a<x<-2na \end{cases}$ $n=0,1,2,\ldots$

696 $\dfrac{e^{iat}}{(t+i0)\cos[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} -4\pi i, & -(4n+4)a < x < -(4n+2)a \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
697 $\dfrac{e^{-iat}}{(t+i0)\cos[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} -4\pi i, & -(4n+2)a < x < -4na \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
698 $e^{iat}(t+i0)^{-1}\operatorname{tg}[a(t+i0)]$	$\begin{cases} 0, & x > -a \\ -2\pi, & -(2n+2)a < x < -(2n+1)a \\ 2\pi, & -(2n+3)a < x < -(2n+2)a \end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
699 $\dfrac{1}{(t+i0)^2\sin[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 0, & x > -a \\ -4\pi ni(x+an), & -(2n+1)a < x < -(2n-1)a \end{cases}$ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
700 $\dfrac{1}{(t+i0)^2\cos[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 0, & x > -a \\ 2\pi[x-(-1)^n(x+a)], & -(2n+1)a < x < -(2n-1)a \end{cases}$ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

	f	$F[f]$
701	$(t+i0)^{-2}\operatorname{tg}[a(t+i0)]$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ 2\pi i(-1)^n(2an+a+x)-2\pi ia, & -(2n+1)a<x<-2na \end{cases}$ $n=0, 1, 2, \ldots$
702	$(t+i0)^{-2}\operatorname{ctg}[a(t+i0)]$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ -2\pi i[(2n+1)x+2an(n+1)] & -2(n+1)a<x<-2na \end{cases}$ $n=0, 1, 2, \ldots$
703	$\dfrac{e^{iat}}{(t+i0)^2\sin[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 0, & x>-2a \\ -4\pi in(x+na+a), & -2(n+1)a<x<-2na \end{cases}$ $n=1, 2, \ldots$
704	$\dfrac{e^{iat}}{(t+i0)^2\cos[a(t+i0)]}$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ 2\pi[1-(-1)^n(x+a)]-4\pi(-1)^n na, & 2(n+1)a<x<2na \end{cases}$ $n=0, 1, 2, \ldots$

705	$\dfrac{\sin\dfrac{at}{2\mu}\sin\dfrac{at}{2}\left(2-\dfrac{1}{\mu}\right)}{(t+i0)^2\sin[a(t+i0)]}$ $\mu>1$	$\begin{cases} 0, & x>0 \\ \pi i(x+2na), & -\left(2n+\dfrac{1}{\mu}\right)a<x<-2na \\ -\dfrac{\pi i a}{\mu}, & -\left(2n+2-\dfrac{1}{\mu}\right)a<x<-\left(2n+\dfrac{1}{\mu}\right)a \\ -\pi i(x+2na+2a), & -(2n+2)a<x<-\left(2n+2-\dfrac{1}{\mu}\right)a \end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
706	$\dfrac{e^{-iat}\sin^2\dfrac{at}{2}}{(t+i0)^2\sin[2a(t+i0)]}$	$\begin{cases} \pi i(x+4na), & -(4n+1)a<x<-4na \\ -\pi i(x+4na+2a), & -(4n+2)a<x<-(4n+1)a \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

§ 9. Некоторые функции в R^n

Обозначения:

$$P=t_1^2+t_2^2+\ldots+t_p^2-t_{p+1}^2-\ldots-t_{p+q}^2,\quad Q=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2,$$
$$p+q=n,$$
$$|t|=\sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2},\qquad |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2},$$
$$m>0.$$

f	$F[f]$
707	
1	$(2\pi)^n\,\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
708	
$\delta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$	1
709	
$t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}$	$(2\pi)^n(-i)^{k_1+k_2+\ldots+k_n}\,\delta^{(k_1)}(x_1)\,\delta^{(k_2)}(x_2)\ldots\delta^{(k_n)}(x_n)$
710	
$\|t\|^{2m}$	$(2\pi)^n(-1)^m\left(D_{x_1}^2+D_{x_2}^2+\ldots+D_{x_n}^2\right)\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
711	
$\|t\|^{\lambda}$	$2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\|x\|^{-\lambda-n}$

712 $\lvert t\rvert^{\lambda}\ln^k\lvert t\rvert$	$\sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}}\left\{2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\right\}\lvert x\rvert^{-\lambda-n}\ln^k\lvert x\rvert$
713 $\delta(\lvert t\rvert-a)$	$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}a^{\frac{n}{2}}\lvert x\rvert^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(a\lvert x\rvert)$
714 $\delta(\lvert t\rvert-a)$ $n=3$	$4\pi a\frac{\sin a\lvert x\rvert}{\lvert x\rvert}$
715 $(P+i0)^{\lambda}$	$\frac{1}{\Gamma(-\lambda)}e^{-\pi qi/2}\,2^{n+2\lambda}\pi^{n/2}\,\Gamma(\lambda+n/2)\,(Q-i0)^{-\lambda-n/2}$
716 $(P-i0)^{\lambda}$	$\frac{e^{\pi qi/2}\,2^{n+2\lambda}\pi^{n/2}\,\Gamma(\lambda+n/2)}{\Gamma(-\lambda)}(Q+i0)^{-\lambda-n/2}$
717 P_+^{λ}	$2^{n+2\lambda}\pi^{n/2-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\lambda+n/2)\frac{1}{2i}\left[e^{-i(q/2+\lambda)\pi}(Q-i0)^{-\lambda-n/2}-\right.$ $\left.-e^{i(q/2+\lambda)\pi}(Q+i0)^{-\lambda-n/2}\right]$

	f	$F[f]$
718	P_-^{λ}	$-2^{n+2\lambda}\pi^{n/2-1}\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+n/2)\times \times\frac{1}{2i}\left[e^{-\pi qi/2}(Q-i0)^{-\lambda-n/2}-e^{\pi qi/2}(Q+i0)^{-\lambda-n/2}\right]$
719	$(m^2+P+i0)^{\lambda}$	$\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n e^{-q\pi i/2}m^{\lambda+n/2}}{\Gamma(-\lambda)}\frac{K_{\lambda+n/2}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(\lambda+n/2)/2}}= =\frac{2^{\lambda+n/2+1}\pi^{n/2}e^{-q\pi i/2}m^{\lambda+n/2}}{\Gamma(-\lambda)}\times \times\left[\frac{K_{\lambda+n/2}(mQ_+^{1/2})}{Q_+^{(\lambda+n/2)/2}}+\frac{\pi i}{2}\frac{H^{(1)}_{-\lambda-n/2}(mQ_-^{1/2})}{Q_-^{(\lambda+n/2)/2}}\right]$
720	$(m^2+P-i0)^{\lambda}$	$\frac{2^{\lambda+1}(\sqrt{2\pi})^n e^{q\pi i/2}m^{\lambda+n/2}}{\Gamma(-\lambda)}\frac{K_{\lambda+n/2}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(\lambda+n/2)/2}}= =\frac{2^{\lambda+n/2+1}\pi^{n/2}e^{q\pi i/2}m^{\lambda+n/2}}{\Gamma(-\lambda)}\times \times\left[\frac{K_{\lambda+n/2}(mQ_+^{1/2})}{Q_+^{(\lambda+n/2)/2}}-\frac{\pi i}{2}\frac{H^{(2)}_{-\lambda-n/2}(mQ_-^{1/2})}{Q_-^{(\lambda+n/2)/2}}\right]$

721 $(m^2+P)^{-s}$, $s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$	$\dfrac{(2\pi)^{n/2} m^{n/2-s}}{2^s (s-1)!} \times \left\{ \dfrac{K_{n/2-s}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{e^{q\pi i/2}(Q-i0)^{(n/2-s)/2}} + \dfrac{K_{n/2-s}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{e^{-q\pi i/2}(Q+i0)^{(n/2-s)/2}} \right\}$
722 $\dfrac{(m^2+P)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$-2^{\lambda+n/2} i\pi^{n/2-1} m^{\lambda+n/2} \left\{ e^{-i(\lambda+q/2)\pi} \dfrac{K_{\lambda+n/2}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(\lambda+n/2)/2}} - e^{i(\lambda+q/2)} \dfrac{K_{\lambda+n/2}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(\lambda+n/2)/2}} \right\} = 2^{\lambda+n/2+1}\pi^{n/2-1} m^{\lambda+n/2} \times \left\{ -\sin(\lambda+q/2)\pi \dfrac{K_{\lambda+n/2}\left(mQ_+^{1/2}\right)}{Q_+^{(\lambda+n/2)/2}} + \dfrac{\pi}{2\sin(\lambda+n/2)\pi} \times \left[\sin(\lambda+q/2)\pi \dfrac{J_{\lambda+n/2}\left(mQ_-^{1/2}\right)}{Q_-^{(\lambda+n/2)/2}} + \sin\dfrac{p\pi}{2} \dfrac{J_{-\lambda-n/2}\left(mQ_-^{1/2}\right)}{Q_-^{(\lambda+n/2)/2}} \right] \right\}$

f	$F[f]$
723 $\dfrac{(m^2+P)_-^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}$	$2^{\lambda+n/2} i\pi^{n/2-1} m^{\lambda+n/2} \left\{ e^{-q\pi i/2} \dfrac{K_{\lambda+n/2}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(\lambda+n/2)/2}} - e^{q\pi i/2} \dfrac{K_{\lambda+n/2}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(\lambda+n/2)/2}} \right\} = 2^{\lambda+n/2+1}\pi^{n/2-1} m^{\lambda+n/2} \times \left\{ \sin\dfrac{q\pi}{2} \dfrac{K_{\lambda+n/2}\left(mQ_+^{1/2}\right)}{Q_+^{(\lambda+n/2)/2}} - \dfrac{\pi}{2\sin(\lambda+n/2)\pi} \times \left[\sin\dfrac{q\pi}{2} \dfrac{J_{\lambda+n/2}\left(mQ_-^{1/2}\right)}{Q_-^{(\lambda+n/2)/2}} + \sin(\lambda+p/2)\pi \dfrac{J_{-\lambda-n/2}\left(mQ_-^{1/2}\right)}{Q_-^{(\lambda+n/2)/2}} \right] \right\}$
724 $\dfrac{(m^2+P)_+^{s}}{\Gamma(s+1)}$, $s=1, 2, 3, \ldots$	$(-1)^{s+1} i2^{s+n/2}\pi^{n/2-1} m^{s+n/2} \left\{ \dfrac{e^{-q\pi i/2} K_{s+n/2}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(s+n/2)/2}} - e^{q\pi i/2} \dfrac{K_{s+n/2}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(s+n/2)/2}} \right\} + (2\pi)^n \sum_{k=0}^{s} \dfrac{(-1)^k (m/2)^{2s-2k}}{4^k k!\,(s-k)!} \Box^k \delta(x)$

725 $\dfrac{(m^2+P)^s_-}{\Gamma(s+1)}$ $s=1, 2, 3, \ldots$	$i\cdot 2^{s+n/2}\pi^{n/2-1}m^{s+n/2}\times$ $\times\left\{e^{-q\pi i/2}\dfrac{K_{s+n/2}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(s+n/2)/2}}-e^{q\pi i/2}\dfrac{K_{s+n/2}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(s+n/2)/2}}\right\}$
726 $\dfrac{(m^2+P)^s}{\Gamma(s+1)}$ $s=1, 2, 3, \ldots$	$(2\pi)^n\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k\left(\dfrac{m}{2}\right)^{2s-2k}}{4^k k!\,(s-k)!}\Box^k\delta(x)$
727 $\delta^{(s-1)}(m^2+P)$ $s=1, 2, 3, \ldots$	$(-1)^{s+1}\, i 2^{n/2-s}\pi^{n/2-1}m^{n/2-s}\times$ $\times\left\{e^{-\pi i q/2}\dfrac{K_{n/2-s}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(n/2-s)/2}}-e^{\pi i q/2}\dfrac{K_{n/2-s}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(n/2-s)/2}}\right\}$
728 $\delta(m^2+P)$	$-i(2\pi m)^{n/2-1}\left\{-e^{-\pi q i/2}\dfrac{K_{n/2-1}\left[m(Q-i0)^{1/2}\right]}{(Q-i0)^{(n/2-1)/2}}+\right.$ $\left.+e^{\pi q i/2}\dfrac{K_{n/2-1}\left[m(Q+i0)^{1/2}\right]}{(Q+i0)^{(n/2-1)/2}}\right\}$

f	$F[f]$
729 $\theta(\pm t_1)\,P_+^{\lambda}$, $p=1$, $q=n-1$	$\pi^{n/2-1}\,2^{2\lambda+n-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\lambda+n/2)\,(-Q\mp i0x_1)^{-\lambda-n/2}$
730 $(-P\pm i0t_1)^{\lambda}$, $p=1$, $q=n-1$	$\dfrac{2^{2\lambda+n+1}\pi^{n/2+1}}{\Gamma(-\lambda-n/2+1)\,\Gamma(-\lambda)}\,\theta(\pm x_1)\,Q_+^{-\lambda-n/2}$
731 $\operatorname{sgn} t_1\,P_+^{\lambda}$, $p=1$, $q=n-1$	$\dfrac{i2^{2\lambda+n}\pi^{n/2}\,\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda-n/2)}\operatorname{sgn} x_1\,Q_+^{-\lambda-n/2}$

ГЛАВА 9

ПРАВОСТОРОННЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА НА $[0, \infty)$

§ 1. Дельта-функция, алгебраические и связанные с ними функции

f	$F[f]$	
732		
$\delta(t)$	1	
733		
$\delta^{(n)}(t-a)$	$e^{-ap}p^n$	
734		
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta(t-na)$	$\frac{1}{1-e^{ap}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
735		
$\delta(t)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta(t-2na)$	$\operatorname{cth} ap$	$\operatorname{Re} p > 0$
736		
$\delta(t)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta(t-2na)$	$\operatorname{th} ap$	$\operatorname{Re} p > 0$
737		
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta(t-na)$	$\frac{1}{p(1-e^{-ap})}$	$\operatorname{Re} p > 0$

f	$F[f]$	
738 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\theta(t-na)$	$\dfrac{1}{p(1+e^{-ap})}$	$\mathrm{Re}\,p>0$
739 $\dfrac{1}{t^{\nu+1}}$ $\nu\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\Gamma(-\nu)\,p^{\nu}$	$\mathrm{Re}\,p>0$
740 $\dfrac{1}{t}$	$-\ln p-\gamma$	$\mathrm{Re}\,p>0$
741 $\dfrac{1}{t^2}$	$p(\ln p+\gamma+1)$	$\mathrm{Re}\,p>0$
742 $\dfrac{1}{t^{n+1}}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-(-1)^n\dfrac{p^n}{n!}[\ln p-\psi(n+1)]=$ $=-(-1)^n\dfrac{p^n}{n!}\left[\ln p+\gamma-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j}\right]$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
743 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{1}{t}$	$\mathrm{Ei}(-ap)-\ln p-\gamma$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$

744 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{1}{t^2}$	$-p\,[\mathrm{Ei}(-ap)-\ln Cp+1]-\dfrac{1}{a}e^{-ap}$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
745 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{1}{t^{n+1}}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{(-1)^n}{n!}p^n\,[\mathrm{Ei}(-ap)-\ln p+\psi(n+1)-$ $-\dfrac{e^{-ap}}{n!\,a^n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}(n-1-j)\,(-ap)^j$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
746 $\dfrac{a}{t\,(a+t)}$	$e^{ap}\,\mathrm{Ei}(-ap)-\ln Cp$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
747 $\dfrac{a^2}{t^2\,(a+t)}$	$-e^{ap}\,\mathrm{Ei}(-ap)+ap\,(\ln Cp-1)+\ln Cp$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
748 $\dfrac{1}{t-a}$	$-e^{-ap}\,\mathrm{Ei}^*(ap)$	$\mathrm{Re}\,p>0$
749 $\dfrac{1}{(t-a)^{n+1}}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\dfrac{(-1)^n}{n!}p^n e^{-ap}\,\mathrm{Ei}^*(ap)+\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{a^n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\,a^j p^j$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
750 $\dfrac{a}{(t-a)\,t}$	$-e^{-ap}\,\mathrm{Ei}^*(ap)+\ln Cp$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$

f	$F[f]$	
751 $\dfrac{a^2}{(t-a)t^2}$	$-e^{-ap}\,\mathrm{Ei}^*(ap)-ap(\ln Cp-1)+\ln Cp$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
752 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{1}{a-t}$	$e^{-ap}[\mathrm{Ei}^*(ap)-\ln Cp]$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
753 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{1}{(a-t)^2}$	$pe^{-ap}[\mathrm{Ei}^*(ap)-\ln Cp+1]-\dfrac{1}{a}$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
754 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{1}{(a-t)^{n+1}}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{p^n}{n!}e^{-ap}[\mathrm{Ei}^*(ap)-\ln p+\psi(n+1)]-$ $-\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{a^n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\,a^jp^j$	$\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$
755 $\theta(t-a)\dfrac{a^{2\nu}}{(t^2-a^2)^{\nu+1/2}}$, $\nu\neq n+\dfrac{1}{2}$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(-\nu+1/2)(ap/2)^{\nu}K_{-\nu}(ap)$	$\mathrm{Re}\,p>0$

756 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\dfrac{a^{2\nu}}{(a^2-t^2)^{\nu+1/2}}$, $\nu\neq n+1/2$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(-\nu+1/2)\,(ap/2)^{\nu}\,[I_{-\nu}(ap)-\mathbf{L}_{-\nu}(ap)]$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
757 $\dfrac{a}{t^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2}[e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)-e^{-ap}\operatorname{Ei}^*(ap)]$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
758 $\dfrac{4a^3}{(t^2-a^2)^2}$	$(ap-1)\,e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)+(ap+1)\,e^{-ap}\operatorname{Ei}^*(ap)$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
759 $\dfrac{a^2}{t\,(t^2-a^2)}$	$-\operatorname{chi}(ap)\operatorname{ch} ap+\operatorname{shi}(ap)\operatorname{sh} ap+\ln Cp$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
760 $\dfrac{a^3}{t^2\,(t^2-a^2)}$	$\operatorname{chi}(ap)\operatorname{sh} ap-\operatorname{shi}(ap)\operatorname{ch} ap-ap\,(\ln Cp-1)$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$

	f	$F[f]$	
761	$\dfrac{a^2}{t(t^2+a^2)}$	$\operatorname{ci}(ap)\cos ap+\operatorname{si}(ap)\sin ap-\ln Cp$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
762	$\dfrac{a^3}{t^2(t^2+a^2)}$	$-\operatorname{ci}(ap)\sin ap+\operatorname{si}(ap)\cos ap+ap(\ln Cp-1)$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
763	$[\theta(t)-\theta(t-2a)]\dfrac{a^{2\nu}}{(2at-t^2)^{\nu+1/2}}$ $\nu\neq n+1/2$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu+1/2)(ap/2)^{\nu}e^{-ap}I_{-\nu}(ap)$	$\operatorname{Re} p>0$
764	$[\theta(t)-\theta(t-2a)]\dfrac{1}{2at-t^2}$	$\dfrac{1}{2a}[\operatorname{Ei}(-2ap)+e^{-2ap}\operatorname{Ei}^*(2ap)-(1+e^{-2ap})\ln Cp]$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$

§ 2. Логарифмические и связанные с ними функции

f	$F[f]$	
765 $\ln t$	$-\dfrac{\ln Cp}{p}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
766 $[\theta(t)-\theta(t-a)]\ln t$	$\dfrac{1}{p}[\mathrm{Ei}(-ap)-\ln Cp-e^{-ap}\ln a]$	$\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$
767 $\theta(t)\ln(t+a)$	$-\dfrac{1}{p}[e^{ap}\mathrm{Ei}(-ap)-\ln a]$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
768 $\theta(t)\ln(t-a)$	$-\dfrac{1}{p}[e^{-ap}\mathrm{Ei}^*(ap)-\ln a]$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
769 $\theta(t)\ln(t^2-a^2)$	$\dfrac{2}{p}[\mathrm{shi}(ap)\,\mathrm{sh}\, ap-\mathrm{chi}(ap)\,\mathrm{ch}\, ap+\ln a]$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
770 $t^{-\nu-1}\ln t$ $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\Gamma(-\nu)\, p^{\nu}[\psi(-\nu)-\ln p]$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
771 $t^{-1}\ln t$	$\dfrac{1}{2}\left[(\ln Cp)^2+\dfrac{\pi^2}{6}\right]$	$\mathrm{Re}\, p > 0$

f	$F[f]$	
772		
$t^{-n-1}\ln t$	$\frac{(-1)^n}{2}\frac{p^n}{n!}\left[(\ln p-\psi(n+1))^2+\frac{\pi^2}{3}-\psi'(n+1)\right]$	$\operatorname{Re} p \geqslant 0$
$n=0, 1, 2, \ldots$		
773		
$t^{-\nu-1}\ln^2 t$	$\Gamma(-\nu)\,p^{\nu}\left\{[\psi(-\nu)-\ln p]^2+\psi'(-\nu)\right\}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$		
774		
$t^{-1}\ln^2 t$	$-\frac{1}{3}(\ln Cp)^3-\frac{\pi^2}{6}\ln Cp+\frac{1}{3}\psi''(1)$	$\operatorname{Re} p > 0$
775		
$t^{-n-1}\ln^2 t$	$\frac{(-1)^n}{3}\frac{p^n}{n!}\{[\psi(n+1)-\ln p]^3+3\,[2\psi'(1)-\psi'(n+1)]\times$	
$n=0, 1, 2, \ldots$	$\times[\psi(n+1)-\ln p]+\psi''(n+1)\}$	$\operatorname{Re} p \geqslant 0$

776 $\dfrac{\ln(t^2+a^2)}{t}$	$\mathrm{ci}^2(ap)+\mathrm{si}^2(ap)-2\ln a\ln Cp$	$\operatorname{Re} p>0$
777 $\dfrac{\ln(t^2+a^2)}{t^2}$	$-p\,[\mathrm{ci}^2(ap)+\mathrm{si}^2(ap)-2\ln a\,(\ln Cp-1)]+$ $+\dfrac{2}{a}[\sin ap\,\mathrm{ci}(ap)-\cos ap\,\mathrm{si}(ap)]$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$
778 $\dfrac{\ln\lvert t^2-a^2\rvert}{t}$	$\mathrm{Ei}(-ap)\,\mathrm{Ei}^*(ap)-2\ln a\ln Cp$	$\operatorname{Re} p>0$
779 $\dfrac{\ln\lvert t^2-a^2\rvert}{t^2}$	$p\,[\mathrm{Ei}(-ap)\,\mathrm{Ei}^*(ap)-2\ln a\,(\ln Cp-1)]+$ $+\dfrac{1}{a}[e^{ap}\,\mathrm{Ei}(ap)-e^{-ap}\,\mathrm{Ei}^*(ap)]$	$\operatorname{Re} p\geqslant 0$

§ 3. Тригонометрические функции [1])

f	$F[f]$
780 $\dfrac{\sin at}{t^{\nu+1}}$ $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$-\Gamma(-\nu)\sqrt{p^2+a^2}\sin\left(\nu \operatorname{arctg}\dfrac{a}{p}\right)$
781 $\dfrac{\cos at}{t^{\nu+1}}$ $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\Gamma(-\nu)\sqrt{p^2+a^2}\cos\left(\nu \operatorname{arctg}\dfrac{a}{p}\right)$
782 $\dfrac{\sin at}{t^{n+1}}$ $n=0, 1, 2.$	$\dfrac{(-1)^n}{n!}(p^2+a^2)^{n/2}\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{a}{p}\cos\left(n\operatorname{arctg}\dfrac{a}{p}\right)+\right.$ $\left.+\left[\dfrac{1}{2}\ln(p^2+a^2)-\psi(n+1)\right]\sin\left(n\operatorname{arctg}\dfrac{a}{p}\right)\right\}$
783 $\dfrac{\sin at}{t}$	$\operatorname{arctg}\dfrac{a}{p}$
784 $\dfrac{\sin^2 at}{t}$	$\dfrac{1}{4}\ln\left(1+\dfrac{4a^2}{p^2}\right)$

785 $\dfrac{\sin^2 at}{t^2}$	$-\dfrac{p}{4}\ln\left(1+\dfrac{4a^2}{p^2}\right)+a\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2a}{p}$
786 $\dfrac{\cos at}{t^{n+1}}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\dfrac{(-1)^n}{n!}(p^2+a^2)^{n/2}\left\{\left[\dfrac{1}{2}\ln(p^2+a^2)-\psi(n+1)\right]\times\right.$ $\left.\times\cos\left(n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{a}{p}\right)-\mathrm{arctg}\,\dfrac{a}{p}\sin\left(n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{a}{p}\right)\right\}$
787 $\dfrac{\cos at}{t}$	$-\dfrac{1}{2}\ln(p^2+a^2)-\gamma$
788 $\dfrac{\cos^2 at}{t}$	$-\dfrac{1}{4}\left[\ln C^4p^2(p^2+4a^2)\right]$
789 $\dfrac{\cos^2 at}{t^2}$	$\dfrac{p}{4}\ln\left[C^4p^2(p^2+4a^2)\right]-p-a\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2a}{p}$
790 $\dfrac{a}{\sin at}$	$-\psi\left(-\dfrac{ip}{2a}+\dfrac{1}{2}\right)-\ln 2aC-i\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\dfrac{\pi p}{2a}$

[1]) Область существования: $\mathrm{Re}\,p>0$.

f	$F[f]$
791 $\dfrac{a}{\cos at}$	$-\dfrac{i}{2}\left[\psi\left(-\dfrac{ip}{4a}+\dfrac{3}{4}\right)-\psi\left(-\dfrac{ip}{4a}+\dfrac{1}{4}\right)\right]+i\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi p}{2a}}$
792 $a\operatorname{tg} at$	$-\dfrac{1}{2}\left[\psi\left(-\dfrac{ip}{4a}+\dfrac{1}{2}\right)-\psi\left(-\dfrac{ip}{4a}\right)\right]+i\left[\dfrac{a}{p}+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi p}{2a}}\right]$
793 $a\operatorname{ctg} at$	$-\psi\left(\dfrac{-ip}{2a}\right)-\ln 2aC-i\left(\dfrac{a}{p}+\dfrac{\pi}{2}\operatorname{cth}\dfrac{\pi p}{2a}\right)$

§ 4. Некоторые специальные функции[1]

f	$F[f]$
794 $J_{-\nu}(at)$ $\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$	$(p^2+a^2)^{-1/2}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{\nu}$
795 $t^{-1}J_{\nu}(at)$ $\nu \neq 0, -1, -2, \ldots$	$\frac{1}{\nu}\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{\nu}$
796 $t^{-2}J_{\nu}(at)$ $\nu \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$	$\frac{a}{2\nu}\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{\nu}\left[\frac{1}{\nu+1}\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}+\frac{1}{\nu-1}\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right]$
797 $t^{-n-1}J_{\nu}(at)$ $\nu \neq n, n-1, n-2, \ldots$	$\frac{a^n}{2^n}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{-\nu-n}\sum_{j=0}^{n}\frac{C_n^j\,(p+\sqrt{p^2+a^2})^{2j}}{(\nu+n-j)(\nu+n-j-1)\ldots(\nu-j)}$

[1] $a \in C^1$; область существования: $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|$.

	f	$F[f]$
798	$t^{-1}J_0(at)$	$-\ln\left[\frac{C}{2}\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)\right]$
799	$t^{-2}J_0(at)$	$p\ln\left[\frac{C}{2}\left(p+\sqrt{p^2-a^2}\right)\right]-\sqrt{p^2+a^2}$
800	$t^{-1}J_1(at)$	$a\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)$
801	$t^{-2}J_1(at)$	$-\frac{a}{2}\left[\ln\frac{C}{2}+\ln\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)+\frac{p}{p+\sqrt{p^2+a^2}}-\frac{1}{2}\right]$
802	$t^{-1}J_2(at)$	$\frac{1}{2}\frac{a^2}{\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)^2}$
803	$t^{-2}J_2(at)$	$\frac{1}{3!}\left(2\frac{p^2+a^2}{p+\sqrt{p^2+a^2}}-p\right)$
804	$t^{-n}J_n(at)$	$\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{-2n+1}\times$ $\times\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2j}\frac{1}{j!\,(2n-j-1)!}$

805 $t^{-n-1}J_n(at)$ $n=1, 2, 3, \ldots$	$-\left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \ln\left[\frac{C}{2}\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)\right]+$ $+\left(\frac{a}{2}\right)^n n! \left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{-2n}\times$ $\times\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!\, j!\, (2n-j)!}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^2$
806 $t^{-3/2}J_{1/2}(at)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left\{p \operatorname{arctg}\frac{a}{p}+a\left[\frac{1}{2}\ln(p^2+a^2)+\gamma-1\right]\right\}$
807 $t^{-1/2}J_{-1/2}(at)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[\frac{1}{2}\ln(p^2+a^2)+\gamma\right]$
808 $t^{-3/2}J_{-1/2}(at)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left\{p\left[\frac{1}{2}\ln(p^2+a^2)+\gamma-1\right]-a \operatorname{arctg}\frac{a}{p}\right\}$
809 $Y_\nu(at)$ $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$	$\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^\nu \cos\nu\pi-\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^\nu\right]\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}\sin\nu\pi}$
810 $\pi Y_1(at)$	$-\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}-\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)-\frac{2}{a}\ln\frac{2}{aC}$

f	$F[f]$
811 $\pi Y_{2n}(at)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n}+\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n}\right]\times$ $\times\ln\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}+\frac{2}{a}\sum_{j=0}^{n-1}C_{n+j}^{2j+1}\times$ $\times\left[\ln\frac{2}{a}+\psi(n+j+1)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j+1}$
812 $\pi Y_{2n+1}(at)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n+1}-\right.$ $\left.-\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n+1}\right]\ln\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}-$ $-\frac{2}{a}\sum_{j=0}^{n}C_{n+j}^{2j}\left[\ln\frac{2}{a}+\psi(n+j+1)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j}$
813 $t^{-1}Y_{\nu}(at)$ $\nu\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{\nu}\cos\nu\pi+\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{\nu}\right]\frac{1}{\nu\sin\nu\pi}$

814 $\pi t^{-1} Y_{2n}(at)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{1}{2n}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n}-\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)\right]\times$ $\times\ln\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}-\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+j}C_{n+j}^{2j}\times$ $\times\left[\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2n}+\psi(n+j)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j}$
815 $\pi t^{-1} Y_{2n+1}(at)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n+1}+\right.$ $\left.+\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n+1}\right]\ln\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}+$ $+\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n+1+j}C_{n+1+j}^{2j+1}\times$ $\times\left[\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2n+1}+\psi(n+1+j)\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j+1}$

f	$F[f]$
816 $\pi t^{-2} Y_{2n}(at)$ $n=0, 1, 2, \ldots$	$$-\frac{1}{4n^2-1}\left\{\sqrt{p^2+a^2}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n}+\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n}\right]+\frac{p}{2n}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n}-\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n}\right]\right\}\ln\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}+\frac{a}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n+j)(n+1+j)}C_{n+j+1}^{2j+1}\times\left[\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2n+1}+\psi(n+j+1)-\frac{1}{2n}\frac{n-j}{n+j}+\frac{1}{n}\frac{n-j}{4n^2-1}\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j+1}$$

817 $\pi t^{-2} Y_{2n+1}(at)$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$-\frac{1}{(2n+1)^2-1}\left\{\sqrt{p^2+a^2}\left[\left(\frac{a}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n+1}-\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n+1}\right]+\frac{p}{2n+1}\left[\left(\frac{}{p+\sqrt{p^2+a^2}}\right)^{2n+1}+\left(\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}\right)^{2n+1}\right]\right\}\ln\frac{p+\sqrt{p^2+a^2}}{a}-\frac{a}{2}\sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{(n+j)(n+j+1)}C_{n+j+1}^{2j}\times\left[\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2(n+1)}+\psi(n+j+1)-\frac{1}{2n+1}\frac{n+1-j}{n+j}+\frac{2}{2n+1}\times\frac{n+1-j}{(2n+1)^2-1}\right]\left(\frac{2}{a}p\right)^{2j}$

ЛИТЕРАТУРА

Абдурахманов Р.

[1] О преобразовании Гильберта в пространстве основных и обобщенных функций. ДАН Таджик. ССР 14, 10 (1971), 3—6.

Аккаури (Akhaury S. K.)

[1] Abelian theorems for a distributional generalized Laplace transform. Ranchi Univ. Math. J. 3 (1972), 82—89.

Альбрихт и Мусиляк (Albrycht J., Musielak J.)

[1] On some new classes of functions and distributions. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 12 (1964), 391—396.

Андраде (Andrade G. A.)

[1] Sur une façon de définir, sans dualité, l'espace des distributions tempérées sur la droite et la transformation de Fourier. Portug. Math. 18, 3—4 (1959), 125—153.

Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.

[1] Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. «Мир», М., 1976.

Арсак (Arsac J.)

[1] Transformation de Fourier et théorié des distributions. Dunod, Paris, 1961.

Бакиевич Н. И.

[1] Преобразование Меллина обобщенных функций некоторых классов. В сб. «Вычисл. методы и матем. физика», вып. 1, М., 1975, 126—148.

[2] Свертка обобщенных функций из некоторых подпространств пространства $\mathcal{S}'_1$ и ее преобразование Лапласа. Матем. физика (Сб. трудов МГПИ им. В. И. Ленина), вып. 3, 1976, 3—19.

Бельтрами и Волерс (Beltrami E. J., Wohlers M. R.)

[1] Distributional boundary value theorems and Hilbert transforms. Arch. Rational Mech. Anal. 18 (1965), 304—309.

[2] Distributions and the boundary values of analytic functions. Academic Press, New York, 1966.

Бенедетто (Benedetto J. J.)

[1] The Laplace transform of generalized functions. Canadian J. Math. 18 (1966), 357—374.

[2] Analytic representation of generalized functions. Math. Z. 97 (1967), 303—319.

Беренстейн и Достал (Berenstein C. A., Dostal M. A.)

[1] Fourier transforms of the Beurling classes $\mathcal{D}_\omega$, $\mathcal{E}_\omega$. Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 963—967.

Бест (Best R.W.B.)
[1] Fourier and Hilbert transforms of generalized functions of one real variable. Rijhuizen rept. FOM-inst. plasmafyz. **30** (1966).
Блейк (Blake R. G.)
[1] Fourier sine and cosine transforms of distributions. Caribbean J. Sci. Math. **1**, 2 (1969), 5—8.
Боас и Уиддер (Boas R. P., Widder D. V.)
[1] The iterated Stiltjes transform. Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 1—72.
Брааксма и Шуитман (Braaksma B. L. J., Schuitman A.)
[1] Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalized functions. SIAM J. Math. Anal. **7**, 6 (1976), 771—798.
Бремерман (Bremermann H. J.)
[1] Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., «Мир», 1968.
Бремерман и Дюран (Bremermann H. J., Durand L.)
[1] On analytic continuation, multiplication and Fourier transformations of Schwartz distributions. J. Math. Phys. **2**, 2 (1961), 240—258.
Брестерс (Bresters D. W.)
[1] On distributions connected with quadratic forms. SIAM J. Appl. Math. **16**, 3 (1968), 563—581.
Брычков Ю. А.
[1] Асимптотические разложения обобщенных функций I, II, III. Теорет. и матем. физика **5**, 1 (1970), 98—108; **15**, 3 (1973), 375—381; **23**, 2 (1975), 191—198.
[2] Об асимптотических разложениях обобщенных функций. Матем. заметки **12**, 2 (1972), 131—138.
[3] Асимптотические разложения обобщенных функций. Приложение к книге Земаняна [15], 359—372.
Брычков Ю. А., Широков Ю. М.
[1] О некоторых предельных формулах для обобщенных функций. Матем. заметки **2**, 1 (1967), 81—90.
[2] Об асимптотическом поведении преобразований Фурье. Теорет. и матем. физика **4**, 3 (1970), 301—309.
Буи (Bouix M.)
[1] Les fonctions généraliséer ou distributions. Masson, Paris, 1964.
Варма (Varma R. S.)
[1] On a generalization of Laplace integral. Proc. Nat. Acad. Sci. India **A20** (1951), 209—216.
Владимиров В. С.
[1] О некоторых обобщениях теоремы Палея—Винера—Шварца. Abstr. comm. I. M. C. Stockholm, ser. **3** (1962), 120.
[2] О функциях, голоморфных в трубчатых конусах. Изв. АН СССР, сер. матем. **27**, 1 (1963), 75—100.
[3] Методы теории функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964.
[4] Задача комплексного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных. Изв. АН СССР, сер. матем. **29**, 4 (1965), 807—834.

[5] Обобщенные функции с носителями, ограниченными со стороны выпуклого острого конуса. Сиб. матем. ж. 9, 5 (1968), 1238—1247.
[6] Обобщения интегрального представления Коши—Бохнера. Изв. АН СССР, сер. матем. 33, 1 (1969), 90—108.
[7] К теории линейных пассивных систем. ДАН 186, 6 (1969).
[8] Линейные пассивные системы. Теор. и матем. физ. 1, 1 (1969), 67—94.
[9] К теории линейных пассивных систем. Матем. заметки 8, 2 (1970), 265—271.
[10] О представлении Коши—Бохнера. Изв. АН СССР, сер. матем. 36, 3 (1972), 534—539.
[11] Многомерные линейные пассивные системы. В книге: «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа». (Сб. статей, посв. 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972, 121—134.
[12] Преобразование Лапласа обобщенных функций медленного роста. В книге: «Современные проблемы науки», т. I, М., «Наука», 1973, 61—83.
[13] Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука», 1976.
[14] Уравнения математической физики, изд. 3-е, М., «Наука», 1976.

Владимиров В. С., Жаринов В. В.
[1] О представлении типа Иоста—Лемана—Дайсона. Теор. и матем. физ. 3, 3 (1970), 305—319.

Вотье (Vauthier J.)
[1] Comportement asymptotique des transformées de Fourier des distributions à support compact. C. R. Acad. Sci. 270, 14 (1970), A854—A856.
[2] Comportement asymptotique des transformées de Fourier des distributions à support compact. Lect. Notes Math. 336 (1973), 125—133.

Гарнир (Garnir H. G.)
[1] Sur la transformation de Laplace des distributions. C. R. Acad. Sc. Paris 234 (1952), 583—585.

Гарнир и Мунстер (Garnir H. G., Munster M.)
[1] Transformation de Laplace des distributions de L. Schwartz Bull. Soc. Roy. Sci. Liege, 33e Année (1964), 615—631.

Гельфанд М. М., Шилов Г. Е.
[1] Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. Успехи матем. наук 8, 14 (1953), 3—51.
[2] Обобщенные функции и действия над ними (Обобщенные функции, вып. 1), изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
[3] Пространства основных и обобщенных функций (Обобщенные функции, вып. 2), М., Физматгиз, 1958.

Гординг (Gårding L.)
[1] Transformation de Fourier des distribution homogènes. Bull. Soc. Math. France 89, 4 (1961), 381—428.

Гросс (Gross K. I.)
[1] Generalized Fourier transforms of distributions. J. London Math. Soc. 43 (1968), 398—400.

Гхош (Ghosh P. K.)
[1] A note on Laplace transform of distributions. Bull. Calcutta Math. Soc. 53 (1963), 193—195.

Гюттингер (Güttinger W.)
[1] Generalized functions and dispersion relations in physics, Fortschr. Physik, 14 (1966), 483—602.

Дежан (Dejean Y.)
[1] Transformation de Fourier des distribution homogènes. Sémin. Bourbaki 1962—1963 15, 1 (1964), 242/01—242/14.

Джоунс (Jones D. S.)
[1] Some remarks on Hilbert transforms. J. Inst. Math. Appl. 1, 3 (1965), 226—240.
[2] Generalized functions. McGraw-Hill, New York, 1966.
[3] Generalized transforms and their asymptotic behaviour. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A265 (1969), 1—43.
[4] A modified Hilbert transform. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A69 (1970/71), 45—76.

Дийксма и де Снoo (Dijksma A., de Snoo H.S.V.)
[1] Distributional Watson transformation. SIAM J. Math. Anal. 5, 6 (1974), 888—892.

Диткин В. А., Прудников А. П.
[1] Интегральные преобразования. В книге: «Итоги науки. Математический анализ», ВИНИТИ АН СССР, М., 1967, 7—82.
[2] Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., «Наука», 1972.

Дитциан (Ditzian Z.)
[1] Inversion of a class of convolution transforms of generalized functions. Canad. Math. Bull. 13 (1970), 181—186.
[2] Inversion of the Weierstrass transformation for generalized functions. J. Math. Anal. Appl. 32 (1970), 644—650.

Достал (Dostal M.)
[1] On Fourier image of the singular support of a distribution. Czechosl. Math. J. 16, 2 (1966), 231—237.

Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.
[1] Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области. Матем. сборник 102, 3 (1977), 372—390.

Дьюб (Dube L. S.)
[1] An inversion of the S_2-transform for generalized functions. Pacific J. Math. 61, 2 (1975), 383—390.
[2] On finite Hankel transformation of generalized functions. Pacific J. Math. 62, 2 (1976), 365—378.

Дьюб и Пэнди (Dube L. S., Pandey J. N.)
[1] On the Hankel transform of distributions. Tôhoku Math. J. 27, 3 (1975), 337—354.

Жаринов В. В.
[1] Преобразование Лапласа одного класса обобщенных функций. Приложение к книге Земаняна [15], 373—399.
[2] О преобразовании Лапласа обобщенных функций. Тр. Моск. энерг. ин-та, вып. 201 (1974), 46—55.

Завьялов Б. И.
[1] Автомодельная асимптотика электромагнитных форм-факторов и поведение их фурье-образов в окрестности светового конуса. Теорет. и матем. физика, **17**, 2 (1973), 178—188.

Зелезный (Zielezny Z.)
[1] On Fourier transforms of distributions with one sided bounded carriers. Studia Math. **25**, 1 (1964/65), 73—80.

Земанян (Zemanian A. H.)
[1] Distribution theory and transform analysis. McGraw-Hill, New York, 1965.
[2] Inversion formulas for the distributional Laplace transformation. J. SIAM Appl. Math. **14**, 1 (1966), 159—166.
[3] The distributional Laplace and Mellin transformations, SIAM J. Appl. Math. **14**, 1 (1966), 41—59.
[4] The Weierstrass transformation of certain generalized functions. Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 5 (1967), 682—684.
[5] A distributional Hankel transformation. SIAM J. Appl. Math. **14**, 3 (1966), 561—576.
[6] The Hankel transformation of certain distributions of rapid growth, SIAM J. Appl. Math. **14**, 4 (1966), 678—690.
[7] The convolution transformation of certain generalized functions and its inversion. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 4 (1966), 725—727.
[8] Some abelian theorems for the distributional Hankel and K-transformations. SIAM J. Appl. Math. **14**, 6 (1966), 1255—1265.
[9] A distributional K-transformation. SIAM J. Appl. Math. **14**, 6 (1966), 1350—1365; **15**, 3 (1967), 765.
[10] A solution of a division problem arising from Bessel-type differential equations, SIAM J. Appl. Math. **15**, 4 (1967), 1106—1111.
[11] Hankel transforms of arbitrary order, Duke Math. J. **34**, 4 (1967), 761—769.
[12] A generalized Weierstrass transformation. SIAM J. Appl. Math. **15**, 4 (1967), 1088—1105.
[13] A generalized convolution transformation. SIAM J. Appl. Math. **15**, 2 (1967), 324—346.
[14] An introduction to generalized functions and the generalized Laplace and Legendre transformations. SIAM Rev. **10**, 1 (1968) 1—24.
[15] Интегральные преобразования обобщенных функций. «Наука», М., 1974.
[16] The Kontorovich—Lebedev transformation for distributions of compact support and its inversion. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77**, 1 (1975), 139—143.

Земанян и Тьюарсон (Zemanian A. H., Tewarson R. P.)
[1] The numerical evaluation of distributional transforms. SIAM J. Numer. Anal. **4**, 2 (1967), 271—282.

Иино (Iino R.)
[1] Sur la transformation de Fourier et la dérivée fonctionelle. Proc. Japan Acad. **37**, 5 (1961), 246—249.

Иосида (Yosida Y.)
[1] Distribuciones inducidas de la transformada de Laplace y sus applicationes. Boll. Acad. cienc, fis., mat. y natur. **26**, 72 (1966—67), 77—78.

Исихара (Ishihara T.)
[1] On generalized Laplace transforms. Proc. Japan Acad. **37** (1961), 556—561.
[2] On $L^{(k)}$-transform and the generalized Laplace transform. Proc. Japan. Acad. **37** (1961), 562—565.
Кармихаэль (Carmichael R. D.)
[1] Distributions of exponential growth and their Fourier transforms. Duke Math. J. 40, 4 (1973), 765—783.
[2] Analitic representation of the distributional finite Fourier transform. SIAM J. Math. Anal. **5**, 5 (1974), 737—761.
Кениг и Земанян (König H., Zemanian A. H.)
[1] Necessary and sufficient conditions for a matrix distribution to have a positive-real Laplace transform. SIAM J. Appl. Math. **13**, 4 (1965), 1036—1040.
Кобер (Kober H.)
[1] On fractional integrals and derivatives. Quart. J. Math. (Oxford) **11** (1940), 193—211.
Коломбо и Лавуан (Colombo S., Lavoine J.)
[1] Transformation de Laplace et de Mellin. Formulaires. Mode d'utilisation. Mem. Sci. Math. **169** (1972).
Комеч А. И.
[1] Уравнения с однородными ядрами и преобразования Меллина обобщенных функций. Теорет. и матем. физ. 27, 2 (1976), 149—162.
Кореваар (Korevaar J.)
[1] Distributions defined from the point of view of applied mathematics. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Ser. A, **58** (1955), 368—389, 483—503, 663—674.
[2] Pansions and the theory of Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 53—101.
Кох (Koh E. L.)
[1] The Hankel transformation of negative order for distributions of rapid growth. SIAM J. Math. Anal. **1**, 3 (1970), 322—327.
[2] The n-dimensional distributional Hankel transformation. Can. J. Math. 27, 2 (1975), 423—433.
Кох и Земанян (Koh E. L., Zemanian A. H.)
[1] The complex Hankel and I transformations of generalized functions. SIAM J. Appl. Math. **16**, 5 (1968), 945—957.
Коэн (Cohen M.)
[1] On the value of a distribution at a point. Math. Z. **122** (1971), 101—103.
Крачунас (Cračiunas P.)
[1] On the Fourier transform of distributions I, II. Bull. Inst. Politehn. Iaşi (N. S.), **16** (20), 3—4 (1970), 91—97, 97—102.
Кристенсен, Мейлбо и Паульсен (Kristensen P., Mejlbo L., Poulsen E. T.)
[1] On a Fourier transform in infinitely many dimensions. Lect. Notes Math. **31** (1967), 187—196.
Куин (Queen W. C.)
[1] A generalized Weierstrass transformation for the case of several independent variables. SIAM J. Math. Anal. **2**, 1 (1971), 52—63.

Купер (Cooper J. L. B.)
[1] Laplace transformations of distributions. Canad. J. Math. **18**, 6 (1966), 1325—1332.
Курреж (Courrege Ph.)
[1] Transformation de Fourier pour les fonctions homogenes de degré $-n$ sur $\mathbf{R}^n$. Sémin. Choquet. Fac. sci. Paris, **7**, 1967—1968 (1969), A2/01—A2/15.
Кучера (Kučera J.)
[1] Fourier L_2-transforms of distributions. Czechosl. Math. J. **19** (94) (1969), 143—189.
[2] Laplace L_2-transforms of distributions. Czechosl. Math. J. **19** (94) (1969), 181—189.
Лавуан (Lavoine J.)
[1] Calcul Symbolique, distributions et pseudo-fonctions. Centre Nat. Rech. Sci., Paris, 1959.
[2] Transformées de Fourier inverses de $e^{-i2\pi t_0\sqrt{q^2+M^2}}$ et de $e^{-i2\pi t_0\sqrt{q^2+M^2}}/2\sqrt{q^2+M^2}$, $q^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2$, fonctions singulières de l'électrodinamique. C. R. Acad. Sci. Paris **250**, 13 (1960), 2318—2320.
[3] Transformation de Fourier des pseudo-fonctions. Centre Nat. Rech. Sci., Paris, 1963.
[4] Sur des théorèmes abéliens et taubériens de la transformation de Laplace. Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. **A** (N. S.), **4** (1966), 49—65.
[5] Théorèmes abéliens et taubériens pour la transformation de Laplace des distributions. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Ser. I, **89**, 4 (1975), 469—479.
Лавуан и Мисра (Lavoine J., Misra O. P.)
[1] Théorèmes abéliens pour la transformation de Stiltjes des distributions. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **279** (1974), 99—102.
Лайтхилл (Lighthill M. J.)
[1] Introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press. London, 1958.
Лафлин (Laughlin T. A.)
[1] A table of distributional Mellin transforms, College of Engineering Tech., Rept. **40**, State University, Stony Brook, New York, June 15, 1965.
Лемуан (Lemoine C.)
[1] Fourier transforms of homogeneous distributions. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat. **26**, 1 (1972), 117—149.
Леонард (Leonard P.)
[1] Transformation de Laplace partielle des distributions de L. Schwartz. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **34** (1965), 188—193.
Ли (Lee W. Y.)
[1] On spaces of type $\mathscr{H}_\mu$ and their Hankel transformations. SIAM J. Math. Anal. **5**, 2 (1974), 336—348.
[2] On Schwartz's Hankel transformation of certain spaces of distributions. SIAM J. Math. Anal. **6**, 2 (1975), 427—432.
Ливерман (Liverman T. P. G.)
[1] Generalized functions and direct operational methods. Vol. 1, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Л и з о р к и н П. И.
[1] Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(\mathbf{R}^n)$. Теоремы вложения. Матем. сб. **60** (102), 3 (1963), 325—353.

Л и о н с (Lions J. L.)
[1] Supports dans la transformation de Laplace, J. Analyse Math. **2** (1952—1953), 369—380.
[2] Operateurs de transmutation singuliers et equations d'Euler Poisson Darboux généralisées. Rend. Seminario Math. Fis. Milano, **28** (1959), 3—16.

Л о в е р ь е (Lauwerier H. A.)
[1] The Hilbert problem for generalized functions. Arch. Rat. Mech. Anal. **13**, 2 (1963), 157—166.

Л о я с е в и ч (Łojasiewicz L.)
[1] Sur la valeur et la limite d'une distribution dans une point. Studia Math. **16**, 1 (1957), 1—36.

М а й е р с (Meyers D. E.)
[1] An imbedding space for Schwartz distributions. Pacific J. Math. **11** (1961), 1467—1477.

М а к-Б р а й д (McBride A. C.)
[1] A theory of fractional integration for generalized functions. SIAM J. Math. Anal. **6**, 3 (1975), 583—599.

М а н г а д (Mangad M.)
[1] Asymptotic expansions of Fourier transforms and discrete polyharmonic Green's functions. Pacific J. Math. **20**, 1 (1967), 85—98.

М а р и н е с к у, Т у д о р (Marinescu G., Tudor C.)
[1] Sur la transformation de Laplace des distributions. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **12** (1967), 1323—1327.

М а р к о в (Marcov N.)
[1] Les transformées de Fourier de quelques distributions. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **16**, 4 (1971), 517—527.

М а р к о в и ч и (Marcovici J.)
[1] Asupra transformatei Laplace unilaterale. An. Univ. Craiova. Ser. 4a, 1 (1970), 373—375.

М а р т и н о и Т р е в (Martineau A., Trèves F.)
[1] Éléments de la théorie des espaces vectoriels topologiqus et des distributions. Fasc. I. Éléments de la théorie des distributions. Réunis, Paris, 1964.

М а р ь я н о в и ч (Marjanović M.)
[1] On a limit in the theory of distributions. Prace Mat. **10** (1966), 9—13.

М а т у ш у (Matušů J.)
[1] Das Fouriersche Integral und die Distributionen von J. G. Mikusinski. Aplicace Mat. **11**, 5 (1966), 362—384.

М и к у с и н с к и й (Mikusinski J.)
[1] Une introduction élémentaire de la transformation de Fourier dans la theorie des distributions. Mathematika, **8** (31), 1 (1936), 83—90.

М и л л е р (Miller J. B.)
[1] Generalized function calculi for the Laplace transform. Arch. Rat. Mech. Anal. **12** (1963), 409—419.

Милтон (Milton E. O.)
[1] Asymptotic behaviour of transforms of distributions. Trans. Amer. Math. Soc. **172** (1972), 161—176.
[2] Fourier transforms of odd and even tempered distributions. Pacific J. Math. **50**, 2 (1974), 563—572.
Мисра (Misra O. P.)
[1] Some Abelian theorems for the distributional Meijer—Laplace transformation. Indian J. Pure Appl. Math. **3**, 2 (1972), 241—247.
[2] Some Abelian theorems for distributional Stiltjes transformation. J. Math. Anal. Appl. **39**, 3 (1972), 590—599.
Митрович (Mitrović D.)
[1] Plemelj formulas and analytic representation of distributions. Glasnik Mat., Ser. III **3** (23) (1968), 231—239.
Мунстер (Munster M.)
[1] Transformation de Laplace des distributions de L. Schwartz. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 34 (1965), 28—33.
Мусиляк (Musielak J.)
[1] On some spaces of functions and distributions I, II. Studia Math. **21** (1961/62), 195—202, 237—244.
Неймарк (Neymark M.)
[1] On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions. Ark. Math. **7** (1969), 577—594.
Ноаги и Матеи (Noaghi T., Matei J.)
[1] Transformata Melin în staţiul distribuţiilor. Lucr. şti. Inst. mine Petroşani., ser. 4, **6** (1969), 87—94.
Ортон (Orton M.)
[1] Hilbert transforms, Plemelj relations and Fourier transforms of distributions. SIAM J. Math. Anal. **4**, 4 (1973), 656—670.
Патак (Pathak R. S.)
[1] Transformée de Varma de fonctions généralisées. Bull. Sci. Math. **99**, 1 (1975), 3—16.
[2] A representation theorem for a class of Stiltjes transformable generalized functions. J. Indian Math. Soc. (N. S.) **38** (1974), 1—4 (1975), 339—344.
[3] A distributional generalized Stiltjes transformation. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **20**, 1 (1976), 15—22.
Патак и Пэнди (Pathak R. S., Pandey J. N.)
[1] A distributional Hardy transformation. Proc. Cambridge Phil. Soc. **76**, 1 (1974), 247—262.
[2] The distributional Hardy transformation. Carleton Math. Series, № 105, Dep. of Math., Carleton Univ., Ottawa, 1974.
[3] The G-transform of generalized functions. Там же, № 135, 1976.
Перри (Perry W. L.)
[1] Inversion of general integral transforms. SIAM J. Math. Anal. **5**, 5 (1974), 764—773.
Петерсен (Petersen B. E.)
[1] On the Laplace transform of a temperate distribution supported by a cone. Proc. Amer. Math. Soc. **35**, 1 (1972), 123—128.
Прайс (Price D. B.)
[1] On the Laplace transform for distributions. SIAM J. Math. Anal. **6**, 1 (1975), 49—80.

Пэнди (Pandex J. N.)
[1] Complex inversion for the generalized Hankel convolution transformation. SIAM J. Appl. Math. 17, 5 (1969), 835—848.
[2] An extension of Haimo's form of Hankel convolution. Pacific J. Math. 28, 3 (1969), 641—651.
[3] A representation theorem for a class of convolution transformable generalized functions. SIAM J. Math. Anal. 2, 2 (1971), 286—289.
[4] The generalized Weierstrass—Hankel convolution transform, SIAM J. Appl. Math. 20, 1 (1971), 110—123.
[5] The dual Poisson—Lagerre transform of a class of generalized functions. SIAM J. Math. Anal. 3, 2 (1972), 211—229.
[6] On the Stiltjes transform of generalized functions. Proc. Camb. Phil. Soc. 71, 1 (1972), 85—96.

Пэнди и Земанян (Pandey J. N., Zemanian A. H.)
[1] Complex inversion for the generalized convolution transformation, Pacific J. Math. 25, 1 (1968), 147—157.
[2] An extension of Tanno's form of the convolution transformation. Tôhoku Math. J. (2) 20, 4 (1968), 425—430.

Рао (Rao G. L. N.)
[1] Abelian theorems for a distributional generalized Stiltjes transform. Rev. Real Acad. Ci. Exact. Fís. Natur. Madrid 70, 1 (1976), 97—108.

Румье (Roumieu Ch.)
[1] Sur la transformation de Fourier des distributions généralisées. C. R. Acad. Sci. Paris 248 (1959), 511—513.

Руни (Rooney P. G.)
[1] On the inversion of the Gauss transformation. Canad. J. Math. 9 (1957), 459—464.
[2] A generalization of an inversion formula for the Gauss transformation. Canad. Math. Bull. 6 (1963), 45—53.

Смирнов В. А.
[1] Асимптотические разложения обобщенных функций, сингулярных на световом конусе. Теорет. и матем. физика 29, 3 (1976), 336—346.

Соловьев М. А.
[1] О преобразовании Фурье—Лапласа обобщенных функций. Теорет. и матем. физика 15, 1 (1973), 3—19.

Сривастав и Парихар (Srivastav R. P., Parihar K. S.)
[1] Dual integral equations—a distributional approach. SIAM J. Appl. Math. 16, 1 (1968), 126—133.

Страбл (Struble R. A.)
[1] Representations of Fourier transforms for distributions. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 2 (1974), 191—206.

Суорц (Swartz Ch.)
[1] A generalized function calculus based on the Laplace transform. Studia Math. 28, 1 (1966), 17—30.
[2] The space of Laplace transformable distributions. Port. Math. 29, 1—2 (1970), 87—93.

Темпл (Temple G.)
[1] The theory of generalized functions. Proc. Roy. Soc., Ser. A228 (1955), 175—190.

Тильман (Tillman H. G.)
[1] Randverteilungen Analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. 59, 1 (1953), 61—83.
[2] Distributionen als Randverteilungen Analytischer Funktionen II. Math. Z. 76, 1 (1961), 5—21.
[3] Darstellung der Schwartschen Distributionen durch analytishe Funktionen. Math. Z. 77, 2 (1961), 106—124.
Титчмарш (Titchmarsh E. C.)
[1] Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
Трионе (Trione S. E.)
[1] Sopra la transformata di Hankel distribuzionale. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Math. Natur (8), 57 (1974), 5 (1975), 316—320.
Тудор (Tudor C.)
[1] Transformarea Laplace a distribuţiilor. Stud. Cerc. Math. 19, 10 (1967), 1521—1536.
[2] On Ishihara's definition of Laplace transform. Rev. Romaine Math. Pures Appl. 13, 7 (1968), 1039—1041.
Уиддер (Widder D. V.)
[1] The Laplace transform. Princeton Univ. Press, Princeton, N. Y., 1946.
Уомброд (Warmbrod G. K.)
[1] The distributional finite Fourier transform. SIAM J. Appl. Math. 17, 5 (1969), 930—956.
Уестон (Weston J.)
[1] Operational calculus and generalized functions. Proc. Royal Soc. London, Ser. A250 (1959), 460.
Феньо (Fenyo I.)
[1] Hankel-Transformation Verallgemeinerter Funktionen, Mathematica 8 (31), 2 (1966), 235—242.
Фишер (Fisher B.)
[1] A note on the Fourier transform of generalized functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. 70, 1 (1971), 49—51.
Фомин С. В.
[1] Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье. УМН 23, 2 (1968), 215—216.
Форристол и Инграм (Forristall G. Z., Ingram J. D.)
[1] Evaluation of distributions useful in Kontorovich—Lebedev transform theory. SIAM J. Math. Anal. 3, 4 (1972), 561—566.
Фын (Fung Kang)
[1] Generalized Mellin transforms. Acta Math. Sinica 7, 2 (1957), 242—267.
Харди (Hardy G. H.)
[1] Some formulae in the theory of Bessel function. Proc. London Math. Soc. 23 (1925), IX.
Хаякава (Hayakawa K.)
[1] Some results on the Fourier image of special classes of distributions. Osaka J. Math. 9, 3 (1972), 499—512.
Хиршман и Уиддер (Hirschmann I. I., Widder D. V.)
[1] Преобразования типа свертки, М., ИЛ, 1958.

Холевински и Хэймо (Cholewinski F. M., Haimo D. T.)
[1] The Weierstrass Hankel convolution transform. J. Analyse Math. 17 (1966), 1—58.
[2] The dual Poisson—Lagerre transform. Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 271—300.
Хорват (Horvath J.)
[1] Transformadas de Hilbert de distributions. Segundo Symposium de Matematicas, Buenos Aires, Imprenta y Casa Editora «Coni», 1954.
Хсу (Hsu Hsing-Yuan)
[1] Distributional Watson transforms. Canad. J. Math. 24, 6 (1972), 1191—1197.
Чирну (Cîrnu M.)
[1] Asupra transormăru Fourier a distribuţiilor şi funcţiilor distribuţionale. Stud cerc. mat. Acad. RSR, 19, 10 (1967), 1402—1405.
[2] Sur la transformation de Fourier des fonctions distributionelles composables. Rav. Roumaine Math. Pures Appl. 13 (1968), 25—34.
[3] Transformarea Laplace a funcţiilor distribuţionale şi ultradistribuţionale III—V. Stud. Cerc. Mat. 24, 5 (1972), 335—339, 729—735; 25, 6 (1973), 827—831.
Шварц А. (Schwartz A. L.)
[1] An inversion theorem for Hankel transforms. Proc. Amer. Math. Soc. 22, 3 (1969), 713—715.
Шварц Л. (Schwartz L.)
[1] Theorie des Distributions, Vol. I, II, Hermann, Paris, 1957, 1959.
[2] Transformation de Laplace des distributions. Seminaire Mathematique de l'Universite de Lund. Tome Supplémentaire dedié à M. Riesz (1952), 196—206.
[3] Causalité et analyticité, Anais de Academia Brasileira de Ciencias 34 (1962), 13—21.
Шварц Ф. (Schwarz F.)
[1] Asymptotic expansions of Fourier integrals with light cone singularities. J. Math. Phys. 13, 10 (1972), 1621—1634.
Щельмецкая (Szelmeczka J.)
[1] On Laplace transformation in space $\mathscr{D}_{L_1}$. Rocz. Pol. tow. mat., Ser. 1, 15 (1971), 57—59.
Шилов Г. Е.
[1] Математический анализ. Второй спецкурс. «Наука», 1965.
Эрдейи (Erdélyi A.)
[1] On fractional integration and its application to the Hankel transforms. Quart J. Math. (Oxford), 11 (1940), 293—303.
[2] Fractional integrals of generalized functions. J. Austral Math. Soc. 14, 1 (1972), 30—37.
[3] Fourier transforms of integrable generalized functions. Philips Res. Repts. 30 (1975).
[4] Fractional integrals of generalized functions. Lect. Notes Math. 457 (1975), 151—170.
Эрдейи и Мак-Брайд (Erdélyi A., McBride A. C.)
[1] Fractional integrals of distributions. SIAM J. Math. Anal. 1, 4 (1970), 547—557.

Эренпрайс (Ehrenpreis L.)
[1] Solution of some problems of division I. Amer. J. Math. **76**, 4 (1954), 883—903.
[2] Analytic functions and the Fourier transforms of distributions I. Ann. of Math. **63**, 1 (1956), 129—159.
Эскин Г. И.
[1] Обобщение теоремы Палея — Винера — Шварца. УМН **16**, 1 (97), (1961), 185—188.
Ямагата (Yamagata H.)
[1] On a Fourier invariant distribution space. Proc. Japan Acad. **38**, 3 (1962), 95—100.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

[1] Cambel J., Laplaceova transformácia zevšeobecnych funkcií. «Sb. blectrotechn. fak. SVŠT. Bratislava» (1971), 199—209, 215, 219, 223.
[2] Homentcovschi D., Le calcul des transformées Fourier de quelques distributions. Bull. math. Soc. sci. math. RSR **19** (67), 1—2 (1975), 57—66.
[3] Ghosh J. D., On a generalized Stiltjes transform of a class of generalized functions. Bull. Cal. Math. Soc. **67** (1975), 75—85.
[4] Mosco O., Transformada de Fourier y distributions. Cuadernos Inst. Mat. «Beppo levi», 1972.
[5] Pandey J. N., Huges E., An approximate Hilbert transform and its inversion. Tôhoku Math.J. **28**, 4 (1976), 497—509.
[6] Rao G. L. N., The *n*-dimensional generalized Laplace transform of certain distributions. J. Indian Math. Soc. **39**, 1—4 (1975), 219—22.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абдурахманов 78
Альбрихт 17
Антосик 16, 18
Арсак 16

Бельтрами 75
Бенедетто 30
Беренстейн 17
Бессель 60—66
Блейк 17
Боас 74
Брааксма 93
Бремерман 16, 20, 21, 42, 75, 76
Брестерс 17
Брычков 17, 22

Варма 7, 88
Ватсон 55, 79, 93
Вейерштрасс 7, 80—87
Вейль 92, 96
Винер 20
Владимиров 7, 8, 16, 17, 30, 42, 75
Волерс 75
Вотье 16

Ганкель 7, 50—58, 64, 85—87
Гарнир 30, 42
Гельфанд 8, 16, 19, 53, 75, 77
Гильберт 7, 68, 75—79
Гординг 16
Гхош 30
Гюттингер 16, 78

Джоунс 16, 17, 30, 75, 78
Диткин 59, 66—68, 88
Дитциан 82, 98
Достал 16, 17
Дрожжинов 17
Дьюб 58, 74
Дюран 16, 75

Жаринов 42

Завьялов 17
Зелезный 16, 21
Земанян 8, 10, 16, 17, 29—33, 34—36, 39, 42, 44, 46, 49, 50, 52—54, 59, 62, 63, 66, 68, 80, 98

Ино 16
Исихара 29, 30, 42

Кармихаэль 16, 17
Кобер 96
Коломбо 30, 49
Комеч 45
Конторович 5, 50, 66, 67
Кореваар 16, 30
Кох 52, 54, 56, 57, 62, 63
Коши 75, 77
Крачунас 16
Кристенсен 17
Куин 83, 84
Купер 30
Курреж 16
Кучера 17, 30

Лавуан 8, 16, 17, 30, 40, 49, 71, 72
Лагерр 7, 90, 91
Лайтхилл 16
Лаплас 5—8, 29—44, 88, 89
Лафлин 49
Лебедев 5, 50, 66, 67
Лемуан 16, 30
Леонард 30, 42
Ли 53, 57
Лизоркин 94
Лионс 30, 42, 52
Лиувилль 92, 96
Ловерье 75
Ломмель 66
Лоясевич 72

Мак-Брайд 95, 96
Мангад 17
Маринеску 29
Марков 17
Мартино 16
Матеи 45

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Матушу 16
Мейер 50, 59, 88
Мейлбо 17
Меллин 7, 44—49, 93
Микусинский 16, 18
Миллер 30
Милтон 17
Мисра 71, 72
Мунстер 30, 42
Мусиляк 17

Неймарк 30, 42
Ноаги 45

Ортон 75

Парихар 49
Патак 64, 70, 72, 88
Паульсен 17
Перри 45
Петерсен 42
Прайс 39
Прудников 59, 66—68, 88
Пуассон 7, 90, 91
Пэли 20
Пэнди 58, 64, 69, 86, 90, 98

Риман 92, 96
Румье 17
Руни 84

Сикорский 16, 28
Смирнов 17, 25
Соловьев 32
Сривастав 49
Стилтьес 7, 68—73, 98
Страбл 20
Струве 66
Суорц 30

Темпл 16, 21
Титчмарш 75
Трев 16
Тудор 29, 30

Уестон 16, 30
Уиддер 71, 74, 80, 98
Уиттекер 88

Феньо 53
Фишер 17
Фомин 17
Фурье 7, 8, 16—30, 35, 36, 42
Фын 44

Харди 50, 64—66
Хаякава 17
Хиршман 80, 98
Холевински 85, 90
Хсу 55, 79
Хэймо 85, 90

Чирну 16, 20

Шварц А. 57, 58
Шварц Л. 8, 16, 17, 20, 29, 30, 35, 39, 42, 93
Шварц Ф. 17
Шельмецкая 30
Шилов 8, 16, 19, 20, 53, 75, 77
Широков 17
Шуитман 93

Эрдейи 16, 21, 92, 95, 96
Эренпрайс 16

Ямагата 17

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бесселя преобразование 50

Варма преобразование 89
— —, аналитичность 89
— —, единственность 89
— —, формула обращения **89**
Вейерштрасса — Ганкеля преобразование 86
— — —, аналитичность 86
— — —, асимптотика 86
— — —, формула обращения **87**
Вейерштрасса преобразование **81**, 83
— —, аналитичность 82
— —, единственность 82
— —, многомерное 84
— — —, формула обращения **85**
— —, преобразование операций **83**
— —, связь с преобразованием Лапласа 83
— —, сходимости абсцисса **81**
— —, — область 81
— —, формулы обращения **82**, **84**

Ганкеля преобразование **51**—53
— —, аналитичность **52**, **55**
— —, единственность **55**
— — комплексное 55
— — многомерное 56
— — обобщенных функций произвольного роста 52, 53
— —, оценка 52, **55**
— —, преобразование операций 51, 57
— —, формула обращения 51, **53**, **55**
Ганкеля — Шварца преобразование 57—59
— —, асимптотика 59
— —, гладкость **59**
— —, оценка 58
— —, формула обращения **59**
Гильберта преобразование **75**, 77
— —, аналитичность **76**
— —, асимптотика 76
— —, формула обращения 76

Дробный интеграл 93, **95**, 96
— — обобщенный **96**—**98**

Изоморфизм 10
I-преобразование 63

I-преобразование, аналитичность 63
—, оценка **63**
—, преобразование операций 64
—, связь с преобразованием Ганкеля 64
—, формула обращения **64**

Конторовича — Лебедева преобразование 67
— — —, формула обращения 67
Коши представление обобщенной функции 75
K-преобразование 59, **60**
—, аналитичность 61
—, единственность 62
—, оценка 62
—, преобразование операций 61
—, сходимости абсцисса **61**
—, — область 61
—, формулы обращения **62**

Лапласа преобразование двустороннее 35, **38**, 40
— — —, аналитичность 36, **38**
— — —, единственность 36, **39**
— — —, преобразование операций 36, 38
— — —, — свертки **39**
— — —, сходимости абсцисса 35, **38**
— — —, — область 35, **38**
— — —, — полоса 35, 38
— — левостороннее 34
— — —, аналитичность 34
— — —, единственность 34
— — —, преобразование операций **34**
— — —, сходимости абсцисса **34**
— — —, — область 34
— — многомерное 42
— — —, преобразование операций **42**
— — —, труба сходимости 44
— — правостороннее 31
— — —, аналитичность 31
— — —, единственность 31
— — —, преобразование операций **32**
— — —, — свертки 39, 43
— — —, сходимости абсцисса 31, **33**
— — —, — область 31, 33
— — —, — полуплоскость 31, 33

Мейера преобразование — см. K-преобразование

Меллина преобразование 45, 47
— —, аналитичность 47
— —, единственность 48
— — обратное 45
— —, преобразование операций 48
— —, — свертки 49
— —, связь с преобразованием Лапласа 49
— —, формулы обращения 47, 48
Мультинорма 9

Носитель обобщенной функции 11
—, ограниченный слева (справа) 11

Обобщенная функция 10
— — медленного роста 14
— — регулярная 12
— — финитная 11
Обычная функция 11
Основные функции 10

Пуассона — Лагерра преобразование 91
— — —, аналитичность 91
— — —, асимптотика 91
— — —, гладкость 91
— — —, формула обращения 92

Распределение 12

Сопряженное пространство 9
Сопряженный оператор 10
Стилтьеса преобразование 69, 70
— —, аналитичность 70
— —, асимптотика 70
— —, гладкость 69
Стилтьеса преобразование обобщенное 71
— — —, аналитичность 71
— — —, асимптотика 72, 73
— — —, оценка 72
— — —, формула обращения 70
— —, формула обращения 63
— —, — — комплексная 70
S_2-преобразование 74
—, гладкость 74
—, единственность 74
—, формула обращения 74
Счетно-мультинормированное пространство 9

Ультрараспределение 14

Фурье — Лапласа преобразование 35, 38, 42
Фурье преобразование 17
— —, асимптотические свойства 17, 22—28
— —, — —, связь с носителем 17
— — бесконечного числа переменных 17
— — в секвенциальной теории 17, 18, 21
— — в $\mathscr{D}'$ 19
— — в $\mathscr{S}'$ 17
— — в $\mathscr{Z}'$ 19
— — конечное 17
— — обобщенное 21, 22
— —, преобразование операций 18, 20
— —, разные формы определения 18, 19
Фурье синус-преобразование 17

Харди преобразование 64, 65
— —, асимптотика 65
— —, гладкость 65
— —, формула обращения 66

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

$\mathscr{B}$ 21 $\mathscr{B}'$ 21
$\mathscr{D}$ 12 $\mathscr{D}'$ 12
$\mathscr{D}_+$ 13 $\mathscr{D}'_+$ 13
$\mathscr{D}_K$ 11 $\mathscr{D}'_K$ 12
$\mathscr{D}'_L$ 13 $\mathscr{D}'_R$ 13
$\mathscr{E}$ 14 $\mathscr{E}'$ 14
$\mathscr{F}_p$ 97 $\mathscr{F}'_p$ 97
$\mathscr{F}_{p,\mu}$ 97 $\mathscr{F}'_{p,\mu}$ 97
G_α 86 G'_α 86
$\mathscr{G}_\alpha$ 64 $\mathscr{G}'_\alpha$ 65
$\hat{\mathscr{G}}_\alpha$ 65 $\hat{\mathscr{G}}'_\alpha$ 65
$\mathscr{G}_{\alpha,\delta}$ 90 $\mathscr{G}'_{\alpha,\delta}$ 90
$\mathscr{G}^\delta_\alpha$ 91 $(\mathscr{G}^\delta_\alpha)'$ 91
H_α 86 H'_α 86
$\mathscr{H}_\mu$ 50, 51 $\mathscr{H}'_\mu$ 51
$\mathscr{H}_\mu(R^n)$ 56 $\mathscr{H}'_\mu(R^n)$ 56
$\mathscr{H}_{a,\delta}$ 58 $\mathscr{H}'_{a,\delta}$ 58
$\mathscr{J}_p$ 95 $\mathscr{J}'_p$ 96
$\mathscr{J}_{pl}$ 95
$\mathscr{J}_{\mu,a}$ 54 $\mathscr{J}'_{\mu,a}$ 54
$\mathscr{Y}_{a,b}$ 68 $\mathscr{Y}'_{a,b}$ 68
$\mathscr{K}_{\mu,a}$ 59, 60 $\mathscr{K}'_{\mu,a}$ 60
$\mathscr{L}_a$ 32, 33 $\mathscr{L}'_a$ 32, 33
$\mathscr{L}(w)$ 33 $\mathscr{L}'(w)$ 33
$\mathscr{L}_{a,b}$ 36, 37, 43 $\mathscr{L}'_{a,b}$ 37
$\mathscr{L}(w, z)$ 36, 37, 43 $\mathscr{L}'(w, z)$ 37
$\mathscr{M}_{a,b}$ 46 $\mathscr{M}'_{a,b}$ 46
$\mathscr{M}(u, v)$ 46 $\mathscr{M}'(u, v)$ 46
$\mathscr{O}_\alpha$ 76 $\mathscr{O}'_\alpha$ 77
$\mathscr{P}$ 94
$\tilde{\mathscr{P}}$ 94 $\tilde{\mathscr{P}}'$ 94
$\mathscr{P}_{\alpha,\delta}$ 91 $\mathscr{P}'_{\alpha,\delta}$ 91
S_α 69 S'_α 69
$\mathscr{S}$ 13 $\mathscr{S}'$ 13
$\mathscr{S}_+$ 14 $\mathscr{S}'_+$ 14
$\mathscr{T}_\nu$ 57 $\mathscr{T}_\nu$ 58
$\check{\mathscr{T}}_\nu$ 57 $\check{\mathscr{T}}'_\nu$ 58
$\mathscr{U}$ 77 $\mathscr{U}'$ 77
$\mathscr{U}_\infty$ 78 $\mathscr{U}'_\infty$ 78
$\mathscr{V}_a$ 88 $\mathscr{V}'_a$ 88
$\mathscr{V}_H$ 75 $\mathscr{V}'_H$ 75
$\mathscr{V}_\infty$ 78
$\mathscr{W}_{a,b}$ 80 $\mathscr{W}'_{a,b}$ 80
$\mathscr{W}(u, v)$ 81 $\mathscr{W}'(u, v)$ 81
$\mathscr{W}_\mu$ 83 $\mathscr{W}'_\mu$ 83
$\mathscr{W}_\mu(R^n)$ 84 $\mathscr{W}'_\mu(R^n)$ 84
$\mathscr{Y}_\alpha$ 71 $\mathscr{Y}'_\alpha$ 71
$\mathscr{Z}$ 14 $\mathscr{Z}'$ 14

СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

$\mathscr{D}'$ 13 $\mathscr{J}'_{\mu,a}$ 54
$\mathscr{D}'_K$ 12 $\mathscr{L}'_{a,b}$ 37, 43
$\mathscr{F}'_{p,\mu}$ 97 $\mathscr{S}'$ 14
$\mathscr{G}'_{\alpha,\delta}$ 92 S'_α 70
$\mathscr{V}'_a$ 89

Юрий Александрович Брычков,
Анатолий Платонович Прудников

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

М., 1977 г., 288 стр.

Редактор *Т. И. Кузнецова.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *Н. Д. Дорохова.*

Сдано в набор 25/IV 1977 г. Подписано к печати 18/VIII 1977 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. Физ. печ. л. 9. Условн. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 13,3. Тираж 19 000 экз. Т-04229. Цена книги 95 коп. Заказ № 1484.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28.

Отпечатано во 2-й тип. изд-ва «Наука». Зак. 2821.